

## ФИЛЬТРОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

*В статье исследуется возможность применения методов цифровой фильтрации в дискретном вейвлет-анализе на основе матричных представлений преобразования Хаара.*

**Ключевые слова:** *фильтровая реализация, децимация фильтр с конечной импульсной характеристикой, преобразование Хаара, КИХ-фильтр.*

**Введение.** Вейвлет-анализ позволяет обнаружить сильно локализованные изменения сигналов в отличие от фурье-анализа, который отражает поведение сигнала на всем временном отрезке его наблюдения [1, 2].

Недостаточно рассмотренными являются вопросы, связанные с фильтровой реализацией вейвлет-преобразования [1, 2, 3, 4, 5].

**Материалы и методы исследования.** В статье рассматривается возможность фильтровой реализации вейвлет-преобразования на основе матричных представлений преобразования Хаара [1].

**Цель данной статьи** – исследование возможностей фильтровой реализации прямых и обратных дискретных вейвлет-преобразований.

### Изложение основного материала.

#### Матричные представления $H_v$ , $A_v$ и $D_v$

Преобразования Хаара позволяют применить методы цифровой фильтрации в дискретном вейвлет-анализе [1].

$$H_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{D}_v = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Поскольку умножение матрицы на вектор происходит по правилу «строка на столбец», то элементы любой строки матрицы (1) можно рассматривать как коэффициенты КИХ-фильтра (фильтра с конечной импульсной характеристикой) 1-го порядка, которые являются отсчетами его импульсной характеристики. В результате свертки (умножения с накоплением) импульсной характеристики и входного сигнала получаются выходные отсчеты фильтра, как раз являющиеся коэффициентами усреднения и детализации. Однако в любом цифровом фильтре после вычисления очередного выходного отсчета входной сигнал сдвигается на одну временную позицию. Но элементы строк матрицы (1) сдвинуты друг относительно друга сразу на две позиции вправо. Это означает, что в выходном сигнале фильтра по сравнению с преобразованием (1) появляется каждый второй «лишний» отсчет, который необходимо убрать. Изъятие каждого второго отсчета выполняется посредством децимации с коэффициентом 2. Структурная схема КИХ-фильтра, соответствующего строкам матрицы (1), представлена на рис. 1.

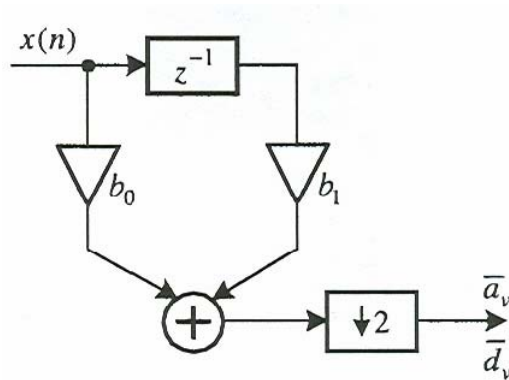


Рис. 1 – КИХ-фильтр, реализующий преобразование Хаара.

Для подматрицы (2) коэффициенты фильтра должны иметь значения  $b_0 = 1/\sqrt{2}$ ,  $b_1 = 1/\sqrt{2}$ . Для подматрицы (3)  $b_0 = -1/\sqrt{2}$ ,  $b_1 = 1/\sqrt{2}$ . Перестановка элементов строк матриц для получения коэффициентов фильтра обусловлена структурой вектора-столбца отсчетов входного сигнала  $\bar{x}$ . В этой структуре более поздние по времени отсчеты находятся ниже предыдущих, что заставляет менять местами коэффициенты фильтра ради сохранения традиционных способов описания цифровых цепей.

Можно утверждать, что первый фильтр является ФНЧ (фильтром нижних частот), а второй – ФВЧ (фильтром высоких частот). Их ненормированные амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) изображены на рис. 2.

