УДК 551.501.755

С.Н. Степаненко, *д.физ.-мат. наук,* **В.Г.Волошин,** *к.геогр.наук*, **С.В.Типцов,** *н.с.*
Одесский государственный экологический университет

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ ВРЕДНЫХ ВЕЩЕСТВ В АТМОСФЕРЕ ПРИ ПОСТОЯННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ДИФФУЗИИ И СКОРОСТЯХ ПЕРЕНОСА

Доказана теорема о фундаментальности решения дифференциального уравнения турбулентной диффузии для функции q(t,x,y,z) пространственно-временного распределения вредных веществ от любого типа непрерывно действующего источника, который удовлетворяет условиям теоремы. Решение представлено уравнением, которое названо "формулой SVT". Формула SVT содержит пространственные координаты, составляющие вектора скорости ветра и тензора турбулентного напряжения, учитывает поглощающие свойства поверхности и скорость осаждения частиц вредных веществ.

Ключевые слова: *уравнение турбулентной диффузии, модель загрязнения атмосферы, взаимодействие примеси с поверхностью, загрязнение воздуха, точечный источник.*

Постановка проблемы. При моделировании процессов распространения примесей в трехмерной области предпочтение отдается аналитическому или численному решению полуэмпирического дифференциального уравнения турбулентной диффузии (УТД) в декартовых координатах [1,2,3,4,5]. В этом случае линеаризованная модель распространения примеси учитывает характерные основные особенности процесса, а именно: перенос примеси в направлении потока, турбулентную диффузию, конвекцию, пространственно-временную неоднородность параметров рассеяния, взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью и верхней границей слоя перемешивания и другие факторы.

Анализ последних исследований и публикаций. В работах [6,7] получено решение уравнения турбулентной диффузии для постоянно действующего точечного источника $Q(t) \equiv Q(\mathrm{const})$, в котором, в отличие от предыдущих решений, учитывается взаимодействие составляющих диффузии K_i и скорости ветра u_i в направлении осей ($i = x, y, z$) выбранной системы координат. Решение стационарного уравнения турбулентной диффузии [6]

$$uq_x + vq_y + wq_z - K_x q_{xx} - K_y q_{yy} - K_z q_{zz} = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-h), \tag{1}$$

при выбранных граничных условиях в полупространстве $z \ge z_0$

$$K_z q_z(x, y, z_0) - \beta q(x, y, z_0) = 0; \quad \lim_{x,y \to \pm\infty, z \to +\infty} q(x, y, z) = 0\ , \tag{2}$$

приводит к следующей стационарной функции

$$q(x,y,z) = \frac{Q e^{\frac{ux}{2K_x} + \frac{vy}{2K_y} + \frac{w(z-h)}{2K_z}}}{4\pi\sqrt{K_x K_y K_z}} \left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y} + \frac{(z-h)^2}{K_z}} \cdot \sqrt{\frac{u^2}{K_x} + \frac{v^2}{K_y} + \frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K_x} + \frac{y^2}{K_y} + \frac{(z-h)^2}{K_z}}} \right) +$$

$$+\frac{Qe^{\frac{ux}{2K_x}+\frac{vy}{2K_y}+\frac{w(z-h)}{2K_z}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h-2z_0)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h-2z_0)^2}{K_z}}}\right)+ \tag{3}$$

$$+\frac{w+2\beta}{K_z}\cdot\frac{Qe^{\frac{ux}{2K_x}+\frac{vy}{2K_y}+\frac{w(z-h)}{2K_z}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}}\int_0^\infty\frac{e^{\frac{w+2\beta}{2K_z}\xi-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h-2z_0+\xi)^2}{K_z}}\cdot\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h-2z_0+\xi)^2}{K_z}}}d\xi,$$

В формулах (1),(2),(3) u, v, w – средние скорости переноса, K_x, K_y, K_z – коэффициенты диффузии в соответствующих направлениях координатных осей, β – параметр, характеризующий взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью, имеющий размерность скорости и далее представленный коэффициентом поглощения $\beta = -\alpha$, h – высота источника примеси. В уравнениях (1) и (2) индексами при искомой функции обозначены ее частные производные. Формула (3), в силу ее достаточной оригинальности, названа авторами "формулой SVT" [7,8].

Решение уравнения (1) ранее многими авторами автоматически переносилось на решение упрощенного стационарного уравнения в предположении, что диффузия примеси в направлении переноса отсутствует, а процессы горизонтальной (по y) и вертикальной (по z) диффузии независимы. Это облегчало математическую задачу, но искажало суть процесса. Решение упрощенного уравнения вело к простой, но приближенной функции, соответствующей гауссову распределению концентраций. Однако, при малых скоростях переноса или при штиле, в условиях развитой конвективной турбулентности, член, содержащий K_x в уравнении (1), позволяет построить поле $q(x, y, z)$, даже с наветренной стороны источника.

Найденное решение УТД в виде формулы (3) является общим по сравнению с иными решениями, которые относительно (3), являются частными случаями. Решение в большей части полупространства асимптотически приближается к известной формуле гауссовой модели диффузии [6].

В работе Берлянда М.Е. [3] отмечалось, что упрощенные схемы решения УТД позволяют получить его фундаментальное решение, близкое к решению полного уравнения диффузии, но только при условии совпадения начальных и граничных условий. Но с уменьшением скорости переноса частиц примеси, т.е. при уменьшении скорости ветра, различия между решениями упрощенного и полного уравнения УТД существенно возрастают.

