

Г. В. ХОМЕНКО, В. М. ХОХЛОВ

ГІДРОДИНАМІЧНІ
МЕТОДИ
ПРОГНОЗУ
ПОГОДИ

Підручник

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський державний екологічний університет

Г.В. Хоменко
В.М. Хохлов

ГІДРОДИНАМІЧНІ МЕТОДИ
ПРОГНОЗУ ПОГОДИ

Підручник

Затверджено
Міністерством освіти і науки України як
підручник для студентів вищих навчаль-
них закладів, які навчаються за напрямом
підготовки "Гідрометеорологія"
(Лист № 1.4/18-Г-2343 від 24.12.2007 р.)

Одеса
Екологія
2008

ББК 26.23
Х 76
УДК 551.509.313

У підручнику викладаються фізичні та математичні аспекти гідродинамічних методів короткострокового прогнозу погоди. Велика увага приділяється питанням побудови прогностичних моделей як фільтрованих, так і за повними рівняннями, і сітковим методам їх реалізації.

Підручник призначений для студентів, магістрів та аспірантів університетів, які навчаються за спеціальністю "Метеорологія", а також може бути використаний фахівцями, що працюють у сфері практичного застосування чисельних методів прогнозу погоди.

Для вивчення матеріалу, викладеного у підручнику, потрібні знання фізики атмосфери, геофізичної гідродинаміки, хвильових процесів, динамічної метеорології та математики в обсязі програм гідрометеорологічних інститутів або відповідних факультетів університетів.

Рецензенти:

д.ф.-м.н Г.М. Пірнач
д.т.н. А.В. Усов
к.геогр.н. В.М. Ситов

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1.4/18-Г-2343 від 24.12.2007 р.)

ISBN

© Одеський державний екологічний
університет, 2008
© Г.В. Хоменко, В.М. Хохлов, 2008

ЗМІСТ

	с.
Вступ	6
Передмова	8
1 Рівняння гідротермодинаміки в моделях прогнозу погоди	12
1.1 Прогноз погоди як фізико-математична задача	—
1.2 Закони збереження та система рівнянь гідротермодинаміки	18
1.3 Хвильові коливання в атмосфері та способи їх фільтрації	25
1.3.1 Незалежні розв'язки для плоских хвиль	27
1.3.2 Загальний розв'язок хвильового рівняння для ізотермічної атмосфери	32
1.3.3 Фільтрація хвильових коливань	35
1.4 Рівняння гідротермодинаміки в різних системах координат	41
1.4.1 Локальна декартова система координат	42
1.4.2 Изобарична система координат	48
1.4.3 σ -система координат	62
1.4.4 Сферична система координат	69
1.4.5 Циліндрична система координат	74
1.4.6 Урахування картографічних проєкцій	76
1.5 Питання для самоконтролю	80
2 Фільтровані моделі гідродинамічного прогнозу погоди	81
2.1 Рівняння вихору швидкості вітру	—
2.1.1 Вихор швидкості руху	—
2.1.2 Рівняння вихору швидкості у декартовій та ізобаричній системах координат	86
2.1.3 Фізичний аналіз рівняння вихору швидкості	89
2.2 Баротропна квазігеострофічна модель	105
2.3 Квазігеострофічна модель прогнозу тиску для барокліної атмосфери	112
2.4 Методологічне обґрунтування переходу до прогностичних моделей за повними рівняннями	117
2.5 Питання для самоконтролю	126
3 Чисельні методи розв'язання рівнянь гідротермодинаміки	127
3.1 Загальні принципи застосування метода сіток	—
3.2 Поняття апроксимації, узгодженості і точності скінченнорізницевих схем	137
3.3 Розв'язання скінченнорізницевих схем кроками за часом	143
3.4 Коректність, стійкість і збіжність скінченнорізницевих задач. Методи дослідження обчислювальної стійкості	149
3.4.1 Загальні положення	—
3.4.2 Дослідження стійкості скінченнорізницевих схем	155
3.4.3 Збіжність чисельного розв'язання	158

3.4.4 Дослідження обчислювальної стійкості скінченнорізницевих схем	160
3.4.5 Нелінійна обчислювальна нестійкість	161
3.5 Скінченнорізницева апроксимація похідних для різних типів сіток	165
3.6 Схеми чисельного інтегрування за часом	175
3.6.1 Дворівневі схеми	—
3.6.2 Трирівневі схеми	178
3.6.3 Схеми з спрямованими (нецентральними) різницями	180
3.6.4 Обчислювальна стійкість різних схем чисельного інтегрування	182
3.7 Спектральні методи розв'язання прогностичних задач	192
3.7.1 Основні принципи застосування спектральних методів	—
3.7.2 Основні властивості спектральних методів	197
3.7.3 Методи побудови визначальних систем рівнянь	202
3.7.4 Властивості базисних функцій	206
3.7.5 Основні труднощі, що виникають при використанні спектральних методів та способи їх усунення	213
3.8 Питання для самоконтролю	216
4 Загальні принципи побудови прогностичних моделей за повними рівняннями	217
4.1 Баротропні моделі в ізобаричній та σ -системі координат	—
4.2 Бароклінні моделі в ізобаричній та σ -системі координат	220
4.3 Постановка початкових та межових умов	225
4.3.1 Проблема початкових даних	—
4.3.2 Проблема межових умов	230
4.4 Динамічне узгодження вихідних полів	236
4.5 Розв'язання системи повних рівнянь гідротермодинаміки кроками за часом	248
4.6 Інтегральні інваріанти моделей прогнозу за повними рівняннями	253
4.6.1 Адіабатичні інваріанти	254
4.6.2 Енергетичні інваріанти	259
4.7 Питання для самоконтролю	263
5 Параметризація атмосферних процесів підсіткового масштабу в моделях за повними рівняннями	264
5.1 Загальні принципи параметризації	—
5.2 Методи параметризації променевого теплообміну	269
5.2.1 Плоскопаралельна модель переносу радіації	270
5.2.2 Використання інтегральних функцій пропускання	272
5.2.3 Метод Лаціса та Хансена	273
5.3 Параметризація процесів турбулентного обміну	276

5.3.1	Параметризація планетарного граничного шару за методом І.А. Кібеля	278
5.3.2	Параметризація процесів біля земної поверхні у планетарному граничному шарі	279
5.3.3	Об'ємно-аеродинамічна параметризація	281
5.3.4	Параметризація Блекедара	283
5.3.5	Параметризація процесів вихрової турбулентності	286
5.4	Параметризація енергії фазових переходів вологи	287
5.5	Способи параметризації конвективних процесів	292
5.5.1	Метод конвективного пристосування	—
5.5.2	Метод умовної нестійкості другого роду	294
5.5.3	Параметризація конвекції в ансамблях купчастих хмар	297
5.6	Питання для самоконтролю	299
6	Оперативні прогностичні моделі за повними рівняннями	300
6.1	Прогностична модель MM5	—
6.2	Прогностична модель ARPEGE	309
6.3	Порівняльний аналіз якості сучасних моделей прогнозу за повними рівняннями	313
6.4	Проблема передбачуваності атмосферних рухів	317
6.5	Питання для самоконтролю	324
	Бібліографічний список	326
	Предметний покажчик	327
	Додаток А. Перелік символів та сталих	332
	Додаток Б. Характерні значення метеорологічних величин та їх похідних	336
	Додаток В. Основні властивості схем чисельного інтегрування за часом	337

*Присвячується світлій пам'яті
Анатолія Федоровича Ківганова,
доктора географічних наук, професора*

ВСТУП

В останні десятиріччя методи чисельного прогнозу метеорологічних полів швидко розвивалися, а їх результати інтенсивно впроваджувались у синоптичну практику. Тому підвищення рівня метеорологічної освіти вимагає нової навчальної літератури у сфері гідродинамічних методів прогнозу погоди.

Останній підручник з цієї дисципліни був виданий ще у радянські часи в 1989 році (автори П.М. Белов, Є.П. Борисенков, Б.Д. Панін), тобто майже 20 років тому. Деякі розділи цього підручника повністю застаріли (наприклад, розділ, присвячений сучасним оперативним моделям), інші – потребують уточнення у відповідності до сучасних досягнень в області чисельних методів прогнозу погоди. У 2002 році викладачами кафедри теоретичної метеорології та метеорологічних прогнозів Одеського державного екологічного університету був виданий навчальний посібник "Гідродинамічні моделі прогнозу погоди і сіткові методи їх реалізації", але він орієнтувався в основному на самостійну роботу студентів при виконанні практичних завдань з окремих розділів дисципліни.

Цей підручник написано згідно з навчальною програмою курсу "Гідродинамічні методи прогнозу погоди" і розрахований на студентів-метеорологів старших курсів та магістрів. У його основу покладено курс лекцій з гідродинамічних методів прогнозу погоди, який розроблявся протягом багатьох років викладачами Одеського гідрометеорологічного інституту професорами А.Ф. Ківгановим і В.А. Шнайдманом. Центральне місце у програмі цієї дисципліни належить формулюванню постановки задачі та логічному і фізичному обґрунтуванню ідей, за допомогою яких була побудована теорія великомасштабних атмосферних рухів і розроблені методи їх прогнозування. В підручнику послідовно викладаються основні принципи побудови прогностичних моделей і велика увага при цьому надається розгляданню найпростіших (фільтрованих – квазігеострофічних) моделей, оскільки саме на прикладі таких моделей зручніше ознайомити студентів з постановкою прогностичних задач з фізичної та математичної точок зору і методами їх чисельної реалізації.

Основою фільтрованих моделей є рівняння переносу абсолютного вихору вектора швидкості вітру. Це рівняння відіграє фундаментальну роль в аналізі великомасштабних атмосферних рухів, тому в підручнику

надається детальне тлумачення фізичного розуміння його членів.

Оскільки у теперішній час в оперативній практиці використовуються прогностичні схеми, які ґрунтуються на інтегруванні повних рівнянь динаміки атмосфери, у книзі достатньо докладно обговорюються самі ці рівняння у різних системах координат та принципи побудови на їх основі гідродинамічних моделей.

Детально також розглядається найбільш прямий шлях чисельного розв'язання повних рівнянь, а саме – метод сіток, який дозволяє студентам у межах часу, відведеного для практичних занять та самостійної роботи, розробляти математичні алгоритми прогностичних задач і реалізувати їх на ПЕОМ. Велика увага приділяється пов'язаним з методом сіток проблемам скінченнорізницевої апроксимації просторових похідних, чисельного інтегрування за часом та обчислювальної стійкості.

Разом з методом сіток викладаються й значно складніші для чисельної реалізації спектральні методи, які в останні роки все більше використовуються у глобальних і регіональних прогностичних моделях за повними рівняннями.

У книзі розглядаються також методи параметризації таких процесів, як променистий та турбулентний теплообмін, ефекти граничного шару атмосфери, конвекція та інші процеси, що не враховуються у великомасштабних атмосферних моделях.

В останньому розділі, як приклад, подається опис двох моделей (MM5 і ARPEGE), які широко використовуються в оперативній практиці багатьох країн. У загальних рисах розглядаються також питання щодо проблеми передбачуваності атмосферних рухів.

В Одеському гідрометеорологічному інституті "Гідродинамічні методи прогнозів погоди" багато років викладав студентам та аспірантам доктор географічних наук, професор А.Ф. Ківганов. Він постійно доповнював і удосконалював цей курс лекцій і залишив після себе багато матеріалів, що були оброблені та використані авторами при написанні цього підручника. Розділ 2 підручника майже не зазнав редакційних змін у порівнянні з рукописом А.Ф. Ківганова. Розділи 1 і 3 написані Г.В. Хоменко, розділи 5 і 6 В.М. Хохловим, а розділ 4 спільно обома авторами.

Під час написання підручника автори прагнули до того, щоб студенти, ознайомившись з викладеним матеріалом, виявились підготовленими до інтерпретації прогностичної продукції моделей та використання її в синоптичній практиці.

ПЕРЕДМОВА

Проблема передбачення стану атмосфери є надзвичайно складною: зміни полів метеорологічних величин визначаються багатьма факторами, що складно взаємодіють, і тому на превелику силу піддаються передобчисленню. Рухи атмосфери керуються фізичними законами, які можуть бути виражені рівняннями гідродинаміки та термодинаміки.

Думка про принципову можливість передобчислення погоди на основі рівнянь динаміки атмосфери була вперше виказана відомим теоретиком-метеорологом, засновником так званої норвезької школи метеорологів Вільгельмом Б'єркнесом. У 1904 році в своїй статті "Проблема передбачення погоди, що розглядається з точки зору математики та механіки" він писав: "у застосуванні теорем гідродинаміки до руху повітря ... зрештою існує лише одна задача, варта наших зусиль: обчислювати наперед майбутній стан". У цій статті вперше проблема прогнозу погоди формулюється як задача з початковими даними для рівнянь гідромеханіки бароклінної рідини.

В. Б'єркнес добре розумів складність цієї задачі і тому не намагався розв'язати її негайно. Навпаки, він ясно уявляв собі, що метеорологічна наука його часу ще дуже далека від можливості розв'язання своєї головної задачі – передобчислення погоди.

Проте через декілька років (у 1913 році) англійський вчений Л'юїс Річардсон зробив спробу передобчислення основних метеорологічних величин на добу уперед. Він розробив спосіб розв'язання рівнянь у частинних похідних (найпростіший варіант так званого методу сіток) і застосував цей спосіб для чисельного інтегрування системи рівнянь динаміки атмосфери.

Лише у 1922 році Л. Річардсон завершив своє дослідження і опублікував результати у книзі "Передбачення погоди за допомогою чисельного процесу". Проте смілива спроба Л. Річардсона не була успішною: складений після дуже тривалих обчислень прогноз погоди на одну добу (на 20 травня 1910 р. для району Нюрнберг-Аугсбург) виявився незадовільним. З сучасних позицій причини невдачі Л. Річардсона є зрозумілими. По-перше, як початкові дані використовувалася вкрай недостатня інформація (у той час малися дані тільки наземних спостережень, до того ж по рідкій сітці станцій у Європі); по-друге, застосовувались недосконалі скінченнорізницеві схеми (зокрема, не дотримувався встановлений лише у 1928 році критерій Куранта-Фрідрікса-Леві для співвідношення просторового та часового кроків); по-третє, для розв'язання задачі використовувалися зайво складні рівняння, які поряд з важливими для погоди рухами (синоптичними процесами) ураховували й всілякі «шуми» типу акустичних хвиль, дихання рослин тощо.

Незважаючи на невдалий дослід, робота Л. Річардсона відіграла величезну роль у подальшому розвитку чисельного прогнозу погоди. Вивчення цієї роботи надало можливість сучасним дослідникам використовувати важливі ідеї, висловлені Річардсоном, і, разом з тим, уникнути його помилки. Проте розвиток наміченого Річардсоном шляху був у ті часи практично неможливим, оскільки через відсутність обчислювальних машин розрахунок кожного прогнозу забирав декілька людино-років.

Інший шлях дослідження був намічений у роботах теоретиків-метеорологів радянської школи, засновником якої був А.А. Фрідман. Цей шлях, правильність якого підтвердилася подальшим розвитком науки, полягав у виділенні головних погодоутворюючих факторів оцінкою окремих членів рівнянь з подальшим перетворенням цих рівнянь. А.А. Фрідман спільно з Т. Гессельбергом склав у 1914 році таблиці порядків метеорологічних величин та їх похідних і використав їх для оцінки членів рівнянь динаміки атмосфери.

Подальший розвиток чисельних методів прогнозу погоди був пов'язаний з ім'ям вченого-гідромеханіка І.А. Кібеля. У 1940 році була опублікована його робота "Приложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости", в якій вперше був запропонований принцип спрощення прогностичних рівнянь гідромеханіки - "розкладення за малим параметром", яке дозволяє відфільтрувати з розв'язків рівнянь неістотні для погоди "метеорологічні шуми". Цей підхід, відомий під назвою квазігеострофічного наближення, у подальшому був основою для створення гідродинамічної теорії короткострокового прогнозу погоди.

Наступним великим кроком у розвитку чисельних методів була побудова нелінійної однорівневої баротропної моделі вченими Дж. Чарні (1948-49 рр.) та О.М. Обуховим (1949 р.). Ця модель відразу ж була використана для практичних розрахунків створювачем першої електронно-обчислювальної машини (ЕОМ) Дж. фон Нейманом, який разом з Дж. Чарні та Ф. Фьортофтом був співавтором однієї з перших робіт з реалізації рівнянь у квазігеострофічному наближенні на ЕОМ. Результати цього першого прогнозу були цілком задовільними. Насамперед, у порівнянні з результатом Річардсона, прогноз виявився "метеорологічним" і існувала збіжність на графічному рівні між спрогнозованим та спостереженим полями тиску.

Створення гідродинамічної теорії короткострокового прогнозу полів метеорологічних величин було великим досягненням фізики атмосфери у післявоєнні роки. У Радянському Союзі на початку 1950-х років були виконані дослідження з розробки тривимірних геострофічних прогностичних схем для бароклінної атмосфери на основі спільного інтегрування рівнянь вихору та припливу тепла. Найдокладніше це питання було розглянуте у циклі робіт М.І. Булеєва і Г.І. Марчука. На основі цих

рівнянь були побудовані методи чисельного прогнозу полів геопотенціалу, температури, вітру і вертикальних швидкостей у тропосфері та нижній стратосфері.

Численні експерименти і практична перевірка показали, що квазігеострофічні моделі мають істотні недоліки в описі атмосферних процесів. Ці дефекти викликані обмеженою застосовністю припущення про квазігеострофічність при розгляді рухів глобального масштабу і при урахуванні ефектів тертя та джерел тепла. Спроби дослідників покращити прогностичні моделі залученням до них агеострофічних відхилень мали тільки обмежений успіх.

Треба відзначити, що відразу ж після вдалого прогнозування Чарні висловив думку, що набагато більших успіхів можна досягти використовуючи примітивні (нефільтровані) рівняння руху, як це намагався зробити Річардсон. Але існувало дві обставини, які не дозволяли відразу ж перейти від фільтрованих моделей до моделей за примітивними (повними) рівняннями. По-перше, якщо застосовуються примітивні ейлереві рівняння, на величину кроку за часом в скінченнорізницевих рівняннях накладається жорстке обмеження. По-друге, горизонтальна дивергенція не може бути розрахована з достатньою точністю. Більше того, горизонтальна дивергенція є тільки однією величиною з багатьох, які не можуть бути спостережені, і до яких належить і прискорення у горизонтальній площині. Перша обставина означає, що при інтегруванні системи рівнянь замість часового кроку у дві години (в фільтрованих моделях) треба застосовувати крок порядку декількох хвилин в моделях за повними рівняннями. Нагадаємо, що на початку 1950-х років обчислювальна потужність комп'ютерів була невеликою, а зменшення часового кроку визначає збільшення у декілька разів кількості операцій для прогнозу на добу.

Щоб дослідити вплив другої обставини, Чарні та Фрімен здійснили інтегрування баротропного примітивного рівняння, в якому містився не тільки квазігеострофічний розв'язок, що повільно змінювався, а й швидкі гравітаційні хвилі. На початку інтегрування вони прирівняли дивергенцію до нуля, а потім порівняли результат баротропного прогнозу (в якому гравітаційні хвилі були відфільтровані) та прогнозу за повними рівняннями. Як виявилось, гравітаційні хвилі затухають через добу інтегрування і не впливають на повільні хвилі. Спираючись на такі результати, Чарні зробив висновок про можливість використання для прогнозу системи повних рівнянь, як це з часом відбулося в оперативному чисельному прогнозі погоди. Відзначимо, що система використаних у цьому випадку повних рівнянь не містила дисипативних та неадіабатичних членів, тому що припускалось, що вони мало впливатимуть на результат прогнозу, який здійснюється на одну чи дві доби. Проте, Чарні навів деякі фізичні процеси (конденсація, променистий теплообмін, турбулентні рухи тощо), які мають менші масштаби і не ураховуються в макромасштабних

моделях. Такі процеси (так звані процеси підсіткового масштабу) повинні залучатися до моделі через параметризацію, результатом якої є методи розрахунку характеристик конвекції, складових теплового балансу, турбулентних потоків кулякості руху, тепла і вологи.

Повні рівняння – це ейлерові рівняння руху, які враховують вплив обертання Землі та спрощені за допомогою припущення про гідростатичний баланс. Моделі за повними рівняннями містять менше динамічних обмежень, ніж квазігеострофічні моделі, але потребують більшого обсягу обчислень для розрахунку прогнозу. Завдяки швидкодії ЕОМ, що істотно збільшилася, та прогресу в обчислювальних методах, необхідних для розв'язання гідродинамічних задач, у теперішній час прогностичні моделі базуються на повних рівняннях.

У розвиток чисельних методів прогнозу погоди на цьому етапі великий внесок зробили радянські вчені О.Н. Блінова, О.М. Обухов, Г.І. Марчук, М.І. Юдін, С.А. Білоусов, Л.В. Беркович, Л.С. Гандін і закордонні – Н. Філліпс, Дж. Чарні, К. Хінкельман, Дж. Смагоринський, Ф. Томпсон, Ф. Мезингер, А.Аракава та інші.

Незважаючи на те, що науковцями США та СРСР була виконана велика праця з реалізації чисельного прогнозу погоди, перші оперативні чисельні прогнози погоди почали здійснюватися у Швеції групою Россбі з вересня 1954 р., тобто на шість місяців раніше, ніж у США.

Розвиток чисельних прогнозів погоди в останні роки був пов'язаний, насамперед, з реалізацією моделей за повними рівняннями гідротермодинаміки, в які, поступово, додавалися все більш фізично обґрунтовані схеми параметризації підсіткових ефектів, збільшувалося їх розділення як у горизонтальній, так й у вертикальній площині, залучалися різноманітні джерела одержання гідрометеорологічної інформації тощо.

З початку 1980-років використання чисельних методів прогнозу погоди у тому чи іншому вигляді (хоч би у формі прогностичних карт) здійснюється практично в усіх країнах світу. Прогностичні моделі, що використовуються, можуть розроблятися в метеорологічних центрах або запозичатися.

Використання прогностичних моделей того чи іншого класу визначається метеорологічною зацікавленістю конкретної країни, потужністю обчислювальної техніки, що є в метеорологічних центрах, а також зобов'язаннями, узятими в межах Всесвітньої метеорологічної організації або за двосторонніми угодами з іншими країнами.

РОЗДІЛ 1

РІВНЯННЯ ГІДРОТЕРМОДИНАМІКИ В МОДЕЛЯХ ПРОГНОЗУ ПОГОДИ

1.1 Прогноз погоди як фізико-математична задача

Прогноз погоди є прогнозом полів основних метеорологічних величин: тиску, температури, вологості та швидкості руху. Фізичною основою для гідродинамічного прогнозу є закони, яким підкоряються поля зазначених величин. Ці закони є окремим виявом загальних законів фізики для рухів та змін стану повітря в атмосфері, а саме фундаментальних законів збереження кількості руху (імпульсу), маси та енергії.

Таким чином, фізична та математична основа усіх методів гідродинамічного прогнозу погоди полягає у цих законах збереження, які математично виражаються в рівняннях Ньютона для суцільного середовища, рівнянні нерозривності (збереження маси) та рівнянні припливу тепла або першого початку термодинаміки. Перелічені рівняння є універсальними у тому сенсі, що їх можна застосувати до усіх рідин у звичайному діапазоні змін тиску, температури та швидкості незалежно від складу рідини, її стану та зовнішніх меж. Математичний запис законів збереження називають рівняннями динаміки атмосфери.

Загальні закони збереження кількості руху, маси та енергії виявлені вже давно і є добре відомими, але математичне формулювання цих законів для метеорологічних цілей відрізняється деякими особливостями. Наприклад, відомо, що другий закон Ньютона (закон збереження кількості руху або імпульсу) можна застосовувати тільки для руху відносно інерційної системи координат, тобто системи, яка перебуває у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху. Зокрема, інерційною є система координат, яка рухається без прискорення відносно "нерухомих" зірок. Для такої системи відліку другий закон Ньютона можна подати у вигляді

$$\frac{d\mathbf{V}_a}{dt} = -\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_g + \mathbf{D}; \quad (1.1.1)$$

У рівнянні (1.1.1) \mathbf{V}_a – швидкість руху повітря відносно інерційної системи координат; \mathbf{F}_g – гравітаційна сила; $\mathbf{D} = \mathbf{D}_m + \mathbf{D}_t$ – вектор дисипативних сил, які складаються з сил молекулярної \mathbf{D}_m і турбулентної \mathbf{D}_t в'язкості; \mathbf{F}_p – сила баричного градієнта, обумовлена просторовими змінами атмосферного тиску

$$\mathbf{F}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.1.2)$$

де ρ - густина повітря;

p - атмосферний тиск;

$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ - оператор Гамільтона (умовний), векторний

диференціальний оператор (набла).

Сили \mathbf{F}_p , \mathbf{F}_g і \mathbf{D} є реально діючими силами, під впливом яких утворюються атмосферні рухи. Ці сили віднесені до одиничної маси і тому є прискореннями відповідних сил.

Проте, метеорологічні рухи атмосфери зручно відносити до систем координат, нерухомо пов'язаних з Землею, яка навколо полярної осі робить 365 обертів на рік (у відношенні до Сонця), здійснює один оберт навколо Сонця протягом року та рухається рівномірно-прискорено своєю орбітою навколо Сонця. Таким чином, будь-яка система координат, нерухомо пов'язана з Землею, не є інерційною системою навіть у відношенні до Сонця, яке у свою чергу рухається з прискоренням відносно нерухомих зірок. Відзначимо, що найбільші прискорення Землі відносно "нерухомих" зірок обумовлені її добовим обертанням. Це дозволяє розглядати Землю як тіло, що здійснює чисте обертання відносно інерційної системи відліку, яка переміщується разом з Землею. Тому для того, щоб застосувати другий закон Ньютона для вивчення атмосферних рухів, необхідно урахувати прискорення, обумовлені тільки добовим обертанням Землі. Інакше кажучи, абсолютне прискорення потрібно замінити еквівалентом у відносній системі координат; до того ж реальні сили залишаються однаковими у будь-якій системі відліку. Таким чином,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{r} = -\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_g + \mathbf{D}, \quad (1.1.3)$$

де $\boldsymbol{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ - вектор кутової швидкості обертання Землі;

ω - кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі;

\mathbf{r} - радіус-вектор кола широти, яка визначає положення частинки повітря, що розглядається ($r = a \cos\varphi$, де a - радіус Землі; φ - широта місця).

У рівнянні (1.1.3) $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$ та $\omega^2 \mathbf{r}$ є прискореннями, які пов'язані з добовим обертанням Землі, або відповідно сила Коріоліса та відцентрова сила, віднесені до одиничної маси. Перенесемо зазначені сили до правої частини рівняння (1.1.3) і одержимо математичний запис другого закону Ньютона у векторній формі відносно системи відліку, яка обертається разом з Землею з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\mathbf{F}_p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}_g + \omega^2 \mathbf{r} + \mathbf{D}. \quad (1.1.4)$$

Внаслідок того, що гравітаційна сила \mathbf{F}_g та відцентрова сила $\omega^2 \mathbf{r}$ є функціями тільки положення точки і не залежать від руху відносно системи, що обертається, зручно розглядати їх як одну силу \mathbf{G} , яку називають силою тяжіння, тобто

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_g + \omega^2 \mathbf{r}. \quad (1.1.5)$$

Згідно з законом всесвітнього тяжіння $\mathbf{F}_g = \gamma \frac{M \cdot m}{a^2}$, де γ – гравітаційна стала; M – маса Землі; m – маса частки, що розглядається (у рівняннях динаміки атмосфери $m = 1$), тобто прискорення цієї сили є майже сталою величиною. З іншого боку, другий доданок у рівнянні (1.1.5) змінюється залежно від географічної широти місця. Але у метеорологічних задачах прискорення сили тяжіння g вважається сталою величиною, яка дорівнює приблизно $9,8 \text{ м с}^{-2}$.

З урахуванням рівностей (1.1.2) та (1.1.5) рівняння (1.1.3) можна переписати наступним чином:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{G} + \mathbf{D}. \quad (1.1.6)$$

Для того, щоб одержати розв'язок, векторне рівняння (1.1.6) повинно бути розкладене на три скалярні рівняння, які відповідають складовим по трьох різних координатних осях. Оскільки рівняння (1.1.6) виконується для будь-яких координатних напрямків, у принципі можна вибрати їх довільно. Але для зручності застосування до метеорологічних даних дві осі координат (x і y) вибираються на рівневій поверхні, яка є перпендикулярною до вектора сили тяжіння у даній точці (або є нормальною до місцевої вертикалі); при цьому вісь x спрямована по дотичній до широтного кола на схід, а вісь y – по дотичній до меридіана на північ. Третя координатна вісь z є перпендикулярною до рівневої поверхні та спрямована у зеніт, тобто по радіусу Землі від центра. Така система координат називається локальною декартовою системою координат (ДСК). Зі сказаного вище випливає, що ДСК (вона має назву також стандартної декартової системи координат) є ортогональною криволінійною системою, тому вигляд проекцій векторного рівняння руху (1.1.6) у ній відрізняється від вигляду рівнянь у локальній прямокутній системі координат. Проте, якщо області прогнозу є невеликими, а їх бічні межі не надто близько

розташовані до полюсів, можна знехтувати малими поправочними членами та записати векторне рівняння (1.1.6) у вигляді трьох скалярних рівнянь:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v - \ell_1 w + D_x; \quad (1.1.7)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u + D_y; \quad (1.1.8)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 u + D_z, \quad (1.1.9)$$

де u, v, w – компоненти по осях x, y, z вектора \mathbf{V} – швидкості відносно системи координат, що обертається;

$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ – компоненти вектора градієнта тиску ∇p ;

$\ell = 2\omega \sin \varphi, \ell_1 = 2\omega \cos \varphi$ – перший і другий параметри Коріоліса;

D_x, D_y, D_z – відповідні компоненти сили в'язкості.

Детальніше рівняння гідротермодинаміки у локальній декартовій системі координат розглядатимуться нижче (п. 1.4.1).

У наступних розділах буде показано, що для великомасштабних рухів повітря вільної атмосфери рівняння (1.1.7)-(1.1.9) спрощуються та набувають вигляду:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \quad (1.1.10)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \quad (1.1.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (1.1.12)$$

З перших двох рівнянь випливає, що основними силами, які діють в атмосфері вище планетарного граничного шару, є сили баричного градієнта і Коріоліса. Третє рівняння (1.1.12) показує, що для великомасштабних процесів вертикальна складова баричного градієнта майже урівноважується силою тяжіння, тобто атмосфера перебуває у стані гідростатичної рівноваги. Таким чином, рівняння (1.1.10)-(1.1.12) є математичним записом закону збереження кількості руху для великомасштабних атмосферних процесів.

Другим законом, який відіграє істотну роль у теорії великомасштабних атмосферних рухів, є закон збереження маси

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \mathbf{V} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad (1.1.13)$$

де $\operatorname{div} \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ - дивергенція вектору швидкості \mathbf{V} .

Третій з фізичних законів, які й є основою динамічного передбачення погоди, математично виражається рівнянням припливу тепла

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{pc_p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{\rho c_p}, \quad (1.1.14)$$

де T - температура (в абсолютній шкалі) повітря;

$R = c_p - c_v$ - питома газова стала для сухого повітря;

c_p, c_v - питомі теплоємкості при сталому тиску та об'єму відповідно;

ε - джерела і стоки тепла до одиничного об'єму повітря за одиницю часу.

Особливий інтерес з теоретичної точки зору викликає випадок адіабатичних процесів, за яких приплив тепла є відсутнім. Тоді рівняння (1.1.14) набуває вигляду

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{pc_p} \frac{dp}{dt}, \quad (1.1.15)$$

П'ять рівнянь (1.1.10)-(1.1.13) та (1.1.15) містять шість невідомих: u, v, w, ρ і T , тобто кількість невідомих перевищує кількість рівнянь, внаслідок чого ця система є незамкненою. Для її замикання використовується рівняння стану

$$p = \rho RT, \quad (1.1.16)$$

яке зв'язує характеристики стану повітря (тиск, густину та температуру) і не містить нових змінних.

Сформульована у загальному вигляді задача чисельного прогнозу погоди полягає у визначенні розв'язку системи (1.1.10)-(1.1.13), (1.1.15), (1.1.16), яка задовольняє заданим початковим умовам для u, v, ρ і T та відповідним межовим умовам, а саме: тиск та перенос маси перетворюються в нуль на нескінченно великій висоті, а потік повітря через поверхню землі є відсутнім. Оскільки система є нелінійною, її розв'язання в аналітичній формі є неможливим і для інтегрування застосовуються наближені чисельні методи, зокрема метод сіток. Сутність цього метода полягає у

тому, що значення метеорологічних величин в області визначення розв'язку задаються у дискретних точках (у так званих вузлах сітки), а похідні замінюються відношенням скінченних різниць. У результаті такої заміни одержуються скінченнорізницеві рівняння.

Система рівнянь гідротермодинаміки разом з межовими умовами, поданими у скінченнорізницевому вигляді на множині вузлів сітки у межах області визначення розв'язків, називається скінченнорізницевою схемою або чисельною моделлю. Після заміни похідних скінченними різницями замість системи диференціальних рівнянь одержується замкнена система алгебраїчних рівнянь. Таким чином, метод сіток дозволяє звести розв'язання крайової задачі з початковими умовами до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

У загальних рисах процедура прогнозу на основі рівнянь гідротермодинаміки методом сіток може бути подана таким чином:

- у початковий момент часу t_0 у вузлах просторової сітки точок задаються початкові умови;

- у межових вузлах, тобто у точках, розташованих на поверхнях, які обмежують область розв'язання, ставляться межові умови;

- за початковими значеннями метеорологічних величин, що є відомими зі спостережень, використовуючи межові умови, розраховуються усі члени прогностичних рівнянь, які містять похідні у просторі, а також залежні змінні в усіх внутрішніх вузлах сітки; сума цих членів у кожному прогностичному рівнянні дорівнює частинній похідній за часом, тобто локальній похідній (відзначимо, що прогностичним називається рівняння, яке містить часову похідну);

- використовуючи скінченнорізницеві аналоги похідних за часом та початкові умови, обчислюються значення шуканих метеорологічних величин (u, v, T) для моменту часу $t_0 + \delta t$, де δt – крок за часом;

- за допомогою діагностичних рівнянь (які не містять часових похідних), обчислюються ті метеорологічні величини, для яких немає прогностичних рівнянь.

У результаті одержуються поля прогностичних значень усіх метеорологічних величин, які фігурують у системі рівнянь гідротермодинаміки, для моменту часу $t_0 + \delta t$. Одержані поля метеорологічних величин використовуються як початкові для прогнозу на наступному часовому кроці. Повторюючи процедуру, можна одержати прогностичні поля метеорологічних величин для заданого моменту часу $t_0 + N\delta t$, де $N\delta t$ – завчасність прогнозу. Розглянутий метод послідовного розв'язання рівнянь називається методом кроків у часі. Цей метод використовується в усіх чисельних моделях.

На закінчення відзначимо, що чисельний прогноз погоди є однією з найскладніших задач у галузі математичної фізики. Це пов'язано з проблемами замикання системи рівнянь, завдання початкових та межових умов.

вих умов, з вибором методів чисельного інтегрування, які будуть розглянуті далі у відповідних розділах.

1.2 Система рівнянь гідротермодинаміки

У дослідженнях у галузі гідродинамічного прогнозу погоди атмосфера розглядається як середовище сталого газового складу, яке може стискатися, вважатися суцільним, а також яке перебуває під впливом сили земного тяжіння і обертається разом з Землею навколо її осі. Таке припущення задовільно описує головні закономірності руху повітря у нижніх шарах атмосфери – тропосфері, верхня межа якої розташована близько 10 км над рівнем землі, і нижній стратосфері з верхньою межею близько 35 км. Ці два шари містять у собі 99,4% усієї маси атмосфери. У гідродинамічних методах прогнозу погоди саме у цих двох шарах склад повітря можна вважати сталим, знехтувати дією електромагнітних сил, не брати до уваги особливості руху, пов'язані з динамікою розріджених газів.

Як вже відзначалося у попередньому підрозділі, незважаючи на різноманітність конкретних процесів, що спливають в атмосфері як у суцільному і стисливому середовищі, в основі їх моделювання лежать три фундаментальні фізичні закони збереження: закон збереження імпульсу (кількості руху) або другий закон Ньютона, закон збереження маси і закон збереження енергії:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{G} + \mathbf{D}; \quad (1.2.1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{V}; \quad (1.2.2)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{\rho c_p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{\rho c_p}, \quad (1.2.3)$$

Рівняння руху (1.2.1) з урахуванням наступного виразу для індивідуальної похідної

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (1.2.4)$$

можна записати в іншій формі, що відображає закон збереження імпульсу,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p - \rho 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \rho \mathbf{G} + \rho (\mathbf{D}_m + \mathbf{D}_t). \quad (1.2.5)$$

Як відомо з курсу геофізичної гідродинаміки та динамічної метеорології, проекції сили молекулярної в'язкості \mathbf{D}_m на осі декартової системи координат мають вигляд:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{D}_m)_x &= \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{V} + \nu \nabla^2 u; \\ \rho(\mathbf{D}_m)_y &= \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{V} + \nu \nabla^2 v; \\ \rho(\mathbf{D}_m)_z &= \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{V} + \nu \nabla^2 w,\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

де ν – коефіцієнт молекулярної в'язкості.

Щодо сили турбулентної в'язкості \mathbf{D}_t , то на підставі напівемпіричної теорії турбулентності її проекції на осі x, y, z можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_t)_x &= \frac{\partial}{\partial x} k_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}; \\ (\mathbf{D}_t)_y &= \frac{\partial}{\partial x} k_s \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_s \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}; \\ (\mathbf{D}_t)_z &= \frac{\partial}{\partial x} k_s \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_s \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial \bar{w}}{\partial z},\end{aligned}\tag{1.2.7}$$

де $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ – осереднені складові вектора швидкості;

k_s, k_z – горизонтальний і вертикальний коефіцієнти турбулентності.

Рівняння руху (1.2.1), в яких ураховуються тільки сили молекулярної в'язкості, мають назву рівнянь Нав'є-Стокса; якщо ураховуються тільки сили турбулентної в'язкості, яка набагато більша за силу молекулярної в'язкості, то маємо рівняння Рейнольдса; і, нарешті, якщо розглядати випадок нев'язкого середовища ($\mathbf{D}_m = \mathbf{D}_t = 0$), наприклад, для великомасштабних рухів вільної атмосфери, то рівняння горизонтального руху перетворюються у рівняння Ейлера, а третє вироджується у рівняння статки.

Відзначимо, що рівняння Нав'є-Стокса описують ламінарні течії, які характеризуються миттєвими значеннями метеорологічних величин: швидкості течії, тиску, густини. Рівняння Рейнольдса використовуються для опису турбулентних рухів, які можна охарактеризувати лише осередненими значеннями зазначених метеорологічних величин.

З (1.2.6), (1.2.7) видно, що сили в'язкості \mathbf{D}_m і \mathbf{D}_t можна вважати пропорційними тензору в'язких напружень. Так, якщо атмосферу розглядати як нестисливе середовище ($\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$), то з (1.2.6) випливає, що

$$\mathbf{D}_m = \nu \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (1.2.8)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа (лапласіан).

Можна також уважати, що у течіях, де добре розвинута турбулентність, $k_s = k_z = k_t = \text{const}$ (k_t - коефіцієнт турбулентності, який характеризує інтенсивність переносу в просторі кількості руху турбулентними вихорами). Тоді силу турбулентної в'язкості у векторній формі можна записати, як

$$\mathbf{D}_t = k_t \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (1.2.9)$$

Якщо осі декартової системи координат, що обертається разом з Землею, лежать у горизонтальній площині і вибрані таким чином, що вісь x спрямована по дотичній до кола широти із заходу на схід, вісь y - по дотичній до меридіана з півдня на північ, а вісь z - по вертикалі угору, тобто по радіусу Землі від її центра, то проекції сил тяжіння \mathbf{G} і Кориоліса $\mathbf{F}_k = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$ на відповідні осі дорівнюють (курс геофізичної гідродинаміки):

$$\begin{aligned} g_x &= g_y = 0; \\ g_z &= |\mathbf{G}| = -g; \\ F_x &= -2\omega_y w + 2\omega_z v; \\ F_y &= -2\omega_z u + 2\omega_x w; \\ F_z &= -2\omega_x v + 2\omega_y u. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

З урахуванням того, що у вибраній системі координат $\omega_x = 0$, $\omega_y = \omega \cos \varphi$, $\omega_z = \omega \sin \varphi$, проекції сили Кориоліса запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} F_x &= 2\omega v \sin \varphi - 2\omega w \cos \varphi; \\ F_y &= -2\omega w \sin \varphi; \\ F_z &= 2\omega u \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Зокрема, якщо урахувати, що у помірних широтах для процесів макромасштабу горизонтальні компоненти потоку u , v (складові швидкості вітру) набагато більші за його вертикальну складову w , а також ту обставину, що вертикальна проекція сили Кориоліса F_z менше інших сил, що діють у вертикальній площині (тяжіння і баричного градієнта), спів-

відношення (1.2.11) без особливих похибок можна використати у вигляді:

$$\begin{aligned} F_x &= 2\omega v \sin \varphi; \\ F_y &= -2\omega u \sin \varphi; \\ F_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Оскільки скалярний добуток $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{V}$ дорівнює нулю, то зрозуміло, що \mathbf{F}_k – це сила, яка діє тільки під прямим кутом до повітряного потоку. Таким чином, вона є силою, що відхиляє, і яка не виконує роботу. Це так звана інерційна сила, яка не впливає на зміну швидкості частинки, впливаючи лише на характер траєкторії її переміщення. Отже, якщо до рівняння руху (1.2.5) залучити тільки сили молекулярної в'язкості (1.2.8), то з урахуванням (1.2.10) рівняння руху у векторній формі можна записати у вигляді

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla p + \rho g + \rho(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) - \nu \nabla^2 \mathbf{V} = 0. \quad (1.2.13)$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Різноманітні класичні рівняння і види нестационарної течії, що утворюють єдине ціле у природі, можна одержати з (1.2.13), зберігаючи домінуючі члени. У табл. 1.2.1 наведені пронумеровані члени рівняння (1.2.13) і зазначені рівняння та види течій, які пов'язані з відповідними членами.

Навіть з попереднього аналізу рівняння (1.2.13) випливає, що воно є практично універсальним для опису широкого кола атмосферних рухів, які мають місце в реальній атмосфері. З цієї точки зору стає очевидним, що при моделюванні конкретних атмосферних процесів спочатку

Таблиця 1.2.1 – Класичні течії та рівняння

Нумерація членів у (1.2.13)						Назви класичних рівнянь і течій
1	2	3	4	5	6	
	*	*	*			Рівняння Бернуллі
		*	*			Рівняння гідростатики
		*		*		Рівняння геострофічного і термічного вітру
	*	*		*		Градiєнтна течія
*	*			*		Інерційна течія
		*			*	Течія Пуазейля
		*		*	*	Спіраль Екмана
*	*	*	*	*	*	Рівняння Нав'є-Стокса
*	*	*	*	*		Рівняння Ейлера

належить оцінити роль кожного з членів, що входять до системи рівнянь (1.2.1)-(1.2.3), щоб з'ясувати, які з них є головними або домінуючими, а впливом яких можна знехтувати. Це один з об'єктивних методів класифікації атмосферних процесів різного масштабу, які реалізуються в атмосфері.

Тепер сформулюємо вихідну систему рівнянь, яка використовується при моделюванні різних видів атмосферних процесів. При цьому, векторне рівняння руху записується у скалярному вигляді, тобто проектується на вісі вибраної системи координат.

Рівняння руху (1.2.13) для одиничної маси повітря у проекціях на вісі декартових координат мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= 2\omega v \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -2\omega u \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \nabla^2 w.\end{aligned}\tag{1.2.14}$$

Рівняння нерозривності записується, як

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0,\tag{1.2.15}$$

а рівняння припливу тепла -

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{RT}{pc_p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{\rho c_p}.\tag{1.2.16}$$

Система рівнянь гідротермодинаміки (1.2.14)-(1.2.16) для сухого або вологого ненасиченого повітря за умови, що приплив тепла ε є відомою величиною, містить шість невідомих (u, v, w, ρ, p, T) миттєвих значень відповідних метеорологічних величин, тому вона є незамкненою (невідомих більше, ніж рівнянь) і потрібне ще одне додаткове рівняння (або співвідношення), яке пов'яже функціонально будь-які з шести перелічених невідомих функцій. Рівняння стану

$$p = \rho RT\tag{1.2.17}$$

є саме таким зручним рівнянням, якого достатньо для замкнення вихід-

ної системи (1.2.14)-(1.2.16).

При завданні відповідних початкових і межових умов задача (1.2.14)-(1.2.17) у найзагальнішій постановці сформульована коректно.

Для урахування турбулентного характеру атмосферних рухів у системі (1.2.14)-(1.2.17) необхідно перейти від миттєвих значень метеорологічних величин до їх середніх або згладжених. При цьому в нових рівняннях з'являться складові сили турбулентної в'язкості $(D_t)_x$, $(D_t)_y$, $(D_t)_z$, які є набагато більшими за відповідні складові сили молекулярної в'язкості, тому останні можна не ураховувати. Рівняння для середніх значень \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , $\bar{\rho}$, \bar{p} , \bar{T} , опускаючи тут і надалі знак осереднення для метеорологічних величин, можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v - \ell_1 w + (D_t)_x; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u + (D_t)_y; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 u + (D_t)_z; \\ \frac{dT}{dt} &= -\frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{c_p \rho}; \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\ p &= \rho RT. \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

У рівнянні припливу тепла системи (1.2.18)

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_t,$$

де ε_r і ε_t – променистий і турбулентний припливи тепла відповідно. Відзначимо, що у разі використання рівняння припливу тепла для насиченого повітря, сумарний приплив повинен збільшитися на одну величину – приплив тепла за рахунок фазових перетворень вологи в атмосфері (ε_p).

Система рівнянь (1.2.18) для середніх величин, як і система (1.2.14)-(1.2.17) для миттєвих значень, використовується для вивчення широкого кола атмосферних рухів. Поряд з рухами синоптичного масштабу, пов'язаними з переміщеннями циклонів та антициклонів, які цікавлять нас найбільше при складанні короткострокових прогнозів погоди, цими ж рівняннями описуються просторові рухи інших масштабів, як більших,

так і менших за синоптичні. Розглядаючи атмосферні рухи як суперпозицію хвиль з різними довжинами, амплітудами та фазовими швидкостями, очевидно, що система рівнянь (1.2.18) описує усі типи існуючих хвильових рухів: акустичні хвилі, гравітаційні, хвилі Россбі та хвилі змішаного типу.

Для макромасштабних рухів система рівнянь гідротермодинаміки значно спрощується. Якщо здійснити оцінку членів рівнянь системи (1.2.18) за допомогою таблиці порядків метеорологічних величин (Додаток Б) або використанням методів розмірностей і подібності, то рівняння руху з достатньою мірою точності можна записати без в'язких членів, тобто

$$(D_t)_x = (D_t)_y = (D_t)_z = 0,$$

а третє рівняння руху можна подати, не враховуючи відносного (dw/dt) та коріолісового $(\ell_1 u)$ прискорень, і, таким чином, розглядати його як рівняння квазістатика. Крім цього, у першому рівнянні руху можна не враховувати член $\ell_1 w$, який описує частину коріолісової сили, пропорційну вертикальній складовій швидкості вітру. Це припущення не виконується лише у приєкваторіальній зоні. Відзначимо також і те, що у вільній атмосфері процеси, які тривають не більше трьох діб, можна уважати адіабатичними. Це означає, що у рівнянні припливу тепла можна не враховувати член, який містить ϵ та характеризує неадіабатичні припливи тепла.

З зазначеними обмеженнями система рівнянь, яка описує закономірності руху синоптичного масштабу у вільній атмосфері, має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g; \\ \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} &= 0; \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\ p &= \rho RT. \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Наведена система (1.2.19) є сукупністю нелінійних диференціаль-

них рівнянь у частинних похідних першого порядку. У наш час не існує методів, які б дозволили отримати аналітичний розв'язок цієї системи. Вона може бути розв'язана тільки за допомогою чисельних методів, викладення яких наведено у відповідних розділах цього курсу.

З точки зору хвильових рухів в атмосфері система (1.2.19) описує такі ж періодичні коливання, що й система (1.2.18); не ураховуються лише акустичні хвилі, що розповсюджуються у вертикальній площині. Вони фільтруються використанням третього рівняння руху у вигляді рівняння квазістатика.

Ще раз підкреслимо, що вихідна система рівнянь ґрунтується на фундаментальних фізичних законах збереження кількості руху (імпульсу), маси та енергії і саме у цьому полягає її незаперечна перевага перед іншими можливими підходами до моделювання атмосферних процесів.

1.3 Хвильові коливання в атмосфері та способи їх фільтрації

Для того, щоб зрозуміти джерела помилок у розв'язку системи рівнянь гідротермодинаміки, одержаного Річардсоном, а також суть спрощень цієї системи, уведених Кібелем та Чарні, потрібно добре уявляти фізичний сенс і особливості різноманітних видів хвильових коливань в атмосфері. Особливості цих хвиль (акустичних, гравітаційних, інерційних) мають велике значення при побудові гідростатичних та негідростатичних моделей. У розв'язках основних рівнянь присутні усі види хвильових рухів, а різноманітні наближення (гідростатичне, квазігеострофічне, Буссінеска) дозволяють відфільтрувати деякі види хвиль.

Щоб спростити подальший аналіз, розглянемо площину, дотичну у деякій точці до земної сфери; такий підхід відомий як наближення " ℓ -площини". Також будемо розглядати рухи з горизонтальними масштабами L , меншими за радіус Землі a . Тоді основні рівняння гідротермодинаміки на ℓ -площині без урахування в'язких членів можуть бути записані у такому вигляді:

$$\frac{du}{dt} = \ell v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (1.3.1a)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\ell u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (1.3.1b)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g; \quad (1.3.1b)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \quad (1.3.1\text{г})$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dQ}{dt}; \quad (1.3.1\text{д})$$

$$p = \rho RT, \quad (1.3.1\text{е})$$

де $s = c_p \ln \Theta$ – питома ентропія;

Θ – потенціальна температура;

$dQ/dt \equiv \dot{Q}$ – швидкість нагріву об'єму повітря одиничної маси.

Розглянемо основний стан спокою, тобто $u_0 = v_0 = w_0 = 0$. З перших двох рівнянь (1.3.1) видно, що p_0 залежить тільки від z , тобто $p_0 = p_0(z)$, оскільки $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$. З рівняння (1.3.1в) випливає, що ρ_0 та інші термодинамічні змінні основного стану також залежать тільки від z .

Припустимо, що під час руху повітря зміна його термодинамічних властивостей підкоряється адіабатичному закону, тобто $\dot{Q} = 0$, а сам рух здійснюється за відсутності сили тертя. Розглянемо малі відхилення (флуктуації або хвильові збурення) від основного стану ($p = p_0 + p'$ і т.д.), що дозволяє лінеаризувати рівняння, нехтуючи членами, які є доданком відхилень. Для зручності подальшого викладення уведемо визначення: $u^* = \rho_0 u'$; $v^* = \rho_0 v'$; $w^* = \rho_0 w'$; $s^* = \rho_0 s'$. Тоді рівняння для флуктуацій можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = \ell v^* - \frac{\partial p'}{\partial x}; \quad (1.3.2\text{а})$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = -\ell u^* - \frac{\partial p'}{\partial y}; \quad (1.3.2\text{б})$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g; \quad (1.3.2\text{в})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right); \quad (1.3.2\text{г})$$

$$\frac{\partial s^*}{\partial t} = -w^* \frac{ds_0}{dz}; \quad (1.3.2\text{д})$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0}, \quad (1.3.2\text{е})$$

де $\alpha = c_p/c_v$;

$$s^* = \rho_0 c_p \frac{\Theta'}{\Theta_0} = \rho_0 c_p \left(\frac{T'}{T_0} - \frac{R}{c_p} \frac{p'}{p_0} \right) = c_p \left(\frac{p'}{\alpha RT_0} - \rho' \right). \quad (1.3.3)$$

1.3.1 Незалежні розв'язки для плоских хвиль

Насамперед, розглянемо окремі випадки розв'язків для деяких типів хвиль, що існують ізольовано від інших типів. Точно кажучи, у такому "чистому" вигляді існування хвиль можливе тільки за дуже спрощених припущень, але такий підхід дозволяє зрозуміти основні характеристики хвиль і, як наслідок, їх роль у моделях та методичу, що використовується для фільтрації деяких з них. Чистий вигляд хвилі має місце при ідеалізованих умовах, як, наприклад, відсутність сили Коріоліса та стратифікації для випадку акустичних хвиль. Але основні характеристики хвиль не змінюються навіть коли ідеальні умови порушуються. Наприклад, акустичні хвилі, хоч і дещо змінені, мають місце й за присутності сили Коріоліса та стратифікації.

Припущення про розв'язки для плоских хвиль задовольняються, якщо вісь x співпадає з напрямком розповсюдження хвилі:

$$(u^*, v^*, w^*, p') = (U, V, W, P)e^{i(kx+nz-\sigma t)}, \quad (1.3.4)$$

де k, n – горизонтальне та вертикальне хвильові числа;

σ – циклічна (колова) частота;

U, V, W, P – сталі амплітуди.

Підставляючи розв'язок (1.3.4) у лінійні рівняння (1.3.2а)-(1.3.2е) та вилучаючи змінні, можна одержати дисперсійне рівняння виду $\sigma = f(k, n, \text{параметри})$ для кожного типу хвиль. Дисперсійне рівняння дає можливість розглядати не тільки частоту, а й складові фазової швидкості ($\sigma/k, \sigma/n$) та групової швидкості розповсюдження хвилі ($\partial\sigma/\partial k, \partial\sigma/\partial n$). Під фазовою швидкістю розуміється швидкість окремих гребенів, улоговин чи будь-якої іншої фази хвилі, а групова швидкість – це швидкість, за якої енергія хвилі розповсюджується у горизонтальному і вертикальному напрямках.

1) Чисті акустичні хвилі.

Не будемо ураховувати силу Коріоліса, стратифікацію та силу тяжіння, тобто $\ell = 0, ds_0/dz = 0, g = 0$. Беручи до уваги рівняння (1.3.2д), одержимо $s^* = 0$ (нагадаємо, що s^* – відхилення, і якщо б воно було сталим, то його значення потрібно було б залучити до основного стану s_0). Отже, тоді з рівняння (1.3.2е) одержимо $p' = c_s^2 \rho'$ (де c_s – швидкість звуку) і рівняння (1.3.2а-1.3.2г)) набувають вигляду:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^*}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial y}; \\
\frac{\partial w^*}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial z}; \\
\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial p'}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Система рівнянь (1.3.5) показує, що акустичні хвилі мають місце внаслідок адіабатичного розширення та стиснення (тривимірної дивергенції) і що флуктуації тиску є пропорційними флуктуаціям густини.

Беручи до уваги розв'язок для плоскої хвилі (1.3.4) та підставляючи його у (1.3.5), одержимо:

$$\begin{aligned}
-i\sigma U &= -ikP; \\
-i\sigma V &= 0; \\
-i\sigma W &= -inP; \\
-i\sigma P &= c_s^2(ikU + inV).
\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Згідно з другим рівнянням (1.3.6) $V = 0$, і підставляючи U та W з першого і третього рівнянь (1.3.6) у останнє, одержимо таке дисперсійне рівняння

$$\sigma^2 = c_s^2(k^2 + n^2). \tag{1.3.7}$$

Складовими фазової швидкості є $\left(\frac{\sigma}{k}, \frac{\sigma}{n} \right)$, а сама фазова швидкість дорівнює

$$c_s = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{k^2 + n^2}}.$$

2) Хвилі Лемба.

Тепер не будемо враховувати силу Коріоліса та припустимо, що розповсюдження відбувається тільки у горизонтальному напрямку (немає вертикальної швидкості), але рідина гравітаційно стратифікована. Через те, що $\ell = 0$ і $w^* = 0$, знову маємо, що $s^* = 0$, відповідно до рівняння (1.3.2є) $p' = c_s^2 \rho'$, але згідно з (1.3.2в) потік тепер є гідростатичним: $\partial p' / \partial z = \rho' g$. Якщо за таких умов підставити розв'язок для плоскої хвилі

$$(1.3.4) \text{ до (1.3.2), одержимо } p' = P \exp\left(-\frac{g}{c_s^2} z\right) e^{i(kx - \sigma t)}, \text{ тобто вертикальне}$$

хвильове число є комплексним ($n = ig/c_s^2$), а фазова швидкість дорівнює

$\sigma^2/k^2 = c_s^2$. Це, в свою чергу, означає, що не існує розповсюдження хвиль у вертикальному напрямку, а самі хвилі є зовнішніми.

Отже, хвилі Лемба є зовнішніми горизонтальними акустичними хвилями, які присутні у розв'язках моделей навіть у випадку гідростатичного наближення. Це є дуже важливим, тому що означає, що моделі за примітивними рівняннями з гідростатичним наближенням містять ці акустичні хвилі, що швидко рухаються. Далі буде показано, що хвилі Лемба є аналогом гравітаційних хвиль у моделях мілкої води. Відзначимо також, що дисперсійне рівняння для цих хвиль є таким, що фазова швидкість не залежить від вертикального хвильового числа n . Останнє означає, що групова швидкість також не залежить від n і, у результаті, хвилі Лемба є такими, що не розсіюються, тобто пакет хвиль рухається разом, не розсіюючись.

3) Вертикальні гравітаційні коливання.

Тепер не будемо урахувувати силу Коріоліса та флуктуації тиску ($\ell = 0, p' = 0$), у зв'язку з чим відсутній горизонтальний рух, але має місце вертикальна стратифікація. Рівняння (1.3.2) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial t} &= -\rho' g; \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} &= \frac{w^*}{c_p} \frac{ds_0}{dt} = \frac{w^*}{c_p} \frac{d \ln \Theta_0}{dz}. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Продиференціювавши перше рівняння (1.3.8) по t та підставивши вираз для $\partial \rho' / \partial t$ у друге рівняння, одержимо

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} + N^2 w^* = 0. \quad (1.3.9)$$

Рівняння нерозривності при зазначених припущеннях набуває вигляду

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\partial w^*}{\partial z}. \quad (1.3.10)$$

Підставляючи розв'язок для плоскої хвилі (1.3.4) у (1.3.9), маємо $\sigma^2 = N^2$, де $N^2 = g \frac{d \ln \Theta_0}{dz}$ – квадрат частоти Брента-Вяйсяля, характерне значення якої в атмосфері становить $N \approx 10^{-2} \text{ c}^{-1}$ і з якою коливаються у вертикальній площині частинки повітря, що переміщуються у стійкій атмосфері. Друге рівняння (1.3.8) і рівняння (1.3.10) вказують на те, що амплітуда w^* буде зменшуватися з висотою як $e^{-(d \ln \Theta_0 / dz)z}$.

4) Інерційні коливання.

Інерційні коливання є горизонтальними і є наслідком впливу сили Коріоліса. Тепер припустимо, що флуктуації тиску та стратифікація відсутні ($p' = 0, ds_0/dz = 0$). Тоді $s^* = 0$ і, отже, $\rho' = 0$.

Рівняння руху у горизонтальній площині набувають вигляду $\partial \mathbf{V}^*/\partial t = -\ell \mathbf{k} \times \mathbf{V}^*$ і, відповідно,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V}^*}{\partial t^2} = \ell \mathbf{k} \times (\ell \mathbf{k} \times \mathbf{V}^*) = -\ell^2 \mathbf{V}^*. \quad (1.3.11)$$

Як видно з рівняння (1.3.11), частота інерційних коливань $\sigma = \pm \ell$ має прискорення, перпендикулярне вітру, що відповідає коловим коливанням. За наявності основного потоку має місце також поступальне переміщення і траєкторія може мати вигляд, подібний поданому на рис. 1.3.1.

5) Хвилі Лемба за наявності сили Коріоліса і геострофічні режими.

Розглянемо тепер випадок хвилі Лемба, що розповсюджується у горизонтальному напрямку (тобто вертикальна швидкість дорівнює нулю) за наявності сили Коріоліса, тобто $\ell \neq 0$. Через те, що $w^* = 0$, згідно рівняння (1.3.2в) $p' = c_s^2 \rho'$, а відповідно до гідростатичної рівноваги у (1.3.3) припускається, що $\partial p'/\partial z = -\alpha R T_0$. Отже, тривимірні флуктуації можуть бути записані у вигляді $p'(x, y, z, t) = p'(x, y, 0, t) e^{-z/\alpha H_{sa}}$, де $\alpha H_{sa} = c_s^2/g$, H_{sa} - висота однорідної атмосфери.

Тоді система рівнянь (1.3.2) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t} &= -\ell \mathbf{k} \times \mathbf{V}^* - \nabla p'; \\ \frac{\partial p'}{\partial t} &= -c_s^2 \nabla \cdot \mathbf{V}^*. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Ця система рівнянь повністю аналогічна лінеаризованим рівнянням

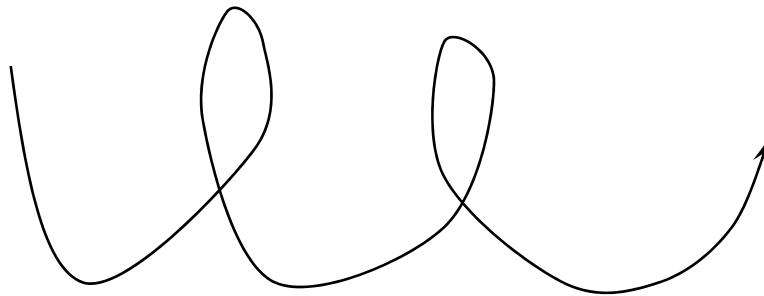


Рисунок 1.3.1 - Схема інерційних коливань за наявності основного потоку

мілкої води, які широко застосовуються при чисельному прогнозі погоди як найпростіша модель примітивних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial t} &= -\ell \mathbf{k} \times \mathbf{V}^* - \nabla \Phi'; \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial t} &= -\Phi_0 \nabla \cdot \mathbf{V}^*,\end{aligned}\tag{1.3.12'}$$

де $\Phi = gz$ - геопотенціал;

$\Phi' = gz'$ - хвильові збурення.

Якщо припускається розв'язок для одновимірної хвилі у вигляді $(u^*, v^*, p') = (U, V, P)e^{i(kx - \sigma t)}$, то, підставивши його у (1.2.12), одержимо:

$$\begin{aligned}i\sigma U &= \ell V - ikP; \\ i\sigma V &= -gV; \\ i\sigma P &= c_s^2 ikU.\end{aligned}\tag{1.3.13}$$

Отже, дисперсійним є рівняння

$$\sigma(\sigma^2 - \ell^2 - c_s^2 k^2) = 0.\tag{1.3.14}$$

Відзначимо, що це дисперсійне рівняння містить два види розв'язків. Перший розв'язок має вигляд $\sigma^2 = \ell^2 + c_s^2 k^2$, що відповідає дисперсійному рівнянню для хвиль Лемба за наявності сили Коріоліса. У моделі рівнянь мілкої води, це інерційно-гравітаційні хвилі (зовнішні гравітаційні хвилі з поправкою на інерцію), для яких $\sigma^2 = \ell^2 + \Phi k^2$. Відзначимо також, що за наявності сили Коріоліса фазова швидкість та групова швидкість розповсюдження хвилі залежать від хвильового числа, тобто наявність сили Коріоліса робить хвилі Лемба такими, що розсіюються, а це допомагає розв'язати проблему позбавлення шумів у початкових даних.

Другим видом розв'язку є розв'язок сталого режиму $\sigma = 0$. Це означає, що $\frac{\partial(\quad)}{\partial t} = -i\sigma(\quad) = 0$ для усіх змінних. За відсутності сили Коріоліса такий розв'язок буде тривіальним: $u^* = v^* = w^* = p' = 0$, але за її наявності аналіз (1.3.12') або (1.3.13) показує, що це можливе за геострофічного режиму, коли $U = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0$, але $V = ikP/\ell$. Тому такий розв'язок є геострофічним, але нетривіальним розв'язком сталого режиму. Якщо буде додана залежність ℓ від широти, то геострофічний розв'язок стає розв'язком для хвиль Россбі, які вже не є сталим режимом, але все ж набагато повільніші за гравітаційні або акустичні хвилі.

1.3.2 Загальний розв'язок хвильового рівняння для ізотермічної атмосфери

Для того, щоб одержати "чисті" елементарні хвилі (акустичні, інерційні, гравітаційні) у попередньому пункті застосовувалися радикальні наближення. Розглянемо тепер більш загальний випадок, який містить усі хвилі одночасно. Як і раніше, використаємо систему рівнянь для флуктуацій (1.3.2) та припустимо, що в атмосфері спостерігається ізотермічний основний стан ($T_0(z) = T_{00}$, константа). Тоді частота Брента-Вяйсяля

$$N^2 = g \frac{d \ln \Theta}{dz} = -g\kappa \frac{d \ln p_0}{dz}, \quad (1.3.15)$$

де $\kappa = R/c_p$.

Через те, що основний стан є гідростатичним, то

$$N^2 = g\kappa \frac{\rho_0 g}{p_0} = g\kappa \frac{g}{RT_0} = \frac{g\kappa}{H_{sa}}. \quad (1.3.16)$$

Ці рівняння показують, що N^2 і висота однорідної атмосфери $H_{sa} = RT/g$ є сталими величинами для ізотермічної атмосфери.

Як і раніше, розглядається ℓ -площина, а прийнятним наближенням для горизонтальних масштабів $L \in L \ll a$. Якщо L не є малим у порівнянні з радіусом Землі, то необхідно брати до уваги зміни параметра Коріоліса по меридіану та використовувати сферичну геометрію. Виконавши деякі перетворення та припускаючи, що хвилі розповсюджуються тільки вздовж осі x , рівняння для флуктуацій можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = \ell v^* - \frac{\partial p'}{\partial x}; \quad (1.3.17a)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = -\ell u^*; \quad (1.3.17б)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial w^*}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g; \quad (1.3.17в)$$

$$\beta_1 \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} \right); \quad (1.3.17г)$$

$$\frac{g}{c_p} \frac{\partial s^*}{\partial t} = -w^* N^2; \quad (1.3.17д)$$

$$s^* = c_p \left(\frac{p'}{c_s^2} - \rho' \right). \quad (1.3.17\epsilon)$$

Дві константи в цих рівняннях (α_1 і β_1) використовуються як ознаки наближень гідростатики та Буссінеска відповідно і набувають значення 1 або 0. Якщо $\alpha_1 = 0$, то це свідчить про гідростатичне наближення, тобто вертикальним прискоренням в (1.3.17в) нехтується. Якщо $\beta_1 = 0$, то здійснюється наближення Буссінеска, для якого тривимірна дивергенція дорівнює нулю. У протилежних випадках ці константи дорівнюють 1.

Тепер знайдемо розв'язок для плоскої хвилі, коли основний стан є функцією від z і має вигляд

$$(u^*, v^*, w^*, p', \rho') = (U(z), V(z), W(z), P(z), R(z)) e^{-i(kx - \sigma t)}. \quad (1.3.18)$$

Замість припущення про z -залежність у вигляді $e^{-i(nz)}$, надалі вона буде визначатися в явному вигляді. Якщо горизонтальний масштаб рухів є порівняним з радіусом Землі ($L \sim a$), то розв'язок має вигляд $(u^*, v^*, w^*, p', \rho') = (U(z), V(z), W(z), P(z), R(z)) A(\varphi) e^{-i(kx - \sigma t)}$, а рівняння, що одержується для $A(\varphi)$, є припливним рівнянням Лапласа.

Підставляючи передбачуваний вигляд розв'язку (1.3.18) у (1.3.17), одержимо:

$$i\sigma U = -ikP + \ell V; \quad (1.3.19\text{а})$$

$$i\sigma V = -\ell U; \quad (1.3.19\text{б})$$

$$i\sigma \alpha_1 W = -Rg - \frac{dP}{dz}; \quad (1.3.19\text{в})$$

$$i\sigma \beta_1 R = -ikU - \frac{dW}{dz}; \quad (1.3.19\text{г})$$

$$i\sigma \left(\frac{P}{c_s^2} - R \right) = -W \frac{N^2}{g}. \quad (1.3.19\text{д})$$

Далі, комбінуючи рівняння (1.3.19а) і (1.3.19б), одержимо

$$U = \frac{k\sigma}{\sigma^2 - \ell^2} P, \quad (1.3.19\text{е})$$

рівняння (1.3.19г) і (1.3.19е), -

$$\beta_1 R = \frac{k^2}{\sigma^2 - \ell^2} P - \frac{i}{\sigma} \frac{dW}{dz}, \quad (1.3.19\text{ж})$$

рівняння (1.3.19в) і (1.3.19д), -

$$\frac{dP}{dz} + \frac{g}{c_s^2} P = \frac{i}{\sigma} (\sigma^2 \alpha_1 - N^2) W, \quad (1.3.19з)$$

рівняння (1.3.19д) і (1.3.19ж), -

$$\frac{dW}{dz} + \beta_1 \frac{N^2}{g} W = \frac{i\sigma}{c_s^2} \frac{\beta_1 (\sigma^2 - \ell^2) - c_s^2 k^2}{\sigma^2 - \ell^2} P. \quad (1.3.19и)$$

Нарешті, комбінація рівнянь (1.3.19з) та (1.3.19и) дає

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{g}{c_s^2} \right) \left(\frac{d}{dz} + \beta_1 \frac{N^2}{g} \right) W = - \frac{1}{c_s^2} \frac{[\beta_1 (\sigma^2 - \ell^2) - c_s^2 k^2] (\sigma^2 \alpha_1 - N^2)}{\sigma^2 - \ell^2} P. \quad (1.3.20)$$

або аналогічне рівняння для P . Рівняння (1.3.20) має вигляд $\frac{d^2 W}{dz^2} + A \frac{dW}{dz} + BW = 0$. Для того, щоб вилучити першу похідну, зробимо

підстановку $W = e^{\delta z} \Omega$ і одержимо $\frac{d^2 \Omega}{dz^2} + C\Omega = 0$, що потребує вибору $\delta = -A/2$ і, відповідно, $C = B - A^2/4$.

Для рівняння (1.3.20), виконавши підстановку змінних та деякі додаткові операції, одержимо

$$\frac{d^2 \Omega}{dz^2} + n^2 \Omega = 0, \quad (1.3.21)$$

де

$$n^2 = \frac{[\beta_1 (\sigma^2 - \ell^2) - c_s^2 k^2] (\sigma^2 \alpha_1 - N^2)}{c_s^2 (\sigma^2 - \ell^2)} - \frac{1}{4} \left(\beta_1 \frac{N^2}{g} - \frac{g}{c_s^2} \right). \quad (1.3.22)$$

Це рівняння є дисперсійним рівнянням частоти хвиль в ізотермічній атмосфері. При заданих горизонтальній структурі (k) та частоті (σ) хвилі, рівняння (1.3.22) визначає вертикальну структуру (n) Ω (і W) та навпаки. Аналогічне дисперсійне рівняння можна одержати, зробивши підстановку $Q = e^{-\delta z} P$ до рівняння (1.3.20) та розв'язавши його для Q .

Рівняння (1.3.22) показує, що залежно від знаку n^2 можна одержати розв'язки як для зовнішніх, так і внутрішніх хвиль.

1) Зовнішні хвилі.

Якщо $n^2 < 0$, вертикальне хвильове число n є уявним ($n = in_1$). Розв'язок (1.3.21) тоді має вигляд $\Omega = Ae^{n_1z} + Be^{-n_1z}$ або, вертаючись до вертикальної швидкості,

$$w^*(x, z, t) = e^{i(kx - \sigma t)} e^{-\frac{1}{2} \left(\beta_1 \frac{N^2}{g} + \frac{g}{c_s^2} \right) z} \left(Ae^{n_1z} + Be^{-n_1z} \right). \quad (1.3.23)$$

Ці хвилі є зовнішніми, тобто хвилі не коливаються по вертикалі і, відповідно, не розповсюджуються у цьому напрямку.

Якщо згідно з межевою умовою біля земної поверхні вертикальна швидкість дорівнює нулю, то $\Omega = Ae^{n_1z} + Be^{-n_1z} = 0$ на $z = 0$, так що

$A + B = 0$, а $w^*(x, z, t) = e^{i(kx - \sigma t)} e^{-\frac{1}{2} \left(\beta_1 \frac{N^2}{g} + \frac{g}{c_s^2} \right) z} 2A \sinh(n_1z)$ і експоненціально змінюється по z . Через те, що $\sinh(n_1z)$ не може бути нулем вище земної поверхні, верхня межева умова твердої стінки може бути задовільнена тільки при $A = 0$. Інакше кажучи, не можна одержати зовнішні хвилі за межевих умов унизу та угорі у вигляді твердої стінки; для них є необхідною вільна поверхня угорі (або унизу).

2) Внутрішні хвилі.

Якщо $n^2 > 0$, вертикальне хвильове число є речовим

$$w^*(x, z, t) = e^{i(kx - \sigma t)} e^{-\frac{1}{2} \left(\beta_1 \frac{N^2}{g} + \frac{g}{c_s^2} \right) z} \left(Ae^{inz} + Be^{-inz} \right). \quad (1.3.24)$$

Тут A і B визначаються за межевими умовами. Хвиля, що описується рівнянням (1.3.24), може розповсюджуватися як у горизонтальному, так й у вертикальному напрямках. Наприклад, якщо існує твердий низ, то знову $A + B = 0$ і розв'язок набуває вигляду

$$w^*(x, z, t) = e^{i(kx - \sigma t)} e^{-\frac{1}{2} \left(\beta_1 \frac{N^2}{g} + \frac{g}{c_s^2} \right) z} \left(Ae^{nz} + Be^{-nz} \right).$$

Форма хвилі у вертикальній площині показана схематично на рис. 1.3.2.

1.3.3 Фільтрація хвильових коливань

У цьому пункті досліджується вплив фільтрації хвильових коливань на розв'язок системи рівнянь гідротермодинаміки. Якщо знехтувати

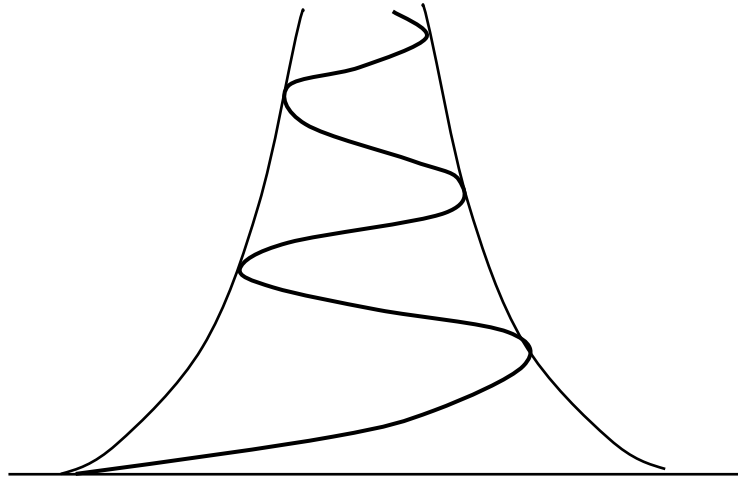


Рисунок 1.3.2 – Схематичний вигляд внутрішніх хвиль (вертикальне розповсюдження)

похідною за часом в одному з рівнянь руху, то це рівняння замість прогностичного стає діагностичним, що, відповідно, виключить певний вид розв'язку. З фізичної точки зору це означає, що виключається сила, яка підтримує певний тип хвилі. Така процедура називається фільтрацією хвильових коливань.

Розглянемо спочатку квазігеострофічну фільтрацію, яка виключає акустичні та гравітаційні хвилі, що у свій час зробило можливим успішний прогноз (Кібель, Чарні).

1) Квазігеострофічне наближення.

Як вже згадувалося вище, якщо припускається стійкий стан без урахування сили Коріоліса, то розв'язок рівняння (1.3.19) буде тривіальним: усі флуктуації дорівнюють нулю. Але за наявності сили Коріоліса з припущенням про стійкий стан та рівність нулю усіх похідних за часом ($\sigma = 0$), з системи (1.3.17) дістається нетривіальний розв'язок геострофічного режиму:

$$\begin{aligned}
 V &= ikP/\ell; \\
 U &= 0; \\
 \frac{dP}{dz} &= -Rg; \\
 \frac{dW}{dz} &= 0; \\
 P &= c_s^2 R.
 \end{aligned}
 \tag{1.3.25}$$

Для рівнянь безперервних флуктуацій (1.3.17) це означає, що:

$$\ell v^* = -\frac{\partial p'}{\partial x} \quad (\text{геострофічно збалансований потік}); \quad (1.3.26a)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} = 0 \quad (\text{сталий потік}); \quad (1.3.26б)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g \quad (\text{гідростатично збалансований потік}); \quad (1.3.26в)$$

$$w^* = 0; \quad \frac{\partial w^*}{\partial z} = \frac{\partial u^*}{\partial x} = 0 \quad (\text{горизонтальний бездивергентний потік}) \quad (1.3.26г)$$

$$\text{і } s^* = c_p \left(\frac{p'}{c_s^2} - \rho' \right) = 0 \quad (\text{флуктуації тиску є пропорційними флуктуаціям}$$

густини, помноженим на квадрат швидкості звуку, що є справедливим усюди, де має місце рівняння гідростатики).

Така фільтрація хвильових коливань є "граничною", тому що вона відфільтровує акустичні хвилі, а також інерційні та гравітаційні коливання.

Якщо розглядати об'єкти з великими горизонтальними масштабами, потрібно брати до уваги зміни сили Коріоліса, у зв'язку з чим використовується не ℓ -площина, а β -площина: $\ell = \ell_0 + \beta y$ (β - параметр сферичності). Коли ураховується горизонтальна адвекція основним потоком, розв'язок для стаціонарного геострофічного потоку стає квазістаціонарним (таким, що повільно змінюється). Тоді, хвилі, що відповідають геострофічному режиму, є хвилями типу Россбі з частотою, яка менша за параметр Коріоліса або інерційну частоту $\sigma = Uk - \beta/k \sim 10^{-4} \sim 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Хвилі Россбі є квазігеострофічними ($\sigma^2 \ll \ell^2$), гідростатично збалансованими, а потік у них є квазігоризонтальним ($w^*/H_{sa} \ll U^*/L$) і, відповідно, квазібездивергентним ($\nabla \cdot \mathbf{V}_h \approx 0$).

Відзначимо, що цей тип квазігеострофічного розв'язку (фундаментального для чисельного прогнозу погоди) все ще є присутнім у сучасних моделях, маючи перевагу у порівнянні з наближенням гідростатики та Буссінеска, які використовуються при фільтрації акустичних хвиль.

2) Наближення Буссінеска або квазіпружності.

Тепер дорівнюємо нулю константу β_1 у (1.3.19г). Це означає, що похідною за часом $\partial p'/\partial t$ нехтується у порівнянні з $\nabla_H v^*$ і $\partial w^*/\partial z$ у рівнянні нерозривності. З цим наближенням рівняння стають "квазіпружними", тобто в них відсутні акустичні хвилі, для яких необхідною умовою розповсюдження є наявність тривимірної дивергенції. Розглянемо члени, які відкидаються у дисперсійному рівнянні (1.3.22):

- $(\sigma^2 - \ell^2 \ll c_s^2 k^2)$, тобто частота розв'язків, що отримуються, набагато менша за частоту акустичних хвиль, тому це наближення відфільт-

тровує також і хвилі Лемба, тобто акустичні хвилі, які розповсюджуються у горизонтальному напрямку;

- ($N^2/g \ll g/c_s^2$). Це наближення є обґрунтованим, якщо

$$\frac{N^2}{g} = \frac{1}{\Theta_0} \frac{d\Theta_0}{dz} \ll \frac{g}{\alpha RT_0}, \text{ тобто } \frac{\alpha H_{sa}}{\Theta_0} \frac{d\Theta_0}{dz} \ll 1.$$

Інакше кажучи, наближення квазіпружності є обґрунтованим у моделях, для яких потенціальна температура змінюється не дуже швидко у межах товщини шару $\alpha RT/g \sim 10$ км, що є цілком прийнятним для стандартної атмосфери (але не для потоків у стратосфері), тому що для тропосфери $\Delta\Theta_0/\Theta_0 \sim 30 \text{ К}/300 \text{ К} \sim 0,1$.

У моделях, які настільки "мілкі", що не тільки $\Delta\Theta_0/\Theta_0 \ll 1$, а й $\Delta T_0/T_0 \ll 1$, також можна знехтувати $\partial\rho_0/\partial z$ у рівнянні нерозривності та припустити, що $\nabla_3 \cdot \mathbf{v}' = 0$, а не тільки $\nabla_3 \cdot \mathbf{v}^* = 0$. У цьому випадку, атмосфера розглядається як нібито нестислива рідина. Це наближення є вірним тільки для дуже мілких атмосферних моделей (менше 1 км висотою), але є дуже добре придатним для моделей океану, тому що нестислива рідина є добрим наближенням для води. Через те, що рівняння у наближенні Буссінеска відфільтровують внутрішні акустичні хвилі (а також хвилі Лемба), це наближення широко використовується для задач, в яких не може бути виконане гідростатичне наближення, наприклад, при моделюванні конвекції.

На рис. 1.3.3 схематично показано розв'язок дисперсійного рівняння у наближенні Буссінеска.

