Розглянуто рішення задачі фільтрації рідини через основу земляної гідротехнічної споруди за допомогою методу математичного та чисельного моделювання аномальних дифузійних процесів на основі застосування і розвитку апарату варіаційних нерівностей

Ключові слова: аномальні дифузійні процеси, математичне моделювання, варіаційні нерівності

Предложено решение задачи фильтрации жидкости через основание земляного гидротехнического сооружения с помощью метода математического и численного моделирования аномальных диффузионных процессов, основанного на применении и развитии аппарата вариационных неравенств

Ключевые слова: аномальные диффузионные процессы, математическое моделирование, вариационные неравенства

The problem decision of a liquid filtration through the bottom of soil hydroengineering structure by using the mathematical and numerical modeling of anomalous diffusion processes, based on the application and development of a variation inequalities apparatus is offered

Keywords: anomalous diffusion processes, mathematical modeling, variation inequalities

УДК 517.972.5+519.217.4.001.57

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРОПИТКИ ГРУНТОВ В ОСНОВАНИЯХ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

С.А. Положаенко
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой
Кафедра компьютерных систем управления
Одесский национальный политехнический университет
пр. Шевченко, 1, г. Одесса, Украина, 65044
Контактный тел.: 066-748-59-91
E-mail: polozhaenko@mail.ru

С.Д. Кузниченко
Кандидат географических наук, доцент
Кафедра информационных технологий
Одесский государственный экологический университет
ул. Львовская, 15, г. Одесса, Украина, 65016
Контактный тел.: (0482) 32-67-59, 096-557-52-15
E-mail: kuznichenko_mail@ukr.net

Введение

Исследования, о которых идет речь в статье, относятся к области прикладной математики. Известные в настоящее время методы математического моделирования, а также значительный класс средств численной программно-аппаратной реализации позволяют эффективно решать широкий круг теоретических и практических задач исследования распространенных диффузионных процессов. Наряду с этим существует класс диффузионных процессов, которые характеризуются аномальностью протекания физических явлений и отличаются повышенной сложностью их исследования. При этом аномальность проявляется, прежде всего, в нарушении линейного закона фильтрации – закона Дарси [1]. Интерес к указанной совокупности процессов объясняется тем, что они носят не исключительный характер, а составляют обычное явление для определенных классов систем "жидкость – пористая среда". Важно отметить тот факт, что аномальный характер протекания процесса диффузии может быть обусловлен не только собственными свойствами диффундируемой компоненты (например, вязкопластическим поведением), а и приобретением этих свойств в результате взаимодействия с физической средой.

Решение задач моделирования и идентификации аномальных процессов диффузии связано с рядом принципиальных сложностей как постановочного, так и вычислительного характера. Причиной сложностей являются: нелинейный характер исследуемых процессов; сложность геометрии пространственной области моделирования и ее границ; ограниченность вектора измерений пространства состояний процесса и числа точек приложения управляющих воздействий; высокие размерности результирующих конечномерных аналогов математической модели. Указанные проблемы требуют не только развития, но и разработки новых методов исследования аномальных диффузионных процессов, например, их математической формализации на основе аппарата вариационных неравенств. Получаемые при этом математические модели обеспечивают высокую степень адекватности изменяющемуся характеру протекающих физических явлений: в терминах вариационных неравенств корректно и полно описываются стационарные, а также нестационарные – равновесные, неравновесные или скачкообразные – процессы.

Постановка проблемы

Важной является проблема разработки методов численной реализации задач моделирования и идентификации аномальных процессов диффузии как самостоятельный аспект теории и практики вычислительной математики. Создание специальных компьютерно-ориентированных средств, а также их апробация при решении промышленно значимых прикладных задач. Отметим, что к важным практическим приложениям аномальных процессов диффузии, прежде всего, относятся такие, которые развиваются в пластовых геологических системах: фильтрация высокопарафиновых нефтей; водонапорный режим разработки нефтяных месторождений, характеризующийся образованием "застойных зон"; просачивание грунтовых вод через сложноструктурированные пластовые горизонты и т.д.

Анализ предшествующих исследований

Известен широкий круг фундаментальных работ, посвященных теории и практике использования вариационных неравенств для исследования качественно сложных физических явлений [1-6]. Несмотря на это, определяющей остается актуальность теоретических исследований и практических применений данного математического аппарата как основы при разработке вычислительных методов для моделирования и идентификации физических процессов в прикладных задачах.

С этой целью в [7-9] были предложены методы численного моделирования аномальных диффузионных процессов на основе развития аппарата вариационных неравенств. Вопросы создания программно-алгоритмических и компьютерных средств для решения прикладных задач рассмотрены в [10].