Формулировка целей статьи. В работе приводится доказательство фундаментальности решения полного уравнения турбулентной диффузии. Перенос и диффузия примеси рассматривается над поверхностью, которая удовлетворяет граничным условиям, предложенным Мониным А.С. [9] и другими авторами [4,10]. Подробность выполненного доказательства позволяет отразить его в качестве теоремы.

Теорема. Рассмотрим нестационарное уравнение турбулентной диффузии для концентрации примеси, заданной функцией $q(x,y,z)$ от точечного источника мгновенного выброса с мощностью *Q*, расположенного в точке с координатами (0,0,0,*h*) в области $t>0, x,y\in R, z\geq 0$

$$q_t + uq_x + vq_y + wq_z - K_x q_{xx} - K_y q_{yy} - K_z q_{zz} = Q\delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z-h). \quad (4)$$

В качестве граничных используются условие (2), с учетом временного аргумента, и принимаются нулевые начальные условия

$$q(0,x,y,z)=0;\ K_z q_z(t,x,y,0)+\alpha q(t,x,y,0)=0;\ \lim_{x,y\to\pm\infty, z\to+\infty} q(t,x,y,z)=0. \quad (5)$$

Фундаментальным решением уравнения (4) при условиях (5) является функция, полученная в работе [6]

$$q(t,x,y,z)=\frac{Qe^{-\frac{(x-ut)^2}{4K_xt}-\frac{(y-vt)^2}{4K_yt}-\frac{(z-h-wt)^2}{4K_zt}}}{8\pi\sqrt{\pi K_xK_yK_zt^3}}\left(1+e^{-\frac{zh}{K_zt}}+\frac{w+2\alpha}{K_z}\int_0^\infty e^{\frac{w+2\alpha}{2K_z}\tau-\frac{(\tau+z+h)^2}{4K_zt}+\frac{(z-h)^2}{4K_zt}}d\tau\right). \quad (6)$$

.

Доказательство теоремы. Для доказательства рассмотрим двумерное уравнение переноса

$$b_t + ub_x - Kb_{xx} = Q(t,x);\ t>0;\ x\in R;\ b(0,x)=0;\ \lim_{x\to\pm\infty} b(t,x)=0. \quad (7)$$

Здесь *Q*(*t*,*x*) − абсолютно интегрируемая в указанной области функция, *b*(*t*,*x*)− функция (ограниченная по физическому смыслу) медленного роста.

Применим преобразование Лапласа к уравнениям (7) , где переход от оригинала к изображению обозначен стандартно $b(t,x)\to\hat{b}(p,x)$ и, учитывая начальные условия, получаем краевую задачу

$$K\hat{b}_{xx} - u\hat{b}_x - p\hat{b} = -\widehat{Q}(p,x);\ x\in R;\ \lim_{x\to\pm\infty}\hat{b}(p,x)=0; Q(t,x)\to\widehat{Q}(p,x). \quad (8)$$

Представим (8) в следующем виде

$$K\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{u+\sqrt{u^2+4pK}}{2K}x}\left(\hat{b}_x-\frac{u-\sqrt{u^2+4pK}}{2K}\hat{b}\right)\right)=-\widehat{Q}(p,x)e^{-\frac{u+\sqrt{u^2+4pK}}{2K}x}. \quad (9)$$

Учитывая граничные условия, интегрируем (9) в пределах $s\in[x,+\infty]$

$$K\left(\hat{b}_x-\frac{u-\sqrt{u^2+4pK}}{2K}\hat{b}\right)=\int\limits_x^\infty \widehat{Q}(p,s)e^{-\frac{u+\sqrt{u^2+4pK}}{2K}(x-s)}ds. \tag{10}$$

Для повторного интегрирования приводим уравнение (10) к виду

$$K\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{u-\sqrt{u^2+4pK}}{2K}x}\hat{b}\right)=\int\limits_x^\infty \widehat{Q}(p,s)e^{-\frac{u+\sqrt{u^2+4pK}}{2K}s+\frac{\sqrt{u^2+4pK}}{K}x}ds. \tag{11}$$

Интегрируем по оставшейся части области изменения $s\in[-\infty,x]$ и, учитывая граничное условие, получаем

$$K\hat{b}=\int\limits_{-\infty}^x d\tau\int\limits_\tau^\infty \widehat{Q}(p,s)e^{\frac{u+\sqrt{u^2+4pK}}{2K}(x-s)+\frac{\sqrt{u^2+4pK}}{K}(\tau-x)}ds. \tag{12}$$

Изменяем, порядок интегрирования в правой части (12)

$$K\hat{b}=\int\limits_{-\infty}^\infty \widehat{Q}(p,s)e^{\frac{u+\sqrt{u^2+4pK}}{2K}(x-s)}ds\int\limits_{-\infty}^{\min(s,x)} e^{\frac{\sqrt{u^2+4pK}}{K}(\tau-x)}d\tau, \tag{13}$$

и интегрируя по аргументу внутреннего интеграла, находим изображение

$$\hat{b}=\frac{1}{\sqrt{u^2+4pK}}\int\limits_{-\infty}^\infty \widehat{Q}(p,s)e^{\frac{u}{2K}(x-s)+\frac{\sqrt{u^2+4pK}}{2K}(2\min(s,x)-x-s)}ds,$$

или окончательно

$$\hat{b}(p,x)=\frac{1}{\sqrt{u^2+4pK}}\int\limits_{-\infty}^\infty \widehat{Q}(p,s)e^{\frac{u}{2K}(x-s)-\frac{\sqrt{u^2+4pK}}{2K}|x-s|}ds. \tag{14}$$