За допомогою цього наближення з рівняння (1.3.22), задаючи $\beta_1 = 0$, можна вивести частоту інерційно-гравітаційних хвиль:

$$\sigma^2 = \ell^2 \frac{n^2 + m_1^2}{n^2 + m_1^2 + k^2} + N^2 \frac{k^2}{n^2 + m_1^2 + k^2}, \quad (1.3.27)$$

де m_1 аналогічне зворотному значенню вертикального хвильового числа

$$m_1 = \frac{1}{2} \frac{g}{c_s^2} = \frac{1}{20} \text{ км.}$$

З рівняння (1.3.27) видно, що для внутрішніх ($n^2 > 0$) інерційно-гравітаційних хвиль $\ell^2 < \sigma^2 < N^2$, тобто частота σ перебуває між частотами Коріоліса і Брента-Вяйсяля. Згідно рис. 1.3.3 для цих хвиль $\partial\sigma^2/\partial k^2 > 0$, але $\partial\sigma^2/\partial n^2 > 0$. Це означає (без втрати спільності припускається $k > 0$), що горизонтальна групова швидкість для гравітаційних хвиль $\partial\sigma/\partial k$ має той же знак, що й фазова швидкість (енергія гравітаційних хвиль розповсюджу-

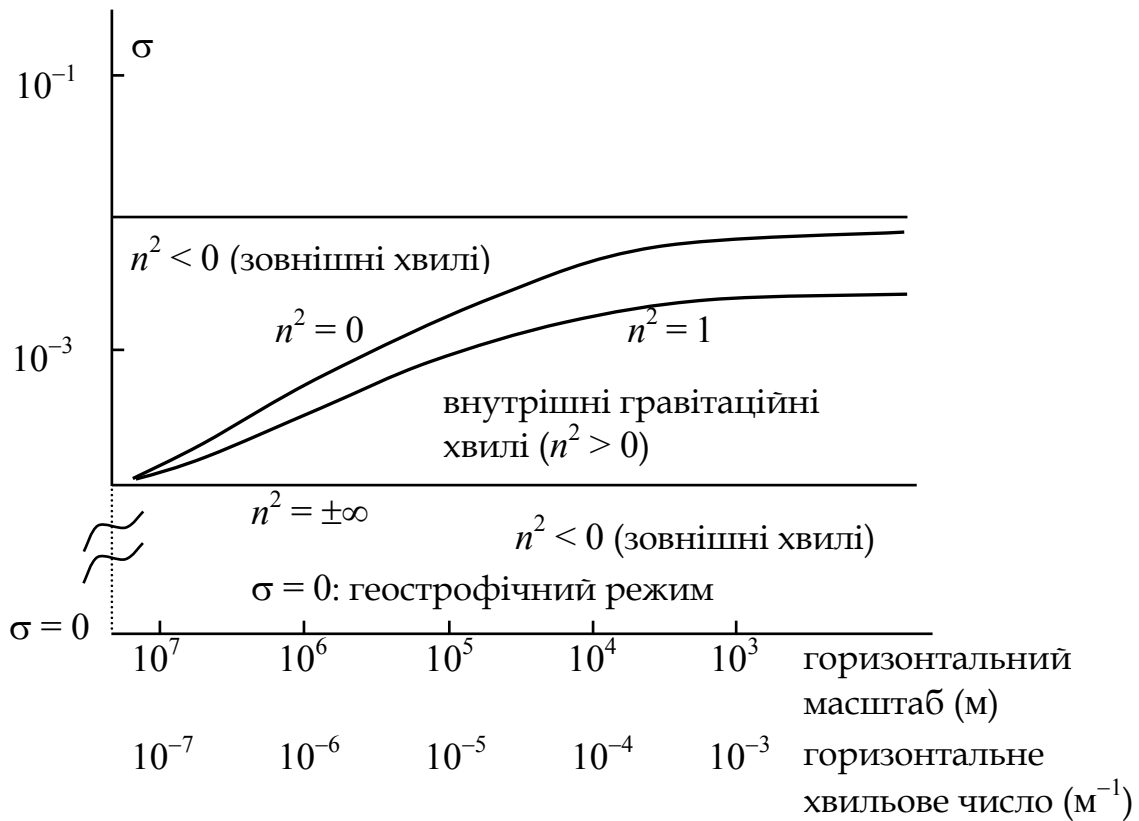


Рисунок 1.3.3 – Схема частот малих флуктуацій в ізотермічній атмосфері для наближення Буссінеска

ється у тому ж напрямку, що й фазова швидкість по горизонталі). У вертикальній площині справедливим є зворотнє співвідношення: якщо групова швидкість спрямована вверх, що має місце, наприклад, коли гравітаційні хвилі породжуються гірськими перепонами, фазова швидкість спрямована вниз.

3) Гідростатичне наближення.

У теперішній час у більшості глобальних моделей та деяких регіональних моделях використовується гідростатичне наближення, яке фільтрує акустичні хвилі. Якщо знехтувати прискоренням по вертикалі у рівнянні (1.3.17в), задаючи $\alpha_1 = 0$, можна одержати таке дисперсійне рівняння:

$$n^2 = \frac{(\sigma^2 - \ell^2 - c_s^2)N^2}{c_s^2(\sigma^2 - \ell^2)} - \frac{1}{4} \left(\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c_s^2} \right)^2. \quad (1.3.28)$$

Це дисперсійне рівняння має два розв'язки: для зовнішньої акустичної хвилі (хвилі Лемба), що розповсюджується по горизонталі, яка, на жаль, залишається,

$$\sigma^2 = \ell^2 + c_s^2 k^2, \quad n^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c_s^2} \right)^2, \quad (1.3.29)$$

і для інерційно-гравітаційних хвиль, для яких можна одержати наступне співвідношення на базі рівняння (1.3.28), використовуючи $N^2 = \kappa g / H_{sa}$, $H_{sa} = RT/g$ і $c_s^2 = \alpha RT$:

$$n^2 = \frac{N^2 k^2}{\sigma^2 - \ell^2} \quad \text{або} \quad \sigma^2 = \ell^2 + \frac{N^2 k^2}{n^2 + \frac{1}{4} H_{sa}^2}. \quad (1.3.30)$$

На рис. 1.3.4 показано співвідношення між частотою і горизонтальним та вертикальними хвильовими числами за умови виконання рівняння гідростатики.

Коли ж використання рівняння гідростатики є оправданим? Умова $\alpha_1 = 0$ призводить до того, що похідна за часом від вертикальної швидкості відкидається у порівнянні з $\rho'/\rho_0 g$. Відзначимо, що недостатньо установити, що $dw/dt \ll g$, щоб застосувати гідростатичне наближення, тому що

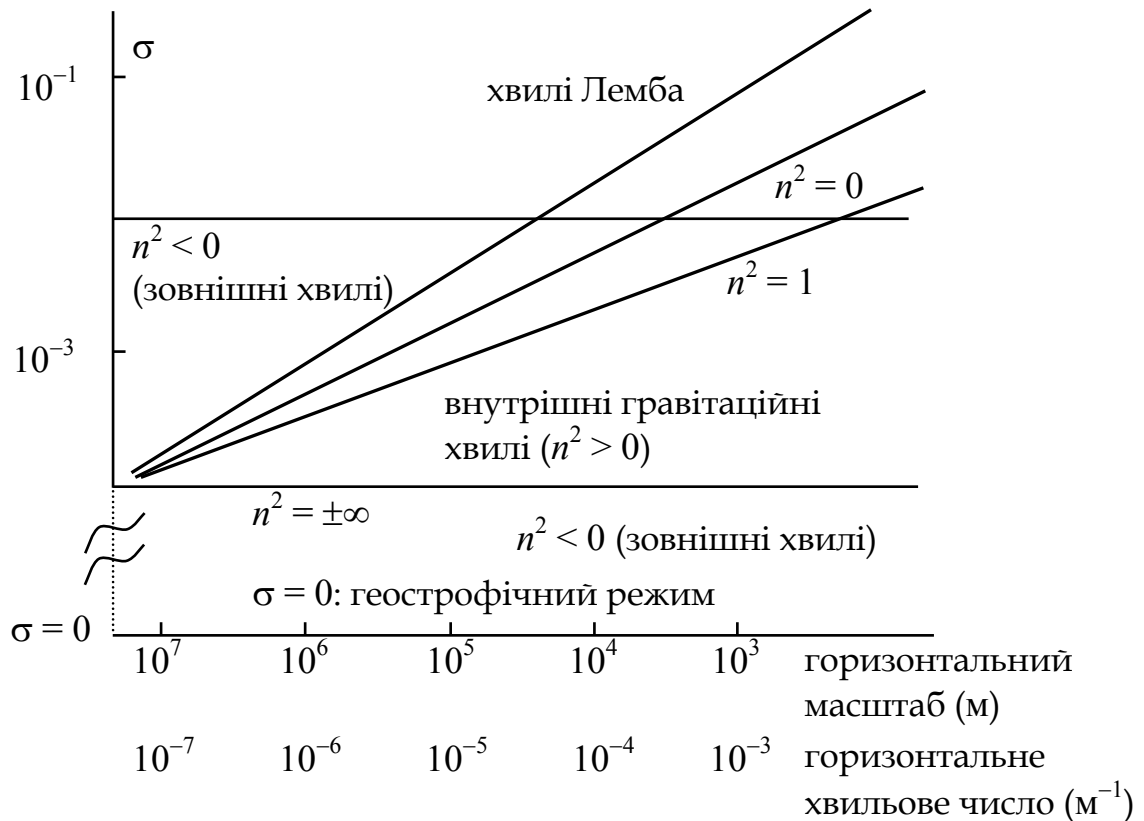


Рисунок 1.3.4 - Схема частот малих флуктуацій в ізотермічній атмосфері для гідростатичного наближення

прискорення по вертикалі є малим у порівнянні з силою тяжіння навіть при дуже великих вертикальних рухах, які мають місце, наприклад, у добре розвинутих купчастих хмарах. Гідростатичне наближення потребує, щоб прискорення по вертикалі було малим у порівнянні з плавучістю $\rho'/\rho_0 g$ або гравітаційним прискоренням усередині рідини. За допомогою аналізу масштабів можна показати, що гідростатичне наближення є правомочним до тих пір, поки аналізуються мілкі потоки ($H_{sa}/L \ll 1$). Для квазігеострофічного потоку умови гідростатичного балансу мають силу, навіть якщо $H_{sa}/L \sim 1$. Це означає, що гідростатична апроксимація є дуже точною для моделей, які використовують горизонтальну сітку з кроком між вузлами 100 км і більше, і цілком може застосовуватися для квазігеострофічного потоку з відстанями між вузлами сітки близько 10 км. Але рівняння гідростатики не може застосовуватися у моделях з горизонтальним розділенням порядку 10 км, які намагаються явно описати конвекцію у купчастих хмарах. На рис. 1.3.4 показано, що для частот $\sigma \sim N$ або вище, а також і для невеликих горизонтальних масштабів, гідростатичне наближення перекидає вихідне дисперсійне рівняння.

1.4 Рівняння гідротермодинаміки в різних системах координат

Рівняння гідротермодинаміки є теоретичною основою чисельних методів прогнозу погоди і являють собою форму запису трьох редуційних законів, що випливають з трьох фундаментальних законів фізики – законів збереження кількості руху, маси та енергії. Стосовно атмосфери, яка стилізується як суцільне середовище, ці основні закони виражаються рівняннями Ньютона, рівнянням нерозривності та термодинамічним рівнянням енергії. При дослідженні динамічних процесів в атмосфері залучаються також рівняння стану газу, рівняння переносу вологи, рівняння, що описують закони випромінювання та поглинання, переносу радіації, рівняння теплопровідності та турбулентної дифузії. Усі перелічені рівняння дозволяють побудувати замкнену систему стосовно таких змінних, як тиск, густина, температура, вологість повітря і вектор швидкості вітру.

Для чисельного інтегрування рівнянь математичної моделі атмосфери залежно від масштабу досліджуваних рухів та для більш наочної інтерпретації результатів розв'язання зручним є введення різних систем координат.

Вибір системи координат, в якій рівняння задачі набувають простішого вигляду, є важливим робочим методом, що широко використовується у гідромеханіці. Але в області динамічної метеорології вибір системи координат методично не був пов'язаний зі спробами розв'язання системи рівнянь динаміки атмосфери, а був обумовлений практичними за-

дачами обробки даних аерологічних спостережень та побудови синоптичних карт. Тільки починаючи з 1949 р. (з роботи А. Еліассена), розроблені способи подання даних спостережень були застосовані для перетворення рівнянь гідротермодинаміки. При цьому з'ясувалося, що практичні переваги використання певної системи координат тісно пов'язані з виглядом рівнянь динаміки атмосфери при переході до відповідної системи.

Із сказаного випливає, що вибір системи координат, яка є зручною для розв'язання задач чисельного прогнозу погоди, має велике значення. При цьому необхідно розглянути дві окремі задачі – вибір координат у горизонтальній площині, тобто у напрямках, що є перпендикулярними до напрямку сили тяжіння, і введення незалежної змінної по вертикалі. Якщо знехтувати відхиленням форми геоїда від сферичної поверхні, то зручно застосовувати сферичну систему координат. Сферична система координат широко використовується у моделях загальної циркуляції атмосфери та в чисельних методах довгострокового прогнозу погоди, але рідше використовується при розв'язанні задач короткострокового прогнозу. Причиною є відносна складність вигляду рівнянь динаміки атмосфери у сферичних координатах. Коефіцієнти, що входять до них, істотно залежать від широти, при цьому мають особливості на полюсах. Значно зручнішими є декартові координати.

Звичайно в метеорології використовують системи координат, які жорстко зв'язані з Землею, що обертається, тому швидкість руху повітря у рівняннях динаміки є швидкістю, узятую відносно спостерігача, який перебуває на Землі.

Розглянемо рівняння гідротермодинаміки ідеальної атмосфери у різних системах координат.

1.4.1 Локальна декартова система координат

Подамо спочатку орієнтацію осей локальної декартової системи координат (ДСК). Початок координат розмістимо у деяку точку на земній поверхні, а вісь z спрямуємо за радіусом Землі від центра (до зеніту). Тоді перпендикулярна до вертикалі площина буде дотичною до поверхні земної кулі, тобто горизонтальною. Як поверхню земної кулі треба розуміти спокійну поверхню води, в якій відсутні течії і яка покриває всю земну кулю. Саме у цьому випадку сила тяжіння буде спрямована по нормалі до поверхні води та паралельним їй поверхням, які називаються рівневими. У цій площині й вибираються вісі x і y , напрямок яких, у принципі, може бути довільним. У такій системі горизонтальна складова сили тяжіння буде дорівнювати нулю, тобто проекції g_x і g_y зникають, а нормаль-

на до поверхні складова $g_z = -g$, де $g = 9,80665 \text{ мс}^{-2}$ - абсолютне значення вектора \mathbf{g} (рис. 1.4.1). Проекції сили Кориоліса (\mathbf{F}_k) на вісі x, y, z , що одержуються за правилами векторного аналізу, дорівнюють відповідно

$$F_x = -2(\omega_y w - \omega_z v), \quad F_y = -2(\omega_z u - \omega_x w), \quad F_z = -2(\omega_x v - \omega_y u),$$

де u, v, w - проекції вектора швидкості \mathbf{V} на вісі системи координат, що розглядається.

Враховуючи сказане, рівняння руху у ДСК будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v - 2\omega_y w, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2\omega_z w - 2\omega_x u, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\omega_y u - 2\omega_x v - g. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Тут $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ - проекції градієнта тиску.

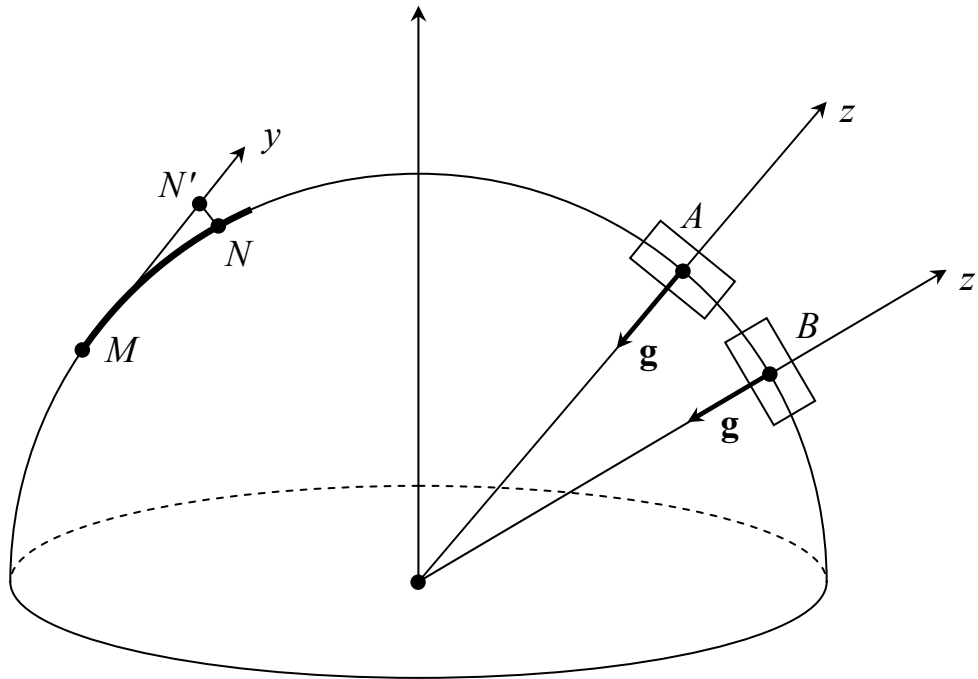


Рисунок 1.4.1 - Розташування осей і вектора \mathbf{g} у локальній декартовій системі координат

Треба відзначити, що оскільки координатна система, яка розглядається, є локальною, то, звісно, при переміщенні початку координат з однієї точки на земній поверхні в іншу напрямком осей змінюється (див. рис. 1.4.1, точки A і B), але проекції g_x і g_y дорівнюють нулю. В інших системах координат нехтування проекціями g_x і g_y є неприпустимим.

Для зручності застосування ДСК у метеорологічних задачах спрямуємо вісь x по дотичній до широтного кола (додатний напрямок з заходу на схід), а вісь y – по дотичній до меридіана з півдня на північ. Таку систему координат називають стандартною системою координат, для якої збережемо аббревіатуру ДСК. В цій системі проекції вектора ω на горизонтальні вісі дорівнюють: $\omega_x = 0$; $\omega_y = \omega \cdot \cos\varphi$; $\omega_z = \omega \cdot \sin\varphi$. Очевидно, що стандартна система координат також є ортогональною, але криволінійною, квазідекартовою. Тому вигляд рівнянь руху, записаних у цій системі, відрізняється від їх вигляду у прямокутній ДСК.

Дійсно, проекції векторного рівняння руху на вісі стандартної системи координат мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega v \sin\varphi - 2\omega w \cos\varphi - \frac{2uw}{a_0} - \frac{2uwtg\varphi}{a_0}; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega u \sin\varphi - \frac{u^2 tg\varphi}{a_0} + \frac{2vw}{a_0}; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\omega u \cos\varphi - g + \frac{u^2 + v^2}{a_0}, \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

де a_0 – величина, що є близькою до середнього радіуса Землі.

Рівняння (1.4.2) є наближеними. Їх збіг з точними буде тим більшим, чим меншою є площа прогностичної області або, тобто, чим меншою є різниця між збільшенням дуги кола і довжиною відповідного прямолінійного відрізка вздовж осей координат. Наприклад, з рис. 1.4.1 видно, що чим меншою є дуга MN , тим меншою буде її довжина відрізнятись від довжини відрізка MN' , що лежить на вісі y . Це стосується й вісі x , що спрямована вздовж широтного кола. Неточність рівнянь (1.4.2) збільшується з наближенням до полюса. Відповідну похибку можна оцінити, наприклад, зіставляючи величини змішаних похідних $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$ і $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x}$, які

співпадають лише з точністю до членів $\frac{\text{ctg}\theta}{a_0} \frac{\partial u}{\partial x}$, де θ – доповнення до

широти. Відзначимо також, що використання стандартної ДСК є важким і тому, що обчислення похідних за змінною x за допомогою скінченних різниць треба здійснювати так, щоб інтервали δx розташовувались на

кожному колі широти на своєму відрізьку дотичної.

Наведемо оцінку порядків доданків у правій частині рівнянь (1.4.2) стосовно рухів синоптичного масштабу у помірних широтах з метою порівняння їх з рівняннями (1.4.1).

Як характерну швидкість вітру візьмемо величину 10 мс^{-1} , як характерну величину вертикальної швидкості – 10^{-2} мс^{-1} (див. Додаток Б). Такі швидкості вітру і вертикальних рухів є характерними для процесів синоптичного масштабу, часовий масштаб яких становить приблизно 24 години. З урахуванням того, що середній радіус Землі $a_0 \approx 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$, одержимо наступні порядки членів правої частини рівнянь (1.4.2):

$$\begin{aligned} O\left(\frac{2uw}{a_0}\right) &= O\left(\frac{2vw}{a_0}\right) = \frac{2 \cdot 10^1 \cdot 10^{-2}}{6,4 \cdot 10^6} \approx 3 \cdot 10^{-8}; \\ O\left(\frac{2uv \operatorname{tg} \varphi}{a_0}\right) &\approx O\left(\frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{a_0}\right) \approx O\left(\frac{u^2 + v^2}{a_0}\right) \approx 10^{-5}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Відомо, що величини членів, які описують горизонтальні проекції сили баричного градієнта і сили Коріоліса на 2-5 порядків більше, а вертикальна складова сили баричного градієнта і сила тяжіння на 6-9 порядків більше за члени (1.4.3). Таким чином, останні можна випустити; тоді система рівнянь руху (1.4.2) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Тут уведено позначення для параметра Коріоліса $\ell = 2\omega \sin \varphi$. Треба відзначити, що доданки (1.4.3) виникають через просторові зміни напрямків координатних осей.

Таким чином, якщо розміри прогностичної області є малими у порівнянні з радіусом Землі, а її межі не дуже близькі до полюсів, то, нехтуючи у рівняннях (1.4.2) деякими відносно малими поправочними доданками, можна з достатньою точністю подати їх у формі (1.4.1). Зауважимо, що в першому та третьому рівнянні системи (1.4.4) випущені члени $\ell_1 w$ і $\ell_1 u$. Оцінки показують, що для помірних широт (наприклад, $\varphi = 45^\circ$) порядки зазначених доданків становлять 10^{-6} і 10^{-3} мс^{-2} відповідно. Тобто,

ці доданки є малими у порівнянні з головними членами відповідних рівнянь і їх можна не ураховувати.

Запишемо тепер решту рівнянь гідротермодинаміки у стандартній ДСК.

Рівняння нерозривності, що виражає закон збереження маси, має вигляд

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{V} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (1.4.5)$$

Тут вираз у дужках є дивергенцією вектора швидкості і описує лише деформацію, пов'язану зі змінами об'єму частки.

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона) є емпіричним і добре задовольняється, якщо середовище не є дуже розрідженим,

$$p = \rho RT. \quad (1.4.6)$$

Це рівняння описує зв'язок між тиском, густиною та температурою, який не залежить від координат та часу, і виражає той факт, що атмосферне повітря може уважатися ідеальним газом. Стосовно реального вологого повітря рівняння (1.4.6) буде мати вигляд

$$p = \rho RT(1 + 0,605q), \quad (1.4.7)$$

де q – масова частка водяної пари.

Рівняння припливу тепла

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{c_p \rho}, \quad (1.4.8)$$

що називається також рівнянням першого початку термодинаміки, є математичним записом збереження енергії стосовно внутрішньої енергії частки повітря одиничної маси, що рухається. У рівнянні (1.4.8) використані загальноживані позначення: c_p – питома теплоємність при сталому тиску, ε і ε/ρ – припливи тепла відповідно до одиниці об'єму та до одиниці маси повітря, що рухається, за одиницю часу.

Якщо увести позначення $\varkappa = c_p/c_v$, де c_v – питома теплоємність при сталому об'ємі, та ураховати, що $R = c_p - c_v$, рівняння (1.4.8) можна записати у вигляді

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{\varepsilon}{c_p \rho} \quad (1.4.9)$$

Рівняння (1.4.8) і (1.4.9) виконуються усюди, де тиск і температура мають сенс, тобто за виключенням самих верхніх шарів атмосфери. Приплив тепла ε залежить від багатьох процесів, що відбуваються в атмосфері. Головними з них є турбулентний теплообмін, променевий теплообмін, а також витрати або виділення тепла при зміні фазового стану води в атмосфері. Згідно з цим можна наближено записати

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_p,$$

де ε_t – приплив (відтік) тепла внаслідок турбулентного теплообміну;

ε_r – променевий приплив (відтік) тепла;

ε_p – приплив тепла до вологого повітря при конденсації водяної пари або замерзанні часток води чи витрати тепла на випаровування або танення.

Рівняння (1.4.4)-(1.4.6), (1.4.8) є системою шести рівнянь, яка містить поряд з відомими константами шість метеорологічних величин – p , ρ , T , u , v і w , а також припливи тепла ε . У зв'язку з цим доцільно розрізнити два види рухів в атмосфері.

До першого, більш часткового виду рухів зарахуємо такі, за яких приплив тепла ε виражається заданим чином через ті ж основні метеорологічні величини, а також через незалежні змінні – координати x , y , z і час t . Стосовно таких рухів система перелічених рівнянь є замкненою системою шести рівнянь з шістьма шуканими функціями. Інакше кажучи, цих рівнянь достатньо для визначення з них полів метеорологічних величин (за наявності відповідних початкових та межових умов), а отже й для чисельного їх прогнозу.

Найпростішим випадком такого роду рухів є адіабатичні рухи, тобто такі, за яких приплив тепла ε дорівнює нулю. Прогностичні схеми, побудовані у припущенні про адіабатичність рухів, називаються квазіадіабатичними схемами.

До другого, загальнішого виду рухів зарахуємо такі, за яких приплив тепла не виражається однозначно через метеорологічні величини та незалежні змінні. Тоді система (1.4.4), (1.4.5), (1.4.6), (1.4.8) виявляється незамкненою і треба залучати додаткові рівняння. Так, наприклад, якщо ураховується променевий приплив тепла, то доведеться залучити до розгляду рівняння променевого теплообміну. Якщо є потреба урахувати виділення тепла при конденсації водяної пари, то треба тоді залучити до розв'язання задачі рівняння водяної пари тощо. Запишемо систему рівнянь гідротермодинаміки для великомасштабних атмосферних рухів

вільної атмосфери в адіабатичному наближенні, тобто без сил тертя, які є великими у граничному шарі атмосфери, і без урахування зовнішніх припливів тепла ($\varepsilon = 0$); при цьому повні похідні розпишемо через часткові, а третє рівняння руху подамо у формі рівняння статички. Система рівнянь (1.4.4)-(1.4.6), (1.4.8) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\ p &= \rho RT. \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Система (1.4.10) складається з шести рівнянь, містить шість невідомих (u, v, w, p, ρ, T), тобто є замкненою і може бути розв'язана.

1.4.2 Ізобарична система координат

Основний метод, яким користуються для подання даних аерологічних спостережень з метою аналізу та прогнозу погоди, називається методом баричної топографії. Сутність цього методу полягає у тому, що дані спостережень відносять до певних значень p_i і для кожного такого значення (для кожної ізобаричної поверхні $p_i = \text{const}$) будується карта баричної топографії. Основні карти будуються для $p = 850, 700, 500$ і 300 гПа. На карту наносяться розраховані за допомогою рівняння статички значення потенціалу сили тяжіння Φ , тобто геопотенціалу

$$\Phi = \int_{z_0=0}^{z_i(p_i)} g dz = \int_{p_i}^{p_0} RT \frac{dp}{p}. \tag{1.4.11}$$

Тут $z = 0$ відповідає рівню моря, а p_0 є тиском, зведеним до цього рівня.

На ту ж карту наносяться дані про температуру, напрямок та швид-

кість вітру на ізобаричній поверхні, вологість повітря (дефіцит точки роси) та деякі інші характеристики.

До введення Міжнародною угодою методу баричної топографії (наприкінці 1930-х років) застосовувались карти ізобар на рівневих поверхнях $z = \text{const}$. Внаслідок змінності з висотою коефіцієнта, що входить у вираз для швидкості геострофічного вітру через градієнт тиску, просторовий аналіз поля вітру за такого способу подання даних був утрудненим. Але у виразах для геострофічного вітру через градієнт геопотенціалу коефіцієнт пропорційності не залежить від висоти, що дозволяє порівнювати поле вітру на різних висотах. Це було головною причиною переходу до зручнішого на практиці методу баричної топографії.

Зазначена властивість карт баричної топографії позначається й на вигляді рівнянь динаміки атмосфери у системі координат, де як вертикальну координату використовують не висоту z , а тиск p , – у так званій ізобаричній системі координат (ІСК).

Розглянемо формули перетворення змінних для переходу до ІСК. Насамперед відзначимо, що зміна метеорологічної величини вздовж ізобаричної поверхні $p = \text{const}$ відрізняється від зміни цієї ж величини вздовж горизонтальної поверхні $z = \text{const}$, але у даній точці у даний момент часу та чи інша метеорологічна величина буде мати одне значення незалежно від того, відносно якої системи координат подаються функції f і f_p . Якщо залежність деякої величини від змінних t, x, y, z подається функцією $f(t, x, y, z)$, а залежність тієї ж величини від змінних t_p, x_p, y_p, p описується функцією $f_p(t_p, x_p, y_p, p)$, то має місце рівність

$$f(t, x, y, z) = f_p(t_p, x_p, y_p, p),$$

яку докладніше можна записати у вигляді

$$f(x, y, z, t) = f_p[x_p(x), y_p(y), p(x, y, z, t), t_p(t)], \quad (1.4.12)$$

якщо вісі x_p і y_p , що лежать на ізобаричній поверхні $p = \text{const}$, спрямовані не довільним чином, а співпадають за напрямком з осями x і y , які лежать на горизонтальній площині або рівневій поверхні $z = \text{const}$ (рис. 1.4.2).

Відомо, що кут нахилу ізобаричної поверхні до горизонтальної площини є дуже малим ($\beta \approx 30''$), тому є справедливими наближені рівності:

$$x_p \approx x, \quad y_p \approx y. \quad (1.4.13)$$

Крім того, виконується точна рівність

$$t_p = t, \quad (1.4.14)$$

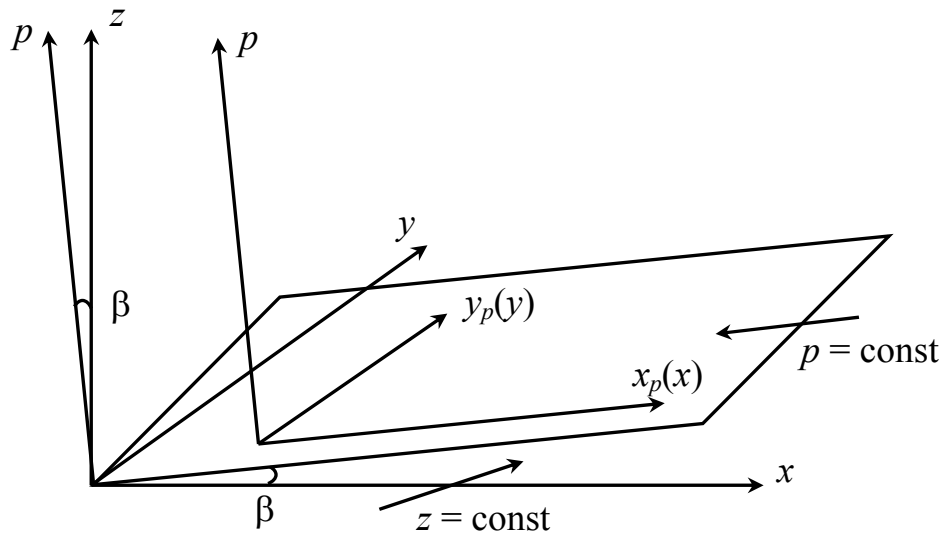


Рисунок 1.4.2 – Взаємне розташування осей декартової та ізобаричної системи координат

отже,

$$\frac{dx_p}{dx} = \frac{dy_p}{dy} = \frac{dt_p}{dt} = 1. \quad (1.4.15)$$

Для одержання формули переходу від ДСК до ІСК продиференціюємо тотожність (1.4.12) по змінним декартової системи координат x, y, z, t ; тоді з урахуванням рівності (1.4.15) одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f_p}{\partial x_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f_p}{\partial y_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}; \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f_p}{\partial t_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Скористуємось формулами (1.4.16) для одержання виразу для індивідуальної похідної в ізобаричній системі координат. У декартових координатах цей вираз має вигляд

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.4.17)$$

Підставимо (1.4.16) у (1.4.17) і одержимо

$$\begin{aligned} \frac{df_p}{dt_p} &= \frac{\partial f_p}{\partial t_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + u_p \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \\ &+ v_p \left(\frac{\partial f_p}{\partial y_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + w_p \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Розкриємо дужки та згрупуємо члени, які містять множник $\frac{\partial f_p}{\partial p}$; при цьому врахуємо, що згідно з (1.4.12) $u = u_p$; $v = v_p$; $w = w_p$:

$$\frac{df_p}{dt_p} = \frac{\partial f_p}{\partial t_p} + u_p \frac{\partial f_p}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial f_p}{\partial y_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (1.4.18)$$

Вираз у дужках в формулі (1.4.18) є індивідуальною (повною) похідною від тиску за часом. Уведемо позначення

$$\tau = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.4.19)$$

і перепишемо (1.4.18) з урахуванням (1.4.19)

$$\frac{df_p}{dt_p} = \frac{\partial f_p}{\partial t_p} + u_p \frac{\partial f_p}{\partial x_p} + v_p \frac{\partial f_p}{\partial y_p} + \tau \frac{\partial f_p}{\partial p}. \quad (1.4.20)$$

Порівняння виразів для індивідуальної похідної у декартовій (1.4.17) та ізобаричній (1.4.20) системах координат показує, що відмінності між ними містяться лише в останніх членах, які містять похідні по вертикальній координаті. В (1.4.17) w – це лінійна вертикальна швидкість, що має розмірність $[w] = \text{м с}^{-1}$; в (1.4.20) τ – це так звана ізобарична вертикальна швидкість, розмірність якої $[\tau] = \text{Па с}^{-1}$.

З формули (1.4.19) видно, що ізобарична вертикальна швидкість τ описує індивідуальні зміни тиску повітряної частинки за одиницю часу подібно тому, як звичайна вертикальна швидкість $w = dz/dt$ описує індивідуальні зміни висоти частинки.

Можна показати, що останній член у правій частині виразу (1.4.19) істотно перебільшує за величиною будь-який з трьох інших членів (див. Додаток Б) і тому виконується наближена рівність

$$\tau \approx w \frac{\partial p}{\partial z}$$

або, з урахуванням рівняння статички $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$,

$$\tau \approx -\rho g w. \quad (1.4.21)$$

Рівність (1.4.21) виражає кількісний зв'язок між звичайною та ізобаричною вертикальними швидкостями з точністю, що є достатньою для більшості практичних цілей.

З (1.4.21) випливає, що знаки τ і w є протилежними, а тому значення $\tau > 0$ відповідають низхідним вертикальним рухам, а $\tau < 0$ – висхідним. Таким чином, ізобарична вертикальна швидкість τ є наближено пропорційною за величиною звичайній вертикальній швидкості w і протилежною їй за знаком.

Скористуємось тепер виведеними формулами (1.4.16) і (1.4.20) для переведення рівнянь динаміки атмосфери (1.4.4), (1.4.5), (1.4.8) у ізобаричну систему координат.

Ліві частини зазначених рівнянь, які є індивідуальними похідними складових вектора швидкості, густини і температури, можна легко подати в ізобаричній системі координат, якщо скористатися формулою (1.4.20).

Але у правих частинах залишаються похідні за координатами "старої" (декартової) системи; наприклад, у рівняннях руху – це похідні $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$, $\partial p / \partial z$. Знайдемо вирази для них в ізобаричній системі координат. Для цього застосуємо рівняння переходу (1.4.16) до величини z , яка у декартовій системі координат є незалежною змінною, а в ізобаричній системі $z \equiv H$ є висотою ізобаричної поверхні, тобто функцією $H = H(x_p, y_p, p, t_p)$. Таким чином, у нашому випадку роль f відіграє z , а роль f_p – функція H .

Відзначимо, що при виведенні формул переходу (1.4.16) на функції f і f_p не накладалися ніякі обмеження, тому вони можуть застосовуватися до будь-яких безперервних функцій.

Застосуємо формули (1.4.16) до функцій z і H :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x_p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial H}{\partial y_p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial z}{\partial z} &= \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}; \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial t_p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.4.22}$$

Оскільки x, y, z, t – незалежні змінні, похідні $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y, \partial z/\partial t$ будуть дорівнювати нулю, а $\partial z/\partial z = 1$. З урахуванням цього формули (1.4.22) переписуться у вигляді:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial H}{\partial x_p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial y_p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ 1 &= \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}; \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial t_p} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.4.23}$$

Знайдемо з рівнянь (1.4.23) $\partial p/\partial x, \partial p/\partial y, \partial p/\partial z$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial x_p}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial y_p}; \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} \frac{\partial H}{\partial t_p}.\end{aligned}\tag{1.4.24}$$

З третього рівняння (1.4.23) знайдемо вираз для $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1}$:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial z}} \quad \text{або} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} = \frac{\partial p}{\partial z}$$

чи з урахуванням рівняння статички

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1} = -\rho g. \quad (1.4.25)$$

Підставивши (1.4.25) в (1.4.24), одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial H}{\partial x_p}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho g \frac{\partial H}{\partial y_p}; \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \rho g \frac{\partial H}{\partial t_p}. \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

З урахуванням одержаних виразів для складових баричного градієнта та формули (1.4.20) запишемо перші два рівняння руху (1.4.4) в ІСК:

$$\frac{\partial u}{\partial t_p} + u \frac{\partial u}{\partial x_p} + v \frac{\partial u}{\partial y_p} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -g \frac{\partial H}{\partial x_p} + \ell v; \quad (1.4.27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t_p} + u \frac{\partial v}{\partial x_p} + v \frac{\partial v}{\partial y_p} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -g \frac{\partial H}{\partial y_p} - \ell u. \quad (1.4.28)$$

Третє рівняння руху у формі рівняння статички $\partial p / \partial z = -\rho g$ в ізобаричних координатах подамо за допомогою третього рівняння системи (1.4.23), з якого випливає, що

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1}.$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням статички, одержуємо

$$-\rho g = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1}$$

або з урахуванням рівняння стану

$$-\frac{\rho g}{RT} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1}.$$

Розв'язуючи останню рівність стосовно температури, одержуємо рівняння статки в ізобаричній системі координат

$$T = -\frac{pg}{R} \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (1.4.29)$$

Видно, що це рівняння зв'язує дві функції: температуру T і висоту ізобаричної поверхні H , тобто його можна використати для вилучення з рівнянь погоди або T , або H (g і R – константи, а p – незалежна змінна, яка набуває конкретного значення: наприклад для основних ізобаричних поверхонь $p = 850, 700, 500, 300$ гПа).

Одержимо тепер рівняння припливу тепла в ізобаричній системі координат. Для цього запишемо рівняння (1.4.8) в адіабатичному наближенні ($\varepsilon = 0$); розпишемо при цьому ліву частину через частинні похідні в ІСК, перенесемо праву частину в ліву і одержимо

$$\frac{\partial T}{\partial t_p} + u \frac{\partial T}{\partial x_p} + v \frac{\partial T}{\partial y_p} + \tau \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt} = 0.$$

Це рівняння можна переписати в іншому вигляді, якщо урахувати, що dp/dt є вертикальною ізобаричною швидкістю τ

$$\frac{\partial T}{\partial t_p} + u \frac{\partial T}{\partial x_p} + v \frac{\partial T}{\partial y_p} + \tau \left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{RT}{c_p p} \right) = 0. \quad (1.4.30)$$

Рівняння (1.4.30) і є рівнянням припливу тепла в адіабатичному наближенні в ізобаричній системі координат.

Але для розв'язання задач чисельного прогнозу погоди зручно у рівняння (1.4.30) увести вертикальний градієнт температури $\gamma = -\partial T/\partial z$. Скористуємось третьою формулою переходу з (1.4.16) і виразимо $\partial T/\partial p$ через $\partial T/\partial z$:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (1.4.31)$$

З урахуванням рівняння статки остання рівність запишеться таким чином:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\rho g \frac{\partial T}{\partial p},$$

звідки $\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial T}{\partial z}}{\rho g}$ або, з урахуванням виразу для вертикального градієнта температури і рівняння стану, остання рівність набуває вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\gamma RT}{pg}. \quad (1.4.32)$$

Підставивши (1.4.32) у рівняння припливу тепла (1.4.30), одержимо

$$\frac{\partial T}{\partial t_p} + u \frac{\partial T}{\partial x_p} + v \frac{\partial T}{\partial y_p} + \tau \left(\frac{\gamma RT}{pg} - \frac{RT}{c_p p} \right) = 0.$$

Виносячи спільні множники за дужки та ураховуючи, що сухоадіабатичний градієнт $\gamma_a = g/c_p$, одержимо

$$\frac{\partial T}{\partial t_p} + u \frac{\partial T}{\partial x_p} + v \frac{\partial T}{\partial y_p} + \frac{RT}{pg} (\gamma - \gamma_a) \tau = 0. \quad (1.4.33)$$

Уведемо позначення $c^2 = \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma)$; тоді рівняння (1.4.33) запишеться у вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial t_p} + u \frac{\partial T}{\partial x_p} + v \frac{\partial T}{\partial y_p} - \frac{c^2}{Rp} \tau = 0. \quad (1.4.34)$$

У межах чисельного прогнозу рівняння припливу тепла в ізобаричних координатах використовується у вигляді (1.4.34). Відзначимо, що у виразі для c^2 вертикальні градієнти γ_a і γ поміняні місцями, тому попереду останнього члена в рівнянні (1.4.34) стоїть знак мінус. Множник c^2 має розмірність квадрата швидкості, а за величиною дорівнює приблизно квадрату швидкості звука; він називається параметром статичної стійкості, тому що його знак визначається знаком різниці $\gamma_a - \gamma$: за стійкої стратифікації ($\gamma_a > \gamma$) $c^2 > 0$, за нестійкої ($\gamma_a < \gamma$) $c^2 < 0$, за байдужої ($\gamma_a = \gamma$) $c^2 = 0$.

Переведемо тепер в ізобаричну систему координат рівняння нерозривності. Для цього запишемо його для стисливої рідини у декартових координатах (рівняння 4 з системи (1.4.10))

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (1.4.35)$$

Виразимо з рівняння статики ρ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \text{ звідки } \rho = -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z},$$

і підставимо в (1.4.35)

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial z} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ & = - \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.4.36)$$

Скоротимо обидві частини рівняння (1.4.36) на $-g^{-1}$ і поміняємо у лівій частині порядок диференціювання

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (1.4.37)$$

В останньому рівнянні підкреслені члени лівої частини запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} u \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ v \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} w \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

Підставивши рівності (1.4.38) у (1.4.37) і перенісши праву частину (1.4.37) у ліву, одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} u \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} w \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Після скорочення подібних членів (вони підкреслені), об'єднаємо усі члени з оператором $\partial/\partial z$ і винесемо цей оператор за дужки

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1.4.39)$$

В (1.4.39) вираз у дужках є повною похідною від вертикальної координати p за часом, тобто аналогом вертикальної швидкості або ізобаричної вертикальної швидкості τ , з урахуванням чого рівняння (1.4.39) переписеться у вигляді

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1.4.40)$$

З (1.4.40) видно, що усі похідні взяті за координатами декартової системи, тому скористуємось формулами переходу (1.4.16) і запишемо похідні $\partial u/\partial z$, $\partial v/\partial z$, $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}; \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x_p} + \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial y_p} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

Підставимо (1.4.41) у (1.4.40) і одержимо

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y_p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Після зведення подібних членів (вони підкреслені), одержуємо

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y_p} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1.4.42)$$

В цьому рівнянні похідну $\partial \tau/\partial z$ запишемо, скориставшись формулою переходу з (1.4.16),

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}$$

і в результаті одержимо

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y_p} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Винесемо $\frac{\partial p}{\partial z}$ за дужки та замінимо його з рівняння статички $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

$$-\rho g \left(\frac{\partial \tau}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_p} \right) = 0.$$

Через те, що $g = \text{const}$, а $\rho \neq 0$, рівність виконується тільки у випадку, коли вираз у дужках дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} + \frac{\partial u}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_p} = 0. \quad (1.4.43)$$

Це рівняння є рівнянням нерозривності для стисливого середовища в ізобаричній системі координат. На відміну від вихідного рівняння (1.4.35), рівняння (1.4.43) має дуже простий вигляд: у ньому лише три доданки і всі вони є лінійними членами; рівняння (1.4.35) містить сім членів, шість з яких є нелінійними. Таким чином, рівняння нерозривності в ізобаричних координатах є істотно простішим, ніж у декартових; крім того, це рівняння зручно використовувати для розрахунку ізобаричної вертикальної швидкості за даними про вітер

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_p} \right)$$

або з урахуванням того, що $\frac{\partial u}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_p} = D_s$, де D_s - плоска дивергенція,

рівняння для τ можна записати так:

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} = -D_s \quad \text{чи} \quad \int_{p_0}^p \frac{\partial \tau}{\partial p} dp = - \int_{p_0}^p D_s dp.$$

Після інтегрування лівої частини останньої рівності одержуємо

$$\tau_p - \tau_{p_0} = - \int_{p_0}^p D_s dp \quad \text{чи} \quad \tau_p = \tau_{p_0} - \int_{p_0}^p D_s dp,$$

де τ_p і τ_{p_0} – значення ізобаричної вертикальної швидкості на ізобаричних поверхнях $p = \text{const}$ і $p_0 = \text{const}$ відповідно.

Запишемо тепер систему рівнянь гідротермодинаміки в ізобаричних координатах, при цьому випустимо індекси p

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + \ell v; \quad (1.4.44a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -g \frac{\partial H}{\partial y} - \ell u; \quad (1.4.44б)$$

$$T = -\frac{gp}{R} \frac{\partial H}{\partial p}; \quad (1.4.44в)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{c^2}{Rp} \tau = 0; \quad (1.4.44г)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0. \quad (1.4.44д)$$

Як видно з (1.4.44), в ІСК система рівнянь гідротермодинаміки складається з п'яти рівнянь і містить п'ять невідомих (u, v, τ, H, T), тобто є замкненою і може бути розв'язана. Нагадаємо, що у декартових координатах замкненою є система з шести рівнянь з шістьма невідомими (u, v, w, p, ρ, T).

Перелічимо основні переваги ізобаричної системи координат:

1. В ізобаричних координатах замість карт розподілу тиску на фіксованих рівнях використовуються карти баричної топографії, тобто карти розподілу абсолютного геопотенціалу на фіксованих ізобаричних поверхнях (850, 700, 500, 300 гПа). Перевага цих карт полягає у тому, що одній і тій же щільності ізогіпс на різних поверхнях $p = \text{const}$ (у фіксованих точках) відповідають однакові швидкості геострофічного вітру; у декартових координатах швидкості будуть різні через те, що густина повітря істотно змінюється з висотою.

2. Більшість рівнянь динаміки атмосфери в ізобаричній системі координат мають простіший вигляд у порівнянні з декартовою. Це особливо добре видно на прикладі рівняння нерозривності, яке в ІСК для загального випадку руху є аналогічним за формою рівнянню нерозривності у ДСК для часткового випадку руху нестисливої рідини. Це рівняння є лінійним і містить тільки три члени. Крім того, у рівняння руху в ІСК не

входить густина. Завдяки простішому вигляду рівнянь в ІСК полегшується їх розв'язання.

3. В ізобаричних координатах порівняно просто можна вилучити деякі невідомі (шукані функції) і звести, таким чином, вихідну систему рівнянь до замкненої системи з меншою кількістю невідомих. Відомо, чим менша кількість рівнянь входить до замкненої системи, тим простіше одержати розв'язок цієї системи. Тому бажано вихідну систему звести до мінімуму рівнянь вилученням деяких шуканих функцій.

У системі рівнянь динаміки атмосфери в ДСК шість шуканих функцій входять порівняно складним шляхом і вилучення деяких невідомих призведе до громіздких рівнянь.

Інакше це відбувається в ізобаричній системі координат. З рівнянь гідротермодинаміки в ІСК можна вилучити температуру за допомогою рівняння статички і одержати систему з невідомими u , v , τ , H . Далі можна вилучити й ізобаричну вертикальну швидкість τ , виражаючи її з рівняння нерозривності. Скориставшись геострофічним наближенням, можна вилучити складові швидкості вітру u та v і одержати рівняння з єдиною невідомою величиною H .

Описана можливість спрощення системи рівнянь динаміки атмосфери обумовлює широке використання ізобаричної системи координат у чисельних методах прогнозу.

На закінчення подамо систему рівнянь (1.4.44) в ІСК, в якій вертикальна координат є безрозмірною величиною

$$\zeta = \frac{p}{p_0},$$

де $p_0 = 1000$ гПа - стандартний тиск;

p - поточний тиск.

Відмінність p -системи від ζ -системи полягає у тому, що замість квазігоризонтальних поверхонь $p = \text{const}$ використовуються поверхні $\zeta = \text{const}$. Для основних ізобаричних поверхонь (850, 700, 500, 300 гПа) ζ набуває значення 0,85, 0,7, 0,5, 0,3 відповідно.

Отже у ζ -системі рівняння (1.4.44) набувають вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \quad (1.4.45a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u; \quad (1.4.45б)$$

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}; \quad (1.4.45в)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{c^2}{R\zeta} \hat{\tau} = 0; \quad (1.4.45г)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \zeta} = 0. \quad (1.4.45д)$$

У системі (1.4.45) $\hat{\tau} = \tau/p_0$, а рівняння припливу тепла подано в адіабатичному наближенні ($\varepsilon = 0$).

1.4.3 σ -система координат

Розглянута вище ізобарична система координат має такий недолік, що поверхня Землі, у принципі, не співпадає з якоюсь конкретною ізобаричною поверхнею. Це ускладнює завдання точних межових умов на самій підстильній поверхні і, тим самим, переключується опис атмосферних рухів у прилягаючих шарах. Особливо це позначається в умовах орографічних неоднорідностей підстильної поверхні.

У цьому відношенні певну перевагу має так звана σ -система координат, що вперше була уведена Н. Філіпсом. Тут як вертикальна координата використовується

$$\sigma = p/p_s, \quad (1.4.46)$$

де $p_s = p_s(x, y, t)$ – тиск біля поверхні землі, який є функцією горизонтальних координат і часу. Як випливає з (1.4.46), поверхня $\sigma = 1$ завжди співпадає з підстильною поверхнею, орографічно повторюючи її профіль (рівнина, морська поверхня, орографічні неоднорідності).

Решта координат у цій системі не відрізняються від ізобаричної координатної системи, тобто $x_\sigma \approx x_p \approx x$, $y_\sigma \approx y_p \approx y$, $t_\sigma \approx t_p \approx t$.

Аналогом вертикальної швидкості в σ -системі координат є функція

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y} + w \frac{\partial \sigma}{\partial z} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{p_s} \right). \quad (1.4.47)$$

З (1.4.47) одержимо

$$\dot{\sigma} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{p_s} \right) = \frac{1}{p_s} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{p_s^2} \frac{dp_s}{dt} = \frac{1}{p_s} \left[\tau - \sigma \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + u \frac{\partial p_s}{\partial x} + v \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) \right]. \quad (1.4.48)$$

Зв'язок між τ і $\dot{\sigma}$ можна одержати й іншим способом

$$\tau = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma p_s) = p_s \dot{\sigma} + \sigma \frac{dp_s}{dt}. \quad (1.4.49)$$

Формули зв'язку похідних у p - і σ -системах координат одержуються аналогічно тому, як це робилось раніше при переході від декартової до ізобаричної системи, тому відразу запишемо

$$\frac{\partial}{\partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (1.4.50)$$

або, ураховуючи, що

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left(\frac{p}{p_s} \right) = \frac{1}{p_s} \frac{\partial p}{\partial x_p} - \frac{p}{p_s^2} \frac{\partial p_s}{\partial x_p} \equiv -\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma}, \quad (1.4.51)$$

можна переписати (1.4.50) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x_p} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}. \quad (1.4.52)$$

Тут у (1.4.51) і (1.4.52) ураховано, що $\partial p / \partial x_p = 0$, тому що p і x_p – незалежні змінні в p - системі координат, а $x_p \approx x_\sigma$.

За аналогією з (1.4.52) запишемо формули зв'язку похідних від довільної функції для решти координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_p} &= \frac{\partial}{\partial y_\sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y_\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}; \\ \frac{\partial}{\partial t_p} &= \frac{\partial}{\partial t_\sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial t_\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}; \\ \frac{\partial}{\partial p} &= \frac{\partial \sigma}{\partial p} \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{p_s} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{p_s} \frac{\partial}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (1.4.53)$$

В останній формулі використана очевидна умова $\partial p_s / \partial p = 0$. Якщо цю ж формулу застосувати до конкретної функції p , то нескладно бачити, що $p_s = \partial p / \partial \sigma$.

З урахуванням (1.4.48), (1.4.52), (1.4.53) одержимо вираз для індивідуальної похідної

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_\sigma} + u \frac{\partial}{\partial x_\sigma} + v \frac{\partial}{\partial y_\sigma} + \frac{\tau}{p_s} \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t_\sigma} + u \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} + v \frac{\partial p_s}{\partial y_\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (1.4.54)$$

або, беручи додатково до уваги (1.4.49)

$$\frac{\tau}{p_s} \frac{\partial}{\partial \sigma} = \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\sigma}{p_s} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t_\sigma} + u \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} + v \frac{\partial p_s}{\partial y_\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad (1.4.55)$$

перепишемо (1.4.54) в остаточному вигляді

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_\sigma} + u \frac{\partial}{\partial x_\sigma} + v \frac{\partial}{\partial y_\sigma} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (1.4.56)$$

Маючи на увазі (1.4.52) і (1.4.53), одержимо для конкретної функції Φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_p} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_\sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_p} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_\sigma} - \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y_\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (1.4.57)$$

Тепер можна записати рівняння горизонтального руху в σ -системі координат, урахувавши (1.4.56) і (1.4.57) та випускаючи визначальний індекс σ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= \ell v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= -\ell u - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (1.4.58)$$

Рівняння квазістатки з урахуванням останнього співвідношення в (1.4.53) неважко одержати у вигляді

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \equiv -\frac{\sigma}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad \text{чи} \quad \frac{RT}{\sigma} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \quad (1.4.59)$$

Рівняння нерозривності запишемо у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial v}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dt} = 0$$

або

$$p_s \left(\frac{\partial u}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial v}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \right) + \frac{dp_s}{dt} = 0. \quad (1.4.60)$$

Рівняння (1.4.60) можна подати у дивергентній формі, вважаючи, що

$$p_s \frac{\partial u}{\partial x_\sigma} + u \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} \equiv \frac{\partial (u p_s)}{\partial x_\sigma}, \quad p_s \frac{\partial v}{\partial y_\sigma} + v \frac{\partial p_s}{\partial y_\sigma} \equiv \frac{\partial (v p_s)}{\partial y_\sigma}, \quad p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \equiv \frac{\partial \dot{\sigma} p_s}{\partial \sigma},$$

і тоді, випускаючи індекс σ при горизонтальних координатах,

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma} p_s}{\partial \sigma} = 0. \quad (1.4.61)$$

У σ -системі координат, як правило, використовують замість звичайної температури (T) потенціальну (Θ)

$$\Theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \equiv T \left(\frac{1000}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \quad (1.4.62)$$

У цьому випадку рівняння адіабатичності набуває найпростішого вигляду

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0 \quad (1.4.63)$$

чи в σ -системі координат з урахуванням (1.4.56)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} = 0. \quad (1.4.64)$$

У цьому випадку рівняння статки (1.4.59) треба, беручи до уваги (1.4.62), використовувати у вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{R}{\sigma} \Theta \left(\frac{p}{1000} \right)^{\frac{R}{c_p}}. \quad (1.4.65)$$

Система рівнянь гідротермодинаміки в σ -системі координат (1.4.58), (1.4.61), (1.4.64) і (1.4.65) містить п'ять рівнянь з шістьма невідомими функціями: u , v , $\dot{\sigma}$, Φ , Θ , p_s . Для замикання зазначеної системи необхідно додатково залучити ще одне рівняння. Для цього рівняння нерозривності (1.4.61) проінтегруємо по σ від 0 до 1, урахувавши таку межу умову:

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{при } \sigma = 0 \text{ і } \sigma = 1. \quad (1.4.66)$$

У результаті одержимо, не забуваючи при цьому, що p_s не залежить від вертикальної координати σ

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma. \quad (1.4.67)$$

Тепер те ж рівняння нерозривності (1.4.61) проінтегруємо по σ , але від 0 до σ

$$\sigma \frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^{\sigma} \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma - \dot{\sigma} p_s. \quad (1.4.68)$$

Із зіставлення (1.4.67) і (1.4.68) випливає, що

$$\dot{\sigma}(\sigma) = \frac{\sigma}{p_s} \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma' - \frac{1}{p_s} \int_0^{\sigma} \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma', \quad (1.4.69)$$

де σ' – змінна інтегрування.

Отже, випишемо остаточно замкнену систему рівнянь у σ -системі координат:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \ell v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}; \quad (1.4.70a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\ell u - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}; \quad (1.4.70б)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{R}{\sigma} \Theta \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\kappa}; \quad (1.4.70в)$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma} p_s}{\partial \sigma} = 0; \quad (1.4.70г)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} = 0; \quad (1.4.70д)$$

$$\dot{\sigma}(\sigma) = \frac{\sigma}{p_s} \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma' - \frac{1}{p_s} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma'. \quad (1.4.70д)$$

Ця система рівнянь гідротермодинаміки, як й у випадку ізобаричних координат, називається системою повних рівнянь.

У практиці чисельних методів прогнозу використовують різноманітні варіанти системи повних рівнянь (1.4.70). В основному вони пов'язані з поданням останніх членів правої частини рівнянь горизонтального руху та рівняння статки. Так, зокрема, якщо мати на увазі, що

$$\Theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{c_p \frac{R}{R}} \equiv T \zeta^{-\frac{R}{c_p}} = T \zeta^{-\kappa},$$

то з рівняння квазістатки випливає, що

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{\sigma} \equiv -\frac{R\Theta}{\sigma} \zeta^\kappa. \quad (1.4.71)$$

Здійснимо нескладні перетворення

$$\frac{\partial \zeta^\kappa}{\partial \sigma} = \kappa \zeta^{\kappa-1} \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} = \frac{\kappa \zeta^\kappa}{\zeta \cdot 1000} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\kappa \zeta^\kappa}{\sigma}. \quad (1.4.72)$$

Тут додатково ураховано, що $\partial p / \partial \sigma = p_s$. Запишемо, беручи до уваги (1.4.72), рівняння квазістатки (1.4.71) в остаточному вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -c_p \Theta \frac{\partial \zeta^\kappa}{\partial \sigma}. \quad (1.4.73)$$

Тепер перетворимо останні члени правих частин рівнянь горизонтального руху, ураховуючи (1.4.72) і (1.4.73),

$$\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} c_p \Theta \frac{\partial \zeta^\kappa}{\partial \sigma} = -\frac{c_p \Theta \kappa \zeta^\kappa}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x}. \quad (1.4.74)$$

У свою чергу,

$$\frac{\partial \zeta^{\kappa}}{\partial x_{\sigma}} = \frac{\kappa \zeta^{\kappa}}{\kappa} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{p}{1000} \right) = \frac{\kappa \zeta^{\kappa}}{p} \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x_{\sigma}} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \equiv \frac{\kappa \zeta^{\kappa}}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x}. \quad (1.4.75)$$

Зіставляючи (1.4.74) і (1.4.75), легко бачити, що

$$\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -c_p \Theta \frac{\partial \zeta^{\kappa}}{\partial x}.$$

За аналогією можна також записати

$$\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -c_p \Theta \frac{\partial \zeta^{\kappa}}{\partial y}.$$

Тепер рівняння руху і квазістатика набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= \ell v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - c_p \Theta \frac{\partial \zeta^{\kappa}}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= -\ell u - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - c_p \Theta \frac{\partial \zeta^{\kappa}}{\partial y}; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} &= -c_p \Theta \frac{\partial \zeta^{\kappa}}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (1.4.76)$$

До (1.4.76) потрібно приєднати у незмінному вигляді три останніх рівняння (1.4.70) і тоді одержимо систему замкнених рівнянь у σ -координатах в іншій редакції.

У деяких прогностичних моделях, ураховуючи (1.4.71), використовується інший запис згаданих вище членів:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} &= -\frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x}; \\ \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} &= -\frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.4.77)$$

Вигляд рівнянь горизонтального руху, маючи на увазі (1.4.77), є очевидним і тому тут не наводиться.

Одна з позитивних якостей σ -системи координат вже згадувалась вище – рівняння гідротермодинаміки дозволяють автоматично урахувати вплив рельєфу за рахунок появи додаткового члена у правій частині рів-

нянь горизонтального руху. До другої переваги цієї системи координат у порівнянні з ізобаричною потрібно віднести ту обставину, що вона може бути уведена для окремих атмосферних шарів. У цьому випадку

$$\sigma = \frac{p - p_h}{p_l - p_h},$$

де індекси h і l стосуються тиску на верхній та нижній межах

шару, а $\sigma_l = 1$ і $\sigma_h = 0$. Така автономна σ -система координат дозволяє детально урахувати специфічні особливості конкретного шару атмосфери (граничний шар, середня і верхня тропосфера, стратосфера).

Недоліком σ -системи координат є той факт, що дані метеорологічних величин на σ -поверхнях є відсутніми, тому при практичній реалізації прогностичної моделі типу (1.4.70) необхідно передбачати інтерполяцію цих даних з p - на σ -поверхні у початковий момент часу та зворотну інтерполяцію з σ - на p -поверхні – для прогностичних полів. Така процедура, звичайно, позначиться на точності полів метеорологічних величин, що прогнозуються, але при належному виборі способу інтерполяції, все-таки, позитивні якості σ -системи координат преважують над її недоліками. Саме тому у більшості сучасних оперативних моделей прогнозів та у моделях загальної циркуляції атмосфери σ -системі координат віддається перевага у порівнянні з іншими координатними системами.

1.4.4 Сферична система координат

Прямокутні системи координат, про які казалося вище, використовуються при моделюванні регіональних атмосферних процесів, для яких урахуванням сферичності Землі у першому наближенні можна знехтувати. Інша справа, коли мова йде про дослідження глобальних процесів або процесів планетарного масштабу. В цьому випадку найприроднішою системою координат є сферична з полюсами у географічних полюсах Землі.

У цій системі положення точки M у тривимірному просторі однозначно задається координатами (рис. 1.4.3): λ – довготою місця, що відраховується від Гринвіцького меридіана на схід ($0 \leq \lambda \leq 2\pi$); $\theta = \pi/2 - \varphi$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) – доповненням широти φ , яка змінюється від $-\pi/2$ (південний полюс) до $\pi/2$ (північний полюс); $r = a + z$ – відстанню від центра Землі (точка O), де a – радіус Землі, а z – висота розташування точки над поверхнею Землі. На рис. 1.4.3 стрілками зазначено додатний напрямок координатних осей r , λ , $\theta(\varphi)$.

Використовуючи відомі формули переходу від сферичних координат до декартових:

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \lambda; \\
 y &= r \sin \theta \sin \lambda; \\
 z &= r \cos \theta,
 \end{aligned}
 \tag{1.4.78}$$

а також вирази для складових швидкості тривимірного потоку:

$$\begin{aligned}
 u &\equiv v_\lambda = a \sin \theta \frac{d\lambda}{dt}; \\
 v &\equiv v_\theta = a \frac{d\theta}{dt}; \\
 w &\equiv v_r = v_z = \frac{dr}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{1.4.79}$$

та індивідуальної похідної

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z},
 \tag{1.4.80}$$

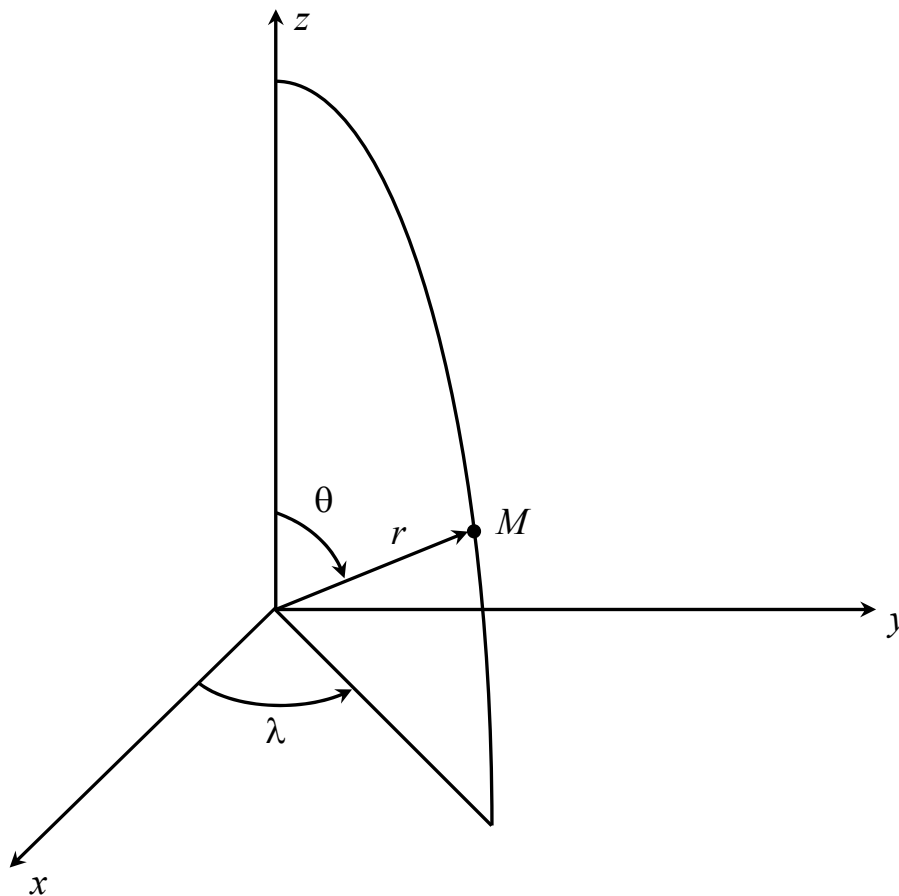


Рисунок 1.4.3 – Розташування осей у сферичній системі координат

нескладно одержати (докладне виведення можна знайти у курсі гідромеханіки) систему повних рівнянь гідротермодинаміки у вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta v_\lambda}{a} \operatorname{ctg} \theta + \frac{v_z v_\lambda}{a} = \\
= -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - 2\omega \cos \theta \cdot v_\theta + D_\lambda; \\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{v_z v_\theta}{a} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{a} v_\lambda^2 = \\
= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 2\omega \cos \theta \cdot v_\lambda + D_\theta; \\
\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g; \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \\
+ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{a} = 0; \\
\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \\
- \frac{\gamma_a}{\rho g} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) = \frac{\varepsilon}{c_p \rho}; \\
p = \rho RT.
\end{aligned} \tag{1.4.81}$$

Тут D_θ і D_λ – складові сил турбулентної в'язкості по осях θ і λ . В (1.4.81) ураховано, що оскільки $a \gg z$, то $r \approx a$.

Система у сферичних координатах (1.4.81) містить шість рівнянь з шістьма невідомими (v_λ , v_θ , v_z , ρ , p , T), тобто є замкненою. З вигляду рівняння нерозривності легко одержати вираз для просторової дивергенції

$$D = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{a}. \tag{1.4.82}$$

Нескладно одержати й вираз для вертикальної складової вихору швидкості

$$\Omega_z = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot v_\lambda) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} \right). \tag{1.4.83}$$

Можна зменшити порядок системи (1.4.81), якщо записати її у ко-

ординатах $\lambda_p, \theta_p, p, t_p$, причому:

$$\lambda_p = \lambda; \quad \theta_p = \theta; \quad p = p(\theta, \lambda, r, t); \quad t_p = t,$$

тобто тут замість вертикальної координати $r(z)$ використовується координата тиску p . Отже, одержана нижче система рівнянь буде фактично записана у змішаній сферично-ізобаричній системі координат. Як й у випадку ізобаричної системи координат, запишемо формули переходу від сферичної до сферично-ізобаричної системи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_p} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda}; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta_p} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_p} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}; \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.4.84}$$

Тоді, підставивши у вираз для індивідуальної похідної у сферичних координатах (1.4.80) співвідношення (1.4.84), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_p} &= \frac{\partial}{\partial t_p} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda_p} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta_p} + \\ &+ \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \tag{1.4.85}$$

В (1.4.85) вираз у дужках, згідно з (1.4.80), дорівнює dp/dt , тобто τ . Тоді, випускаючи індекс p , вираз (1.4.85) можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} + \tau \frac{\partial}{\partial p}. \tag{1.4.86}$$

Вираз для аналога вертикальної швидкості τ у сферично-ізобаричній системі координат можна подати в іншому вигляді. Для цього, застосувавши формули переходу для функції z у сферичній системі координат та функції H у сферично-ізобаричній, нескладно одержати:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \lambda} &= \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}; & \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}; & \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g.\end{aligned}\tag{1.4.87}$$

Тоді, з урахуванням (1.4.87),

$$\tau = \frac{dp}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - gv_z \right).\tag{1.4.88}$$

Тепер, беручи до уваги (1.4.86) і (1.4.87), перепишемо рівняння (1.4.81) у сферично-ізобаричній системі координат:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \tau \frac{\partial v_\lambda}{\partial p} + \frac{v_\theta v_\lambda}{a} \operatorname{ctg} \theta + \frac{v_z v_\lambda}{a} &= \\ &= -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - 2\omega \cos \theta \cdot v_\theta + D_\lambda; \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \tau \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_z v_\theta}{a} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{a} v_\lambda^2 &= \\ &= -\frac{1}{a \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + 2\omega \cos \theta \cdot v_\lambda + D_\theta;\end{aligned}\tag{1.4.89}$$

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_\theta}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \tau \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{RT}{c_p p} \tau &= \frac{\varepsilon}{c_p} \frac{RT}{p} \equiv -\frac{\varepsilon}{c_p} \frac{\partial \Phi}{\partial p}; \\ \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta \cdot v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0.\end{aligned}$$

У системі (1.4.89) останнє рівняння – рівняння нерозривності – можна одержати, зробивши такі ж перетворення, що й для випадку ізобаричних координат (див. п. 1.4.2). Якщо в системі (1.4.89) знехтувати малими членами $\frac{v_z v_\lambda}{a}$ і $\frac{v_z v_\theta}{a}$ (нагадаємо, що $a = 6371$ км – радіус Землі), то вона містить п'ять рівнянь з п'ятьма невідомими: v_λ , v_θ , τ , T і Φ . При цьому *a priori* припускається, що в'язкі члени F_θ і F_λ , а також неадіабатичні припливи тепла ε не вводять нових невідомих функцій. Останнє у практиці чисельного прогнозу досягається за допомогою технології параметризації цих членів. Переваги системи рівнянь (1.4.89) у порівнянні з (1.4.81) є оче-

видними, і вони співпадають із зазначеними вище при порівнянні рівнянь у декартовій та ізобаричній системах координат (див. п. 1.4.2).

У принципі нескладно в (1.4.89) додатково перейти до σ -сферичних координат, як це було показано вище (пропонуємо читачу зробити відповідні математичні викладення самостійно). Тоді така система координат нарівні з повним урахуванням сферичності Землі буде автоматично урахувати й рельєф підстильної поверхні.

На закінчення ще раз акцентуємо увагу на те, що система рівнянь у сферичних координатах використовується у моделях довгострокового гідродинамічного прогнозу і при моделюванні загальної циркуляції атмосфери та клімату. Безумовною позитивною якістю таких моделей є той факт, що постановка межових умов для них є набагато простішою, ніж у регіональних, а для глобальних умов необхідність у бічних межових умовах відпадає зовсім.

1.4.5 Циліндрична система координат

При моделюванні процесів, що спливають у квазіізольованому атмосферному вихорі (наприклад, циклоні помірних широт або тропічному циклоні) зручно ототожнювати його з циліндром, що переміщується.

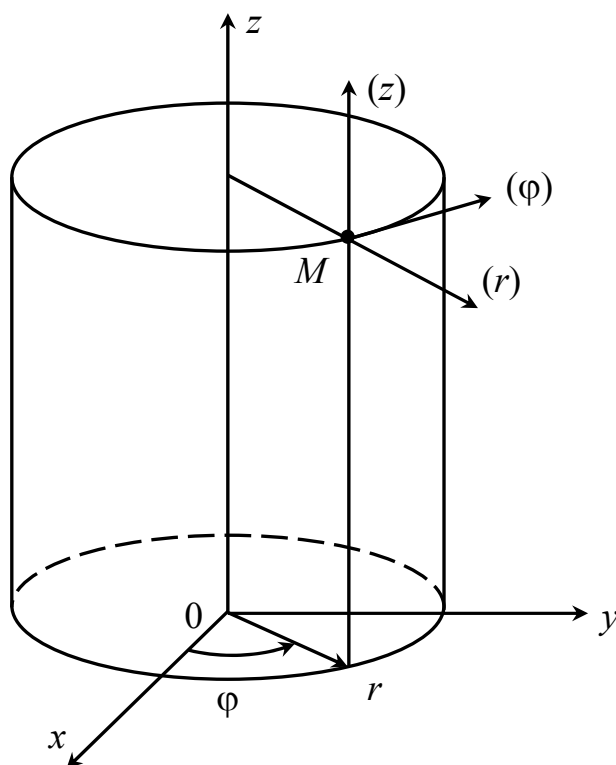


Рисунок 1.4.4 -Циліндрична система координат

Тим більше, що такі вихори, особливо у стадії максимального розвитку, як правило, є вісесиметричними. Виходячи з цього, уявляється цілком природним використовувати при запису рівнянь гідротермодинаміки криволінійну ортогональну циліндричну систему координат. У такій системі положення точки M у тривимірному просторі однозначно визначається полярними координатами: r – радіус-вектор, φ – полярний (азимутальний) кут; z – апліката. На рис. 1.4.4 стрілками показано додатний напрямок координатних осей r , φ , z . Зв'язок між декартовими та циліндричними координатами визначається формулами переходу:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (1.4.90)$$

Проекції вектора швидкості \mathbf{V} позначимо: v_r – радіальна, v_φ – тангенціальна, v_z – вертикальна складові.

Рівняння гідротермодинаміки у циліндричній системі координат записується у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + D_r; \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + D_\varphi; \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + D_z; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} &= 0; \\ p &= \rho RT; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} - \\ - \frac{RT}{c_p p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \frac{\varepsilon}{c_p \rho}. \end{aligned} \quad (1.4.91)$$

Тут D_r , D_φ , D_z – складові сили турбулентної в'язкості. Якщо припускається, що виконується умова квазістатичності, то третє рівняння системи (1.4.91) переходить у рівняння статичності $\partial p / \partial z = -\rho g$. Система рівнянь (1.4.91) є замкненою, оскільки містить шість рівнянь з шістьма невідомими: v_r , v_φ , v_z , ρ , p , T .

Наведемо додатковий вираз для тривимірної дивергенції (D) та

проекції вектора швидкості на вісь z :

$$D = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

$$\Omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}.$$
(1.4.92)

У принципі, нескладно, як й у випадку сферичних координат, одержати рівняння гідротермодинаміки у змішаній ізобаро-циліндричній системі координат з осями r, φ, p .

1.4.6 Урахування картографічних проекцій

У практиці синоптичного і гідродинамічного аналізу та прогнозу погоди метеорологічні дані наносяться на бланки географічних карт. Поверхню Землі, яка є еліпсоїдом обертання, неможливо спроектувати на площину карти без перекручування, що особливо істотно позначається при прогнозі для великих територій. Тому при формулюванні рівнянь гідродинамічної моделі уведенням деяких масштабних коефіцієнтів (множників) треба урахувати ефект перекручування, величина якого залежить від типу картографічної проекції. Залежно від способу відображення поверхні Землі можуть бути одержані різноманітні типи проекцій, але у будь-якому випадку мова йде про перекручування лінійних відстаней на географічній карті, що саме й ураховується масштабним множником m (параметром збільшення)

$$m = \frac{dl}{dl_s},$$
(1.4.93)

де dl і dl_s – довжини елементарних відрізків на площині зображення (карті) та на місцевості. Строго кажучи, величина m залежить не тільки від положення точки, а й від напрямку. Для деякого ж виду проекцій, а саме рівнокутних або конформних, параметр m від напрямку не залежить. У метеорологічній практиці використовуються три типи картографічних проекцій: стереографічна полярна, конічна пряма і циліндрична пряма (меркаторська), які є конформними. Через це, урахування перекручування на таких картах через параметр m передбачає залежність його величини тільки від горизонтальних координат частинки, що розглядається. Це означає, що відмінність множника m від одиниці повинна позна-

читися на співвідношенні похідних за горизонтальними координатами на карті та місцевості

$$\frac{\partial}{\partial l_s} = m \frac{\partial}{\partial l'}, \quad (1.4.94)$$

де індекс s позначає належність до місцевості.

На картографічних проекціях (далі картах) вводиться дійсний масштаб карти M , що залежить від положення точки, а також головний масштаб карти M_b , що дорівнює співвідношенню довжин на карті та на місцевості у точках, для яких $m = 1$. На бланках географічних карт наводиться саме головний масштаб M_b . Оскільки $M = mM_b$, то $m = M/M_b$, тобто параметр збільшення є співвідношенням дійсного масштабу карти у точці, що розглядається, до головного.

1) Стереографічна полярна проекція дістається при проектуванні поверхні земної кулі з полюсу на площину, що проходить через деяке широтне коло φ_1 . Так, для зображення на карті північної півкулі проектування здійснюється з південного полюсу на коло широти, що розташоване у Північній півкулі. У цій проекції кола широт на поверхні Землі $\varphi = \text{const}$ відображаються концентричними окружностями, а меридіани $\lambda = \text{const}$ – радіальними прямими, що виходять з точки зображення полюсу. Для такої проекції масштабний множник m визначається співвідношенням

$$m(\varphi) = \frac{1 + \sin \varphi_1}{1 + \sin \varphi}. \quad (1.4.95)$$

З (1.4.95) випливає, що на широті φ_1 $m = 1$ (головний масштаб карти).

Для стереографічних проекцій, що використовуються у метеорологічній практиці, головний масштаб розташований на широті $\varphi_1 = 60^\circ$ і тоді (1.4.95) запишеться у вигляді

$$m(\varphi) = \frac{1,8569}{1 + \sin \varphi}.$$

2) Рівнокутна конічна проекція (проекція Лабмерта) одержується виявлянням відповідності між точками кулі та січного конуса, який розвертається на площину. У цій проекції кола широт на поверхні кулі переходять у дуги концентричних окружностей, а меридіани – у радіальні прямі, що виходять з точки зображення полюсу. При рівнокутній конічній проекції немає такої наочної відповідності між точками кулі та кону-

са, як це є характерним для стереографічної проекції. Саме з цієї причини карти конічної проекції не дістали скільки-небудь широкого розповсюдження у метеорологічній практиці. Масштабний множник у такій проекції визначається виразом

$$m(\varphi) = \frac{\alpha}{a} k \left(\operatorname{tg} \frac{\pi/2 - \varphi}{2} \right)^\alpha, \quad (1.4.96)$$

де a – радіус Землі;

$$k = 1,793a;$$

$$\alpha = 0,7156.$$

3) Пряма рівнокутна циліндрична (меркаторська) проекція одержується зображенням поверхні земної кулі на бічну поверхню циліндра, яка розрізається по одній з твірних циліндра та розкручується у площину. Вісь циліндра при цьому співпадає з віссю Землі. У меркаторській проекції меридіани зображуються паралельними прямими, що лежать один від іншого на віддаленні, яке є пропорційним різниці відповідних довгот, а паралелі (широти) – у вигляді прямих, що є перпендикулярними до ліній меридіанів. Ця проекція використовується у метеорологічній практиці атмосферних процесів тропічної зони. Масштабний множник визначається виразом

$$m(\varphi) = \frac{\cos \varphi_k}{\cos \varphi}, \quad (1.4.97)$$

де $\varphi_k = 22,5^\circ$ (головний масштаб).

Викладені вище положення про картографічні проекції можна розповсюдити й на ізобаричні поверхні, тому що вони є практично паралельними поверхні земної кулі.

При гідродинамічному прогнозі полів метеорологічних величин стосовно до картографічних проекцій треба мати на увазі, що у рівняннях гідротермодинаміки деякої модифікації зазнають тільки диференціальні оператори, зв'язані з горизонтальними координатами, тоді як аналогічні оператори по вертикальній координаті залишаються незмінними. Покажемо це на прикладі системи повних рівнянь у p -координатах. Запишемо рівняння горизонтального руху і нерозривності у векторній формі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla_s) \mathbf{V} + \tau \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} &= -\nabla_s \Phi + \ell \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{V}; \\ \nabla_s \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4.98)$$

де \mathbf{V} – вектор швидкості вітру, віднесений до місцевості;

∇_s – градієнт на місцевості.

З (1.4.94) випливає, що

$$\nabla_s = m\nabla, \quad (1.4.99)$$

де ∇ – градієнт, віднесений до картографічної проекції. З урахуванням (1.4.99) рівняння (1.4.98) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + m(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \tau \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} &= -m\nabla\Phi + \ell \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{V}; \\ m\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.100)$$

Переходячи до проекцій на координатні вісі, система повних рівнянь (1.4.44) для картографічних проекцій набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial u}{\partial p} &= -mg \frac{\partial H}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial v}{\partial p} &= -mg \frac{\partial H}{\partial y} - \ell u; \\ T &= -\frac{gp}{R} \frac{\partial H}{\partial p}; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{Rp} \tau &= 0; \\ m \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.101)$$

Тут u, v – складові швидкості вітру на місцевості, тобто дані спостережень.

У наступних розділах підручника при запису рівнянь гідротермодинаміки масштабний множник випускається, але коли мова йде про практичну реалізацію прогностичних схем, його наявність автоматично припускається, навіть якщо у конкретній різницевій задачі він формально відсутній.