Формирование целей статьи

Используя в качестве инструментальной базы методы, изложенные в [7-10], рассмотрим пример применения предложенных подходов к моделированию аномальных диффузионных процессов в условиях реального промышленного объекта. Целью настоящей статьи является решение задачи просачивания грунтовых вод через основание земляного гидротехнического сооружения с помощью метода математического и численного моделирования аномальных диффузионных процессов, основанного на аппарате вариационных неравенств.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим земляное гидротехническое сооружение (бассейн) для которого построим математическую модель фильтрации жидкости через его основание. Выполним адаптацию данной математической модели к реальным условиям и проведем ее численное исследование, что важно на этапе проектирования гидротехнического сооружения для оценки возможного влияния пропитки на динамику уровня грунтовых вод. При разработке математической модели будем использовать расчетную схему, представленную на рис.1 (для простоты предлагается симметричность схемы бассейна).

Рис. 1. Схема пропитки грунта под основанием бассейна

По физике протекающих процессов данная модель описывает фильтрацию жидкости в скелете пористой среды. Особенностью ее является то, что поверхность раздела между влажной (пропитанной) и сухой частями грунта под основанием бассейна рассматривается как некоторая мембрана с односторонней проводимостью. Такое предположение вытекает из условия, что грунт под основанием бассейна имеет пусть малые, но конечные значения пористости и проницаемости [4]. В этом случае микроструктуирование грунта обусловливает существенно односторонний характер градиента пропитки под основанием бассейна.

Математически адекватным описанием данного физического процесса может служить аппарат вариационных неравенств, применяемый для построения математической модели реологии аномальных жидкостей [8].

Задача пропитки (фильтрации) ставится для бассейна, ограниченного с боковых сторон непроницаемыми плотинами, и достаточно протяженного по пространственной координате z_1 (т.е. предполагается выполненным условие $L \gg l$). Грунт под основанием бассейна имеет известные физические характеристики: пористость $m(z)$ и проницаемость $k(z)$ (рассматривается линейный случай). Основой для построения математической модели рассматриваемого процесса явились модели предложенные в [8, 9].

Предполагается, что задача рассматривается в прямоугольнике $R = \varphi(z)$, $z = [z_1, z_2]$, который является поперечным сечением под основанием плотины. Неизвестной в задаче является (в поперечном сечении) влажная часть $\Omega \subset R$ грунта. Формализуем постановку задачи и приведем ее к вариационному неравенству.

Пусть $L, h_L, h_0, H \in R$ — геометрические размеры пространственной области, причем $L > 0$, $0 < h_0 < H$, $0 < h_L < H$. Необходимо найти функцию $z_2 = f(z_1)$, $0 \le z_1 \le L'$, с $f(0) = h_0$ и $f(z_1) > h$, представляющую собой уравнение поверхности раздела влажной и сухой частей плотины ($L' = 0{,}5L$ - ввиду симметричности схемы бассейна). При решении поставленной задачи воспользуемся функцией пьезометрического напора жидкости

$$u(z), \quad \forall z \in \bar{\Omega},$$

где $\bar{\Omega}$ – замыкание Ω (т.е. $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \Sigma$);
Σ – граница области Ω.

Данное замечание следует из условия $u(z) \equiv f(z_1)$, причем, для неизвестной части Γ общей границы Σ, можно записать

$$\Gamma : z_2 = f(z_1), \quad 0 < z_1 < L'. \tag{1}$$

Для определения множества функций, на котором будем искать решение задачи, введем в рассмотрение функцию $v(z) = u(z) - f(z_1)$ и вариацию $\zeta(z) = \min[u(z) - f(z_1)]$, непрерывные на $\bar{\Omega}$ и обращающиеся в нуль на границе Γ. Запишем очевидные соотношения

$$\int_R \left(\frac{\partial v}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_1} + \frac{\partial v}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} \right) dz = \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_1} + \frac{\partial v}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} \right) dz =$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_1} + \frac{\partial u}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} \right) dz_1 dz_2 - \int_\Omega \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} dz.$$

Первый член в последнем выражении тождественно равен нулю. Тогда окончательно можно записать

$$-\int_\Omega \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} dz_1 dz_2 = -\int_R I_\Omega \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} dz,$$

где I_Ω - характеристическая функция в Ω, причем она тождественно равна нулю везде на $R \setminus \Omega$, т.е. последний интеграл не равен нулю только в области Ω.

Из приведенных соотношений очевидно равенство

$$-\left\{ \frac{\partial^2 [u - f(z_1)]}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 [u - f(z_1)]}{\partial z_1^2} \right\} = \frac{\partial}{\partial z_2} I_\Omega \ \text{ в } R. \tag{2}$$

Задача (2) интегрируется

$$\omega(z) = \int_0^{f(z_1)} \{u(z) - f(z_1)\} dz_2, \quad \forall z \in \Omega$$

или, с учетом ранее принятых обозначений, имеем

$$-\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z_2^2} \right) = -I_\Omega \ \text{ в } R,$$

а значит,

$$-\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z_1^2}(v - \omega) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z_2^2}(v - \omega) \right] \geq -(v - \omega) \tag{3}$$

почти везде в R для любой $v(z) \geq 0$ в R.