Оригинал, есть решение уравнения (7) и имеет следующий вид

$$b(t,x)=\int\limits_{-\infty}^\infty e^{\frac{u}{2K}(x-s)}ds\int\limits_0^t\frac{Q(t-\tau,s)}{2\sqrt{\pi K\tau}}e^{-\frac{u^2\tau^2+(x-s)^2}{4K\tau}}d\tau. \tag{15}$$

Предполагая $Q(t,x)=\delta(t)\delta(x)$, для уравнения (7) находим фундаментальное решение обобщенной задачи, которое будет также и классическим

$$b(t,x)=\frac{e^{-\frac{(x-ut)^2}{4Kt}}}{2\sqrt{\pi Kt}},\ t>0. \tag{16}$$

Аналогичная двухмерная краевая задача в пространстве (t,y), $t>0$, $y\in R$, имеет фундаментальное решение

$$c(t,y)=\frac{e^{-\frac{(y-vt)^2}{4Kt}}}{2\sqrt{\pi Kt}},\ \ t>0. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь краевую задачу в пространстве $(t,z),\ t>0,\ z\geq 0,$ заданную уравнением со смешанными краевыми условиями на нижней границе

$$\begin{gathered} g_t+wg_z-Kg_{zz}=Q(t,z);\ \ t>0;\ z\geq 0;\ \ g(0,z)=0; \\ \lim_{z\to+\infty} g(t,z)=0; \qquad Kg_z(t,0)+\alpha g(t,0)=0. \end{gathered} \tag{18}$$

Применив преобразование Лапласа к уравнению, получим

$$\begin{gathered} g(t,z)\to\hat{g}(p,z);\ g(t,0)\to\hat{q}_0(p);\ Q(t,z)\to\hat{Q}(p,z); \\ K\hat{g}_{zz}-w\hat{g}_z-p\hat{g}=-\hat{Q}(p,z);\ \ t>0;\ z\geq 0,\ \lim_{z\to+\infty}\hat{g}(p,z)=0;\ \ K\hat{g}_z(p,0)+\alpha\hat{g}_0(p)=0. \end{gathered} \tag{19}$$

Представим уравнение (19) в следующем виде

$$K\frac{d}{dz}\left(e^{-\frac{w+\sqrt{w^2+4pK}}{2K}z}\left(\hat{g}_z-\frac{w-\sqrt{w^2+4pK}}{2K}\hat{g}\right)\right)=-\hat{Q}(p,z)e^{-\frac{w+\sqrt{w^2+4pK}}{2K}z}. \tag{20}$$

Как и в предыдущем случае выполним интегрирование (20) с учетом граничных свойств изображения в пределах $s\in[z,+\infty]$

$$K\left(\hat{g}_z-\frac{w-\sqrt{w^2+4pK}}{2K}\hat{g}\right)=\int_z^{\infty}\hat{Q}(p,s)e^{\frac{w+\sqrt{w^2+4pK}}{2K}(z-s)}ds. \tag{21}$$

При $z = 0$ определяем, используя (19), граничное значение изображения

$$-\alpha\hat{g}_0(p)-\frac{w-\sqrt{w^2+4pK}}{2}\hat{g}_0(p)=\int_0^{\infty}\hat{Q}(p,s)e^{-\frac{w+\sqrt{w^2+4pK}}{2K}s}ds, \tag{22}$$

или окончательно

$$\hat{g}_0(p)=\int_0^{\infty}\frac{2\hat{Q}(p,s)e^{-\frac{w+\sqrt{w^2+4pK}}{2K}s}}{\sqrt{w^2+4pK}-w-2\alpha}ds. \tag{23}$$

Далее приводим (21) к следующему виду

$$K\frac{d}{dz}\left(e^{-\frac{w-\sqrt{w^2+4pK}}{2K}z}\hat{g}\right)=\int_z^{\infty}\hat{Q}(p,s)e^{-\frac{w+\sqrt{w^2+4pK}}{2K}s+\frac{\sqrt{w^2+4pK}}{K}z}ds\,. \tag{24}$$

При повторном интегрировании на промежутке [0, z] учитываем граничное значение (23) на нижней границе

$$K\left(\hat{g}-e^{\frac{w-\sqrt{w^2+4pK}}{2K}z}\hat{g}_0\right)=\int_0^z d\tau\int_\tau^{\infty}\hat{Q}(p,s)e^{\frac{w+\sqrt{w^2+4pK}}{2K}(z-s)+\frac{\sqrt{w^2+4pK}}{K}(\tau-z)}ds. \tag{25}$$

Изменяем порядок интегрирования в (25)

$$K\left(\hat{g}-\hat{g}_0e^{\frac{w-\sqrt{w^2+4pK}}{2K}z}\right)=\int_0^{\infty}\hat{Q}(p,s)e^{\frac{w+\sqrt{w^2+4pK}}{2K}(z-s)}ds\int_0^{\min(s,z)}e^{\frac{\sqrt{w^2+4pK}}{K}(\tau-z)}d\tau. \tag{26}$$

Интегрируем по внутреннему аргументу, аналогично (14), и выражаем изображение, используя граничное значение $\hat{g}_0(p)$, заданное формулой (23)

$$\hat{g}(p,z)=\int_0^{\infty}\hat{Q}(p,s)e^{\frac{w}{2K}(z-s)}\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{w^2+4pK}}{2K}|z-s|}}{\sqrt{w^2+4pK}}-\frac{e^{-\frac{\sqrt{w^2+4pK}}{2K}(z+s)}}{\sqrt{w^2+4pK}}+\frac{2e^{-\frac{\sqrt{w^2+4pK}}{2K}(z+s)}}{\sqrt{w^2+4pK}-w-2\alpha}\right)ds. \tag{27}$$