1.5 Питання для самоконтролю

- 1) Сформулюйте основні фізичні закони, що визначають властивості полів метеорологічних величин та поясніть значення цих законів.
- 2) Перелічіть рівняння, що містяться у системі рівнянь гідротермодинаміки в ізобаричних координатах.
- 3) Запишіть рівняння нерозривності в ізобаричній системі координат.
- 4) Що описує тривимірна дивергенція?
- 5) Які вісі мають місце у сферичній системі координат?
- 6) Запишіть вирази для аналогів вертикальних швидкостей в ізобаричній та σ -системі координат.
- 7) Надайте визначення прогностичного рівняння.
- 8) Запишіть формулу для лапласіана та поясніть фізичне значення лапласіана температури.
- 9) Що таке сила тяжіння? Чи є вона сталою величиною?
- 10) Чим відрізняються ізобаричні системи координат, в яких вертикальними осями є p і ζ ?
- 11) Навіщо фільтрувати повні рівняння гідротермодинаміки? Перелічіть основні наближення, що використовуються для фільтрації.
- 12) Що таке масштабний множник? До яких рівнянь гідротермодинаміки він залучається і навіщо?
- 13) В яких випадках зручно використовувати циліндричну систему координат?
- 14) Обґрунтуйте необхідність переходу до ізобаричної системи координат.
- 15) Чим відрізняються повні похідні в декартовій та ізобаричній системах координат?
- 16) За яких умов одержується рівняння зв'язку між величинами τ і w ?
- 17) Що таке сила баричного градієнта? Як вона спрямована?
- 18) Як впливає сила Коріоліса на атмосферні рухи?
- 19) Який вигляд має третє рівняння руху для макромасштабних процесів?
- 20) Перелічіть основні переваги ізобаричної системи координат.
- 21) Перелічіть переваги і недоліки σ -системи координат.
- 22) В яких моделях зручно використовувати сферичну систему координат?
- 23) Яку роль в атмосферних процесах відіграють сили в'язкості?
- 24) Що таке стереографічна полярна проекція? Де розташовано її головний масштаб?
- 25) В яких випадках використовується меркаторська проекція?

РОЗДІЛ 2 ФІЛЬТРОВАНІ МОДЕЛІ ГІДРОДИНАМІЧНОГО ПРОГНОЗУ ПОГОДИ

Незважаючи на деякі істотні обмеження, серед яких головним є припущення квазігеострофічності вітру, фільтровані моделі висувають менше вимог до продуктивності обчислювальних засобів та необхідного інформаційного забезпечення. Саме тому на основі цих моделей були побудовані перші методи гідродинамічного прогнозу. Головною ж їх позитивною якістю є те, що вони допускають достатньо ясну синоптичну інтерпретацію та якісний аналіз факторів, що визначають еволюцію гідрометеорологічних полів. Але прогнози за цими моделями є менш успішними, ніж прогнози за допомогою моделей за повними рівняннями.

У цьому розділі розглядаються баротропна та бароклінна моделі атмосфери. Перша з них дозволяє здійснити прогноз геопотенціалу на одній ізобаричній поверхні, тобто є однорівневою, і ґрунтується на використанні рівняння вихору швидкості. У бароклінних моделях береться до уваги такий важливий погодоутворюючий фактор, як адвективні зміни температури, що дозволяє інтерпретувати тривимірну структуру атмосфери, а також вплив різноманітних факторів на зміни полів гідрометеорологічних величин.

2.1 Рівняння вихору швидкості вітру

Рівняння вихору швидкості вітру широко використовується у гідродинамічних методах прогнозу та в синоптичній метеорології при виявленні факторів, що визначають еволюцію погодоформуючих атмосферних вихорів (циклонів, антициклонів, улоговин, гребенів). У метеорологічній літературі воно також називається рівнянням завихреності або рівнянням вихору швидкості. Перед тим, як одержати це рівняння та фізично його проаналізувати, нагадаємо деякі загальні відомості з теоретичної гідромеханіки.

2.1.1 Вихор швидкості руху

За визначенням, вихор ($\text{rot } \mathbf{V}$, $\text{curl } \mathbf{V}$, $\boldsymbol{\Omega}$) є векторним добутком оператора Гамільтона (∇) на швидкість тривимірного потоку \mathbf{V} , тобто

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}. \quad (2.1.1)$$

Подаючи векторний доданок у вигляді визначника

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (2.1.2)$$

і розкриваючи його за правилом Крамера, одержимо

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.1.3)$$

Множники при одиничних ортах є проєкціями (складовими) вихору $\boldsymbol{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ на осі декартових координат:

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.1.4)$$

Кожна складова вихору швидкості характеризує обертання частинки у площині, перпендикулярній осі обертання. Зокрема, вертикальна складова Ω_z означає обертання частинки у горизонтальній площині навколо вертикальної осі, причому для додатних значень Ω_z є характерним обертання проти годинникової стрілки при спостереженні зверху.

В ізобаричній системі координат визначник (2.1.2) замінюється на такий:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial p} \\ u & v & \tau \end{vmatrix} \quad (2.1.5)$$

і тоді складові вихору $\boldsymbol{\Omega}_p(\Omega_{x,p}, \Omega_{y,p}, \Omega_p)$ визначаються виразами:

$$\Omega_{x,p} = \frac{\partial \tau}{\partial y_p} - \frac{\partial v}{\partial p}; \quad \Omega_{y,p} = \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial x_p}; \quad \Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial y_p}. \quad (2.1.6)$$

Оскільки для великомасштабних атмосферних рухів горизонтальні складові швидкості вітру u і v принаймні на два порядки більші, ніж вертикальна швидкість w (або τ), то при аналізі ротації рухів у об'єктах тако-

го масштабу найцікавішим є насамперед вертикальна складова Ω_z у декартових або Ω_p в ізобаричних координатах. Внаслідок цього горизонтальними складовими вихору швидкості Ω_x, Ω_y можна знехтувати у порівнянні з вертикальною складовою. Для мезомасштабних вихорів з горизонтальними осями обертання (наприклад, шквали у грозівій хмарі) таке наближення, зрозуміло, не є правочинним, тому що порядок усіх трьох складових тривимірного потоку (u, v, w) є приблизно однаковим, і тому $O(\Omega_x, \Omega_y) \approx O(\Omega_z)$.

Отже, для атмосферних вихорів синоптичного масштабу $O(\Omega_x, \Omega_y) \ll O(\Omega_z)$, і тому $O(\Omega) \approx O(\Omega_z)$, тобто циклони і антициклони можна розглядати як великомасштабні вихори з квазівертикальними осями обертання. У північній півкулі повітря у циклонах обертається проти годинникової стрілки і тому $\Omega_z > 0$, а в антициклонах – за годинниковою стрілкою ($\Omega_z < 0$); у південній півкулі обертання повітря у циклонах та антициклонах є зворотнім.

Для суто обертального руху, коли вектор швидкості вітру в атмосферному вихорі в усіх точках спрямований за дотичною до ізобар, які є рівновіддаленими окружностями, можна з достатньо точним наближенням уважати, що $\Omega_x = \Omega_y = 0$, а $\Omega_z = 2\omega_c$ і, як наслідок,

$$\Omega = 2\omega_c \equiv 2\omega_c \cdot \mathbf{k}, \quad (2.1.7)$$

тобто вихор швидкості дорівнює подвоєній швидкості обертання частинки навкруги вертикальної осі. Формула (2.1.7) безпосередньо впливає з теореми Коші-Гельмгольца, якщо розглядати кінематику обертання твердого тіла зі сталою кутовою швидкістю $\omega_c = \omega_c \cdot \mathbf{k}$.

Складові вихору швидкості Ω (2.1.4), (2.1.6) характеризують обертальний рух повітря відносно земної поверхні і тому сам вихор Ω має назву відносного. Інакше кажучи, обертальний момент створюється самою структурою тривимірного потоку повітряної маси незалежно від того, обертається Земля як планета чи ні. З цього, зокрема, випливає, що відносний вихор швидкості не обов'язково пов'язаний з круговим обертанням. Так, наприклад, за суто прямолінійного руху вздовж осі x , коли $v = w = 0$, але $u \neq 0$, відносний вихор $\Omega_z = -\partial u / \partial y \neq 0$ і якщо складова швидкості u зменшується вздовж осі y ($\partial u / \partial y < 0$), то виникає додатний (циклонічний) вихор, спрямований за віссю z .

Окрім відносного обертання, частинка у земній атмосфері бере участь у суто круговому обертанні, що пов'язане з ефектом обертання Землі як планети. За рахунок сили тяжіння повітряна частинка у цьому випадку утягується (переноситься) в обертальний рух Землі. Такий обертальний момент характеризується переносним чи планетарним вихором

Ω_E , який дорівнює за модулем подвоєній кутовій швидкості обертання Землі, тобто:

$$\Omega_E = 2\omega, \quad |\Omega_E| = 2\omega. \quad (2.1.8)$$

Оскільки $\omega_x = 0$, $\omega_y = \omega \cos\varphi$, $\omega_z = \omega \sin\varphi$, то складові переносного вихору визначаються співвідношеннями:

$$\Omega_{E,x} = 0; \quad \Omega_{E,y} = 2\omega \cos\varphi; \quad \Omega_{E,z} = 2\omega \sin\varphi. \quad (2.1.9)$$

Треба звернути увагу, що у формулах (2.1.7) і (2.1.8) кутові швидкості обертання повністю розрізняються за своєю природою. У виразі для відносного вихору (2.1.7) ω_c – це кутова швидкість обертання частки, яка зумовлена тільки структурою повітряного потоку у фіксованій точці і тому не є сталою величиною, відповідно, $\Omega_z(x, y) \neq \text{const}$. На противагу цьому у виразі для переносного вихору (2.1.8) ω залежить тільки від широти місця і в межах широтного кола ($\varphi = \text{const}$) є величиною сталою і пропорційною швидкості обертання Землі ω . Звідси, зокрема, випливає, що переносний вихор частинки змінюється тільки при її переміщенні вздовж меридіана.

Для подальшого фізичного аналізу зручно увести також поняття абсолютного вихору

$$\Omega_a = \Omega + \Omega_E, \quad (2.1.10)$$

який є сумою відносного та переносного вихорів і характеризує обертальний рух частинки відносно інерційної системи координат, яка не бере участь у добовому обертанні Землі, але рухається разом з нею у просторі.

З рівнянь (2.1.9) і (2.1.10) випливає, що складові абсолютного вихору визначаються виразами:

$$\Omega_{a,x} = \Omega_x; \quad \Omega_{a,y} = \Omega_y + 2\omega \cos\varphi; \quad \Omega_{a,z} = \Omega_z + 2\omega \sin\varphi. \quad (2.1.11)$$

Тепер здійснимо порівняльний аналіз виразів для вертикальної проекції відносного вихору у декартовій та ізобаричній системах координат:

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial y_p}. \quad (2.1.12)$$

З (2.1.12) випливає, що вертикальна складова Ω_z характеризує обертання

частинки у горизонтальній площині xOy , а Ω_p – у площині x_pOy_p , яка є дотичною до ізобаричної поверхні. Хоч кут нахилу ізобаричних поверхонь ($p = \text{const}$) до рівневих ($z = \text{const}$) є малим (десятитисячні доли радіана), але ізобаричну систему координат, точно кажучи, неможна уважати ортогональною на відміну від декартової. З тієї причини величини Ω_z і Ω_p хоч і є достатньо близькими, але й не є рівними між собою.

Дійсно, використовуючи формули зв'язку похідних по горизонтальних координатах у двох системах:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_p} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y_p} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial p},$$

де у порівнянні з першими двома рівняннями (1.4.16) взято до уваги, що

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{і} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \text{одержимо}$$

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \frac{\partial v}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial y_p} \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} = \\ &= \Omega_z + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right). \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Якщо тут додатково використати формулу зв'язку для похідних по вертикальній координаті

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial f}{\partial z},$$

де у порівнянні з третім рівнянням (1.4.16) ураховано, що $\partial p = -\rho g \partial z$, і формули для горизонтальних складових геострофічного вітру:

$$v_g = \frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad u_g = -\frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (2.1.14)$$

то вираз (2.1.13) перетвориться у такий:

$$\Omega_p = \Omega_z + \frac{\ell}{g} \left(u_g \frac{\partial u}{\partial z} + v_g \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (2.1.15)$$

У співвідношенні (2.1.15) члени в дужках близькі між собою, тому що з точки зору теорії подібності $O(u_g) = O(v_g)$, $O(\partial u/\partial z) = O(\partial v/\partial z)$. Але оскільки вони є зворотними за знаком, то у середньому компенсують один одного і тому $O(\Omega_z) \approx O(\Omega_p)$. Проте, у принципі, різниця між Ω_z та Ω_p існує, що й відображається наявністю додаткового члена у правій частині рівняння (2.1.15).

З тієї ж причини відрізняються між собою й вирази для плоскої дивергенції у декартовій ($D_{s,z}$) та ізобаричній ($D_{s,p}$) системах координат. Зробивши викладення, аналогічні попереднім, нескладно одержати, що

$$D_p = D_z - \frac{\ell}{g} \left(u_g \frac{\partial u}{\partial z} - v_g \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (2.1.16)$$

Тут, як і для відносного вихору, додатковий член хоч й є малим, але, у принципі, також не дорівнює нулю.

Різниці виразів для відносного вихору (2.1.15) і плоскої дивергенції (2.1.16) у двох координатних системах треба мати на увазі при аналізі рівняння вихору у цих системах.

2.1.2 Рівняння вихору швидкості у декартовій та ізобаричній системах координат

Для одержання рівняння вихору в тій чи іншій системі координат використовуються відповідні рівняння горизонтального руху, для яких здійснюється так звана операція вихору. Так, для виведення рівняння вихору в декартовій системі координат як вихідні беруться рівняння руху без урахування сил в'язкості (перші два рівняння (1.4.10)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Оскільки для великомасштабних рухів найцікавішим є рівняння для вертикальної складової відносного вихору (Ω_z), то друге рівняння диференціюється по x , а перше – по y і з другого рівняння віднімається перше. У результаті одержимо

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \\
& = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\ell u) + \frac{\partial}{\partial y} (\ell v) \right].
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Перетворимо, наприклад, другий член у лівій частині

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \\
& = u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \Omega_z.
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial v}{\partial y}, \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = w \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Продиференціюємо члени з горизонтальними складовими градієнта тиску

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} = \\
& = - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Нарешті, наведемо результат диференціювання членів з Кориолісовим прискоренням

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ell u) + \frac{\partial}{\partial y} (\ell v) = \ell D_z + u \frac{\partial \ell}{\partial x} + v \frac{\partial \ell}{\partial y}. \tag{2.1.22}$$

Ураховуючи попередні перетворення (2.1.19)-(2.1.22), запишемо рівняння вихору швидкості (2.1.18) у вигляді

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} + D_z \Omega_z + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} = \\
& = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \ell D_z - u \frac{\partial \ell}{\partial x} - v \frac{\partial \ell}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

або, переходячи до абсолютного вихору $\Omega_{a,z} = \Omega_z + \ell$ і використовуючи очевидну рівність $\partial \ell / \partial t = \partial \ell / \partial z = 0$,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Omega_{a,z}}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_{a,z}}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_{a,z}}{\partial y} + w \frac{\partial \Omega_{a,z}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} = \\
& = -D_z \Omega_{a,z} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Використавши вираз для індивідуальної похідної, рівняння для абсолютного вихору (2.1.24) можна подати в іншому вигляді

$$\frac{d\Omega_{a,z}}{dt} = -D_z \Omega_{a,z} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \tag{2.1.25}$$

Незважаючи на різні форми подання, усі три рівняння (1.2.23)-(1.2.25) є абсолютно ідентичними.

Аналогічним чином одержимо рівняння вихору швидкості в ізобаричній системі координат. Для цього використаємо рівняння горизонтального руху у p -системі координат (перші два рівняння (1.4.44)):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \\
& \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u
\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

і здійснимо для них операцію вихору. В точності повторивши математичні перетворення, описані вище, одержимо у результаті

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_p}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Omega_p}{\partial p} + D_p \Omega_p + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} = \\
& = -\ell D_p - u \frac{\partial \ell}{\partial x} - v \frac{\partial \ell}{\partial y}
\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

чи, переходячи до абсолютного вихору $\Omega_{a,p} = \Omega_p + \ell$,

$$\frac{\partial \Omega_{a,p}}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_{a,p}}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_{a,p}}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Omega_{a,p}}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} = -D_p \Omega_{a,p} \quad (2.1.28)$$

або в іншій редакції

$$\frac{d\Omega_{a,p}}{dt} = -D_p \Omega_{a,p} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right). \quad (2.1.29)$$

Для ізобаричної системи координат різні форми подання рівняння вихору (2.1.27)-(2.1.29) також є ідентичними. Але, навіть формальне співставлення рівнянь вихору в двох координатних системах (наприклад, (2.1.25) і (2.1.29)) викликає деяке здивування, яке полягає у такому. При переході від декартової системи координат до ізобаричної ніяких фізичних спрощень гідродинамічної моделі не робилося, але, разом з тим, у рівнянні (2.1.25) останній член справа не має аналога у рівнянні (2.1.29). Решта членів у цих рівняннях, у принципі, мають однакове фізичне трактування з урахуванням, звичайно, специфіки конкретної координатної системи. Відповідь на згаданий вище парадокс потрібно шукати на рівні фізичного тлумачення окремих членів рівняння вихору швидкості у декартовій та ізобаричній системах координат.

2.1.3 Фізичний аналіз рівняння вихору швидкості

Спочатку зупинимося на фізичному аналізі членів рівняння вихору швидкості, записаного у декартовій системі координат, переписавши (2.1.23) у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} + \beta v = \\ & = - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - (\Omega_z + \ell) D_z + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

де ураховано, що $\partial \ell / \partial x = 0$, оскільки вісь x спрямована по дотичній вздовж кола широти і тому для процесів, горизонтальні розміри яких менше за планетарні, можна з достатнім наближенням уважати $\varphi = \text{const}$. Окрім цього, у виразі (2.1.30) уведено позначення для параметра $\beta = \partial \ell / \partial y$, який іменується в метеорології параметром Россбі.

Перший член у рівнянні вихору характеризує локальну зміну від-

носного вихору, а три наступні – його зміни за рахунок тривимірної адвекції (адвективний фактор). Член βv характеризує зміну відносного вихору за рахунок меридіонального переносу повітряної маси. Перший член правої частини є пропорціональним вертикальному зсуву вітру $\{\partial u/\partial z, \partial v/\partial z\}$, тому цей фактор, що впливає на зміну відносного вихору, будемо називати зсувним. Наступний член $(\Omega_z + \ell)D_z$ є пропорціональним плоскій дивергенції D_z , тому цей фактор будемо іменувати дивергентним. Оскільки $O(\Omega_z) \sim 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, а $O(\ell) \sim 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, то дивергентний фактор без особливої погрішності можна розглядати як ℓD_z . Нарешті, останній член справа у (2.1.30) характеризує зміну відносного вихору за рахунок ефекту, який породжується бароклінністю атмосфери, і тому будемо називати його бароклінним фактором.

Якщо в (2.1.30) праву частину прирівняти нулю, то це рівняння виводиться у наступне

$$\frac{d\Omega_{a,z}}{dt} = 0. \quad (2.1.31)$$

Це ж автоматично впливає з рівняння (2.1.25). Звідси зрозуміло, що рівняння вихору швидкості у формі (2.1.31) визначає збереження у часі абсолютного вихору, тобто $\Omega_{a,z}(x, y, z, t) = \text{const}$. Це, у свою чергу, означає, що роль членів лівої частини зводиться до перенесення у незмінному вигляді абсолютного вихору разом з повітряною масою, що рухається. На противагу до цього члени правої частини рівняння вихору (2.1.30), що описують зсувний, дивергентний і бароклінний фактори, породжують новий чи змінюють існуючий вихор усередині самої повітряної маси.

Після розгляду загальної структури рівняння вихору (2.1.30) зупинимось докладніше на фізичному трактуванні окремих його членів.

Якщо обмежитися розглядом у (2.1.30) тільки членів з тривимірною адвекцією, то зміна вихору за часом у фіксованій точці простору визначається виразом

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}\right)_{adv.} = -\left(u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y}\right) - w \frac{\partial \Omega_z}{\partial z}. \quad (2.1.32)$$

Перший член праворуч визначає вплив горизонтальної, а другий – вертикальної адвекції. Додатна горизонтальна адвекція вихору у передній частині циклону ($\Omega_z > 0$) спричиняє посилення циклонічного вихору і, як наслідок, падіння тиску, а у тиловій частині – зростання. Цей же висновок повністю зберігається й для випадку антициклонічного вихору ($\Omega_z < 0$). Горизонтальна адвекція спричиняє, по суті, перенос вихорів зі

швидкістю ведучого потоку, тобто зі швидкістю вітру на ізобаричних поверхнях 700 чи 500 гПа. Вертикальна адвекція ($-w \cdot \partial \Omega_z / \partial z$) спричиняє, у такому випадку, розповсюдження вихорів з одних рівневих поверхонь на інші, що розташовані вище або нижче відносно поверхні, що розглядається.

Аналіз члена, який характеризує меридіональний перенос повітряної маси, тобто

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} \right)_{\text{мерид.}} = -\beta v = -v \frac{\partial \ell}{\partial y}, \quad (2.1.33)$$

показує, що у північній півкулі ($\beta > 0$) при русі на північ ($v > 0$) існуючий циклонічний вихор повинен слабшати, а антициклонічний - посилюватися; при русі на південь ($v < 0$), навпаки, - циклонічна завихреність повинна збільшуватися, а антициклонічна - зменшуватися. Як показує синоптичний досвід аналізу атмосферних процесів, в умовах реальної атмосфери частіше за все спостерігається зворотна картина: у північних районах переважає циклонічна, а у південних - антициклонічна завихреність. Цей факт свідчить про те, що фізичний аналіз окремих членів лівої частини рівняння вихору треба здійснювати з відомою обережністю і вірніше, все-таки, розглядати їх у сукупності. Вище такий аналіз вже був зроблений і зводився він до того, що за рахунок тривимірної адвекції і меридіональності переносу абсолютний, але не відносний, вихор зберігається у часі, тобто є інваріантною величиною.

Тепер звернемося до фізичного аналізу членів правої частини рівняння вихору швидкості (2.1.30).

Локальна зміна відносного вихору за рахунок зсувного фактора виражається виразом

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} \right)_{\text{зсув.}} = - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (2.1.34)$$

Якщо залучити співвідношення для горизонтальних проекцій відносного вихору (2.1.4) та урахувати, що $\partial w / \partial y \ll \partial v / \partial z$ і $\partial w / \partial x \ll \partial u / \partial z$, то замість (2.1.4) можна записати:

$$\Omega_x \approx - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Omega_y \approx \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (2.1.35)$$

Тоді з урахуванням (2.1.35) вираз для зсувного фактора можна подати у вигляді

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}\right)_{зсуб.} = \Omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.1.36)$$

Якщо увести горизонтальний вектор відносного вихору Ω_s зі складовими Ω_x та Ω_y і вектор $\text{grad}_s w = \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{j}$, то вираз (2.1.36) можна записати у вигляді скалярного добутку цих двох векторів

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}\right)_{зсуб.} = \Omega_s \cdot \text{grad}_s w. \quad (2.1.37)$$

Тут Ω_s характеризує інтенсивність вихрової трубки, що лежить у горизонтальній площині xOy . Цілком очевидно, що обертання частинок у такій трубці відбувається навкруги горизонтальної осі, вздовж якої вертикальна швидкість змінюється найістотніше. З рівняння (2.1.37) видно, що максимальне значення зсувного фактора буде мати місце за паралельності цих векторів. Якщо у момент часу t_0 $\partial w / \partial x = \partial w / \partial y = 0$, то роль зсувного фактору також дорівнює нулю і вісь вихрової трубки лежатиме в горизонтальній площині. Якщо у наступний момент часу $t_1 = t_0 + \Delta t$, $\partial w / \partial x \neq 0$ (рис. 2.1.1), то $(\partial \Omega_z / \partial t)_{зсуб.} \neq 0$; у цьому випадку вісь вихрової трубки вже не буде горизонтальною, і обертання навколо неї частково перейде до обертання відносно осі z і, відповідно, її вертикальна завихреність буде збільшуватися.

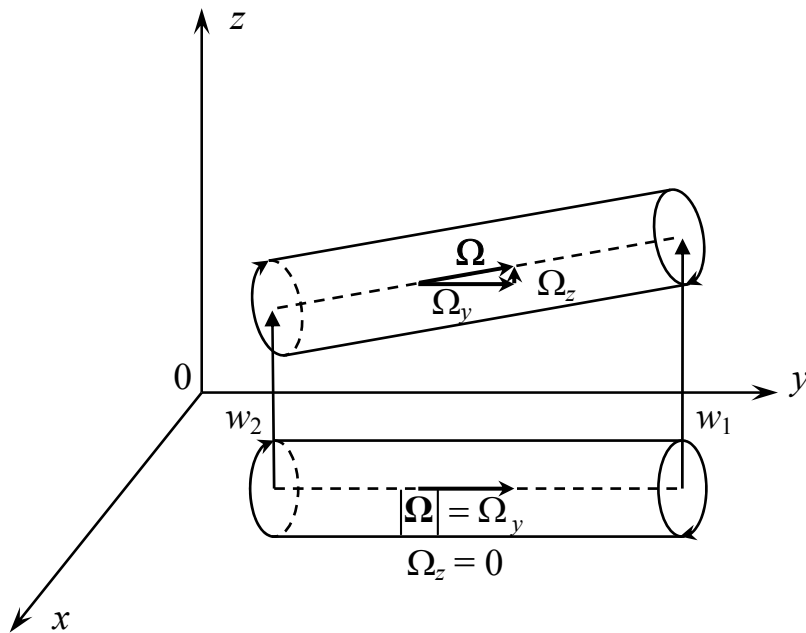


Рисунок 2.1.1 – Геометрична інтерпретація зсувного фактора

Нижче буде показано, що роль зсувного фактора у цілому набагато менше решти членів рівняння вихору, тому він не може бути віднесений до значимих вихороутворюючих факторів. Він може відігравати певну роль тільки в умовах гірської місцевості, коли $w = w_{\text{погр.}}$ і $\partial w / \partial x \neq 0$ та $\partial w / \partial y \neq 0$, тоді як для рівнинної місцевості $\partial w / \partial x \sim \partial w / \partial y \approx 0$ і тому впливом цього члена свідомо можна знехтувати.

Тепер зупинимось на аналізі дивергентного фактора

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} \right)_{\text{див.}} = -(\Omega_z + \ell) D_s \approx -\ell D_s, \quad (2.1.38)$$

оскільки, як відзначалося вище, $O(\Omega_z) < O(\ell)$. Як впливає з формального аналізу рівняння (2.1.38), якщо $D_s < 0$ (конвергенція або збіжність повітряних мас), то внаслідок того, що у північній півкулі $\ell > 0$, дивергентний фактор повинен спричиняти зародження або посилення циклонічного вихору та послаблення або руйнування антициклонічного. За дивергенції (розбіжності) повітряних мас $D_s > 0$, навпаки, за рахунок цього фактору циклонічний вихор повинен заповнюватися, а антициклонічний – посилюватися. Але такий висновок входить у суперечність з загальнофізичним уявленням про атмосферні вихори – про циклон як об'єкт з дефіцитом повітряної маси та про антициклон як об'єкт з її накопиченням. Більш того, Л.Т. Матвеев вважає, наприклад, що дивергентний фактор, принаймні у межах граничного шару, повинен компенсуватися турбулентним тертям та вихором сили тертя ($\partial(\mathbf{D}_t)_y / \partial x - \partial(\mathbf{D}_t)_x / \partial y$), що ним породжується, якщо остання урахована у вихідних рівняннях горизонтального руху. Це твердження, зокрема, аргументується тим, що згадані вище два фактори входять до рівняння вихору з різними знаками.

Разом з тим нижче при аналізі рівняння вихору в ізобаричній системі координат дивергентному фактору у процесі вихороутворення буде призначатися пріоритетна роль. На наш погляд, тут особливих протиріч немає, хоч би тому, що плоска дивергенція у декартовій системі координат характеризує лише процеси конвергенції і дивергенції повітряних мас, тоді як у p -системі у виразі для D_p (2.1.16) присутній додатковий член, фізичне трактування якого буде дано нижче. По-друге, не слід забувати, що дивергенція є малою різницею великих величин і тому її кількісна оцінка, так само як і дивергентного фактора у декартовій системі координат пов'язана з великими погрішностями.

На закінчення зупинимось на фізичному аналізі барокліного фактора, що описується останнім членом у рівнянні вихору в декартовій системі координат (2.1.30)

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}\right)_{\text{барокл.}} = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (2.1.39)$$

Спочатку нагадаємо деякі положення з курсу гідромеханіки. Відповідно до праць В. Бйеркнеса, цю величину можна подати як складову по осі z векторного добутку

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}\right)_{\text{барокл.}} = \text{grad } p \times \text{grad } \frac{1}{\rho}. \quad (2.1.40)$$

Величина $1/\rho$ є питомим об'ємом повітря. Поверхні однакового питомого об'єму, як відомо, називаються ізостеричними. Якщо густина є тільки функцією тиску $\rho = \rho(p)$, тобто середовище баротропне, то на ізобаричній поверхні $p = \text{const}$ сталою є й густина і тому ізобаричні та ізостеричні поверхні збігаються. Останнє означає, що вектори $\text{grad } p$ і $\text{grad } \frac{1}{\rho}$ є пара-

лельними і тому їх векторний добуток дорівнює нулю і, відповідно, згідно з (2.1.40) ніякі вихори у баротропній атмосфері виникнути не можуть. Інша справа, коли густина є функцією не лише тиску, а й температури, тобто $\rho = \rho(p, T)$. Таке середовище, як відомо, називається барокліним. У цьому випадку ізобаричні та ізостеричні поверхні перетинаються, утворюючи простір ізобаро-ізостеричних трубок, що перетинають горизонтальну поверхню. Отже, наявність ізобаро-ізостеричних трубок, що є можливим тільки у барокліному середовищі, є причиною виникнення вихорів. З формули (2.1.40) випливає, що внесок барокліного фактора буде максимальним, якщо вектори $\text{grad } p$ і $\text{grad } \frac{1}{\rho}$ є взаємноперпендикулярними.

Для подальшого аналізу виконаємо деякі перетворення у виразі (2.1.40). Прологарифмувавши рівняння стану $p = \rho RT$

$$\ln p = \ln \rho + \ln R + \ln T,$$

та взявши похідні по x і y , одержимо:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y},$$

звідки:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2.1.41)$$

Подамо (2.1.39) у вигляді

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

або, використовуючи геострофічні співвідношення для горизонтальних складових швидкості вітру:

$$u_g = -\frac{1}{\ell \rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad v_g = \frac{1}{\ell \rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

та співвідношення (2.1.41) -

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) &= -\frac{\ell}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} u_g - \frac{\ell}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} v_g = \\ &= -\ell \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) u_g - \ell \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) v_g = \\ &= -\frac{\ell}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} u_g - \frac{\ell}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} v_g + \frac{\ell}{T} \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

Тут перші два члени компенсують один одного (для цього достатньо u_g і v_g замінити через геострофічні співвідношення) і тому

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} \right)_{\text{барокл.}} = \frac{\ell}{T} \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (2.1.43)$$

Цей вираз для барокліного фактора вперше був одержаний Л.Т. Матвєєвим.

Якщо увести додаткове поняття про геострофічну адвекцію температури

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{g,adv.} = - \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

то одержимо замість (2.1.43)

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}\right)_{\text{барокл.}} = -\frac{\ell}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{g, \text{адв.}} \quad (2.1.44)$$

Як випливає з (2.1.44), бароклічний фактор утворення вихору повністю залежить від знаку адвекції температури, тому що у північній півкулі $\ell/T > 0$.

Так, за адвекції тепла ($\partial T/\partial t > 0$) бароклічний член є від'ємним, тобто виникає або посилюється антициклонічний вихор, а за адвекції холоду ($\partial T/\partial t < 0$) – додатним, тобто виникає або поглиблюється циклонічний вихор.

Для вологого повітря рівняння стану треба узяти у вигляді

$$p = \rho R T_v, \quad (2.1.45)$$

де $T_v = T(1 + 0.605q)$ – віртуальна температура.

Тоді, повторивши попередні викладення, одержимо аналогічно до (2.1.44)

$$\left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t}\right)_{\text{барокл.}} = -\frac{\ell}{T_v} \left(\frac{\partial T_v}{\partial t}\right)_{g, \text{адв.}}, \quad (2.1.46)$$

де $\left(\frac{\partial T_v}{\partial t}\right)_{g, \text{адв.}} = -\left(u_g \frac{\partial T_v}{\partial x} + v_g \frac{\partial T_v}{\partial y}\right)$ – геострофічна адвекція віртуальної температури.

Аналіз (2.1.46) показує, що як й у випадку ненасиченого повітря, адвекція вологішого повітря (відповідно й теплішого) також сприяє утворенню або посиленню антициклонічного вихору, а адвекція менш вологого повітря – циклонічного. Таким чином, як адвекція тепла, так й адвекція вологи, зменшує значення бароклічного фактора ($\partial \Omega_z/\partial t < 0$). Навпаки, адвекція більш холодного та сухого повітря призводить до збільшення ($\partial \Omega_z/\partial t > 0$) бароклічного члена.

Оскільки у передній частині циклону переважає адвекція тепла та вологи, то імовірність виникнення нових циклонічних вихорів є малою, тоді як у тилу циклону, де має місце адвекція холоду і, як правило, адвекція сухішого повітря, виникають сприятливі умови для вихроутворення.

Як випливає з (2.1.44) і (2.1.46), найбільший внесок бароклічного фактора повинен мати місце у тих районах, де спостерігаються істотні горизонтальні градієнти температури і тиску. Такими зонами максимальної бароклічності є зони фронтальних розділів, де горизонтальні градієнти метеорологічних величин приблизно на порядок більші, ніж поза цих зон. З повсякденної синоптичної практики добре відомо, що зародження циклонічного вихору починається зі стадії хвилі на холодному

фронті, біля якого переважає адвекція холоду і більш сухого повітря. Поглиблення циклону триває доти, поки спостерігається інтенсивна адвекція холоду, яка є характерною для більшої частини циклонічного вихору, аж до стадії його максимального розвитку. На противагу цьому у зоні теплового фронту і теплового сектора, де спостерігається адвекція теплового і волого повітря, відбувається його витиснення висхідними вертикальними потоками на більш високі рівні та у більш північні широти, що сприяє формуванню баричного гребеня. Коли циклон стає термічно однорідним і холодним, він починає заповнюватися. Але, якщо у систему такого циклону утягуються більш холодні повітряні маси, тобто відбувається затік (адвекція) холоду, він знову починає поглиблюватися. Такий процес у синоптичній метеорології називається регенерацією циклону.

Наведемо ще один аргумент на користь визначної ролі бароклінного фактора у процесі еволюції атмосферних вихорів. З синоптичної практики добре відомо, що траєкторії зміщення вихорів синоптичного масштабу крім основного переносу з заходу на схід за рахунок адвекції вихору зі швидкістю ведучого потоку ($V_{вед.}$) зазнають чітку тенденцію зміщення циклонів на північ, а антициклонів – на південь. Меридіональним фактором ($-\beta v$) цей факт пояснити неможна і, більш того, як було показано вище, аналіз цього члена приводить до зворотних висновків. Залученням бароклінного фактора вдається достатньо переконливо пояснити закономірності переміщення синоптичних вихорів, що фактично спостерігаються. Дійсно, під впливом адвекції холоду, що спостерігається у північних частинах циклону, і адвекції тепла у південних його районах, створюються сприятливі умови для поглиблення циклонічного вихору на півночі (тиск зменшується) та заповнення на півдні (зростання тиску). За рахунок виникаючої при цьому сили баричного градієнта вихор буде переміщуватися у напрямку цієї сили, тобто на північ, з деякою швидкістю $V_{барокл.}$. Результуюча швидкість переміщення ($V_{Zn} = V_{вед.} + V_{барокл.}$), таким чином, буде спрямована на північний схід.

В антициклоні за такого ж розподілення адвекцій температур у північних районах за модулем антициклонічний вихор слабшає, а у південних – посилюється, але з урахуванням знаку вихору сила баричного градієнта буде спрямована з півночі на південь. З цієї причини антициклони повинні зміщатися на південний схід.

У межах поданого тут аналізу залученням бароклінного фактора вдається пояснити й траєкторію переміщення аномальних "пірнаючих" циклонів, у яких теплий сектор і адвекція тепла розташовані у їх північних частинах, завдяки чому вони зміщуються з півночі на південь на відміну від звичайних циклонів.

Отже, наведені вище відомості з синоптичної практики добре узгоджуються з висновками, які були одержані раніше при аналізі виразів для бароклінного фактора (2.1.44) і (2.1.46).

Оскільки ні зсувний, ні дивергентний фактори не можуть пояснити механізми утворення та еволюції синоптичних вихорів, то, згідно з поданим вище аналізом, бароклінному фактору у цих питаннях призначається головна, іноді визначна, роль. Але існує досить розповсюджена думка, що бароклінний член є малим у порівнянні з адвективним та дивергентним і тому його внесок у механізм вихроутворення свідомо переоцінюється. Останній висновок в основному випливає з аналізу рівняння вихору швидкості в ізобаричній системі координат (2.1.27), яке можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_p}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Omega_p}{\partial p} + \beta v = -(\Omega_p + \ell) D_p - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right). \quad (2.1.47)$$

Вище вже відзначалося, що порівняння цього рівняння з рівнянням вихору швидкості у декартових координатах (2.1.23) показує відсутність члена з горизонтальною бароклінністю у рівнянні вихору в p -системі координат. Це тим більше дивно, оскільки рівняння (2.1.47) одержане без будь-яких обмежень, і вихідні рівняння руху в обох координатних системах з точки зору фізичного змісту є абсолютно ідентичними. Отже, бароклінний фактор неявним чином ураховується в якомусь з членів рівняння (2.1.47). Таким членом може бути тільки дивергентний, тому що вирази для плоскої дивергенції у двох координатних системах не співпадають

$$D_p = D_z - \frac{\ell}{g} \left(u_g \frac{\partial u}{\partial z} - v_g \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (2.1.48)$$

Оскільки у p -системі координат, як й у декартовій, $O(\Omega_p) < O(\ell)$, то дивергентний член $(\Omega_p + \ell) D_p$ можна замінити на ℓD_p , який з урахуванням (2.1.48) запишеться у вигляді

$$\left(\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} \right)_{\text{див.}} = -\ell D_p \equiv -\ell D_z + \frac{\ell^2}{g} \left(u_g \frac{\partial u}{\partial z} - v_g \frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (2.1.49)$$

Тепер (2.1.49) поставимо у відповідність суму дивергентного (2.1.38) і бароклінного (2.1.43) факторів у декартовій системі координат

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} \right)_{\text{див.}} + \left(\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} \right)_{\text{барокл.}} = -\ell D_z + \frac{\ell}{T} \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (2.1.50)$$

Перетворимо другий член в (2.1.50). Для цього розглянемо такі тотожні співвідношення:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_g}{T}\right) &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho\ell}\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\rho R}{p}\right) = -\frac{R}{\ell}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \ln p}{\partial y}\right); \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_g}{T}\right) &= \frac{R}{\ell}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \ln p}{\partial x}\right).\end{aligned}\tag{2.1.51}$$

Коли виводилися формули (2.1.51), використовувались геострофічні співвідношення для u_g та v_g і рівняння стану. З урахуванням рівнянь статички та стану одержимо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \ln p}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \ln p}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho g}{\rho RT}\right) = \\ &= -\frac{g}{R}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{g}{RT^2}\frac{\partial T}{\partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \ln p}{\partial x}\right) &= \frac{g}{RT^2}\frac{\partial T}{\partial x}.\end{aligned}\tag{2.1.52}$$

Підставимо тепер (2.1.52) у (2.1.51):

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_g}{T}\right) = -\frac{g}{\ell T^2}\frac{\partial T}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_g}{T}\right) = \frac{g}{\ell T^2}\frac{\partial T}{\partial x}$$

або:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{u_g}{T^2}\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{g}{\ell T^2}\frac{\partial T}{\partial y}; \quad \frac{1}{T}\frac{\partial v_g}{\partial z} - \frac{v_g}{T^2}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g}{\ell T^2}\frac{\partial T}{\partial x},$$

звідки:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial y} &= -\frac{\ell T}{g}\frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{\ell\gamma}{g}u_g; \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\ell T}{g}\frac{\partial v_g}{\partial z} + \frac{\ell\gamma}{g}v_g,\end{aligned}\tag{2.1.53}$$

З урахуванням (2.1.53)

$$\begin{aligned}\frac{\ell}{T}\left(u_g\frac{\partial T}{\partial x} + v_g\frac{\partial T}{\partial y}\right) &= \frac{\ell^2}{g}\left(u_g\frac{\partial v_g}{\partial z} + \frac{\gamma}{T}u_gv_g - v_g\frac{\partial u_g}{\partial z} - \frac{\gamma}{T}u_gv_g\right) = \\ &= \frac{\ell^2}{g}\left(u_g\frac{\partial v_g}{\partial z} - v_g\frac{\partial u_g}{\partial z}\right).\end{aligned}\tag{2.1.54}$$

Отже, з урахуванням (2.1.54) суму дивергентного і бароклінного факторів у декартовій системі координат можна подати у вигляді

$$\left(\frac{\partial\Omega_z}{\partial t}\right)_{\text{див.}} + \left(\frac{\partial\Omega_z}{\partial t}\right)_{\text{барокл.}} = -\ell D_z + \frac{\ell^2}{g} \left(u_g \frac{\partial v_g}{\partial z} - v_g \frac{\partial u_g}{\partial z} \right). \quad (2.1.55)$$

Порівняння дивергентного фактора в ізобаричній системі координат (2.1.49) та суми дивергентного і бароклінного факторів у декартовій системі координат (2.1.55) показує, що вони практично збігаються. Різниця полягає лише у тому, що в (2.1.49) фігурують вертикальні градієнти горизонтальних складових фактичного вітру ($\partial u/\partial z$, $\partial v/\partial z$), а в (2.1.55) – геострофічного ($\partial u_g/\partial z$, $\partial v_g/\partial z$). За геострофічного наближення ($u = u_g$, $v = v_g$) ці вирази повністю збігаються. Треба також урахувати, що при перетворенні бароклінного фактора в (2.1.50) використовувались як вихідні формули, що визначають зміни з висотою не фактичного а геострофічного вітру (2.1.51). З цієї точки зору вираз для дивергентного фактора у p -системі координат (2.1.49) є точнішим, ніж (2.1.55). Але, якщо урахувати, що складові геострофічного і реального вітру розрізняються на малу величину порядку числа Кібеля, то можна уважати, що (2.1.49) і (2.1.55) є практично однаковими. Звідси, у свою чергу, випливає, що в рівнянні вихору в p -системі координат бароклінный фактор неявним чином урахований у дивергентному члені $(\Omega_p + \ell)D_p$. Отже, такий важливий фактор, як бароклільність атмосфери, нікуди не "зникає" при переході від декартових координат до ізобаричних, як це можна було б припустити при формальному співставленні рівнянь вихору в цих координатних системах (наприклад, (2.1.23) і (2.1.27)).

Інша справа, яким є порядок бароклінного фактора у порівнянні з дивергентним. Вище наводилися деякі аргументи, що свідчать про важливу роль бароклінного фактора у механізмі утворення та еволюції атмосферних вихорів синоптичного масштабу. Висновки, які були при цьому зроблені, опиралися на практику синоптичного аналізу атмосферних процесів. Наведемо тепер оцінку дивергентного і бароклінного факторів методами теорії подібності, виходячи з (2.1.15),

$$O(\Omega_p) = O(\Omega_z) + O\left(\frac{\ell}{g} \left(u_g \frac{\partial u}{\partial z} + v_g \frac{\partial v}{\partial z} \right)\right). \quad (2.1.56)$$

Тут $O(\Omega_z) = L_v/L_s$ і для процесів макромасштабу ($L_v = 10 \text{ м с}^{-1}$, $L_s = 10^6 \text{ м}$) $O(\Omega_z) \sim 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Оцінимо порядок одного з членів у дужках, ураховуючи при цьому, що

$$O(u_g) = O\left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \frac{1}{\ell} \frac{L_{\delta\Phi}}{L_s} = \frac{\ell L_v L_s}{\ell L_s} = L_v.$$

Тоді $O\left(\frac{\ell}{g} u_g \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\ell}{g} \frac{L_v^2}{L_z}$ і при $\ell \approx 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $g \sim 10 \text{ м с}^{-2}$, $L_v = 10 \text{ м с}^{-1}$,

$L_z = 10^4 \text{ м}$ одержимо, що $O\left(\frac{\ell}{g} u_g \frac{\partial u}{\partial z}\right) \sim 10^{-7} \text{ с}^{-1}$.

Наведені оцінки підтверджують, що перший член правої частини (2.1.56) принаймні на два порядки більший за другий і тому $O(\Omega_p) \cong O(\Omega_z)$. Використовуючи попередні оцінки, можна показати, що

$$O\left(\frac{\ell^2}{g} u_g \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\ell^2}{g} \frac{L_v^2}{L_z}. \quad (2.1.57)$$

Безпосередньою підстановкою значень параметрів, що входять у (2.1.56), легко переконатися, що величина бароклінного члена має порядок 10^{-11} с^{-2} . З іншого боку, $O(\ell D_z) = \ell O(D_z)$. Нижче буде показано, що $O(D_z) = \text{Ки} \cdot L_v / L_s$. Тоді $O(\ell D_z) = \ell \cdot \text{Ки} \cdot L_v / L_s$ або, підставляючи замість ℓ , L_v , L_s відповідні характерні значення і беручи до уваги, що для великомасштабних процесів $\text{Ки} \sim 10^{-1}$, легко переконатися, що $O(\ell D_z) \sim 10^{-10} \text{ с}^{-2}$, тобто на порядок більше за барокліний член. До речі, використовуючи наведені вище оцінки, нескладно оцінити й співвідношення членів у виразі для плоскої дивергенції в p -системі координат

$$O(D_p) = O(D_z) + O\left(\frac{\ell}{g} u_g \frac{\partial u}{\partial z}\right). \quad (2.1.58)$$

Оскільки $O(D_z) = \text{Ки} \cdot L_v / L_s \sim 10^{-6} \text{ с}^{-1}$, $O\left(\frac{\ell}{g} u_g \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\ell}{g} \frac{L_v^2}{L_z} \sim 10^{-7} \text{ с}^{-1}$, то з дос-

татньою точністю можна уважати, що $O(D_p) \approx O(D_z) + O(\text{Ки})$.

Отже, оцінка членів методами теорії подібності показала, що роль бароклінного фактора принаймні на порядок менше дивергентного і тому в механізмі вихроутворення бірокліністю атмосфери можна знехтувати. Цей висновок, на перший погляд, входить у суперечність з раніше наведеними аргументами на користь важливої ролі бароклінного фактора у процесі вихроутворення. Але це зовсім не означає, що адвекція тем-

ператури не впливає на локальні зміни вихору швидкості. У п. 2.3 при розгляданні квазігеострофічних моделей прогнозу більш як переконливо буде показано, що на зміну тиску у бароклінній атмосфері впливає не тільки динамічний фактор, пов'язаний з геострофічною адвекцією абсолютного вихору, а й термічний фактор, обумовлений геострофічною адвекцією температури. Вплив останнього фактора є малим лише у середній тропосфері, тоді як у нижніх шарах атмосфери роль термічної адвекції стає порівняною з внеском динамічного фактора. Річ у тому, що вплив адвекції температури описується не стільки додатковим членом у рівнянні вихору швидкості у декартових координатах (бароклінний фактор), скільки дивергентним членом $-\ell D$, тому що дивергенція швидкості вітру істотно залежить від адвекції температури.

По-друге, за М.І. Юдіним, вплив бароклінності у першу чергу безпосередньо позначається не на величині Ω_p (Ω_z), а на істотній зміні горизонтальних складових вектора вихору Ω_x і Ω_y . Останнє приводить до горизонтального зсуву вихрових трубок, що побічним чином відбивається також на значеннях Ω_p .

По-третє, роль бароклінного фактора змінюється у процесі розвитку синоптичних вихорів. У початковій стадії розвитку циклону, особливо у нижній тропосфері, бароклінність відіграє, очевидно, дійсно визначну роль, але протягом розвитку вихору динамічний фактор стає більш значимим у порівнянні з термічним, внесок якого у стадії максимального розвитку циклону буде близьким до нуля.

При оцінці дивергентного і бароклінного факторів не слід забувати, що сама дивергенція, яка є малою різницею великих величин, розраховується з великою похибкою. У той же час, значення бароклінного фактора, одержані за дуже приблизними осередненими даними, часто виявляються недооціненими. Особливо це позначається на оцінці бароклінного члена у відносно вузьких фронтальних зонах з великим градієнтом швидкості вітру та температури.

Нарешті, за думкою Л.Т. Матвеева, величину бароклінного фактора треба порівнювати не окремо з локальними і адвективними змінами вихору швидкості, а з їх різницею, тобто з індивідуальними змінами вихору $d\Omega_z/dt$ (поблизу підстильної поверхні, де $w \approx 0$, членом $w \cdot \partial\Omega_z/\partial z$ можна знехтувати).

У цій різниці локальна і адвективна зміни вихору, як правило, мають однаковий знак і є членами одного порядку, що впливає з їх аналізу методами теорії подібності. У цьому разі, повна похідна $d\Omega_z/dt$ на порядок менша кожного з цих членів, тобто має той же порядок, що й бароклінний член.

Отже, з наведеного вище фізичного аналізу окремих членів рівняння вихору в декартовій та ізобаричній системах координат випливає, що оцінка цих членів повинна здійснюватися у кожному конкретному випадку з урахуванням стадії розвитку атмосферного вихору та якості використаної при цьому вихідної інформації про регіональні особливості полів швидкості вітру та температури. У протилежному випадку може скластися хибне уявлення про малу роль бароклінності атмосфери у механізмі виникнення та еволюції атмосферних вихорів синоптичного масштабу.

На закінчення наведемо оцінку членів рівняння вихору швидкості в ізобаричній системі координат методами теорії подібності. Візьмемо рівняння вихору у формі (2.1.27)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_p}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Omega_p}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} = \\ = -\ell D_p - D_p \Omega_p - \beta v. \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

Тут член $u \cdot \partial \ell / \partial x$ відкинуто як малий, оскільки за вибраного напрямку координати x (за дотичною до кола широти) він близький до нуля ($\varphi \approx \text{const}$). Спираючись на попередні оцінки, запишемо аналог рівняння (2.1.59) у термінах теорії подібності

$$\frac{L_v}{L_t L_s} + \frac{L_v^2}{L_s^2} + \frac{L_\tau L_v}{L_p L_s} + \frac{L_\tau}{L_s} \frac{L_v}{L_p} = -\ell \cdot \text{Ki} \frac{L_v}{L_s} - \frac{L_v^2}{L_s^2} \text{Ki} - \beta L_v. \quad (2.1.60)$$

Тут ураховано, що порядок кожного з членів з горизонтальною адвекцією вихору є однаковим і дорівнює L_v^2 / L_s^2 ; зсувні члени також мають однаковий порядок $\frac{L_\tau L_v}{L_p L_s}$. Якщо урахувати, що рівняння нерозривності можна

записати у вигляді $D_p = -\frac{\partial \tau}{\partial p}$, то $O(\partial \tau / \partial p) = O(D_p)$ або

$$O\left(\tau \frac{\partial \Omega_p}{\partial p}\right) = O\left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p}; \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p}\right) = \text{Ki} \frac{L_v^2}{L_s^2}.$$

Тепер порівняємо усі члени рівняння вихору швидкості з прогностичними:

$$\begin{aligned}
O\left(u \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} : \frac{\partial \Omega_p}{\partial t}\right) &= \frac{L_v^2}{L_s^2} \frac{L_s L_t}{L_v} = 1; \\
O\left(\left(\tau \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} ; \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p}\right) : \frac{\partial \Omega_p}{\partial t}\right) &= \text{Ki} \frac{L_v^2}{L_s^2} \frac{L_s L_t}{L_v} = \text{Ki}; \\
O\left(\ell D_p : \frac{\partial \Omega_p}{\partial t}\right) &= \ell \cdot \text{Ki} \frac{L_v}{L_s} \frac{L_s L_t}{L_v} = 1; \\
O\left(D_p \Omega_p : \frac{\partial \Omega_p}{\partial t}\right) &= \frac{L_v^2}{L_s^2} \text{Ki} \frac{L_s L_t}{L_v} = \text{Ki}; \\
O\left(\beta v : \frac{\partial \Omega_p}{\partial t}\right) &= \beta L_v \frac{L_s L_t}{L_v} = \beta \frac{L_s \ell L_t}{\ell} = B \cdot \text{Ki}^{-1},
\end{aligned} \tag{2.1.61}$$

де $B = \beta L_s / \ell$.

Через те, що $\beta = \partial \ell / \partial y = 2\omega \sin \varphi d\varphi$, $dy = a d\varphi$, то $B = L_s \text{ctg} \varphi / a$. На широті 50° при $L_s \sim 10^6$ м і значенні радіуса Землі $a \approx 6,4 \cdot 10^6$ м значення безрозмірного коефіцієнта $B \approx 0.114$, тобто дорівнює порядку числа Кібеля. Внаслідок цього

$$O\left(\beta v : \frac{\partial \Omega_p}{\partial t}\right) = B \cdot \text{Ki}^{-1} = 1. \tag{2.1.62}$$

Отже, величини безрозмірних параметрів B і Ki практично збігаються. У чому ж тоді полягає їх різниця? Як відомо, число Кібеля обмежує клас рухів, що розглядаються, знизу, відокремлюючи їх від процесів менших масштабів. Оцінимо порядок відношення відносного та переносного вихорів:

$$O\left(\frac{\Omega_p}{\ell}\right) = \frac{L_v}{L_s \ell} = \frac{L_v}{L_v L_t \ell} \equiv \text{Ki}.$$

Отже, малість значення числа Кібеля визначає той клас рухів, при моделюванні яких урахування сили Коріоліса є обов'язковим. З точки зору хвильової теорії це означає, що число Кібеля відокремлює ділянку атмосферного спектра, пов'язаного з гравітаційними хвилями, від ділянки спектра з інерційно-гравітаційними хвилями та хвилями Россбі.

За аналогією з цим, малість числа B обмежує просторовий і часовий масштаби рухів зверху, відокремлюючи процеси макромасштаба від рухів планетарного масштабу, для яких визначною є поява β -ефекту.

Вертаючись до рівняння вихору (2.1.59) з урахуванням оцінок (2.1.61) і (2.1.62), можна побачити, що за порядком величини члени цього рівняння розділяються на дві групи. Одні з них мають порядок одиниці, а інші – порядок числа Кібеля. Перші будемо відносити до головних, а інші – до малих. Якщо знехтувати малими членами, то рівняння (2.1.59) набуває вигляду

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_p}{\partial y} + \beta v = -\ell D_p. \quad (2.1.63)$$

Примітною особливістю цього рівняння є та обставина, що усі члени у ньому, включаючи й член з часовою похідною, мають один порядок на відміну від рівнянь горизонтального руху, на підґрунті яких одержано рівняння вихору. Це пов'язано з тим, що при перехресному диференціюванні головні члени, які описують силу баричного градієнта, скоротилися, а порядок членів ℓu та ℓv знизився і, таким чином, прогностичний член $\partial \Omega / \partial t$ виявився одним з головних.

2.2 Баротропна квазігеострофічна модель

Розглянемо спрощений випадок прогностичної задачі, коли для прогнозу достатньо використати тільки одне рівняння, а саме – рівняння вихору швидкості у формі (2.1.63). Якщо замінити у лівій частині цього рівняння складові швидкості u , v та Ω_p на їх геострофічні аналоги u_g , v_g та Ω_g , стає очевидним, що точність, яку ми втрачаємо, не перебільшуватиме порядок малих членів у рівнянні (2.1.27). Використаємо також ζ -систему координат, яка описана наприкінці п.1.4.2, а також урахуємо, що $D_\zeta = -\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta}$. Тоді рівняння (2.1.63) набуває вигляду

$$\frac{\partial \Omega_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} + \beta v_g = \ell \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta}. \quad (2.2.1)$$

Через те, що за геострофічного наближення:

$$u_g = -\frac{g}{\ell} \frac{\partial H}{\partial y}; \quad v_g = \frac{g}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x}; \quad \Omega_g = \frac{g}{\ell} \nabla^2 H,$$

усі члени лівої частини (2.2.1) можна виразити через висоту ізобаричної

поверхні H . Будемо уважати, що невідомою величиною є не вихор швидкості, а його перша похідна $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$, а також ізобарична швидкість.

Розглянемо характер залежності $\tilde{\tau}$ від висоти. Допустимо, що атмосфера зберігає свою масу у тому сенсі, що не спостерігається відтік повітря через верхню межу атмосфери. Це означає, що рухаючись, частинки не зміщуються відносно поверхні $\zeta = 0$. Оскільки вертикальна швидкість зміщення часток повітря це і є ізобарична швидкість dp/dt , то на верхній межі атмосфери виконується умова

$$\tau = \frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad p = 0.$$

Ця умова еквівалентна ствердженню

$$\tilde{\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \quad (2.2.2)$$

оскільки $\tilde{\tau} = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dt}$.

Перейдемо до визначення ізобаричної вертикальної швидкості на нижній межі атмосфери. Якщо розглядати земну поверхню як горизонтальну гладку тверду стінку, то нижня умова у декартовій системі координат запишеться таким чином:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (2.2.3)$$

Це відповідає умові, коли повітря не перетікає через земну поверхню. Співвідношення, яке пов'язує вертикальну швидкість у декартовій та ізобаричній системах координат, матиме вигляд

$$\tilde{\tau} = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + gw \right). \quad (2.2.4)$$

Згідно з (2.2.3) w дорівнюватиме нулю біля поверхні землі, тобто при

$$\zeta_1 = \frac{p_s}{p_0} = 1 - \frac{(p_0 - p_s)}{p_0}.$$

Через те, що приземний тиск залежить від x, y, t , то рівень ζ_1 не збі-

гається з ізобаричною поверхнею $p = 1000$ гПа. За рівнинних умов відхилення приземного тиску від стандартного, як правило, не перевищує 40-50 гПа. У свою чергу це обумовить відхилення ζ_1 від одиниці на величину декількох відсотків. Отже, є підстава вважати, що співвідношення (2.2.4) при $w = 0$, можна віднести до ізобаричної поверхні 1000 гПа або до рівня $\zeta_1 = 1$.

Будемо вважати, що виконуються геострофічні співвідношення, і для нижньої межевої умови можна записати для $\zeta = 1$

$$\tilde{\tau} = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Використаємо наведене співвідношення та запишемо:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\frac{RT}{\zeta}; \quad \tilde{\tau} = \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{при} \quad \zeta = 1. \quad (2.2.5)$$

Оцінки показали, що порядок величини $\frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ при $\zeta = 1$ для добових змін складає приблизно 10^{-3} , у той же час у товщі середньої тропосфери характерним значенням для $\tilde{\tau}$ є такий діапазон: $10^{-2} \div 10^{-1}$ доба $^{-1}$, що на 1-2 порядки більше. Внаслідок цього можна, приблизно, вважати, що на нижній межі атмосфери виконується умова обернення до нуля ізобаричної вертикальної швидкості

$$\tilde{\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0.$$

Таким чином, за вказаних вище обмеженнях, ізобарична вертикальна швидкість набуває нульових значень на верхній та нижній межах атмосфери. У математиці добре відомо, якщо функція на кінцях деякого інтервалу набуває нульових значень і відрізняється від нуля взагалі, то повинен існувати хоча б один екстремум цієї функції на вказаному інтервалі. Застосувавши цей висновок до нашої задачі, умова екстремуму запишеться у вигляді

$$\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.2.6)$$

або, стосовно рівняння нерозривності,

$$D_s = 0.$$

Рівняння вихору (2.2.1) для рівня, де виконується умова (2.2.6), має вигляд

$$\frac{\partial \Omega_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} + \beta v_g = 0. \quad (2.2.7)$$

Рівняння (2.2.7) можна одержати й іншим чином, а саме, коли атмосферу стилізувати у вигляді баротропного середовища. У такому середовищі можна виділити рівень ζ^* , на якому допустимо вважати рух бездивергентним. Статистичний аналіз даних про вітер показав, що найблизкішим до бездивергентного можна вважати рівень у середній тропосфері, розташований між ізобаричними поверхнями 400 та 700 гПа. Звичайно його відносять до рівня ізобаричної поверхні 500 гПа і називають середнім або бездивергентним. В англійській літературі його називають еквівалентно-баротропним. Рівняння вихору, записане для еквівалентно-баротропного рівня має вигляд рівняння (2.2.7). Стисло його називають баротропним рівнянням вихору.

Таким чином, згідно з рівнянням (2.2.7), основною властивістю макромасштабних рухів для середньої атмосфери є збереження абсолютного вихору швидкості у частках повітря, що переміщуються горизонтально.

У квазігеострофічному наближенні рівняння (2.2.7) запишеться у вигляді

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \ell A_\Omega, \quad (2.2.8)$$

де A_Ω – геострофічна адвекція абсолютного геострофічного вихору. Рівняння (2.2.8) є лінійним відносно тенденції геопотенціалу для середнього рівня $\dot{\Phi} = \partial \Phi / \partial t$ і може бути подане як

$$\nabla^2 \dot{\Phi} = \ell A_\Omega. \quad (2.2.9)$$

Адвекція вихору у геострофічному наближенні містить одну невідому величину – геопотенціал Φ

$$A_\Omega = \frac{1}{\ell} \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{\ell} \nabla^2 \Phi + \ell \right)}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{\ell} \nabla^2 \Phi + \ell \right)}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right]. \quad (2.2.10)$$

Праву частину (2.2.9) можна вважати відомою функцією горизонтальних координат за умови, що поле висот геопотенціалу H ізобаричної поверхні, яка приймається за середній рівень, є відомим. Тому це рівняння було використане для визначення поля тенденції $\dot{\Phi}$ для деякого моменту часу за відомим полем геопотенціалу. Далі необхідно застосувати метод кроків у часі та на кожному часовому кроку визначати поле тенденцій геопотенціалу з допомогою інтегрування лінійного диференціального рівняння (2.2.9). Воно належить до еліптичного типу і відомо у математиці під назвою рівняння Пуассона. Щоб отримати однозначний розв'язок (2.2.9), необхідно задати відповідні межові умови. Оскільки задача розглядається лише для одного рівня, то межові умови задаються лише по його горизонтальних координатах.

Існують різноманітні способи запису межових умов по горизонталі. Розглянемо деякі з них.

1. Рівняння (2.2.9) обчислюється для усього земного шару, отже, визначаються висоти ізобаричної поверхні середнього рівня, які оточують усю земну кулю. Така поверхня не має меж і питання про межові умови відпадає.

2. Рівняння (2.2.9) обчислюється для півкулі. Межові умови задаються поблизу екватора у вигляді $\dot{\Phi} = 0$, тобто вважається, що поблизу екватора геопотенціал не змінюється за часом. Постановка такої умови базується на тому факті, що зміни Φ у цьому районі істотно менші, ніж у більш високих широтах.

3. Задача розв'язується для обмеженої області, задаються "нульові" межові умови, тобто на границях області прогнозу вважається $\dot{\Phi}|_{\Gamma} = 0$. Така умова не відповідає дійсності, тому називається фіктивною.

4. Локальні межові умови ставляться окремо для кожної точки, у якій обчислюється тенденція геопотенціалу $\dot{\Phi}$. Навкруги кожної точки проводиться коло заданого радіуса R . Відповідно до локальних межових умов вважається, що осереднені значення $\overline{\dot{\Phi}}$ тенденції на колі дорівнюють нулю.

Разом з цим зрозуміло, що зі збільшенням радіуса R середнє значення буде зменшуватися, оскільки внесок додатних значень $\dot{\Phi}$ у районах зростання тиску і від'ємних у районах падіння в значній мірі компенсує одне одного. Аналіз даних спостережень показав, що вже при $R = 1000$ км $\overline{\dot{\Phi}}$ у декілька разів менше за характерне значення $\dot{\Phi}$ у точці прогнозу. Тому припущення про рівність нулю середнього значення $\dot{\Phi}$ не повинно призводити до ще більших помилок.

Аналітичний розв'язок рівняння (2.2.9) у полярній системі координат за локальних межових умов має вигляд

$$\dot{\Phi}(0,0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \ell A_{\Omega}(r, \psi) \ln \frac{R}{r} r dr d\psi + \overline{\dot{\Phi}}_R, \quad (2.2.11)$$

або

$$\dot{\Phi}(0,0) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \ell A_{\Omega}(r, \psi) G(r) r dr d\psi + \overline{\dot{\Phi}}_R, \quad (2.2.12)$$

де через $G(r)$ визначена функція, яку називають функцією впливу

$$G(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}. \quad (2.2.13)$$

Відповідно до розв'язків (2.2.11)-(2.2.12), зміна висоти ізобаричної поверхні за часом у точці прогнозу в баротропній атмосфері визначається лише геострофічною адвекцією абсолютного геострофічного вихору на тій же ізобаричній поверхні. Ступінь цього впливу визначається функцією Гріна, що описує вплив адвекції вихору в різних частинах області (кола з радіусом R) на тенденцію геопотенціалу в точці прогнозу, яка завжди співпадає з центром вказаного кола. З (2.2.13) випливає, що функція впливу є від'ємною в усій області інтегрування. Це означає, що додатна адвекція вихору спричиняє зменшення геопотенціалу в точці прогнозу, а від'ємна – збільшення.

Розглянемо докладніше вплив адвекції вихору на зміну висоти ізобаричної поверхні, яку прийматимемо за середній рівень. Для простоти будемо розглядати геострофічну адвекцію відносного вихору, а не абсолютного. Одержані при аналізі висновки будуть справедливими й для адвекції абсолютного вихору. Спочатку запишемо вираз для адвекції геострофічного вихору

$$A_{\Omega} = -\left(u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} \right). \quad (2.2.14)$$

Спрямуємо вісь x вздовж ізогіпс; тоді вектор геострофічного вітру буде майже повністю проектуватися на вісь x , а складова на вісь y буде малою ($v_g \ll u_g$). Формула (2.2.14) спроститься і матиме вигляд

$$A_{\Omega} \cong -u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x}. \quad (2.2.15)$$

За такого вибору координатних осей складова u_g завжди буде додатною, тому знак A_{Ω} буде протилежним знаку похідної, яка описує змі-

ни відносного вихору Ω_g у напрямку осі x . Нагадаємо, якщо додатному напрямку осі відповідає зростання будь-якої функції, то похідна від цієї функції по відповідній координаті буде також додатною. При зменшенні функції у напрямку осі похідна буде від'ємною.

Розглянемо спочатку випадки, при яких $A_\Omega > 0$ і відносний вихор зменшується вздовж осі x ($\partial\Omega_g / \partial x < 0$). Таке спостерігається у трьох ситуаціях:

1. Навколо точки прогнозу "0" поле геопотенціалу описується ізогіпсами, які мають як циклонічну, так й антициклонічну кривизну. Для того, щоб виконувалось геострофічне наближення, будемо розглядати слабо виражені улоговину та гребень. Як видно з рис. 2.2.1а, точка 1 розташовується в улоговині, а точка 2 – у зоні гребеня. Оскільки в антициклонічному полі $\Omega_g < 0$, а в циклонічному – $\Omega_g > 0$, похідна має від'ємний

знак, $\left(\frac{\partial\Omega_g}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{(\Omega_g)_2 - (\Omega_g)_1}{\delta x}$, а A_Ω – додатна. Тоді згідно з формулами

(2.2.11) і (2.2.12) $\dot{\Phi}(0,0) < 0$, висота ізобаричної поверхні у точці прогнозу "0" з часом зменшується, як і тиск поблизу середнього рівня. Таким чином, під впливом динамічного фактора (адвекції вихору) тиск у точці прогнозу буде зменшуватися, якщо навкруги цієї точки, на полі круга радіуса R , спостерігається адвекція циклонічного вихору.

2. Поле ізогіпс геопотенціалу має циклонічний характер ($\Omega_g > 0$). Оскільки точка 1 розташовується на осі улоговини, а точка 2 – на її периферії, то $(\Omega_g)_1 > (\Omega_g)_2$. У цьому випадку навкруги точки "0" спостерігається адвекція більш інтенсивного циклонічного вихору, що спричиняє зменшення тиску в цій точці (див. рис. 2.2.1б).

3. Поле ізогіпс висот геопотенціалу є антициклонічним ($\Omega_g < 0$). Нехай точка 2 розташована на осі гребеня, а точка 1 – на його периферії. Тоді модуль відносного вихору у точці 2 буде більшим, ніж у точці 1, тобто $|\Omega_g|_2 > |\Omega_g|_1$. Як видно з рис. 2.2.1в, у цьому випадку навколо точки прогнозу "0" відзначається адвекція менш інтенсивного антициклонічного вихору, яка також призведе до зменшення тиску в точці "0". Звідси випливає, що додатному значенню A_Ω може відповідати адвекція циклонічного вихору, адвекція більш інтенсивного циклонічного вихору та адвекція менш інтенсивного антициклонічного вихору. В усіх названих випадках адвекція вихору спричинить зменшення тиску в середній тропосфері.

Аналогічні правила можна навести для випадків, коли спостерігається збільшення тиску: тиск у точці прогнозу буде збільшуватися, якщо на полі круга радіуса R (в області впливу) спостерігається адвекція антициклонічного вихору або більш інтенсивного антициклонічного вихору, чи менш інтенсивного циклонічного вихору.

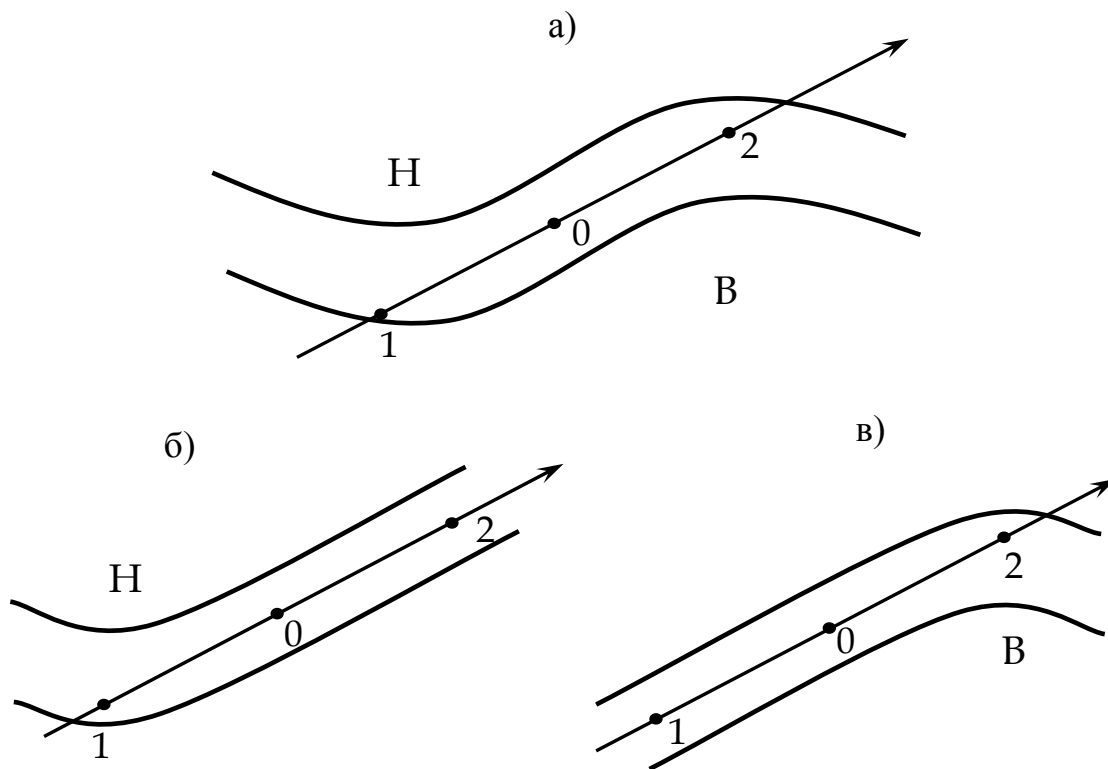


Рисунок 2.2.1 - Схема баричних полів у випадках: улоговини та гребеня (а), улоговини (б), гребеня (в)

Треба мати на увазі, що на точку прогнозу впливає сумарна адвекція вихору у вузлах сітки, які попадають у коло впливу радіусом, який дорівнює $3d$. Ступінь впливу кожного вузла визначається функцією впливу.

2.3 Квазігеострофічна модель прогнозу тиску для бароклінної атмосфери

При побудові прогностичної моделі для бароклінної атмосфери у квазігеострофічному, квазістатичному і квазіадіабатичному наближеннях, використовується система рівнянь, яка містить фільтроване рівняння вихору швидкості

$$\frac{\partial \Omega_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\Omega_g + \ell)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\Omega_g + \ell)}{\partial y} = -\ell D_s, \quad (2.3.1)$$

рівняння статики

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad (2.3.2)$$

рівняння припливу тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{c_s^2}{R\zeta} \tilde{\tau} = 0, \quad (2.3.3)$$

і рівняння нерозривності

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \zeta} = 0. \quad (2.3.4)$$

У системі (2.3.1)-(2.3.4) застосовуються загальноприйняті позначення. Для отримання прогностичного рівняння відносно тенденції геопотенціалу $\dot{\Phi} = \partial \Phi / \partial t$ необхідно виконати такі перетворення.

1. Увести позначення для геострофічної адвекції абсолютного вихору

$$A_\Omega = - \left[u_g \frac{\partial(\Omega_g + \ell)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\Omega_g + \ell)}{\partial y} \right] = 0$$

і вилучити з геострофічного рівняння вихору (2.3.1) дивергенцію за допомогою рівняння нерозривності (2.3.4).

2. Увести позначення для геострофічної адвекції температури A_T

$$A_T = - \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

і вилучити температуру з рівняння припливу тепла (2.3.3), скориставшись рівнянням статички (2.3.2).

3. Продиференціювати скомбіноване рівняння припливу тепла по ζ .

4. Підставити одержане рівняння у рівняння вихору (2.3.1).

У результаті здійснених операцій одержимо прогностичне рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \zeta} + c^2 \nabla^2 \dot{\Phi} = F, \quad (2.3.5)$$

в якому права частина дорівнює

$$F = c^2 \ell A_{\Omega} - R \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta A_T),$$

де R – радіус кола навкруги точки прогнозу, і вважається відомою, оскільки її можна обчислити за відомим полем геопотенціалу Φ . Параметр стійкості (c^2) характеризує статичну стійкість і вважається сталим.

Аналітичний розв’язок рівняння (2.3.5) був вперше отриманий у 1951 р. Булеєвим і Марчуком. У циліндричній системі координат при локальних межових умовах розв’язок має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(0,0,\zeta) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^R \ell A_{\Omega}(r,\psi,\zeta,\zeta') G_{\Omega}(r,\zeta,\zeta') r dr d\psi d\zeta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^R A_T(r,\psi,\zeta,\zeta') G_T(r,\zeta,\zeta') r dr d\psi d\zeta, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

де G_{Ω} , G_T – функції впливу (Гріна) для динамічного і термічного факторів, відповідно;

ζ , r , ψ – змінні інтегрування, що можуть набувати значення у діапазонах: $0 \leq \zeta \leq 1$, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$;

ζ' – рівень, для якого здійснюється прогноз (для основних ізобаричних поверхонь ζ' набуває значень 1,0; 0,85; 0,7; 0,5; 0,3).

Аналіз розв’язку (2.3.6) показує, що область інтегрування є циліндром з радіусом R ($R = 3d$), нижня основа якого розташована на ізобаричній поверхні 1000 гПа ($\zeta = 1$), а верхня співпадає з гіпотетичною поверхнею, за яку береться верхня межа атмосфери, де $p = 0$ ($\zeta = 0$). Таким чином, ця модель є тривимірною і зміна висоти ізобаричної поверхні у точці прогнозу визначається геострофічною адвекцією вихору та температури в усій товщі атмосфери (вплив A_{Ω} ураховується на основних ізобаричних поверхнях, а A_T – у шарах між цими поверхнями). Ступінь впливу зазначених факторів визначається функціями впливу G_{Ω} , G_T , які мають такі властивості.

Для динамічного фактора:

- G_{Ω} в усій області інтегрування є додатною;
- максимальних значень G_{Ω} набуває у точці прогнозу та на рівні прогнозу;
- з віддаленням від точки прогнозу по вертикалі та горизонталі G_{Ω} зменшується.

Для термічного фактора:

- G_T є знакозмінною функцією: вище рівня прогнозу вона є від'ємною, а нижче – додатною;

- максимальних значень вона набуває у точці прогнозу та у середині шарів, що прилягають до рівня прогнозу;

- з віддаленням від точки прогнозу по горизонталі функція зменшується і на відстанях, близьких до $R = 3d$, наближається до нуля.

На рис. 2.3.1 наведені функції Гріна G_Ω і G_T для ізобаричних поверхонь 1000 і 500 гПа.

Вплив динамічного фактору A_Ω детально розглянуто в попередньому підрозділі. Треба тільки мати на увазі, що у бароклінній моделі зміна висоти ізобаричної поверхні визначається сумарною адвекцією вихору у внутрішній області інтегрування (циліндр радіусом R). А якщо бути ще точнішими, величина Φ визначається середньозваженим значенням геострофічної адвекції абсолютного вихору в усіх вузлах сітки,

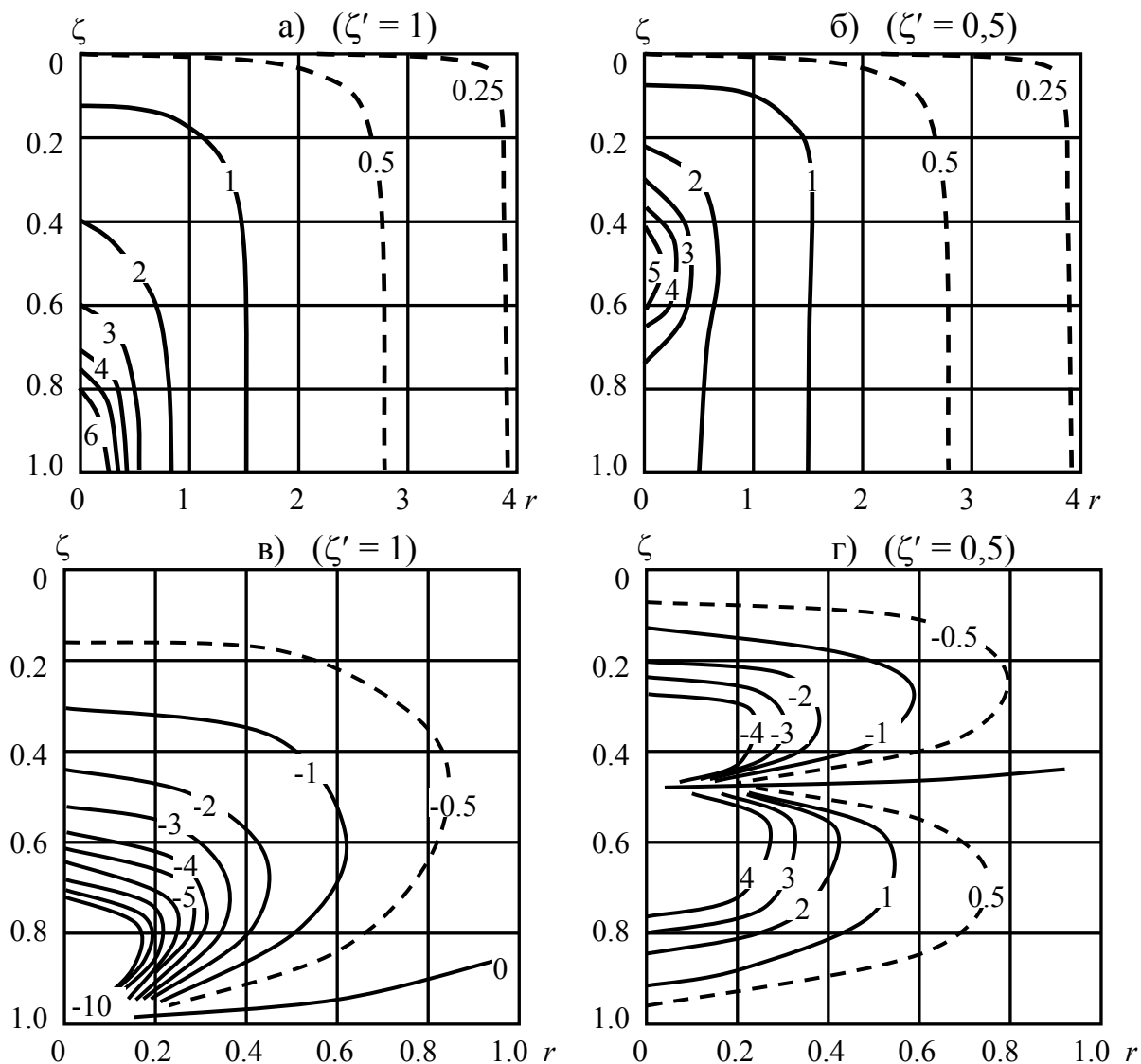


Рисунок 2.3.1 – Функції Гріна G_Ω (а, б) і G_T (в, г).

що містяться усередині циліндра. Зауважимо, що усі вузли лежать на основних ізобаричних поверхнях, а прогностичні точки – на осі циліндра.

Розглянемо внесок термічного фактора у величину тенденції, яка описується іншим потрійним інтегралом у розв'язку (2.3.6)

$$\dot{\Phi}(0,0,\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi R} A_T(r, \psi, \zeta, \zeta') G_T(r, \zeta, \zeta') r dr d\psi d\zeta. \quad (2.3.7)$$

Аналіз цієї формули показує, що знак тенденції геопотенціалу в точці прогнозу визначається знаком функцій G_T, A_T .