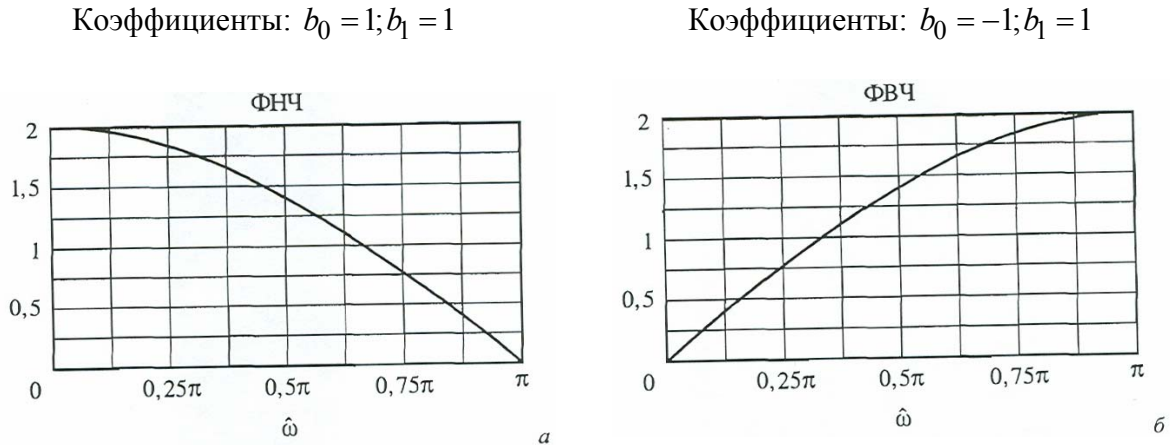


Рис. 2 – АЧХ фильтров для преобразования Хаара.

Таким образом, многошаговый процесс вейвлет-преобразования Хаара можно изобразить в виде структурной схемы, приведенной на рис. 3 и использующей цепочку низкочастотных и высокочастотных КИХ-фильтров с системой децимации на выходе каждого из них.

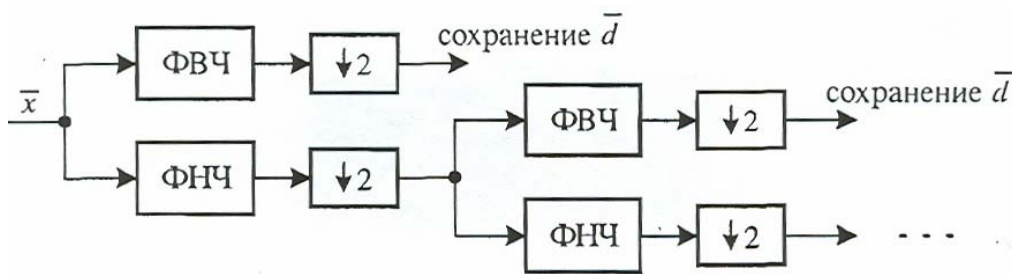


Рис. 3 – Фильтровая реализация вейвлет-преобразования.

Для вектора входного сигнала, содержащего четыре отсчета, операция цифровой фильтрации с учетом вида матриц будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{x} &\rightarrow \langle \mathbf{D}_2 \rangle \rightarrow \mathbf{D}_2 \bar{x} \\ \downarrow &\rightarrow \langle \mathbf{A}_2 \rangle \rightarrow \mathbf{A}_2 \bar{x} \rightarrow \langle \mathbf{D}_1 \rangle \rightarrow \mathbf{D}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x} \\ &\quad \downarrow \rightarrow \langle \mathbf{A}_1 \rangle \rightarrow \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x}. \end{aligned}$$

Данная схема дает представление о том, как с помощью цифровых фильтров можно восстановить исходный сигнал из его вейвлет-коэффициентов. Составим схему обратного вейвлет-преобразования, связанную с предыдущей.

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x} \rightarrow \langle \mathbf{A}_1^T \rangle \xrightarrow{\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x}} \oplus \xrightarrow{\mathbf{A}_2 \bar{x}} \langle \mathbf{A}_2^T \rangle \xrightarrow{\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 \bar{x}} \oplus \rightarrow \bar{x}$$

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x} \rightarrow \langle \mathbf{D}_1^T \rangle \xrightarrow{\mathbf{D}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x}} \uparrow \mathbf{D}_2 \bar{x} \rightarrow \langle \mathbf{D}_2^T \rangle \xrightarrow{\mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2 \bar{x}} \uparrow.$$

Операция  $\oplus$  обозначает поэлементное сложение компонентов-векторов. На обоих этапах преобразования использовались соотношения [6]:

$$\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x} + \mathbf{D}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x} = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_1^T \mathbf{D}_1) \mathbf{A}_2 \bar{x} = \mathbf{I}_1 \mathbf{A}_2 \bar{x} = \mathbf{A}_2 \bar{x}, \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 \bar{x} + \mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2 \bar{x} = (\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 + \mathbf{D}_2^T \mathbf{D}_2) \cdot \bar{x} = \mathbf{I}_2 \bar{x} = \bar{x}. \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) дают ключ к фильтровому восстановлению исходного сигнала из вейвлет-коэффициентов: схема будет обратной изображенной на рис. 3, только децимация заменяется интерполяцией с коэффициентом 2, осуществляемой путем добавления нулевых компонентов попеременно с имеющимися. Коэффициенты НЧ- и ВЧ-фильтров восстановления сигнала соответствуют элементам строк транспонированных матриц  $\mathbf{A}^T$  и  $\mathbf{D}^T$ . Структурная схема процесса восстановления исходного сигнала по его вейвлет-коэффициентам показана на рис. 4.