Определяем оригиналы интегрального ядра по изображениям

$$\frac{e^{-\frac{\sqrt{w^2+4pK}}{2K}|z-s|}}{\sqrt{w^2+4pK}}\leftarrow\frac{e^{-\frac{w^2t^2+(z-s)^2}{4Kt}}}{2\sqrt{\pi Kt}};\qquad\frac{e^{\frac{\sqrt{w^2+4pK}}{2K}(z+s)}}{\sqrt{w^2+4pK}}\leftarrow\frac{e^{-\frac{w^2t^2+(z+s)^2}{4Kt}}}{2\sqrt{\pi Kt}}. \tag{28}$$

Обратное преобразование оставшегося члена ядра находим по следующей схеме:

1. $\dfrac{2e^{-\frac{p}{\sqrt{K}}(z+s)}}{2\sqrt{K}p-w-2\alpha}\leftarrow\dfrac{e^{\frac{w+2\alpha}{2\sqrt{K}}\left(t-\frac{z+s}{\sqrt{K}}\right)}}{\sqrt{K}}\eta\left(t-\dfrac{z+s}{\sqrt{K}}\right)$, где $\eta\left(t-\dfrac{z+s}{\sqrt{K}}\right)$ – единичная функция Хевисайда;

2. $\dfrac{2e^{-\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{K}}(z+s)}}{2\sqrt{pK}-w-2\alpha}\leftarrow\dfrac{e^{-\frac{(z+s)^2}{4Kt}}}{\sqrt{\pi Kt}}+\dfrac{w+2\alpha}{2K}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{e^{\frac{w+2\alpha}{2\sqrt{K}}\omega-\frac{\left(\omega+\frac{z+s}{\sqrt{K}}\right)^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}d\omega;$

3. $$\frac{2e^{-\frac{\sqrt{w^2+4pK}}{2K}(z+s)}}{\sqrt{w^2+4pK}-w-2\alpha} \leftarrow \frac{e^{-\frac{w^2t^2+(z+s)^2}{4Kt}}}{\sqrt{\pi Kt}} + \frac{w+2\alpha}{2K}\int\limits_0^\infty \frac{e^{\frac{w+2\alpha}{2K}\tau-\frac{(\tau+z+s)^2+w^2t^2}{4Kt}}}{\sqrt{\pi Kt}}d\tau. \quad (29)$$

Используя (28) и схему (29) для правой части формулы (27), находим оригинал

$$g(t,z)=\int\limits_0^\infty ds\int\limits_0^t Q(t-\omega,s)e^{-\frac{(z-s-w\omega)^2}{4K\omega}}\frac{\left(1+e^{-\frac{zs}{K\omega}}+\frac{w+2\alpha}{K}e^{\frac{(z-s)^2}{4K\omega}}\int\limits_0^\infty e^{\frac{w+2\alpha}{2K}\tau-\frac{(\tau+z+s)^2}{4K\omega}}d\tau\right)}{2\sqrt{\pi K\omega}}d\omega. \quad (30)$$

В случае наличия функции источника $Q(t,z)=\delta(t)\delta(z-h)$, определяем фундаментальное решение краевой задачи (18)

$$g(t,z,h)=\frac{e^{-\frac{(z-h-wt)^2}{4Kt}}}{2\sqrt{\pi Kt}}\left(1+e^{-\frac{zh}{Kt}}+\frac{w+2\alpha}{K}e^{\frac{(z-h)^2}{4Kt}}\int\limits_0^\infty e^{\frac{w+2\alpha}{2K}\tau-\frac{(\tau+z+h)^2}{4Kt}}d\tau\right). \quad (31)$$

По построению решений обобщенных задач в форме (16), (17) и (31), и аддитивно мультипликативных свойств дифференцирования, однородное уравнение (4) с приведенными краевыми условиями имеет частное решение, заданное произведением решений соответствующих двухмерных задач при заданных коэффициентах диффузии

$$L(t,x,y,z,h)=b(t,x)c(t,y)g(t,z,h). \quad (32)$$

Это решение имеет сингулярность в точке области интегрирования t=0, x=0, y=0, z=0. Остается показать, что неоднородная краевая задача (4), (5) с произвольной правой частью $Q(t,x,y,z)$ будет иметь частное решение вида

$$q(t,x,y,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}dr\int\limits_0^{\infty}dp\int\limits_0^t Q(t-\omega,s,r,p)L(\omega,x-s,y-p,z,p)d\omega; \quad (33)$$

$$L(t,x,y,z,p)=\frac{e^{-\frac{(x-ut)^2}{4K_xt}-\frac{(y-vt)^2}{4K_yt}-\frac{(z-p-wt)^2}{4K_zt}}}{8\pi\sqrt{\pi K_xK_yK_zt^3}}\times \quad (34)$$

$$\times\left(1+e^{-\frac{zp}{K_zt}}+\frac{w+2\alpha}{K_z}e^{\frac{(z-p)^2}{4K_zt}}\int\limits_0^\infty e^{\frac{w+2\alpha}{2K_z}\tau-\frac{(\tau+z+p)^2}{4K_zt}}d\tau\right).$$

Поскольку интегральное ядро $L(t,x,y,z,p)$ в области интегрирования при $t > 0$ удовлетворяет однородному уравнению по аргументам исходной задачи, то подстановка (33) в неоднородное уравнение приводит к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{0}^{\infty} dp \int_{0}^{t} Q_t\left(t-\omega,s,r,p\right) L\left(\omega,x-s,y-r,z,p\right) d\omega -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{0}^{\infty} dp \int_{0}^{t} Q\left(t-\omega,s,r,p\right) L_{\omega}\left(\omega,x-s,y-r,z,p\right) d\omega = \tag{35}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{0}^{\infty} Q\left(0,s,r,p\right) L\left(t,x-s,y-r,z,p\right) dp + Q\left(t,x,y,z\right).$$