Відомо, що за адвекції тепла $A_T > 0$, адвекції холоду $A_T < 0$. Наприклад, нехай в усій тропосфері спостерігається адвекція тепла, тобто $A_T > 0$. Як буде змінюватися тиск у нижній ($p = 1000$ гПа), середній ($p = 500$ гПа) і верхній ($p = 300$ гПа) тропосфері у цьому випадку? Оскільки вся область інтегрування розташована вище ізобаричної поверхні 1000 гПа, то функція впливу G_T буде від'ємною. Відповідно до (2.3.7) $\dot{\Phi}(0,0,1) < 0$, тобто висота ізобаричної поверхні $p = 1000$ гПа буде знижуватися, а тиск у нижній тропосфері відповідно зменшуватиметься. Такий результат узгоджується з фізичним механізмом змін тиску в атмосфері за рахунок горизонтального переносу повітряних мас. Нагадаємо, що при макропроцесах тиск на будь-якому рівні визначається тільки вагою стовпа повітря, який перебуває над цим рівнем. За адвекції тепла холодне повітря відступає і замінюється теплим, а оскільки тепле повітря легше за холодне, тиск зменшуватиметься.

Для верхньої атмосфери прогностичним рівнем є ізобарична поверхня 300 гПа. У цьому випадку область інтегрування розташована нижче рівня прогнозу і функція впливу G_T є додатною. За адвекції тепла, відповідно до (2.3.7), тенденція геопотенціалу в точці прогнозу також буде додатною. Це означає, що тиск у верхній тропосфері під впливом термічного фактора буде зростати. Дійсно, за адвекції тепла збільшується товщина шару атмосфери між земною поверхнею та ізобаричним рівнем (у даному випадку $p = 300$ гПа). При цьому висота ізобаричної поверхні збільшиться, і тиск також збільшиться.

Таким чином, адвекція тепла в усій товщі тропосфери спричинить зниження тиску в нижній тропосфері і збільшення в її верхній частині. Якщо спостерігається адвекція холоду в усій товщі тропосфери, характер зміни тиску буде протилежний. Очевидно, що адвекція температури одного знаку і однакової інтенсивності в усьому шарі атмосфери не викликає істотних змін тиску у середині тропосфери (поблизу рівня $p = 500$ гПа) насамперед тому, що у цьому випадку зміни тиску за рахунок термічного фактору нижче і вище рівня прогнозу будуть мати про-

тилежні знаки і, таким чином, компенсувати один іншого. Вплив бароклінного фактору на зміну геопотенціалу середнього рівня у такому випадку буде незначним. Це в якійсь мірі підтверджує концепцію наявності середнього рівня в атмосфері. Але треба пам'ятати, якщо спостерігається адвекція температури, яка з висотою багаторазово змінює свій знак, вплив бароклінного фактору в середній тропосфері значно збільшуватиметься.

Для спрощення аналізу в цьому підрозділі було розглянуто окремо вплив динамічного і термічного факторів на зміну тиску в барокліній атмосфері. З розв'язку (2.3.6) випливає, що результуюча зміна тиску в будь-якій точці прогнозу визначається знаками і кількісними співвідношеннями обох факторів. Також нагадаємо, що модель прогнозу для баротропної атмосфери можна розглядати як спрощений випадок моделі для барокліної атмосфери, коли нехтують адвекцією температури.

2.4 Методологічне обґрунтування переходу до прогностичних моделей за повними рівняннями

У попередніх двох підрозділах розглянуто прогностичні моделі для баротропної та барокліної атмосфери в геострофічному наближенні. Ці моделі ґрунтуються на використанні рівняння вихору швидкості вітру та спираються на істотні спрощення, які є допустимими лише у самому першому наближенні. Дійсно, нехтування у рівнянні вихору членами, характерні значення яких тільки у декілька разів менше основних доданків рівняння, поряд з вилученням дрібномасштабних збурень може призвести до неточностей в описі великомасштабних процесів. Чисельні експерименти з геострофічними моделями показали, що відкидання малих членів у рівнянні вихору треба робити обережно. Зокрема, у доданку $(\ell + \Omega_p)D_s$ доцільно урахувати, хоч би й наближено, згладжену величину Ω_p .

У багатьох наукових працях, присвячених гідродинамічним методам прогнозу погоди, відзначаються суттєві недоліки квазігеострофічного наближення. Одним з таких недоліків є неточний опис змін у часі осередненої по горизонталі внутрішньої енергії, пов'язаний з тим, що не ураховується агеострофічна частина термічної адвекції. Ця неточність особливо сильно позначається на прогнозі розвитку циклону в стадії його оклюдування. Іншим недоліком, властивим квазігеострофічним моделям, є недооцінка індивідуальних змін абсолютного вихору в циклоні та переоцінка цих змін в антициклоні внаслідок нехтування величини Ω_p у доданку рівняння вихору $(\ell + \Omega_p)D_s$. Практично ці недоліки виражаються у тому, що недооцінюється інтенсивність баричних утворень (у центрах

циклонів тиск завищується, а антициклонів – занижується; виникає хибний антициклогенез, тобто фіктивне підвищення геопотенціалу ізобаричних поверхонь).

З точки зору фізики головний недолік квазігеострофічних моделей полягає у неврахуванні агеострофічних відхилень вітру u' , v' . Дійсно, атмосфера коливається поблизу геострофічної рівноваги, оскільки в ній безперервно відбувається пристосування вітру до геострофічного. У середньому агеострофічний вітер становить 20-30% від швидкості реального вітру. Найбільші значення u' , v' пов'язані з зонами різкої перебудови термобаричного поля, тому з прийняттям умови геострофічності будь-яка модель дуже збіднюється.

Таким чином, постановка більш повної задачі про прогноз пов'язана з урахуванням негеострофічності атмосферних рухів, яке можна здійснити через використання гіпотези квазісоленоїдальності або через залучення повних рівнянь гідротермодинаміки.

Розглянемо другий підхід. Як відомо, повна система рівнянь має за часом п'ятий порядок (система містить похідні за часом від трьох компонент швидкості, температури та густини). Відповідно, розв'язок задачі Коші для цієї системи потребує завдання у початковий момент часу п'яти метеорологічних величин. Рухи, що розвиваються в атмосфері за довільних початкових даних, можуть бути розділені на відносно повільні (синоптичні) та швидкі (хвильові).

Швидкі хвильові рухи виникають, якщо у деякій області атмосфери порушується статична та геострофічна рівновага. Розповсюдження акустичних, гравітаційних та двовимірних хвиль спричиняє розсіювання енергії, а також інтерференцію збурень, що у результаті призводить до зменшення їх амплітуд, тобто до їх розсіювання. Внаслідок розсіювання хвиль метеорологічні поля "пристосовуються" одне до іншого таким чином, що атмосфера наближується до стану статичної та геострофічної рівноваги. Цей процес має назву адаптації метеорологічних полів. Однак, швидкість розсіювання енергії відрізняється для різних класів збурень. Найшвидше відбувається пристосування руху до квазістатичного режиму. Так, при розповсюдженні акустичних хвиль у вертикальному напрямку початкові відхилення метеорологічних величин від значень, які відповідають статичній рівновазі, розповсюджуються на шар товщиною 10 км приблизно за 30 секунд. Розсіювання збурень за рахунок розповсюдження хвиль у похилих напрямках відбувається повільніше, але навіть з урахуванням цієї обставини характерний час адаптації до квазістатичного режиму має порядок хвилини. Цей проміжок часу є настільки малим, що сумарна дія факторів, які викликають збурення, майже завжди виявляється незначною. Винятком є деякі інтенсивні дрібномасштабні процеси, наприклад грози, шквали, смерчі.

З порушенням геострофічної рівноваги пов'язане розповсюдження

двовимірних хвиль. Їх швидкість є близькою до швидкості акустичних хвиль, але горизонтальні розміри початкових збурень набагато перевищують розглянутий вище вертикальний масштаб (10 км), так що характерний час процесу є істотно більшим. Так, для найбільш великомасштабних збурень цей час перевищує значення $\frac{1}{2\omega_z}$ і, таким чином, у ме-

жах широт від 30 до 90° він не більше 2-4 годин. Тобто час, протягом якого відбувається розсіювання двовимірних хвиль, істотно менше за час релаксації (характерного часового інтервалу, протягом якого розвивається та руйнується великомасштабне збурення в атмосфері). У зв'язку з цим виявляється можливим знехтувати у першому наближенні відхиленнями швидкості та тиску від стану геострофічної рівноваги, які накопичуються за короткий термін, та вважати великомасштабні атмосферні рухи адаптованими.

Проте двовимірні хвилі, що мають різні фази на різних рівнях, регулюються повільнішими внутрішніми гравітаційними хвилями, які за певних метеорологічних умов можуть спричинити істотні відхилення від геострофічної рівноваги, внаслідок чого виникає необхідність урахування переносу енергії цими хвилями, тобто урахування еволюції адаптованих полів.

Порушення та відновлення геострофічної рівноваги, які постійно відбуваються в атмосфері, приводить до того, що метеорологічні поля у середньому виявляються адаптованими. Еволюція адаптованих полів власне й є синоптичним процесом. Отже, виникнення нових циклонів, антициклонів, зміна їх інтенсивності неможливо прогнозувати з достатнім ступенем точності без урахування процесів адаптації метеорологічних полів, тобто є необхідним урахування ефектів двовимірних та гравітаційних хвиль, які присутні у розв'язку системи повних рівнянь гідротермодинаміки.

Розглянемо одну з ранніх моделей гідродинамічного прогнозу за повними рівняннями, що була розроблена І. Кібелем у межах тривимірної теорії адаптації.

Те, що рухи повітря є близькими до геострофічного, є давно і добре відомим фактом. Використання геострофічного наближення, вперше здійснене І. Кібелем, дозволило відфільтрувати гравітаційні хвилі та поставити задачу гідродинамічного прогнозу погоди на реальне фізичне підґрунтя. З появою перших електронних обчислювальних машин квазігеострофічні моделі прогнозу стали швидко упроваджуватися в оперативну службу прогнозів. Надалі зусилля дослідників були в основному спрямовані на уточнення методики чисельного прогнозу за рахунок урахування негеострофічного руху. Ці дослідження здійснювалися головним чином у таких напрямках: 1) заміна гіпотези квазігеострофічності наближенням про квазісолєнодаїдальність руху з використанням рівняння ба-

лансу; 2) уточнення розкладення складових швидкості вітру по степенях безрозмірного малого параметра і побудова агеострофічних моделей; 3) побудова моделей, що ґрунтуються на розв'язанні повних (неперетворених) рівнянь гідротермодинаміки у межах квазістатичної гіпотези. Зрозуміло, що найточніша постановка задачі прогнозу, яка ґрунтується на розв'язанні повних рівнянь гідротермодинаміки, є найпривабливішою та найперспективнішою. Розділ 4 цього підручника присвячений саме такому підходу.

Одним з підходів до побудови моделей прогнозу за повними рівняннями був вибраний під впливом досліджень механізму пристосування рухів до геострофічного. Постановка задачі про адаптацію полів вітру та тиску бере свій початок з роботи Россбі, яка була опублікована у 1938 р. У подальшому теорії адаптації метеорологічних полів як для баротропної, так і барокліної атмосфери були присвячені роботи О. Обухова, І. Кібеля та деяких інших авторів. У цій постановці (лінійна задача, розв'язок якої шукається для нескінченної площини за сталого значення параметра Коріоліса) було показано, що практично за будь-яких початкових значень горизонтальних швидкостей вітру та тиску (геопотенціалу) рух прямує до геострофічного.

Звідси випливає постановка загальної нелінійної задачі, яка буде вже задачею прогнозу. Вона полягає у тому, щоб залучити нелінійні члени і, вважаючи їх відомими, використовувати результати, здобуті у лінійному випадку, як методичне підґрунтя прогнозу метеорологічних полів. Постановка та розв'язок цієї задачі належить І. Кібелю. Забігаючи наперед, можна сказати, що ґрунтуючись на цій методиці були побудовані оперативні схеми прогнозу метеорологічних величин, які використовувались деякий час для складання оперативних прогнозів.

Розглянемо далі, як відбувається пристосування вітру до геострофічного у випадку загальної, нелінійної задачі прогнозу для барокліної атмосфери. Точніше, чи можна відокремити геострофічну частину руху при розв'язанні повних рівнянь гідротермодинаміки з метою прогнозу погоди.

Повну систему рівнянь короткострокового прогнозу погоди візьмемо у системі координат x, y, ζ, t (див. п. 1.4.2) у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u; \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \zeta} = 0; \quad (2.4.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{c^2}{R\zeta} \hat{\tau} = 0; \quad (2.4.4)$$

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}. \quad (2.4.5)$$

Визначення шуканих функцій здійснюється при заданих початкових та межових умовах.

Як початкові дані для цієї системи достатньо задати початкові поля u , v , Φ . Аналог вертикальної швидкості $\hat{\tau}$ визначається при цьому з рівняння нерозривності (2.4.3), а температура T з рівняння статки (2.4.5). Таким чином, можна звести систему (2.4.1)-(2.4.5) до системи трьох рівнянь. Вилучаючи з (2.4.4) функцію $\hat{\tau}$ та температуру за допомогою (2.4.3) та (2.4.5), одержимо наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \quad (2.4.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u; \quad (2.4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \left(u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \zeta} + v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \zeta} \right) - c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.4.8)$$

Перенесемо у рівняннях (2.4.6)-(2.4.8) усі лінійні члени вліво, а нелінійні – вправо і будемо вважати їх відомими величинами. Уводячи позначення для груп нелінійних членів:

$$B_u = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial u}{\partial \zeta};$$

$$B_v = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial v}{\partial \zeta}; \quad (2.4.9)$$

$$A_T = -\zeta \left(u \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \zeta} + v \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \zeta} \right),$$

запишемо систему (2.4.6)-(2.4.8) у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \ell v = -B_u; \quad (2.4.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \ell u = -B_v; \quad (2.4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} \right) - c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \zeta A_T}{\partial \zeta}. \quad (2.4.12)$$

Ці рівняння розв'язуються за наступних межових умов:

$$\zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \text{ є обмеженим при } \zeta = 0, \quad (2.4.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} + \frac{c^2}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = A_T \text{ при } \zeta = 1. \quad (2.4.14)$$

Замінімо похідні у часі відношеннями скінченних різниць:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u - u^0}{\delta t}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{v - v^0}{\delta t}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \approx \frac{\Phi - \Phi^0}{\delta t}.$$

Тоді маємо:

$$u + \delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - l v \right) = -\delta t B_u + u^0; \quad (2.4.15)$$

$$v + \delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + l u \right) = -\delta t B_v + v^0; \quad (2.4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial (\Phi - \Phi^0)}{\partial \zeta} \right) - c^2 \delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \delta t \frac{\partial \zeta A_T}{\partial \zeta}. \quad (2.4.17)$$

Межова умова (2.4.14) при цьому набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\Phi - \Phi^0) + \frac{c^2}{RT} (\Phi - \Phi^0) = \delta t A_T \text{ при } \zeta = 1. \quad (2.4.18)$$

Уведемо безрозмірний параметр $\ell_0 \delta t = \delta$, де ℓ_0 - значення параметра Коріоліса на початку координат. Тоді з (2.4.15) і (2.4.16) одержимо такі вирази для складових швидкості вітру u і v :

$$u = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} \left(-\frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{\ell_0} B_v + \frac{1}{\delta} v^0 - \frac{1}{\delta \ell_0} B_u - \frac{1}{\delta \ell_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\delta^2} u^0 \right); \quad (2.4.19)$$

$$v = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} \left(\frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\ell_0} B_u - \frac{1}{\delta} u^0 - \frac{1}{\delta \ell_0} B_v - \frac{1}{\delta \ell_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{\delta^2} v^0 \right). \quad (2.4.20)$$

Створюючи вираз для плоскої дивергенції та вилучаючи його з (2.4.17), одержимо рівняння для визначення збільшення $\Phi - \Phi^0$ за момент часу δt

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1+\delta^2}{\delta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{c^2}{\ell_0^2} \left(\nabla^2 + b\delta \frac{\partial}{\partial x} - b' \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] (\Phi - \Phi^0) = \\ & = \delta \left[\frac{1+\delta^2}{\ell_0 \delta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta A_T) - \frac{c^2}{\ell_0^2} \left(\frac{\partial B_v}{\partial x} - \frac{\partial B_u}{\partial y} + b \frac{\partial \Phi^0}{\partial x} \right) \right] - \\ & - \frac{c^2}{\ell_0^2} \left[\frac{\partial B_u}{\partial x} + \frac{\partial B_v}{\partial y} + \nabla^2 \Phi - \ell_0 \left(\frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y} - b' \frac{\partial \Phi^0}{\partial y} \right) \right] + \frac{c^2}{\ell_0^2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

У цьому рівнянні коефіцієнти b і b' пов'язані з параметром Коріоліса співвідношеннями:

$$\begin{aligned} b &= \left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial \ell}{\partial y} \right)_0 \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2 + 1}; \\ b' &= 2 \left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial \ell}{\partial y} \right)_0 \frac{\delta^2}{\delta^2 + 1}. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Звернемо увагу на те, що у правій частині рівняння (2.4.21) мають місце три групи членів, які містять δ у першому, нульовому та мінус першому степеню відповідно. Зауважимо (і це є суттєвим для подальшого аналізу), що $\delta t \gg 1$, тобто уважаємо $\delta t = 2,5$ години.

Рівняння (2.4.21) інтегрується за межових умов (2.4.13) та (2.4.18) за припущенням, що група членів, яка міститься у його правій частині, є відомою. Не зупиняючись на математичному боці питання, зазначимо відразу, що розв'язок був одержаний І. Кібелем у вигляді

$$\Phi = \delta \Phi_1 + \Phi_2 + \frac{1}{\delta} \Phi_3, \quad (2.4.23)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int \left[G \left(\frac{\partial B_v}{\partial x'} - \frac{\partial B_u}{\partial y'} + b \frac{\partial \Phi^0}{\partial x'} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\ell_0}{c^2} \frac{1+\delta^2}{\delta^2} \zeta' \frac{\partial G}{\partial \zeta'} A_t \right] d\zeta' dx' dy'; \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

$$\Phi_2 = \Phi^0 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int G \left[\frac{\partial B_u}{\partial x'} + \frac{\partial B_v}{\partial y'} + \nabla^2 \Phi^0 - \right. \\ \left. - \ell_0 \left(\frac{\partial u^0}{\partial x'} - \frac{\partial v^0}{\partial y'} \right) - b' \frac{\partial \Phi^0}{\partial y'} \right] d\zeta' dx' dy'; \quad (2.4.25)$$

$$\Phi_3 = -\frac{\ell_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int G \left(\frac{\partial u^0}{\partial x'} + \frac{\partial v^0}{\partial y'} \right) d\zeta' dx' dy'. \quad (2.4.26)$$

Функцію впливу (Гріна) G тут виписувати не будемо.

Запропонована схема розв'язання повних рівнянь є імпліцитною за часом (див. розділ 3). У виразах для Φ_1 , Φ_2 і Φ_3 нелінійні члени (B_u , B_v , A_T) входять як у початковий, так й у майбутній моменти часу. Тому застосування запропонованої методики розв'язання повних рівнянь при побудові конкретної прогностичної моделі передбачає, що майбутні значення нелінійних членів на кожному кроці за часом шукаються послідовними ітераціями.

Зупинимося на аналізі одержаного розв'язку. Насамперед відзначимо, що, підставляючи з (2.4.23) у (2.4.19) і (2.4.20), можна звести вирази для u і v до аналогічного вигляду. Саме,

$$u = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} \left(\delta u_1 + u_2 + \frac{1}{\delta} u_3 + \frac{1}{\delta^2} u_4 \right); \quad (2.4.27)$$

$$v = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} \left(\delta v_1 + v_2 + \frac{1}{\delta} v_3 + \frac{1}{\delta^2} v_4 \right), \quad (2.4.28)$$

де

$$u_1 = -\frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}; \quad (2.4.29a)$$

$$v_1 = \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x},$$

$$u_2 = -\frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{B_v}{\ell_0} - \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}; \quad (2.4.29б)$$

$$v_2 = \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{B_u}{\ell_0} - \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y},$$

$$u_3 = -\frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - \frac{B_u}{\ell_0} + v^0 - \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; \quad (2.4.29в)$$

$$v_3 = \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{B_v}{\ell_0} - u^0 - \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}
u_4 &= u^0 - \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}; \\
v_4 &= v^0 - \frac{1}{\ell_0} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{2.4.29г}$$

Звернемося спочатку до одержаного виразу (2.4.23) для геопотенціалу Φ та згадаємо, що $\delta t \gg 1$. Перший член правої частини, якій містить δ як множник, умовно може бути названий еволюційним, другий – стаціонарним, третій – загасаючим. Аналогічні члени можна знайти й у виразах (2.4.27) і (2.4.28) для горизонтальних складових швидкості u і v .

Так же само може бути розкладена по степеням параметра δ функція $\hat{\tau}$. Вираз для $\hat{\tau}$ згідно з (2.4.17) і (2.4.3) візьмемо у вигляді

$$\hat{\tau} = \frac{\zeta}{c^2} \left(A_T - \frac{\ell_0 \zeta}{\delta} \frac{\partial(\Phi - \Phi^0)}{\partial \zeta} \right).
\tag{2.4.30}$$

Ураховуючи (2.4.23), подамо $\hat{\tau}$ у вигляді

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_2 + \frac{1}{\delta} \hat{\tau}_3 + \frac{1}{\delta^2} \hat{\tau}_4,
\tag{2.4.31}$$

де

$$\hat{\tau}_2 = \frac{\zeta}{c^2} \left(A_T - \ell_0 \zeta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right);
\tag{2.4.32а}$$

$$\hat{\tau}_3 = - \frac{\ell_0 \zeta^2}{c^2} \frac{\partial(\Phi_2 - \Phi^0)}{\partial \zeta};
\tag{2.4.32б}$$

$$\hat{\tau}_4 = - \frac{\ell_0 \zeta^2}{c^2} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \zeta}.
\tag{2.4.32в}$$

Таким чином, вираз для $\hat{\tau}$ не містить еволюційного члена.

З'ясуємо роль окремих членів у одержаному рівнянні.

Відкинемо у рівнянні (2.4.21) нелінійні члени (B_u, B_v, A_T) та припустимо $b = 0$ (нехтуємо членом, що містить $\partial \ell / \partial y$). Тоді $\Phi_1 = u_1 = v_1 = \hat{\tau}_2 = 0$. Усі три функції Φ, u і v будуть містити тільки стаціонарні члени, які згідно з (2.4.29б) будуть пов'язані умовою геострофічності, та загасаючі члени. Цей розв'язок прогностичного сенсу не матиме.

Якщо тільки відкинути нелінійні члени, то одержимо часткову еволюцію за рахунок зміни параметра Коріоліса з широтою ($b \neq 0$).

Нарешті, зберігаючи нелінійні члени, одержимо еволюцію процесу

у її повному виразі. Тому загальному випадку відповідає умова, яка полягає у тому, що головні (еволюційні) члени для Φ , u і v завжди пов'язані згідно з розв'язками (2.4.23), (2.4.27), (2.4.28) і (2.4.29а) умовами геострофічності.

Таким чином, результати теорії адаптації можна використовувати як для обґрунтування можливості побудови геострофічних моделей (основна частина вказаних розв'язків – стаціонарна, яка відповідає умові геострофічності), так і для обґрунтування необхідності переходу до моделей за повними рівняннями, в яких разом з повільними рухами (типу хвиль Россбі) ураховуються й більш швидкі рухи типу внутрішніх гравітаційних хвиль, які відповідають за еволюцію метеорологічних полів.

2.5 Питання для самоконтролю

- 1) Що описує відносний вихор вектора швидкості вітру?
- 2) Що розуміється під терміном "фільтровані моделі прогнозу"?
- 3) Який вигляд має прогностичне рівняння для середнього рівня баротропної атмосфери?
- 4) Як буде змінюватися тиск поблизу точки прогнозу при адвекції циклонічного вихору?
- 5) Як буде змінюватися тиск біля поверхні землі при адвекції тепла у середній тропосфері?
- 6) Що описують функції Гріна?
- 7) Що впливає на зміну тиску в бароклінній атмосфері?
- 8) Що таке баротропна атмосфера?
- 9) Перелічіть недоліки фільтрованих моделей прогнозу.
- 10) Який процес зветься адаптацією метеорологічних полів?
- 11) За рахунок яких хвиль порушується і відновлюється геострофічний баланс?
- 12) Розповсюдження яких хвиль відновлює квазістатичну рівновагу? Вкажіть час її відновлення.
- 13) За який інтервал часу відновлюється геострофічна рівновага?
- 14) У чому полягає суть гіпотези квазігеострофічного наближення?
- 15) Яка система рівнянь є вихідною в задачі тривимірної адаптації?
- 16) Яким чином нелінійна система рівнянь зводиться до лінійного вигляду?
- 17) Яка вихідна інформація потрібна для розрахунку нелінійних членів?
- 18) Надайте фізичне тлумачення розв'язку (2.4.23).
- 19) Чому в прогностичних моделях треба ураховувати процес адаптації?

РОЗДІЛ 3 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ГІДРОТЕРМОДИНАМІКИ

У розділі 1 були розглянуті системи нелінійних рівнянь гідротермодинаміки, які є основою прогностичних моделей атмосфери. Методів точного розв'язання, за винятком деяких окремих випадків, не існує. Внаслідок цього для розв'язання рівнянь гідротермодинаміки з метою прогнозу полів метеорологічних величин використовуються наближені, чисельні методи. У цьому розділі розглядаються два різних підходи для наближеного розв'язання системи рівнянь: метод сіток, який широко використовувався на початку розвитку чисельних методів прогнозу погоди та застосовується у деяких сучасних прогностичних моделях, і спектральні методи, в яких поля метеорологічних величин розкладаються за допомогою деяких ортогональних функцій, а розв'язання здійснюються стосовно коефіцієнтів розкладання.

3.1 Загальні принципи застосування метода сіток

Точність розв'язання метеорологічних задач значною мірою залежить від точності обчислення просторових і часових похідних. Оскільки в метеорології значення метеовеличин відомі в окремих точках простору, неможливо застосувати методи диференціювання функцій, які задані аналітично, тому похідні замінюються відношеннями скінченних різниць. Ці різниці (різниці значень метеорологічних величин у двох точках у просторі або часі) є малими різницями великих величин. Тому перші похідні завжди обчислюються з деякими похибками, а перехід від перших до других похідних є еквівалентом ще одного скінченнорізницевого наближення і т.д. Таким чином, чим більший порядок похідної треба обчислити, тим більший вплив на результат будуть мати похибки у вихідних даних, а отже, тим меншою є точність результатів.

Перша похідна від будь-якої функції f по аргументу η є границею відношення приросту функції Δf до зміни аргументу $\Delta\eta$, за умови, що $\Delta\eta$ наближується до нуля

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{f(\eta + \Delta\eta) - f(\eta)}{\Delta\eta}. \quad (3.1.1)$$

Обчислена за формулою (3.1.1) похідна належить до точки з коор-

динатою η . Ця формула дозволяє обчислити похідну у тому випадку, коли форма залежності $f(\eta)$ є відомою, а отже, функція $f(\eta)$ задана аналітично.

Відомо, що усі метеорологічні величини залежать від просторових координат x, y, z і часу t . Але характеризується ця залежність невідомою і дуже складною функцією. Проте можна навести багато прикладів аналітичного опису залежності метеорологічних величин від окремих координат у просторі або часі. Наприклад, є добре відомими задовільні результати опису за допомогою логарифмічної функції вертикального розподілу температури, вологості, швидкості вітру у приземному шарі повітря. В окремих шарах атмосфери добре виправдовується лінійне подання змін температури з висотою. Інколи добовий хід температури описують за допомогою періодичних функцій (наприклад, синусоїди); залежність метеорологічних величин від горизонтальних координат і часу також можна наближено задавати аналітично у вигляді поліномів, тригонометричних, сферичних чи інших функцій. Для усіх перелічених функцій похідні можуть бути знайдені за наведеною формулою (3.1.1).

При розв'язанні більшості метеорологічних задач мають справу не з аналітично заданими функціями, а з дискретними даними, тобто з величинами метеорологічних параметрів в окремих точках (наприклад, у вузлах сітки, які співпадають з метеостанціями) та в окремі моменти часу (наприклад, у строки спостережень). Для розрахунку похідних за дискретними значеннями формула (3.1.1) береться у вигляді (3.1.2), в якій прирости функції та аргументу замінюються наближеним відношенням

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \approx \frac{f(\eta + \Delta\eta) - f(\eta)}{\Delta\eta}. \quad (3.1.2)$$

Розрахована за цією формулою похідна належить вже не до точки з координатою η , а є осередненим значенням на інтервалі $[\eta, \eta + \Delta\eta]$.

Розглянемо спочатку теоретичні основи методів обчислення похідних.

Нехай величини деякого метеорологічного параметра f у конкретних точках на площині з номерами $n = 1, 2, 3, \dots, N$ є відомими. Координати будь-якої n -тої точки позначимо через x_n, y_n , а величину метеорологічного параметра – через f_n . Для визначення похідних будемо вважати, що поле метеорологічної величини є лінійним, f_0 – величина метеорологічного параметра на початку координат, а похідні по координатах x і y є сталими або осередненими по території, на якій розташовані вибрані точки. Тоді для вибраних точок можна одержати систему, яка складається з n умовних рівнянь

$$f_n = f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} x_n + \frac{\partial f}{\partial y} y_n; \quad n = (1, 2, \dots, N). \quad (3.1.3)$$

При $N < 3$, кількості рівнянь недостатньо для визначення трьох невідомих величин: f_0 , $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$; при $N = 3$, вказані величини визначаються однозначно (величин параметра f_0 у трьох точках, які не лежать на одній прямій, достатньо для однозначного визначення плоского вектора градієнта). Для того, щоб підвищити точність обчислення, доцільно брати $N > 3$.

Оскільки поле параметра f насправді є нелінійним, рівняння системи (3.1.3) у точності не будуть виконуватися. Ліві частини кожного рівняння системи будуть відрізнятися на деяку величину δ_n , тобто

$$\delta_n = f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} x_n + \frac{\partial f}{\partial y} y_n - f_n. \quad (3.1.4)$$

Логічно тепер для визначення $\partial f / \partial x$ і $\partial f / \partial y$ вимагати, щоб величини δ_n , які надалі будемо називати відхилами, були б якнайменшими. При цьому важливо, щоб усі значення δ_n були невеликими. Не можна вимагати, щоб сума усіх δ_n була мінімальною, бо вона може бути малою і у тих випадках, коли окремі значення δ_n матимуть різні знаки. Тому в таких випадках треба вимагати, щоб мінімальною була сума квадратів відхилів. Такий спосіб уперше був випробуваний та обґрунтований Гаусом і називається методом найменших квадратів. Згідно з цим уведемо позначення

$$E = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_N^2 = \sum_{n=1}^N \delta_n^2, \quad (3.1.5)$$

та знайдемо $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ (а також й f_0) з умови, що E при цих $\partial f / \partial x$ і $\partial f / \partial y$ є меншим, ніж при будь-яких інших значеннях похідних. Для цього необхідно і, як можна показати, достатньо виконання такої умови мінімуму

$$\frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial f_0} = 0. \quad (3.1.6)$$

Використавши (3.1.4), замість (3.1.5) можна записати

$$E = \sum_{n=1}^N \left(f_0 + \frac{\partial f}{\partial x} x_n + \frac{\partial f}{\partial y} y_n - f_n \right)^2.$$

Тоді умова мінімізації (3.1.6) приведе до системи нормальних рівнянь:

$$\begin{aligned} f_0 N + \frac{\partial f}{\partial x} \sum_{n=1}^N x_n + \frac{\partial f}{\partial y} \sum_{n=1}^N y_n &= \sum_{n=1}^N f_n; \\ f_0 \sum_{n=1}^N x_n + \frac{\partial f}{\partial x} \sum_{n=1}^N x_n^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \sum_{n=1}^N x_n y_n &= \sum_{n=1}^N x_n f_n; \\ f_0 \sum_{n=1}^N y_n + \frac{\partial f}{\partial x} \sum_{n=1}^N x_n y_n + \frac{\partial f}{\partial y} \sum_{n=1}^N y_n^2 &= \sum_{n=1}^N y_n f_n. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Розв'язок системи (3.1.7) дозволяє знайти $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$, f_0 по значеннях метеорологічних параметрів f у точках, розташованих довільно на площині (наприклад, за інформацією на метеорологічних станціях). Коefіцієнти цієї системи і праві частини вважаються відомими, оскільки можуть бути розраховані по координатах станцій x_n і y_n відносно вибраного початку координат та по величинах параметрів f_n на станціях.

Але система істотно спрощується, якщо вибрані точки створюють симетричну сітку. Розташувавши початок системи координат у центрі симетрії та спрямувавши осі координат по осях її симетрії, маємо

$$\sum_{n=1}^N x_n = 0; \quad \sum_{n=1}^N y_n = 0; \quad \sum_{n=1}^N x_n y_n = 0. \quad (3.1.8)$$

Завдяки симетрії, кожному додатному значенню x_n знайдеться відповідне від'ємне значення, і при складанні вони скорочуються. Так само станеться й з сумами координат по y_n . Використавши (3.1.8), знайдемо з (3.1.7):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sum_{n=1}^N x_n f_n}{\sum_{n=1}^N x_n^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sum_{n=1}^N y_n f_n}{\sum_{n=1}^N y_n^2}; \quad f_0 = \frac{\sum_{n=1}^N f_n}{N}. \quad (3.1.9)$$

Це остаточний вигляд формул, за допомогою яких по величинах метеорологічних величин у вузлах симетричної сітки можна знайти похідні $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$, осереднені по території, а також значення функції f_0 .

Звичайно, ці значення похідних і f_0 доцільно приписати центру симетрії сітки. Застосуємо одержані формули (3.1.9) до схем, які використовуються найчастіше. Доцільно використовувати безрозмірні координати, тоді формули матимуть універсальний вигляд:

$$i = \frac{x}{\Delta x}; \quad j = \frac{y}{\Delta y},$$

де $\Delta x, \Delta y$ - кроки по координатних осях.

Якщо позначити центр сітки через i, j (позначення інших вузлів сітки наведені на рис. 3.1.1), а через d - відстань між вузлами сітки вздовж осей, то для схеми з чотирма точками матимемо:

Координати вузлів сітки	x_n	y_n
$i+1, j$	d	0
$i, j+1$	0	d
$i-1, j$	$-d$	0
$i, j-1$	0	$-d$

Тоді,

$$\sum_{n=1}^4 x_n^2 = \sum_{n=1}^4 y_n^2 = 2d^2; \quad \sum_{n=1}^4 x_n f_n = d(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}); \quad \sum_{n=1}^4 y_n f_n = d(f_{i,j+1} - f_{i,j-1}).$$

Якщо підставимо ці вирази у (3.1.9), одержимо:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2d}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2d}. \quad (3.1.10)$$

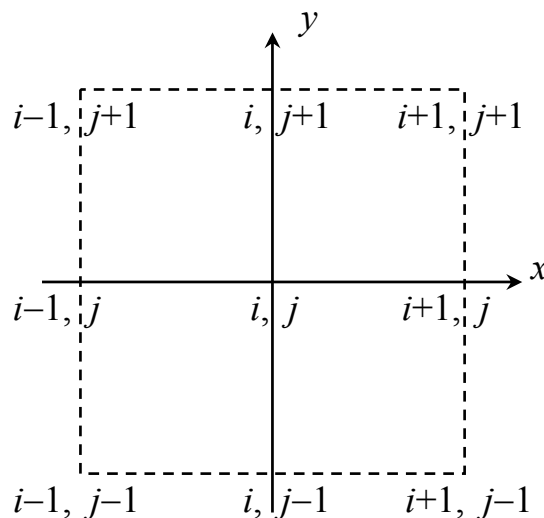


Рисунок 3.1.1 - Розташування вузлів сітки

Аналогічно, без виведення, наведемо формули для сіткового шаблону, який використовує вісім точок:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} &\approx \frac{1}{6d}(f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j} - f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}); \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} &\approx \frac{1}{6d}(f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1} + f_{i-1,j+1} - f_{i,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Нарешті, одержимо скінченнорізницевий аналог виразу для лапласіана на площині ($\nabla^2 f$), який є сумою других похідних від функції по координатах x і y , тобто

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Візьмемо за основу схему з чотирма точками та уведемо проміжні точки, які ділять відрізки навпіл, позначивши їх a, c, b, e (рис. 3.1.2). Запишемо наближено другі похідні як відношення зміни перших похідних до відповідного аргументу:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_b}{d}; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_e}{d}. \quad (3.1.12)$$

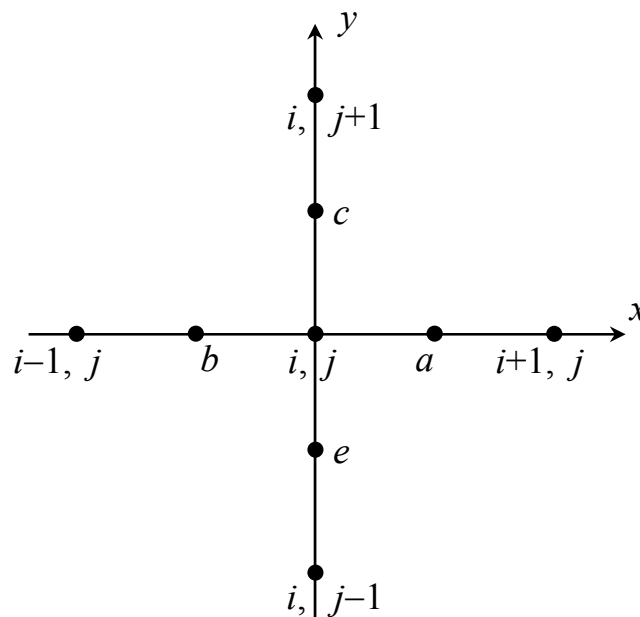


Рисунок 3.1.2 – Розташування вузлів сітки

Тепер розпишемо перші похідні:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a &\approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{d}; & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_b &\approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{d}; \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_c &\approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{d}; & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_e &\approx \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{d} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

і підставимо (3.1.13) у (3.1.12):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{d^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{d^2}. \quad (3.1.14)$$

Тоді наближена формула для лапласіана матиме вигляд

$$(\nabla^2 f)_{i,j} \approx \frac{1}{d^2} (f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}). \quad (3.1.15)$$

Формула (3.1.15) широко використовується у синоптичній метеорології та гідродинамічних методах прогнозу погоди при аналізі полів тиску і геопотенціалу, як це було показано, наприклад, у розділі 2.

Поля метеорологічних величин є безперервними і сутнісь методу сіток полягає у тому, що безперервний простір і час замінюються множиною дискретних точок, а поля функцій (метеовеличин) задаються у вигляді множини дискретно-сіткових значень функцій $f_{i,j,k}^s$. Нагадаємо ще раз позначення:

$$i = \frac{x}{\Delta x}; \quad j = \frac{y}{\Delta y}; \quad k = \frac{z}{\Delta z}; \quad s = \frac{t}{\Delta t}.$$

Тут Δx , Δy , Δz – кроки у просторі; Δt – крок за часом; i , j , k – безрозмірні просторові координати по осях, а s – безрозмірна координата за часом.

Така множина точок, положення яких визначається дискретними безрозмірними координатами у просторі та часі, називається просторово-часовими сітками, а точки цих сіток – вузлами.

Приблизні вирази для похідних, які одержуються використанням значень метеорологічних величин у вузлах сітки та у дискретні моменти часу, зветься скінченнорізницевиими аналогами, а процедура заміни похідних скінченними різницями – скінченнорізницевою апроксимацією. Такий підхід називається скінченнорізницевим методом.

Після підстановки скінченнорізницевих виразів для похідних у систему рівнянь гідротермодинаміки та у межові умови в усіх вузлах сітки в області визначення розв'язків одержимо систему алгебраїчних рівнянь, методи розв'язання яких є добре розробленими. Таким чином, метод сіток дозволяє розв'язання крайової задачі з початковими умовами, тобто розв'язання системи диференціальних рівнянь з межовими та початковими умовами, звести до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь. Одержана система алгебраїчних рівнянь розв'язується за допомогою електронно-обчислювальних машин із застосуванням будь-якої багатокрокової процедури обчислення (наприклад, метода ітерацій).

Одним із шляхів апроксимації похідних є проста заміна похідних відповідними скінченнорізницевими відношеннями. Наприклад, для першої похідної можна використати апроксимації у такому вигляді:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\Delta r}(f_{q+1} - f_q); \quad (3.1.16)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\Delta r}(f_q - f_{q-1}); \quad (3.1.17)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{2\Delta r}(f_{q+1} - f_{q-1}), \quad (3.1.18)$$

де f – будь-яка функція;

r, q – розмірна і безрозмірна координати: $r = \{x, y, z, t\}$, $q = \{i, j, k, s\}$.

Функціональну залежність від координат і часу позначимо через f_q^s .

Апроксимації (3.1.16)-(3.1.18) називаються скінченними різницями. Вони можуть бути представленими на одному чи декількох інтервалах Δr . Залежно від положення точки, для якої реалізується ця процедура, скінченні різниці можуть бути центрованими або нецентрованими. Центровані різниці є різницею значень функції у точках, що є симетричними відносно пункту обчислення. Згідно з цим апроксимація (3.1.18) називається центральною, а (3.1.16) і (3.1.17) – нецентрованими різницями уперед та назад.

При апроксимації похідних скінченнорізницевими відношеннями логічно вимагати узгодженості, тобто при зменшенні кроку сітки до нуля скінченнорізницевий аналог повинен наближатися до похідної. Усі формули (3.1.16)-(3.1.18) мають таку властивість. Одержимо оцінку похибок похідних, апроксимованих скінченними різницями. З цією метою точний розв'язок потрібно підставити у наближений вираз для похідних замість сіткових значень функцій f_q , а потім розкласти у ряди Тейлора поблизу центральної точки. Для прикладу виконаємо таку підстановку для апрок-

симації (3.1.16):

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{\Delta r} (f_{q+1} - f_q) - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q = \\ &= \frac{1}{\Delta r} \left[f_q + \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \Delta r + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_q \frac{(\Delta r)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right)_q \frac{(\Delta r)^3}{3!} + \dots - f_q \right] - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q. \end{aligned}$$

Після розкриття квадратних дужок і скорочення подібних членів одержимо

$$\epsilon = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_q \Delta r + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right)_q (\Delta r)^2 + \dots \quad (3.1.19)$$

Для апроксимацій (3.1.17), (3.1.18) аналогічна процедура підстановки дасть такі результати:

$$\epsilon = \frac{1}{\Delta r} (f_q - f_{q-1}) - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \approx \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_q \Delta r + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right)_q (\Delta r)^2 - \dots ; \quad (3.1.20)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2\Delta r} (f_{q+1} - f_{q-1}) - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \approx \\ &\approx \frac{1}{2 \cdot 3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right)_q (\Delta r)^2 - \frac{1}{2 \cdot 4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \right)_q (\Delta r)^3 + \dots \quad (3.1.21) \end{aligned}$$

Величину ϵ називають похибкою апроксимації похідної. Вона є сумою членів, які "відсікаються" при формуванні наближення. Помилка апроксимації дає уявлення про те, наскільки точно різницеве співвідношення наближається до похідної при малому значенні Δr . Мірою цієї оцінки є порядок точності апроксимації, який визначається найнижчим ступенем Δr у виразі для похибки апроксимації ϵ . Відповідно з рівняннями (3.1.19)-(3.1.21), апроксимації (3.1.16), (3.1.17) мають перший порядок точності (можна записати $\epsilon = O(\Delta r)$), а кінцева апроксимація (3.1.18) є апроксимацією другого порядку точності ($\epsilon = O(\Delta r)^2$). Для того, щоб апроксимація похідної була узгодженою, вона повинна бути принаймні першого порядку точності.

Відомо, що атмосферні рухи та поля метеорологічних величин мають хвильовий характер. Вигляд виразу для ϵ показує, що точність зображення похідної за допомогою скінченних різниць залежить від характеру функції $f(r)$ і співвідношення між кроком сітки та довжиною хвилі у

полі цієї функції. Подамо оцінку скінченнорізницевої апроксимації першої похідної залежно від розмірів кроку сітки і довжини хвилі. Розглянемо таку функцію, яка являє собою гармоніку типу

$$f(x) = A \sin(kx), \quad (3.1.22)$$

де A - амплітуда коливань;

$k = 2\pi/L$ - хвильове число;

L - довжина хвилі по осі x .

Для апроксимації похідної використаємо центральну різницю у вигляді (3.1.18)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^a \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.1.23)$$

Запишемо першу похідну від функції (3.1.22)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = Ak \cos(ki\Delta x)$$

та апроксимуємо її центральною різницею згідно з (3.1.23).

Уведемо величину ϵ , яка буде характеризувати відносну похибку апроксимації першої похідної

$$\epsilon \equiv 1 - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i^a}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i} = 1 - \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x}. \quad (3.1.24)$$

Одержимо величини для різних довжин хвиль, які виразимо через кроки сітки:

$$L = 6\Delta x, \quad \left(\frac{\Delta x}{L} = \frac{1}{6}\right), \quad \epsilon = 0,1;$$

$$L = 4\Delta x, \quad \left(\frac{\Delta x}{L} = \frac{1}{4}\right), \quad \epsilon = 0,36;$$

$$L = 2\Delta x, \quad \left(\frac{\Delta x}{L} = \frac{1}{2}\right), \quad \epsilon = 1,0.$$

Результати показують, що відносна похибка апроксимації похідної зростає у міру того, як зменшується довжина хвилі, а для хвиль, що мають

довжину подвійного кроку сітки ($L = 2\Delta x$), скінченнорізницеві наближення не можуть застосовуватися. Інакше кажучи, за допомогою значень f_i у дискретних точках $x = i\Delta x$ неможливо подати хвильові рухи, довжина яких менша за $2\Delta x$. Звідси випливає, що для скінченнорізницевого подання похідних і рівнянь гідротермодинаміки, крок сітки необхідно вибирати з урахуванням довжин хвиль, які мають значимі амплітуди.

3.2 Поняття апроксимації, узгодженості і точності скінченнорізницевого схем

Заміна похідних у диференціальних рівняннях відповідними скінченнорізницевоими наближеннями називається скінченнорізницевою апроксимацією, а алгебраїчні рівняння, одержані у результаті такої заміни, – скінченнорізницевоими схемами. Розглянемо деякі визначення та питання, пов'язані з побудовою скінченнорізницевого схем, на прикладі неоднорідного диференціального рівняння, яке запишемо у такому вигляді:

$$Lf = \phi, \quad (3.2.1)$$

де L – диференціальний оператор;
 f – невідома функція (розв'язок);
 ϕ – задана функція.

У такій узагальненій формі можна записувати лінійні та нелінійні звичайні диференціальні рівняння, а також рівняння у частинних похідних. У системі рівнянь, яка використовується у задачах гідродинамічного прогнозу погоди, незалежними змінними є час та просторові координати.

Нехай оператор L містить похідні у просторі та часі. Просторові незалежні змінні будемо позначати через r . З урахуванням цього будемо уважати, що в (3.2.1)

$$f = f(r, t); \quad \phi = \phi(r, t).$$

Розв'язання рівняння (3.2.1) будемо вивчати в області D – області змін просторових незалежних змінних, яка обмежена межею Γ і часом D_t . Область D може бути тривимірним об'ємом, поверхнею або лінією. Згідно з цим, межами для вибраних об'єктів (тривимірних, двовимірних, одновимірних) будуть поверхні, лінії чи точки. Розв'язання рівняння (3.2.1) в області D буде однозначним, якщо його поставити у відповідність до умов у початковий момент часу (початкові умови) і на межі Γ (межові

умови).

Задачу знаходження розв'язку диференціального рівняння, яке підпорядковане початковим та межовим умовам, називають змішаною крайовою задачею або нестационарною крайовою задачею. До таких задач належить і розв'язання рівняння (3.2.1). Його початкові та межові умови залежатимуть від характеру задачі і конкретного вигляду рівняння. Не будемо зараз обговорювати способи завдання початкових та межових умов, а запишемо їх у такому загальному вигляді:

$$\psi(r) = f(r, t_0) \quad \text{у області } D \quad \text{при } t = t_0; \quad (3.2.2)$$

$$g(r, t) = f(r, t) \quad \text{на } \Gamma \times D_t, \quad (3.2.3)$$

де t_0 – початковий момент часу.

Визначимось у таких позначеннях як точність чисельного розв'язку, апроксимація та узгодженість.

Приблизна розв'язок диференціального рівняння, який одержується за допомогою скінченнорізницевого методу, зазвичай називають чисельним, а різницю між чисельним та точним розв'язками – похибкою чисельного розв'язку. Оскільки точний розв'язок, як правило, є невідомим, то невідомою є й похибка чисельного розв'язку. Можна спробувати оцінити точність скінченнорізницевої схеми, за допомогою якої було одержано чисельний розв'язок. Ця точність характеризується похибкою скінченнорізницевої апроксимації диференціального рівняння.

Для того, щоб скінченнорізницевий метод можна було застосувати до задачі (3.2.1), потрібно виконати дискретизацію незалежних змінних:

$$q = \frac{r}{\Delta r}; \quad s = \frac{t}{\Delta t}$$

(будемо уважати, що $\Delta r = h; \Delta t = \tau$), а безперервній області зміни незалежних змінних слід поставити у відповідність дискретну (сіткову) область – просторово-часову сітку $((D_h + \Gamma_h) \times D_\tau)$, вузлами якої є точки з індексами q та s . На цій сітці визначаються сіткові функції f_q^s, ϕ_q^s і сіткові оператори L_h, ψ_q, g_q^s .

Такий підхід приводить до того, що диференціальній задачі (3.2.1)-(3.2.3) ставиться у відповідність скінченнорізницева задача:

$$L_h f_q^s = \phi_q^s; \quad (3.2.4)$$

$$\psi_q = f_q^0 \quad \text{у області } D_h \quad \text{при } s = 0; \quad (3.2.5)$$

$$g_q^s = f_q^s \quad \text{на } \Gamma_h \times D_\tau. \quad (3.2.6)$$

Розглянутий підхід до побудови скінченнорізницевої задачі залишається формальним (не гарантує одержання чисельного розв'язку, що є близьким до точного) доти, поки не буде доведено, що скінченнорізниче рівняння (3.2.4) та сіткові оператори початкових (3.2.5) та межових (3.2.6) умов дійсно апроксимують вихідне диференціальне рівняння (3.2.1), початкові (3.2.2) та межові (3.2.3) умови.

Крім цього, скінченнорізницева схема (3.2.4), що апроксимує диференціальне рівняння (3.2.1), повинна бути стійкою та збіжною. Тільки за виконання цих вимог можна розраховувати на одержання чисельного розв'язку скінченнорізницевої задачі, який є близьким до точного розв'язку диференціальної задачі.

Точність апроксимації диференціального рівняння скінченнорізничевим оцінюється таким же чином, як і похибки заміни скінченними різницями похідних. Для цього у скінченнорізниче рівняння замість сіткових функцій підставляються розкладені у ряд Тейлора функції (точний розв'язок $L(q\Delta r, s\Delta t)$) навколо точки з координатами $q\Delta r, s\Delta t$. Потім з результатів підстановки віднімається диференціальне рівняння. Одержана таким способом різниця є похибкою апроксимації диференціального рівняння (3.2.1) скінченнорізничевим рівнянням (3.2.4).

Похибка апроксимації оцінюється ступенем приросту незалежних змінних, або кроків $\Delta r, \Delta t$, у головних з відкинутих членів рядів Тейлора. Цю похибку називають також порядком точності апроксимації або просто порядком апроксимації. Якщо, наприклад, у головних з відкинутих членів рядів Тейлора $\Delta r, \Delta t$ входять у першому степені, то порядок апроксимації буде першим по Δr і Δt , а $\epsilon = O(\Delta r, \Delta t)$. Якщо при зменшенні до нуля $\Delta r, \Delta t$ похибка ϵ також сягає нуля, то скінченнорізниче рівняння наближається до диференціального рівняння.

Уважається, що для скінченнорізничевого рівняння (3.2.4) з початковими та межовими умовами (3.2.5), (3.2.6) постановка задачі є коректною, якщо для невеликих кроків у просторі (h) і часі (τ) розв'язок рівняння (3.2.4) існує, є єдиним і залежить від початкових, межових умов та правої частини рівняння.

Розглянемо перелічені властивості скінченнорізничевих схем детальніше. Для цього зручно використати лінійні рівняння, для яких точні розв'язки є відомими (наприклад, рівняння адвекції, коливань). Грунтуючись на аналізі скінченнорізничевих схем для лінійних рівнянь можна одержати низку результатів, які будуть корисними при створенні скінченнорізничевих схем для нелінійних рівнянь.

Для простоти скористуємось одновимірним рівнянням адвекції:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad f = f(x, t), \quad (3.2.7)$$

де c – додатна стала.

Наведене рівняння (3.2.7) описує адвекцію функції f зі сталою швидкістю c у додатному напрямку осі x . Одержимо аналітичний розв'язок рівняння (3.2.7) і виконаємо дослідження властивостей чисельних розв'язків, порівнюючи їх з відомими властивостями точного розв'язку.

Перейдемо до іншої системи координат, використавши позначення:

$$\xi = x - ct; \quad f(x, t) = F(\xi, t).$$

Тоді одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = -c \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial t}; \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Підставимо одержані вирази до формули (3.2.7):

$$-c \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial t} + c \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial}{\partial t} F(\xi, t) = 0. \quad (3.2.8)$$

Аналіз формули (3.2.8) показує, що F не може бути функцією часу, а може бути лише довільною функцією від ξ ; таким чином

$$f(x, t) = F(x - ct) \quad (3.2.9)$$

є розв'язком рівняння адвекції (3.2.7), що задовольняє початкову умову

$$f(x, 0) = F(x). \quad (3.2.10)$$

При $(x - ct) = \text{const}$, $f(x, t) = \text{const}$. Якщо ми розглянемо розв'язки на координатній площині x, t то побачимо, що у цьому випадку розв'язки набувають сталих значень уздовж прямих ліній $(x - ct) = \text{const}$.

Нагадаємо, що інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних є рівносильним інтегруванню так званих характеристичних систем. Для лінійного однорідного рівняння адвекції (3.2.7) ця система має вигляд

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c}. \quad (3.2.11)$$

Будь-який перший інтеграл характеристичної системи є розв'язком диференціального рівняння. Інтегральні криві, які описуються характеристичними системами, називаються характеристиками диференціального рівняння. Для розглянутого рівняння (3.2.7) характеристиками є прямі, які описуються інтегралом характеристичної системи (3.2.11)

$$(x - ct) = \text{const.} \quad (3.2.12)$$

Значення f , яке відповідає $t = 0$, є відображенням початкових умов для досліджуваного рівняння. Початкові умови однозначно визначають сталу у правій частині рівняння характеристик (3.2.12). Як вже підкреслювалось, на характеристиках розв'язку це не відбивається.

Одна з характеристик рівняння адвекції (3.2.7) подана на рис. 3.2.1. Аналіз цього графіка вказує на те, що розв'язок розповсюджується уздовж характеристик.

Побудуємо тепер схему з метою знаходження приблизного розв'язку рівняння (3.2.7) за допомогою сіткового методу. Цей розв'язок буде знаходитися на полі дискретних точок у площині x, t , яке зображене на рис. 3.2.2. Приблизний розв'язок у точці $(i\Delta x, s\Delta t)$ позначимо через f_i^s . Поведінка точного розв'язку, який розповсюджується уздовж характеристик у площині x, t , дозволяє побудувати приблизне рівняння, наприклад, через заміну похідної за часом різницеvim спрямованим уперед відношенням, а похідної за простором – різницеvim спрямованим назад відношенням. З урахуванням цього одержана схема матиме вигляд:

$$\frac{f_i^{s+1} - f_i^s}{\Delta t} + c \frac{f_i^s - f_{i-1}^s}{\Delta x} = 0. \quad (3.2.13)$$

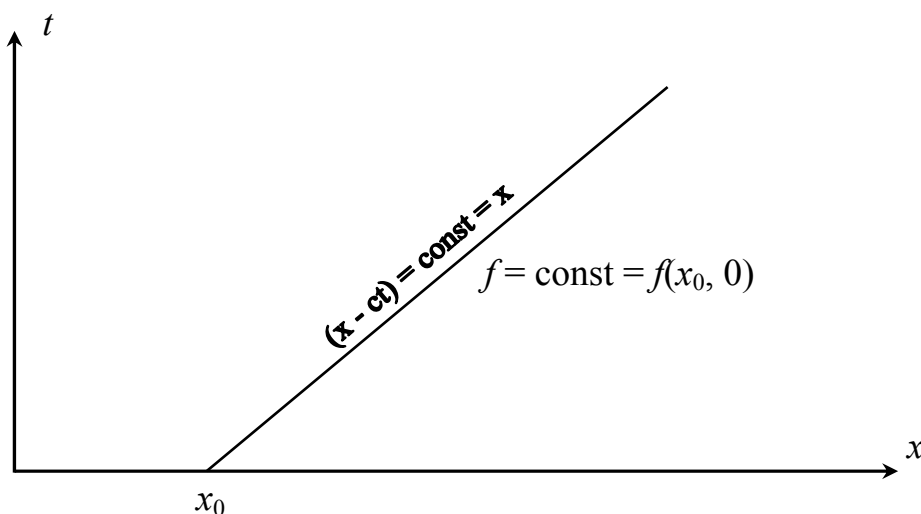


Рисунок 3.2.1 – Одна з характеристик лінійного рівняння (3.2.7)

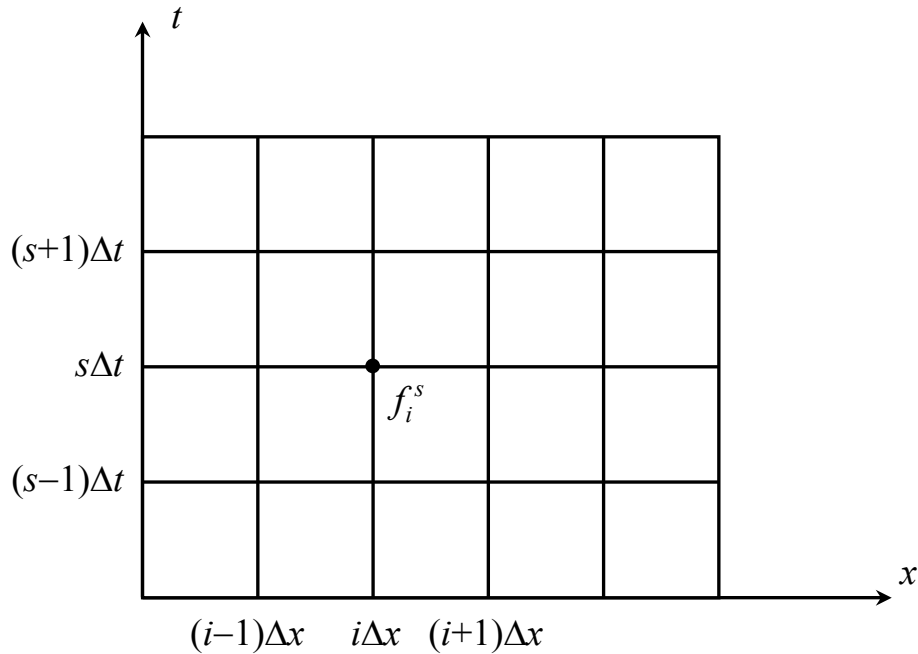


Рисунок 3.2.2 – Скінченнорізницева сітка для визначення наближеного розв'язку рівняння (3.2.7)

Цю схему можна також називати уперед спрямованою схемою уверх по потоку. Останні слова вказують на положення точки $i-1$ відносно швидкості адвекції. Схема (3.2.13) є тільки однією з багатьох можливих узгоджених скінченнорізницевих схем для даного диференціального рівняння. Існує багато інших схем, які дають наближення до досліджуваного диференціального рівняння при зменшенні приростів Δx , Δt до нуля, але тут вони розглядатися не будуть.

Оскільки для малих значень Δx , Δt скінченнорізницеве рівняння апроксимує відповідне диференціальне рівняння, можна очікувати, що його розв'язок буде також апроксимацією розв'язку цього рівняння. Розв'язок, який ми одержуємо за допомогою скінченнорізницевих схем, будемо у подальшому називати чисельним. Зручно вивчати властивості чисельних розв'язків у порівнянні з відомими розв'язками вихідних диференціальних рівнянь. У подальшому будемо їх називати точними розв'язками.

Різниця між чисельним і точним розв'язками є похибкою чисельного розв'язання

$$f_i^s - f(i\Delta x, s\Delta t). \quad (3.2.14)$$

Вона, як правило, є невідомою, але можна спробувати знайти міру точності схеми підстановкою точного розв'язку рівняння $f(\Delta x, \Delta t)$ до чисельної схеми. Оскільки цей розв'язок не буде точно задовольняти чисельно-

му рівнянню, то необхідно додати додатковий член для того, щоб рівняння задовольнялось. Позначимо цей член через ϵ . Використавши ці позначення стосовно до схеми (3.2.13), запишемо таке рівняння:

$$\epsilon = \frac{f(i\Delta x, (s+1)\Delta t) - f(i\Delta x, s\Delta t)}{\Delta t} + c \frac{f(i\Delta x, s\Delta t) - f((i-1)\Delta x, s\Delta t)}{\Delta x}. \quad (3.2.15)$$

Член ϵ називається похибкою апроксимації скінченнорізницевої схеми. Вона визначає, наскільки добре точний розв'язок задовольняє рівняння чисельної схеми, і, таким чином, визначає міру точності схеми.

Можна одержати зручнішу форму для опису похибки апроксимації. Для цього необхідно використати розкладення точного розв'язку у ряд Тейлора навколо центральної просторово-часової точки. Скориставшись вихідним диференціальним рівнянням для виключення головного члена, одержимо вираз для похибки апроксимації у такому вигляді:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_s \Delta t + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \right)_s (\Delta t)^2 + \dots - c \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i \Delta x - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_i (\Delta x)^2 + \dots \quad (3.2.16)$$

Очевидно, що залишилися допоміжні члени, які були "відсічені" раніше для того, щоб привести диференціальні рівняння у відповідність до скінченнорізницевих схем. Таким чином, схема (3.2.13) є схемою першого порядку точності. Можна записати

$$\epsilon = O(\Delta t) + O(\Delta x) \quad \text{або} \quad \epsilon = O(\Delta t, \Delta x).$$

Важливо розрізняти порядки точності у просторі та часі, особливо, коли найменші степені Δt і Δx не є однаковими. Як відзначалось раніше, необхідною умовою для узгодженості будь-якої схеми є перший порядок точності апроксимації.

3.3 Розв'язання скінченнорізницевих схем кроками за часом

Точність чисельного інтегрування рівнянь гідротермодинаміки методом сіток залежить від точності скінченнорізницевої апроксимації похідних як у просторі, так і за часом. Проте, як показали оцінки, вплив похибки скінченнорізницевого подання просторових похідних є істотнішим за похибки апроксимації похідних за часом. За деякими оцінками помилки чисельного інтегрування рівнянь гідротермодинаміки на 40% обумовлені скінченнорізницевою апроксимацією похідних у просторі і

тільки на 1% – за часом. Ураховуючи ці обставини, при побудові скінченно-різницьових схем для рівнянь гідротермодинаміки необхідно передусім приділяти увагу точності розрахунків похідних у просторі. Проте це не означає, що питанням побудови схем інтегрування за часом не треба приділяти увагу. Навпаки, як буде показано нижче, від характеру цих схем значною мірою залежать властивості чисельних розв'язків рівнянь гідротермодинаміки.

Схеми, які використовуються для апроксимації часових похідних у системі повних рівнянь, є відносно простими. Як правило, ці схеми мають другий або перший порядок точності. Пов'язано це з такими обставинами. По-перше, практика показала, що схеми з високим порядком точності часових похідних найчастіше є недостатньо ефективними при розв'язанні рівнянь з частинними похідними, але є дуже ефективними при розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь. Така різниця цілком може бути обґрунтована. Для отримання точного розв'язку звичайного диференціального рівняння потрібно знайти лише одну початкову умову. Отже, помилка чисельного розв'язання повністю визначається неадекватністю схеми. Що ж стосується рівнянь з частинними похідними, то зазначена помилка спричиняється як неадекватністю математичної моделі реальної атмосфери, так і недостатньою інформацією про початкові умови, оскільки останні відомі тільки у дискретних точках простору. Таким чином, збільшення точності схеми покращує тільки один з цих двох компонентів, через що ефект виявляється не таким істотним.

Другу причину, з якої не вимагається використання схеми високої точності для апроксимації похідних за часом, можна пояснити таким чином. Для того, щоб задовольнити умови стійкості, однієї з найважливіших властивостей різницьових схем, необхідно вибрати крок за часом істотно меншим, ніж це потрібно заради відповідної точності. Через обраний таким чином крок за часом інші помилки, наприклад, пов'язані з диференціюванням у просторі, виявляються значно більшими за помилки, обумовлені диференціюванням за часом. Отже, обчислювальні ресурси має сенс спрямувати найбільшою мірою на зменшення помилок диференціювання у просторі, ніж на збільшення точності диференціювання за часом. Проте, доцільно розглянути ці можливі схеми диференціювання за часом, оскільки, як зазначалося вище, вигляд цих схем значною мірою визначає властивості чисельних розв'язків диференціальних рівнянь.

Перед тим, як перейти до конкретних схем, наведемо деякі визначення, які будуть використані при подальшому викладенні матеріалу.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = \phi, \quad (c > 0). \quad (3.3.1)$$

Тут, як і вище у цьому розділі, $f = f(r, t)$ – розв'язок; $\phi = \phi(r, t)$ – відома функція; c – стала додатна величина; r – будь-яка просторова координата, $r = r(x, y, t)$; t – час.

Нехай розв'язок (3.3.1) потрібно знайти в області зміни незалежних змінних $(D + \Gamma) \times D_t$ (рис. 3.3.1). У цьому випадку область $(D + \Gamma)$ є відрізком прямої на осі r ($0 \leq r \leq R$), межами якого є точки $r = 0, r = R$. Областю змін часу D_t будемо вважати інтервал $0 < t \leq T$. У результаті задача формується таким чином. Розв'язок рівняння (3.3.1) в області $D \times D_t$ має задовольняти межові та початкові умови, які можна задати у вигляді:

$$\psi(r) = f(r, 0) \quad \text{в області } D \quad \text{при } t = 0; \quad (3.3.2)$$

$$g(r, t) = \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{на } \Gamma \times D_t. \quad (3.3.3)$$

Диференціальній задачі (3.3.1)-(3.3.3) відповідає скінченнорізницева задача. Для цього в області $(D + \Gamma) \times D_t$ будується дискретна просторово-часова сітка, вузлами якої є точки з індексами $q = 0, 1, \dots, Q$ ($q = r/\Delta r$), $s = 0, 1, \dots, S$ ($s = t/\Delta t$) (рис. 3.3.2). Тоді області D відповідає дискретна область D_q , тобто відрізок прямої r з вузлами $q = 1, 2, \dots, Q-1$; вузли на межі Γ_q мають координати 0 і Q . Безперервному часовому інтервалу D_t відповідає дискретний проміжок D_s з вузлами $s = 1, 2, \dots, S$. Функціям, диференціальним операторам, межовим та початковим умовам (3.3.1)-(3.3.3) відповідають сіткові функції, оператори, початкові та межові умови. У результаті ми маємо скінченнорізницеву задачу:

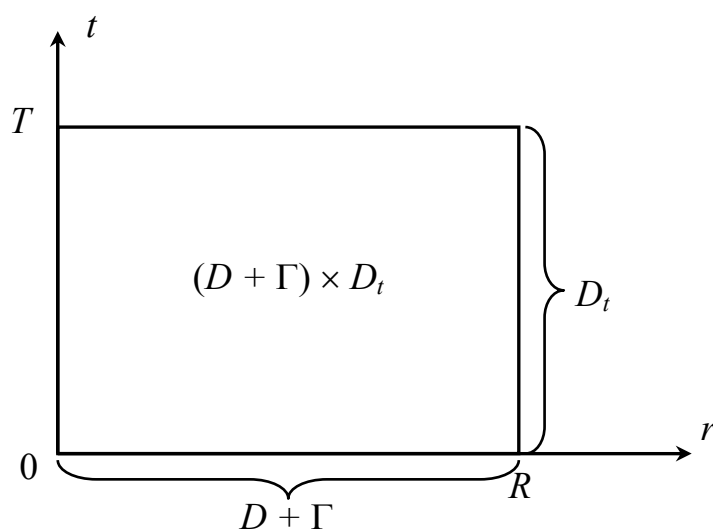


Рисунок 3.3.1 - Область визначення незалежних змінних r, t

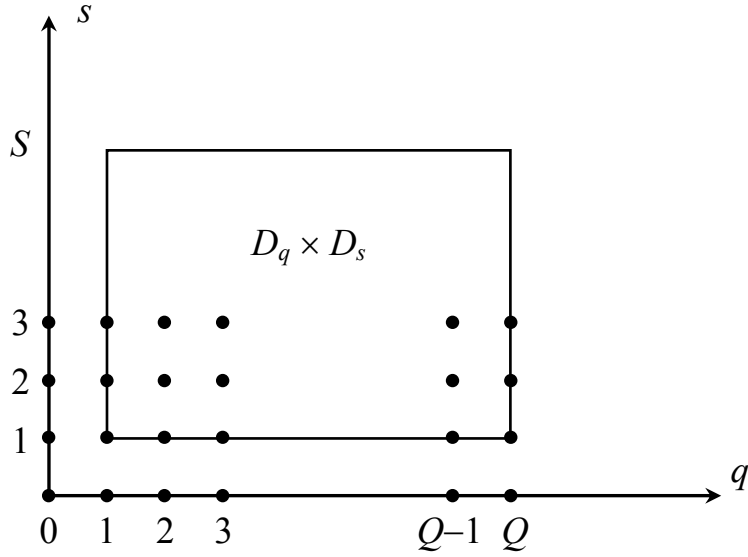


Рисунок 3.3.2 - Дискретна просторово-часова сітка $D_q \times D_s$, яка відповідає області $D \times D_t$

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\Delta r} = \phi_q^s \text{ в області } D_q \times D_s, \quad (3.3.4)$$

$$(q = 1, 2, \dots, Q-1; s = 1, 2, \dots, S);$$

$$\phi_q = f_q^0 \text{ в області } D, \quad (3.3.5)$$

$$(q = 1, \dots, Q-1; s = 0);$$

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = 0 \text{ на } \Gamma_q \times D_s, \quad (3.3.6)$$

у вузлах на межі $\Gamma_q \times D_s$ ($q = 0; Q$ та $s = 1, 2, \dots, S$).

Відзначимо, що скінченнорізницеву задачу, що відповідає диференціальній задачі (3.3.1)-(3.3.3), можна сформулювати в інших варіантах. Наприклад, можна подати диференціальне рівняння (3.3.1) за допомогою скінченнорізницевої схеми, в якій похідні апроксимуються центральними різницями, а не однобічними, як у (3.3.4).

Сукупність вузлів просторово-часової сітки, які розміщені на площині чи на прямій та відповідають фіксованому часу, має назву часового шару чи рівня. Для області визначення розв'язку задачі (3.3.4)-(3.3.6) шарами (рівнями) будуть називатися сукупності точок з індексами $q = 0, 1, 2, \dots, Q$ при фіксованих значеннях індексу s . За допомогою скінченнорізницевого рівняння (3.3.4), початкових та межових умов можна послідовно знайти розв'язки на рівнях $s = 0, 1, 2, \dots, S$:

$$\begin{aligned}
f_q^1 &= f_q^0 - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^0 - f_{q-1}^0) + \Delta t \phi_q^0; \\
\text{.....} \\
f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) + \Delta t \phi_q^s; \\
\text{.....} \\
f_q^S &= f_q^{S-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^{S-1} - f_{q-1}^{S-1}) + \Delta t \phi_q^{S-1}, \\
&(q = 1, 2, \dots, Q-1; s = 1, 2, \dots, S).
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

З виразу (3.3.7) видно, що чисельний розв'язок f_q^s задачі (3.3.4)-(3.3.6), який визначається на двовимірній сітці, подається набором розв'язків на одновимірних сітках з індексами $q = 1, 2, \dots, Q-1$, здобутих при фіксованих індексах s .

Таким чином, чисельний розв'язок, визначений на двовимірній сітці, розшарувався і замінився послідовністю розв'язків f^1, f^2, \dots, f^S , визначених на одновимірних сітках.

Процедури послідовного отримання розв'язків від шару до шару мають назву крокових чи методів кроків за часом. Кроковими є також скінченнорізницьові схеми, за допомогою яких реалізуються крокові процедури.

У задачі, яка розглядається, шукана сіткова функція f_q^{s+1} (на наступному рівні $s+1$ у точці q) однозначно визначається її значенням на рівні s у двох точках $q-1$ і q та відомою сітковою функцією ϕ (правою частиною) на рівні s у точці q .

За кількістю використаних у схемі шарів (рівнів) за часом і точок у просторі схеми можна поділити на двошарові, тришарові тощо. Схема (3.3.4) є двошарова чи дворівнева за часом та двоточкова у просторі.

Якщо у диференціальному рівнянні (3.3.1) замінити похідні центральними різницями, то буде мати місце тришарова (трирівнева) схема за часом і триточкова у просторі

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\Delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} = \phi_q^s. \tag{3.3.8}$$

Розв'язок за допомогою цієї схеми на рівні $s+1$ у точці q однозначно визначається значенням сіткової функції f_q^s на двох попередніх рівнях s та $s-1$ у трьох точках $q-1, q, q+1$, правою частиною ϕ_q^s і межовими умовами у двох точках $q = 0$ і $q = Q$

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) + 2\Delta t \phi_q^s. \quad (3.3.9)$$

Розрізняють три форми скінченнорізницевих схем часових похідних: явні, неявні та напівнеявні.

Схема має назву явної, якщо значення шуканої функції у майбутній момент часу (на рівні $s+1$) виражаються через відомі функції.

Розглянуті дві схеми (3.3.7)-(3.3.8) належать до явних, тому що шукані величини f_q^{s+1} визначаються безпосередньо (явно) за допомогою формул (3.3.7) і (3.3.8) відповідно (за початковими і межовими умовами та обчисленими на попередніх рівнях значеннями f_q^{s-1} , f_q^s , f_{q-1}^s , f_{q+1}^s , ϕ_q^s).

Якщо просторову похідну у диференціальному рівнянні віднести до майбутнього моменту часу (до рівня $s+1$), то шукану функцію неможливо виразити через відомі величини. Така схема має назву неявної.

Наприклад, коли у схемі (3.3.4) сіткові функції у просторовій похідній віднести до рівня $s+1$, то одержимо

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) + \Delta t \phi_q^s. \quad (3.3.10)$$

Ця схема є неявною, тому що містить дві невідомі величини (у точках q і $q-1$) і за її допомогою не можна безпосередньо з (3.3.10) обчислити невідоме значення сіткової функції в одній точці q у момент часу $s+1$. Для цього необхідно різницеве рівняння (3.3.4) записати для усіх точок ($q = 1, 2, \dots, Q-1$) та межові умови у точці $q = 0$, а потім розв'язувати систему цих рівнянь. У результаті визначаються значення шуканої функції на рівні $s+1$ (у майбутній момент часу) в цих точках ($q = 1, 2, \dots, Q-1$).

Напівнеявні – це схеми, в яких лінійні члени (не прогностичні) осереднюються за часом; при цьому використовуються значення сіткових функцій на двох рівнях за часом ($s+1$ та s чи $s+1$ та $s-1$), тобто одне зі значень сіткової функції є невідомим. Наприклад, напівнеявна схема рівняння (3.3.1) буде мати вигляд

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} \frac{1}{2} [(f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) + (f_q^s - f_{q-1}^s)] + \Delta t \phi_q^s. \quad (3.3.11)$$

У метеорологічній практиці використовуються частково неявні схеми. Пояснимо суть таких схем на прикладі першого рівняння руху наведеного у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \ell v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.3.12)$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_{нл} + f_{л}. \quad (3.3.12')$$

Тут $f_{нл}$ - нелінійний член ($u \cdot \partial u / \partial x$), а $f_{л}$ - лінійні члени ($\ell v - \partial \Phi / \partial x$). У скінченнорізницевій формі (3.3.12') запишеться таким чином:

$$u_q^{s+1} = u_q^s - \Delta t \frac{1}{2} (f_{нл}^s + f_{л}^{s+1}).$$

Це дворівнева схема першого порядку точності по Δt . Тут нелінійні члени апроксимуються явно, а лінійні - неявно. Порівняння цієї схеми з (3.3.11) показує, що напівнеявні та частково неявні схеми за своєю суттю є близькими.

3.4 Коректність, стійкість і збіжність скінченнорізницевої задачі. Методи дослідження обчислювальної стійкості

3.4.1 Загальні положення

Як відомо, вихідна система рівнянь гідротермодинаміки, що використовується з метою гідродинамічного прогнозу, є системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Така система "рівнянь погоди" не піддається аналітичному розв'язанню, тому доводиться звертатися до наближених (чисельних) методів, суть яких зводиться до заміни (апроксимації) диференціальних операторів деякими скінченнорізнице-вими співвідношеннями. При такому підході спочатку коректно сформульована диференціальна змішана крайова задача замінюється різницевою, яка є системою алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих функцій Φ, u, v, τ, T . Пояснимо це на прикладі неоднорідного диференціального рівняння у вигляді

$$Lf = \varphi, \quad (3.4.1)$$

де L - диференціальний оператор будь-якого типу (лінійний чи нелінійний);
 f - шукана функція;

φ – права частина, яка вважається відомою.

У формі (3.4.1) може бути надане будь-яке з п'яти повних рівнянь погоди, які розрізняються між собою виглядом диференціального оператора L , що містить похідні за простором та у часі, і структурою правих частин. Нагадаємо, що в задачі гідродинамічного прогнозу незалежними змінними є час (t) і просторові координати (x і y – горизонтальні; z , p , ζ або σ – вертикальна), які позначимо у загальному випадку через r . Тоді $f = (r, t)$, $\varphi = \varphi(r, t)$.

Розв'язок диференціальної задачі (3.4.1) шукається в області D змін просторових незалежних змінних r і t (рис. 3.3.1). Область D залежно від вигляду розв'язуваної задачі може бути об'ємом (тривимірною областю), поверхнею (двовимірною) чи лінією (одновимірною), а межами Γ – відповідно поверхня, лінія або точка.

Розв'язок задачі (3.4.1) (в області D), як відомо з курсу вищої математики, буде однозначним, якщо він задовольняє початкові (у момент часу t_0) і межові умови (на контурі Γ). У такій постановці задачу (3.4.1) називають зміщеною крайовою чи нестационарною крайовою задачею.

Постановка початкових і межових умов визначається характером розв'язуваної задачі та конкретним виглядом рівняння. У загальному випадку їх можна подати таким чином:

$$\begin{aligned} f(r, t_0) &= \tilde{f}(r) \quad \text{у } D \text{ при } t = t_0; \\ f(r, t) &= g(r, t) \quad \text{на } \Gamma \times D_\tau. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Будемо тепер розв'язувати задачу (3.4.1)-(3.4.2) різницевиими методами на просторово-часовій сітці $(D_h + \Gamma_h) \times D_\tau$, вузлами якої є точки з індексами q (просторові координати) і s (час). При цьому $q = r/\Delta r$, $s = t/\Delta t$ (Δr – просторовий крок; Δt – крок за часом). На такій сітці визначаються сіткові функції f_q^s і φ_q^s та сіткові оператори L_h , \tilde{f}_q , g_q^s . Таким чином, крайовій диференціальній задачі (3.4.1)-(3.4.2) ставиться у відповідність різницева крайова задача:

$$\begin{aligned} L_h \cdot f_q^s &= \varphi_q^s; \\ f_q^0 &= \tilde{f}_q \quad \text{в } D_h \text{ при } s = 0; \\ f_q^0 &= g_q^s \quad \text{на } \Gamma_h \times D_\tau. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Перехід від диференціальної задачі (3.4.1)-(3.4.2) до різницевої (3.4.3) здійснюється за допомогою розглянутої раніше процедури апроксимації просторових і часових похідних, що входять у оператори L , φ , \tilde{f} і g для

сукупності вузлів просторово-часової сітки $(D_h + \Gamma_h) \times D_\tau$.

Від вибору тих чи інших схем апроксимації просторово-часових похідних, а також від методу розв'язання самої різницевої задачі, в остаточному підсумку залежить принципово важливе питання – чи є адекватною різницева задача вихідній диференціальній задачі? Інакше кажучи, чи зберігається фізична суть задачі (3.4.1)-(3.4.2) при її заміні різницевою задачею (3.4.3)? У деяких випадках це є далеко неочевидним, тому різницева задача повинна задовольняти умови узгодженості, коректності, стійкості та збіжності. Тільки при виконанні цих вимог можна розраховувати на одержання чисельного розв'язку f_q^s , близького до точного $f(r, t)$, коли помилка чисельного розв'язання $f_q^s - f(r, t)$ буде мінімальною.

Надамо стислу характеристику введених вище понять. Різницева схема вважається поставленою коректно, якщо при малих Δt і Δr розв'язок існує, він є єдиним і безперервно залежить від початкових та межових умов і правої частини рівняння. У цьому випадку кажуть про узгодженість диференціальної та різницевої задач.

Чисельний розв'язок і скінченнорізницева схема, за допомогою якої він отриманий, зветься збіжними, якщо при зменшенні прирощення незалежних змінних, тобто при кроках сітки $\Delta t, \Delta r \rightarrow 0$, помилка апроксимації узгоджених скінченнорізницевоїх схем може бути якомога меншою для фіксованої кількості кроків за часом. Таким чином, якщо має місце оцінка за нормою помилки чисельного розв'язку

$$\|f_q^s - f(q\Delta r, s\Delta t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \Delta t, \Delta r \rightarrow 0, \quad (3.4.4)$$

то скінченнорізницева схема вважається збіжною.

Отже, поняття збіжності чисельного розв'язання найтіснішим чином пов'язане зі збіжними скінченнорізницевоїми схемами. Останнє означає, що не кожна скінченнорізницева схема може бути збіжною, це буде показано нижче при різницевому розв'язанні лінійного рівняння адвекції, коли точний розв'язок $f(r, t)$ є відомим.