Таким образом, приходим к выводу, что в качестве выпуклого множества K допустимых функций для искомого вариационного неравенства необходимо взять множество неотрицательных $\omega(z)$ с соответствующими граничными условиями:

$$\omega(0, z_2) = \begin{cases} \frac{1}{2L'}(h_0{}^2 - z_2^2), & 0 \leq z_2 \leq h_0, \\ 0, & h_0 < z_2 \leq H, \end{cases} \tag{4}$$

$$\omega(L', z_2) = \begin{cases} \frac{1}{2L'}(h_L{}^2 - z_2^2), & 0 \leq z_2 \leq h_L, \\ 0, & h_L < z_2 \leq H, \end{cases} \tag{5}$$

$$\omega(z_1, 0) = \frac{1}{2l} h_L^2 + \left[\left(h_0^2 - h_L^2 \right) z_1 \right], \quad 0 \leq z_1 \leq L'. \tag{6}$$

Таким образом, получено решение поставленной задачи в следующем виде. Для совокупности $\{f, u\}$ при $u(z) \in H^1(\Omega)$ (где $H^1(\Omega)$ — гильбертово пространство непрерывно дифференцируемых функций) и гладкой $f(z_1)$, функция $\omega(z)$ является решением следующей задачи Коши

$$\begin{aligned} &\omega(z) = 0 \ \text{ на } \Gamma : z_2 = f(z_1), \ 0 < z_1 < L', \\ &\frac{\partial \omega(z)}{\partial z_2} = \frac{\partial [u(z) - f(z_1)]}{\partial z_2} \ \text{ в } \Omega; \ \omega(z) = 0, \forall z \in R \setminus \Omega, \\ &\omega(z) \in K : \int_R \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial z_1} \left[\frac{\partial (v - \omega)}{\partial z_1} \right] + \frac{\partial \omega}{\partial z_2} \left[\frac{\partial (v - \omega)}{\partial z_2} \right] \right\} dz \geq \\ &\geq -\int_R (v - \omega) dz, \ \forall v(z) \in K, \end{aligned} \tag{7}$$

где K определяет множество допустимых функций, причем функция $\omega(z)$ - представляет собой искомое решение поставленной задачи реологии.

Неравенство (7), дает возможность отыскать неизвестную границу $\Gamma : z_2 = f(z_1), \ 0 < z_1 < L'$, представляющую собой поверхность раздела между влажной и сухой частями грунта под основанием бассейна.

Выполним адаптацию вариационного неравенства (7) для решения прикладных задач. Функцию пьезометрического давления $u(z)$ выразим через физические величины и пространственные параметры, поддающиеся непосредственному измерению,

$$u(z) = l + \frac{m}{\gamma} P(z), \tag{8}$$

где l - уровень жидкости в бассейне (заметим, что математически $l \equiv z_2$ или $l = Cz_2$);
m - пористость грунта;
γ - удельный вес жидкости;
$P(z)$ - функция давления жидкости в бассейне.

С учетом (8) запишем (7) относительно искомой функции $f(z_1)$

$$f(z_1) \in K : \int_R \left\{ \left\{ \left[\frac{\partial C z_2}{\partial z_1} + \frac{m}{\gamma} \frac{\partial P(z)}{\partial z_1} \right] - \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} \right\} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z_1} - \left\{ \left[\frac{\partial C z_2}{\partial z_1} + \frac{m}{\gamma} \frac{\partial P(z)}{\partial z_1} \right] - \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} \right\} \right\} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \left[C + \frac{m}{\gamma} \frac{\partial P(z)}{\partial z_2} \right] - \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} \right\} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z_2} - \left\{ \left[C + \frac{m}{\gamma} \frac{\partial P(z)}{\partial z_2} \right] - \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} \right\} \right\} \right\} dz \geq$$

$$\geq \int_R \left\{ v - \left[C z_2 - f(z_1) \right] \right\} dz \quad \forall v(z) \in K, \tag{9}$$

которое дополним граничным условием задачи Коши

$$f(z_1)=0 \quad \forall z \in R \setminus \Omega . \tag{10}$$

Неравенство (9) для граничного условия вида (10) решается с помощью подхода, предложенного в [10].