Проинтегрировав по частям второй интеграл и переходя к пределу в точке $\omega = 0$, с учетом сингулярности получаем уравнение, равносильное (35)

$$\lim_{\omega\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dr \int_{0}^{\infty} Q\left(t-\omega,s,r,p\right) L\left(\omega,x-s,y-r,z,p\right) dp = Q\left(t,x,y,z\right). \tag{36}$$

Чтобы доказать (36), проинтегрируем (27) при $\widehat{Q}(p,s) = \delta(s-h)$ и $K = K_z$ по переменной h, что соответствует правой части двумерного уравнения (21) с источником

$$\int_0^{\infty} \widehat{g}(p,z,h)\,dh = \int_0^{\infty} e^{\frac{w}{2K_z}(z-s)} \left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{w^2+4pK_z}}{2K_z}|z-s|}}{\sqrt{w^2+4pK_z}} - \frac{e^{-\frac{\sqrt{w^2+4pK_z}}{2K_z}(z+s)}}{\sqrt{w^2+4pK_z}} + \frac{2e^{-\frac{\sqrt{w^2+4pK_z}}{2K_z}(z+s)}}{\sqrt{w^2+4pK_z}-w-2\alpha} \right) ds =$$

$$= \frac{2K_z - 2K_z e^{\frac{w-\sqrt{w^2+4pK_z}}{2K_z}z}}{\sqrt{w^2+4pK_z}\left(\sqrt{w^2+4pK_z}+w\right)} - \frac{2K_z - 2K_z e^{\frac{w-\sqrt{w^2+4pK_z}}{2K_z}z}}{\sqrt{w^2+4pK_z}\left(\sqrt{w^2+4pK_z}-w\right)} +$$

$$+\frac{4K_z e^{\frac{w-\sqrt{w^2+4pK_z}}{2K_z}z}}{\left(\sqrt{w^2+4pK_z}-w-2\alpha\right)\left(\sqrt{w^2+4pK_z}+w\right)} = \frac{1}{p} + \frac{2\alpha e^{\frac{w-\sqrt{w^2+4pK_z}}{2K_z}z}}{p\left(\sqrt{w^2+4pK_z}-w-2\alpha\right)}. \tag{37}$$

Обратным преобразованием по схеме (29) определяем соответствующий (37) оригинал

$$\int_0^{\infty} g(t,z,h)\,dh = 1+\alpha\int_0^t \frac{e^{-\frac{(z-w\omega)^2}{4K_z\omega}}}{\sqrt{\pi K_z\omega}}\left(2+\frac{w+2\alpha}{K_z}\int_0^{\infty} e^{\frac{w+2\alpha}{2K_z}\tau-\frac{\tau^2+2z\tau}{4K_z\omega}}\,d\tau\right)d\omega\to 1,\quad t\to 0. \quad (38)$$

В области интегрирования левой части (33) точка сингулярности определена координатами: $s = x$, $r = y$, $p = z$, $\omega = 0$. Зафиксируем произвольное положительное число $\varepsilon > 0$. Для переменной $\omega > 0$ выберем окрестность Ω_ε, заданную неравенством

$$\omega\left(\frac{|u|}{\sqrt{K_x}}+\frac{|v|}{\sqrt{K_y}}+\frac{|w|+2|\alpha|}{\sqrt{K_z}}\right)\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

В области интегрирования определим также окрестность, содержащую точку сингулярности

$$U_\varepsilon=\bigcap_{\omega\in\Omega_\varepsilon}\left\{(\omega,s,r,p):|x-s-u\omega|\le\varepsilon\sqrt{K_x},|y-r-v\omega|\le\varepsilon\sqrt{K_y},|z-p-w\omega|\le\varepsilon\sqrt{K_z}\right\}.$$

По правилу выбора Ω_ε, данная точка содержит окрестность

$$\widetilde{U}_\varepsilon=\left\{(s,r,p):|x-s|\le\frac{\varepsilon\sqrt{K_x}}{2},|y-r|\le\frac{\varepsilon\sqrt{K_y}}{2},|z-p|\le\frac{\varepsilon\sqrt{K_z}}{2}\right\}.$$

Следовательно, для всех точек $\widetilde{U}_\varepsilon$ и $\omega\in\Omega_\varepsilon$ будут выполнены неравенства U_ε. Согласно (38) и свойствам Гауссовых функций – решений двухмерных уравнений (17), (18), составляющих ядро интегрирования, равенство (36) можно представить в виде

$$\lim_{\omega\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}dr\int_0^{\infty}\big(Q(t-\omega,s,r,p)-Q(t,x,y,z)\big)L(\omega,x-s,y-r,z,p)\,dp=0. \quad (39)$$

Тогда в малой окрестности U_ε, для дифференцируемых на U по всем аргументам функций $Q(t,x,y,z)$ выполнено

$$\lim_{\omega\to 0}\left|Q(t-\omega,s,r,p)-Q(t,x,y,z)\right|\le\lim_{\omega\to 0}\big(C_1(t)\varepsilon+C_2(t)\omega\big)=C_1(t)\varepsilon, \quad (40)$$

при этом для неотрицательного интегрального ядра справедливо неравенство

$$\lim_{\omega\to 0}\iiint_{\widetilde{U}_\varepsilon}L(\omega,x-s,y-r,z,p)\,dp\le\lim_{\omega\to 0}\iiint_{U}L(\omega,x-s,y-r,z,p)\,dp=1, \quad (41)$$