В обчислювальній математиці стійкість скінченнорізницевоїх схем для диференціальних рівнянь визначається безперервною залежністю чисельних розв'язків від початкових та межових умов і від правих частин рівнянь, тобто існують межі, які не можуть перевищити компоненти початкової функції, що перетворюються під час розрахунків.

Така обмежуюча вимога до скінченнорізницевоїх схем зводиться до виконання нерівності

$$\|f_q^s\|_{F_h} \leq c_1 \|\tilde{f}_q^0\|_{\tilde{F}_h} + c_2 \|g_q^s\|_{G_h} + c_3 \|\phi_q^s\|_{\Phi_h}, \quad (3.4.5)$$

де c_1, c_2, c_3 – сталі величини, що не залежать від величини сіткових кроків $(\Delta t, \Delta r)$ і значень правої частини, початкових та межових умов (відповідно \tilde{f} і g);

$F_h, \tilde{F}_h, G_h, \Phi_h$ – скінченновимірні простори сіткових функцій $f_q^s, \tilde{f}_q^0, g_q^s, \Phi_q^s$;

$\| \cdot \|$ – норми або максимуми модулів.

З (3.4.5) випливає, що для фіксованих кроків у часі та просторі чисельний розв'язок зі збільшенням кроків у часі залишається обмеженим за будь-яких початкових та межових умов і правих частин різницевої задачі (3.4.3).

Умова стійкості скінченнорізницевої схем істотно спрощується, якщо відомо, що такий розв'язок диференціальної задачі існує і є обмеженим. Тоді замість (3.4.5) може бути сформульована умова для помилки чисельного розв'язку $f_q^s - f(q \cdot \Delta r, s \cdot \Delta t)$, яка в цьому випадку буде обмеженою.

На жаль, отримати такий розв'язок для нелінійних диференціальних рівнянь, крім деяких окремих випадків, практично не вдається, тому довести стійкість і збіжність чисельних розв'язків дуже складно. У цьому випадку нелінійні рівняння лінеаризуються, а потім доводиться стійкість та збіжність лінійних рівнянь. Одержані при цьому висновки є підґрунтям для оцінки через чисельні експерименти умов збіжності та стійкості вихідних нелінійних рівнянь.

При аналізі умов стійкості лінійних рівнянь П. Лакс довів важливу теорему, згідно з якою, якщо лінійна різницева задача поставлена коректно і скінченнорізницева схема задовольняє умові узгодженості, то її стійкість є необхідною і достатньою умовою збіжності чисельного розв'язання. Саме тому нижче докладно викладаються питання стійкості скінченнорізницевої схем, що найбільш широко використовуються в атмосферних моделях.

Розглянемо докладніше властивість скінченнорізницевої схем, а саме збіжність. Похибки апроксимації узгодженої схеми можуть бути зведені до найменших значень, якщо зменшувати приріст по координатах. Але це не означає, що зменшується й похибка чисельного розв'язку. Тому необхідно повернутися до аналізу похибки (3.2.14).

Спробуємо відповісти на два запитання:

1. Як буде поводитися похибка (3.2.14), якщо для фіксованого сумарного часу прирости наближаються до нуля $(\Delta x, \Delta t \rightarrow 0)$.

2. Як буде поводитися похибка (3.2.14), коли для фіксованих значень кількість часових кроків буде зростати.

Відповідь на перше запитання залежить від збіжності чисельного розв'язання. Якщо похибка (3.2.14) спрямована до нуля зі зменшенням розмірів сітки (при $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$), то такі розв'язки називаються збіжними.

Аналогічно, якщо схема дає збіжний розв'язок для будь-яких початкових умов, то вона теж називається збіжною.

Узгодженість схеми не гарантує її збіжність. Продемонструємо це на простому прикладі.

Розглянемо схему (3.2.13). Її похибка апроксимації (3.2.16) наближається до нуля при зменшенні кроків Δx , Δt і можна зробити висновок, що це узгоджена схема. На рис. 3.4.1 наведена характеристика $x - ct = x_0$, яка відповідає початковій умові при $x_0 = t = 0$.

Для чисельного розв'язання рівняння (3.4.7) будемо використовувати явну скінченнорізницьову схему (3.3.10), яку подамо у вигляді

$$f_i^{s+1} = f_i^s - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_i^s - f_{i-1}^s).$$

Для цієї схеми будемо вважати, що $\Delta x = 100$ м, $\Delta t = 20$ с. Припустимо, що в точці з координатами $x = 400$ м і $\Delta t = 40$ с чисельний розв'язок знаходиться на характеристиці $x - ct = 0$. Ця точка на рисунку позначена буквою A . Розглянемо, як формується чисельний розв'язок у цій точці.

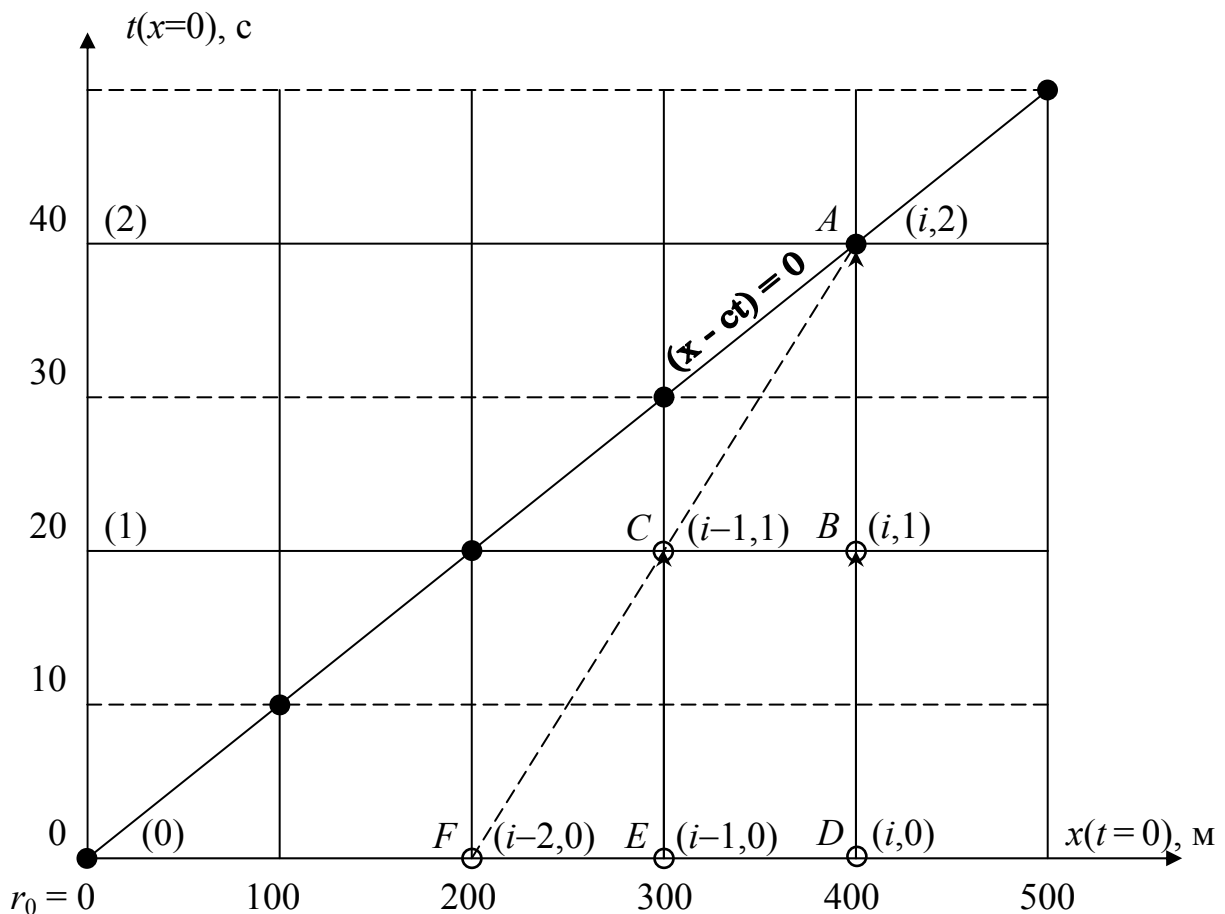


Рисунок 3.4.1 - Характеристика $x - ct = x_0$ ($x_0 = 0$).

Залежність розв'язку в точці A від початкових умов ($c = 10$ м с⁻¹)

Оскільки $\Delta t = 20$ с, то розв'язок у цій точці визначатиметься величинами функції у точках B і C . У свою чергу, розв'язок у зазначених точках буде визначатися початковими величинами функції f у точках D , E та E , F згідно з рис. 3.4.1. На ньому в дужках наведені безрозмірні координати для точок, обведених колами. Перша координата відповідає x , а друга t . Вигляд формул для обчислення функції у зазначених точках A , B буде таким:

$$f_i^1 = f_i^0 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-1}^0 - f_i^0); \quad (3.4.6)$$

$$f_{i-1}^1 = f_{i-1}^0 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-2}^0 - f_{i-1}^0), \quad (3.4.7)$$

де f_i^0 , f_{i-1}^0 , f_{i-2}^0 - значення функцій у початковий момент часу в точках D , E , F відповідно.

Розв'язок у точці A подамо таким чином:

$$f_i^2 = f_i^1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_i^1 - f_{i-1}^1). \quad (3.4.8)$$

Аналіз рис. 3.4.1 показує, що характеристика $x - ct = \text{const}$ проходить через початок координат, а отже точний розв'язок у точці A дорівнює величині f , яку ми отримаємо у точці з координатами $(0,0)$. Чисельний розв'язок згідно з (3.2.13) обчислюється за допомогою значень функцій f у точках, які відмічені колами. Область, помічена штриховою лінією, яка охоплює усі точки обліку, називається областю залежності чисельної схеми. Точка початку координат не належить до цієї області і тому не може впливати на чисельний розв'язок у точці A . Інакше кажучи, чисельний розв'язок у точці A не залежить від початкових умов у точці $x = 0$, а точний розв'язок - залежить. Тому не беручи до уваги узгодженість схеми (3.4.8), чисельний розв'язок може як завгодно відрізнятись від точного і не буде до нього спрямовуватися при $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Дійсно, якщо просторові та часові кроки зменшити пропорційно (наприклад, удвічі), то область залежності залишиться без змін. Таким чином, доки співвідношення між кроками залишається без змін, зменшення кроків сітки не може викликати зменшення похибки чисельного розв'язку. Його спричиняє порушення критерію стійкості Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ), який у нашому випадку дорівнює

$$\alpha = \frac{\Delta t \cdot c}{\Delta x} = \frac{20 \text{ с} \cdot 10 \text{ м с}^{-1}}{100 \text{ м}} = 2 > 1.$$

Очевидно, необхідна умова збіжності будь-якої схеми полягає у тому, щоб характеристика, яка визначає точний розв'язок у точках сітки, знаходилася б усередині області залежності чисельного розв'язку для цієї точки. Як випливає з рис. 3.4.1, ця умова буде виконуватися, коли нахил штрихової лінії, що обмежує область залежності,

$$c\Delta t \leq \Delta x.$$

Чисельний розв'язок у точці A буде залежати від початкових умов у точці $x_0 = 0$ і при $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ він буде наближатися до точного.

Таким чином, збіжність чисельного розв'язку визначається не розміром кроків у просторі та часі, а їх співвідношенням, від якого залежить нахил прямих, що обмежують область залежності чисельного розв'язку. На рис. 3.4.1 при $\alpha = 2$ ця пряма проходить через точки A, C, F , а при $\alpha = 1$ співпадає з характеристикою. Неважко впевнитися у тому, що при $\alpha \leq 1$ умова збіжності буде виконуватися за будь-яких початкових умов (необов'язково при $x_0 = 0$) і будь-яких нахилах характеристик.

3.4.2 Дослідження стійкості скінченнорізницевого схем

Як відзначалося вище, дослідження стійкості скінченнорізницевого схем найкоректніше виконувати для лінійних диференціальних рівнянь, для яких можуть бути одержані аналітичні (точні) розв'язки. Це дозволить порівняти точні та різницеві розв'язки і відібрати з набору скінченнорізницевого схем ті з них, які відповідають умові стійкості.

За вихідне диференціальне рівняння візьмемо однорідне лінійне рівняння одновимірної адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (3.4.9)$$

де c – стала швидкість переносу якоїсь субстанції вздовж координати r . Вибір рівняння (3.4.9) є не випадковим, оскільки у рівняннях гідродинаміки адвективні члени є одними з головних.

За початкову умову візьмемо

$$\text{при } t = 0 \quad f(r, 0) = A(0)e^{imr}, \quad (3.4.10)$$

де $A(0)$ – амплітуда хвилі;
 $m = 2\pi/L$ – хвильове число;

L – довжина хвилі;

$$i = \sqrt{-1}.$$

Таким чином, у момент часу $t = 0$ розв'язок є одновимірною хвилею з параметрами $A(0)$, m , L .

Отже крайова задача (3.4.9)-(3.4.10) сформульована коректно. Розв'язок рівняння (3.4.9) шукається методом поділу змінних через

$$f(r, t) = \varphi_1(r) \cdot \varphi_2(t). \quad (3.4.11)$$

Підставляючи (3.4.11) у (3.4.9) і ділячи на $\varphi_1(r) \cdot \varphi_2(t)$, одержимо

$$\frac{1}{\varphi_2(t)} \frac{d\varphi_2(t)}{dt} = -c \cdot \frac{1}{\varphi_1(r)} \cdot \frac{d\varphi_1(r)}{dr} = -k = \text{const}. \quad (3.4.12)$$

Виконаємо інтегрування за відповідною координатою кожного з двох рівнянь в (3.4.12):

$$\int \frac{1}{\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dt} dt = -\int k dt; \quad \int \frac{1}{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dr} dr = \int \frac{k}{c} dr$$

або

$$\int \frac{d(\ln \varphi_2)}{dt} dt = -\int k dt; \quad \int \frac{d(\ln \varphi_1)}{dr} dr = \frac{k}{c} \int dr. \quad (3.4.13)$$

Інтеграл в (3.4.13) є табличними, тому можна легко побачити, що

$$\ln \varphi_2(t) = \ln A_2 - kt; \quad \ln \varphi_1(r) = \ln A_1 - \frac{k}{c} r. \quad (3.4.14)$$

де A_1 і A_2 – сталі інтегрування.

Розв'язок (3.4.14), отже, можна записати у вигляді:

$$\varphi_2(t) = A_2 e^{-kt}; \quad \varphi_1(r) = A_1 e^{-\frac{kr}{c}}. \quad (3.4.15)$$

З урахуванням (3.4.15), розв'язок (3.4.11) набуває вигляду

$$f(r, t) = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{k\left(\frac{r}{c} - t\right)}. \quad (3.4.16)$$

Задовольняючи початкову умову (3.4.10), не складно переконатися, що $k = imc$; $A_1 \cdot A_2 = A(0)$. З урахуванням отриманих виразів для констант k , A_1 ,

A_2 перепишемо остаточно аналітичний розв'язок (3.4.16)

$$f(r, t) = A(0) \cdot e^{im(r-ct)}. \quad (3.4.17)$$

З (3.4.17) видно, що розв'язок крайової задачі (3.4.9)-(3.4.10) є прогресивною хвилею сталої амплітуди $A(0)$, яка переміщується вздовж координати r зі сталою швидкістю c .

У подальшому буде використаний інший запис точного розв'язку (3.4.17), а саме

$$f(r, t) = A(t) \cdot e^{imr}, \quad (3.4.18)$$

де $A(t) = A(0) \cdot e^{imct}$.

У цьому випадку розв'язок є хвилею з амплітудою $A(t)$, яка змінюється у часі. Якщо в (3.4.17) перейти від лінійної швидкості c до колової частоти $\sigma = 2\pi/T \equiv -cm$ (тут T - період коливань), то його (розв'язок) можна подати у вигляді

$$f(r, t) = A(0) \cdot e^{i(mr+\sigma t)}. \quad (3.4.19)$$

Тепер визначимо додатково деякі важливі висновки, які знадобляться у подальшому. Так, якщо від незалежних змінних r, t перейти до нових змінних $\eta \equiv r - ct, t$, то, маючи на увазі, що $f(r, t) \equiv F(\eta, t)$, з рівняння (3.4.9) випливає, що

$$\frac{\partial F(\eta, t)}{\partial t} = 0, \quad (3.4.20)$$

тобто F не залежить від часу, а залежить тільки від η і, отже, $F = F(\eta)$. Таким чином, можна записати

$$f(r, t) = F(\eta) \equiv F(r - ct). \quad (3.4.21)$$

З (3.4.21) випливає, що при $r - ct = \text{const}$, $f(r, t) = \text{const}$, тобто якщо розглядати розв'язок на координатній площині r, t , то на прямих лініях $r - ct = \text{const}$ розв'язок залишається незмінним. Ці прямі у математиці називаються характеристиками, константа правих частин яких однозначно визначається початковими умовами.

Отже, головний висновок полягає у тому, що на конкретних характеристиках, що виділяються з їх сім'ї виглядом початкових умов, розв'язок крайової задачі не змінюється, тобто при $r - ct = \text{const}$, $f(r, t) = \text{const}$.

Використовуючи одержані вище результати, зручно розглянути додатково питання про збіжність чисельного розв'язання.

3.4.3 Збіжність чисельного розв'язання

Нагадаємо, що помилка апроксимації узгоджених скінченнорізницевих схем за належного їх вибору може бути скільки завгодно малою при зменшенні просторово-часових сіткових кроків. Однак це зовсім не означає, що при цьому буде зменшуватися й похибка чисельного розв'язку $f_q^s - f(q \cdot \Delta r, s \cdot \Delta t)$, якщо $\Delta r \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Ця похибка буде зменшуватися лише у тому випадку, якщо скінченнорізницева схема, використана для чисельного розв'язання, буде збігатися за будь-яких гладких початкових умов. Це є принциповим доповненням до згаданого вище (п. 3.4.1) поняття збіжності.

Покажемо на прикладі розв'язання лінійного рівняння одновимірної адвекції (3.4.9), що не будь-яка узгоджена скінченнорізницева схема може забезпечити збіжність чисельного розв'язання.

Отже, як було показано вище, точне розв'язання задачі (3.4.9) сходять до його сталості на конкретній характеристиці, яка залежить від вигляду початкових умов. Тепер запишемо чисельний розв'язок цієї ж задачі з використанням явної скінченнорізницевої схеми зі спрямованою уперед різницею за координатами r і t "проти потоку"

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{c\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \quad \text{при } c > 0. \quad (3.4.22)$$

Ця схема є узгодженою через те, що при $\Delta t \rightarrow 0$ і $\Delta r \rightarrow 0$ помилка апроксимації просторово-часових похідних наближається до нуля.

Для різницевої схеми (3.4.22) візьмемо $\Delta r = 100$ м, $\Delta t = 20$ с, $c = 10$ мс⁻¹. На рис. 3.4.2 подано характеристику (точний розв'язок) $r - ct = r_0$, що відповідає початковій умові при $r_0 = 0$, $t = 0$. Припустимо, що у точці 1 ($r = 400$ м, $t = 40$ с) чисельний розв'язок збігається з точним, тобто знаходиться на характеристиці $r - ct = 0$. Простежимо технологію (вона подана на рис. 3.4.2 тонкими штриховими лініями) одержання чисельного розв'язку у цій точці. Згідно з різницевою схемою (3.4.22) розв'язок у точці 1 відповідно до прийнятих вище значень Δr , Δt і c буде визначатися значеннями функції f_q^s (точка 2) і f_{q-1}^s (точка 3). У свою чергу розв'язок у цих точках буде визначатися значеннями функції відповідно у точках 4, 5 і 5, 6.

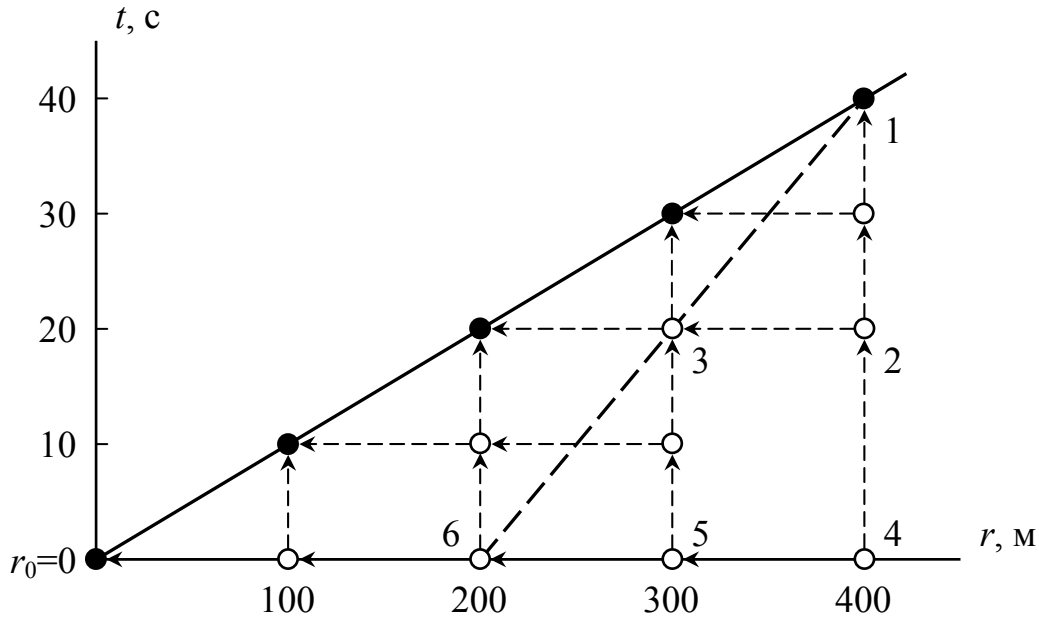


Рисунок 3.4.2 – Залежність чисельного розв'язку від параметрів різницевої схеми "проти потоку"

Таким чином, чисельний розв'язок на рис. 3.4.2 зображено прямою, що проходить через точки 1, 3 і 6 (жирна штрихова лінія) і не збігається з характеристикою. Отже, чисельний розв'язок не залежить від початкової умови при $r = 0$, $t = 0$ і тому не є збіжним. Це обумовлено тим, що при прийнятих параметрах узгоджена різницева схема "проти потоку" не є збіжною.

Зменшимо тепер крок за часом вдвічі, тобто $\Delta t = 10$ с, при зберіганні двох інших, тобто $c = 10$ м с⁻¹, $\Delta r = 100$ м. Технологія побудови чисельного розв'язку за схемою (3.4.22) у цьому випадку показана також тонкими штриховими лініями, а вузли сітки, що при цьому використовуються, подані відкритими колами. Точки, що відповідають чисельному розв'язку, зображені закритими колами.

Як можна бачити, при таких параметрах чисельний розв'язок збігається з характеристикою, тобто з точним розв'язком. Отже, чисельний розв'язок є збіжним, так само як і сама скінченнорізницева схема. Виникає природне питання: чому при використанні однієї й тієї ж різницевої схеми можна одержати збіжний і розбіжний чисельний розв'язок?

Усе полягає у виконанні вимоги стійкості різницевих схем. Математиками Курантом, Фрідріхсом і Леві у 1928 р. на прикладі лінійних диференціальних рівнянь було показано, що різницеві схеми будуть стійкими, якщо співвідношення між кроками за часом і за простором задовольняють таку нерівність:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \quad (3.4.23)$$

У літературі з чисельних методів цей вираз дістав назву критерію КФЛ (аббревіатура з початкових букв прізвищ авторів).

У прикладі різницевої схеми, що розглядається, як неважно переко-
натися за допомогою прямої підстановки параметрів c , Δt і Δr у (3.4.23), у
першому випадку КФЛ = 2 > 1, а у другому КФЛ = 1. Отже, збіжність чи-
сельного розв'язку цілковито забезпечується узгодженістю й стійкістю
різницевих схем, тобто коли виконується теорема Лакса, про яку йшла
мова у п. 3.4.1.

Отже, дослідження умов стійкості різницевих схем є першорядною
задачею практики одержання чисельних розв'язків. Ці питання докладно
викладаються нижче.

3.4.4 Дослідження обчислювальної стійкості скінченнорізницевих схем

При дослідженні стійкості лінійних різницевих схем використовую-
ються, як правило, чотири методи: прямий, енергетичний, матричний і
метод Неймана. Перші три методи, маючи свої переваги та недоліки, є
складнішими і тому менш розповсюдженими за метод Неймана, який, не
поступаючись за ефективністю першим методам, має у порівнянні з ни-
ми очевидну перевагу – він є простим і наочним при практичному вико-
ристанні. Тому в цьому розділі йому віддається перевага.

Цей метод використовується у тому випадку, коли є відомим (як у
нашому випадку) точний розв'язок лінійної задачі, який підставляється у
різницеву схему. При цьому аналіз стійкості різницевої схеми зводиться
до оцінки модуля множника переходу λ , що пов'язує амплітуди A на су-
міжних часових рівнях ($s, s+1$).

Спочатку повернемося до точного розв'язку, який поданий у ви-
гляді (3.4.19):

$$f(r, t) = A(0) \cdot e^{imr} \cdot e^{i\sigma t}$$

або

$$f(r, t) = A(t) \cdot e^{imr},$$

звідки

$$A(t) = A(0) \cdot e^{i\sigma t}. \quad (3.4.24)$$

У термінах різницевої схеми, вважаючи, що:

$$A(0) \equiv A^s; \quad A(t) \equiv A^{s+1}; \quad e^{i\sigma t} \equiv e^{i\sigma \cdot s \Delta t}.$$

це співвідношення перепишеться у вигляді

$$A^{s+1} = A^s \cdot e^{i\sigma \cdot s \Delta t}. \quad (3.4.25)$$

Тут множник переходу $\lambda = e^{i\sigma \cdot s \Delta t}$.

Використовуючи відому формулу Ейлера $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$, одержимо вираз для модуля λ

$$|\lambda| = \sqrt{\cos^2(\sigma s \Delta t) + \sin^2(\sigma s \Delta t)} \equiv 1. \quad (3.4.26)$$

Тут використана формула для модуля комплексного числа: $c = a + ib$; $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Отже, для точного розв'язку, який додержується сталості амплітуди за часом, $|\lambda| = 1$.

Згідно з методом Неймана береться таке: якщо для якоїсь різницевої схеми $|\lambda| \leq 1$, то вона вважається стійкою, тобто в таких схемах у процесі чисельного розв'язання кроками за часом ($s \cdot \Delta t$; $s = 0, 1, 2, \dots$) амплітуда первісного коливання не зростає. Якщо для скінченнорізницевої схеми $|\lambda| > 1$, тобто за часом відбувається зростання амплітуди, то така схема вважається нестійкою. Стійкі різницеві схеми ($|\lambda| \leq 1$) додатково підрозділяють на нейтральні ($|\lambda| = 1$) та дисипативні ($|\lambda| < 1$).

3.4.5 Нелінійна обчислювальна нестійкість

Вище вже згадувалось, що для нелінійних рівнянь дослідження обчислювальної нестійкості є надто утрудненим через неможливість, як правило, одержати аналітичний розв'язок. Саме з цієї причини питання стійкості досліджуються спочатку на лінійних моделях, а одержані при цьому результати потім розповсюджуються на розв'язки скінченнорізницевої задачі для нелінійних рівнянь. При цьому потрібно мати на увазі, що стійкість різницевої схеми для лінійних моделей є необхідною, але не достатньою умовою стійкості для нелінійних рівнянь внаслідок того, що не завжди стійка схема для лінійного рівняння буде стійкою для відповідного нелінійного рівняння. Нестійка ж схема для лінійного рівняння свідомо буде нестійкою й для нелінійного.

Вперше явище, яке дістало назву нелінійної обчислювальної нестійкості, відкрив Н. Філіпс при моделюванні процесів загальної цирку-

ляції атмосфери. Ця нестійкість виявлялася у вигляді невинувато рiзкого збiльшення енергiї у короткохвильовiй дiлянцi атмосферного спектра, що при тривалому (до 30 дiб) iнтегруваннi за часом нелiнiйних рiвнянь гiдродинамiки призводило до "вибуху" розв'язання. Серiєю чисельних експериментiв Н. Фiлiпс виявив, що причиною тому є ефект нелiнiйностi рiвнянь, якi iнтегруються.

Пояснимо природу нелiнiйної нестійкостi на прикладi нелiнiйного рiвняння одновимiрної адвекцiї у виглядi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.4.27)$$

Тут на вiдмiну вiд лiнiйного рiвняння одновимiрної адвекцiї (3.4.9) u є функцiєю координат x i t , тобто $u = u(x, t)$, а не сталою функцiєю.

При апроксимацiї просторових похiдних завжди виникають труднощi з визначенням на сiтцi коротких хвиль. Так, хвилi, довжини яких менше двох сiткових крокiв ($L \leq 2\Delta x$), або хвильовi числа $m = 2\pi/L \geq \pi/\Delta x$, неможливо подати на сiтцi. Дiйсно, нехай, наприклад, вихiдна функцiя $u(x, t)$ є синусоїдою з амплiтудою A

$$u(x, t) = A(t) \sin mx. \quad (3.4.28)$$

Для апроксимацiї похiдної $\partial u/\partial x$ вiзьмемо, наприклад, центральну рiзницю, що має другий порядок точностi $(\Delta x)^2$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (3.4.29)$$

де i – номер сiткового вузла вздовж осi x ;

Δx – сiтковий крок.

В той же час точний розв'язок цiєї похiдної згiдно з (3.4.28) має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A(t)m \cos mx \cong A(t)m \cos mi\Delta x. \quad (3.4.30)$$

Рiзницевий аналог (3.4.29) з урахуванням (3.4.28) можна подати, як

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{A}{2\Delta x} [\sin m(i+1)\Delta x - \sin m(i-1)\Delta x] = \frac{A}{\Delta x} \sin m\Delta x \cos mi\Delta x. \quad (3.4.31)$$

При перетвореннi (3.4.31) використана тригонометрична формула для $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.

Отже, з одного боку, є різницеве подання похідної $\partial u/\partial x$ (3.4.31), а з другого – точне (3.4.30). Знайдемо відносну помилку апроксимації:

$$\epsilon = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i}{\frac{\partial u}{\partial x}} = 1 - \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i}{\frac{\partial u}{\partial x}} = 1 - \frac{\sin m\Delta x}{m\Delta x}. \quad (3.4.32)$$

Безпосередньою підстановкою в (3.4.32) легко переконатися, що при $L = 6\Delta x - \epsilon \approx 0,1$; $L = 4\Delta x - \epsilon \approx 0,36$; $L = 2\Delta x - \epsilon \approx 1$.

Таким чином, відносна помилка збільшується зі зменшенням довжини хвилі, а хвилі, довжина яких дорівнює чи менше двох кроків сітки ($L \leq 2\Delta x$; $m \geq 2\pi/\Delta x$), взагалі не можна подати на сітці. Отже, за допомогою такої сітки можна описати хвилі з довжинами $L > 2\Delta x$ або $m = m_{\max} \sim 2\pi/L$. Які ж хвилі у такому разі описуються нелінійним членом $u \cdot \partial u/\partial x$? Для цього, використовуючи (3.4.28) та (3.4.30), одержимо

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = A^2(t) \cdot m \cdot \sin mx \cdot \cos mx = A^2(t) \cdot \frac{m}{2} \cdot \sin m'x, \quad (3.4.33)$$

де $m' = 2m$.

Таким чином, нелінійний член (вірніше, ефект нелінійної взаємодії різних гармонік) відтворює хвилі з хвильовим числом $m' = \frac{2 \cdot 2\pi}{L} \equiv \frac{2\pi}{L/2}$ або довжиною $L/2$, тобто вдвічі коротші хвилі, ніж можна розв'язати на сітці. Так, якщо у початковий момент часу хвильове число m задовольняло нерівність $\frac{m_{\max}}{2} < m \leq m_{\max}$, то за рахунок нелінійної взаємодії у процесі інтегрування за часом може виникнути хвиля з хвильовим числом $m > m_{\max}$, яка не може бути відтворена на сітці. З точки зору чисельного розв'язання – це хибні хвилі, які сіткою можуть бути ідентифіковані як більш довгі. Дійсно, будемо виходити з тотожності

$$\sin m'x \equiv \sin[2m_{\max} - (2m_{\max} - m')]x, \quad (3.4.34)$$

де, нагадаємо, $m_{\max} = \frac{2\pi}{L_{\max}} = \frac{2\pi}{2\Delta x} \equiv \frac{\pi}{\Delta x}$.

Ураховуючи, що $x = i \cdot \Delta x$ і використовуючи тригонометричну формулу для синуса різниці двох кутів, перепишемо (3.4.34) у вигляді

$$\sin m'i\Delta x \equiv \sin \frac{2\pi}{\Delta x} i\Delta x \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\Delta x} - m'\right) i\Delta x - \cos \frac{2\pi}{\Delta x} i\Delta x \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\Delta x} - m'\right) i\Delta x.$$

Але, оскільки $\sin \frac{2\pi}{\Delta x} i\Delta x \equiv \sin i2\pi = 0$; $\cos \frac{2\pi}{\Delta x} i\Delta x = 1$, то

$$\sin m' i\Delta x = -\sin\left(\frac{2\pi}{\Delta x} - m'\right) i\Delta x \equiv -\sin(2m_{\max} - m') i\Delta x. \quad (3.4.35)$$

Як випливає з (3.4.35), якщо значення шуканої функції є відомими тільки у вузлах сітки, то хвилі з хвильовими числами m' і $(2m_{\max} - m')$ не відрізняються. Таким чином, якщо за рахунок нелінійності генерується хвиля з хвильовим числом m' , то на сітці вона буде інтерпретована як хвиля з хвильовим числом $m^* = 2m_{\max} - m'$, тобто як більш довга хвиля. Рисунок 3.4.3 дає наочне уявлення про одержані вище висновки.

Як видно з рис. 3.4.3, хвильове число m^* можна подати як дзеркальне відображення хвильового числа m' відносно точки m_{\max} , тобто коротка хвиля, що генерується нелінійним членом ($L' < 2\Delta x$), на сітці буде відтворюватися як більш довга хвиля $L^* > 2\Delta x$, яка сітковим розв'язком буде відображатися як "реальна" фізична хвиля. Описаний ефект носить назву помилки хибного уявлення.

На закінчення для наочності демонстрації помилок хибного уявлення наведемо конкретний приклад. Нехай нелінійний член генерує хвилю з хвильовим числом $m' = \frac{2\pi}{4/3\Delta x} \left(L' = \frac{4}{3}\Delta x \right)$, тобто ця хвиля коротша, ніж може відобразити сітка ($m_{\max} = \pi/\Delta x$; $L = 2\Delta x$). Тоді за рахунок уявного зображення виникне хвиля з хвильовим числом $m^* = 2m_{\max} - m' = \frac{2\pi}{\Delta x} - \frac{6\pi}{4\Delta x} = \frac{2\pi}{4\Delta x}$ ($L^* = 4\Delta x$). Така "уявна" хвиля ($L^* > L$) у сітковому розв'язанні буде моделюватися як хвиля "реальна". Результати цих висновків подані на рис. 3.4.4.

Які ж наслідки помилок хибного уявлення у процесі інтегрування нелінійних рівнянь за часом?

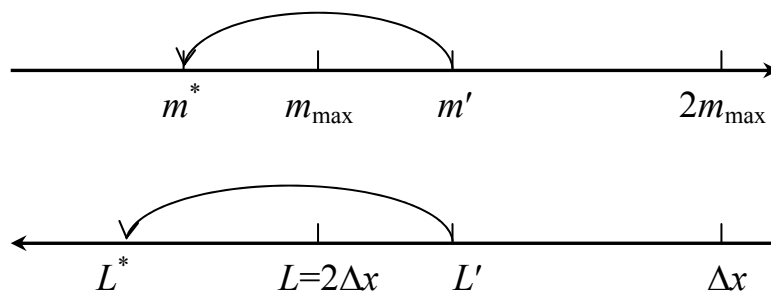


Рисунок 3.4.3 - Хибне уявлення хвилі з хвильовим числом $m' > m_{\max}$ хвилею з хвильовим числом $m^* = 2m_{\max} - m'$

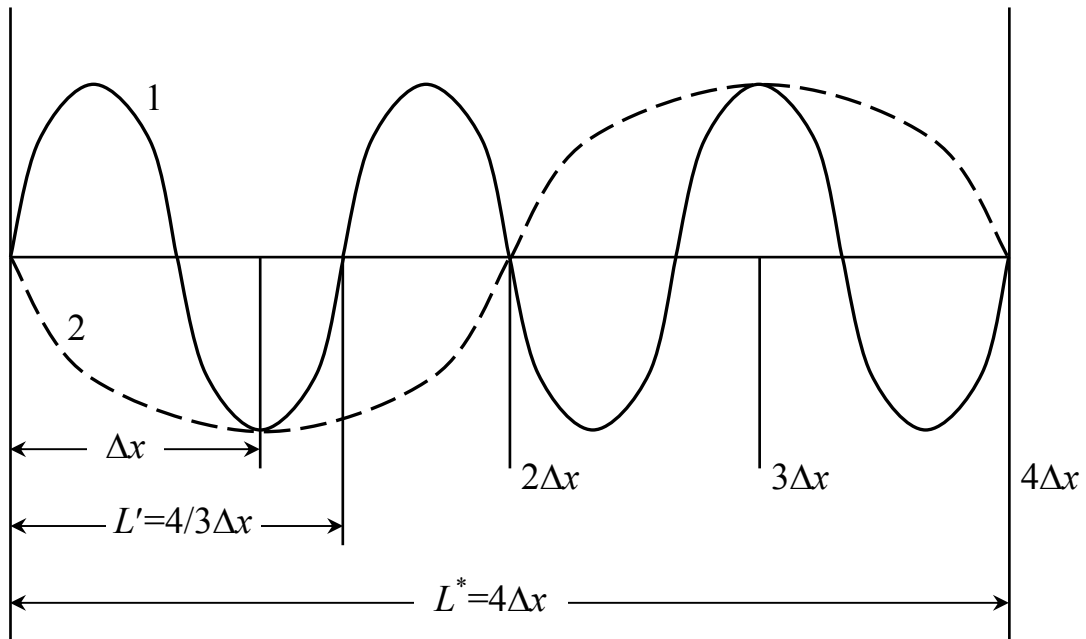


Рисунок 3.4.4 - Хибне уявлення хвилі $L' = 4/3\Delta x$ хвилею $L^* = 4\Delta x$

Н. Філіпсом та іншими авторами було здійснено декілька чисельних експериментів з виявлення викривлення енергетичного спектра за рахунок помилок хибного уявлення. Виявилось, що у процесі чисельного інтегрування відбувається швидке зростання амплітуди хвиль в інтервалі $2\Delta x < L < 4\Delta x$, тобто у тій ділянці атмосферного спектра, де найбільшою мірою позначається ефект хибного уявлення. При цьому відбувається не виправдано велике зростання енергії на цій ділянці спектра, тоді як у реальній атмосфері тут зосереджена відносно невелика енергія. Таким чином, внаслідок помилок хибного уявлення відбувається хибний приплив енергії до хвильових чисел не набагато менших, ніж m_{\max} , у результаті чого створюються штучні умови для їх еволюції. В остаточному підсумку це може призвести до "вибуху" розв'язання. Це, власне, й називається нелінійною нестійкістю.

3.5 Скінченнорізницева апроксимація похідних для різних типів сіток

При скінченнорізницевому інтегруванні рівнянь, що описують рух атмосфери, існує проблема, яка полягає у належному описі процесу квазігеострофічного пристосування. Завдяки цьому процесу в атмосфері установлюється характерний квазібездивергентний стан як результат дисперсії гравітаційно-інерційних хвиль. Таким чином, треба дослідити інтегрування рівнянь, що описують поведінку гравітаційно-інерційних

хвиль. У п. 1.3.3 вже згадувалось, що можна застосувати геострофічне наближення, яке відфільтровує гравітаційно-інерційні хвилі, внаслідок чого будуть одержані так звані фільтровані рівняння. Але у сучасних атмосферних моделях майже завжди використовуються системи повних рівнянь, в які залучені й негеострофічні ефекти. Тому швидкість розповсюдження гравітаційних та гравітаційно-інерційних хвиль, а також їх чутливість до різноманітних обчислювальних похибок потребує розглядання при побудові чисельних схем.

У цьому підрозділі обговоримо вплив апроксимації з застосуванням центральних просторових різниць на опис гравітаційно-інерційних хвиль. Для цього розглянемо систему лінеаризованих рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + \ell v; & \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\bar{H} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

де $\bar{H} = \text{const}$ – висота вільної поверхні.

Розглянемо просторовий розподіл змінних, тобто різні варіанти сіток, причому не є очевидним, яким чином слід аналізувати різні розподіли змінних. У нашому випадку головним є те, що система (3.5.1) є частиною повної системи примітивних рівнянь і в ній присутні складові сили Коріоліса, тобто нас цікавлять великомасштабні атмосферні рухи.

У великомасштабному плані примітивні рівняння допускають два різних типи руху: низькочастотні квазігеострофічні квазібездивергентні рухи та високочастотні гравітаційно-інерційні хвилі. Останні завжди збуджуються в атмосфері, але через те, що вони характеризуються дисперсією, локальна акумуляція хвильової енергії також має дисперсію, яка залежить від часу. Цей процес є відомим як геострофічне пристосування. Решта рухів перебуває у стані квазігеострофічного балансу і повільно змінюються у часі. У цьому підрозділі увага зосереджується на правильному моделюванні процесу адаптації полів, який у принципі описується рівняннями (3.5.1) для гравітаційно-інерційних хвиль у лінійному наближенні.

Отже, нас цікавлять як хвилі, викликані фізичними ефектами, так і хвилі, які виникають через недосконалість початкових даних та чисельних процедур. Проте особливості процесу пристосування вихідних полів (про який буде мова йти у четвертому розділі) не будуть мати тут такого великого значення, як точність опису результуючого квазігеострофічного потоку. Таким чином, тут досліджується вплив просторового розподілу залежних змінних на дисперсійні властивості гравітаційно-інерційних хвиль. При цьому будемо користуватися простішими центральними різ-

ницями, залишаючи похідну за часом у системі (3.5.1) у диференціальній формі.

Розглянемо п'ять варіантів розташування у просторі залежних змінних, які показані на рис. 3.5.1. Позначимо через d найкоротшу від-

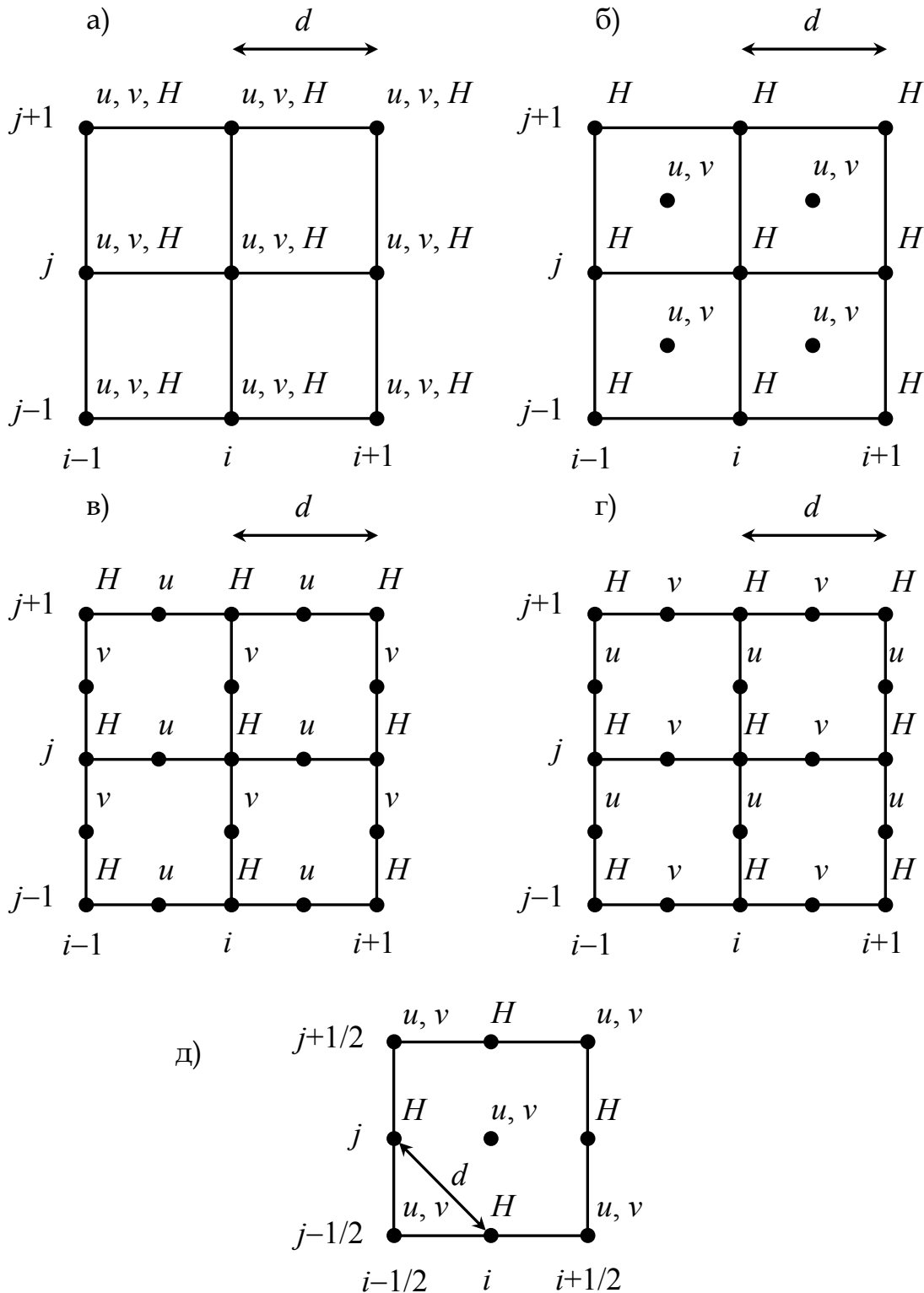


Рисунок 3.5.1 – П'ять типів сіток, що розглядаються для скінченнорізницевого розв'язання рівняння (3.5.1)

стань між точками, в яких визначені ті ж самі залежні змінні. Для кожної з п'яти сіток рис. 3.5.1 значення d' є однаковими. Відповідно, усі сітки мають однакову кількість залежних змінних на одиницю площі. Час розрахунку, необхідний для інтегрування, для кожної з сіток буде приблизно однаковим, але властивості одержаних розв'язків будуть, проте, відрізнятися внаслідок ефекту просторового розподілу змінних. Відзначимо, що сітки (б)-(д) одержали назву розхитаних. Використовуючи позначення, показані на рис. 3.5.1, визначимо центрований просторовий різницьевий оператор та оператор осереднення:

$$(\delta_x f)_{i,j} = \frac{1}{d'}(f_{i+1/2,j} - f_{i-1/2,j});$$

$$(\bar{f}^x)_{i,j} = \frac{1}{2}(f_{i+1/2,j} + f_{i-1/2,j}),$$

які застосуємо до усіх сіток. Тут d' є відстанню між точками, використаними для написання скінченних різниць. Таким чином, для сіток (а)-(г) відстань d' дорівнює кроку сітки d , а для сітки (д) вона дорівнює $\sqrt{2}d$.

Величини $(\delta_y f)_{i,j}$ і $(\bar{f}^y)_{i,j}$ визначаються аналогічним чином, але стосовно осі y . Нарешті, уведемо

$$(\bar{f}^{xy})_{i,j} = \overline{(\bar{f}^x)^y}_{i,j}.$$

Для кожної з п'яти сіток використаємо найпростіші центральні апроксимації для просторових похідних та коріолісових членів у (3.5.1) і одержимо такі різницьеві схеми:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\overline{\delta_x H^x} + \ell v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\overline{\delta_y H^y} - \ell u,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\bar{H}\left(\overline{\delta_x u^x} + \overline{\delta_y v^y}\right);$$
(3.5.2a)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\overline{\delta_x H^y} + \ell v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\overline{\delta_y H^x} - \ell u,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\bar{H}\left(\overline{\delta_x u^y} + \overline{\delta_y v^x}\right);$$
(3.5.2б)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\delta_x H + \ell\bar{v}^{xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\delta_y H - \ell\bar{u}^{xy},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\bar{H}(\delta_x u + \delta_y v);$$
(3.5.2в)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\overline{\delta_x H}^{xy} + \ell\overline{v}^{xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\overline{\delta_y H}^{xy} - \ell\overline{u}^{xy}, \quad (3.5.2\Gamma)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\overline{H}(\overline{\delta_x u}^{xy} + \overline{\delta_y v}^{xy});$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\delta_x H + \ell v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\delta_y H - \ell u, \quad (3.5.2\Delta)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\overline{H}(\delta_x u + \delta_y v).$$

Проаналізуємо спочатку одновимірний випадок, коли змінні u , v і H не залежать від y . Тоді маємо

$$u, v, H = u, v, H(x, t).$$

Рівняння (3.5.1) при цьому трансформується у систему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + \ell v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\ell u, \quad (3.5.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\overline{H} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Знайдемо (див. п. 1.3.1, а також курс "Хвильові процеси в атмосфері") хвильовий розв'язок у вигляді:

$$u(x, t) = \hat{U}e^{i(kx - \sigma t)};$$

$$H(x, t) = \hat{H}e^{i(kx - \sigma t)},$$

де k – горизонтальне хвильове число;

σ – циклічна (колова) частота;

\hat{U} , \hat{H} – сталі амплітуди.

Підставивши ці розв'язки, одержимо наступне рівняння для частот:

$$\left(\frac{\sigma}{\ell}\right)^2 = 1 + \frac{g\overline{H}}{\ell^2} k^2. \quad (3.5.4)$$

Через те, що радіус деформації

$$\lambda = \frac{\sqrt{g\overline{H}}}{\ell}$$

ніколи не перетворюється в нуль, частота гравітаційно-інерційних хвиль є функцією від k , що монотонно збільшується. Отже, групова швидкість $\partial\sigma/\partial k$ ніколи не перетворюється у нуль. Це є дуже важливим для опису процесу геострофічного пристосування, тому що при цьому виключається локальне насичення хвильової енергії.

Розглянемо тепер ефект просторових скінченних різниць у цьому випадку. Через те, що змінні не залежать від y , то системи (3.5.2) перетворюються у такі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g\overline{\delta_x H^x} + \ell v, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -\ell u, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\overline{H\delta_x u^x}; \end{aligned} \quad (3.5.5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g\delta_x H + \ell v, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -\ell u, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\overline{H\delta_x u}; \end{aligned} \quad (3.5.5б)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g\delta_x H + \ell \bar{v}^x, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -\ell \bar{u}^x, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\overline{H\delta_x u}; \end{aligned} \quad (3.5.5в)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g\overline{\delta_x H^x} + \ell \bar{v}^x, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -\ell \bar{u}^x, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\overline{H\delta_x u^x}; \end{aligned} \quad (3.5.5г)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g\delta_x H + \ell v, & \frac{\partial v}{\partial t} &= -\ell u, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\overline{H\delta_x u}. \end{aligned} \quad (3.5.5д)$$

Підстановка хвильових розв'язків у цю систему дає наступні вирази для частот:

$$\left(\frac{\sigma}{\ell}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 kd; \quad (3.5.6a)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\ell}\right)^2 = 1 + 4\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2}; \quad (3.5.6б)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\ell}\right)^2 = \cos^2 \frac{kd}{2} + 4\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{2}; \quad (3.5.6в)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\ell}\right)^2 = \cos^2 \frac{kd}{2} + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 kd; \quad (3.5.6г)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\ell}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \frac{kd}{\sqrt{2}}. \quad (3.5.6д)$$

Як можна бачити, безрозмірна частота σ/ℓ залежить від двох параметрів, kd і λ/d .

Проаналізуємо дисперсійні властивості, виражені цими формулами, для кожної з п'яти сіток. Довжина найкоротшої хвилі, що може бути допущеною по осі x , дорівнює $2d$ для сіток (а)-(г) та $\sqrt{2}d$ для сітки (д). Таким чином, ми повинні розглядати діапазон $0 \leq kd \leq \pi$ для сіток (а)-(г) та $0 \leq kd \leq \sqrt{2}\pi$ для сітки (д).

1) Сітка (а).

Частота має максимум при $kd = \pi/2$. Це означає, що групова швидкість дорівнює нулю для значення k , яке дорівнює $\pi/(2d)$.

Якщо гравітаційно-інерційні хвилі з приблизно таким хвильовим числом збуджуються поблизу якоїсь точки в області розрахунку, наприклад внаслідок впливу нелінійних ефектів, припливу тепла або орографії, то хвильова енергія буде залишатися поблизу цієї точки. Зовні цього максимуму для $\pi/2 < kd \leq \pi$ частота зменшується зі збільшенням хвильового числа. Отже, для цих хвиль групова швидкість має невірний знак. І на решті, двокрокова хвиля з $kd = \pi$ поводить себе як суто інерційне коливання, а її групова швидкість дорівнює нулю.

2) Сітка (б).

Частота збільшується монотонно в діапазоні $0 < kd \leq \pi$. Вона набуває максимуму на кінці цього інтервалу, так що групова швидкість перетворюється у нуль для двокрокової хвилі при $kd = \pi$.

3) Сітка (в).

Частота залежно від kd монотонно збільшується, якщо $\lambda/d > 1/2$, і зменшується, якщо $\lambda/d < 1/2$. Вона також набуває екстремуму при $kd = \pi$, пов'язаного з нульовою груповою швидкістю. При $\lambda/d = 1/2$ групова швидкість дорівнює нулю для усіх k .

4) Сітка (г).

Частота має максимум при $\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin kd = \frac{1}{4}$. Двокрокова хвиля при

$kd = \pi$ є стаціонарною.

5) Сітка (д).

Частота набуває максимуму при $kd = \pi/\sqrt{2}$. Найкоротша хвиля, що допускається розділенням, з $kd = \sqrt{2}\pi$ поводить себе подібно суто гравіта-

ційному коливанню і її групова швидкість також дорівнює нулю.

На рис. 3.5.2 наведена функція $|\sigma|/\ell$ у випадку $\lambda/d = 2$ для п'яти розглянутих сіток. Графіки наочно ілюструють недоліки сіток (г) і (а). Фазова швидкість та дисперсійні властивості решти трьох сіток є помітно кращими, хоч нульова групова швидкість має місце для усіх сіток. Отже, для кожної сітки мають місце труднощі при описі процесу геострофічного пристосування.

Різниця між результатами для сіток (б) і (д) є цікавою з того погляду, що ці дві сітки можуть бути одержані одна з іншої обертянням на кут $\pi/4$. Якщо розглядати одновимірний випадок, в якому залежні змінні є сталими вздовж прямої $y = x + c$, то одержимо для цих двох сіток результати, що прямо протилежними показаним на рис. 3.5.2. У загальному випадку введемо координатну систему x', y' обертянням системи x, y у додатному напрямку на кут $\pi/4$ і потім, використовуючи співвідношення:

$$u' = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v); \quad v' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-u + v),$$

можна перейти від змінних u, v, h до змінних u', v', h . Було показано, що така процедура трансформує (3.5.2б) у (3.5.2д) і, навпаки, (3.5.2д) у (3.5.2б). Таким чином, дисперсійні властивості сіток (б) і (д) можуть уважатися еквівалентними. Гравітаційно-інерційна хвиля в одній з цих сіток

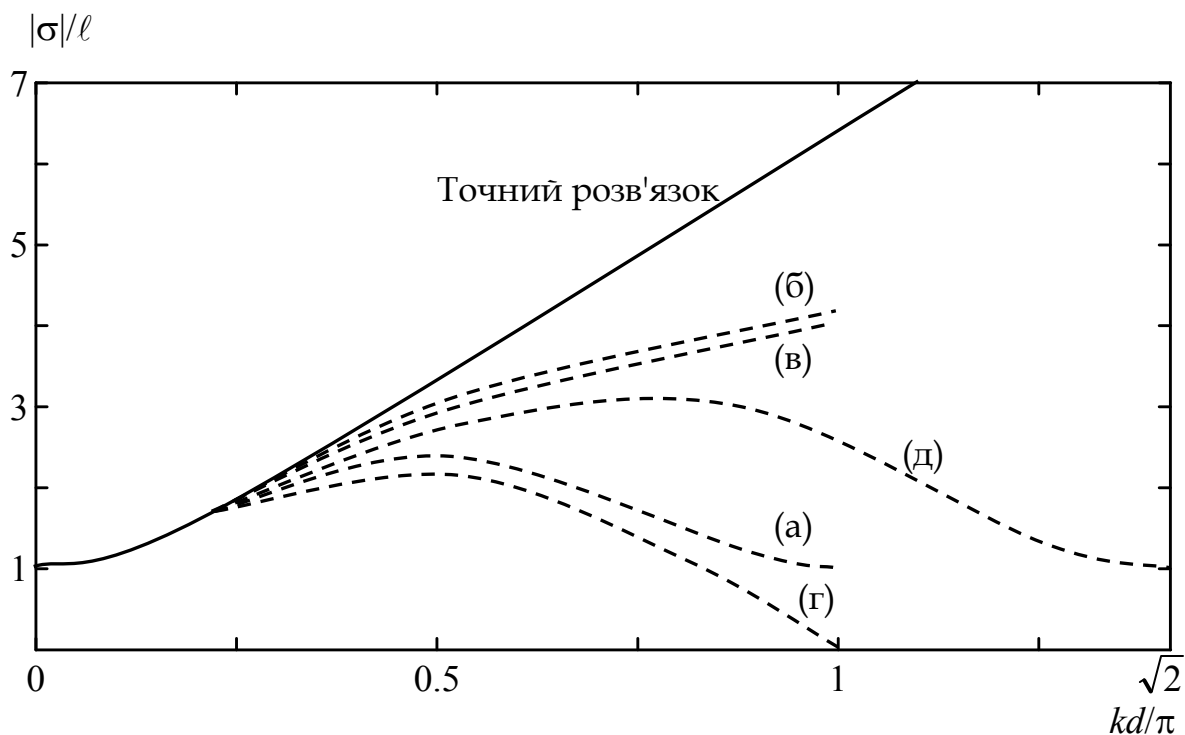


Рисунок 3.5.2 – Функції $|\sigma|/\ell$, задані виразами (3.5.4) та (3.5.6)

має фазову швидкість та дисперсійні властивості, ідентичні з аналогічною швидкістю в іншій сітці, але з фронтом, повернутим на кут $\pi/4$.

Розглянемо тепер двовимірний випадок, коли $u, v, H = u, v, H(x, y, t)$. Величини $|\sigma|/\ell$, які одержані у двовимірному випадку для точного розв'язку та для сіток (б) і (в), показані на рис. 3.5.3. Діаграма для сітки (д) може бути одержана обертанням діаграми для сітки (б) за годинниковою стрілкою. Діаграма для сітки (в) у двовимірному випадку показує, що ця сітка дає набагато кращу апроксимацію до точного розв'язку, ніж сітки (б) і (д). В діаграмі для сітки (б) штрихова лінія показує максимум $|\sigma|/\ell$ для

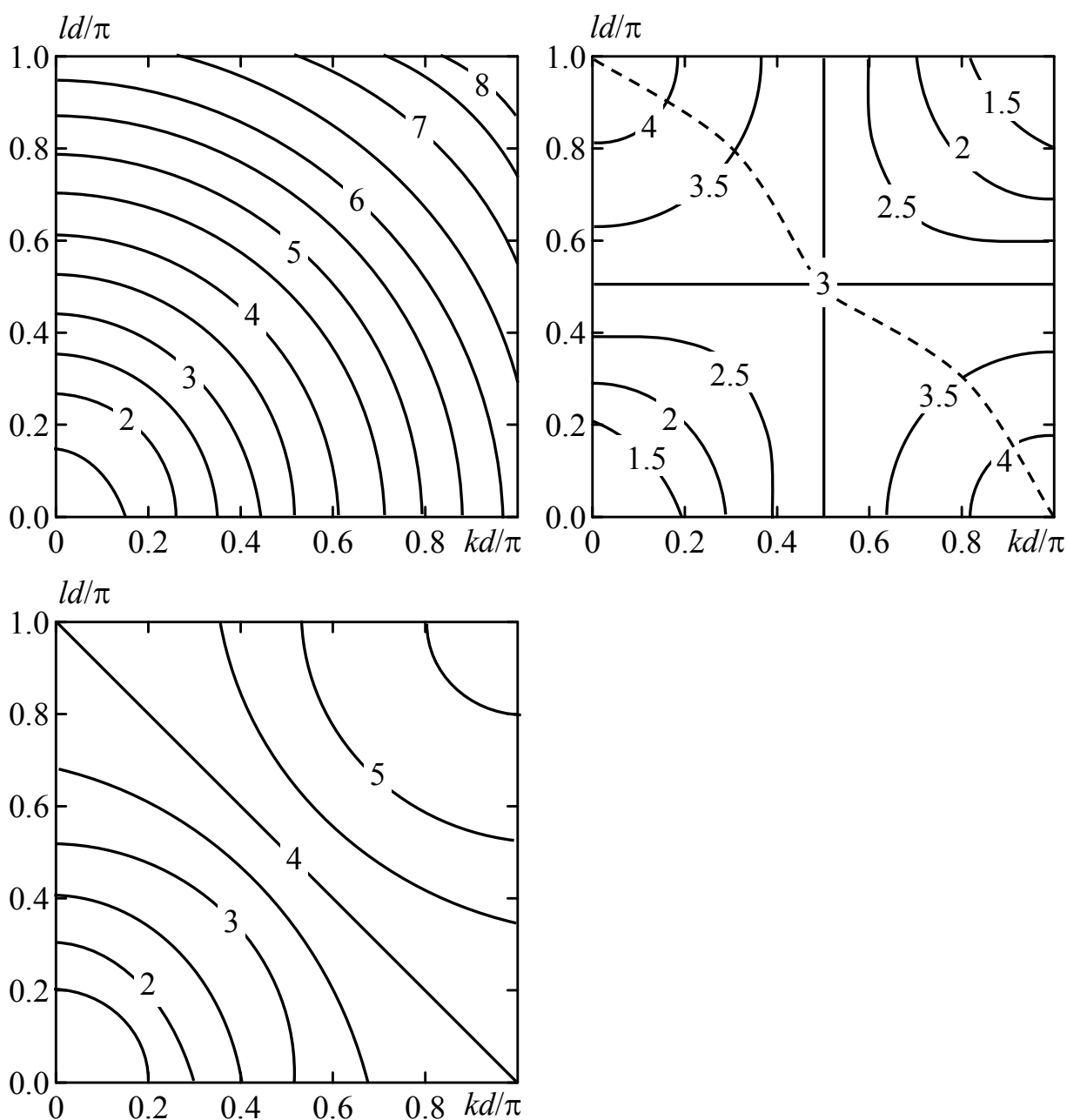


Рисунок 3.5.3 - Функції $|\sigma|/\ell$ для точного розв'язку та розв'язків систем (3.5.2б) та (3.5.2в) при $\lambda/d = 2$

заданого відношення l/k (тут k, l – хвильові числа по осям x, y відповідно). Відзначимо, що такої лінії немає у діаграмах для сітки (в) та для точного розв'язку. Такий максимум з'являється тільки у двох крайніх точках діаграми сітки (в). Отже, в сітці (в) немає хвиль, групова швидкість яких мала б невірний знак. Ця властивість, проте, залежить від параметра λ/d .

У стратифікованій атмосфері радіус деформації λ залежить від стійкості. Якщо стійкість є настільки слабкою, що λ/d має порядок одиниці або менше, то сітка (в) утрачає переваги, показані на рис. 3.5.3. Але для типових розмірів сітки, що використовуються в атмосферних моделях, це не має місця, тому сітка (в) є найкращою для опису процесу геострофічного пристосування.

Використання сіток (б) і (д) призводить до деяких труднощів, пов'язаних з хибними низькочастотними коливаннями найкоротших хвиль. Двокрокова хвиля, яка була стаціонарною як суто гравітаційна хвиля, поводить тепер як суто інерційне коливання. Проте, у будь-якому випадку більшість розхитаних сіток (за винятком сітки (г)) мають переваги перед нерозхитаною.

За вертикальною координатою більшість сучасних моделей також використовують розхитані сітки, в яких вертикальна швидкість, наприклад $\dot{\sigma}$, визначається на межах шарів, а прогностичні змінні – у центрі цих шарів. Такий тип сіток був впроваджений Лоренцем у 1960 р. (рис. 3.5.4а). Але надалі було показано, що у сітці Лоренца виникають паразитарні хвилі внаслідок невідчутності геопотенціалу в рівнянні гідростатики, а відповідно й прискорень складових швидкості вітру, до коливань температури з довжиною хвилі двох кроків по вертикалі. Тому у сучасних моделях використовується сітка Чарні-Філіпса (рис. 3.5.4б), в якій розхитання по вертикалі є більш узгодженим з рівнянням гідростатики і паразитарні хвилі не виникають.

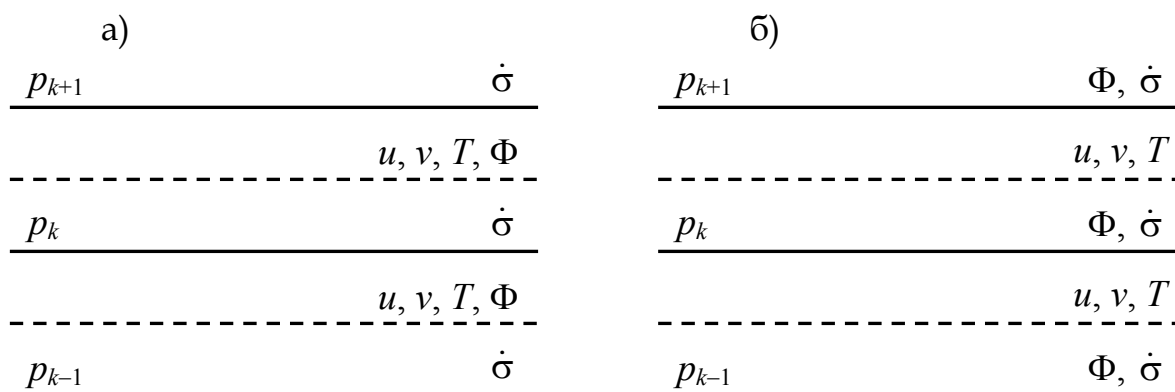


Рисунок 3.5.4 – Розхитані по вертикалі сітки

3.6 Схеми чисельного інтегрування за часом

Розглянемо докладніше основні схеми інтегрування за часом на прикладі рівняння у вигляді

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial t} = F \left[f(r,t), \frac{\partial f(r,t)}{\partial t}, t \right], \quad (3.6.1)$$

де через F позначені усі члени, які не містять похідних за часом.

У вигляді (3.6.1) можна подати будь-яке прогностичне рівняння з системи рівнянь гідротермодинаміки. Наприклад, якщо перше рівняння руху записати стосовно локальної похідної $\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} + lv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$, то відповідно до (3.6.1) роль функції f виконує зональна складова швидкості вітру u , а F – права частина рівняння.

Зауважимо, що усі схеми, які розглядаються далі, реалізуються методом кроків за часом. Через те, що розв'язок на часовому рівні $t+\Delta t$ чи $s+1$ (у безрозмірних координатах) однозначно визначається межовими умовами та розв'язками на попередніх рівнях (у попередні моменти часу), застосування цих схем будемо обговорювати на якомусь одному часовому кроці. Основні властивості схем стисло наведені у Додатку В.

3.6.1 Дворівневі схеми

Існують схеми, в яких використовують значення залежних змінних на двох часових рівнях s і $s+1$. Для того, щоб здійснити інтегрування на першому кроці за часом, можна використовувати тільки дворівневу схему. У цьому випадку знаходження функції на рівні $t+\Delta t$ зводиться до інтегрування рівняння (3.6.1) у межах від t до $t+\Delta t$

$$f(r, t + \Delta t) = f(r, t) + \int_t^{t+\Delta t} F \left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t \right] dt. \quad (3.6.2)$$

Спочатку перелічимо декілька схем, в яких не використовуються ітераційні процедури.

Схема Ейлера (чи схема з різницями, спрямованими уперед) має вигляд

$$f_q^{s+1} = f_q^s + F_q^s \Delta t. \quad (3.6.3)$$

Ця схема здобута з розв'язання (3.6.2), в якому безперервна функція F замінюється сітковою функцією F_q , віднесеною до моменту часу t (рівня s). Інакше кажучи, підінтегральний вираз у (3.6.2) є незмінним та дорівнює його значенню на нижній межі часового інтервалу. Отже, f у (3.6.3) не є центрованою відносно часового інтервалу і тому кажуть, що така схема є нецентрованою. Схема є явною (експліцитною), бо шукане значення f_q^{s+1} визначається через відоме сіткове значення F_q^s та початкову умову f_q^s .

Помилка апроксимації схеми (3.6.3) дорівнює $O(\Delta t)$, тобто ця схема має перший порядок точності по Δt .

Неявна схема. Якщо у (3.6.2) значення підінтегрального виразу F взяти сталим та рівним значенню F_q на верхній межі часового інтервалу $s+1$, то схема буде мати вигляд

$$f_q^{s+1} = f_q^s + F_q^{s+1} \Delta t. \quad (3.6.4)$$

Оскільки у схемі (3.6.4) F_q^{s+1} залежить від шуканої (невідомої) функції f_q^{s+1} , то ця схема є неявною (імпліцитною).

На відміну від явної схеми (3.6.3) неявна схема (3.6.4) не дозволяє одержати розв'язок рівняння у частинних похідних (3.6.1) в одній точці, тобто не можна безпосередньо обчислити f_q^{s+1} . У цьому випадку необхідно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь, які апроксимують диференціальні рівняння на усій множині внутрішніх вузлів просторової сітки з використанням межових умов. Це легко показати на прикладі лінійного рівняння (3.3.1), неявна схема якого має вигляд (3.3.10).

Помилка апроксимації у (3.6.4) дорівнює $O(\Delta t)$.

Схема трапецій. Якщо у виразі (3.6.2) підінтегральну функцію замінити сітковою та прийняти її сталою і такою, що дорівнює півсумі її значень на нижній та верхній межах часового інтервалу, то одержимо неявну дворівневу схему, яка здобула назву схеми трапецій

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \frac{1}{2}(F_q^s + F_q^{s+1}) \Delta t. \quad (3.6.5)$$

Ця неявна схема; її помилка апроксимації дорівнює $O[(\Delta t)^2]$.

Для того, щоб збільшити точність, можна побудувати ітераційні схеми. Дві схеми, які представлені нижче, побудовані таким самим чином, як і (3.6.4) і (3.6.5), але для того, щоб зробити ці схеми явними, використана ітераційна процедура.

Схема Мацуно (чи схема Ейлера з перерахунком). У цій схемі перший крок робиться за звичайною схемою Ейлера. Величина f , яка знайдена для часового рівня $s+1$, потім використовується для визначення наближеного значення $f_q^{(s+1)*}$. Це значення використовується для перерахунку f_q^{s+1} за схемою (3.6.4). Отже,

$$\begin{aligned} f_q^{(s+1)*} &= f_q^s + F_q^s \Delta t; \\ f_q^{(s+1)} &= f_q^s + F_q^{(s+1)*} \Delta t, \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

де $F_q^{(s+1)*} \equiv F[f_q^{(s+1)*}, (s+1)\Delta t]$.

Це явна схема має перший порядок точності по Δt .

Схема Хойну. Тут апроксимація будується з використанням схеми трапецій:

$$\begin{aligned} f_q^{(s+1)*} &= f_q^s + F_q^s \Delta t; \\ f_q^{(s+1)} &= f_q^s + \frac{1}{2}(F_q^s + F_q^{(s+1)*})\Delta t, \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

де $F_q^{(s+1)*}$ обчислюється з використанням $f_q^{(s+1)*}$.

Двокрокові схеми (3.6.6) і (3.6.7) складаються зі схем предиктора (перші формули) та схем коректора (другі формули). За допомогою схем предиктора обчислюються попередні значення $f_q^{(s+1)*}$, які потім уточнюються за допомогою схем коректора. Разом ці схеми мають назву схем "предиктор-коректор".

Схема (3.6.6) має перший порядок точності по Δt , а схема (3.6.7) – другий порядок.

Існують також схеми з кількома коректорами, наприклад трикрокова схема з двома коректорами:

$$\begin{aligned} f_q^{(s+1)*} &= f_q^s + F_q^s \Delta t; \\ f_q^{(s+1)**} &= f_q^s + F_q^{(s+1)*} \Delta t; \\ f_q^{(s+1)} &= f_q^s + F_q^{(s+1)**} \Delta t. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Помилка апроксимації схеми (3.6.8) становить $O(\Delta t)$.

3.6.2 Трирівневі схеми

Знаходження функції f у момент часу $t+\Delta t$ можна звести до інтегрування рівняння (3.6.1) у межах від $t-\Delta t$ до $t+\Delta t$

$$f(r, t + \Delta t) = f(r, t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} F \left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t \right] dt. \quad (3.6.9)$$

У цьому випадку, використовуючи значення $f(r, t-\Delta t)$, можна будувати трирівневі схеми, які мають переваги внаслідок використання цієї додаткової інформації. Як впливає з викладеного вище, при побудові цих схем використовуються значення сіткової функції f_q на трьох часових рівнях: $s-1, s, s+1$.

Схема центральних різниць (ЦР). Найпростіший спосіб одержати центровану оцінку інтеграла в (3.6.9) полягає у тому, що за F приймається стала величина, яка дорівнює його значенню у середній точці інтервалу $2\Delta t$. Це дає схему центральних різниць

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} + 2\Delta t F_q^s. \quad (3.6.10)$$

Помилка апроксимації цієї схеми становить $O[(\Delta t)^2]$. У теперішній час схема (3.6.10) найбільш широко використовується в атмосферних моделях. В англійській літературі ця схема має назву схема "чехарди".

Схема Адамса-Бешфорта. Ця схема є спрощеним варіантом первісної схеми Адамса-Бешфорта четвертого порядку точності. Спрощений варіант виходить, коли в (3.6.9) функція апроксимується значенням, одержаним у центральній точці інтервалу Δt лінійною екстраполяцією при використанні значень F_q^{s-1} та F_q^s

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \Delta t F_q^{s+1/2}. \quad (3.6.11)$$

Екстраполяцію функції F на часовий рівень $s+1/2$ пояснимо за допомогою рис. 3.6.1.

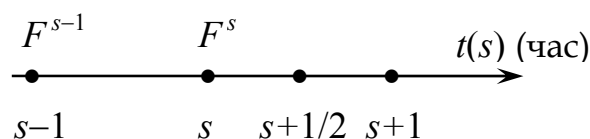


Рисунок 3.6.1 – Схема екстраполяції функції F на часовий рівень $s+1/2$

На першому етапі розраховується значення

$$F^{s+1/2} = F^s + \frac{(F^s - F^{s-1}) \Delta t}{\Delta t \cdot 2},$$

яке після скорочення Δt та зведення до спільного знаменника набуває вигляду

$$F^{s+1/2} = \frac{3}{2} F^s - \frac{1}{2} F^{s-1}. \quad (3.6.12)$$

Підставляючи (3.6.12) у (3.6.11), одержимо схему Адамса-Бешфорта:

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \Delta t \left(\frac{3}{2} F_q^s - \frac{1}{2} F_q^{s-1} \right). \quad (3.6.13)$$

Ця схема є явною, однокроковою, і має другий порядок точності по Δt .

Схема Лакса-Вендрофа. Ця схема належить до явних трирівневих двокрокових схем. Розглянемо застосування її на прикладі одновимірною лінійного рівняння адвекції у такому вигляді:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad c = \text{const}. \quad (3.6.14)$$

Схемою Лакса-Вендрофа передбачається два цикли (кроки) розрахунків. Спочатку будують розв'язання у проміжних точках у просторі та часі $q \pm 1/2$, $s+1/2$, використовуючи початкові умови у момент часу s у точках q , $q+1$, $q-1$ за допомогою таких скінченнорізницевих схем:

$$\begin{aligned} f_{q+1/2}^{s+1/2} &= \frac{1}{2} (f_{q+1}^s + f_q^s) - c \left(\frac{f_{q+1}^s - f_q^s}{\Delta r} \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ f_{q-1/2}^{s+1/2} &= \frac{1}{2} (f_q^s + f_{q-1}^s) - c \left(\frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\Delta r} \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}. \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

У цих схемах використовуються спрямовані різниці за часом і центральні – у просторі. Нагадаємо, що спрямовані – це односторонні різниці, які розраховуються за значеннями функції лише у двох точках у просторі чи часі.

Використовуючи отримані значення $f_{q+1/2}^{s+1/2}$, $f_{q-1/2}^{s+1/2}$ і початкову умо-

ву f_q^s , за допомогою схеми центральних різниць знаходиться розв'язок у точці q у момент часу $s+1$ (рис. 3.6.2)

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \left(\frac{f_{q+1/2}^{s+1/2} - f_{q-1/2}^{s+1/2}}{\Delta r} \right) \Delta t. \quad (3.6.16)$$

Схеми (3.6.15) є дворівневими за часом, мають перший порядок точності по Δt і другий порядок по Δr , а схема (3.6.16) є трирівневою за часом і другого порядку точності по Δt і Δr .

3.6.3 Схеми з спрямованими (нецентральними) різницями

При чисельному інтегруванні рівнянь, що описують процеси адвекції, доцільно використовувати такі схеми, в яких похідні у просторі апроксимуються нецентральними різницями з урахуванням напрямку переносу. Наприклад, для рівняння (3.6.14) залежно від знаку c похідну по r можна апроксимувати такими спрямованими різницями:

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \quad \text{при } c > 0; \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s) \quad \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

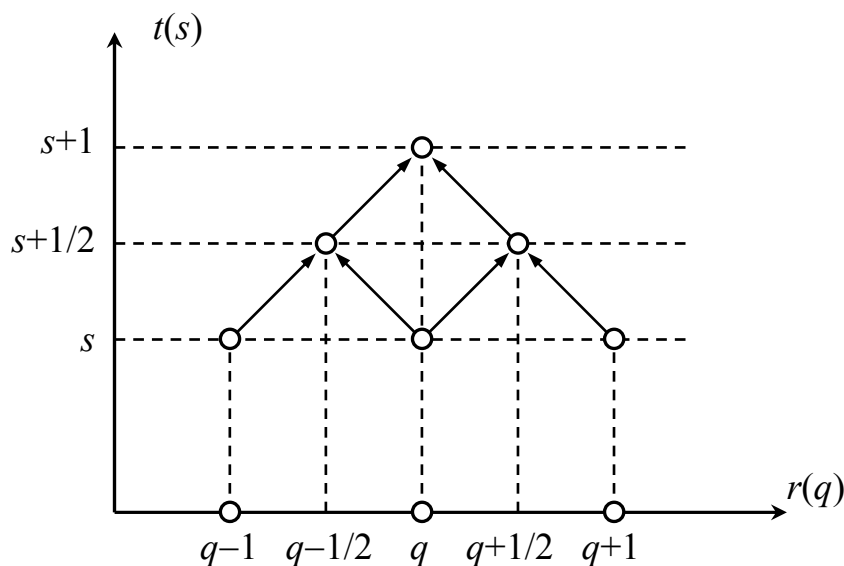


Рисунок 3.6.2 – Розміщення залежних змінних при використанні схеми Лакса-Вендрофа

Перше з рівнянь (3.6.17) містить різниці назад, а друге – уперед для апроксимації просторової похідної. Проте в обох випадках різниці спрямовані у той бік, звідки здійснюється перенос (адвекція) до центральної точки q (рис. 3.6.3). Тому схеми для рівнянь, що описують адвекцію, звуться схемами "проти потоку".

Схеми, в яких різниці за координатою r спрямовані у бік, куди відбувається перенос від точки q , мають назву схем "за потоком" (рис. 3.6.4) і записуються таким чином:

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s) \quad \text{при } c > 0; \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \quad \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

Схеми (3.6.17) і (3.6.18) є явними і мають перший порядок апроксимації по Δt і Δr .

Як показано Мезингером та Аракавою, стосовно рівняння адвекції схеми "проти потоку" (3.6.17) мають перевагу у порівнянні з центрованими просторовими схемами. Ця перевага полягає у тому, що коли використовується схема з різницями "проти потоку", збурення не може поширюватися у напрямку, протилежному фізичній адвекції. Таким чином, жодні паразитарні хвилі не будуть перекручувати чисельний розв'язок.

На закінчення розглянемо ще одну схему чисельного розв'язання одновимірного рівняння адвекції (3.6.14), яка має назву схеми "біжучого обчислення". Ця схема (неявна, першого порядку по Δr і другого по Δt) записується у вигляді

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left[\frac{f_q^{s+1} + f_q^s}{2} - \frac{f_{q-1}^{s+1} + f_{q-1}^s}{2} \right] \quad \text{при } c > 0. \quad (3.6.19)$$

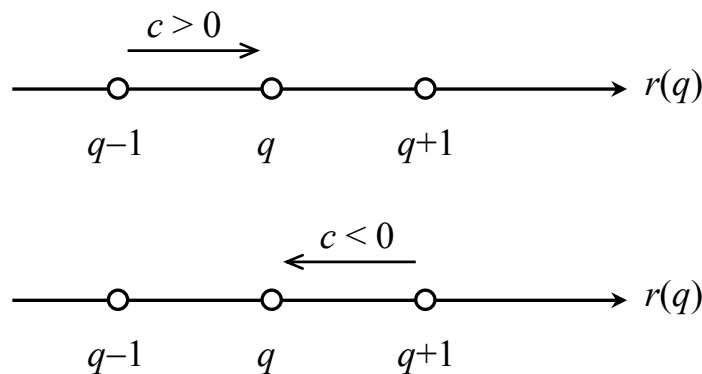


Рисунок 3.6.3 – Напрямок переносу у схемах "проти потоку"

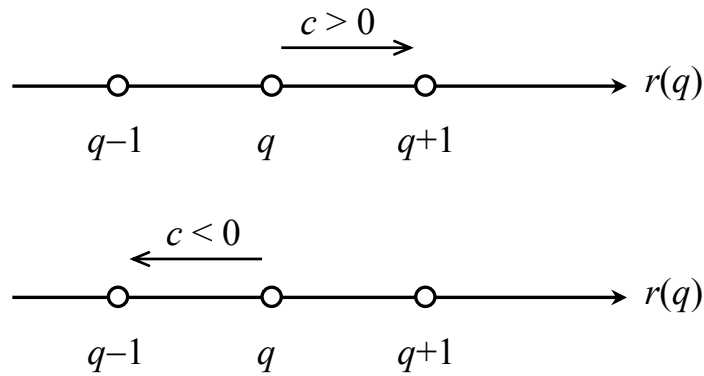


Рисунок 3.6.4 – Напрямок переносу у схемах "за потоком"

Ця неявна схема може бути переписана у вигляді рекурентного співвідношення, яке дозволяє послідовно будувати розв'язок для точок у порядку зростання q , не вдаючись до розв'язання систем рівнянь (3.6.19)

$$f_{q+1}^{s+1} = \frac{1 - c \frac{\Delta t}{\Delta r}}{1 + c \frac{\Delta t}{\Delta r}} f_q^s + \frac{c \frac{\Delta t}{\Delta r}}{1 + c \frac{\Delta t}{\Delta r}} (f_{q-1}^{s+1} + f_{q-1}^s). \quad (3.6.20)$$

Схеми "біжучого обчислення" можуть бути використані для багатовимірних рівнянь.