Результаты исследования и их анализ. Используем расчетную схему (рис. 1) и соотношения (8) - (10) для моделирования процесса пропитки грунта под основанием бассейна прямоугольной формы при исходных данных в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для моделирования процесса пропитки грунта под основанием гидротехнического сооружения (бассейна)

№ п/п	Наименование параметра	Обозначение	Единица измерения	Значение
1	Длина бассейна	L	м	100
2	Ширина бассейна	B	м	$B_1 = 50$ $B_2 = 80$
3	Шаг дискретизации по пространственной координате z_1	Δz_1	м	5
4	Уровень жидкости в бассейне	l	м	$l_1 = 3$ $l_2 = 5$
5	Пористость грунта	m	%	15
6	Удельный вес жидкости	γ	кг/м^3	1000
7	Удельное давление жидкости	P_y	кг/м^2	1000

Моделирование выполним для двух значений уровня жидкости в бассейне l_1 и l_2, а также для разных соотношений длины L и ширины B бассейна. Результаты моделирования приведены на рис. 2.

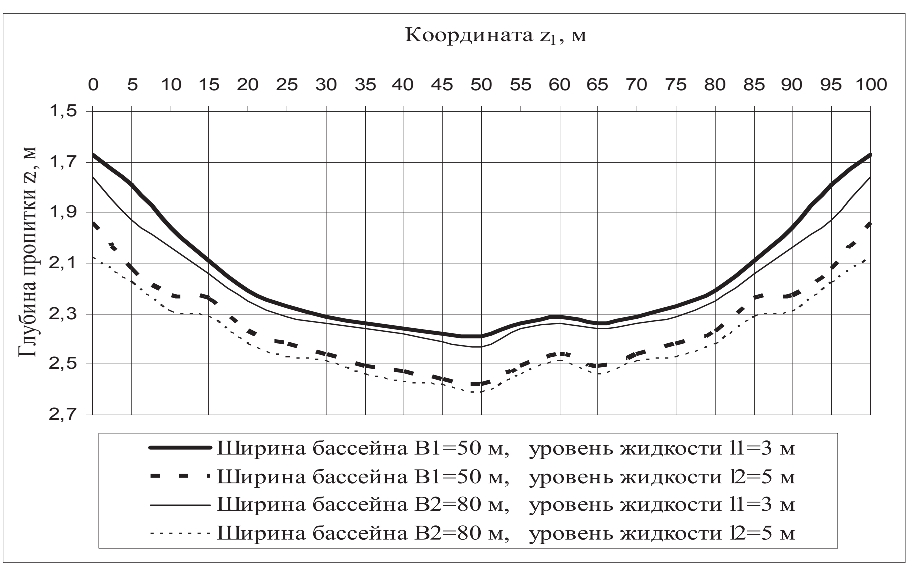

Рис. 2. Результаты моделирования процесса пропитки грунта под основанием гидротехнического сооружения (бассейна)

Выводы

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы. Соотношение длины L и ширины B бассейна практически не влияет на глубину пропитки z_2, но заметно оказывает влияние на форму границы $\Gamma: z_2 = f(z_1)$, $0 < z_1 < L'$ (с ростом ширины B бассейна граница Γ имеет меньший “завал” вблизи стенок бассейна). Значительно большее влияние на глубину пропитки z_2 оказывает уровень жидкости в бассейне l. Поэтому проводимые исследования должны быть учтены при анализе уровня грунтовых вод в месте строительства гидротехнического сооружения. Моделирование дает возможность оценить безопасный уровень жидкости в бассейне, обеспечивающий надежную сухую грунтовую прослойку между влажной пропитанной частью под его основанием и горизонтами грунтовых вод (последние могут быть определены пробными бурениями или моделированием).

Литература

1. Бернадинер М.Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / Бернадинер М.Г., Ентов В.М.- М.: Наука, 1975.- 199с.
2. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Дюво Г., Лионс Ж.-Л. - М.: Наука, 1980.- 383с.
3. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии.- М.: Мир, 1989.- 494с.
4. Киндерлерер Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Киндерлерер Д., Стампаккья Г.. - М.: Мир. 1983. - 256 с.
5. Згуровский М.З. Анализ и управление односторонними физическими процесами / Згуровский М.З., Новиков А.Н. - К.: Наукова думка, 1996.- 326с.
6. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости.- М.: Мир, 1964.- 269с.
7. Положаенко С.А. Вариационный подход к решению задач реологии аномальных жидкостей // Наук. вісн. Одес. держ. політехн. ун-ту. - 1999. - № 7. - С. 126 – 131.
8. Положаенко С.А. Модель процесса аномальной реалогии с односторонней проводимостью границы // Тр. Одеського политехн. Ун-та. - Одеса, 2000. - Вып. 1(10). - С.124 - 129.
9. Положаенко С.А. Математическая модель фильтрации грунтовых вод для класса гидротехнических земляных сооружений // Вісн. Одеської держ. академії будівництва та архітектури. - Одеса, 2005. - Вип. 17. - С.206 - 210.
10. Верлань А.Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов /Верлань А.Ф., Положаенко С.А., Сербов Н.Г. - К.: Наукова думка, 2011. - 416 с.