а во внешней части окрестности при оговоренных ограничениях на $Q(t,x,y,z)$ получаем

$$R_{\varepsilon}(\omega)=\left|\iiint\limits_{U\setminus\tilde{U}_{\varepsilon}}\left(Q(t-\omega,s,r,p)-Q(t,x,y,z)\right)L(\omega,x-s,y-r,z,p)\,dsdrdp\right|\le$$
$$\le\max_{U\setminus\tilde{U}_{\varepsilon}}L(\omega,x-s,y-r,z,p)\iiint\limits_{U}\left|Q(t-\omega,s,r,p)\right|dsdrdp+$$
$$+\left|Q(t,x,y,z)\right|\iiint\limits_{U\setminus\tilde{U}_{\varepsilon}}L(\omega,x-s,y-r,z,p)\,dsdrdp\le \tag{42}$$
$$\le 4\left|Q(t,x,y,z)\right|Erf^{2}\left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{\omega}}\right)\int\limits_{0}^{\infty}q_{3}(\omega,z,s)\,ds+\frac{e^{-\frac{3\varepsilon^{2}}{4\omega}}\iiint\limits_{U}\left|Q(t-\omega,s,r,p)\right|dsdrdp}{4\pi\sqrt{\pi K_{x}K_{y}K_{z}\omega^{3}}}.$$

Согласно интегральным свойствам правой части, а также свойствам Гауссовых функций

$$\lim_{\omega\to 0}R_{\varepsilon}(\omega)=0, \tag{43}$$

при этом остальные величины ограничены. Следовательно, по (40), (41), (42) имеем

$$\lim_{\omega\to 0}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}dr\int\limits_{0}^{\infty}\left(Q(t-\omega,s,r,p)-Q(t,x,y,z)\right)L(\omega,x-s,y-r,z,p)\,dp\right|\le C_{1}\varepsilon\,. \tag{44}$$

В силу произвольности выбора ε, равенство (39), также как и (36), тождественно а, ***следовательно, теорема доказана***.

Результаты исследования и их анализ. Доказанная теорема позволяет с помощью формулы (33) установить пространственно-временное распределение концентрации вредных веществ от любого типа непрерывно действующего источника, удовлетворяющего условиям теоремы. Форма и интенсивность источников при этом регулируется приведенными в доказательстве требованиями к правой части уравнения (4), всюду на области неоднородности уравнения.

Если в динамической модели интенсивность источников не зависит от времени, то при длительном их действии, при квазипостоянных скоростях переноса, происходит стационарное распределение примеси $\tilde{q}(x,y,z)=\lim\limits_{t\to\infty}q(t,x,y,z)$. Если граничные процессы соответствуют условиям динамической задачи, то для стационарного распределения концентрации будут справедливы следующие граничные условия

$$K_{z}\tilde{q}_{z}(x,y,0)+\alpha\tilde{q}(x,y,0)=0;\ \lim_{x,y\to\pm\infty,z\to+\infty}\tilde{q}(x,y,z)=0. \tag{45}$$

Согласно формуле (33), при переходе к пределу $t\to\infty$ получаем стационарное распределение концентрации

$$\tilde{q}(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}dr\int_{0}^{\infty}dp\int_{0}^{\infty}Q(s,r,p)\,L(\omega,x-s,y-r,z,p)d\omega. \qquad (46)$$

Внутренний интеграл для ядра (34) легко определяется в таблице изображений Лапласа, а формула (46) приобретает вид

$$\tilde{q}(x,y,z)=\frac{w+2\alpha}{K_z}\int_{-\infty}^{\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}dr\int_{0}^{\infty}Q(x-s,y-r,p)\,I(s,r,z,p)\,e^{\frac{su}{2K_x}+\frac{rv}{2K_y}+\frac{(z-p)w}{2K_z}}dp+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}dr\int_{0}^{\infty}\frac{Q(x-s,y-r,p)\,e^{\frac{su}{2K_x}+\frac{rv}{2K_y}+\frac{(z-p)w}{2K_z}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{K_x}+\frac{r^2}{K_y}+\frac{(z-p)^2}{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}\sqrt{\frac{s^2}{K_x}+\frac{r^2}{K_y}+\frac{(z-p)^2}{K_z}}}dp+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}ds\int_{-\infty}^{\infty}dr\int_{0}^{\infty}\frac{Q(x-s,y-r,p)\,e^{\frac{su}{2K_x}+\frac{rv}{2K_y}+\frac{(z-p)w}{2K_z}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2}{K_x}+\frac{r^2}{K_y}+\frac{(z+p)^2}{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}\sqrt{\frac{s^2}{K_x}+\frac{r^2}{K_y}+\frac{(z+p)^2}{K_z}}}dp, \qquad (47)$$

где введенная функция $I(s,r,z,p)$ обозначена выражением

$$I(x,y,z,p)=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{\frac{(w+2\alpha)\tau}{2K_z}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(\tau+z+p)^2}{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}\sqrt{\frac{s^2}{K_x}+\frac{r^2}{K_y}+\frac{(\tau+z+p)^2}{K_z}}}d\tau. \qquad (48)$$

Полученная функция (47) удовлетворяет стационарному уравнению с граничными условиями (45)

$$uq_x+vq_y+wq_z-K_xq_{xx}-K_yq_{yy}-K_zq_{zz}=Q(x,y,z);\quad x,y\in R;\quad z\ge 0. \qquad (49)$$