Потрібно відзначити, що розглянуті у цьому розділі схеми не охоплюють усі можливі види схем інтегрування. Більш того, при розв'язанні складіших рівнянь у частинних похідних або систем таких рівнянь можуть бути побудовані інші часові чи просторово-часові різницеві схеми, які відрізняються (іноді істотно) від схем, що визначені для простих рівнянь (3.3.1), (3.6.11), (3.6.14).

3.6.4 Обчислювальна стійкість різних схем чисельного інтегрування

Тепер проаналізуємо стійкість скінченнорізницевої схеми на прикладі рівняння одновимірної адвекції (3.4.9).

Явні скінченнорізницеві схеми.

1) Схема Ейлера.

За цією схемою рівняння (3.4.9) запишеться у вигляді

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\mu}{2} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s). \quad (3.6.21)$$

Тут і далі $\mu = c\Delta t/\Delta r$. У цій схемі однобічна різниця використовується при апроксимації часової похідної і центральна – для просторової. Використаємо очевидні співвідношення:

$$\begin{aligned} f_q^s &= A^s e^{imq\Delta r}; & f_{q+1}^s &= A^s e^{im(q+1)\Delta r} \equiv A^s e^{imq\Delta r} \cdot e^{im\Delta r}; \\ f_{q-1}^s &= A^s e^{im(q-1)\Delta r} \equiv A^s e^{imq\Delta r} \cdot e^{-im\Delta r}; & f_q^{s+1} &= A^{s+1} e^{imq\Delta r}, \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

які підставимо у (3.6.21). Після скорочення на спільний множник $e^{imq\Delta r}$ одержимо

$$A^{s+1} = A^s \left[1 - \frac{\mu}{2} (e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}) \right]$$

або з використанням формули Ейлера $(e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}) = 2i \sin m\Delta r$

$$A^{s+1} = A^s (1 - i\mu \sin m\Delta r) \equiv A^s \cdot \lambda. \quad (3.6.23)$$

Переходячи до модулів, співвідношення (3.6.23) запишемо у вигляді

$$|A^{s+1}| = |A^s| \cdot |\lambda|,$$

де

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \mu^2 \sin^2(m\Delta r)}. \quad (3.6.24)$$

З (3.6.24) видно, що при будь-яких μ значення $|\lambda| > 1$. Отже, схема Ейлера є абсолютно нестійкою.

2) Схема центральних різниць.

За цією схемою рівняння (3.4.9) запишеться у вигляді

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - \mu (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s). \quad (3.6.25)$$

З урахуванням (3.6.23) і додаткового співвідношення

$$f_q^{s+1} = A^{s-1} \cdot e^{imq\Delta r} \quad (3.6.26)$$

після підстановки у (3.6.25) одержимо

$$A^{s+1} = A^{s-1} - \mu \cdot A^s (e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}) \equiv A^{s-1} - 2i\mu \cdot A^s \sin m\Delta r. \quad (3.6.27)$$

Тут присутні амплітуди на трьох часових рівнях ($s, s-1, s+1$), тому необхідно скористатися додатковими очевидними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} A^s &= A^0 e^{i\sigma s \Delta t}; & A^{s+1} &= A^0 e^{i\sigma(s+1)\Delta t} \equiv A^0 e^{i\sigma s \Delta t} \cdot e^{i\sigma \Delta t}; \\ A^{s-1} &= A^0 e^{i\sigma(s-1)\Delta t} \equiv A^0 e^{i\sigma s \Delta t} \cdot e^{-i\sigma \Delta t}. \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

Після підстановки (3.6.28) у (3.6.27) неважко одержати

$$2i \sin \sigma \Delta t = -2i\mu \sin m \Delta r$$

або

$$\sin \sigma \Delta t = -\mu \sin m \Delta r,$$

звідки

$$\sigma = \frac{1}{\Delta t} \arcsin(-\mu \sin m \Delta r). \quad (3.6.29)$$

Амплітуда коливань за часом не буде зростати тільки тоді, коли σ буде набувати реальних значень, тобто $\sigma = \sigma_r$. Дійсно, оскільки $A(t) = A_0 e^{i\sigma t}$, то при $\sigma = \sigma_r$ ($\sigma = -cm$) $A(t) = A_0 e^{-icmt}$, тобто амплітуда не зростає за часом. Якщо σ є уявним числом, тобто $\sigma = \sigma_i \equiv i\sigma$, то $A(t) = A_0 e^{cmt}$, що відповідає умові зростання амплітуди коливання.

Таким чином, схема з центральними різницями буде стійкою (відсутність умов зростання амплітуди), якщо в (3.6.29) частота набуває реальних значень ($\sigma = \sigma_r$). Але тоді це означає, що

$$|-\mu \sin m \Delta r| \leq 1. \quad (3.6.30)$$

В свою чергу, через те, що свідомо $|\sin m \Delta r| \leq 1$, нерівність (3.6.30) можна замінити на рівнозначну

$$|\mu| = \left| \frac{c \Delta t}{\Delta r} \right| \leq 1. \quad (3.6.31)$$

Остання умова, яка збігається з критерієм КФЛ, означає, що схеми центральних різниць є умовно стійкими.

3) Схеми "проти потоку".

Скінченнорізницевий аналог рівняння одновимірної адвекції (3.4.9) за цією схемою має такий вигляд:

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= f_q^s - \mu(f_q^s - f_{q-1}^s) & \text{при } c > 0; \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - \mu(f_{q+1}^s - f_q^s) & \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (3.6.32)$$

або

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= (1 - \mu) f_q^s + \mu f_{q-1}^s & \text{при } c > 0; \\ f_q^{s+1} &= (1 + \mu) f_q^s - \mu f_{q+1}^s & \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (3.6.33)$$

Переходячи до амплітуд, з урахуванням співвідношень (3.6.22), одержимо:

$$\begin{aligned} A^{s+1} &= A^s [(1 - \mu) + \mu e^{-im\Delta r}] & \text{при } c > 0; \\ A^{s+1} &= A^s [(1 + \mu) - \mu e^{im\Delta r}] & \text{при } c < 0, \end{aligned} \quad (3.6.34)$$

звідки

$$\begin{aligned} \lambda &= (1 - \mu) + \mu e^{-im\Delta r} & \text{при } c > 0; \\ \lambda &= (1 + \mu) - \mu e^{im\Delta r} & \text{при } c < 0 \end{aligned} \quad (3.6.35)$$

чи з використанням формули Ейлера:

$$\begin{aligned} \lambda &= (1 - \mu) + \mu(\cos m\Delta r - i \sin m\Delta r) & \text{при } c > 0; \\ \lambda &= (1 + \mu) - \mu(\cos m\Delta r + i \sin m\Delta r) & \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (3.6.36)$$

Переходячи до модулів λ в (3.6.36), одержимо:

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{[(1 - \mu) + \mu \cos m\Delta r]^2 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r} & \text{при } c > 0; \\ |\lambda| &= \sqrt{[(1 + \mu) - \mu \cos m\Delta r]^2 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r} & \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (3.6.37)$$

Після простих арифметичних викладень легко одержати:

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos m\Delta r)} \quad \text{при } c > 0; \quad (3.6.38a)$$

$$|\lambda| = \sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m\Delta r)} \quad \text{при } c < 0. \quad (3.6.38б)$$

В (3.6.38) $|1 - \cos m\Delta r| \leq 1$ (через те, що $\cos m\Delta r > 0$), тому величина $|\lambda|$ залежить від знака μ . У випадку $c > 0$, $\mu > 0$ з аналізу (3.6.38a) випливає, що:

$$\text{при } \mu \rightarrow 1 \quad |\lambda| \rightarrow 1;$$

$$\text{при } \mu \rightarrow 0 \quad |\lambda| \rightarrow 1,$$

тобто

$$\text{при } 0 \leq \mu \leq 1 \quad |\lambda| \leq 1.$$

Якщо $\mu > 1$, то $(1 - \mu) < 0$; $[1 - 2\mu(1 - \mu)] > 1$, тому $|\lambda| > 1$. Отже, при $c > 0$ схема "проти потоку" є умовно стійкою, коли

$$\mu = \frac{c\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \quad (3.6.39)$$

Ця умова відповідає критерію КФЛ.

У випадку $c < 0$, $\mu < 0$ з аналізу (3.6.38б) випливає:

$$\begin{aligned} \text{при } |\mu| \rightarrow 1 & \quad |\lambda| \rightarrow 1; \\ \text{при } 0 \leq |\mu| \leq 1 & \quad |\lambda| \leq 1; \\ \text{при } |\mu| > 0 & \quad |\lambda| > 1. \end{aligned}$$

Таким чином, при $c < 0$ умова стійкості (3.6.39) замінюється на

$$|\mu| = |c| \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \quad (3.6.40)$$

Остання умова буде загальною для двох випадків схеми "проти потоку".

Як було показано раніше з цією схемою пов'язаний ефект обчислювальної (розрахункової) "в'язкості", що й обумовлює її умовну стійкість.

4) Схеми "за потоком".

Різницевий аналог цих схем залежно від знака швидкості переносу c є оберненим до схем "проти потоку", тобто:

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= (1 + \mu)f_q^s - \mu f_{q+1}^s \quad \text{при } c > 0; \\ f_q^{s+1} &= (1 - \mu)f_q^s + \mu f_{q-1}^s \quad \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (3.6.41)$$

Виконавши арифметичні перетворення, аналогічні попереднім, легко переконатися, що вирази для $|\lambda|$ будуть оберненими до виразів (3.6.38), тобто:

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m\Delta r)} \quad \text{при } c > 0; \\ |\lambda| &= \sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos m\Delta r)} \quad \text{при } c < 0. \end{aligned} \quad (3.6.42)$$

Оскільки $(1 - \cos m\Delta r) > 1$, то, як легко бачити з (6.42), в обох випадках ($\mu > 0$ чи $\mu < 0$) підкореневий вираз є додатним, і тому $|\lambda| > 1$, тобто схеми за потоком є абсолютно нестійкими.

5) Схема Лакса-Вендрофа.

Скінченнорізницевий аналог цієї схеми записується у вигляді:

$$f_{q+1/2}^{s+1/2} = \frac{1}{2}(f_{q+1}^s + f_q^s) - \frac{\mu}{2}(f_{q+1}^s - f_q^s);$$

$$f_{q-1/2}^{s+1/2} = \frac{1}{2}(f_q^s + f_{q-1}^s) - \frac{\mu}{2}(f_q^s - f_{q-1}^s); \quad (3.6.43)$$

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \mu(f_{q+1/2}^{s+1/2} - f_{q-1/2}^{s+1/2}).$$

Вилучаючи за допомогою перших двох різницевих рівнянь вираз $(f_{q+1/2}^{s+1/2} - f_{q-1/2}^{s+1/2})$ у третьому рівнянні, одержимо

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\mu}{2}(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) + \frac{\mu^2}{2}(f_{q+1}^s + f_{q-1}^s - 2f_q^s). \quad (3.6.44)$$

Останній член в (3.6.44) є різницевим аналогом похідної $\partial^2 f / \partial^2 r$ і, якщо $\mu^2/2$ ототожнювати з коефіцієнтом в'язкості, то тоді стає зрозумілим, що розглянута схема пов'язана з ефектом обчислювальної "в'язкості". Після підстановки у (3.6.44) відповідних співвідношень з (3.6.22) неважко одержати вираз для модуля переходу

$$\lambda = 1 + \mu^2(\cos m\Delta r - 1) - i\mu \sin m\Delta r. \quad (3.6.45)$$

Використовуючи відомі формули для тригонометричних функцій $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$; $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$, після очевидних перетворень одержимо

$$\lambda = 1 - 2\mu^2 \sin^2 \frac{m\Delta r}{2} - 2i\mu \sin \frac{m\Delta r}{2} \cos \frac{m\Delta r}{2}. \quad (3.6.46)$$

Звідси легко дістати вираз для $|\lambda|$

$$|\lambda| = \sqrt{1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4 \frac{m\Delta r}{2}}. \quad (3.6.47)$$

З (3.6.47) випливає, що при $(1 - \mu^2) \geq 0$ $|\lambda| \leq 1$, тобто стійкість схеми Лакса-Вендрофа забезпечується при виконанні критерію КФЛ

$$|\mu| = |c| \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \quad (3.6.48)$$

б) Схема Ейлера з перерахунком (схема Мацуно).
Ця різницева схема визначається двома тактами:

$$f_q^{s+1(*)} = f_q^s - \frac{\mu}{2}(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s);$$

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\mu}{2} (f_{q+1}^{s+1(*)} - f_{q-1}^{s+1(*)}). \quad (3.6.49)$$

Підставляючи відповідні співвідношення з (3.6.22) у (3.6.49), одержимо після нескладних перетворень для амплітуд коливань:

$$\begin{aligned} A^{s+1(*)} &= A^s (1 - i\mu \sin m\Delta r); \\ A^{s+1} &= A^s - i\mu A^{s+1(*)} \sin m\Delta r. \end{aligned} \quad (3.6.50)$$

Виключаючи у другому рівнянні $A^{s+1(*)}$ через перше, одержимо

$$A^{s+1} = A^s (1 - i\mu \sin m\Delta r - \mu^2 \sin^2 m\Delta r) \equiv \lambda A^s.$$

Одержимо тепер значення $|\lambda|$

$$|\lambda| = \sqrt{(1 - \mu^2 \sin^2 m\Delta r)^2 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r} = \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 m\Delta r + \mu^4 \sin^4 m\Delta r}. \quad (3.6.51)$$

З (3.6.51) випливає, що оскільки $|\sin m\Delta r| \leq 1$, то стійкість цієї схеми забезпечується умовою виконання критерію КФЛ, тобто

$$|\mu| = |c| \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \quad (3.6.52)$$

Неявні скінченнорізницеві схеми.

Для демонстрування відмітних властивостей неявних схем від явних зупинимося, як на прикладі, на трьох схемах: Ейлера і схемах "проти потоку" та "за потоком".

1) Схема Ейлера.

На відміну від (3.6.21) у правій частині буде мати місце момент часу $s+1$

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\mu}{2} (f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}). \quad (3.6.53)$$

Підставляючи в (3.6.53) відповідне співвідношення з (3.6.22), одержимо:

$$A^{s+1} = A^s - i\mu \sin m\Delta r A^{s+1}$$

або

$$A^{s+1} (1 + i\mu \sin m\Delta r) = A^s.$$

Тоді модуль множника переходу визначається виразом

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2 \sin^2 m\Delta r}}. \quad (3.6.54)$$

З (3.6.54) випливає, що при будь-яких значеннях μ , a , відповідно, Δt і Δr , $|\lambda| < 1$, тобто ця схема є абсолютно стійкою і дисипативною на відміну від тієї ж явної схеми (3.6.21), яка була абсолютно нестійкою.

2) Схема "проти потоку".

Нагадаємо, що явні схеми "проти потоку" незалежно від знаку швидкості переносу були умовно стійкими (3.6.40), тому тут обмежимося, наприклад, випадком з $c > 0$. Тоді замість (3.6.32) треба записати

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \mu(f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}). \quad (3.6.55)$$

Підставляючи у (3.6.55) співвідношення (3.6.22) і використовуючи формули Ейлера, одержимо

$$A^{s+1} = A^s - A^s \mu(1 - e^{im\Delta r})$$

або

$$A^{s+1}[(1 + \mu) - \mu(\cos m\Delta r - i \sin m\Delta r)] = A^s,$$

звідки

$$\lambda = \frac{1}{[(1 + \mu) - \mu(\cos m\Delta r) + i \sin m\Delta r]}.$$

Модуль множника переходу $|\lambda|$ у цьому випадку запишеться у вигляді

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m\Delta r)}}. \quad (3.6.56)$$

Неважко показати, що у випадку $c < 0$

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos m\Delta r)}}. \quad (3.6.57)$$

Як випливає з (3.6.56) і (3.6.57), тепер в обох випадках (відповідно $|\mu| > 1$ та $|\mu| < 1$) $|\lambda| < 1$, тобто неявні схеми "проти потоку" є абсолютно стійкими та дисипативними на відміну від умовно стійких явних схем (3.6.39) і (3.6.40).

3) Схеми "за потоком".

Як було показано вище, схеми "за потоком" і "проти потоку" відносно напрямку переносу є прямо протилежними, тому відразу можна запи-

сати остаточні результати для $|\lambda|$, спираючись на (3.6.56) та (3.6.57):

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos m\Delta r)}} \quad \text{при } c > 0; \quad (3.6.58)$$

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m\Delta r)}} \quad \text{при } c < 0. \quad (3.6.59)$$

З аналізу (3.6.58) і (3.6.59) нескладно переконатися, що неявні схеми "за потоком" стійкими, точніше нейтральними ($|\lambda| = 1$), можуть бути тільки за однієї єдиної умови, якщо $|\mu| = 1$. Нагадаємо, що явні схеми "за потоком" (3.6.42) були абсолютно нестійкими.

На цих прикладах було показано, що завжди краще використовувати неявні схеми у відношенні їх стійкості, ніж явні схеми. Аналогічні результати можна одержати й для інших розглянутих вище скінченнорізницеви схем. Здавалося б, у практиці гідродинамічних прогнозів в першу чергу слід би орієнтуватися саме на неявні скінченнорізницеві схеми, оскільки їх позитивна якість у порівнянні з явними схемами є очевидною – відсутність обмежень на μ дозволяє збільшити крок за часом (Δt) і внаслідок цього зменшити нагромадження помилок обчислювального характеру, заощадити машинний час тощо. Але при цьому не слід забувати, що при практичній реалізації моделей прогнозу, які використовують неявні різницеві схеми, буде потрібно додаткове підключення ітераційного програмного модуля, що призведе автоматично до нагромадження помилок обчислювань та зростання витрат машинного часу, тобто до нівелювання переваг неявних схем у порівнянні з явними. У цьому зв'язку однозначних рекомендацій щодо використання явних чи неявних схем бути не може, тому все повинно визначатися характером задачі, що розв'язується у рамках конкретної гідродинамічної моделі.

Напівнеявні скінченнорізницеві схеми.

У практиці гідродинамічного прогнозу використовуються також так звані напівнеявні схеми, у яких при різницевому поданні правих частин рівнянь використовуються як явні, так і неявні схеми. Однією з таких, найбільш розповсюджених схем є схема Кранка-Ніколсона чи дворівнева схема трапецій. Для лінійного рівняння одновимірної адвекції (3.4.9) ця схема записується таким чином:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -\frac{c}{2} \left(\frac{f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}}{2\Delta r} + \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} \right)$$

або

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\mu}{4} \left[(f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) + (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) \right]. \quad (3.6.60)$$

Для подальших перетворень додатково до (3.6.22) будемо використовувати такі співвідношення:

$$\begin{aligned} f_{q+1}^{s+1} &= A^{s+1} e^{im(q+1)\Delta r} = A^{s+1} e^{imq\Delta r} e^{im\Delta r}; \\ f_{q-1}^{s+1} &= A^{s+1} e^{im(q-1)\Delta r} = A^{s+1} e^{imq\Delta r} e^{-im\Delta r}. \end{aligned} \quad (3.6.61)$$

Звідки, з використанням формули Ейлера,

$$f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1} = A^{s+1} e^{imq\Delta r} 2i \sin m\Delta r. \quad (3.6.62)$$

У свою чергу, використовуючи (3.6.22),

$$f_{q+1}^s - f_{q-1}^s = A^s e^{imq\Delta r} 2i \sin m\Delta r. \quad (3.6.63)$$

Підставляючи (3.6.62) і (3.6.63) у (3.6.60), одержимо:

$$A^{s+1} = A^s - \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r A^{s+1} - \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r A^s$$

або

$$A^{s+1} \left(1 + \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r \right) = A^s \left(1 - \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r \right),$$

звідки

$$\lambda = \frac{1 - \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r}{1 + \frac{i\mu}{2} \sin m\Delta r}$$

чи, переходячи до модуля λ ,

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{2} \sin m\Delta r \right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{2} \sin m\Delta r \right)^2}} \equiv 1. \quad (3.6.64)$$

Отже, напівнеявна схема Кранка-Ніколсона є нейтральною і абсолютно стійкою при будь-яких значеннях μ чи Δt і Δr .

3.7 Спектральні методи розв'язання прогностичних задач

У практиці чисельного прогнозу погоди, нарівні з сітковими методами розв'язання рівнянь гідротермодинаміки, застосовуються й такі методи, в яких просторова залежність прогнозованих метеорологічних величин подається у вигляді рядів по системах функцій, що мають певні властивості. Інакше кажучи, у таких методах розв'язок шукають у вигляді розкладання по скінченній кількості функцій, а коефіцієнти розкладання знаходяться розв'язанням крайових задач простішого вигляду, ніж початкова. Такі методи називають спектральними.

Через те, що будь-який атмосферний рух можна подати як набір (суму) нескінченної кількості хвильових збурень, накладених одне на інше, спектральні методи у цьому сенсі припускають: 1) подання змін динамічних полів за допомогою скінченних сум хвильових компонентів; 2) зведення рівнянь руху до прогностичних рівнянь для амплітуд та фаз кожного хвильового компонента.

Прогностичні моделі, в яких для розв'язання рівнянь використовуються спектральні методи, дістали назву спектральних.

У порівнянні з скінченнорізницевиими, спектральні методи мають такі переваги:

- більш висока точність розрахунку горизонтальної адвекції;
- виключення помилки подання спектра, що виникає внаслідок квадратичної нелінійності;
- простота моделювання течій для усієї земної кулі;
- простота використання напівнеявної схеми інтегрування.

На сьогодні спектральні методи використовуються для оперативних чисельних прогнозів погоди у багатьох країнах світу; крім того, спектральні методи застосовуються з дослідницькою метою для вивчення загальної циркуляції атмосфери і атмосферної динаміки.

3.7.1 Основні принципи застосування спектральних методів

Сукупність рівнянь, що використовуються у будь-якій моделі атмосфери, в загальному вигляді можна подати таким чином:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_i(\omega^i) = F_i(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^I); \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (3.7.1)$$

де прогностичні змінні

$$\omega^i = \omega^i(\mathbf{r}, t)$$

є скалярними функціями просторових координат \mathbf{r} та часу t . F_i – функція прогностичних змінних, що містить у загальному випадку як лінійні, так і нелінійні члени, які складаються з похідних та, в деяких моделях, навіть інтегралів. Припускається, що діагностичні змінні в F_i виключаються за допомогою діагностичних рівнянь моделі. L_i – диференціальний оператор по просторовим змінним, який у більшості випадків є тотожним оператором, тобто $L_i(\omega_i) = \omega_i$. Наприклад, якщо у моделях використовуються рівняння вихору та дивергенції, то як прогностичні змінні можуть використовуватися функції течії та потенціал швидкості; у цьому випадку для таких рівнянь $L_i(\omega_i) = \nabla^2 \omega_i$, де ∇^2 – горизонтальний оператор Лапласа.

Будемо поводитися з системою рівнянь (3.7.1), як з рівняннями моделі у частинних похідних.

Згідно з спектральним методом, залежність змінної від просторових координат \mathbf{r} у певний момент часу апроксимується скінченним розкладанням у ряд по лінійно-незалежних функціях $\psi_n(\mathbf{r})$, визначених в усій області інтегрування S .

Отже, нехай деяка змінна апроксимована розкладанням

$$\hat{\omega}^i(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \omega_n^i(t) \psi_n(\mathbf{r}), \quad (3.7.2)$$

де N – ціла додатна константа.

Використовуючи аналогічні подання, просторові похідні та інтеграли можна виразити аналітично таким чином, що відпадає необхідність у використанні скінченнорізницевої апроксимації по просторовим змінним чи квадратурної формули.

Обчислення похідних по просторовим змінним та інтегралів при використанні формули (3.7.2) може розглядатися як еквівалент застосування певних скінченних різниць та квадратур на тій же сітці.

Будемо називати метод, побудований на поданні (3.7.2), методом розкладання у ряди. У таких методах залежність прогностичних змінних від часу визначається коефіцієнтами розкладання, тобто значеннями $\omega_n^i(t)$, i , відповідно, ці методи дозволяють перетворити диференціальні рівняння у частинних похідних моделі до системи звичайних диференціальних рівнянь, які визначають похідні за часом від коефіцієнтів розкладання у скінченних рядах. Таким чином, у результаті виходить скінченна система звичайних диференціальних рівнянь. Будемо називати ці рівняння просторово-зрізаними рівняннями моделі.

У чисельних моделях, в яких застосовується метод розкладання у

ряди, дискретне подання за часом вводиться так само, як й у сіткових моделях. Тому схеми інтегрування, що були розглянуті у попередніх підрозділах, можуть також використовуватися для чисельного інтегрування просторово-зрізаних рівнянь таких моделей.

Необхідно відзначити, що подання у вигляді скінченного ряду у формі (3.7.2) може бути точним розв'язком рівнянь моделі у частинних похідних тільки у деяких окремих випадках, тому що перетворення рівнянь моделі у частинних похідних до просторово-зрізаних рівнянь повинно у загальному випадку містити деякі апроксимації. Помилки цих апроксимацій мінімізуються при визначенні перетвореної системи рівнянь за так званим критерієм "найкращого подання".

Вибір критерію "найкращого подання" у спектральних моделях ґрунтується на методі найменших квадратів (найменшої квадратичної апроксимації), який є еквівалентом так званого методу Гальоркіна. Нижче викладається процедура перетворення, яка ґрунтується на використанні критерію найменших квадратів.

Для того, щоб спростити викладення, розглянемо модель тільки з однією змінною ω . Таке подання можна легко поширити на випадок з більшою кількістю змінних. Рівняння (3.7.1) зводиться тоді до рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} L(\omega) = F(\omega) \quad (3.7.3)$$

з початковою умовою

$$\omega(\mathbf{r}, 0) = f(\mathbf{r}). \quad (3.7.4)$$

Наближений розв'язок подається у вигляді

$$\hat{\omega}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \omega_n(t) \psi_n(\mathbf{r}). \quad (3.7.5)$$

Просторово-зрізані рівняння тепер одержуються при мінімізації середньоквадратичного інтеграла від різниці

$$R(\hat{\omega}) = \frac{\partial}{\partial t} L(\hat{\omega}) - F(\hat{\omega}),$$

що одержується підстановкою виразу (3.7.5) у рівняння (3.7.3). Це означає, що для будь-якого моменту часу вибираються такі значення $d\omega_n/dt$, які мінімізуються виразом

$$J(\hat{\omega}) = \int_S \left[\sum_{n=1}^N \frac{d\omega_{n'}}{dt} L(\psi_n) - F \left(\sum_{n=1}^N \omega_n \psi_n \right) \right]^2 dS.$$

Ці значення виходять, якщо дорівняти нулю похідні від $J(\hat{\omega})$ по $d\omega_n/dt$ (умова мінімуму); в результаті одержуємо просторово-зрізане рівняння

$$\int_S \left[\sum_{n'=1}^N \frac{d\omega_{n'}}{dt} L(\psi_{n'}) - F \left(\sum_{n'=1}^N \omega_{n'} \psi_{n'} \right) \right] L(\psi_n) dS = 0 \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.7.6)$$

Відзначимо, що рівняння (3.7.6) можна записати у вигляді

$$\int_S R(\hat{\omega}) \psi_n dS = 0 \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.7.7)$$

якщо

$$L(\psi_n) + \varepsilon_n \psi_n = 0 \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.7.8)$$

де ε_n – константи.

Якщо L – тотожній оператор, то вираз (3.7.8) задовольняється будь-якою множиною координатних функцій ψ_n (при $\varepsilon_n = -1$ для всіх n). Якщо оператор L відрізняється від тотожного оператора, то з виразу (3.7.8) випливає, що координатні функції є власними функціями оператора L .

Система рівнянь (3.7.7) може бути виписана відразу ж через застосування методу Гальоркіна з використанням функцій ψ_n як базисних, а саме, припускаючи дорівнюючим нулю середнє від $R(\hat{\omega})$ по області S з координатними функціями ψ_n як ваговими множниками. Таким чином, знайдені вище похідні показують, що наближення Гальоркіна є еквівалентом методу найменших квадратів для рівнянь у формі, що приймається в атмосферних моделях, за умови, що координатні функції задовольняють умові (3.7.8).

Відзначимо ще одну важливу властивість перетвореної системи рівнянь (3.7.3), яка є наслідком наближення Гальоркіна, а саме різниця $R(\hat{\omega})$ є ортогональною до $\hat{\omega}$

$$\int_S R(\hat{\omega}) \cdot \hat{\omega} dS = 0. \quad (3.7.9)$$

Це легко одержати множенням кожного з рівнянь системи (3.7.7) на відповідний коефіцієнт $d\omega_n$ та підсумовуванням усіх одержаних рівнянь. Надалі буде показано, що ця властивість є основною серед інтегральних

властивостей перетворених систем.

Припускаючи, що умова (3.7.8) виконується, запишемо систему (3.7.6) у формі, яка є зручною для чисельного інтегрування:

$$\sum_{n'=1}^N \varepsilon_{n'} J_{nn'} \frac{d\omega_{n'}}{dt} = \int_S F \left(\sum_{n'=1}^N \omega_{n'} \psi_{n'} \right) \psi_n dS \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.7.10)$$

де

$$J_{nn'} = \int_S \psi_n \psi_{n'} dS.$$

Видно, що ця просторово-зрізана система рівнянь є неоднорідною системою N лінійних алгебраїчних рівнянь зі сталими коефіцієнтами $\varepsilon_{n'} J_{nn'}$, які можуть бути обчислені відразу ж для усіх невідомих $d\omega_n/dt$. Тепер припустимо, що коефіцієнти розкладання $\omega_n(t)$ є відомими для певного моменту часу. Тоді значення правої частини (3.7.10) можна обчислити, і значення $d\omega_n/dt$ визначаються через розв'язання системи рівнянь. Тому, якщо задані початкові значення коефіцієнтів розкладання, то чисельне інтегрування можна виконати, використовуючи деяку різницеву схему за часом. Початкові значення ω_n можна одержати із заданого початкового поля прогностичних змінних у вигляді (3.7.4). У загальному випадку, це поле не може бути поданим точно за допомогою зрізаних рядів, отже треба застосовувати деякий критерій "найкращого подання".

Конкретний вибір цього критерію залежить від чисельного метода, що застосовується. Наприклад, у випадку спектрального підходу для визначення початкових значень коефіцієнтів, необхідно мінімізувати середньоквадратичне відхилення

$$\int_S [\omega(\mathbf{r},0) - \hat{\omega}(\mathbf{r},0)]^2 dS,$$

що приведе до системи рівнянь

$$\sum_{n'=1}^N J_{nn'} \omega_{n'}(0) = \int_S \omega(\mathbf{r},0) \psi_n(\mathbf{r}) dS \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.7.11)$$

У випадку реальних початкових даних значення $\omega(\mathbf{r},0)$ звичайно визначаються зі спостережень за деякою схемою об'єктивного аналізу на скінченній множині дискретних точок, і, отже, праву частину (3.7.11) можна обчислити за деякою квадратурною формулою.

Визначення початкових значень ω_n та тенденції $d\omega_n/dt$ на певному

часовому кроці з системи рівнянь (3.7.10) і (3.7.11) у загальному випадку вимагає перетворення матриць. Але цього можна уникнути через вибір ортогональних координатних функцій, тобто функцій, які задовольняють умовам

$$J_{nn'} = \int_S \psi_n(\mathbf{r}) \psi_{n'}(\mathbf{r}) dS \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N.$$

В цьому випадку з систем (3.7.10) і (3.7.11) одержуємо відповідно:

$$\frac{d\omega_n}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon_n J_{nn}} \int_S F \left(\sum_{n'=1}^N \omega_{n'} \psi_{n'} \right) dS \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N; \quad (3.7.12)$$

$$\omega_n(0) = \frac{1}{J_{nn}} \int_S \omega(\mathbf{r}, 0) \psi_n(\mathbf{r}) dS \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.7.13)$$

На практиці різноманітні чисельні методи часто комбінуються у чисельних моделях.

Так, можна застосовувати дискретне подання за часом, коли метод розкладення у ряди використовується у просторі. Можна також використовувати різноманітні подання по трьох напрямках у просторі. Наприклад, у деяких моделях дискретне подання у вертикальному напрямку комбінується з розкладанням у ряди в горизонтальних напрямках. У цьому випадку, описана вище процедура одержання просторово-зрізаних рівнянь неістотно модифікується. Перед апроксимацією горизонтальних полів можна виконати дискретизацію по вертикалі через використання рівнянь моделі на певних рівнях і апроксимацію вертикальних похідних та інтегралів скінченними різницями та квадратурними формулами.

В атмосферних моделях спектральний метод використовується насамперед для великомасштабного чи півсферного чисельного інтегрування, а координатні функції, що вибираються для подання горизонтальних полів, мають вигляд сферичних функцій, тригонометричних функцій, а також функцій Хафа.

3.7.2 Основні властивості спектральних методів

В цьому підрозділі буде розглянуте застосування спектрального методу до різноманітних найпростіших форм рівнянь, які описують одновимірну адвекцію. Спочатку розглянемо найпростіше лінійне рівняння адвекції. Це рівняння вибране для розглядання як основне у зв'язку з його простотою, а також тому, що процес адвекції є найважливішою части-

ною атмосферних рівнянь. Крім того, чисельне розв'язання рівняння адвекції за допомогою методу сіток докладно обговорене у попередніх підрозділах, що дозволяє порівняти властивості методу сіток з властивостями спектрального методу.

1) Аналітичний розв'язок.

Лінійне рівняння адвекції можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad c = \text{const.} \quad (3.7.14)$$

Тут $u(x, t)$ – залежна змінна, яку будемо інтерпретувати як компоненту швидкості, спрямовану на схід, на певному широтному колі довжиною L . Незалежними змінними є відстань вздовж широтного кола x та час t . Для зручності будемо використовувати довготу $\lambda = \frac{2\pi}{L}x$ як незалежну змінну

замість x і введемо кутові швидкості $\omega = \frac{2\pi}{L}u$ та $\gamma = \frac{2\pi}{L}c$. Тоді рівняння (3.7.14) набуває вигляду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \gamma \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = 0; \quad \gamma = \text{const.} \quad (3.7.15)$$

Це рівняння відповідає рівнянню (3.7.3), в якому L є тотожним оператором.

Очевидно, що $\omega(\lambda, t)$ є періодичною функцією з періодом 2π для усіх t та усіх цілих p

$$\omega(\lambda, t) = \omega(\lambda + 2\pi p, t). \quad (3.7.16)$$

Згідно з виразом (3.7.4), початкові значення задаються у вигляді

$$\omega(\lambda, 0) = f(\lambda). \quad (3.7.17)$$

Доцільно припустити такі властивості точного розв'язку рівняння (3.7.15). По-перше, він повинен бути однозначною безперервною дійсною функцією і, по-друге, похідна $\partial\omega/\partial\lambda$, яка входить у диференціальне рівняння, повинна бути визначеною усюди і бути безперервною. Якщо припустити, що точки розриву відсутні, ці властивості повинні виконуватися, оскільки нас цікавить тільки фізично обґрунтований розв'язок. Якщо ж точки розриву існують, то належним методом можна одержати розв'язки в інтервалі між такими точками. Потім одержані розв'язки

якимось способом можуть бути зістиковані у точках розриву.

Припускаючи, що розриви відсутні і це припущення виконується для початкових умов, тобто $\omega(\lambda, 0) = f(\lambda)$, загальний розв'язок рівняння (3.7.15) має вигляд

$$\omega(\lambda, t) = f(\lambda - \gamma t). \quad (3.7.18)$$

Розв'язок задовольняє цим припущенням для усіх $t \geq 0$.

2) Вибір функцій розкладання (координатних функцій).

Будемо розглядати чисельний розв'язок рівняння (3.7.15), одержаний спектральним методом. Природно в цьому випадку як функції розкладання $\psi(\lambda)$ вибрати тригонометричні функції

$$\psi_n(\lambda) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n-1}{2}\lambda\right) & \text{при } n = 1, 3, \dots \\ \sin\left(\frac{n}{2}\lambda\right) & \text{при } n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

Відомо, що такі функції створюють повну систему ортогональних функцій і що широтний клас функцій можна подати нескінченними рядами Фур'є, які збігаються швидко для достатньо гладких функцій. Далі, кожна функція є періодичною з періодом 2π , отже вони задовольняють заданій умові (3.7.16), і до цих функцій зручно застосувати різноманітні операції аналізу, особливо диференціювання.

Згідно з (3.7.5) апроксимуємо розв'язок у вигляді зрізаних рядів Фур'є

$$\hat{\omega}(\lambda, t) = \frac{\omega_0^c(t)}{2} + \sum_{m=1}^M [\omega_m^c(t) \cos m\lambda + \omega_m^s(t) \sin m\lambda], \quad (3.7.19)$$

де для кожної компоненти Фур'є

$$\omega_m^c(t) \cos m\lambda + \omega_m^s(t) \sin m\lambda \quad (3.7.20)$$

m – зональне хвильове число (кількість хвиль вздовж кола широти);

M – найбільше хвильове число, що зберігається у розкладенні.

Кількість коефіцієнтів розкладання, які залежать від часу, $\omega_m^c(t)$ і $\omega_m^s(t)$ в (3.7.19) дорівнює $N = 2M + 1$.

Уводячи комплексні функції $e^{im\lambda}$, запишемо (3.7.19) у вигляді

$$\hat{\omega}(\lambda, t) = \sum_{m=-M}^M \omega_m(t) e^{im\lambda}, \quad (3.7.21)$$

де комплексні коефіцієнти при $m \geq 0$ подаються у вигляді

$$\omega_m(t) = \frac{1}{2} [\omega_m^c(t) - i\omega_m^s(t)], \quad (3.7.22)$$

причому $\omega_0^s \equiv 0$.

Коефіцієнти для від'ємних та додатних значень m зв'язані співвідношенням

$$\omega_{-m}(t) = (\omega_m(t))^*, \quad (3.7.23)$$

де зірочкою позначена комплексно-сполучена величина. Останнє співвідношення випливає з того факту, що $\hat{\omega}$ є речовою функцією. Зауважимо, що функція $\hat{\omega}$ є повністю заданою, якщо комплексні коефіцієнти $\omega_m(t)$ задані на інтервалі $0 \leq m \leq M$.

Для комплексних тригонометричних функцій маємо таку умову ортогональності

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\lambda} e^{im'\lambda} d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при } m' = -m, \\ 0 & \text{при } m' \neq -m, \end{cases} \quad (3.7.24)$$

грунтуючись на якій одержуємо вираз для коефіцієнтів розкладання в (3.7.21)

$$\omega_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\omega}(\lambda, t) e^{-im\lambda} d\lambda. \quad (3.7.25)$$

3) Розв'язок просторово-зрізаної системи.

При використанні спектрального методу просторово-зрізана система, що відповідає (3.7.12), зводиться до рівнянь, які називаються звичайно зрізаними спектральними рівняннями. Для лінійного рівняння адвекції ці рівняння можуть бути подані наступним чином.

Підставивши (3.7.21) у (3.7.15), одержимо

$$\sum_{m=-M}^M \left[\frac{d\omega_m}{dt} + im\gamma\omega_m \right] e^{im\lambda} = 0. \quad (3.7.26)$$

Через те, що функції розкладання є лінійно-незалежними, то це рівняння точно задовольняється тільки за виконання умови

$$\frac{d\omega_m}{dt} = -im\gamma\omega_m \quad \text{при } -M \leq m \leq M, \quad (3.7.27)$$

яка є системою з $2M + 1$ комплексних рівнянь. Але, оскільки має місце співвідношення (3.7.23), достатньо розглядати рівняння тільки для $0 \leq m \leq M$.

Зауважимо, що при одержанні зрізаних спектральних рівнянь для лінійного рівняння непотрібно розглядати мінімізацію різниці, тому що зрізаний ряд (3.7.21) точно задовольняє рівнянню. Це пов'язано з тим, що комплексні функції розкладання є власними функціями диференціального оператора $\partial/\partial\lambda$, що входить до рівняння (3.7.15). Зауважимо також, що кожне зі спектральних рівнянь може бути точно проінтегроване за часом, якщо задані початкові значення для ω_m . У результаті одержимо

$$\omega_m(t) = \omega_m(0)e^{-im\gamma t}. \quad (3.7.28)$$

Згідно з наведеним вище припущенням, $f(\lambda)$ в (3.7.17) належить до класу функцій, кожна з яких може бути визначена відповідним рядом Фур'є

$$f(\lambda) = \int_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\lambda}. \quad (3.7.29)$$

Початкові значення ω_m , що відповідають (3.7.13), можна одержати при обчисленні коефіцієнтів Фур'є a_m функції $f(\lambda)$

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-im\lambda} d\lambda, \quad (3.7.30)$$

враховуючи, що $\omega_m(0) = a_m$ для $0 \leq m \leq M$. Підставляючи (3.7.28) у (3.7.21), одержимо розв'язок

$$\hat{\omega}(\lambda, t) = \sum_{m=-M}^M \omega_m(0) e^{-im(\lambda - \gamma t)}.$$

3.7.3 Методи побудови визначальних систем рівнянь

Як відзначалося вище (див. п. 3.7.1), у спектральних методах просторова залежність прогнозованих метеорологічних величин подається у вигляді рядів. Через те, що у рядах використовується обмежена кількість членів розкладання, то можна одержати лише наближений розв'язок, який буде відрізнятися від точного на деяку величину ε , що називається нев'язанням.

Залежно від способу мінімізації нев'язання розрізняються системи рівнянь, які носять назву „визначальних систем”. За допомогою цих систем знаходяться шукані параметри.

Існують наступні методи побудови визначальних систем рівнянь, що зустрічаються найчастіше.

1) Метод колокації.

Визначальна система рівнянь будується за допомогою рівняння $\varepsilon = 0$, що задається у m точках колокації, які рівномірно розташовані в області G . Кількість точок колокації повинно дорівнювати кількості членів розкладання відповідного ряду.

Так, якщо для одновимірного лінійного рівняння адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3.7.31)$$

значення шуканої (прогностичної) функції $f(t, x)$ подати рядом з скінченною кількістю членів

$$\hat{f}(t, x) = \sum_{n=0}^N c_n(t) u_n(x), \quad (3.7.32)$$

то кількість точок колокації $m = 0, 1, 2, \dots, N$.

В цьому випадку (при $\varepsilon = 0$) вираз для нев'язання

$$\sum_{n=0}^N \frac{dc_n(t)}{dt} u_n(x) + v \sum_{n=0}^N c_n(t) \frac{du_n(x)}{dx} = \varepsilon \quad (3.7.33)$$

записується для кожної точки колокації у вигляді

$$\sum_{n=0}^N \frac{dc_n(t)}{dt} u_n(x_m) + v \sum_{n=0}^N c_n(t) \frac{du_n(x_m)}{dx} = 0 \quad (3.7.34)$$

де $m = 0, 1, 2, \dots, N$

Система цих виразів є визначальною системою рівнянь для знаходження $\frac{dc_n(t)}{dt}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, N$).

Нагадаємо, що в розкладанні (3.7.32) $c_n(t)$ – шукані коефіцієнти (параметри), які залежать від часу; $u_n(x)$ – базисні функції, які залежать від просторових координат (у цьому випадку від x); N – ціле додатне число, яке визначає кількість членів розкладання. Початкові значення функції $f(t_0, x)$ подаються рядом (3.7.32) з координатами $c_n(t_0)$. Як відзначалося вище, кількість членів розкладання завжди є обмеженою, тому ряд (3.7.32) у принципі є наближеним ("зрізаним") розв'язком, що позначається через $\hat{f}(t, x)$.

2) Метод найменших квадратів.

Визначальна система рівнянь будується так, щоб

$$J = \int_G \varepsilon^2 dx = \min,$$

тобто з умови екстремуму для J

$$\frac{\partial J}{\partial \left(\frac{dc_n(t)}{dt} \right)} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N).$$

3) Метод ортогональних проєкцій (метод Гальоркіна).

Визначальна система рівнянь одержується з умов ортогональності нев'язання координатним функціям, тобто

$$\int_G \varepsilon u_n(x) dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N).$$

Можна показати, що визначальні системи рівнянь, які одержані за методом найменших квадратів та за методом ортогональних проєкцій, є ідентичними і мають вигляд

$$\int_G \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{dc_n(t)}{dt} u_n(x) + v \sum_{n=0}^N c_n(t) \frac{du_n(x)}{dx} \right\} u_n(x) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (3.7.35)$$

У загальному випадку розв'язання визначальних систем рівнянь вимагає перетворення матриць. Але цього можна уникнути, якщо як базисні функції використати ортогональні функції, які задовольняють умові

$$J_{nn'} = \int_G u_n(x) u_{n'}(x) dx = 0 \quad \text{при } n \neq n'.$$

Якщо базисні функції $u_n(x)$ є ортогональними, то відпадає потреба перетворення матриць, тому що в цьому випадку

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = \frac{1}{J_{nn'}} \int_G v \sum_{n=0}^N c_n(t) \frac{du_n(x)}{dx} u_{n'}(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N).$$

Після визначення $\frac{dc_n(t)}{dt}$, обчислюються коефіцієнти наприкінці кроку за часом

$$c_n(t + \Delta t) = c_n(t) + \frac{dc_n(t)}{dt} \Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N),$$

а в результаті застосування кроків за часом розраховуються коефіцієнти на строк прогнозу $c_n(t_n)$. Потім за допомогою ряду (3.7.32) визначаються прогностичні поля функції $f(t, x)$. Таким чином, прогноз функції $f(t, x)$ за допомогою рядів зводиться до прогнозу коефіцієнтів розкладання.

До цього моменту міркування стосувалися рівняння (3.7.31), в якому швидкість переносу бралася сталою. Якщо вважати, що швидкість переносу є функцією координат та часу, тобто $v(t, x)$, то при побудові визначальної системи рівнянь використовується розкладання у ряд не тільки функції $f(t, x)$, а й швидкості переносу

$$\hat{v}(t, x) = \sum_{n=0}^N v_n(t) u_n(x).$$

В цьому випадку визначальна система рівнянь для $\frac{dc_n(t)}{dt}$, побудована за методом ортогональних проєкцій, має вигляд

$$\int_G \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{dc_n(t)}{dt} u_n(x) + \sum_{n=0}^N v_n(t) u_n(x) \sum_{n=0}^N f_n(t) \frac{du_n(x)}{dx} \right\} u_n(x) = 0 \quad (3.7.36)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, N).$$

При цьому коефіцієнти $v_n(t)$ визначаються за допомогою рівняння руху, яке так само, як і рівняння (3.7.31), розв'язується за допомогою рядів з відповідними початковими та межовими умовами. Сукупність рівнянь

для функцій $f(t, x)$ і $v(t, x)$ повинна бути замкненою системою рівнянь.

Якщо за допомогою рядів розв'язується задача прогнозу на основі повних рівнянь просторової моделі, серед яких поряд з прогностичними рівняннями фігурують діагностичні, то останні використовуються для визначення коефіцієнтів розкладання однієї з функцій через коефіцієнти розкладання інших функцій. Пояснимо це на прикладі рівняння статики

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad (3.7.37)$$

де тиск p є незалежною змінною.

По змінній p введемо дискретизацію

$$k = \frac{p}{\Delta p} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K).$$

Для простоти будемо вважати, що $T^k(t, x)$, $\Phi^k(t, x)$. Верхній індекс "k" позначає належність до певного ізобаричного рівня.

Функції $T^k(t, x)$ і $\Phi^k(t, x)$ подаються рядами вигляду (3.7.32), тобто:

$$\hat{T}(t, x) = \sum_{n=0}^N c_n^{T,k}(t) u_n(x); \quad (3.7.38)$$

$$\hat{\Phi}(t, x) = \sum_{n=0}^N c_n^{\Phi,k}(t) u_n(x), \quad (3.7.39)$$

Коефіцієнти $c_n^{T,k}(t)$ на кожному кроці за часом визначаються за допомогою рівняння припливу тепла аналогічно до того, як це було показано на прикладі рівняння (3.7.31). Таким же чином на кожному кроці за часом визначаються коефіцієнти розкладання для геопотенціалу за допомогою нижньої межевої умови $d\Phi/dt = 0$ при $p = 1000$ гПа, тобто при $k = K$.

Маючи значення коефіцієнтів $c_n^{T,k}(t)$ для усіх рівнів k і коефіцієнти $c_n^{\Phi,k}(t)$ для рівня $k = K$ ($p = 1000$ гПа), за допомогою рівняння статики, яке подане у вигляді

$$\Phi_{k-1} = \Phi_k + R\bar{T}^p \ln \frac{p_k}{p_{k-1}}, \quad (3.7.40)$$

де $\bar{T}^p = (T_k + T_{k-1})/2$, послідовно, починаючи з рівня $k - 1$, визначаються

коефіцієнти $c_n^{\Phi,k}(t)$

$$c_n^{\Phi,k-1}(t) = c_n^{\Phi,k}(t) + R \frac{c_n^{T,k}(t) + c_n^{T,k-1}(t)}{2} \ln \frac{p_k}{p_{k-1}} \quad (k = K, K-1, \dots, 1, 0).$$

Перед тим, як братися за більш точне розглядання методів розв'язання задачі прогнозу погоди за допомогою розкладання залежних змінних у ряди, сформулюємо деякі сталі у літературі поняття.

Прогностичні моделі, в яких розв'язання рівнянь будується за допомогою розкладань по ортогональним функціям з мінімізацією нев'язання за методом найменших квадратів чи за методом Гальоркіна (методом ортогональних проєкцій), звичайно називаються спектральними. Якщо ж для побудови визначальної системи рівнянь використовується метод колокації, то прогностичні моделі називаються псевдоспектральними.

В останні роки приділяється увага моделям, в яких для розв'язання прогностичних рівнянь застосовуються методи скінченних елементів. В цих моделях область прогнозу розбивається на скінченну кількість підобластей, що називаються елементами, для кожної з яких будуються прості функції, які апроксимують залежні змінні у межах підобластей, але так, щоб апроксимація для усієї області була безперервною. Як апроксимаційні функції в межах підобластей можуть, наприклад, використовуватися поліноми низьких степенів. Побудова визначальних систем рівнянь у таких моделях може виконуватися будь-яким з розглянутих вище методів: колокації, Гальоркіна чи найменших квадратів.

На закінчення відзначимо, що при використанні рядів для розв'язання прогностичних рівнянь, так само, як й у випадку застосування методу сіток, задача зводиться до визначення скінченної кількості параметрів. При цьому шуканими параметрами є похідні за часом для коефіцієнтів розкладання, а обчислюються ці параметри розв'язанням визначальних систем звичайних диференціальних рівнянь. Через те, що в цих рівняннях міститься скінченна кількість базисних функцій та вихідних параметрів, ці рівняння заведено називати просторово-зрізаними рівняннями моделі.

3.7.4 Властивості базисних функцій

Розглянемо знову рівняння адвекції у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (3.7.41)$$

де швидкість переносу v для простоти є сталою.

Областю визначення розв'язку задачі виберемо множину значень аргументу $x \in [1, 2\pi]$ та зажадаємо, щоб розв'язок, який шукається, задовольняв умові періодичності

$$f(t, x) = f(t, x + 2\pi). \quad (3.7.42)$$

Будемо шукати розв'язок цієї задачі у вигляді розкладання по системі заданих базисних функцій. Особливо треба домовитися про те, які властивості повинні мати базисні функції. По-перше, вони повинні бути лінійно-незалежними, а по-друге, вони повинні задовольняти межовим умовам поставленої задачі. Саме остання вимога є найславнішою, тому що розв'язок, який складається з таких базисних функцій, буде автоматично задовольняти умовам на межах області.

Отже, будемо шукати наближений розв'язок задачі (3.7.41), (3.7.42) у вигляді

$$\hat{f}(t, x) = \sum_{n=0}^N c_n(t) u_n(x), \quad (3.7.43)$$

де N – кількість використаних базисних функцій;

$u_n(x)$ – базисні функції;

$c_n(t)$ – коефіцієнти, які необхідно знайти.

Базисні функції $u_n(x)$ повинні бути періодичними. Як такі функції зручно використовувати тригонометричні функції, тому що вони не тільки мають періодичність і лінійну незалежність, а й утворюють повну ортогональну систему. Ці властивості тригонометричних функцій дозволяють спростити розв'язання поставленої задачі і подати розв'язок у вигляді ряду Фур'є. Точність знайденого спектральним методом наближеного розв'язку може бути оцінена.

З урахування вищесказаного, вираз (3.7.43) можна переписати у вигляді

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^N (c_{1n}(t) \sin nx + c_{2n}(t) \cos nx), \quad (3.7.44)$$

де $n = 2\pi/L$;

L – довжина хвилі.

Для більшої компактності запису, перетворимо праву частину (3.7.44) у комплексну форму, застосувавши формулу Ейлера

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}; \quad (3.7.45)$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}. \quad (3.7.46)$$

Підставимо ці вирази у (3.7.44) і після зведення подібних членів одержимо

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{(c_{2n} - ic_{1n})e^{inx}}{2} + \frac{(c_{2n} + ic_{1n})e^{-inx}}{2} \right\} = \sum_{n=-N}^N A_n e^{-inx}, \quad (3.7.47)$$

де

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, \\ \frac{1}{2}(c_{1n} - ic_{2n}) & \text{при } n > 0, \\ \frac{1}{2}(c_{1n} + ic_{2n}) & \text{при } n < 0, \end{cases} \quad (3.7.48)$$

і c_{1n} , c_{2n} , A_n є функціями часу.

Підставивши суму (3.7.47) у рівняння (3.7.41), одержимо

$$\sum_{n=-N}^N e^{-inx} \left[\frac{dA_n}{dt} + invA_n \right] = 0. \quad (3.7.49)$$

Враховуючи ортогональність експоненціальних функцій

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{in_1x} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n_1 \neq n, \\ 1 & \text{при } n_1 = n, \end{cases} \quad (3.7.50)$$

множенням рівняння (3.7.49) послідовно на e^{inx} при $n \in [-N, N]$ одержимо систему рівнянь, яким повинні задовольняти коефіцієнти $A_n(t)$

$$\frac{dA_n}{dt} + invA_n = 0. \quad (3.7.51)$$

У цьому випадку розв'язок для коефіцієнтів має вигляд

$$A_n(t) = A_n(0)e^{-invt}. \quad (3.7.52)$$

У випадку складнішої задачі, але з періодичними межовими умо-

вами, множенням відповідного рівняння на e^{inx} та інтегруванням одержується система рівнянь для коефіцієнтів. Після знаходження коефіцієнтів за допомогою формул, подібних до (3.7.43), у нашому випадку (3.7.44) чи (3.7.47), одержується наближений розв'язок для функції $f(t, x)$.

Таким чином, при побудові розв'язання за допомогою спектрального методу непотрібно заміняти похідні у просторі наближеними скінченнорізницевиими виразами, а це означає, що не вносяться й помилки, які є характерними для цієї процедури.

Методика побудови рівнянь для знаходження коефіцієнтів A_n відома в обчислювальній математиці під назвою "метода Гальоркіна".

Для задач динаміки атмосфери та чисельного прогнозу погоди, які розв'язуються на сфері або півсфері, спектральний метод реалізується за допомогою базисних функцій, що задовольняють природним для сфери межовим умовам. Сімейство таких базисних функцій на сфері породжується, зокрема, рівнянням Лапласа. У сферичних координатах ці функції називаються сферичними гармоніками. Зупинимось докладніше на процедурі їх виведення.

Тривимірне рівняння Лапласа у сферичних координатах має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (3.7.53)$$

де f – розв'язок цього рівняння;

r – вертикальна координата;

λ – довгота;

$\theta = \pi - \varphi$ – доповнення широти φ .

Будемо шукати частковий розв'язок цього рівняння методом розділення змінних, подавши його у формі

$$f(\theta, \lambda, r) = u(r)y(\theta, \lambda). \quad (3.7.54)$$

Після підстановки цього розв'язку у (3.7.53) та ділення його на $f(\theta, \lambda, r)$, одержимо

$$\frac{1}{u} \frac{d}{dr} r^2 \frac{du}{dr} + \frac{1}{y \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0. \quad (3.7.55)$$

Оскільки перший та другий доданки залежать від різних аргументів, то виконання рівняння (3.7.55) є можливим, якщо обидва ці доданки дорівнюють однаковим по модулю та протилежним по знаку сталим $\pm \mu$. Тоді

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{du}{dr} = \mu u; \quad (3.7.56)$$

$$\nabla^2 y = -\mu y, \quad (3.7.57)$$

де

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.7.58)$$

Аналіз умов існування обмеженого розв'язку рівняння (3.7.56) показує, що він має місце тільки за умови

$$\mu = n(n+1), \quad (3.7.59)$$

де n – натуральне число.

Припустимо, що частковий розв'язок рівняння (3.7.57) має вигляд

$$y(\theta, \lambda) = P(\theta)Q(\lambda). \quad (3.7.60)$$

Знову використовуючи методику розділення змінних, одержимо на основі рівняння (3.7.57);

$$\frac{d^2 Q}{d\lambda^2} + m^2 Q = 0; \quad (3.7.61)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP}{d\theta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0, \quad (3.7.62)$$

де m – цілі додатні числа ($m \leq n$), що є власними значеннями задачі (3.7.21), яким відповідають власні функції;

$$Q(\lambda) = \sin m\lambda; \quad (3.7.63)$$

$$Q(\lambda) = \cos m\lambda. \quad (3.7.64)$$

Рівняння (3.7.60) після введення нової змінної $x = \cos \theta$ перетворюється у рівняння для приєднаних поліномів Лежандра, які є функціями, обмеженими біля полюсів. Таким чином, часткові розв'язки рівняння (3.7.57), що визначаються формулою (3.7.60), мають вигляд

$$y_{mn} = \begin{cases} P_m^n(\theta) \cos m\lambda, \\ P_m^n(\theta) \sin m\lambda. \end{cases} \quad (3.7.65)$$

Ці розв'язки називаються сферичними функціями (гармоніками).

Вони є обмеженими біля полюсів та періодичними по довготі, що є природною умовою для функцій, які визначають фізичні процеси на сферичній поверхні. Позначення $P_m^n(\theta)$, що застосовуються замість $P(\theta)$, підкреслюють велике значення параметрів n і m при обчисленні приєднаних поліномів Лежандра.

Таким чином, часткові розв'язки (3.7.65), що задовольняють рівнянню (3.5.57), у вигляді

$$\nabla^2 y_{mn} = n(n+1)y_{mn} \quad (3.7.66)$$

є сферичними гармоніками.

Відзначимо найважливіші властивості сферичних гармонік. Насамперед потрібно зазначити, що вони є ортогональними на сферичній поверхні, тобто для них має місце рівність

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y_{mn}(\lambda, \theta) \cdot y_{m_1 n_1}(\lambda, \theta) \sin \theta d\lambda d\theta = 0 \quad \text{при } n_1 \neq n. \quad (3.7.67)$$

Ця властивість спрощує визначення коефіцієнтів у рядах Фур'є.

Відомо, що приєднані функції Лежандра є непарними за параметром m , тобто

$$P_{-m}^n(\theta) = (-1)^m P_m^n(\theta). \quad (3.7.68)$$

Якщо задовольняється умова $n \geq |m|$, то $P_m^n(\theta) = 0$. Для випадку $m = 0$, $P_m^n(\theta)$ переходять у звичайні поліноми Лежандра. Нарешті, при $m > 0$ парність $n - m$ визначає симетричність $P_m^n(\theta)$ або антисиметричність відносно екватора, якщо $n - m$ є непарним. Сама величина $n - m$ визначає кількість коренів $P_m^n(\theta)$ між північним та південним полюсами.

Істотні відмінності $P_m^n(\theta)$ від тригонометричних функцій можна показати на прикладі множення та диференціювання. Відомо, що при множенні тригонометричних функцій виникає сума цих функцій зі зміненими значеннями аргументів. Поліноми $P_m^n(\theta)$ не мають такої властивості. Для них є справедливим менш зручне співвідношення

$$\cos \theta P_m^n(\theta) = \frac{n-m-1}{2n+1} P_m^{n+1}(\theta) - \frac{n+m}{2n+1} P_m^{n-1}(\theta). \quad (3.7.69)$$

Аналогічна незручність має місце й при диференціюванні. Триго-

нометричні функції при диференціюванні переходять одна в іншу. Диференціювання приєднаних поліномів Лежандра приводить до складнішого співвідношення

$$\sin \theta \frac{dP_m^n(\theta)}{d\theta} = (n - m - 1)P_m^{n+1}(\theta) - (n + 1) \cos \theta P_m^n(\theta). \quad (3.7.70)$$

Під час роботи зі сферичними гармоніками для компактності викладення звичайно переходять до використання сферичних гармонік у комплексній формі на основі формул Ейлера (3.7.45) і (3.7.46). Ряд Фур'є для довільної функції

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (A_{mn} \sin m\lambda + B_{mn} \cos m\lambda) P_m^n(\theta) \quad (3.7.71)$$

перетворюється до комплексної форми

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \sigma_{mn} e^{im\lambda} P_m^n(\theta), \quad (3.7.72)$$

де

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{2} (B_{mn} - iA_{mn}), \quad m > 0, \quad (3.7.73)$$

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{2} (B_{mn} + iA_{mn}), \quad m < 0. \quad (3.7.74)$$

Детальніше з комплексною формою сферичних гармонік

$$y_{nm} = e^{im\lambda} P_m^n(\theta) \quad (3.7.75)$$

можна ознайомитися у підручниках з математичної фізики.

Важливо відзначити, що сферичні функції (гармоніки) задовольняють співвідношенню (3.7.66). Однократне диференціювання сферичних гармонік веде до формул:

$$\frac{\partial y_{nm}}{\partial \lambda} = im y_{nm}, \quad (3.7.76)$$

$$\sin \theta \frac{\partial y_{nm}}{\partial \theta} = \frac{(n - m + 1)(n + 2)}{2n + 1} y_{n+1, m} \quad (3.7.77)$$

які виводяться з (3.7.75) та співвідношень (3.7.69) і (3.7.70).

3.7.5 Основні труднощі, що виникають при використанні спектральних методів та способи їх усунення

Застосування спектрального методу в задачі чисельного прогнозу погоди є доцільним, по-перше, внаслідок відсутності помилок при обчисленні похідних у цьому методі, і, по-друге, внаслідок достатньо простого урахування природних межових умов на сфері чи півсфері.

Обмежимося аналізом труднощів, що виникають при використанні спектрального методу, та продемонструємо можливі шляхи їх здолання на прикладі повних рівнянь для барокліної атмосфери, тобто на прикладі рівнянь "мілкої води". У сферичних координатах ці рівняння мають вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \left(\ell + \frac{u}{a} \operatorname{ctg} \theta \right) v + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0; \quad (3.7.78)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(\ell + \frac{u}{a} \operatorname{ctg} \theta \right) u + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0; \quad (3.7.79)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial u \Phi}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v \Phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right] = 0. \quad (3.7.80)$$

Межовими умовами для геопотенціалу Φ є вимога періодичності по λ , а також обмеженості його біля полюсів (для випадку півсфери звичайно вимагається перетворення в нуль похідної по θ від Φ). На жаль, межові умови для u і v сформулювати непросто. Звичайно, вимога періодичності по λ повинна виконуватися і для них. Але, полюси сферичної системи координат є для складових швидкості особливими точками. Вектор вітру біля полюсу в природних умовах є безперервним. Але через особливості сферичної системи координат біля полюсів складові векторів мають розрив.

Цю особливість можна легко усунути, і при використанні методу сіток для визначення складових швидкості біля полюса використовують міркування гладкості поля та будують інтерполяційні формули. Але, якщо розкласти складові швидкості у ряди Фур'є, то наявність особливості біля полюса призводить до того, що такі ряди збігатимуться дуже повільно, тобто для опису полів може знадобитися дуже багато членів ряду. Саме у цьому й полягає перша трудність застосування спектральних методів для розв'язання повних рівнянь.

Інша трудність використання спектрального методу полягає у виборі оптимальної кількості спектральних компонент для подання змінних моделі.

Вибір кількості спектральних компонент, або, як звичайно кажуть, розв'язання проблеми зрізання нескінченних рядів Фур'є, є при чисельному прогнозі за повними рівняннями винятково важливим. Насамперед, це зумовлено тим, що повні рівняння описують не тільки повільні погодотворюючі процеси, а й швидкі їх перебудови, які мають природу гравітаційних хвиль. Якщо узяти занадто багато компонент у спектральному поданні, то для стійкості інтегрування за часом знадобиться брати занадто малий часовий крок, і метод втратить економічність. Якщо узяти невелику кількість компонентів, то при чисельному інтегруванні за часом не буде урахуватись перехід кінетичної енергії від довгих хвиль до коротких. Кінетична енергія буде розповсюджуватись по спектру до самих малих компонент, що ураховуються у моделі, а потім, наче відбиваючись від них, передаватиметься назад по спектру до довгіших гармонік. Таким чином, порушений процес переносу кінетичної енергії по спектру призведе у малокомпонентній моделі до неправильного опису амплітуд усіх довжин хвиль, тобто до перекручування динамічної рівноваги, а отже, до систематичних помилок опису атмосферних процесів.

У теперішній час питання, пов'язані з особливостями біля полюса та зі спектральним зрізанням, досліджені достатньо докладно. Продемонструємо лише один з існуючих варіантів, розроблений стосовно задачі (3.7.78)-(3.7.80) Боурком.

Для того, щоб обійти трудність, яка пов'язана з особливістю біля полюса, можна перейти до подання кінематики течії за допомогою потенціалу χ та функції течії ψ , залучивши співвідношення:

$$u = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right); \quad (3.7.81)$$

$$v = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right). \quad (3.7.82)$$

З урахуванням цих виразів одержимо для відносного вихору Ω та дивергенції D такі формули:

$$\Omega = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u \sin \theta}{\partial \theta} \right); \quad (3.7.83)$$

$$D = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \sin \theta}{\partial \theta} \right). \quad (3.7.84)$$

Звичайним способом, тобто перехресним диференціюванням рівнянь (3.7.78) і (3.7.79) та складанням потрібних лінійних комбінацій, можна

одержати рівняння переносу вихору та дивергенції:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla \cdot \eta \mathbf{v}; \quad (3.7.85)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \eta \mathbf{v} - \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi' \right); \quad (3.7.86)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\nabla \cdot \Phi' \mathbf{v} - \overline{\Phi} D, \quad (3.7.87)$$

де $\overline{\Phi} + \Phi' = \Phi$ – геопотенціал вільної поверхні;
 $\eta = \nabla^2 \Phi + 2\omega \cos \theta$ – абсолютний вихор.

Перехід до виразу кінематичних властивостей потоку через потенціал та функцію течії звичайно не здійснюється, якщо планується розв'язувати задачу методом сіток, оскільки перетворення операторів Лапласа у методі сіток призводить до великих витрат машинного часу внаслідок використання ітераційних процедур. При розв'язанні задачі спектральним методом проблема переходу від функції течії до її лапласіана і назад розв'язується елементарно.

Знімання проблеми перетворення оператора Лапласа уведенням функцій χ і ψ одночасно дозволяє ліквідувати особливі точки на полюсах.

На закінчення необхідно зупинитися на способах зрізання рядів Фур'є, які застосовуються у спектральних моделях.

При зрізанні нескінченного комплексного ряду Фур'є типу (3.7.77) треба залишати по меридіональному хвильовому числу компоненти, що містять однакові за модулем, але протилежні за знаком величини m . Це є необхідним, оскільки шукаються речові, а не комплексні за природою розв'язки.

При виборі межі по другому індексу n у теперішній час найприйнятнішим вважається так зване "трикутне" зрізання, яке має декілька корисних властивостей. Наприклад, кількість членів у сумі

$$f(t, \lambda, \theta) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M f_{mn}(t) y_{mn}(\lambda, \theta)$$

не змінюється, якщо вибрати іншу суму сферичних координат. Величина M варіюється залежно від типу прогнозу. Наприклад, у 2004 р. в глобальній прогностичній системі США при прогнозі на 3,5 доби використовувалось $M = 254$, а при прогнозі на 16 діб – $M = 126$. Ці цифри на порядок перевищують розділення спектральних моделей на початку їх розвитку, коли M дорівнювало $M = 15 \div 18$.

3.8 Питання для самоконтролю

- 1) Запишіть апроксимацію першої похідної за допомогою однібічних та центральних різниць.
- 2) Чому дорівнює точність скінченнорізницевої апроксимації лапласіана?
- 3) Чим розрізняються явні та неявні схеми інтегрування рівнянь за часом?
- 4) Наведіть приклад напівнеявної схеми
- 5) Яка система рівнянь одержується після заміни похідних скінченними різницями в системі рівнянь гідротермодинаміки?
- 6) Який принцип закладено в основу методу сіток?
- 7) Що таке узгодженість скінченнорізницевих схем?
- 8) Що таке коректність, стійкість і збіжність скінченнорізницевих задач?
- 9) Яким чином можна оцінити точність скінченнорізницевої схеми? Яку точність має схема трапецій?
- 10) Що таке точність скінченнорізницевої схеми?
- 11) Наведіть вираз для схеми Ейлера та Хойну.
- 12) Наведіть приклад багатокрокової схеми. Поясніть, як визначається шукана функція за її допомогою.
- 13) Поясніть метод кроків за часом на прикладі неоднорідного лінійного рівняння адвекції.
- 14) Що визначає критерій Куранта-Фрідрікса-Леві?
- 15) Поясніть суть метода Неймана.
- 16) Що спричиняє нелінійну обчислювальну нестійкість?
- 17) Яка з сіток, наведених на рис. 3.5.1 (с. 167) є оптимальною?
- 18) Що таке розхитані сітки?
- 19) Назвіть стійку та нестійку схеми.
- 20) У чому полягає сутність спектральних методів розв'язання прогностичних задач?
- 21) Перелічіть труднощі, що виникають при використанні спектральних методів.

РОЗДІЛ 4

ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ ПРОГНОСТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ПОВНИМИ РІВНЯННЯМИ

Чисельні експерименти з фільтрованими моделями, описаними у розділі 2, та їх оперативне застосування дозволили виявити багато недоліків, які в основному пов'язані з неточностями відтворення атмосферних рухів у межах квазігеострофічного наближення. Насамперед, розв'язки фільтрованих рівнянь описують тільки довгі хвилі (хвилі Россбі).

Сучасні досягнення динамічної метеорології та обчислювальної математики дозволяють зняти обмеження на зв'язок полів вітру та тиску, що накладаються у квазігеострофічних моделях, та перейти до побудови моделей на базі вихідних (неперетворених) рівнянь гідротермодинаміки атмосфери. Ці неперетворені рівняння у метеорології називають повними, а прогностичні моделі, побудовані на базі цих рівнянь – негеострофічними або моделями за повними рівняннями. У більшості негеострофічних моделей використовується рівняння статички, що дозволяє окрім хвиль Россбі описати також інерційно-гравітаційні хвилі.

У цьому розділі обговорюються питання, пов'язані з розв'язанням повних рівнянь у скінченнорізнищевій формі та побудовою прогностичних моделей на базі цих рівнянь у квазігеострофічному та адіабатичному наближеннях для обмежених територій. У цьому випадку можна не використовувати рівняння у сферичних координатах, а обмежитися рівняннями у квазідекартових координатах з вертикальною координатою, пов'язаною тиском.

4.1 Баротропні моделі в ізобаричній та σ -системі координат

Розглянемо тонкий шар однорідної ідеальної рідини ($\rho = \text{const}$), що обмежена знизу горизонтальною поверхнею $z = 0$, а зверху – вільною поверхнею висотою $\bar{H}(x, y, t)$, вище якої розташоване середовище з дуже малою густиною, так що на вільній поверхні $p = \text{const}$. Через те, що $\rho = \text{const}$, з рівняння статички $\partial p / \partial z = -\rho g$ випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial s} \equiv \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial s}(\rho g) = 0, \quad s = (x, y).$$

Відповідно, складові геострофічного вітру u_g і v_g не змінюються за висотою

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial v_g}{\partial z} = 0.$$

Через близькість реального вітру та геострофічного можна також прийняти, що $\partial u/\partial z \approx \partial v/\partial z \approx 0$. Проінтегрувавши рівняння статички по z від довільного z до \bar{H} та урахуваючи, що при $z = \bar{H}$ $p = \text{const}$, одержуємо

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = g \frac{\partial \bar{H}}{\partial s}, \quad s = (x, y).$$

Таким чином, для середовища, що розглядається (у метеорології воно дістало назву "мілка вода"), рівняння руху (1.2.1) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} - \ell u, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

де $\partial \bar{H}/\partial x$ і $\partial \bar{H}/\partial y$ не залежать від z .

Оскільки вважається, що $\rho = \text{const}$, то рівняння нерозривності (1.2.2) спрощується та набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.1.2)$$

Інтегруючи рівняння (4.1.2) по z у межах від 0 до \bar{H} (з урахуванням сталості u і v по z , а також межевої умови $w = 0$ при $z = 0$), одержуємо

$$w_{z=\bar{H}} = -\bar{H} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (4.1.3)$$

Беручи до уваги, що \bar{H} є функцією від горизонтальних координат та часу, маємо

$$w_{z=\bar{H}} = \frac{d\bar{H}}{dt} \equiv \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{H}}{\partial y}. \quad (4.1.4)$$

Об'єднуючи вирази (4.1.3) та (4.1.4) та уводячи геопотенціал вільної по-

верхні $\bar{\Phi} = g\bar{H}$, одержуємо

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + \bar{\Phi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.1.5)$$

або

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \bar{\Phi}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \bar{\Phi}) = 0. \quad (4.1.6)$$

Рівняння (4.1.1) та (4.1.5) є замкненою системою рівнянь мілкої води. Незважаючи на вихідні передумови (модель мілкої води), ці рівняння можуть використовуватися для моделювання атмосферних процесів. На базі цих рівнянь можна, спираючись на скінченнорізницьовий метод, прогнозувати швидкість вітру та геопотенціал кроками за часом. При цьому необхідно мати початкові умови ($u^{t_0}, v^{t_0}, \bar{\Phi}^{t_0}$) та межові умови (наприклад, $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0$).

Рівняння для баротропної атмосфери у σ -системі координат одержуються з системи (1.4.70). Для баротропного середовища густина ρ є функцією тільки тиску p . У цьому випадку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\Phi + RT \ln p); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\Phi + RT \ln p). \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Диференціюючи ці співвідношення по σ та змінюючи порядок диференціювання, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + RT \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \equiv 0; \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + RT \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

тому що

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}.$$

Таким чином, у баротропному середовищі складові градієнта тиску, а відповідно, й геострофічний вітер не залежать від σ , і їх можна віднести до будь-якого рівня. Реальний вітер є близьким до геострофічного, тому у рівняннях руху $\dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma}$, $\dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma}$ можна уважати рівними нулю. Відповідно, рівняння руху можна записати для будь-якого рівня $\sigma = \text{const}$ у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

При $\sigma = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \ell v; \quad (4.1.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial y} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} - \ell u, \quad (4.1.10)$$

де $\rho_s = f(p_s)$;

Φ_s - геопотенціал поверхні Землі.

Ураховуючи, що $\dot{\sigma} = 0$ при $\sigma = 0, 1$ і незалежність u і v від σ , з рівняння нерозривності у σ -системі координат після інтегрування його по σ у межах від 0 до 1 одержимо

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u p_s) + \frac{\partial}{\partial y}(v p_s) = 0. \quad (4.1.11)$$

Рівняння (4.1.9)-(4.1.11) є замкненою системою і дозволяють за початковими даними $u^{t_0}, v^{t_0}, p_s^{t_0}$ з використанням бічних межових умов прогнозувати метеорологічні величини u, v, p_s кроками за часом.

4.2 Бароклінні моделі в ізобаричній та σ -системі координат

Відзначимо спочатку, що тут не ураховуються члени, які описують неадіабатичні процеси ($\dot{Q} = 0$) та силу тертя ($\mathbf{D}_m = \mathbf{D}_t = 0$), що є найбільш

істотними у граничному шарі атмосфери. Тоді, запишемо систему повних рівнянь у системі координат x, y, ζ, t , тобто у так званій ζ -системі координат (див. п. 1.4), в якій замість квазігоризонтальних поверхонь $p = \text{const}$ використовуються поверхні $\zeta = \text{const}$, де $\zeta = p/p_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= -T \frac{R}{\zeta}; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{c^2}{R\zeta} \hat{\tau} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

За зазначених вище умов ($\mathbf{D}_m = \mathbf{D}_t = \dot{Q} = 0$) систему рівнянь (4.2.1) доцільніше використовувати для короткострокового прогнозу у вільній атмосфері. Система з п'яти рівнянь (4.2.1) є замкненою, тому що містить п'ять прогнозованих змінних ($u, v, \hat{\tau}, \Phi, T$) і, в принципі, дозволяє розрахувати їх значення, якщо задаються початкові та межові умови. Ця система містить три прогностичних рівняння з похідними за часом та два діагностичних. Діагностичні рівняння дозволяють за трьома спрогнозованими за допомогою прогностичних рівнянь функціям u, v, T визначити дві інші функції $\hat{\tau}, \Phi$.

Оскільки у системі (4.2.1) три прогностичних рівняння, то для одержання розв'язку цієї системи необхідно задати у початковий момент часу t_0 початкові умови для трьох функцій $u^{t_0}, v^{t_0}, T^{t_0}$. Початкові значення Φ^{t_0} визначаються за допомогою рівняння статички, причому для обчислення Φ^{t_0} потрібно мати значення тиску на рівні моря p . Початкові значення аналога вертикальної швидкості $\hat{\tau}$ визначаються за допомогою рівняння нерозривності.

Початкові умови, за яких шукається розв'язок системи (4.2.1) мають бути тривимірними полями трьох метеорологічних величин u, v, T , що можуть бути одержані за даними спостережень на мережі метеорологічних станцій. Межові умови повинні відбивати вплив зовнішнього по відношенню до області інтегрування середовища на процеси, що описуються рівняннями системи (4.2.1). На верхній межі, тобто при $\zeta = 0$ ($z \rightarrow \infty$), природно скористуватися умовою відсутності потоку маси, тобто $\rho w = 0$,

внаслідок чого можна показати, що

$$\hat{\tau}|_{\zeta=0} = 0. \quad (4.2.2)$$

На нижній межі атмосфери, яка за відсутності нерівностей земної поверхні ототожнюється з рівнем $z = 0$, також береться умова $\rho w = 0$, через що $d\Phi/dt = 0$. Якщо припустити, що $\zeta = 1$ при $z = 0$, то можна записати

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + u \frac{\partial\Phi}{\partial x} + v \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial\Phi}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 1$$

або

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + u \frac{\partial\Phi}{\partial x} + v \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \hat{\tau}RT = 0 \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (4.2.3)$$

Тут ми будемо використовувати умови (4.2.2), (4.2.3), маючи на увазі побудову розв'язку системи рівнянь (4.2.1) для вільної атмосфери, тобто без урахування орографії, турбулентної в'язкості та неадіабатичності.

Для глобальних моделей бічні межові умови не потрібні, але очевидно, що прогностичні моделі для обмежених територій є більш економічними, ніж глобальні. Проте при цьому виникає складна проблема, пов'язана з постановкою бічних межових умов. Якщо бічні умови поставлені погано, то на межах області та поблизу них виникнуть фіктивні хвилі з великою амплітудою, які розповсюджуються усередину області визначення рівнянь моделі та перекручують прогноз.

У принципі, можна розрахувати усі залежні змінні на бічних межах, використовуючи спрямовані усередину області скінченні різниці по x і y у таким чином, щоб для їх обчислення були потрібні лише сіткові значення функцій на межах та у найближчих до межі внутрішніх вузлах сітки. Але треба пам'ятати, що точність апроксимації похідних однобічними та центральними різницями розрізняється (див. розділ 3).

Водночас, можна задати на бічних межах Γ якісь умови, найпростіші з яких мають вигляд

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (4.2.4)$$

Ці умови означають незмінність шуканих функцій (u , v , T) на бічних межах, що свідомо не відповідає реальним процесам. У зв'язку з цим такі умови називають фіктивними. При їх використанні перекручення розв'язків, що виникають поблизу бічних меж, розповсюджуються усередину області інтегрування, знижуючи якість прогнозів.

У наступному підрозділі ми ще повернемося до проблеми постановки початкових та межових умов.

Після того, як були визначені початкові умови для T і $\hat{\tau}$, стає можливим інтегрування прогностичних рівнянь (4.2.1) за часом з урахуванням межових умов. Через нелінійність цих рівнянь виконати точне їх інтегрування неможливо, тому доводиться вдаватися до чисельного інтегрування, наприклад скінченнорізницевим методом. При цьому залучається якась дискретизація простору та часу ($i = x/\Delta x$, $j = y/\Delta y$, $k = \zeta/\Delta \zeta$, $s = t/\Delta t$), будується просторово-часова сітка точок, а диференціальні рівняння системи (4.2.1) апроксимуються скінченними різницями.