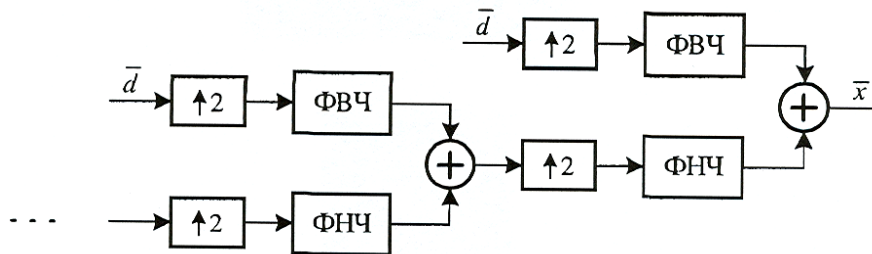


Рис. 4 – Фильтровое восстановление цифрового сигнала.

Преобразование Хаара, как простейший вейвлет, позволяет перейти к обобщениям, раскрывающим принципы конструирования более сложных структур.

### Дискретные вейвлет-преобразования

Качество вейвлет-преобразований может сильно зависеть от масштабирования базисных функций, временных сдвигов и от типа вейвлета. На практике масштабирующие множители, сжимающие базисные функции, принимаются равными отрицательным степеням двойки. Основное направление в исследовании типов вейвлетов состоит в поисках таких семейств, которые образуют ортогональный базис (ортогональную матрицу преобразования). Среди этих вейвлетов предпочтение

отдается тем, которые основываются на КИХ-фильтрации, т.е. имеют компактный (конечный во времени) носитель.

Самый простой способ описания вейвлет-преобразований использует произведение матриц. Усложнение конструкции вейвлетов основано на построении взвешенных средних.

$$c_0x(1) + c_1x(2) + \dots + c_{N-1}x(N)$$

и взвешенных разностей

$$c_1x(1) - c_0x(2) + c_3x(3) - c_2x(4) + \dots$$

для  $N$ -точечных последовательностей отсчетов выходного сигнала ( $N > 2$ ) и некоторого множества коэффициентов  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}$ . Нетрудно заметить, что подобный выбор приводит к следующему свойству ортогональности векторов, состоящих из коэффициентов

$$c_0c_1 - c_0c_1 + c_2c_3 - c_2c_3 + \dots = 0.$$

По такому принципу построен один из самых популярных вейвлетов, а именно вейвлет Добеши [4], который принято обозначать  $D_4$ , т.к. он основан на четырех коэффициентах  $c_0, c_1, c_2$  и  $c_3$ . Матрица этого преобразования имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & . & . & 0 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & . & . & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_2 & c_3 & 0 & . & . & 0 & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & 0 & . & . & 0 & c_3 & -c_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Если эту матрицу умножить на вектор-столбец отсчетов входного сигнала, то ее первая строка дает взвешенную сумму первых четырех отсчетов. Третья строка определит такую же сумму, но сдвинутую на две временные позиции. Все строки с нечетными номерами зададут аналогичные взвешенные суммы (усреднения). Таким образом коэффициенты  $c_3, c_2, c_1$  и  $c_0$  определяют КИХ-фильтр 3-го порядка, выходной сигнал которого подлежит децимации с коэффициентом 2. Аналогично четные строки матрицы (3) порождают взвешенные разности (детализации). При этом задается другой КИХ-фильтр 3-го порядка с коэффициентами  $-c_0, c_1, -c_2, c_3$  и децимацией выходного сигнала.

Требование ортогональности матрицы (3) для ее легкого обращения (транспонирования) приводит к соотношениям

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1; \quad (7)$$

$$c_0 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 = 0. \quad (8)$$

Одним из возможных решений, удовлетворяющих уравнениям (7) и (5), является следующий набор коэффициентов

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0,483; \quad c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0,837;$$

$$c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0,224; \quad c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx -0,129.$$

Расчет АЧХ фильтров для вейвлета  $D4$  приводит к результатам, показанным на рис. 5.

Коэффициенты:

$$b_0 = -0,13; \quad b_1 = 0,22; \quad b_2 = 0,84; \quad b_3 = 0,48$$

Коэффициенты:

$$b_0 = -0,48; \quad b_1 = 0,84; \quad b_2 = -0,22; \quad b_3 = -0,13$$

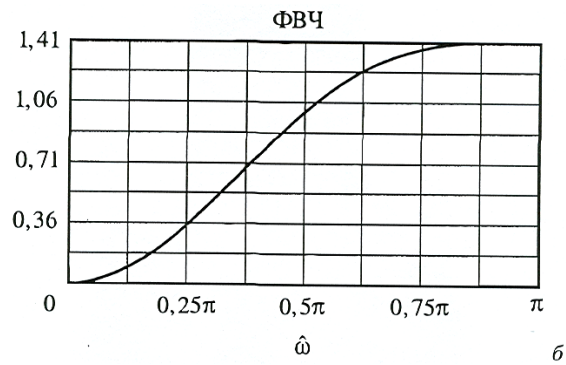
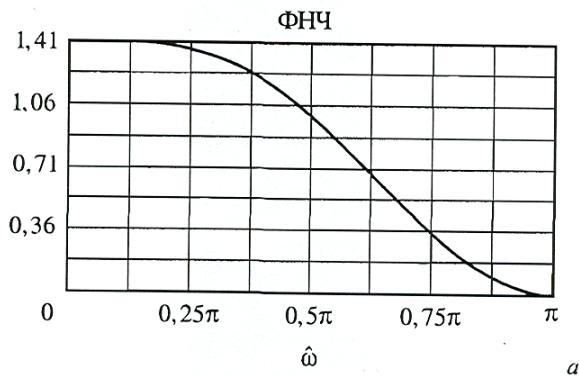


Рис. 5 – Ненормированные АЧХ фильтров для вейвлета Добеши.

Из этих характеристик видно, что сглаживающим (усредняющим) фильтром является ФНЧ, а детализирующим – ФВЧ.

Реализация вейвлета [4] в виде умножения матрицы  $\mathbf{W}$  на входной вектор  $\bar{x}$  очень проста и наглядна. Однако этот метод непрактичен, т.к. матрица (6) должна иметь порядок, равный размеру вектора отсчетов сигнала, который обычно велик. Но можно заметить, что матрица  $\mathbf{W}$  имеет регулярную структуру и при алгоритмическом построении вейвлет-преобразования достаточно хранить только набор из четырех коэффициентов КИХ-фильтров.

Обратное вейвлет-преобразование получается простым транспонированием матрицы (6).

$$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} c_0 & c_3 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & c_2 & c_1 \\ c_1 & -c_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & c_3 & -c_0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_3 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ c_3 & -c_0 & c_1 & -c_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_0 & c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & c_2 & c_1 & c_0 & c_3 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & c_3 & -c_0 & c_1 & -c_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

**Заключение.** Изучение структур матриц (3) и (6) позволяет сформулировать правила нахождения коэффициентов НЧ и ВЧ КИХ-фильтров произвольной четной длины  $N$ , синтезируемых для анализа и восстановления цифрового сигнала. Они заключаются в следующем.

*Для фильтров, реализующих прямое вейвлет-преобразование:*

1. Обеспечивается нормализация в виде равенства единице суммы квадратов коэффициентов (аналог равенства (7)).
2. Вводится ортогональность векторов, состоящих из первой и второй половины коэффициентов (аналог равенства (8)).
3. Коэффициенты НЧ-фильтра являются элементами первой строки матрицы преобразования, записанными в обратном порядке.
4. Коэффициенты ВЧ-фильтра соответствуют коэффициентам НЧ-фильтра, записанным в обратном порядке и с противоположными знаками на нечетных позициях (первой, третьей и т.д.).

*Для фильтров, реализующих обратное вейвлет-преобразование:*

1. Коэффициенты НЧ-фильтра соответствуют коэффициентам анализирующего НЧ-фильтра, записанным в обратном порядке.
2. Коэффициенты ВЧ-фильтра являются копией коэффициентов анализирующего НЧ-фильтра, но с обратными знаками у компонентов на четных позициях (второй, четвертой и т.д.).

Перечисленные правила позволяют упростить процесс конструирования вейвлет-фильтров.

### Список литературы

1. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов – М.: Мир, 1989. – 576 с.
2. Вайдънатхан П.П. Цифровые фильтры, блоки фильтров и полифазные цепи с многочастотной дискретизацией. Методологический обзор// ТИИЭР, т.29, №9, 1990.
3. Воеводин В. В. Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления – М.: Мир. Гл. ред. Физ.-мат. литературы, 1984. – 318 с.
4. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
5. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. Изд. 2-е, пререраб. и доп. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 400 с.

**Фільтрова реалізація вейвлет-перетворення. Лімонов О.С., Перелигін Б.В., Лімонов О.О.**

*В статті досліджується можливість використання методів цифрової фільтрації у дискретному вейвлет-аналізі на основі матричних представлень перетворень Хаара.*

**Ключові слова:** фільтрова реалізація, децимація, фільтр з кінцевою імпульсною характеристикою – КИХ-фільтр, перетворення Хаара.

**Filter realization of wavelet transformation. Limonov A.S., Perelygin B.V., Limonov A.A.**

*The abilities of using digital filtration methods in discrete wavelet analysis based on matrix representation of Khaar transformations are examined.*

**Keywords:** wavelet filter realization, decimation, finite impulse response (FIR) filter, Khaar transformation