Тогда, для непрерывно действующего точечного источника постоянной интенсивности $Q\delta(x)\delta(y)\delta(z-h)$ получим фундаментальное решение в виде

$$q(x,y,z)=\frac{Qe^{\frac{xu}{2K_x}+\frac{yv}{2K_y}+\frac{(z-h)w}{2K_z}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z-h)^2}{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z-h)^2}{K_z}}}+$$

$$+\frac{Qe^{\frac{xu}{2K_x}+\frac{yv}{2K_y}+\frac{(z-h)w}{2K_z}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h)^2}{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h)^2}{K_z}}}+ \tag{50}$$

$$+\frac{w+2\alpha}{K_z}Q\cdot I(x,y,z,h)e^{\frac{xu}{2K_x}+\frac{yv}{2K_y}+\frac{(z-h)w}{2K_z}}.$$

Для оценки интегрального члена $I(x,y,z,h)$(48), содержащегося в формуле (50), выполним некоторые преобразования, используя свойства оригинала и изображения для подобных интегральных выражений

$$I=\int_0^\infty\frac{e^{b\tau-\tilde{u}\sqrt{a^2+(\tau+s)^2}}}{\sqrt{a^2+(\tau+s)^2}}d\tau=\int_{\tilde{u}}^\infty\frac{e^{-sp}J_0\left(a\sqrt{p^2-\tilde{u}^2}\right)}{p-b}dp. \tag{51}$$

При условии $b\le\hat{u}$ максимальное значение подынтегральной функции достигается в нижнем пределе, причем, при возрастании аргумента ее амплитуда и частота колебаний асимптотически определяются числителем. Поэтому, при достаточно больших значениях параметров $a\gg 1,\ \ s\ge z+h\gg 1$, функциональный вклад знаменателя в изменение амплитуды минимальный и, следовательно, будет асимптотически верно записать

$$I\sim\int_{\tilde{u}}^\infty\frac{e^{-sp}J_0\left(a\sqrt{p^2-\tilde{u}^2}\right)}{\tilde{u}-b}dp=\frac{e^{-\tilde{u}\sqrt{a^2+s^2}}}{(\tilde{u}-b)\sqrt{a^2+s^2}},\quad a\gg 1, \tag{52}$$

где $J_0\left(a\sqrt{p^2-\tilde{u}^2}\right)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Если $a\ll 1,\ \ s\ge z+h\gg 1$ то, переходя к пределу $a\to 0$, асимптотически ограничиваем его сверху

$$I\sim\frac{e^{-\tilde{u}s}}{(\tilde{u}-b)s},\quad a\to 0, s\gg 1. \tag{53}$$

Уровень асимптотической приближенности (53) оставим без оценки, поскольку он достаточно очевиден. Оценки (52) и (53), при $a=0$, совпадают, что позволяет обобщить их формулой (52) для любых горизонтальных расстояниях от источника, соответствующих параметру $a=\sqrt{K_z}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}}$. Поскольку параметры (48), обозначенные в (51), как правило, удовлетворяют оговоренным требованиям при асимптотическом выводе, то окончательно записываем

$$\tilde{u}=\frac{1}{2\sqrt{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}};\quad b=\frac{w+2\alpha}{2K_z}\le\tilde{u};\quad \alpha\le 0;\quad s=z+h\gg 1.$$

Таким образом, выполненная асимптотическая оценка интегрального члена $I(x,y,z,h)$, учитывающего как взаимодействие примеси с подстилающей поверхностью через коэффициент поглощения α, так и вертикальные скорости движения частиц примеси $w=w_a+w_g$ (где w_a – вертикальная скорость атмосферы, $w_g\le 0$ – скорости оседание примеси), позволяет записать окончательно уравнение (50) в виде

$$q(x,y,z)=\frac{Qe^{\frac{xu}{2K_x}+\frac{yv}{2K_y}+\frac{(z-h)w}{2K_z}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z-h)^2}{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z-h)^2}{K_z}}}+$$
$$+A\cdot\frac{Qe^{\frac{xu}{2K_x}+\frac{yv}{2K_y}+\frac{(z-h)w}{2K_z}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h)^2}{K_z}}\sqrt{\frac{u^2}{K_x}+\frac{v^2}{K_y}+\frac{w^2}{K_z}}}}{4\pi\sqrt{K_xK_yK_z}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{K_x}+\frac{y^2}{K_y}+\frac{(z+h)^2}{K_z}}}, \tag{54}$$

где безразмерный коэффициент A, расположенный перед вторым слагаемым правой части, обусловлен асимптотической оценкой интегрального члена $I(x,y,z,h)$ и равен

$$A=(d+a)/(d-a) \tag{55}$$

где $d=\sqrt{(u^2/K_x)+(v^2/K_y)+(w^2/K_z)}$, $a=\left(2\alpha-(w_g+w)\right)/\sqrt{K_z}$

Из формулы (54), следует, что если $\alpha\to-\infty$, то $A\to-1$, т.е. наблюдается полное поглощение примеси поверхностью и концентрация $q(x,y,0)=0$. При удалении от поглощающей поверхности и приближении к уровню $z = h$ происходит рост концентрации. Однако, общий уровень концентрации меньше, чем над отражающей поверхностью. Если вертикальная составляющая скорости движения потока компенсирует скорость оседания частиц $w_g \le 0$, т.е. $2\alpha - (w_g + w) = 0$ и $\alpha = 0$, то выполняется условие полного отражения примеси и концентрация $q(x, y, z)$ равна удвоенному первому члену уравнения (54).

Уравнение (54) можно рекомендовать для практических расчетов концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах промышленных предприятий. Результаты его использования демонстрируются в работах авторов [7,8, 11, 12].

Выводы.