Один з можливих способів наближеного розв'язання системи рівнянь (4.2.1) за допомогою методу сіток полягає у наступному. Використовуючи скінченнорізницеву апроксимацію похідних за часом та початкові сіткові значення $u_{ijk}^{t_0}$, $v_{ijk}^{t_0}$, $T_{ijk}^{t_0}$, за допомогою прогностичних рівнянь обчислюють $u_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, $v_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, $T_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, тобто прогностичні значення метеорологічних величин на кінці часового кроку. Під час обчислення цих величин у найближчих до бічних меж вузлах сітки використовуються межові умови (4.2.4). Потім, використовуючи знайдені значення $u_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, $v_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, за допомогою останнього рівняння у системі (4.2.1) та межової умови (4.2.2) розраховують значення $\hat{\tau}_{ijk}^{t_0+\Delta t}$. У цьому рівнянні похідні по x та y замінюються скінченнорізницевими відношеннями, а інтегрування по ζ здійснюється за допомогою якоїсь квадратурної формули.

Для визначення геопотенціалу рівня $\zeta = 1$ у момент часу $t_0 + \Delta t$ використовується межа умова (4.2.3). Значення геопотенціалу усіх інших рівнів у момент часу $t_0 + \Delta t$ визначаються за допомогою одержаних значень $T_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, ґрунтуючись на рівнянні статички

$$\Phi(\zeta) = R \int_{\zeta}^1 \frac{T}{\zeta} d\zeta = R\bar{T} \ln \frac{1}{\zeta}, \quad (4.2.5)$$

де \bar{T} - середня температура у шарі між поверхнею ζ , для якої ведеться розрахунок, та $\zeta = 1$.

Таким чином, одержуються сіткові значення усіх п'яти метеорологічних величин у момент часу $t_0 + \Delta t$: $u_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, $v_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, $T_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, $\hat{\tau}_{ijk}^{t_0+\Delta t}$ і $\Phi_{ijk}^{t_0+\Delta t}$. Процедура чисельного інтегрування повторюється кроками за часом на заданому інтервалі часу прогнозування.

Як відзначалося раніше, у прогностичних моделях часто використовується σ -система координат (див. п. 1.4.3), основна позитивна якість

якої полягає у тому, що в ній земна поверхня співпадає з координатною поверхнею $\sigma = 1$. Тому рівняння в цій системі координат дозволяють описувати атмосферні процеси з урахуванням відхилень координатної поверхні від горизонтальної, тобто з урахуванням рельєфу. Рівняння в ізобаричній системі координат не мають такої властивості.

Виконавши деякі очевидні перетворення та залучивши рівняння потенціальної температури (1.4.62), перепишемо квазістатичну систему рівнянь у σ -системі координат без урахування неадіабатичного припливу тепла та в'язких членів у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= \ell v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x}; \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= -\ell u - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y}; \\
 \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} &= 0; \\
 \frac{\partial p_s}{\partial t} &= \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma; \\
 \Phi &= \Phi_s + R \int_{\sigma}^1 \frac{T}{\sigma} d\sigma'; \\
 \dot{\sigma} &= \frac{\sigma}{p_s} \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma - \frac{1}{p_s} \int_0^{\sigma} \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma'; \\
 \Theta &= T \left(\frac{p_0}{p_s \sigma} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.
 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Система з сімох рівнянь (4.2.6) містить сім залежних змінних $u, v, \dot{\sigma}, \Phi, p_s, \Theta, T$, тобто є замкненою.

Система рівнянь (4.2.6) містить похідні за часом від u, v, Θ, p_s . Для розв'язання цієї системи треба задати початкові значення $u^{t_0}, v^{t_0}, \Theta^{t_0}, p_s^{t_0}$. За існуючої системи одержання оперативної метеорологічної інформації ці значення змінних на σ -поверхнях (які не співпадають з ізобаричними) доводиться розраховувати інтерполяцією за даними на ізобаричних поверхнях.

Межові умови по σ мають вигляд

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 0; 1. \tag{4.2.7}$$

На бічних межах області визначення розв'язку можуть бути використані умови для залежних змінних u, v, Θ, p_s у вигляді (4.2.4), а процедура інтегрування є аналогічною до тієї, що використовується для розв'язання системи рівнянь в ізобаричних координатах.

4.3 Постановка початкових та межових умов

4.3.1 Проблема початкових даних

Як було показано у пп. 4.1 та 4.2, чисельний прогноз погоди за допомогою якоїсь моделі є задачею, для якої необхідна наявність початкових умов. Інакше кажучи, ґрунтуючись на оцінці поточного стану атмосфери, модель прогнозує його еволюцію. Проблема визначення початкових умов для прогностичної моделі є одночасно дуже важливою та складною, через що можна казати про існування цілої науки для її розв'язання. Насамперед, ця проблема полягає у тому, щоб усе різноманіття наявних даних (у теперішній час вони містять аерологічне зондування, спостереження з літаків, наземні спостереження зі станцій, розташованих на суші та морських суднах, температуру та вітер, одержані з метеорологічних супутників, тощо) подати на вхід моделі у вигляді регулярної сіткової інформації за певний момент часу. У цьому підрозділі розглянемо дуже стисло методи, які використовуються при ініціалізації вихідної інформації для чисельних моделей прогнозу.

У чисельних експериментах, що проводилися у першій половині двадцятого сторіччя, усі доступні дані спостережень інтерполювалися ручним способом у вузли сітки, тому ця процедура забирала багато часу і не про який оперативний прогноз мова не велась. Але вже наприкінці 1940-х років з'явився перший метод "об'єктивного аналізу". Проте, існує навіть ще більш важлива проблема, ніж просторова інтерполяція спостережень у сіткові поля, а саме, існуючих даних недостатньо для ініціалізації моделей. Дійсно, сучасні моделі за повними рівняннями мають число ступенів свободи порядку 10^7 . Наприклад, глобальна модель з розділенням один градус по широті та довготі, що є типовим у теперішній час, та з 20-ма вертикальними рівнями має $1,3 \cdot 10^6$ вузлів, у кожному з яких треба мати принаймні 5 прогнозованих змінних та приземний тиск, що у підсумку дає майже 7 мільйонів змінних, які використовуються як початкові дані. В той же час, у часовому інтервалі ± 3 години існує, як правило, тільки від 10 до 100 тисяч спостережень, що на два порядки менше за число ступенів свободи. Більше того, розташування спостережень у просторі та часі є дуже неоднорідним: у деяких регіонах, наприклад над Північною

Америкою або Євразією, їх дуже багато, а в інших – явно недостатньо.

З цієї причини виявилось, що необхідно використовувати додаткову інформацію, яку ще називають фоновою або попередньою, щоб підготувати початкові умови для подальшого прогнозу. Наприклад, можна використати як фонову інформацію кліматологічні дані, що й було зроблено Л.С. Гандінім, але у теперішній час з поліпшенням якості прогнозу в системах засвоєння даних (циклах аналізу) використовуються результати короткострокового, як правило на 6 годин, прогнозу. Цикл аналізу, який схематично показаний на рис. 4.3.1, здійснюється чотири рази на добу та дістав назву чотиривимірному засвоєння даних (4DDA).

У шестигодинному циклі засвоєння даних для глобальної моделі фоною інформацією є тривимірний масив результатів модельного прогнозу на шість годин уперед x^b . Для того, щоб одержати "фонові спо-

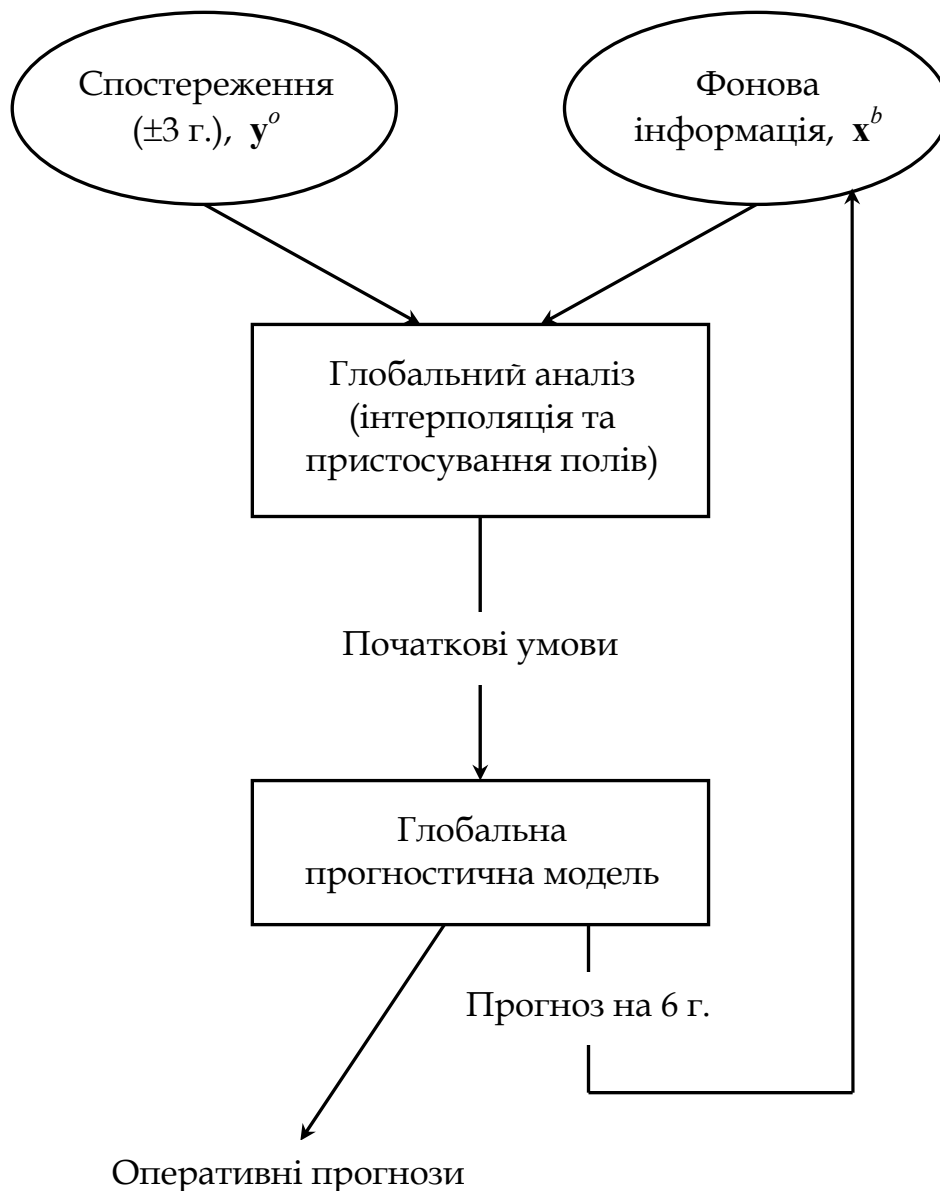


Рисунок 4.3.1 - Діаграма типового циклу засвоєння даних

спостереження", ці результати інтерполюються у пункти спостережень і, якщо результати прогнозу та дані спостережень \mathbf{y}^o не співпадають, перетворюються з модельних змінних у спостереження (наприклад, потоки радіації, що одержуються зі супутників). Тому фоновими спостереженнями є $\mathbf{H}(\mathbf{x}^b)$, де \mathbf{H} – оператор, за допомогою якого здійснюється інтерполяція та зазначене вище перетворення. Різниця між даними спостережень та модельною фоною інформацією $\mathbf{y}^o - \mathbf{H}(\mathbf{x}^b)$ називається надбавкою до спостережень. Нарешті, дані аналізу \mathbf{x}^a , які й використовуються як початкові умови моделі для оперативного прогнозу, одержуються як сума фонові інформації та надбавки до спостережень з вагами \mathbf{W} , що визначаються за допомогою оцінених коваріацій статистичних помилок прогнозу та спостережень

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \mathbf{W}(\mathbf{y}^o - \mathbf{H}(\mathbf{x}^b)). \quad (4.3.1)$$

Сутність рівняння (4.3.1) полягає у тому, що дані аналізу одержуються додаванням надбавки до спостережень, яка наділена оптимальною вагою, до фонові інформації.

На рівнянні (4.3.1) ґрунтуються оптимальна інтерполяція, тривимірні варіаційні методи, метод послідовної корекції, калманівська фільтрація тощо. Усі вони розрізняються тільки підходом, за допомогою якого фонові інформація та спостереження комбінуються для одержання даних аналізу.

У методі оптимальної інтерполяції матриця ваг \mathbf{W} визначається через мінімізацію помилок аналізу в кожній точці сітки. У тривимірному варіаційному методі функція вартості J є пропорційною квадрату відстаней між аналізом і фоною інформацією та спостереженнями і безпосередньо мінімізується для того, щоб одержати дані аналізу \mathbf{x}^a . Можна показати, що оптимальна інтерполяція та варіаційний метод є еквівалентними, якщо функція вартості визначається, як

$$J = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{y}^o - \mathbf{H}(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - \mathbf{H}(\mathbf{x})) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) \right]. \quad (4.3.2)$$

Функція вартості J в (4.3.2) є мірою відстані поля \mathbf{x} від спостережень (перший член у функції вартості) та відстані від фонові інформації \mathbf{x}^b (другий член). Ці відстані масштабуються коваріацією помилок \mathbf{R} та коваріацією помилок фонові інформації \mathbf{B} відповідно. Мінімум функції вартості дістається для $\mathbf{x} = \mathbf{x}^a$, тобто для даних аналізу. Дані аналізу, які одержуються за допомогою (4.3.1) і (4.3.2) будуть однаковими, якщо матриця ваг задається через

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}^{-1})^{-1}. \quad (4.3.3)$$

Відмінність оптимальної інтерполяції (4.3.1) від тривимірного варіаційного методу (4.3.2) полягає у методиці розв'язання: у першому випадку ваги \mathbf{W} одержуються для кожної точки сітки за допомогою відповідних спрощень, а у другому випадку мінімізація (4.3.2) виконується прямо, забезпечуючи додаткову гнучкість та одночасне глобальне використання даних.

Оптимальні ваги \mathbf{W} можна задати виразом

$$\mathbf{W} = \sigma_b^2(\sigma_b^2 + \sigma_o^2)^{-1}, \quad (4.3.4)$$

де σ_b^2 і σ_o^2 – дисперсії помилок фонові інформації та спостережень, відповідно.

Далі, дисперсія помилок даних аналізу σ_a^2 визначається як

$$\frac{1}{\sigma_a^2} = \frac{1}{\sigma_b^2} + \frac{1}{\sigma_o^2}, \quad (4.3.5)$$

внаслідок чого можна визначити σ_a^2 виразом

$$\sigma_a^2 = (1 - \mathbf{W})\sigma_b^2. \quad (4.3.6)$$

Якщо фонові інформацією є прогноз, можна використати рівняння (4.3.1), (4.3.4) та (4.3.6) для створення простого послідовного циклу аналізу, в якому спостереження використовуються лише один раз, а потім відкидаються. Припустимо, що аналіз виконувався у строк t_i і треба зробити наступний цикл у строк t_{i+1} через 6 годин. Цикл аналізу складається з двох фаз: фази прогнозу, коли обновлюється фонові інформація \mathbf{x}^b та її дисперсія помилок σ_b^2 , і фази аналізу, в якій коректуються дані аналізу \mathbf{x}^a та їх дисперсія помилок σ_a^2 .

У фазі прогнозу циклу аналізу фонові інформація спочатку одержується за допомогою прогнозу

$$\mathbf{x}^b(t_{i+1}) = M[\mathbf{x}^a(t_i)], \quad (4.3.7)$$

де M є прогностичною моделлю, яка може бути динамічною моделлю, персистентними (сталіми) кліматичними даними, екстраполяцією тощо. Далі треба оцінити дисперсію помилок фонові інформації. У методі оптимальної інтерполяції це робиться за допомогою деякого простого припущення, наприклад що інтегрування моделі збільшують початкову дис-

персію помилок на множник a , який ненабагато більший за 1, тобто 1.5 або 2,

$$\sigma_b^2(t_{i+1}) = a\sigma_a^2(t_i), \quad (4.3.8)$$

що дозволяє за допомогою (4.3.4) оцінити нові ваги $\mathbf{W}(t_{i+1})$.

У методі калманівської фільтрації також використовується рівняння (4.3.7), але замість припущеного значення $\sigma_b^2(t_{i+1})$, як це робиться в (4.3.8), розраховується коваріація помилки прогнозу за допомогою самої прогностичної моделі.

У фазі аналізу циклу аналізу як для оптимальної інтерполяції, так і для калманівської фільтрації, одержуються нові дані спостережень $\mathbf{y}^o(t_{i+1})$, а потім нові дані аналізу $\mathbf{x}^a(t_{i+1})$ за допомогою (4.3.1) та нова дисперсія помилок аналізу $\sigma_a^2(t_{i+1})$ за допомогою (4.3.6). Після цього цикл для строку t_{i+1} є завершеним.

У методі послідовної корекції на першому етапі значення метеорологічної величини у кожній точці сітки визначається фоновною інформацією, тобто

$$x_i^0 = y_i^b, \quad (4.3.9)$$

де y_i^b – фоновна інформація, оцінена в i -ій точці сітки;

x_i^0 – відповідна оцінка сіткового поля на 0-й ітерації.

Наступні ітерації одержуються "послідовними корекціями"

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \frac{\sum_{k=1}^{K_i^n} W_{ik}^n (x_k^o - x_k^n)}{\sum_{k=1}^{K_i^n} W_{ik}^n \varepsilon^2}, \quad (4.3.10)$$

де x_i^n – оцінка на n -ій ітерації в i -ій точці сітки;

x_k^o – спостереження у k -ому пункті, що оточують i -у точку сітки;

x_k^n – значення величини у k -му пункті спостереження на n -ій ітерації, яке одержується інтерполяцією;

ε^2 – відношення дисперсії помилок спостереження до дисперсії помилок фоновної інформації.

Вагові коефіцієнти W_{ik}^n можна визначити різними способами, наприклад

$$W_{ik}^n = \exp\left(-\frac{r_{ik}^2}{2R_n^2}\right), \quad (4.3.11)$$

де r_{ik} – відстань між k -м пунктом спостереження та i -ю точкою сітки;

R_n – радіус впливу, який визначає кількість спостережень K_i^n поблизу i -ї точки сітки.

Радіуси впливу змінюються від ітерації до ітерації на сталий множник γ , тобто $R_{n+1}^2 = \gamma R_n^2$. Якщо $\gamma = 1$, то ураховуються тільки дані великого масштабу, а при $\gamma < 1$ від ітерації до ітерації в дані аналізу x^a надходить усе більше інформації дрібнішого масштабу.

4.3.2 Проблема межових умов

У теперішній час прогностичні моделі за повними рівняннями використовуються, як правило, у трьох напрямках. По-перше, система повних рівнянь гідротермодинаміки використовується для прогнозу над усією земною кулею (так звані глобальні моделі). По-друге, майже ті ж самі моделі, але з більш високим розділенням, застосовуються для прогнозу над обмеженою територією (регіональні моделі). По-третє, моделями за повними рівняннями можна скористатися з дослідницькими цілями, коли здійснюється або глобальний, або регіональний прогноз.

Цілком природно, що проблема межових умов майже не стосується глобальних моделей насамперед через те, що для них не треба задавати бічні межові умови, а умови на верхній та нижній межах, зазначені у п. 4.2.1 і 4.2.2, є достатньо прийнятними. Проте треба відзначити певні труднощі при інтегруванні глобальних моделей поблизу полюсів, про що зазначалося у п. 3.7.

З іншого боку, для регіональних моделей завдання бічних межових умов є обов'язковим. Прогностичні моделі за повними рівняннями мають три властивості: перша відповідає геострофічному розв'язку, що рухається зі швидкістю потоку U , а інші дві відповідають гравітаційно-інерційним хвилям, що рухаються зі швидкістю $U \pm \sqrt{\ell^2 k^2 + gH}$. Внаслідок цього на бічній межі регіональної моделі у випадку, коли швидкість гравітаційно-інерційних хвиль перевищує швидкість потоку, який надходить до області інтегрування, треба визначити дві межові умови, а якщо потік спрямований з області, то одну. Якщо ж U більша за швидкість гравітаційно-інерційних хвиль, то у сіткових точках, де спостерігається приплив, треба визначити три межові умови, а у тих, де відтік, межові умови

можна не визначати. Саме тому, завдання межових умов є важливим етапом, що передує власне інтегруванню регіональної моделі. Зрозуміло, що погано обґрунтовані межові умови призведуть до спотворення результатів інтегрування. Відзначимо, що сучасні регіональні моделі використовують результати інтегрування за глобальними моделями як власні межові умови (так звані вкладені сітки), але перед формулюванням різних схем їх завдання розглянемо деякі межові умови, які можна застосовувати у дослідницьких цілях.

У п. 4.2.1 і 4.2.2 вже згадувався один тип бічних межових умов, а саме так звані фіктивні умови, за яких шукані змінні на бічних площинах, що обмежують область інтегрування, не змінюються за часом. Зазвичай така постановка призводить до перекручення розв'язку. Іншим підходом є використання умови типу "твердої стінки", за якої повітря не перетинає бічні площини. У загальному вигляді ця умова записується наступним чином:

$$V_n = 0; \quad \frac{\partial V_s}{\partial n} = 0, \quad (4.3.12)$$

де V_n і V_s – нормальна та дотична складові вітру відносно бічної площини відповідно;

n – нормаль до бічної площини.

Якщо розглядати баротропну лінійну модель у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\bar{H} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

то межові умови на західному та східному боках записуються для неї, як

$$u = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (4.3.14a)$$

а на північному та південному боках, як

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad v = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (4.3.14б)$$

Межову умову (4.3.12) слушно використовувати для циліндричної системи координат (п. 1.4.5), в якій атмосферний вихор розглядається як квазіізолюваний, або якщо одна з бічних меж співпадає з екватором. В останньому випадку припускається відсутність потоку повітря через екватор, що хоч і не відповідає дійсності, але є достатньо добрим наближенням.

Також в дослідницькій роботі з моделями за повними рівняннями можна використовувати межову умову нульової дивергенції, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.3.15)$$

При цьому на північній та південній межах складова u визначається з (4.3.12) і v розраховується за допомогою (4.3.15), а на західній та східній межах – навпаки.

Відзначимо також, що для різних меж можна комбінувати зазначені вище три умови.

При чисельному інтегруванні рівнянь моделі на вкладених сітках використовуються два методи. Перший метод припускає тільки однобічне урахування впливу процесів, що описуються на грубій сітці у навколишніх районах, на процеси, які моделюються на дрібній сітці, а зворотнім впливом нехтується. Цей метод називається методом однобічної взаємодії. Другий метод, що дістав назву методу двобічної взаємодії, передбачає урахування двобічної взаємодії між процесами на грубій та дрібній сітках.

Метод однобічної взаємодії має деякі переваги, а саме він дозволяє незалежний розвиток регіональних моделей, а система рівнянь глобальної моделі може інтегруватися на великий проміжок часу без наявності проблем, пов'язаних з нерівномірним розділенням або інтегруванням усередині регіональної моделі.

1) Межові умови типу випромінювання.

Припустимо, що прогностичні рівняння локально задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4.3.16)$$

внаслідок чого фазову швидкість c можна оцінити за допомогою скінченнорізницевого подання рівняння

$$c = - \frac{\partial u}{\partial t} / \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.3.17)$$

у точках, розташованих безпосередньо поблизу межі (позначимо їх через $b - 1$). Використовуючи схему "проти потоку" (див. розділ 3), запишемо

$$c' = - \frac{u_{b-1}^s - u_{b-1}^{s-1}}{\Delta t} / \frac{u_{b-1}^{s-1} - u_{b-2}^{s-1}}{\Delta x}. \quad (4.3.18)$$

Після того, як визначено швидкість c' , якщо вона спрямована усередину розрахункової області, то визначається u_b^{s+1} . Якщо ж вона спрямована з області, то використовується схема "проти потоку"

$$u_b^{s+1} = u_b^s - \frac{\Delta t}{\Delta x} c' (u_b^s - u_{b-1}^s). \quad (4.3.19)$$

Якщо $c' \Delta t / \Delta x > 1$ внаслідок малості просторової похідної u , величина c' обмежується до $c' = \Delta t / \Delta x$.

Така межева умова як правило використовується у дослідницьких цілях нагорі розрахункової області, тобто як верхні межева умова, а в оперативних моделях вона не застосовується.

2) Дифузійне згасання у межовій зоні або "губчатий шар".

У цьому методі до рівняння (4.3.16) у межовій зоні додається горизонтальна дифузія, щоб згасити паразитарні хвилі, які генеруються межевими умовами

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{BZ}. \quad (4.3.20)$$

Цей метод має недоліки, насамперед пов'язані з тим, що хвилі, які надходять до розрахункової області з глобальної моделі, гасяться, якщо їх довжина менша за ширину зони згасання. Також, якщо v різко збільшується, хвилі, що йдуть з розрахункової області, хибно відбиваються, а якщо v збільшується повільно, ширина зони згасання може бути недостатньою, щоб згасити відбиті хвилі. Тому цей метод не дуже часто використовується у сучасних регіональних прогностичних моделях.

3) Схема модифікації тенденції.

Перепишемо хвильове рівняння (4.3.16) у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_b \frac{\partial (u - \bar{u})}{\partial t}. \quad (4.3.21)$$

де \bar{u} - швидкість, одержана з глобальної моделі;

γ_b - коефіцієнт, який дорівнює нулю усередині розрахункової облас-

ті та збільшується до великих значень на її межах.
Через те, що для глобальної моделі виконується хвильове рівняння

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + c \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (4.3.22)$$

можна записати рівняння "помилки" для різниці u' між регіональною та глобальною моделями, як

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + c^* \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad (4.3.23)$$

де $c^* = c/(1 + \gamma_b)$.

Тому ця схема "переносить" помилку та зменшує її до нуля на межах. Але на практиці, для цієї схеми також спостерігається хибне відбиття хвиль.

4) Схема ослаблення потоку.

Ця схема у теперішній час використовується найчастіше. За нею, до прогностичного рівняння (4.3.16) у межевій зоні додається член ньютонова ослаблення

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -K(u - \bar{u}). \quad (4.3.24)$$

Тоді рівняння помилки записуються у вигляді

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + c \frac{\partial u'}{\partial x} = -Ku', \quad (4.3.25)$$

вказуючи на те, що помилка переноситься у напрямку меж та гаситься, причому на вхідній межі гасяться тільки різниці між регіональною та глобальною моделями.

Якщо параметр K збільшується різко, то також може виникнути хибне відбиття хвиль, тому краще використовувати для значень K функцію, що збільшується гладко. Проілюструємо цю схему за допомогою повного прогностичного рівняння регіональної моделі поблизу меж, а саме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F - K(u - \bar{u}). \quad (4.3.26)$$

У цьому рівнянні F містить адвективні члени, складові сил тощо. Для інтегрування за часом використаємо для членів F схему центральних

різниць, а для члена ослаблення на межі – спрямовану проти потоку не-явну схему

$$\frac{u^{s+1} - u^{s-1}}{2\Delta t} = F^s - K(u_i^{s+1} - \bar{u}^{s+1}). \quad (4.3.27)$$

Тут риска зверху позначає глобальну модель, u^{s+1} – значення величини в регіональній моделі на наступному часовому кроці, індекс i позначає розв'язок регіональної моделі, одержаний до ослаблення в напрямку значення глобальної моделі \bar{u}^{s+1} , тобто

$$u_i^{s+1} = \bar{u}^{s-1} + 2\Delta t F^s. \quad (4.3.28)$$

Використовуючи рівняння (4.3.27) і (4.3.28), запишемо:

$$u^{s+1} = u_i^{s+1} - K 2\Delta t u_i^{s+1} + K 2\Delta t \bar{u}_i^{s+1} = (1 - \alpha)u_i^{s+1} + \alpha\bar{u}_i^{s+1}. \quad (4.3.29)$$

Тут $\alpha = 2\Delta t K$ змінюється від нуля усередині регіональної моделі (тобто $K = 0$) до одиниці на межі, де розв'язок регіональної моделі визначається таким, щоб співпадати з розв'язком глобальної моделі.

Визначимо, що $j = 0$, $\alpha(0) = 1$ на межі, та припустимо, що межева зона містить n точок, так що для $j \geq n$, $\alpha(j) = 0$. У теперішній час існує декілька функціональних залежностей для α :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - j/n; \\ \alpha &= \frac{1 + \cos(j\pi/n)}{2}; \\ \alpha &= 1 - \tanh(j/2); \\ \alpha &= \cos^2(j\pi/2n), \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

причому дві останні є оптимальними для мінімізації хибного відбиття як хвиль Россбі, так і гравітаційних хвиль.

Відзначимо також, що можливі комбінації зазначених вище схем, наприклад

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -K(u - \bar{u}) + \left(\frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial (u - \bar{u})}{\partial x} \right)_{BZ}, \quad (4.3.31)$$

яка використовується в регіональній моделі Метеорологічної служби Японії.

5) Метод двобічної взаємодії.

При використанні методу двобічної взаємодії інтегрування рівнянь моделі на грубій (у глобальній моделі) та дрібній (у регіональній моделі) сітках тісно пов'язані між собою. При інтегруванні рівнянь моделі на вкладених сітках за допомогою методу двобічної взаємодії передбачається така процедура обчислень. Спочатку прогнозуються залежні змінні наприкінці одного кроку за часом на грубій сітці. За їх значеннями інтерполяцією розраховуються значення у мезових вузлах дрібної сітки. Потім інтегруються рівняння моделі на дрібній сітці на інтервал часу, що дорівнює часовому кроку на грубій сітці. Після цього знову інтегруються рівняння моделі на грубій сітці, але при цьому використовуються результати дрібної сітки.

При реалізації методу двобічної взаємодії головна трудність полягає в узгодженні розв'язків на грубій та дрібній сітці, необхідність якого зумовлена різницею фазових швидкостей. На грубій сітці фазові швидкості є меншими, ніж на дрібній сітці. Фазова швидкість коротких хвиль є меншою, ніж довгих. Хвилі, які можуть бути подані на двох сітках при переході з грубої сітки на дрібну, прискорюються і тому витягаються у напрямку їх переміщення, а при переході з грубої сітки на дрібну – вповільнюються та сплющуються. Ті хвилі, які можуть бути подані тільки на дрібній сітці, на межі між сітками відбиваються усередину дрібної сітки або перетворюються в інші хвилі. За рахунок різниць у значеннях фазових швидкостей на сітках з різним розділенням виникають помилки розв'язання на грубій сітці; цей ефект називають обчислювальним переломленням.

4.4 Динамічне узгодження вихідних полів

Відомо, що прогностичні моделі за повними рівняннями є більш вразливими до неточностей вихідної інформації, ніж фільтровані. При переході від фільтрованих моделей (наприклад, квазігеострофічних) до моделей за повними рівняннями необхідно як вихідну інформацію додатково до даних про геопотенціал використовувати дані про вітер. Але поля швидкості вітру вимірюються з великими похибками; крім того, дані про вітер містять локальні неоднорідності полів, які мало впливають на еволюцію прогнозованих великомасштабних процесів. Це перешкоджає прямій підстановці таких даних у прогностичні рівняння, тому що похибки вихідної інформації призводять до появи у розв'язку високочастотних хибних коливань, амплітуда яких може збільшуватися до нерелевантних величин і затушовувати основні компоненти руху. Таким чином, виникає проблема спеціальної обробки вихідних даних, яка зменшувала

б ефект як похибки вимірювань, так і дрібномасштабних збурень, пов'язаних, зокрема, з недостатньою репрезентативністю метеорологічних станцій. Результатом такої процедури є відфільтрування джерел високо-частотних коливань (шумів), які не мають відношення до процесів синоптичного масштабу.

У багатьох наукових працях показано, що знизити рівень високо-частотних шумів можна за допомогою спеціальної обробки вихідних метеорологічних полів, що передує власне прогнозу. Ідею такої процедури можна пояснити таким чином. Добре відомо, що деякі метеорологічні величини повинні задовольняти цілком визначеним співвідношенням, наприклад, виконанню умови квазістатистики або квазігеострофічності у вільній атмосфері. Але, якщо здійснити відповідну перевірку за даними натурних вимірювань, то неважко переконатися, що це не так. З одного боку, це пов'язано з зазначеними недоліками вихідної інформації (різна точність вимірювань), а з іншого – з неадекватністю використовуваної системи рівнянь. Справа у тому, що будь-яка система прогностичних рівнянь є спрощеною, хоч і достатньо складною, моделлю атмосферних процесів і тому не може відбивати усі дрібні деталі метеорологічних полів, вплив яких об'єктивно міститься у вихідній інформації. Але, якщо вжита модель атмосфери дає прийнятну точність прогнозу, то доцільно виконувати "припасування" вихідних даних, після якого вони з найкращим наближенням задовольнятимуть використовуваній у моделі системі рівнянь. У процесі такого "припасування" (настроювання), яке звичайно називають узгодженням вихідних полів, вплив похибки початкових даних може бути істотно зменшений.

У теперішній час розвинуто спосіб узгодження полів тиску та вітру на основі тих же самих різницевих рівнянь, які повністю збігаються зі змістом прогностичної моделі. Це дозволяє тим самим урахувати як фізичні, так і математичні обмеження конкретної прогностичної моделі. Таке узгодження, яке будемо називати динамічним, здійснюється багатократним інтегруванням системи різницевих повних рівнянь на один крок уперед, а потім – назад ("прогноз уперед-назад"). Така процедура повторення циклів "прогноз уперед-назад" називається "псевдопрогнозом". У ній може використовуватися скінченнорізницева апроксимація за методом Ейлера з перерахунком, що має властивість заглушати високочастотні коливання.

Розглянемо деякі схеми динамічного узгодження. Нагадаємо, що будь-яке прогностичне (еволюційне) рівняння (рівняння руху, припливу тепла та водяної пари) системи гідротермодинаміки у загальному вигляді можна подати, як

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F(X), \quad (4.4.1)$$

де $X = \{u, v, T, q\}$;

$F(X)$ – права частина відповідного рівняння.

Конкретний вигляд нелінійного оператора $F(X)$ залежить від рівняння і, наприклад, для першого рівняння руху записується, як

$$F(X) \equiv - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right).$$

При використанні однобічних різниць для часової похідної рівняння (4.4.1) запишеться у вигляді

$$\frac{X_{s+1} - X_s}{\Delta t} = \hat{F}(X) \quad \text{або} \quad X_{s+1} = X_s + \hat{F}(X)\Delta t, \quad (4.4.2)$$

де $s, s+1$ – поточний та майбутній моменти часу відповідно;

Δt – часовий крок ($t_{s+1} - t_s$);

$\hat{F}(X)$ – різницевий аналог оператора правої частини.

Далі у тексті як оператор $F(X)$ мається на увазі оператор $\hat{F}(X)$.

1) Схема Нітта.

У цій схемі використовується так званий цикл Мацуно, згідно з яким кожний крок за часом розбивається на чотири такти. Прогноз уперед здійснюється згідно зі схемою (4.4.2):

$$\begin{aligned} X_{s+1}^* &= X_s + F(X_s)\Delta t; \\ X_{s+1} &= X_s + F(X_{s+1}^*)\Delta t, \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

де X_{s+1}^* – попереднє значення функції X у момент часу $s+1$;

X_s, X_{s+1} – значення функції X у момент часу s і $s+1$ відповідно;

$F(X_s), F(X_{s+1}^*)$ – значення правої частини рівняння у вигляді (4.4.1), розраховані за X_s і X_{s+1}^* .

Викладена схема апроксимації за часом, має назву схеми Ейлера з перерахунком. Аналогічно при прогнозі назад:

$$\begin{aligned} X_s^* &= X_{s+1} - F(X_{s+1})\Delta t; \\ \tilde{X}_s &= X_{s+1} - F(X_s^*)\Delta t. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Таким чином, здійснюється замкнений чотиритактний цикл процедури псевдопрогнозу, результатом якого є нове наближення полів \tilde{X} у

початковий момент часу. Такий цикл повторюється до установлення деякого стану полів \tilde{X} , який не буде істотно змінюватися при подальшому псевдопрогнозі.

Пояснимо це докладніше. Запишемо систему рівнянь (4.4.3)-(4.4.4), беручи до уваги, що багаторазове повторення циклу "прогноз уперед-назад" є деяким ітераційним процесом:

$$\begin{aligned} X_{s+1}^* &= X_s^v + F(X_s^v)\Delta t; \\ X_{s+1}^v &= X_s^v + F(X_{s+1}^*)\Delta t; \\ X_s^* &= X_{s+1}^v - F(X_{s+1}^*)\Delta t; \\ X_s^{v+1} &= X_{s+1}^v - F(X_s^*)\Delta t. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Критерієм закінчення такого ітераційного процесу є виконання умови $\max |X_s^{v+1} - X_s^v| \leq \varepsilon_0$, тобто коли максимальна різниця у будь-якому вузлі розглянутих полів на сусідніх ітераціях не перевищує наперед задану малу величину ε_0 , наприклад, похибку вимірювань.

Основне значення цього методу полягає у тому, що на кроках уперед у процесі пристосування полів генеруються гравітаційні хвилі, які селективно фільтруються за допомогою скінченнорізницевої апроксимації за часом (схема Ейлера з перерахунком), а на кроках назад здійснюється повернення до нового вихідного стану (з додатковою фільтрацією у короткохвильовому діапазоні), в якому великомасштабні риси полів практично не змінюються, а шуми у значній мірі заглушаються. Треба при цьому звернути увагу, що вигляд оператора \hat{F} хоч і залишається тим самим, але застосовується він зі зростанням номеру такту до усе більш згладжених полів X . Фільтруючу роль схеми Мацуно пояснимо на прикладі лінійного рівняння одновимірної адвекції

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4.4.6}$$

Використовуючи (4.4.2), можна записати (4.4.6) для першого такту циклу Мацуно, як

$$u_{s+1}^* = u_s - c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_s \Delta t. \tag{4.4.7}$$

Розіклавши u_{s+1}^* у ряд Тейлора, обмежуючись трьома членами

$$u_{s+1}^* = u_s + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_s + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_s + O(\Delta t)^2,$$

та підставивши цей вираз у (4.4.7), одержимо

$$u_s + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_s + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_s = u_s - c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_s \Delta t$$

або

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_s + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_s = -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_s. \quad (4.4.8)$$

З (4.4.6) одержимо диференціюванням по t

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_s = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.4.9)$$

Підставляючи (4.4.9) у (4.4.8), одержимо

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_s + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_s = -c^2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_s. \quad (4.4.10)$$

Наявність в'язкого члена в (4.4.10) у порівнянні з вихідним рівнянням (4.4.6) ніякого відношення до реальної фізичної в'язкості не має, а є лише "продуктом" використовуваної обчислювальної схеми. Таку "в'язкість" будемо іменувати обчислювальною або рахунковою.

Отже, з (4.4.10) видно, що схема Мацуно на першому такті вносить від'ємну рахункову в'язкість, яка, у принципі, повинна генерувати високочастотні гармоніки.

На другому такті функція u розраховується за таким виразом:

$$u_{s+1} = u_s - c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{s+1}^* \Delta t. \quad (4.4.11)$$

Розкладемо за аналогією з попереднім u_{s+1} у ряд Тейлора

$$u_{s+1} = u_s + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_s + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_s + O(\Delta t)^2. \quad (4.4.12)$$

З (4.4.11) та (4.4.12) одержимо

$$u_s + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_s + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_s = u_s - c \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)_{s+1} \Delta t,$$

і з урахуванням (4.4.7) та (4.4.9) цей вираз набуває вигляду

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_s + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_s = c^2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_s. \quad (4.4.13)$$

Вигляд рівняння (4.4.13) показує, що схема на другому такті вносить додатну рахункову в'язкість, яка повинна заглушати високочастотні шуми. За аналогією можна одержати, що на третьому та четвертому тактах схема Мацуно також вносить додатну та від'ємну рахункову в'язкість.

Якщо зробити аналогічні викладки для усього чотиритактного циклу Мацуно, то нескладно одержати, що \tilde{u}_s ("сигнал" на виході) виражається через вихідну u_s ("сигнал" на вході) через

$$\tilde{u}_s = u_s + c^2 (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_s. \quad (4.4.14)$$

З (4.4.14) видно (другий член праворуч), що процедура інтегрування лінійного рівняння переносу за схемою "псевдопрогнозу" є еквівалентом процедури згладжування (додатна рахункова в'язкість).

Розглянемо згідно з (4.4.14) співвідношення амплітуди функції на виході циклу Мацуно до початкової, припускаючи, наприклад, що:

$$u_s = A e^{ikx}; \quad k = \frac{2\pi}{L},$$

де k – хвильове число;

L – довжина хвилі;

A – амплітуда хвилі.

Тоді, якщо узяти тільки дійсну частину,

$$u_s = A \cos kx,$$

$$\tilde{u}_s = A_1 \cos kx,$$

одержимо

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\tilde{u}_s}{u_s} = \frac{u_s + c^2(\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_s}{u_s} = 1 - \frac{Ac^2(\Delta t)^2 k^2 \cos kx}{A \cos kx}$$

або

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\tilde{u}_s}{u_s} = 1 - c^2(\Delta t)^2 k^2. \quad (4.4.15)$$

З (4.4.15) видно, що сильніше згладжуються високочастотні гармоніки з великими хвильовими числами, тобто короткі хвилі. Відповідно, цикл Мацуно є своєрідним селективним фільтром для високочастотних шумів. Тоді хвилі з $L = 2d$ повністю відфільтровуються, амплітуда хвиль з $L = 4d$ зменшується удвічі, а хвилі з $L = 6d$ зберігають $\frac{3}{4}$ своєї амплітуди (тут d – крок сітки). Більш довгі хвилі залишаються практично неперекрученими.

Співвідношення амплітуд одержаної функції до початкової можна дістати іншим чином. Нехай

$$X_s^v = e^{-i\sigma t}. \quad (4.4.16)$$

З (4.4.5) одержимо

$$X_s^{v+1} = X_s^v + (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right)_s + (\Delta t)^4 \left(\frac{\partial^4 X}{\partial t^4} \right)_s. \quad (4.4.17)$$

Підставляючи (4.4.16) у (4.4.17), одержимо

$$X_s^{v+1} = e^{-i\sigma t} - \sigma^2(\Delta t)^2 e^{-i\sigma t} + \sigma^4(\Delta t)^4 e^{-i\sigma t}.$$

Тоді відношення амплітуди одержаної функції до вихідної має вигляд

$$R = \frac{X_s^{v+1}}{X_s^v} = 1 - \sigma^2(\Delta t)^2 + \sigma^4(\Delta t)^4. \quad (4.4.18)$$

Таким чином, досягнута головна мета – у вихідних (початкових) полях тиску та вітру відфільтровані високочастотні гармоніки, які у протилежному випадку різницевою схемою прогнозу сприймалися б як реальні високочастотні гравітаційні хвилі.

Фільтрація високочастотних коливань (шумів) стала можливою тільки завдяки конкретно використаній різницевій схемі Ейлера з пере-

рахунком, яка має демпфуючі властивості.

У практиці гідродинамічного прогнозу для узгодження початкових полів метеорологічних величин використовуються, хоч і набагато рідше, деякі інші схеми скінченнорізницевої апроксимації.

2) Схема Окамури.

Запишемо (4.4.2) на кроці уперед

$$X^* = X^v + \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^v \Delta t, \quad (4.4.19)$$

де X^* - передбачене значення.

Для обчислення на кроці назад використаємо

$$X^{**} = X^* - \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^* \Delta t, \quad (4.4.20)$$

де X^{**} - наближене початкове значення.

Тоді $(v + 1)$ -е початкове значення визначається виразом

$$X^{v+1} = 3X^v - 2X^{**}, \quad (4.4.21)$$

і, використовуючи (4.4.19) та (4.4.20), вираз (4.4.21) набуває вигляду

$$X^{v+1} = X^v + 2(\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right)^v. \quad (4.4.22)$$

Підставляючи (4.4.16) у (4.4.22), одержимо

$$X^{v+1} = e^{-i\sigma t} - 2\sigma^2 (\Delta t)^2 e^{-i\sigma t} = e^{-i\sigma t} [1 - 2\sigma^2 (\Delta t)^2].$$

Тоді

$$R = \frac{X_s^{v+1}}{X_s^v} = 1 - 2\sigma^2 (\Delta t)^2. \quad (4.4.23)$$

Порівнюючи (4.4.18) і (4.4.23) можна бачити, що схема Окамури сильніше заглушає високочастотні збурення, ніж схема Нітта.

3) Модифікована схема Куріхари.

Запишемо систему (4.4.2) на кроці уперед:

$$\begin{aligned}
X^* &= X_s + F(X_s) \frac{\Delta t}{2}; \\
X^{**} &= X_s + F(X^*) \Delta t; \\
X_{s+1} &= X_s + F(X^{**}) \Delta t,
\end{aligned}
\tag{4.4.24}$$

і на кроці назад:

$$\begin{aligned}
X^* &= X_{s+1} - F(X_{s+1}) \frac{\Delta t}{2}; \\
X^{**} &= X_{s+1} - F(X^*) \Delta t; \\
X_s &= X_{s+1} - F(X^{**}) \Delta t.
\end{aligned}
\tag{4.4.25}$$

У результаті нескладних перетворень одержимо

$$X_s^{v+1} = X_s^v + (\Delta t)^2 \frac{\partial^2 X_s^v}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^6}{4} \frac{\partial^6 X_s^v}{\partial t^6}.
\tag{4.4.26}$$

Використовуючи (4.4.17), одержимо

$$X_s^{v+1} = \left[1 - \sigma^2 (\Delta t)^2 + \frac{\sigma^6 (\Delta t)^6}{4} \right] e^{-i\sigma t}.$$

Тоді

$$R = \frac{X_s^{v+1}}{X_s^v} = 1 - 2\sigma^2 (\Delta t)^2 + \frac{\sigma^6 (\Delta t)^6}{4}.
\tag{4.4.27}$$

Ця схема краще осереднює за часом, ніж попередні схеми, але машинний час для обрахунків при її використанні є істотно більшим, ніж для перших двох схем.

4) Схема Темпертона.

За цією схемою розраховується прогноз на періоди $t_0 + T/2$ та $t_0 - T/2$ і осереднюються межові значення або вітру, або геопотенціалу. Після цього цикл повторюється з новим осередненим значенням. У цій схемі для осереднення за часом використовуються центральні різниці. При прогнозуванні у цій схемі на першому кроці за часом використовується схема Ейлера з перерахунком, а на наступних кроках – схема Адам-

са. За цією схемою найкращий результат одержується при інтервалі осереднення за часом, що дорівнює $6\Delta t$.

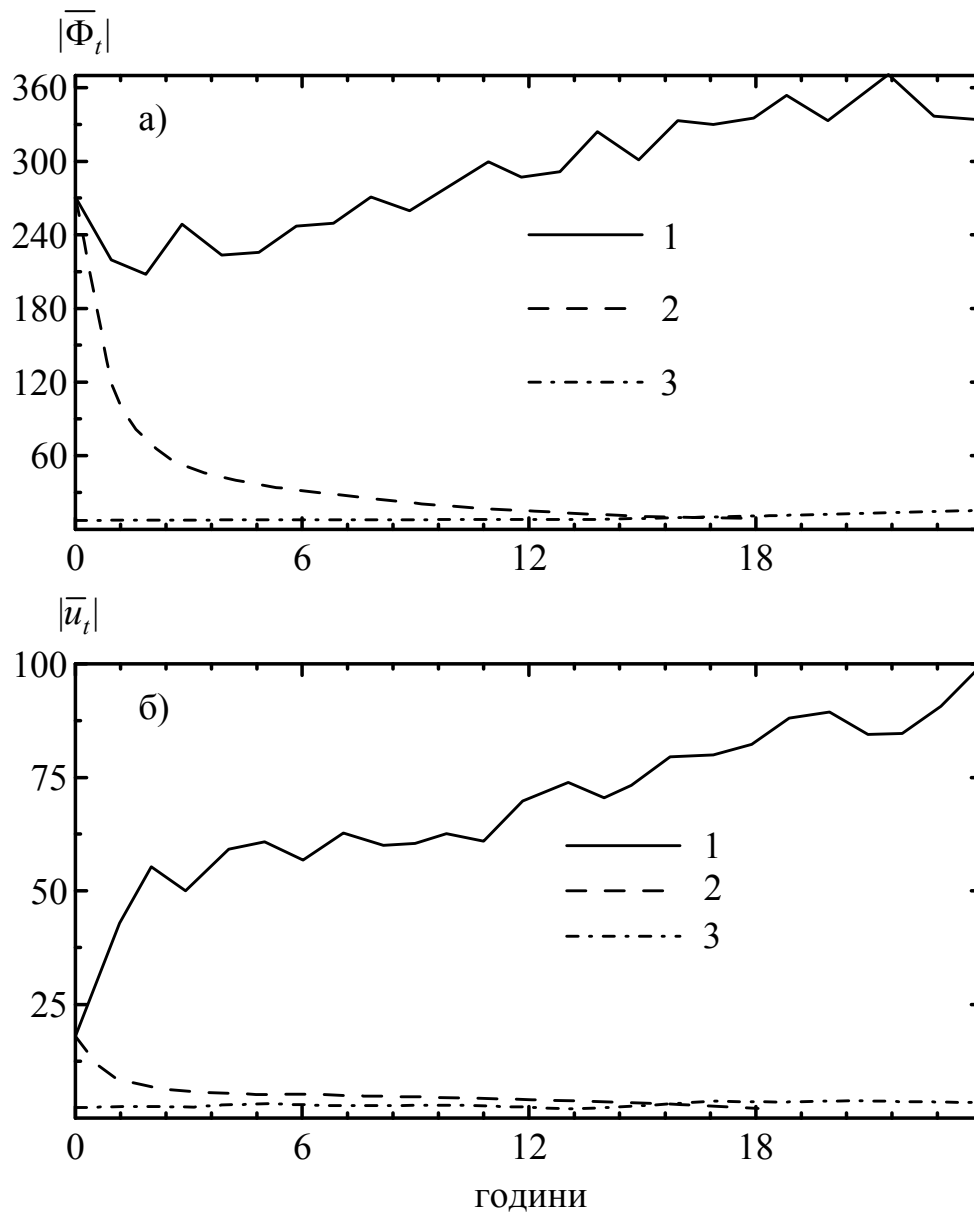
Розглянемо результати динамічного узгодження полів тиску та вітру у межах баротропної моделі, де просторові похідні апроксимувалися за згладженою схемою Шумана. Про динаміку процесу узгодження можна міркувати за даними рис. 4.4.1.

На рис. 4.4.1 криві лінії відображують часовий хід осереднених за областю прогнозу модулів тенденцій геопотенціалу $|\overline{\Phi}_t|$ та вітру $|\overline{u}_t|$ у процесі псевдопрогнозу. Як початкові поля у момент часу t_0 задавалися реальні поля геопотенціалу та вітру, які потім змінювалися не тільки усередині чотиритактного циклу Мацуно, а й протягом усього часу псевдопрогнозу. Нагадаємо, що для процедури узгодження використовувалась та ж система рівнянь, що й для моделі прогнозу. Така технологія іменується режимом вільного динамічного узгодження.

Як впливає з аналізу рис. 4.4.1, найістотніші зміни геопотенціалу та вітру мають місце у перші 5-6 годин псевдопрогнозу (тут і надалі кількість циклів Мацуно перераховано у масштабі реального часу). При цьому поле вітру змінюється набагато повільніше, ніж поле геопотенціалу. Ці результати добре узгоджуються з висновками лінійної теорії адаптації зазначених полів, тобто можна, по суті, ототожнити режими узгодження та адаптації. На закінчення періоду адаптації (5-6 годин) значення тенденцій геопотенціалу та вітру різко зменшуються і приблизно на 18 годину псевдопрогнозу виходять на слабо коливальний режим, що свідчить про те, що поля геопотенціалу та вітру можна уважати взаємоузгодженими.

На рис. 4.4.1 також подано часовий хід прогностичних тенденцій геопотенціалу та вітру за неузгодженими (крива 1) та узгодженими (крива 3) вихідними полями. Як видно, у прогностичних полях за неузгодженими даними виявляється чітка тенденція до невиправданого зростання тенденцій геопотенціалу та вітру зі збільшенням строку прогнозу, що призводить в остаточному підсумку до "вибуху" розв'язку. Це є переконливим доказом впливу паразитарних високочастотних шумів, які й призвели до істотного перекручування фізично реальних мод скінченнорізного розв'язання. Для прогностичних полів при цьому є характерною багаточасова мезомасштабна структура, що є свідомо нереальним для макромасштабного процесу.

На противагу цьому, прогностичні тенденції геопотенціалу та вітру за узгодженими вихідними даними (криві 3) не відчують скільки-небудь помітних коливань, а їх значення залишаються приблизно однаковими на весь термін добового прогнозу, що дійсно відповідає реальній картині еволюції процесів макромасштабу. У цьому випадку мезомасштабні осередки у прогностичних полях повністю відсутні, що ще раз свід-



- 1 – у прогнозі без узгодження;
 2 – у процесі узгодження;
 3 – у прогнозі з узгодженням.

Рисунок 4.4.1 – Зміни $|\overline{\Phi}_t|$ ($\times 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$) та $|\overline{u}_t|$ ($\times 10^{-5} \text{ м} \text{ с}^{-2}$) у процесі динамічного узгодження та прогнозу (за А.Ф. Ківгановим)

чить про стійкість схеми Ейлера з перерахунком та збіжність скінченно-різницевого розв'язку.

Про селективність фільтрації високочастотних коливань за допомогою циклу Мацуно можна міркувати за даними табл. 4.4.1, у якій подані спектральні значення питомої кінетичної енергії $K = (u^2 + v^2)/2$, осередненої за областю узгодження та прогнозу.

Як видно з порівняння енергетичних спектрів вихідного, прогнос-

тичного та фактичного полів вітру, при використанні неузгоджених початкових даних істотного перекручування зазнають усі ділянки спектра, починаючи від зонального потоку (K_0). Значення енергії у 2-3 рази, а для коротких хвиль більше, ніж на порядок, перебільшують значення енергії фактичних полів; чітко простежується хибне накопичення енергії у діапазоні синоптичних та коротких хвиль, що обумовлюється наявністю тут паразитарних високочастотних шумів. На противагу цьому при прогнозі за узгодженими даними значення кінетичної енергії зонального потоку практично збігаються з фактичними (відхилення не перевищують 1%). У решті спектральних діапазонів кінетична енергія прогностичних полів менша за фактичну. При цьому енергія довгих хвиль зменшується у середньому на 12%, синоптичних – на 30%, а коротких – на 50%. Найбільших змін, таким чином, зазнає короткохвильовий діапазон і тому хвилі довжиною від 2 до 5 сіткових кроків у значній мірі заглушаються, що у свою чергу обумовлює стійкість різницевого розв'язку.

З попереднього розглядання випливає, що процедура динамічного узгодження початкових полів є невід'ємною частиною алгоритму реалізації моделей прогнозу за повними рівняннями, особливо коли мова йде про прогнози середньої (3-7 діб) завчасності. Але при цьому треба мати на увазі, що витрати машинного часу на етапи динамічного узгодження і

Таблиця 4.4.1. Результати спектрального аналізу кінетичної енергії для різних хвильових чисел k та довжин хвиль L у км (за А.Ф. Ківгановим)

Характеристика спектра	Вихідне поле	Прогностичне поле		Фактичне поле
		без узгодження	з узгодженням	
Фон K_0 , $k = 0$	1034	1867	920	924
Довгі хвилі, $L \geq 3400$; $k = 1-2$	207	406	198	218
Синоптичні хвилі, $1100 \leq L < 3400$; $k = 3-6$	16	113	16	41
Короткі хвилі, $420 \leq L < 1100$; $k = 7-15$	7	212	9	19
$\sum_{k=0}^{15} K_k$	1264	3198	1103	1202
$\sum_{k=0}^{15} K_k / K_0$	1,2	2,1	1,2	1,3

власно прогнозу мають практично один порядок, тому практична реалізація такого об'єднаного алгоритму є можливою лише за наявності найсучаснішої обчислювальної техніки. За відсутності такої техніки доводиться задавати як початкову умову поле геострофічного вітру, яке розраховується за вихідним полем геопотенціалу.

4.5 Розв'язання системи повних рівнянь гідротермодинаміки кроками за часом

Розглянемо принципи інтегрування у часі системи повних рівнянь на прикладі баротропної моделі в ізобаричній системі координат, яку запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(u\Phi) - \frac{\partial}{\partial y}(v\Phi).\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

Як вже відзначалося у п. 4.1, ця система складається з трьох рівнянь та містить три прогностичних змінних. Якщо позначити через F праві частини рівнянь (4.5.1) та використати для інтегрування за часом схему центральних різниць (див. п. 3.6.2), яка найчастіше використовується у сучасних прогностичних моделях, то різницевий аналог системи (4.5.1) матиме вигляд:

$$\begin{aligned}u^{s+1} &= u^{s-1} + 2\Delta t F_u^s; \\ v^{s+1} &= v^{s-1} + 2\Delta t F_v^s; \\ \Phi^{s+1} &= \Phi^{s-1} + 2\Delta t F_\Phi^s.\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

Внаслідок того, що схема центральних різниць має три рівні у часі, перед тим, як її використовувати, треба розв'язати дві проблеми.

Перша полягає у тому, що застосування цієї схеми потребує додаткового початкового кроку, щоб одержати величини на першому часовому рівні t_1 з початкових умов на рівні t_0 . Це може бути зроблене декількома простими способами.

По-перше, можна визначити, наприклад, що $u^1 = u^0$, але це призво-

дить до помилки порядку $O(\Delta t)$, тоді як схема центральних різниць має другий порядок точності по Δt , і такий підхід не рекомендується для використання.

По-друге, на першому часовому кроці можна скористуватися, наприклад, схемою Ейлера або Мацуно. Це також призведе до погіршення точності, але внаслідок того, що такий часовий крок використовується тільки одного разу, остаточна помилка апроксимації буде мати порядок $O[(\Delta t)^2]$.

По-третє, можна зробити перший крок таким, щоб він становив тільки одну другу, четверту або восьму від кроку за часом, який буде використовуватися надалі. Це зменшить помилку, уведену на першому кроці, вдвічі, вчетверо тощо.

Інша проблема пов'язана з тим, що для систем нелінійних рівнянь схема центральних різниць має тенденцію збільшувати з часом амплітуду обчислювальної моди. Цього недоліку можна позбутися впровадженням часового фільтра Роберта-Асселіна на кожному кроці s після того, як був одержаний розв'язок на кроці $s + 1$; наприклад для складової вітру u

$$\bar{u}^s = u^s + \alpha(u^{s+1} - 2u^s + \bar{u}^{s-1}). \quad (4.5.3)$$

Після такої фільтрації одержане значення \bar{u}^s замінює розв'язок на кроці s . За допомогою фільтра Роберта-Асселіна зменшується амплітуда різних частот σ на множник $\left(1 - 4\alpha \sin^2 \frac{\sigma \Delta t}{2}\right)$. Тому обчислювальна мода з періодом $2\Delta t$ буде зменшена в $(1 - 4\alpha)$ рази на кожному часовому кроці. У більшості прогностичних моделей приймається $\alpha = 0,01$.

Нарешті, відзначимо, що залучення центральних різниць при інтегруванні за часом дозволяє одержати нові можливості в розподілі змінних, тому що тепер сітка може бути розхитаною й у часі. Однією з таких розхитаних як у просторі, так й у часі сіток є сітка Еліасена (рис. 4.5.1). Як не дивно, але тут використовується просторова сітка, зображена на рис. 3.5.1г, розв'язок якої дуже розбігається з точним розв'язком для гравітаційно-інерційних хвиль (рис. 3.5.2). Незважаючи на це, просторово-часова сітка Еліасена є майже оптимальною для чисельних моделей, в яких використовується припущення квазістатичності. Єдиний недолік полягає у тому, що в адвективних членах потрібно зробити додаткове осереднення.

Продемонструємо використання сітки Еліасена для системи (4.5.1). Якщо б усі змінні обчислювалися на кожному часовому кроці, було б два незалежних розв'язки. Розв'язок, що використовує змінні на просторовій сітці Еліасена, був би незалежним від розв'язку, який використовує змінні у точках, що не залучалися у цю сітку, тобто розташованих у про-

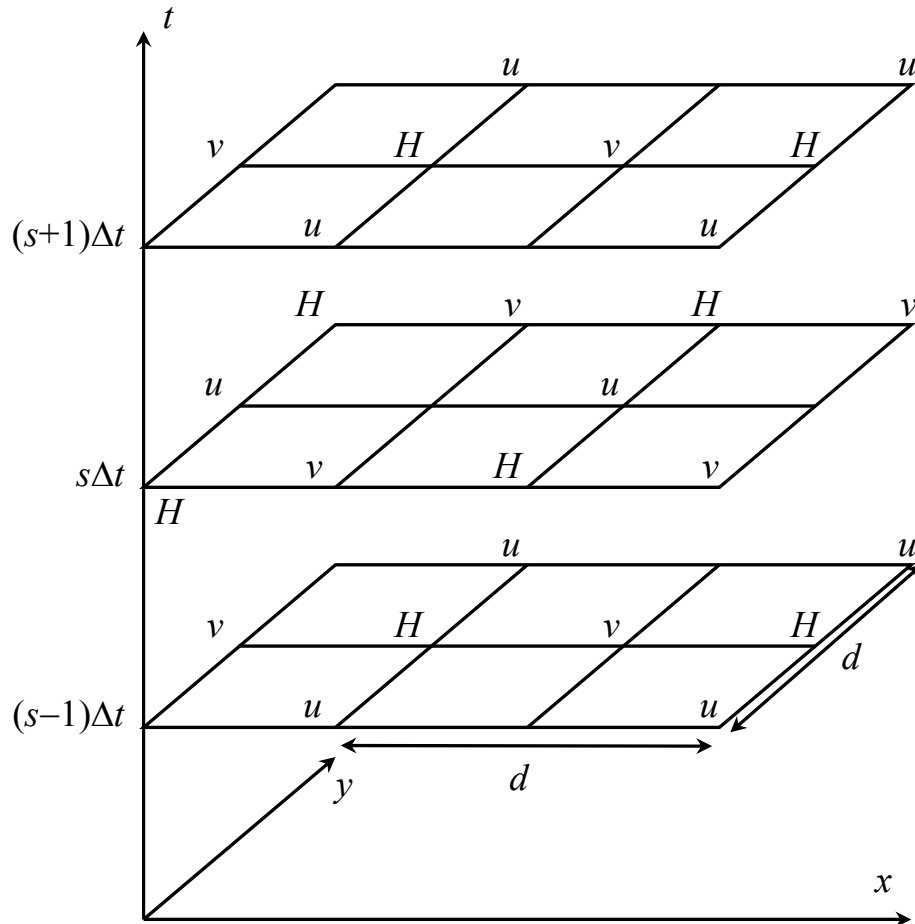


Рисунок 4.5.1 – Просторово-часова розхитана у просторі та часі сітка, яка є зручною для застосування просторових та часових центральних різниць (сітка Еліасена)

міжних точках сітки. Друга сітка може бути одержана зсувом сітки на відстань $\sqrt{1/2}d$ вздовж прямої $y = x$. Таким чином, така розхитана просторово-часова сітка може розглядатися як суперпозиція двох елементарних підсіток. Розв'язання системи (4.5.1) тільки на одній з них зберігає половину часу без зміни помилки апроксимації.

Для більш складної системи сітка Еліасена може також розглядатися як суперпозиція двох підсіток, на одній з яких міститься тільки геопотенціал, а на іншій – компоненти швидкості вітру на наступному часовому кроці. Така підсітка дістала назву сітки Річардсона.

Як випливає з (4.5.2), використання схеми центральних різниць у часі передбачає розрахунок правих частин системи рівнянь (4.5.1) F_u^s , F_v^s і F_ϕ^s на часовому кроці s . Для того, щоб докладніше розібрати особливості розрахунку цих величин, звернемося до фрагменту сітки Еліасена на цьому часовому кроці (рис. 4.5.2), на якому зіркою позначено вузол, для

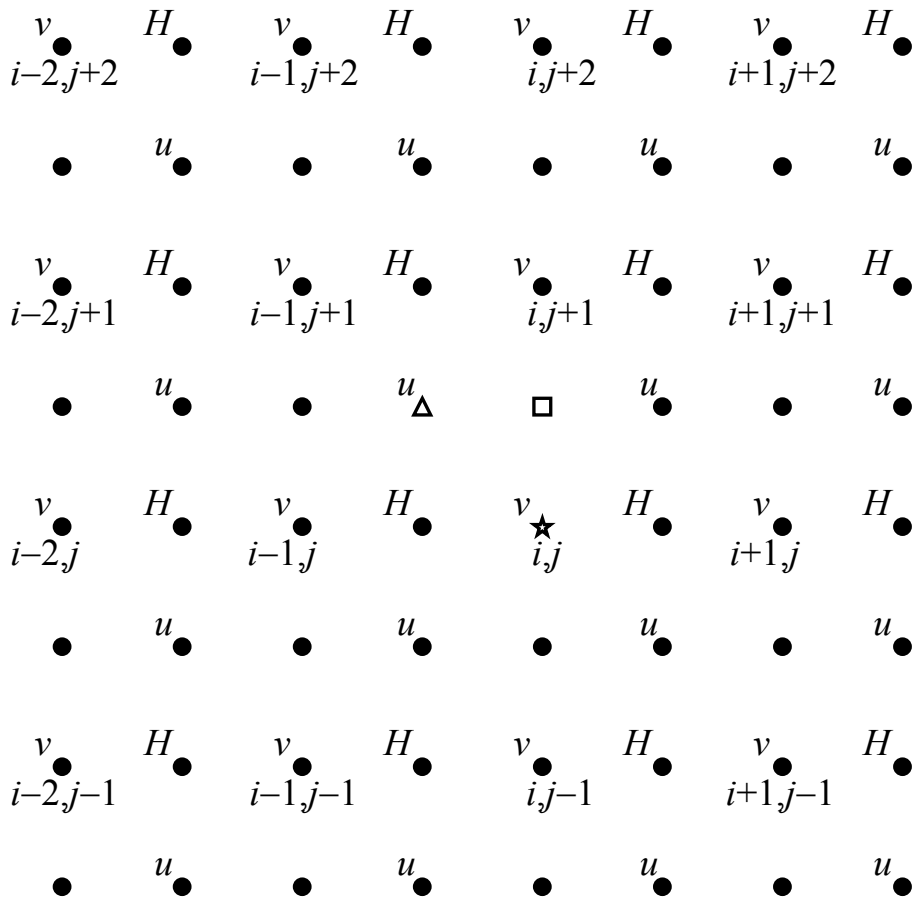


Рисунок 4.5.2 – Просторова сітка, яка використовується для апроксимації правих частин системи рівнянь (4.5.1) на часовому кроці s

якого треба розрахувати F_u^s , трикутником – F_v^s , квадратом – F_Φ^s . На цьому рисунку, щоб не перевантажувати його, також не позначені вузли з дробовими індексами, тобто $i-1/2, i+1/2, j-1/2, j+1/2$ тощо.

На перший погляд здається, що для використання схеми центральних різниць у просторі (3.1.18) такої кількості вузлів забагато. Але, про що вже казалося трохи раніше, для апроксимації адвективних членів треба зробити додаткове осереднення. Без такого осереднення неможливо апроксимувати, наприклад, член $-u \frac{\partial u}{\partial x}$ з першого рівняння системи (4.5.1)

для вузла з індексами i, j . Дійсно, як у цьому вузлі, так і з обох боків від нього, немає значень u , які потрібні для застосування схеми центральних різниць у просторі. Проте, ці значення можна одержати за допомогою осереднення, а саме

$$\begin{aligned}
F_{u,1}^s &= -\frac{1}{32d} (u_{i-1/2,j+1/2}^s + u_{i-1/2,j-1/2}^s + u_{i+1/2,j-1/2}^s + u_{i+1/2,j+1/2}^s) \times \\
&\times \left[(u_{i+3/2,j+1/2}^s + u_{i+3/2,j-1/2}^s + u_{i+1/2,j-1/2}^s + u_{i+1/2,j+1/2}^s) - \right. \\
&\left. - (u_{i-3/2,j+1/2}^s + u_{i-3/2,j-1/2}^s + u_{i-1/2,j-1/2}^s + u_{i-1/2,j+1/2}^s) \right]. \tag{4.5.4}
\end{aligned}$$

У рівнянні (4.5.4) перший множник у круглих дужках є осередненим значенням u у вузлі i,j , а множник у квадратних дужках є апроксимацією похідної, для чого спочатку також були знайдені середні значення.

Другий доданок правої частини першого рівняння (4.5.1) подається у такому вигляді

$$\begin{aligned}
F_{u,2}^s &= -\frac{v_{i,j}^s}{16d} \left[(u_{i-1/2,j+1/2}^s + u_{i-1/2,j+3/2}^s + u_{i+1/2,j+1/2}^s + u_{i+1/2,j+3/2}^s) - \right. \\
&\left. - (u_{i-1/2,j-1/2}^s + u_{i-1/2,j-3/2}^s + u_{i+1/2,j-3/2}^s + u_{i+1/2,j-1/2}^s) \right]. \tag{4.5.5}
\end{aligned}$$

Нарешті третій та четвертий доданки подаються таким чином:

$$F_{u,3}^s = -\frac{g}{d} (H_{i+1/2,j}^s - H_{i-1/2,j}^s); \tag{4.5.6}$$

$$F_{u,4}^s = \ell v_{i,j}^s. \tag{4.5.7}$$

Беручи до уваги той факт, що апроксимація похідних вже здійснюється для іншого вузла (див. рис. 4.5.1), для другого рівняння системи (4.5.1) аналогічні вирази можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned}
F_{v,1}^s &= -\frac{u_{i-1/2,j+1/2}^s}{16d} \left[(v_{i,j+1}^s + v_{i+1,j+1}^s + v_{i+1,j}^s + v_{i,j}^s) - \right. \\
&\left. - (v_{i-2,j+1}^s + v_{i-1,j+1}^s + v_{i-1,j}^s + u_{i-2,j}^s) \right]; \tag{4.5.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{v,2}^s &= -\frac{1}{32d} (v_{i-1,j+1}^s + v_{i,j+1}^s + v_{i,j}^s + v_{i-1,j}^s) \times \\
&\times \left[(v_{i-1,j+2}^s + v_{i,j+2}^s + v_{i,j+1}^s + v_{i-1,j+1}^s) - \right. \\
&\left. - (v_{i-1,j}^s + v_{i,j}^s + v_{i,j-1}^s + v_{i-1,j-1}^s) \right]; \tag{4.5.9}
\end{aligned}$$

$$F_{v,3}^s = -\frac{g}{d} (H_{i-1/2,j+1}^s - H_{i-1/2,j}^s), \tag{4.5.10}$$

$$F_{v,4}^s = -\ell u_{i,j}^s. \tag{4.5.11}$$

Нарешті, для третього рівняння системи (4.5.1) аналогічні вирази можна записати у наступному вигляді:

$$F_{\Phi,1}^s = -\frac{g}{16d} \left[u_{i+1/2,j+1/2}^s (6H_{i+1/2,j+1}^s + 6H_{i+1/2,j}^s + H_{i+3/2,j+1}^s + H_{i+3/2,j}^s + H_{i-1/2,j+1}^s + H_{i-1/2,j}^s) - \right. \\ \left. u_{i-1/2,j+1/2}^s (6H_{i-1/2,j+1}^s + 6H_{i-1/2,j}^s + H_{i-3/2,j+1}^s + H_{i-3/2,j}^s + H_{i+1/2,j+1}^s + H_{i+1/2,j}^s) \right]; \quad (4.5.12)$$

$$F_{\Phi,2}^s = -\frac{g}{16d} \left[v_{i,j+1}^s (6H_{i-1/2,j+1}^s + 6H_{i+1/2,j+1}^s + H_{i-1/2,j+2}^s + H_{i+1/2,j+2}^s + H_{i-1/2,j}^s + H_{i+1/2,j}^s) - \right. \\ \left. v_{i,j}^s (6H_{i-1/2,j}^s + 6H_{i+1/2,j-1}^s + H_{i-1/2,j-1}^s + H_{i+1/2,j-1}^s + H_{i+1/2,j+1}^s + H_{i+1/2,j-1}^s) \right]. \quad (4.5.13)$$

В остаточному вигляді різницевий аналог системи (4.5.2) записується наступним чином:

$$u^{s+1} = u^{s-1} + 2\Delta t (F_{u,1}^s + F_{u,2}^s + F_{u,3}^s + F_{u,4}^s); \\ v^{s+1} = v^{s-1} + 2\Delta t (F_{v,1}^s + F_{v,2}^s + F_{v,3}^s + F_{v,4}^s); \quad (4.5.14) \\ \Phi^{s+1} = \Phi^{s-1} + 2\Delta t (F_{\Phi,1}^s + F_{\Phi,2}^s),$$

де доданки у дужках розраховуються за допомогою відповідних формул (4.5.4)-(4.5.13).

Таким чином, система рівнянь (4.5.1) за допомогою сітки Еліассена перетворюється у різницевий аналог (4.5.14), який після використання початкових та межових умов можна використати для прогнозу.

4.6 Інтегральні інваріанти моделей прогнозу за повними рівняннями

При скінченнорізницевій апроксимації та побудові схем чисельного інтегрування повних рівнянь керуються низкою міркувань. Одне з них полягає у тому, що системи скінченнорізницевих рівнянь, які називаються чисельними моделями, повинні зберігати інтегральні властивості відповідних систем диференціальних рівнянь, тобто математичних моделей.

4.6.1 Адіабатичні інваріанти

Для теоретичних досліджень можливість використання адіабатичного наближення, тобто не урахування припливів та дисипації енергії, є особливо важливою, тому що у цьому випадку вихідна система рівнянь є добре дослідженою, а практична реалізація прогностичних моделей не викликає особливих труднощів. У зв'язку з цим викликає інтерес розв'язання задач, пов'язаних зі з'ясуванням сфери використання адіабатичного наближення у динаміці великомасштабних атмосферних процесів. При розв'язанні таких задач використовуються деякі спеціальні характеристики атмосферних процесів, які за адіабатичних процесах залишаються сталими у часі. Такі характеристики називаються адіабатичними інваріантами. Для реальних атмосферних процесів їх зміни у часі відбуваються дуже повільно, що свідчить про наявність неадіабатичних впливів, таких як тертя та теплообмін.

Задачі, пов'язані з одержанням адіабатичних інваріантів, є надзвичайно важливими, тому що в інваріантних величинах відображається фізичний зміст адіабатичних моделей прогнозу, а тому при практичній реалізації конкретних прогностичних схем потрібно відібрати такі різницеві схеми, які б забезпечили зберігання фізичного вмісту прогностичних моделей. Таким чином, інваріанти є своєрідним критерієм різницевої моделі прогнозу.

Для адіабатичних моделей виконуються два закони збереження. Згідно з цими законами, під час руху будь-якого об'єму повітря V у ньому зберігається ентропія та так званий "вихровий заряд", тобто

$$\frac{d}{dt} \int_V S \rho dV = 0; \quad (4.6.1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\Omega_a \nabla S}{\rho} dV = 0, \quad (4.6.2)$$

де S – питома ентропія;

$\Omega_a = \Omega_z + 2\omega_z$ – абсолютний вихор швидкості.

Величина

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega_a \nabla S}{\rho}$$

називається "потенціальний вихор", і закон його збереження у часі вперше був одержаний Ертелем.

Доведемо спочатку консервативність, тобто сталість у часі, величини

ни S . Для цього випишемо рівняння першого початку термодинаміки (1.1.15) з урахуванням того, що джерела та стоки тепла є дорівнюють нулю (тобто має місце адіабатичність), а саме

$$\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{pc_p} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (4.6.3)$$

Застосувавши формули $R = c_p - c_v$ та $\kappa = c_p/c_v$, рівняння (4.6.3) можна записати, як

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (4.6.4)$$

Якщо за допомогою рівняння стану (1.1.16) вилучити з (4.6.4) похідну від температури, то замість останнього рівняння одержуємо

$$-\frac{p}{R\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\rho R} \frac{dp}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = 0.$$

Цю рівність, у свою чергу, після групування останніх двох доданків та виконання певних арифметичних операцій, можна перетворити до більш компактного вигляду

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{\kappa}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Звідси, нарешті, можна одержати перший інваріант, а саме:

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{p}{\rho^\kappa} = 0 \Rightarrow \ln \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}. \quad (4.6.5)$$

Якщо використати формулу для потенціальної температури

$$\Theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}},$$

то після її логарифмування та диференціювання за часом, матимемо

$$\frac{T}{\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt}.$$

Внаслідок того, що T/Θ ніколи не дорівнюватиме нулю в реальній атмосфері, а права частина цього рівняння дорівнює нулю (див. (4.6.4)), то можна записати

$$\frac{d}{dt} \ln \Theta = 0 \Rightarrow \Theta = \text{const}. \quad (4.6.6)$$

Нарешті, використовуючи визначення ентропії, тобто $S = c_p \ln \Theta$, та рівняння (4.6.6) можна одержати й закон, за яким в адіабатичних моделях ентропія будь-якого об'єму повітря є консервативною величиною

$$\frac{1}{c_p} \frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow S = \text{const}. \quad (4.6.7)$$

Таким чином, усі три інваріанти (4.6.5)-(4.6.7) одержані тільки за допомогою рівняння адіабатичності (4.6.3).

Для того, щоб довести консервативність "вихрового заряду", скористаємось рівнянням вихору швидкості (2.1.29), нехтуючи при цьому зсувним членом, внаслідок чого це рівняння набуває вигляду

$$\frac{d\Omega_a}{dt} + \Omega_a D_s = 0. \quad (4.6.8)$$

Рівняння (4.6.8) можна переписати, як

$$\frac{d}{dt} \ln \Omega_a = \frac{\partial \tau}{\partial p}, \quad (4.6.9)$$

тому що $D_s = -\partial \tau / \partial p$. З іншого боку, використовуючи рівняння (4.6.6), можна показати, що

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} = -\frac{1}{\frac{\partial}{\partial p} \ln \Theta} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial p} \ln \Theta \right),$$

і підставляючи цей вираз у рівняння (4.6.9), одержимо

$$\frac{d}{dt} \ln \Omega_a + \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\partial}{\partial p} \ln \Theta \right) = 0,$$

або

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\Omega_a \frac{\partial}{\partial p} \ln \Theta \right) = 0,$$

з чого випливає, що

$$\Omega_a \frac{\partial}{\partial p} \ln \Theta \equiv \Omega_a \frac{\partial S}{\partial p} \equiv \tilde{\Omega} = \text{const}. \quad (4.6.10)$$

Таким чином, потенціальний вихор та ентропія є інваріантами для повітряної маси, що рухається, якщо відсутні тертя та теплообмін, тобто за умови адіабатичності.

Як вже відзначалося вище, теорему про консервативність потенціального вихору вперше довів Ертель, причому в загальному випадку будь-якої скалярної величини s виконується рівняння

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{\Omega}_a \cdot \nabla s}{\rho} \right) = (\mathbf{\Omega}_a \cdot \nabla) \varepsilon + \frac{(\nabla \rho \times \nabla p)}{\rho^2} \cdot \nabla s + (\nabla \times \mathbf{D}) \cdot \nabla s, \quad (4.6.11)$$

а скалярний добуток

$$\tilde{\Omega} = \frac{\mathbf{\Omega}_a \cdot \nabla s}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left(\Omega_{a,x} \frac{\partial s}{\partial x} + \Omega_{a,y} \frac{\partial s}{\partial y} + \Omega_{a,z} \frac{\partial s}{\partial z} \right) \quad (4.6.12)$$

має назву потенціального вихору.

З (4.6.11) випливає, що потенціальний вихор у повітряній масі, що рухається, є інваріантом за таких умов:

- s також є інваріантом, наприклад потенціальна температура Θ при адіабатичному процесі;

- дисипативні сили є малими, тобто $\mathbf{D} \approx 0$;

- середовище є баротропним, тобто $\rho = \rho(p)$; у цьому випадку градієнти $-\nabla \rho$ та $-\nabla p$ збігаються за напрямком, внаслідок чого векторний добуток дорівнюватиме нулю.

В останньому випадку можна поставити й менш жорстку умову, а саме, щоб величина s залежала тільки від ρ і p .

Якщо поверхня $s = \text{const}$ (зокрема, $\Theta = \text{const}$) нахилена під невеликим кутом до горизонтальної площини, то

$$\frac{\partial s}{\partial z} \gg \left(\frac{\partial s}{\partial x}; \frac{\partial s}{\partial y} \right). \quad (4.6.13)$$

і у випадку, наприклад, потенціальної температури,

$$\tilde{\Omega} \approx \frac{\Omega_{a,z}}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \quad (4.6.14)$$

Сам термін "потенціальний вихор" навряд чи можна уважати вдалим, оскільки величина $\tilde{\Omega}$ не має розмірності вихору. Деякі аргументи на користь такого визначення зводяться до того, що згідно з (4.6.12), якщо під час рухання частки $\tilde{\Omega}$ зберігається, але при цьому відстань між поверхнями $s = \text{const}$ збільшується (тобто зменшується ∇s), то складова абсолютного вихору збільшується, і навпаки. Величину $\tilde{\Omega}$, таким чином, можна характеризувати як деякий потенціальний запас завихреності, що пов'язана з градієнтом s , який може реалізуватися при віддаленні поверхонь $s = \text{const}$ одна від іншої.

Оскільки функції $\tilde{\Omega}$ і Θ є адіабатичними інваріантами, тобто консервативними характеристиками часток повітря, що рухаються, то такі дві незалежні функції зручно прийняти як лагранжеві координати повітряних часток. Відповідні координатні поверхні розтинають атмосферу на вихрові трубки, через стінки яких повітря не протікає. Отже, адіабатична еволюція атмосфери буде полягати тільки у деформації таких трубок, а передобчислення цих деформацій є основою короткострокових прогнозів погоди.