1. Доказана теорема о фундаментальности решения уравнения турбулентной диффузии (4), (5) для распределения концентрации примеси, заданной функцией $q(t, x, y, z)$ от мгновенного точечного источника мощностью Q. Фундаментальным решением нестационарного уравнения диффузии (4), (5), является функция (6) .
2. Неоднородное уравнение (4) с произвольной правой частью $Q(t, x, y, z)$, имеет частное решение (33), которое позволяет установить значение концентрации для источников примеси любого типа, удовлетворяющих условиям теоремы.
3. Получено фундаментальное решение в виде формул (50) и (54), удовлетворяющих стационарному уравнению диффузии для непрерывно действующего точечного источника с постоянной интенсивностью.
4. Выполнен учет взаимодействия примеси с подстилающей поверхностью и учет вертикальных скоростей движения частиц примеси, который позволяет привести уравнение (50) к виду формулы SVT, удобному для вычислений концентраций вредных веществ (54).
5. Формула SVT в качестве основных диффузионных параметров использует коэффициентов турбулентной вязкости $K_x = K_y, K_z$, а не масштабы диффузии σ_y, σ_z [13,14]. Коэффициенты турбулентности достоверно оцениваются в приземном и пограничном слое атмосферы.
6. Формула SVT позволяет рассчитывать концентрацию вредных веществ в трехмерной области с учетом взаимодействия всех компонент диффузии в любых направлениях без ограничения скорости ветра и расстояния от источника при любом рельефе местности. Формула учитывает скорости оседание примеси и её поглощение поверхностью, а также включает любые метеорологические условия .

Список литературы

1. *Алоян А.Е.* Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере.–М.: Наука, 2008.- 415 с.
2. *Алоян А.Е., Переходцев Д.М.* Математическое моделирование распространение примесей в пограничном слое атмосферы и регулирования мощности источников // Проблемы физики пограничного слоя атмосферы и загрязнения воздуха; (Сб.науч.ст., посвящ. 80-летию Берлянда М.Е).- СПб.: Гидрометеоиздат, 2002. С. 43-57
3. *Берлянд М.Е.,* Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы.-Л.: Гидрометеоиздат, 1975. -439 с.

4. *Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н.* Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси.–Л.: Гидрометеоиздат, 1991. -270 с.
5. *Степаненко С.Н.* Динамика турбулентно-циркуляционных и диффузионных процессов в нижнем слое атмосферы. Одесса. ТЭС,1998. - 280 с.
6. *Степаненко С.Н., Волошин В.Г.*, *Типцов С.В.* Решение уравнения турбулентной диффузии для стационарного точечного источника //Украинский гидрометеорологический журнал. -2008. -№ 3.- С. 13-25
7. *Stepanenko S.M., Voloshin V.G., Tiptsov S.V.* A New Formula for Evaluation of Level of Air Pollution with Industrial Emissions // Украинский гидрометеорологический журнал.- 2009. - № 4.- С. 227-238.
8. *Степаненко С.Н., Волошин В.Г.* Эйлерова K-GDM модель расчета концентрации в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах промышленных предприятий // Украинский гидрометеорологический журнал. -2009. -№ 5.- С. 5-15
9. *Монин А.С., Обухов А.М.* Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Труды Геофизического института АН СССР. -1954. -№24.- С. 163–187.
10. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды – М.:Наука, 1982.- 315 с.
11. *Степаненко С.Н., Волошин В.Г., Иванова Е.В.* Влияние рельефа земной поверхности на уровень загрязнения атмосферного воздуха выбросами промышленных источников // Украинский гидрометеорологический журнал. -2009. - № 5. -С. 32-42
12. *Степаненко С.Н., Волошин В.Г.* Анализ функции плотности распределения концентрации в гауссовых моделях рассеяние примеси в атмосфере // Украинский гидрометеорологический журнал. -2008. -№ 3. -С. 5-15
13. A Dispersion Model AERMOD for Industrial Source Applications. Part I: General Model Formulation and Boundary Layer Characterization //Journal of Applied Meteorology, 44(5): P.682–693
14. *Zannetti P.* Air Pollution Modeling: theories, computational methods, and available software. Computational Mechanics Publications, Southampton and Van Nostrand Reinhold. New York, 1990. -444 pp.

Динамічна модель розсіяння шкідливих речовин в атмосфері при постійних коефіцієнтах дифузії і швидкостях перенесення

Степаненко С.Н., Волошин В.Г., Типцов С.В.

Доведена теорема про фундаментальність рішення диференціального рівняння турбулентної дифузії для функції q(t,x,y,z) просторово-часового розподілу шкідливих речовин від будь-якого типу безперервно діючих джерел, які задовольняють умовам теореми. Рішення представлене рівнянням, яке назване "формулою SVT". Формула SVT містить просторові координати, складові вектора швидкості вітру і тензора турбулентної напруги, враховує поглинаючі властивості поверхні і швидкість осадження частинок шкідливих речовин.

Ключові слова: *рівняння турбулентної дифузії, модель забруднення атмосфери, взаємодію приміси з поверхнею, забруднення повітря, точкове джерело.*

Dynamic model of dispersion air pollution at permanent coefficients diffusion and speeds of transfer

Stepanenko S., Voloshin V., Tiptsov S.

A theorem is proved about solidity of decision of differential equation of turbulent diffusion for the estimation of function of q(t,x,y,z) of the temporal and spatial distributing of harmful matters in the district of action of any continuously operating sources, meeting conditions of theorem. A decision is presented equation which is adopted the "formula of SVT". The formula of SVT contains all spatial co-ordinates, constituents of vector of speed of wind and tensor of turbulent tension, takes into account taking in properties of surface and speed of besieging of particles of harmful matters.

Keywords: *equations of turbulent diffusion, model diffusion of atmosphere, pollutions of air, cooperation with a surface, point source.*