Як одну з лагранжевих координат зручно узяти потенціальну температуру Θ , і оскільки вона найбільше змінюється у вертикальній площині, то її можна узяти як вертикальну координату. Якщо за другу координату взяти абсолютну завихреність $\Omega_{a,z} = \Omega + \ell$, та мати на увазі, що відносний вихор набагато менший за параметр Коріоліса, який змінюється за меридіаном, то абсолютну завихреність треба узяти як координату географічної широти. На рис. 4.6.1 наведено зразок меридіонального розрізу $(\Theta, \tilde{\Omega})$ -трубок.

Атмосферні процеси, таким чином, можна розділити на два класи:

1) повільні (довгоперіодні) рухи глобального і синоптичного масштабів, які описуються полями s і $\tilde{\Omega}$ та їх повільною еволюцією в часі, а поля інших величин адаптовані до полів s і $\tilde{\Omega}$, тобто визначаються за полями s і $\tilde{\Omega}$ з синхронних співвідношень, що не містять похідні у часі;

2) швидкі (короткоперіодні) рухи – акустичні, внутрішні і поверхневі гравітаційні та інерційні хвилі, – за яких відсутні коливання полів s і $\tilde{\Omega}$ (принаймні у лінійному наближенні).

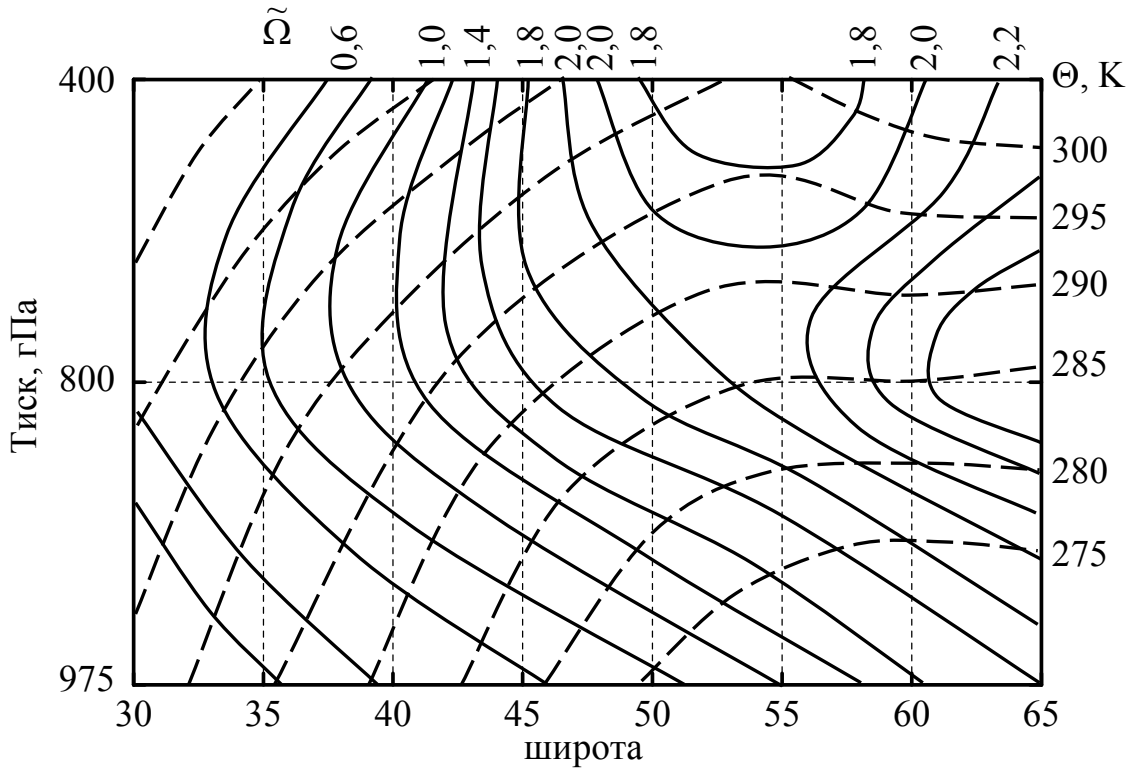


Рисунок 4.6.1 – Меридіональний розріз $(\Theta, \tilde{\Omega})$ -трубок на 100° зах.д.

4.6.2 Енергетичні інваріанти

Скористаємось системою (4.2.1), яка записана в адіабатичному наближенні та без урахування сил в'язкості. Будемо розглядати процеси, що описуються цією системою рівнянь, в області, яка є квазіпрямокутним паралелепіпедом, ребра якого орієнтовані у напрямку координатних осей x, y, ζ ; довжина ребер становить $x_2 - x_1, y_2 - y_1$. По висоті паралелепіпед сягає від рівня підстильної поверхні ($\zeta_s = p_s/p_0$) до верхньої межі атмосфери ($\zeta = 0$). Тут $\zeta_s = \zeta_s(x, y, t)$.

На гранях паралелепіпед поставимо межові умови:

$$\begin{aligned}
 u \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = v \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} &= 0; \\
 \hat{\tau} \Big|_{\zeta=0} &= 0; \\
 \hat{\tau} \Big|_{\zeta=\zeta_s} &= \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial y}.
 \end{aligned}
 \tag{4.6.15}$$

Тут індекс s позначає величини біля земної поверхні.

Помноживши перше рівняння системи (4.2.1) на u , друге – на v та склавши результати, одержимо рівняння для кінетичної енергії одиниці маси двовимірного руху $E_k = (u^2 + v^2)/2$

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + u \frac{\partial E_k}{\partial x} + v \frac{\partial E_k}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial E_k}{\partial \zeta} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad (4.6.16)$$

З рівняння припливу тепла одержимо рівняння для питомої ентальпії $E_e = c_p T$, для чого помножимо четверте рівняння системи (4.2.1) на c_p та урахуємо, що $-RT/\zeta = \partial\Phi/\partial\zeta$. У результаті будемо мати

$$\frac{\partial E_e}{\partial t} + u \frac{\partial E_e}{\partial x} + v \frac{\partial E_e}{\partial y} + \hat{\tau} \frac{\partial E_e}{\partial \zeta} + \hat{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0. \quad (4.6.17)$$

Склавши рівняння (4.6.16) та (4.6.17) та урахувавши рівняння нерозривності, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(E_k + E_e) + \frac{\partial}{\partial x}[u(E_k + E_e + \Phi)] + \frac{\partial}{\partial y}[v(E_k + E_e + \Phi)] + \\ + \frac{\partial}{\partial \zeta}[\hat{\tau}(E_k + E_e + \Phi)] = 0. \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

Маса елементарного об'єму $dx dy dz$ дорівнює $\rho dx dy dz = -(p_0/g) dx dy d\zeta$. Проінтегруємо рівняння (4.6.18) по масі у межах паралелепіпеда

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{g} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial t}(E_k + E_e) d\zeta dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial x}[u(E_k + E_e + \Phi)] d\zeta dx dy + \right. \\ \left. + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial y}[v(E_k + E_e + \Phi)] d\zeta dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial \zeta}[\hat{\tau}(E_k + E_e + \Phi)] d\zeta dx dy \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

Виконаємо спочатку інтегрування по ζ , ураховуючи, що ζ_s є величиною змінною

$$\int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial t}(E_k + E_e) d\zeta = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\zeta_s} (E_k + E_e) d\zeta - \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} (E_k + E_e)_s;$$

$$\int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial x} [u(E_\kappa + E_e + \Phi)] d\zeta = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\zeta_s} [u(E_\kappa + E_e + \Phi)] d\zeta - \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} [u(E_\kappa + E_e + \Phi)]_s;$$

$$\int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial y} [v(E_\kappa + E_e + \Phi)] d\zeta = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta_s} [v(E_\kappa + E_e + \Phi)] d\zeta - \frac{\partial \zeta_s}{\partial y} [v(E_\kappa + E_e + \Phi)]_s;$$

$$\int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial \zeta} [\hat{\tau}(E_\kappa + E_e + \Phi)] d\zeta = [\hat{\tau}(E_\kappa + E_e + \Phi)]_s,$$

де індекс s біля квадратної дужки позначає, що величини у дужках належать рівню ζ_s . Ураховуючи ці співвідношення та умови (4.6.15), виконаємо інтегрування рівняння (4.6.19)

$$\frac{p_0}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\zeta_s} (E_\kappa + E_e) d\zeta + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\zeta_s} u(E_\kappa + E_e + \Phi) d\zeta + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta_s} v(E_\kappa + E_e + \Phi) d\zeta - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial \zeta_s}{\partial t} (E_\kappa + E_e)_s + u_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} (E_\kappa + E_e + \Phi)_s + \right. \right.$$

$$\left. \left. + v_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial y} (E_\kappa + E_e + \Phi)_s - \hat{\tau}_s (E_\kappa + E_e + \Phi)_s \right] \right\} dx dy = 0.$$

Оскільки у відповідності до останньої умови (4.6.15)

$$\left(u_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial y} - \hat{\tau}_s \right) (E_\kappa + E_e + \Phi)_s = - \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} (E_\kappa + E_e + \Phi)_s,$$

то вираз у квадратних дужках набуває вигляду

$$\Phi_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} = \frac{1}{p_0} \frac{\partial}{\partial t} (p_s \Phi).$$

Тут ураховано, що Φ_s від t не залежить. У результаті одержимо

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{E}_\kappa + \bar{E}_e + \overline{\Phi_s p_s}) = 0, \quad (4.6.20)$$

де

$$\begin{aligned}\overline{\Phi_s p_s} &= \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi_s p_s dx dy; \\ \overline{E_k} &= \frac{p_0}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} E_k d\zeta dx dy; \\ \overline{E_e} &= \frac{p_0}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} E_e d\zeta dx dy,\end{aligned}$$

де останні два рівняння записані для кінетичної енергії та ентальпії, відповідно, маси повітря в об'ємі паралелепіпеда.

Потенціальна енергія маси повітря $\overline{E_n}$ в об'ємі, що розглядається, визначається виразом

$$\overline{E_n} = \frac{p_0}{g} \left(\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi_s p_s dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} R T d\zeta dx dy \right). \quad (4.6.21)$$

Оскільки внутрішня енергія маси повітря $\overline{E_e}$ у цьому об'ємі дорівнює

$$\overline{E_e} = \frac{p_0}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} c_v T d\zeta dx dy, \quad (4.6.22)$$

а $c_v + R = c_p$, то $\overline{E_e} + \overline{\Phi_s p_s} = \overline{E_n} + \overline{E_e}$. Таким чином, умова (4.6.20) набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{E_k} + \overline{E_e} + \overline{E_n}) = 0. \quad (4.6.23)$$

Ця умова означає, що сума механічної (кінетична плюс потенціальна) та внутрішньої енергії в області визначення розв'язку системи (4.2.1) в адіабатичному наближенні без урахування сил тертя з межовими умовами (4.6.15) зберігається, тобто є енергетичним інваріантом моделі. Для цієї моделі зберігається також маса повітря в області визначення розв'язку.

Підсумовуючи результати цих двох підрозділів, можна казати, що інтегральні інваріанти існують для області будь-якої конфігурації, якщо потік маси повітря через межі відсутній і не ураховується неадіабатич-

ність та в'язкість. Якщо ж два останні фактори урахувати, то інваріантність порушується. Заміна диференціальних рівнянь моделями скінченно-різницевиими також може порушити інтегральні властивості моделей.

У деяких дослідженнях показано, що скінченнорізницеві схеми, для яких характерне зберігання інтегральних інваріантів і які дістали назву консервативних, є більш стійкими з точки зору обчислень. У будь-якому випадку при використанні консервативних схем надається можливість контролювати обчислювальну стійкість процесу чисельного інтегрування рівнянь за допомогою інваріантів.

На практиці моделі будуються за припущенням, що є більш загальними ніж ті, які використовувались при виведенні інваріантів. Зокрема, можуть ставитися інші межові умови, ураховуватися неадіабатичність та в'язкість. Але й для таких моделей контроль обчислень за допомогою інваріантів є корисним. Швидке зростання або зменшення інваріантів у процесі чисельного інтегрування свідчить про незадовільність вибраної схеми інтегрування.

4.7 Питання для самоконтролю

- 1) За якими умовами одержуються рівняння «мілкої води»?
- 2) На якому принципі ґрунтуються сучасні прогностичні моделі?
- 3) Перелічіть рівняння, що містяться у бароклінній моделі за повними рівняннями в ізобаричній системі координат.
- 4) З якою метою при розв'язанні системи рівнянь гідротермодинаміки задаються початкові та межові умови?
- 5) Що таке «фіктивні» межові умови?
- 6) Які межові умови використовуються в сучасних регіональних моделях прогнозу?
- 7) Які моделі є оптимальними з точки зору постановки бічних межових умов?
- 8) У якому вигляді в сучасних моделях прогнозу використовується фонові інформація?
- 9) Що таке умова "твердої стінки"?
- 10) Навіщо використовується динамічне узгодження вихідних полів?
- 11) У чому полягає сутність сітки Еліассена? Які переваги вона має у порівнянні зі звичайною сіткою?
- 12) Назвіть адіабатичні та енергетичні інваріанти. Коли порушується їх інваріантність?

РОЗДІЛ 5

ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ АТМОСФЕРНИХ ПРОЦЕСІВ ПІДСІТКОВОГО МАСШТАБУ В МОДЕЛЯХ ЗА ПОВНИМИ РІВНЯННЯМИ

5.1 Загальні принципи параметризації

У попередніх розділах цього підручника були виведені рівняння, що описують еволюцію атмосферних процесів, а також обговорювалися методи, які дозволяють розв'язати систему цих рівнянь. По суті, ці методи полягають у тому, що безперервні диференціальні рівняння у часткових похідних апроксимуються у дискретні рівняння. Така дискретизація обмежується розділенням моделі, тобто розміром найменших масштабів руху, які розглядаються у моделі. Як було показано раніше, скінченнорізницеві схеми розв'язують такі масштаби руху, довжина хвилі яких перебільшує 2 кроки сітки. У спектральних моделях, рухи найменших масштабів обчислюються точніше, ніж у секінченнорізницевих, але завжди існує мінімальний масштаб рухів, який може бути адекватно представлений у моделі. Відзначимо, що сучасні глобальні прогностичні моделі мають розділення по горизонталі 50-100 км, а регіональні мезомасштабні моделі – 10-50 км; кількість рівнів по вертикалі становить від 10 до 50, які охоплюють шар від поверхні землі до стратосфери або навіть мезосфери.

Таким чином очевидно, що існує велика кількість процесів та масштабів руху в атмосфері, які не можуть бути явно подані у прогностичних моделях. Насамперед, це турбулентні рухи з масштабами від декількох сантиметрів до розміру сітки, а також процеси, що мають місце на молекулярному рівні, такі як конденсація, випаровування, тертя, радіація тощо. Усі вони дістали назву процесів підсіткового масштабу. Прикладом важливого процесу, що має місце на підсітковому масштабі, є турбулентне перемішування у граничному шарі атмосфери. Вдень сонячна радіація не тільки нагріває підстильну поверхню, а й сприяє випаровуванню з неї в атмосферу. Прогрів підстильної поверхні призводить до утворення турбулентних рухів з масштабом від декількох метрів до декількох сотень метрів. Якщо розділення сітки становить декілька десятків кілометрів, то моделі не можуть розв'язати ці рухи. З іншого боку, перенос тепла і вологи у граничний шар є визначним для розвитку купчасто-дощових хмар у пообідній час, а також інших явищ, що можуть впливати на атмосферні рухи, які розв'язуються моделями.

Хоч ці процеси відбуваються на малих масштабах, вони, в свою чергу впливають на процеси більшого масштабу, які явно представлені у чисельних моделях. Наприклад, конденсація водяної пари на підсітковому масштабі має місце, якщо відносна вологість сіткового масштабу є достат-

ньо великою, і, в свою чергу, при конденсації реалізується приховане тепло, що збільшує температуру сіткового масштабу. З цієї причини не можна ігнорувати вплив підсіткових процесів, тому що це призведе до погіршення якості прогнозу. Щоб відтворити взаємодію процесів сіткового та підсіткового масштабів, останні "параметризуються", тобто їх вплив формується, ґрунтуючись на кількісних характеристиках полів метеорологічних величин сіткового масштабу. На рис. 5.1.1 схематично подані процеси, які розв'язуються моделями ("Процеси динаміки атмосфери"), і процеси, які повинні бути параметризовані, та їх взаємодії.

Деякі підсіткові процеси можуть інтерпретуватися як процеси "приспосовування". Наприклад, атмосфера пристосовується до умов підстильної поверхні через процеси у граничному шарі, які є дуже істотними, якщо граничний шар є нестійким. Радіаційні потоки мають місце через те, що термічний режим прагне досягти радіаційної рівноваги. Конвективні процеси мають місце за наявності нестійкої стратифікації і при-

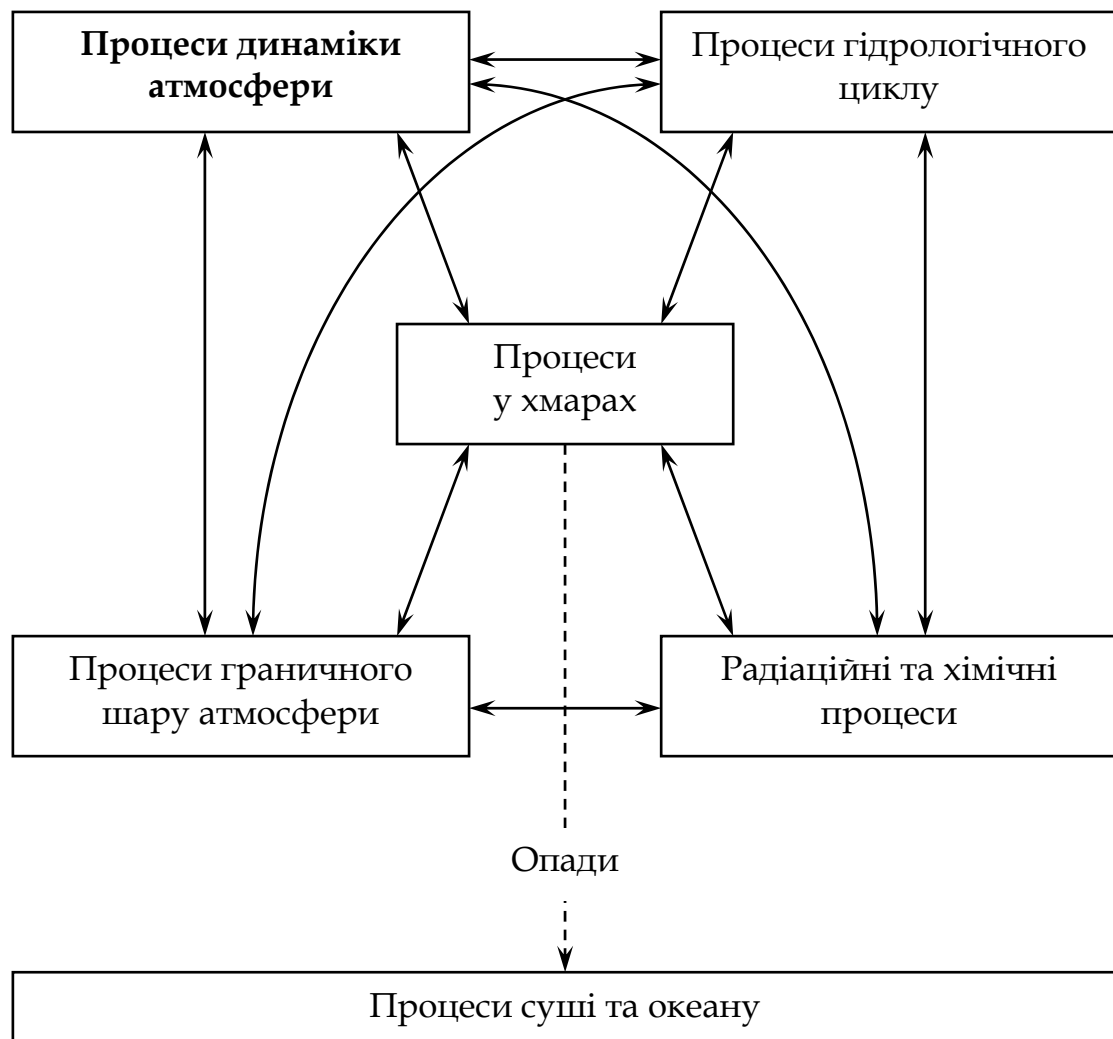


Рисунок 5.1.1 – Фізичні процеси в атмосфері та їх взаємодії. За виключенням процесів динаміки атмосфери, які явно присутні у моделях, інші процеси повинні бути параметризовані

стосовують профіль температури до більш нейтрального стійкого стану. Через те, що радіаційна рівновага у нижній тропосфері є конвективно нестійкою, радіаційно-конвективне пристосування є домінуючим процесом, який керує вертикальною термічною структурою тропосфери.

Щоб проілюструвати сказане вище, розглянемо прогностичне рівняння водяної пари, записане у потоковій формі у декартових координатах

$$\frac{\partial \rho q}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u q}{\partial x} - \frac{\partial \rho v q}{\partial y} - \frac{\partial \rho w q}{\partial z} + \rho E - \rho C, \quad (5.1.1)$$

де E, C – швидкість випаровування та конденсації відповідно.

У реальній атмосфері поля вітру та водяної пари містять як сіткові, так і підсіткові масштаби. Тоді можна записати:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u'; \\ q &= \bar{q} + q', \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

де риска зверху вказує на просторове осереднення по сітці, а штрих – флуктуації підсіткового масштабу. Нехтуючи підсітковими флуктуаціями густини та застосовуючи правила Рейнольдса, рівняння (5.1.1) з урахуванням (5.1.2) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial \rho \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho \bar{u} \bar{q}}{\partial x} - \frac{\partial \rho \bar{v} \bar{q}}{\partial y} - \frac{\partial \rho \bar{w} \bar{q}}{\partial z} - \frac{\partial \rho \bar{u} u' q'}{\partial x} - \frac{\partial \rho \bar{v} v' q'}{\partial y} - \frac{\partial \rho \bar{w} w' q'}{\partial z} + \rho E - \rho C. \quad (5.1.3)$$

Перші три члени праворуч є адвективними членами сіткового масштабу і їх апроксимація розглядалася у попередніх розділах. Ці члени представляють процеси динаміки атмосфери (див. рис. 5.1.1). Наступні три члени є дивергенцією вихрових потоків вологи або турбулентним переносом вологи. Останні два члени (випаровування та конденсація) є процесами підсіткового масштабу, які мають місце на молекулярному рівні і які потребують параметризації. Процеси молекулярного масштабу і вихрові потоки, що мають місце на масштабах набагато більших за молекулярні, але менші за крок сітки, разом називаються процесами підсіткового масштабу. Як вже казалось раніше, вплив, принаймні, деяких з них на процеси більшого масштабу, що явно розв'язуються моделями, повинен бути урахованим. Без параметризації, принаймні, найважливіших підсіткових процесів, результати інтегрування моделі перестануть бути реалістичними за дуже короткий період часу – від доби чи двох для великомасштабних потоків повітря до менше ніж година для моделювання конвективних процесів.

Існує декілька методів параметризації ефекту членів турбулентного переносу за допомогою членів масштабу, який розв'язується моделлю. Розглянемо, наприклад, вертикальний турбулентний потік вологи, який внаслідок великих вертикальних градієнтів, особливо у граничному шарі атмосфери, безумовно є домінуючим компонентом вихрових потоків. Зокрема, можна:

1) знехтувати вертикальним турбулентним потоком, припустивши, що у граничному шарі для полів сіткового масштабу метеорологічні величини є добре змішаними

$$-\overline{\rho w'q'} = 0. \quad (5.1.4)$$

Такий підхід відомий як замикання "0-го порядку", в якому шукаються тільки осереднені властивості. Прикладом є так звана об'ємна параметризація змішаного граничного шару, в якій потенціальна температура, водяна пара та вітер припускаються добре змішаними і прогнозується лише товщина цього шару;

2) параметризувати вертикальний потік як "процес турбулентної дифузії" у членах \bar{q} та інших змінних сіткового масштабу

$$-\overline{\rho w'q'} = K \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}. \quad (5.1.5)$$

Такий метод є замиканням "1-го порядку". У ньому ефект турбулентного перемішування подається як зміщення часток униз або догори, що спричиняє переміщення разом з ними вологи від її початкового рівня до перемішування з довколишнім середовищем на новому рівні. Головною проблемою "K-теорії", як ще називається цей метод, є пошук придатного формулювання для коефіцієнта вихрової дифузії K , який також залежить від осереднених метеорологічних величин та стійкості потоку;

3) одержати прогностичне рівняння для $\overline{w'q'}$ через множення рівняння руху у вертикальній площині на ρq та додання його до рівняння (5.1.1), помноженого на w . Результуюче рівняння буде мати велику кількість членів і виглядати, як

$$\frac{\partial \rho w q}{\partial t} = - \frac{\partial \rho u w q}{\partial x} - \dots \quad (5.1.6)$$

Далі для цього рівняння можна зробити осереднення Рейнольдса, відняти їх від (5.1.6) і одержати прогностичне рівняння для турбулентних потоків $\frac{\partial \overline{\rho w'q'}}{\partial t} = \dots - \frac{\partial \overline{\rho w'w'q'}}{\partial z} \dots$. Це рівняння може бути доданим до рів-

нянь прогностичної моделі. Через те, що воно містить потрібне множення турбулентних членів, то останні, у свою чергу, повинні бути параметризовані у членах подвійного множення

$$-\overline{\rho w'w'q'} = K' \frac{\partial \overline{\rho w'q'}}{\partial z}. \quad (5.1.7)$$

Це є замиканням "2-го порядку". У моделях, що використовують його, міститься додатково декілька прогностичних рівнянь (для усіх множень турбулентних змінних), але вони є альтернативою моделей з високим розділенням і дозволяють оцінити турбулентний перенос.

Якщо важливі фізичні процеси, що мають місце у реальній атмосфері на масштабі, який не розв'язується моделлю, не параметризуються, вони можуть з'явитися у моделі "домішаними" у сіткові масштаби. Наприклад, інтегрування за часом у моделях за примітивними рівняннями не буде вдалим внаслідок сухої конвективної нестійкості, якщо остання не параметризується. У реальній атмосфері, якщо потенціальна температура збільшується з висотою, нестійка конвективна циркуляція має місце на дуже малих горизонтальних масштабах порядку товщини нестійкого шару (звичайно 1 км та менше). Через те, що вона не може бути розв'язана горизонтальною сіткою порядку 10-100 км, у моделях з нестійкими шарами розвиваються нереалістичні вузькі стовпи, що зміщуються пліч-о-пліч униз та угору (так звана "вертикальна локшина"). Щоб розв'язати цю проблему було розроблене сухе конвективне пристосування, яке є простою параметризацією сухої конвекції, що й досі використовується у більшості моделей. У цій параметризації, коли вертикальний градієнт температури сіткового масштабу перевищує сухоадіабатичний градієнт, нестійкий стовп атмосфери відразу ж "приганяється" до приблизно стійкого, зберігаючи сталою повну ентальпію шару. Аналогічним чином було побудоване й вологе конвективне пристосування, яке має місце, коли існує насичення сіткового масштабу і вертикальний градієнт температури перевищує вологадіабатичний, але воно не є у достатній мірі реалістичною параметризацією конвективних процесів.

Коли якийсь процес має місце на масштабах, що не набагато менші за сіткові, виникає додаткова трудність – сіткові та підсіткові масштаби не є добре розділеними. Прикладом процесу, який тільки найменшою мірою розв'язується сучасними моделями, є бризова циркуляція. Модель з розділенням 50-100 км (або більше) не може розв'язати реальну бризову циркуляцію, що має місце на відстані порядку 1-10 км від узбережжя. Тому, такий процес у моделі викручується у циркуляцію з масштабом $2\Delta x$.

Надалі у цьому розділі розглядаються способи параметризації підсіткових процесів, які використовуються у сучасних прогностичних моделях.

5.2 Методи параметризації променевого теплообміну

Різноманітні методи параметризації променевого теплообміну вже давно використовуються у прогностичних моделях атмосфери. Особливо треба відзначити, що один з перших способів параметризації променевого теплообміну, який полягає у поданні теплової радіації як плоскопаралельних потоків, був застосований ще у середині 1940-х років. Теоретичним підґрунтям майже усіх способів параметризації променевого теплообміну є рівняння переносу променевої енергії для стаціонарного поля випромінювання (див. курс "Фізика атмосфери").

Основним поглиначем сонячної радіації у тропосфері є водяна пара, яка поглинає у майже інфрачервоній ділянці спектра від 0,7 до 4,0 μ . У випадку ясного неба можна знехтувати ефектом розсіювання, і поглинання радіації водяною парою можна одержати з емпіричних функцій поглинання (або пропускання). У випадку ж хмарного неба множинне розсіювання є принциповим фактором, який впливає на поглинання. У сучасних прогностичних моделях розрізняють хмари, в яких частки знаходяться переважно у фазі рідкої води або льоду, а також ураховують окремо поглинання радіації дощем та снігом.

Перед тим, як викласти деякі методи параметризації променевого теплообміну, зробимо ще одне зауваження. Через те, що область інтегрування рівнянь гідротермодинаміки у сучасних прогностичних моделях охоплює великі території, інсоляція на верхній межі атмосфери у різних частинах цієї області буде різною. Варіації інсоляції у конкретному пункті можуть бути істотними навіть при інтегруванні на декілька діб уперед. Тобто, для того, щоб ураховати ці чинники, треба розраховувати інсоляцію у кожному конкретному вузлі сітки для кожного кроку інтегрування за часом залежно від дати. Запишемо формулу для інсоляції на верхній межі атмосфери (S_I) у вигляді

$$S_I = S^0 e \cos \theta_0, \quad (5.2.1)$$

де S^0 – сонячна стала;

e – фактор ексцентриситету (квадрат відношення середньої поточної відстані, що залежить від пори року);

θ_0 – зенітна відстань Сонця.

Вирази, що визначають річні та добові зміни інсоляції мають вигляд:

$$\begin{aligned} e = & 1,00011 + 0,034221 \cos \theta_d + 0,00128 \sin \theta_d + \\ & + 7,19 \cdot 10^{-4} \cos 2\theta_d + 7,7 \cdot 10^{-5} \sin 2\theta_d; \quad (5.2.2) \\ \cos \theta_0 = & \sin \varphi \sin \delta - \cos \varphi \cos \delta (2\pi t_{local}), \end{aligned}$$

де $\theta_d = \frac{2\pi d}{365}$ - середній кут орбіти Землі;

d - календарний день року (0 - для 1-го січня і 364 для 31-го грудня);

φ - географічна широта місця;

δ - схилення Сонця,

$$\delta = 0,006918 - 0,399912 \cos\theta_d + 0,070257 \sin\theta_d - 0,006758 \cos 2\theta_d + \\ + 0,000907 \sin 2\theta_d - 0,002697 \cos 3\theta_d + 0,001480 \sin 3\theta_d;$$

$t_{local} = d + \frac{\lambda}{360}$ - календарний день з локальним часом;

λ - географічна довгота місця.

Фактор ексцентриситету є властивим для орбіти Землі у поточні декілька тисяч років. Максимум e (найближча до Сонця точка орбіти - перигелій) має місце 2-го січня, а мінімум (найдалша від Сонця точка орбіти - афелій) - 5-го липня.

Схилення Сонця δ (кут між небесним екватором та Сонцем) для поточного нахилу орбіти Землі становить приблизно $23,5^\circ$. Вищезазначений вираз для схилення має точність $3'$ дуги; через те, що зміни схилення протягом доби ніколи не бувають більшими за $30'$ дуги, а сонячний диск утворює кут також $30'$ дуги, наведений вираз є цілком адекватною апроксимацією. Мінімальне схилення має місце 22-грудня, а максимальне - 21-го червня.

Точніший розрахунок інсоляції не є потрібним через те, що задана рівнянням (5.2.1) інсоляція розсіюється, відбивається та поглинається у системі "атмосфера-земна поверхня" за рахунок чинників, точність вимірювання або розрахунку яких становить невелику величину від самої інсоляції (наприклад, альbedo - 2%).

5.2.1 Плоскопаралельна модель переносу радіації

У цій моделі, відомій ще як модель Шварцшильда-Емдена, припускається, що випромінювання може бути подане як плоскопаралельні потоки довгохвильової низхідної ($L_{R\downarrow}$) і висхідної ($L_{R\uparrow}$) радіації та короткохвильової низхідної радіації ($S_{R\downarrow}$). Урахування диффузності процесу виконується непрямом. Рівняння для зазначених потоків записуються у вигляді:

$$\frac{\partial L_{R\downarrow}}{\partial z} = \alpha_L \rho_{wv} (L_{R\downarrow} - B);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_{R\uparrow}}{\partial z} &= \alpha_L \rho_{wv} (B - L_{R\uparrow}); \\ \frac{\partial S_{R\downarrow}}{\partial z} &= \frac{\alpha_S \rho_{wv}}{\cos \theta_0},\end{aligned}\quad (5.2.3)$$

де α_L, α_S – інтегральні коефіцієнти поглинання для потоків довгохвильової та короткохвильової радіації відповідно;

ρ_{wv} – густина водяної пари;

$B = \sigma_{SB} T^4$;

σ_{SB} – стала Стефана-Больцмана.

Як межові умови застосовуються такі:

$$\begin{aligned}\text{при } z \rightarrow \infty \quad L_{R\downarrow} &= 0, \quad S_{R\downarrow} = S^0 (1 - \tilde{A}) \cos \theta_0; \\ \text{при } z \rightarrow 0 \quad B &= \delta_s \sigma_{SB} T_0^4,\end{aligned}\quad (5.2.4)$$

де \tilde{A} – альbedo системи Земля-атмосфера;

δ_s – відносна випромінювальна здатність підстильної поверхні для довгохвильової радіації;

T_0 – температура земної поверхні.

Після уведення змінної $\varpi = \int_0^z \rho_{wv} dz'$ розв'язки рівнянь (5.2.3) за межових умов (5.2.4) записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}L_{R\downarrow}(\varpi) &= -\alpha_L \int_{\varpi}^{\varpi_\infty} e^{\alpha_L(\varpi - \varpi')} B(T) d\varpi'; \\ L_{R\uparrow}(\varpi) &= \delta \sigma_{SB} T_0^4 e^{-\alpha_L \varpi} + \alpha_L \int_0^{\varpi} e^{-\alpha_L(\varpi - \varpi')} B(T) d\varpi'; \\ S_{R\downarrow}(\varpi) &= S^0 (1 - \tilde{A}) \cos \theta_0 e^{-\alpha_S(\varpi_\infty - \varpi)}.\end{aligned}\quad (5.2.5)$$

На основі рівнянь (5.2.3) одержимо таке рівняння для припливу тепла до одиниці об'єму:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial(L_{R\downarrow} - L_{R\uparrow} + S_{R\downarrow})}{\partial z} = \alpha_L \rho_{wv} (L_{R\downarrow} + L_{R\uparrow} - B) + \alpha_S \rho_{wv} S_{R\downarrow}. \quad (5.2.6)$$

Якщо розглядати окремі спектральні інтервали, то можна одержати детальнішу параметризацію переносу променевої радіації; такий підхід до плоскопаралельної моделі був запропонований Г.І. Марчуком.

5.2.2 Використання інтегральних функцій пропускання

Під інтегральною функцією пропускання $P(\xi)$ розуміють відношення повного потоку радіації $F(z)$, який надходить до шару товщиною Δz , що містить масу ξ поглинаючих та випромінюючих речовин, до повного потоку радіації, який виходить з цього шару $F(z + \Delta z)$, тобто відношення

$$P(\xi) = \frac{F(z)}{F(z + \Delta z)}. \quad (5.2.7)$$

Такі функції пропускання можуть бути визначені за допомогою спеціальних експериментів та розрахунків. Для довгохвильової радіації є відомими інтегральні функції пропускання Ф.Н. Шехтер

$$P(\xi) = 0,471e^{-0.696\sqrt{\xi}} + 0,529e^{-8.94\sqrt{\xi}}$$

та Х. Нійліск

$$P(\xi) = 0,515e^{-0.8\sqrt{\xi}} + 0,485e^{-2.0\sqrt{\xi}}.$$

Процес переносу короткохвильової радіації може бути описаний за допомогою інтегральної функції пропускання В. Меллера та В.Г. Кастрова

$$P(\xi) = 1 - 0,09\xi^{0.303}.$$

При використанні функцій $P(\xi)$ для повних потоків радіації мають місце такі вирази:

$$L_{R\downarrow}(\varpi) = - \int_{\varpi}^{\varpi_{\infty}} B(T) dP(\varpi' - \varpi);$$

$$L_{R\uparrow}(\varpi) = \delta\sigma_{SB}T_0^4 P(\varpi) + \int_0^{\varpi} B(T) dP(\varpi - \varpi') - \int_0^{\varpi_{\infty}} B(T) dP(\varpi + \varpi'); \quad (5.2.8)$$

$$S_{R\downarrow}(\varpi) = S^0(1 - \tilde{A}) \cos \theta_0 P\left(\frac{\varpi_{\infty} - \varpi'}{\cos \theta_0}\right).$$

У цих співвідношеннях як ρ_{wv} (яке міститься у виразі для ϖ) розумі-

ється вміст водяної пари. Вміст же інших поглинаючих та випромінюючих речовин (вуглекислий газ, озон тощо) ураховується непрямими чином за допомогою коефіцієнтів, що містяться у виразах для функцій пропускання.

Вирази, аналогічні рівнянням (5.2.8) можна одержати й для функцій поглинання, але у будь-якому випадку треба ураховувати і пропускання (поглинання) довгохвильової радіації у хмарах та опадах. Відзначимо, що хоч вплив останніх є малим у порівнянні з іншими факторами, ним не можна нехтувати.

Отже, цей метод (як і модель, описана у п. 5.2.1) може бути узагальнений для випадку хмарної атмосфери. Найпростіше це робиться для нескінченних у горизонтальній площині хмарних шарів. Припускаючи, що усередині хмари ефективно випромінювання $L_{R\uparrow} - L_{R\downarrow}$ та потік короткохвильової радіації $S_{R\downarrow}$ дорівнюють нулю, можна проінтегрувати рівняння переносу променевої енергії окремо для надхмарної та підхмарної атмосфери і безхмарних шарів. Після цього можна розрахувати для кожного рівня радіаційний баланс та приплив тепла до окремих шарів.

У випадку несучільної хмарності розрахунок може бути здійснений двічі: для ясного неба та суцільної хмарності. Приплив тепла при кількості хмар N (у балах) описується співвідношенням

$$\varepsilon_r^N = \frac{N}{10} \varepsilon_r^{10} + \left(1 - \frac{N}{10}\right) \varepsilon_r^0, \quad (5.2.9)$$

де ε_r^{10} і ε_r^0 – припливи тепла для суцільної хмарності та ясного неба.

5.2.3 Метод Лаціса та Хансена

Цей метод для швидкого розрахунку кількості сонячної радіації, що поглинається земною поверхнею і атмосферою, був запропонований у середині 1970-х років Лацісом та Хансеном (США). В їх інтерпретації, поглинання змінюється залежно від кількості та типу хмар, вологості повітря, зенітної відстані Сонця і альbedo підстильної поверхні.

Проілюструємо запропонований ними метод множинного розсіювання за допомогою рис. 5.2.1. Два шари атмосфери з оптичною густиною τ_a і τ_b у спрощеному варіанті є фізично розділеними. Верхній шар рівномірно опромінюється зверху потоком радіації πF_0 . Загальна радіація, яка відбивається такою двошаровою атмосферою є сумою членів, що відповідають радіації, яка перетнула межу між двома шарами n разів догори ($n = 0, \infty$); це ж стосується дифузної пропущеної радіації.

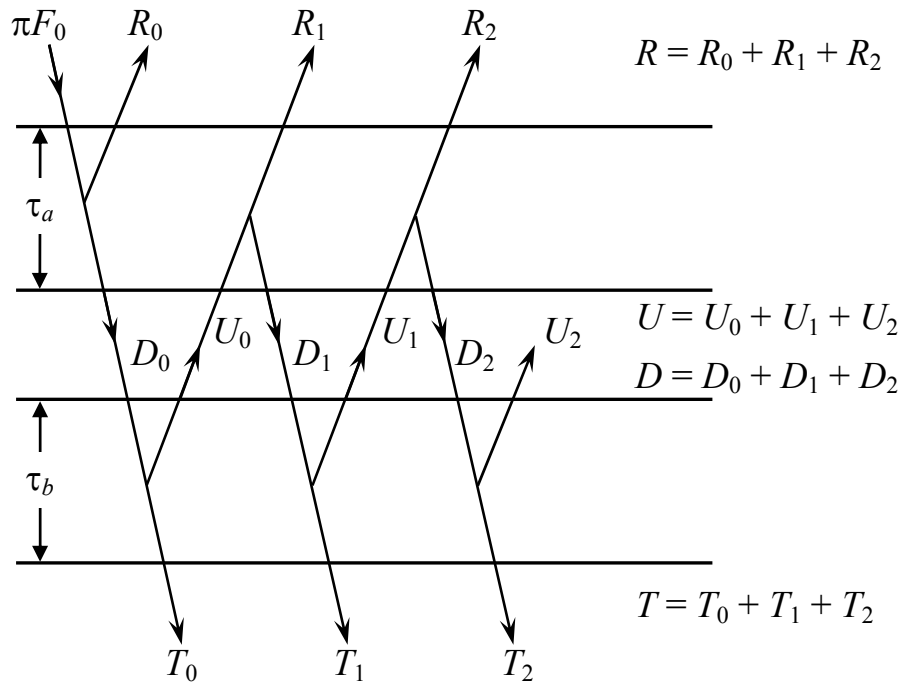


Рисунок 5.2.1 – Схематичне подання розрахунку потоку радіації за методом множинного розсіювання. πF_0 – потік радіації зверху, R – потік радіації, відбитий шарами атмосфери, T – потік радіації, пропущений шарами атмосфери, D – потік радіації, пропущений верхнім шаром атмосфери, U – потік радіації, відбитий нижнім шаром атмосфери

Поглинання сонячної радіації водяною парою на головних ділянках спектра можна виразити як функцію кількості водяної пари q_c (сантиметри водяної пари, що сконденсувалася)

$$A_{wv}(q_c) = \frac{2,9q_c}{(1 + 141,5q_c)^{0,635} + 5,925q_c}. \quad (5.2.10)$$

Цей вираз апроксимує криву поглинання з точністю більше за 99% для q_c у межах від 0,01 до 10 см.

Для того, щоб скоректувати апроксимацію поглинаючої здібності (5.2.10) з урахуванням тиску і температури, Лаціс та Хансен запропонували використовувати ефективну кількість водяної пари

$$q_{c,eff} = q_c \left(\frac{p}{p_s} \right)^n \left(\frac{T_s}{T} \right)^{1/2}, \quad (5.2.11)$$

де p_s і T_s – стандартні тиск та температура ($p_s = 1013$ гПа, $T_s = 273$ К);

n – ступінь впливу тиску на поглинання.

При розрахунках параметр n звичайно береться у межах від 0,5 до 1,0; різ-

ниця радіаційного нагріву у граничному шарі атмосфери, наприклад, при $n = 0,5$ і $n = 1,0$ становить менше за $0,1$ °С за добу.

У ділянках спектра істотного поглинання радіації водяної парою можна знехтувати оптичною товщиною атмосфери внаслідок релеевого розсіювання. Тоді, поглинання радіації водяною парою у l -ому шарі безхмарної атмосфери записується, як

$$A_{l,wv} = S_l \{ A_{wv}(q_{c,l+1}) - A_{wv}(q_{c,l}) + A_s [A_{wv}(q_{c,l}^*) - A_{wv}(q_{c,l+1}^*)] \}, \quad (5.2.12)$$

де A_s - альbedo земної поверхні;

$q_{c,l}$ - ефективна кількість водяної пари, яку проходить пучок прямих сонячних променів, щоб досягти шару l ;

$q_{c,l}^*$ - ефективна кількість водяної пари, яку проходить відбита радіація, щоб досягти шару l знизу;

$$q_{c,l} = \frac{M}{g} \int_0^{p_l} q \left(\frac{p}{p_s} \right)^n \left(\frac{T_s}{T} \right)^{1/2} dp;$$

$$q_{c,l}^* = \frac{M}{g} \int_0^{p_s} q \left(\frac{p}{p_s} \right)^n \left(\frac{T_s}{T} \right)^{1/2} dp + \frac{5}{3g} \int_{p_{l+1}}^{p_s} q \left(\frac{p}{p_s} \right)^n \left(\frac{T_s}{T} \right)^{1/2} dp;$$

$$M = \frac{35}{\sqrt{1224\mu_0^2 + 1}},$$

p_l , p_{l+1} і p_s - тиск на верхній і нижній межі l -ого шару та біля земної поверхні відповідно;

μ_0 - косинус зенітної відстані Сонця.

У випадку хмарної атмосфери треба додатково розрахувати для кожного хмарного шару потоки радіації, що були відбиті та пропущені кожним з шарів, і, відповідно, поглинання хмарами радіації.

Розрахунок змін температури у будь якому шарі атмосфери здійснюється за формулою

$$\varepsilon_r = \frac{A_{l,wv}}{c_p}. \quad (5.2.13)$$

Незважаючи на те, що метод множинного розсіювання був розроблений ще у 1974 році, він і до сьогодні не перетерпів істотних змін. Разом з використанням інтегральних функцій пропускання, він використовується в майже усіх прогностичних моделях.

5.3 Параметризація процесів турбулентного обміну

Турбулентність в атмосфері можна розділити на два класи: дрібно-масштабну турбулентність, горизонтальний масштаб якої має порядок метрів, та вихрову (середньомасштабну) турбулентність, горизонтальний масштаб якої становить від 100 км (рухи мезомасштабу) до тисячі кілометрів (рухи підсиноптичного масштабу). Методи параметризації процесів дрібномасштабної та вихрової турбулентності істотно розрізняються. Пов'язано це, насамперед, з тим, що у першому випадку коефіцієнт турбулентності K (див. рівняння (5.1.5)) характеризує турбулентну дифузію, а у другому – вихрову.

Дрібномасштабна турбулентність – це безладні переміщення у різних напрямках на відстані порядку метрів елементарних об'ємів середовища у вигляді невеликих вихорів (з діаметром близько десятків сантиметрів), вісі яких можуть розташовуватися довільним чином. Пройшовши деяку відстань, що має назву шляху змішування (перемішування), частки повітря дрібномасштабного вихору повністю змішуються з навколишнім повітрям. При цьому відбувається передача властивостей повітря (температури тощо) від одних об'ємів до інших.

Як вихрову турбулентність розуміють обмін значних об'ємів повітря, що відбувається за рахунок переміщення вихорів з вертикальною віссю, горизонтальні розміри яких не перевищують чотирьох кроків моделі сітки. Такі рухи не можуть бути безпосередньо описані чисельними методами по значеннях осереднених метеорологічних величин у вузлах сітки. Це пов'язано з тим, що осереднення вихідних рівнянь гідротермодинаміки виконується по площам елементарних ґраток сітки. Відповідно, такі рухи є рухами підсіткових масштабів. До них належать рухи у невеликих улоговинах та гребенях, деякі мезомасштабні рухи, а також частинна гравітаційних коливань.

Відомо, що дрібномасштабна турбулентність може бути найістотношою у шарах, зі значними градієнтами швидкості вітру, температури та вологості; шари з такими великими градієнтами називаються граничними. Найважливішим з них є планетарний граничний шар (ПГШ), що прилягає до земної поверхні. Його середня висота коливається залежно від пори року та широти місця, але за середнє значення береться величина близько 1 км. У середині ПГШ біля самої земної поверхні формується особливий шар, який називається внутрішнім приземним граничним шаром (ВГШ), висота якого становить близько 30 м. Детальніша інформація про процеси, які спливають у планетарному граничному шарі, наведена у курсах "Фізика граничного шару" і "Геофізична гідродинаміка".

Параметризація процесів, що відбуваються у ПГШ, зводиться не до детального відтворення вертикальних профілів вітру, температури та во-

логості у ньому, а до визначення членів \mathbf{D}_t і ε_t на певних поверхнях, які використовуються у чисельній моделі. У сучасних моделях таких поверхонь усередині ПГШ може бути декілька, причому найнижча поверхня може майже співпадати з підстильною (наприклад, у σ -системі координат). Зі сказаного випливає, що параметризація процесів планетарного граничного шару також розділяється на дві: першу треба використовувати усередині ВГШ (найчастіше, на нижній його межі, тобто на підстильній поверхні), а другу – вище ВГШ.

Як вже казалося вище, турбулентність у планетарному граничному шарі є дрібномасштабною і для неї з великим ступенем точності можна вважати, що у рівняннях, які описують складові сили турбулентної в'язкості (\mathbf{D}_t у виразах (1.2.7)), члени з вертикальним коефіцієнтом турбулентності (k_z) приблизно на чотири порядки більші за члени з горизонтальним коефіцієнтом турбулентності (k_s), тому останніми нехтують. Це означає, що вираз (1.2.7) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_t)_x &\approx \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial u}{\partial z}; \\ (\mathbf{D}_t)_y &\approx \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial v}{\partial z}; \\ (\mathbf{D}_t)_z &\approx \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Аналогічне рівняння для ε_t має вигляд

$$\varepsilon_t \approx c_p \rho \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \quad (5.3.2)$$

Відзначимо, що рівняння (5.3.1)-(5.3.2) можна використовувати вище внутрішнього приземного граничного шару, але необхідно визначити коефіцієнт турбулентної дифузії k_z . Його значення можна знайти як функцію від локального числа Річардсона Ri , а саме

$$k_z = l^2 \sqrt{S} \frac{Ri_c - Ri}{Ri_c} \quad (5.3.3)$$

де $l = 40$ м;

Ri_c – критичне значення числа Річардсона, яке залежить від товщини шару Δz ($Ri_c = 0,257 \Delta z^{0,175}$).

Число Річардсона може бути розраховане за формулою

$$\text{Ri} = \frac{g}{\Theta S} \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \quad (5.3.4)$$

де

$$S = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2.$$

Відзначимо також, що при параметризації вертикальної дифузії можна урахувати вплив на цей процес вологи, тобто взяти до уваги вологоадіабатичні процеси у хмарах. За такого підходу, рівняння (5.3.4) записується у вигляді

$$\text{Ri} = (1 + \alpha_1) \left(\frac{g}{\Theta S} \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{g^2 (\alpha_2 - \alpha_1)}{(1 + \alpha_2) S c_p T} \right), \quad (5.3.5)$$

де

$$\alpha_1 = \frac{L_v q_c}{R_v T} \quad \text{і} \quad \alpha_2 = \frac{L_v^2 q_c}{c_p R_v T^2};$$

R_v – питома газова стала для водяної пари,
і (5.3.5) використовується на тих модельних рівнях, де кількість хмарної вологи перевищує $0,01 \text{ г кг}^{-1}$.

5.3.1 Параметризація планетарного граничного шару за методом І.А. Кібеля

Перший спосіб параметризації ефектів ПГШ у прогностичній моделі був запропонований І.А. Кібелем. Цей ефект він залучив у квазігеострофічну модель за допомогою такої межової умови на нижньому рівні моделі: $w = w_h$ при $p = p_0$. Тут w_h – вертикальна швидкість на верхній межі ПГШ, обумовлена турбулентною в'язкістю; використовуючи (5.3.1), вона шукається через розв'язання рівнянь горизонтального руху, записаних за умови стаціонарності процесу, горизонтальної однорідності поля вітру, відсутності великомасштабних вертикальних рухів у вигляді:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial u}{\partial z}; \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

за умови "прилипання" біля земної поверхні:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad u = v = w = 0; \\ \text{при } z \rightarrow \infty \quad u, v \text{ обмежені.} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Для випадку сталості сили баричного градієнта з висотою усередині ПГШ та сталості коефіцієнта турбулентності чи при завданні певної закономірності його зміни з висотою розв'язок рівнянь (5.3.6) за умов (5.3.7) для u і v має вигляд:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial p}{\partial y} (1 - e^{-\delta z} \cos \delta z) - \frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial p}{\partial x} e^{-\delta z} \sin \delta z; \\ v &= \frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - e^{-\delta z} \cos \delta z) - \frac{1}{\ell\rho} \frac{\partial p}{\partial y} e^{-\delta z} \sin \delta z, \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

де $\delta = \sqrt{\ell/2k_t}$.

Проінтегрувавши рівняння нерозривності $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ по висоті від земної поверхні до верхньої межі планетарного граничного шару h за умов (5.3.7) після підстановки замість u і v рівнянь (5.3.8), одержимо для w_h

$$w_h = a \left(\frac{\partial^2 p_{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_{00}}{\partial y^2} \right), \quad (5.3.9)$$

де a - певний коефіцієнт;
 p_{00} - тиск на рівні моря.

Методика Кібеля є яскравим прикладом параметризації процесів на початку розвитку чисельних методів прогнозу погоди, але не використовується у сучасних прогностичних моделях через те, що закладені у неї припущення не можна застосувати для реальної атмосфери. Дійсно, у цій методиці зовсім не ураховуються потоки тепла і вологи від підстильної поверхні до ПГШ, термічна структура ПГШ тощо.

5.3.2 Параметризація процесів біля земної поверхні у планетарному граничному шарі

Розглянемо пластину з теплоємністю на одиницю площі C_g , яка лежить на якійсь основі, має температуру T_g та радіаційний баланс R_n . Від

неї виходять потоки тепла до основи H_m , відчутного тепла H_s та водяної пари E_s в атмосферу, а рівняння бюджету енергії має вигляд

$$C_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = R_n - H_m - H_s - L_v E_s, \quad (5.3.10)$$

де L_v – приховане тепло випаровування.

Блекедар показав, що це рівняння може бути застосоване для температури поверхні шару реального ґрунту зі сталою теплопровідністю λ_g та теплоємністю на одиницю об'єму C_s . Величина C_g відноситься до цих величин, як

$$C_g = 0,95 \sqrt{\frac{\lambda_g C_s}{2\omega}}, \quad (5.3.11)$$

Якщо залучити так званий параметр теплової інерції

$$\chi = \sqrt{\lambda_g C_s} \quad (5.3.12)$$

та підставити значення кутової швидкості обертання Землі ω , вираз (5.3.11) набуває вигляду

$$C_g \approx 3,293 \cdot 10^6 \chi, \quad (5.3.13)$$

де параметр χ визначається у чисельній моделі залежно від типу підстильної поверхні. Як правило, він має найбільше значення для модельних водної поверхні та боліт, а найменше – для пустель.

Таким чином, щоб визначити зміни у часі температури підстильної поверхні треба параметризувати величини у правій частині рівняння (5.3.10). Методи параметризації променевого теплообміну (R_n) розглядалися у п. 5.2. Відзначимо, що принципи параметризації радіаційних процесів для атмосфери і підстильної поверхні не дуже розрізняються, але методи параметризації у конкретних чисельних моделях прогнозу можуть бути різними. Тому наведемо далі методи параметризації потоків тепла і вологи від земної поверхні.

Перенос тепла внаслідок молекулярної теплопровідності можна розрахувати за формулою

$$H_m = K_m C_g (T_g - T_m), \quad (5.3.14)$$

де K_m – коефіцієнт теплообміну ($K_m = 1,18\omega$);

T_m – температура глибинного шару ґрунту.

Величина T_m може дорівнювати середній температурі підстильної поверхні протягом доби, попередньої до дати прогнозу.

Розрахунок потоків відчутного тепла H_s та водяної пари E_s в атмосферу від підстильної поверхні розрізняється для різних параметризацій процесів граничного шару атмосфери. Нижче наводяться дві такі параметризації.

5.3.3 Об'ємно-аеродинамічна параметризація

Ця схема параметризації була запропонована Дідорффом (США) і є дуже економною з точки зору витрат машинного часу. У цій схемі розрізняються дві стратифікації атмосфери: стійка і нестійка. Розділяються вони згідно величини об'ємного числа Річардсона:

$$Ri_B = \frac{gz_a}{\Theta_a} \frac{\Theta_{va} - \Theta_{vg}}{V^2}; \quad (5.3.15)$$

$$V^2 = \sqrt{V_a^2 + V_c^2}, \quad (5.3.16)$$

де V_a – швидкість вітру на найнижчому вертикальному рівні моделі;
 V_c – конвективна швидкість, яка не дорівнює нулю у випадку нестійкої чи байдужої стратифікації, $V_c = 2\sqrt{\Theta_g - \Theta_a}$;

z_a – товщина найнижчого шару у чисельній моделі;

Θ_a і Θ_g – потенціальна температура повітря на найнижчому вертикальному рівні моделі та підстильної поверхні;

Θ_{va} і Θ_{vg} – віртуальна потенціальна температура на найнижчому вертикальному рівні моделі та підстильної поверхні.

Стойка стратифікація визначається умовою $0 \leq Ri_B \leq 0,9 Ri_c$, а нестійка – $Ri_B \leq 0$. Тут $Ri_c = 3,05$ – критичне значення числа Річардсона.

Отже, згідно параметризації Дідорффа приземний потік відчутного тепла задається виразом

$$H_s = \rho_a c_{pm} C_\Theta C_u (\Theta_g - \Theta_a) V, \quad (5.3.17)$$

де c_{pm} – питома теплоємність водяної пари за сталого тиску;

ρ_a – густина повітря на найнижчому вертикальному рівні моделі;

C_Θ і C_u – коефіцієнти обміну.

У випадку стійкої стратифікації вирази для коефіцієнтів обміну мають вигляд:

$$\begin{aligned}
C_u &= C_{uN} \left(\frac{1 - Ri_B}{Ri_c} \right); \\
C_\Theta &= C_{\Theta N} \left(\frac{1 - Ri_B}{Ri_c} \right),
\end{aligned}
\tag{5.3.18}$$

а нестійкої:

$$\begin{aligned}
C_u &= \left(\frac{1}{C_{uN}} - 25e^{0,26\psi - 0,03\psi^2} \right)^{-1}; \\
C_\Theta &= \left(\frac{1}{C_{\Theta N}} + \frac{1}{C_u} - \frac{1}{C_{uN}} \right)^{-1},
\end{aligned}
\tag{5.3.19}$$

де

$$\begin{aligned}
C_{uN} &= \left[\frac{1}{\kappa_0} \ln \left(\frac{h}{40z_0} \right) + 8,4 \right]^{-1}; \\
C_{\Theta N} &= \left[\frac{0,74}{\kappa_0} \ln \left(\frac{h}{40z_0} \right) + 7,3 \right]^{-1},
\end{aligned}
\tag{5.3.20}$$

κ_0 – стала Кармана;

h – висота планетарного граничного шару;

z_0 – шорсткість підстильної поверхні;

$\psi = \lg(-Ri_B) - 3,5$.

Приземний потік водяної пари розраховується за формулою

$$E_s = \rho_a C_\Theta C_u M (q_s(T_g) - q_a) V, \tag{5.3.21}$$

де q_s – масова частка насиченої водяної пари;

q_a – масова частка водяної пари на найнижчому вертикальному рівні моделі;

M – параметр насиченості підстильної поверхні вологою, який дорівнює 1 у випадку водної поверхні та близький до 0 над пустелею;

Приземний вертикальний турбулентний потік імпульсу τ_s задається виразом

$$\tau_s = \rho_a \left(C_u^2 + \frac{0,003\Phi_s}{\Phi_s + 9800} \right) V^2, \tag{5.3.22}$$

де Φ_s – геопотенціал земної поверхні.

5.3.4 Параметризація Блекедара

Ця параметризація використовується у чисельних моделях для прогнозу вертикального перемішування складових швидкості вітру (u і v), потенціальної температури (Θ), питомої вологості (q) та кількості вологи у хмарах (q_c). Приземні потоки тепла та вологи розраховуються згідно з теорією подібності. Спочатку, визначається величина динамічної швидкості

$$v^* = \max\left(\frac{\kappa_0 V}{\ln(z_a/z_0) - \psi_m}, v_0^*\right). \quad (5.3.23)$$

Тут v_0^* дорівнює $0,1 \text{ мс}^{-1}$ над сушею і 0 над водною поверхнею, а V розраховується за формулою (5.3.16).

Приземний потік тепла розраховується за формулою

$$H_s = -\rho_a c_{pm} \kappa_0 v^* \frac{\Theta_a - \Theta_g}{\ln(z_a/z_0) - \psi_h}. \quad (5.3.24)$$

У рівняннях (5.3.23)-(5.3.24) ψ_m і ψ_h – безрозмірні параметри стійкості, які є функціями об'ємного числа Річардсона Ri_B і залежать від стратифікації атмосфери, причому розрізняють чотири випадки:

1) Стійка стратифікація.

Для цього випадку $Ri_B > Ri_c$ ($Ri_c = 0,2$) і

$$\begin{aligned} v^* &= v_0^*; \\ \psi_m &= \psi_h = -10 \ln(z_a/z_0); \\ H_s &= \max\left(-250, -\rho_a c_{pm} \kappa_0 v^* \frac{\Theta_a - \Theta_g}{\ln(z_a/z_0) - \psi_h}\right). \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

2) Турбулентність, вимушена орографічними перепонами.

Для цього випадку $0 \leq Ri_B \leq Ri_c$ і

$$\psi_m = \psi_h = -\frac{5Ri_B \ln(z_a/z_0)}{1,1 - 5Ri_B}. \quad (5.3.26)$$

3) Нестійка стратифікація (вимушена конвекція)

Для цього випадку $Ri_B < 0$ та $|h/L| \leq 1,5$, де L – масштаб довжини Моніна-Обухова

$$L = -\frac{\rho_a c_{pm} \Theta_a v^{*3}}{\kappa_0 g H_s}, \quad (5.3.27)$$

i

$$\begin{aligned} \psi_m = \psi_h = 0; \\ \frac{z_a}{L} = \text{Ri}_B \ln(z_a/z_0). \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

4) Нестійка стратифікація (вільна конвекція).

Для цього випадку $\text{Ri}_B < 0$ та $|h/L| > 1,5$ і

$$\begin{aligned} \psi_h = -3,23 \frac{z_a}{L} - 1,99 \left(\frac{z_a}{L}\right)^2 - 0,474 \left(\frac{z_a}{L}\right)^3; \\ \psi_m = -1,86 \frac{z_a}{L} - 1,07 \left(\frac{z_a}{L}\right)^2 - 0,249 \left(\frac{z_a}{L}\right)^3, \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

де z_a/L розраховується за другою формулою (5.3.28), а на величину цього параметру накладене обмеження, що він не може бути меншим за $-2,0$; якщо цей параметр дорівнює $-2,0$, то $\psi_m = 2,29$ і $\psi_h = 1,43$.

Формула для приземного потоку вологи має вигляд

$$E_s = M \rho_a \kappa_0 v^* \left[\ln \left(\frac{\kappa_0 v^* z_a}{K_a} + \frac{z_a}{z_l} \right) - \psi_h \right]^{-1} (q_s(T_g) - q_a), \quad (5.3.30)$$

де z_l - глибина молекулярного шару (0,01 м над сушею і z_0 над водною поверхнею);

K_a - коефіцієнт фонові молекулярної дифузії.

Шорсткість підстильної поверхні z_0 над водною поверхнею розраховується як функція динамічної швидкості

$$z_0 = 0,032 \frac{v^{*2}}{g} + 10^{-4}, \quad (5.3.31)$$

а над сушею визначається типом підстильної поверхні і коливається у межах від 0,1 над льодовою поверхнею до 0,5 над лісом та міськими забудовами.

У схемі Блекедара розрізняються дві моделі ПША: так званий "нічний" режим, до якого належать перші три зазначених вище випадки (тобто, коли спостерігається стійка або слабко нестійка стратифікація), та

режим вільної конвекції.

Для нічного режиму приземний вертикальний турбулентний потік імпульсу τ_s розраховується за формулою

$$\tau_s = \rho v^{*2}, \quad (5.3.32)$$

де v^* обчислюється за (5.3.23). Вирази для компонентів цього потоку по осях x і y мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tau_{sx} &= \frac{u}{V_a} \tau_s; \\ \tau_{sy} &= \frac{v}{V_a} \tau_s. \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

На модельних рівнях вище внутрішнього приземного граничного шару прогностичні змінні розраховуються із застосуванням K -теорії, а усередині ВГШ прогностичні рівняння для цих змінних мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_a}{\partial t} &= \frac{\tau_{sx,1} - \tau_{sx}}{\rho_a z_1}; \\ \frac{\partial v_a}{\partial t} &= \frac{\tau_{sy,1} - \tau_{sy}}{\rho_a z_1}; \\ \frac{\partial \Theta_a}{\partial t} &= \frac{H_a - H_1}{\rho_a c_{pm} z_1}; \\ \frac{\partial q_a}{\partial t} &= \frac{E_s - E_1}{\rho_a z_1}; \\ \frac{\partial q_{ca}}{\partial t} &= -\frac{F_1}{\rho_a z_1}, \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

де H_s і E_s розраховуються за формулами (5.3.24) і (5.3.30) відповідно; z_1 є висотою найнижчого модельного шару; індекс a означає змінні усередині ВГШ, а індекс 1 – на верхній його межі.

Якщо спостерігається сильний прогрів від підстильної поверхні, у нижній тропосфері мають місце великі за величиною приземні потоки тепла, що призводить до виникнення шарів з нестійкою стратифікацією. При цьому, на кожному рівні у ПГШ спостерігається перемішування тепла, вологи та кількості руху. У схемі Блекедара за нестійкої стратифікації вертикальне перемішування визначається через термічну структуру

усього шару, в якому спостерігається перемішування.

У середині внутрішнього приземного граничного шару рівняння для прогностичних змінних розв'язуються аналітично

$$f_a^{t+1} = f_a^{t-1} + \left(\frac{F_s z_1}{\bar{m} h^2} - \frac{F_s}{\bar{m} h} + \frac{F_1}{\bar{m} h} \right) \times \left[\exp\left(-\frac{\bar{m} h \Delta t}{z_1} \right) - 1 \right] + \frac{F_s \Delta t}{h}, \quad (5.3.35)$$

де f – будь-яка прогностична змінна;

F_s і F_1 – приземний потік і потік на верхній межі ВГШ;

h – висота ПГШ;

Δt – крок за часом у моделі;

\bar{m} – коефіцієнт перемішування

$$\bar{m} = \frac{H_1}{\rho_a c_{pm} (1 - \alpha_e) \int_{z_1}^h [\Theta_{va} - \Theta_v(z')] dz'}; \quad (5.3.36)$$

α_e – коефіцієнт залучення, який дорівнює 0,2;

H_1 – потік тепла на верхній межі ВГШ.

Для змінних вище ВГШ використовуються такі прогностичні рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \bar{m}(f_a - f) & f &= \Theta, q, q_c; \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= (1 - z/h)\bar{m}(f_a - f) & f &= u, v. \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

5.3.5 Параметризація процесів вихрової турбулентності

Передусім відзначимо, що існує одна принципова відмінність у прояві процесу турбулентності різних масштабів. При розвитку дрібно-масштабної турбулентності відбувається передача енергії від рухів дрібного масштабу до рухів дрібніших масштабів і в остаточному підсумку перехід її у тепло, тобто має місце дифузійний процес. У випадку ж турбулентних рухів середнього та великого масштабу можуть відбуватися два протилежних процеси: передача енергії від рухів більш великого масштабу до рухів дрібнішого масштабу, тобто дифузійний процес, а також передача енергії від рухів більш дрібних масштабів до рухів більш вели-

ких масштабів. В останньому випадку кажуть про рухи з від'ємною в'язкістю. Цей останній процес є особливо важливим при інтенсифікації циклонів та формуванні інтенсивних зональних рухів у помірних широтах.

У найпростішому випадку для параметризації вихрової турбулентності приймається, що вплив вихрової горизонтальної в'язкості на великомасштабну циркуляцію описується співвідношеннями:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_t)_x &\approx k_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\(\mathbf{D}_t)_y &\approx k_\Omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \\ \varepsilon_t &\approx c_p \rho k_\Omega \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right),\end{aligned}\tag{5.3.38}$$

де k_Ω – коефіцієнт вихрової турбулентності.

Як можна бачити, існує деяка схожість між рівняннями (5.3.38) і (5.3.1) та (5.3.2), а відмінність полягає у визначенні коефіцієнтів турбулентності. Якщо у формулах (5.3.1)-(5.3.2) коефіцієнт k_z визначається, головним чином, з використанням положень Прандтля, то для визначення k_Ω у (5.3.38) використовуються положення теорії двовимірної турбулентності. У цій теорії вважається, що сили горизонтальної вихрової в'язкості обумовлені деформацією (D) і описуються виразом

$$\begin{aligned}k_\Omega &= k_{\Omega 0} + \frac{1}{2} \kappa_0^2 \Delta s D, \\ D &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2},\end{aligned}\tag{5.3.39}$$

де κ_0 – стала Кармана;

Δs – горизонтальний крок сітки;

$k_{\Omega 0}$ – фонове значення k_Ω , ($k_{\Omega 0} = 3 \cdot 10^{-3} \Delta s^2 / \Delta t$, Δt – крок за часом).

5.4 Параметризація енергії фазових переходів вологи

Утворення хмарності та опадів відбувається, головним чином, внаслідок процесів конденсації, що пов'язана з велико- та мезомасштабними процесами. Саме масштаб процесів визначає те, що методи параметриза-

ції енергії фазових переходів вологи розділяють на дві різні групи: явні та неявні схеми. Схеми другої групи, які описують хмаро- та опадоутворення за рахунок підстикового масштабу (в першу чергу, за рахунок конвективних процесів) описуються у п. 5.5, а нижче наведений приклад явної схеми.

Ця схема застосовується у випадку, коли у будь-якій точці сітки має місце насичення, тобто вона має справу з процесами утворення хмар та опадів масштабів, які можуть бути розділені модельною сіткою. Відзначимо, що найпростішим способом є використання "перенасичення" водяної пари за рахунок висхідних вертикальних рухів як величини кількості опадів та додання прихованого тепла до рівняння припливу тепла як ϵ_p . Але такий підхід є дуже спрощеним. Дійсно, взаємодія між ненасиченим повітрям, хмарами та опадами може бути схематично (без процесів, описаних у п. 5.3) представлена таким чином (рис. 5.4.1).

Водяна пара може перетворитися зі швидкістю P_{ID} у хмарні кристали, які виникають на льодяних ядрах зі швидкістю P_{II} , та зі швидкістю P_{CON} у хмарні краплі. Кількість водяної пари збільшується за рахунок випаровування хмарних крапель зі швидкістю P_{CON} і дощових крапель зі швидкістю P_{RE} . Кількість вологи у хмарах може збільшитися за рахунок опадів зі швидкістю P_{RA} ; зворотній процес здійснюється зі швидкістю P_{RC} . Відносна кількість вологи у хмарах у вигляді кристалів чи крапель змінюється через адвекцію зі швидкістю P_{MF} ; аналогічний процес спостерігається й для опадів. Нарешті, під час падіння сніг тоне зі швидкістю P_{RM} .

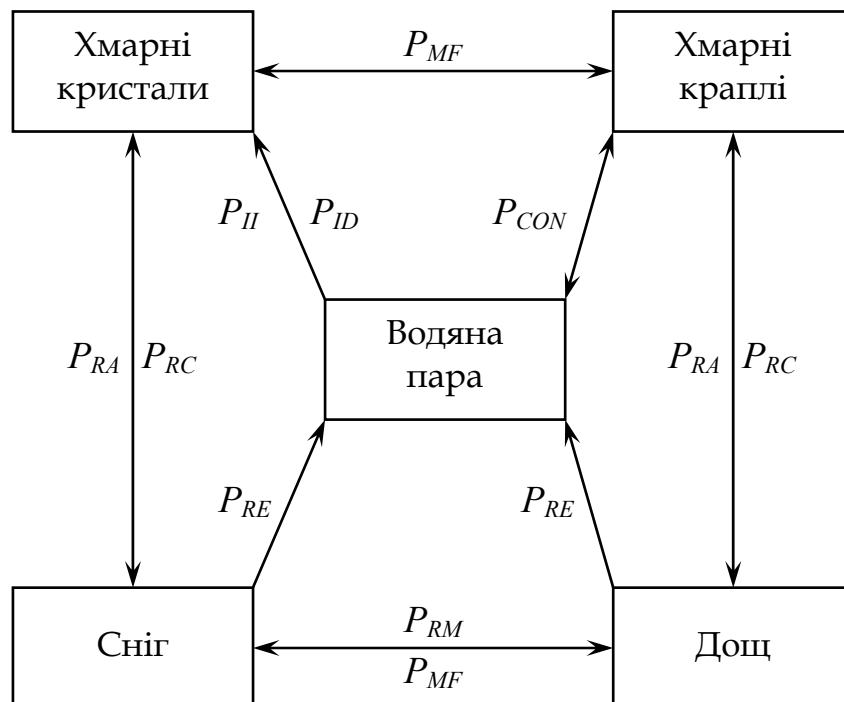


Рисунок 5.4.1 – Схема, що ілюструє процеси взаємодії та перетворення водяної пари з хмарами та опадами (див. позначення у тексті)

Таким чином, у цій схемі розрізняється волога у ненасиченому повітрі (q , тобто масова частка водяної пари), хмарах (q_c) і опадах (q_r), а також процеси перетворення вологи при температурі вище і нижче 0°C . За такого підходу зручніше записати окремо рівняння для q , q_c і q_r у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho q}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho u q}{\partial x} - \frac{\partial \rho v q}{\partial y} - \frac{\partial \rho w q}{\partial z} + \rho(P_{RE} - P_{CON} - P_{II} - P_{ID}); \\ \frac{\partial \rho q_c}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho u q_c}{\partial x} - \frac{\partial \rho v q_c}{\partial y} - \frac{\partial \rho w q_c}{\partial z} + \rho(P_{CON} + P_{II} + P_{ID} + P_{RA} - P_{RC}); \\ \frac{\partial \rho q_r}{\partial t} &= -\frac{\partial \rho u q_r}{\partial x} - \frac{\partial \rho v q_r}{\partial y} - \frac{\partial \rho w q_r}{\partial z} - \frac{\partial V_f \rho q_r}{\partial z} + \rho(P_{RC} - P_{RA} - P_{RE}),\end{aligned}\quad (5.4.1)$$

де V_f – швидкість падіння частинок опадів.

З порівняння рівнянь (5.1.1) і (5.4.1) видно, що процеси фазових перетворень вологи в останніх описуються докладніше. З іншого боку, як буде показано нижче, ця докладність не потребує якихось складних та тривалих, з точки зору машинного часу, обчислень.

Перед тим, як навести вирази для членів P , викладемо деякі окремі положення фізики хмар. Насамперед, для дощу та снігу береться спектр розмірів часток опадів Маршалла-Палмера, а швидкість їх падіння задається у вигляді $V(D) = aD^b$, де D – діаметр часток. Для дощу параметр перерізу $N_0 = 8 \cdot 10^6 \text{ м}^{-4}$, $a = 841,99667$ і $b = 0,8$, а для снігу $N_0 = 2 \cdot 10^7 \text{ м}^{-4}$, $a = 11,72$ і $b = 0,41$. Далі, як відомо з курсу "Фізика атмосфери", масова частка насиченої водяної пари визначається за формулою

$$q_s = \frac{0,622 e_s}{p - e_s}, \quad (5.4.2)$$

де e_s – тиск насичення, що розраховується окремо над водою (e_{sw}) і льодом (e_{sl}).

Швидкість перетворення хмарних крапель (кристалів) у дощ (сніг) P_{RC} обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}P_{RC} &= \max[k_1(q_c - q_{crit}), 0] && \text{дощ}; \\ P_{RC} &= \max[(q_c - M_{\max} n_c)/\Delta t, 0] && \text{сніг},\end{aligned}\quad (5.4.3)$$

де $k_1 = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$;

$q_{crit} = 0,5 \text{ г кг}^{-1}$;

$M_{\max} = 9,4 \cdot 10^{-10} \text{ кг}$;

n_c – концентрація льодяних ядер, яка за Флетчером дорівнює

$$n_c = 10^{-2} \exp[0,6(273,15 - T)]. \quad (5.4.4)$$

Формула для швидкості збільшення кількості вологи у хмарах за рахунок опадів P_{RA} має вигляд

$$P_{RA} = \frac{\pi}{4} a q_c E_c N_0 \frac{\Gamma(3+b)}{\lambda_0^{3+b}}, \quad (5.4.5)$$

$$\lambda_0 = \left(\frac{\pi N_0 \rho_w}{\rho q_r} \right),$$

де Γ - гамма-функція;

E_c - ступінь уловлювання (1,0 для дощу і 0,1 для снігу);

ρ_w - середня щільність часток дощу або снігу (1000 і 100 кг м⁻³, відповідно).

Швидкість виникнення хмарних кристалів на льодяних ядрах P_{II} у випадку достатнього перенасичення над льодом задається виразом

$$P_{II} = \max[(M_0 n_c - q_c) / \Delta t, 0], \quad (5.4.6)$$

де $M_0 = 10^{-12}$ кг.

Швидкість перетворення водяної пари у хмарні кристали P_{ID} розраховується за формулою

$$P_{ID} = \frac{4D_i(S_i - 1)\rho n_c}{A + B}, \quad (5.4.7)$$

$$S_i = \frac{q}{q_{si}}; \quad A = \frac{L_s^2 \rho}{K_a R_v T^2}; \quad B = \frac{1}{q_{si} \chi};$$

де L_s - приховане тепло сублімації;

K_a - теплопровідність повітря;

χ - коефіцієнт дифузії пари у повітря;

D_i - середній діаметр кристалів льоду, який залежить від середньої маси $M_i = q_c / n_c$; для кристалів у формі гексагональних пластин

$$D_i = 16,4 \sqrt{M_i}.$$

Випаровування (сублімація) дощових крапель (снігу) P_{RE} визначається рівнянням

$$P_{RE} = \frac{f_0 N_0 (S - 1)}{A + B} \left[\frac{f_1}{\lambda_0^2} + f_2 \sqrt{\frac{a \rho}{\mu}} S_c^{1/3} \frac{\Gamma(5/2 + b/2)}{\lambda_0^{5/2 + b/2}} \right], \quad (5.4.8)$$

де $S_c = \mu/\rho\chi$ - число Шмідта;

μ - динамічна в'язкість повітря.

Використання рівняння (5.4.8) для випадків дощу чи снігу потребує різних величин N_0 , a і b , а також відповідного розрахунку величин S , A і B (див. (5.4.7)). Крім того, у випадку дощу $f_0 = 2\pi$; $f_1 = 0,78$; $f_2 = 0,32$, а для снігу $f_0 = 4$; $f_1 = 0,65$; $f_2 = 0,44$.

Вигляд формули для розрахунку P_{CON} залежить від величини $\delta M = q - q_s$, а саме:

1) $\delta M > 0$ (перенасичення)

$$P_{CON} = \frac{r_1 \delta M}{\Delta t}, \quad (5.4.9a)$$

де

$$r_1 = \left(1 + \frac{L_v^2 q_s}{R_v c_{pm} T^2} \right)^{-1};$$

2) $\delta M < 0$ і $q_c > 0$ (випаровування)

$$P_{CON} = -\min \left[\frac{r_1 \delta M}{\Delta t}, \frac{q_c}{\Delta t} \right]; \quad (5.4.9б)$$

3) $\delta M < 0$ і $q_c = 0$

$$P_{CON} = 0. \quad (5.4.9в)$$

Якщо хмарні кристали або краплі, так само як частки опадів, перетинають за рахунок переносу униз або догори рівень, де температура дорівнює 0°C , вони починають танути або замерзати. Швидкість цього процесу P_{MF} дорівнює

$$P_{MF} = -\frac{\tau(q_c + q_r)}{\Delta p}, \quad (5.4.10)$$

де τ - ізобарична вертикальна швидкість.

Аналогічно, якщо сніг при падінні перетинає ізотерму 0°C , він також починає танути зі швидкістю

$$P_{RM} = -\frac{\rho g V_f q_r}{\Delta p}. \quad (5.4.11)$$

Швидкість падіння часток опадів V_f , яка також входить до прогностичного рівняння для опадів, визначається за формулою

$$V_f = a \frac{\Gamma(4+b)}{6\lambda_0^b}. \quad (5.4.12)$$

Нарешті, комбінуючи члени P , можна одержати таке рівняння для припливу тепла за рахунок фазових переходів вологи:

$$\varepsilon_p = L(P_{RE} + P_{ID} + P_{II} + P_{CON}) + L_m(P_{RM} + P_{MF}), \quad (5.4.13)$$

де $L = L_v$ при $T > 0$ °C, $L = L_s$ при $T < 0$ °C, а $L_m = (L_s - L_v)$.

5.5 Способи параметризації конвективних процесів

Конвекція є дуже складним фізичним процесом, тому її не можна точно описати за допомогою рівнянь. Внаслідок цього створюються спрощені теоретичні моделі, в яких характеристики конвекції, так само як її виявлення (хмарність, опади, припливи тепла тощо), описуються за допомогою простих рівнянь та співвідношень і виражені параметрами великомасштабних процесів (осереднені значення швидкості вітру, температури, вологості тощо).

Існує достатня кількість методів параметризації процесу конвекції, які можна умовно розділити на три групи. До першої групи належать методи, які ґрунтуються на гіпотезі конвективного пристосування, до другої – методи, які використовують гіпотезу умовної нестійкості другого роду, до третьої – методи за наявності скупчень (ансамблів) купчастих хмар.

5.5.1 Метод конвективного пристосування

Головні положення цього методу можна звести до такого. Якщо в якихось шарах атмосфери виникла нестійкість, то конвекція повинна викликати перерозподіл по вертикалі тепла і вологи таким чином, щоб у результаті в цих та суміжних шарах установився стійкий стан. Якщо в цих шарах має місце стан насичення, то при вологоадіабатичному процесі виділяється тепло конденсації та виникають опади. Розглянемо способи розрахунку змін температури δT (або тепла конденсації) і вологості δq , а також кількості опадів.

Насамперед за значеннями температури і вологості шукаються верхні (p_t) та нижні (p_l) межі шарів з вологоадіабатичної нестійкістю і станом насичення за критеріями

$$\gamma \geq \gamma_{ma} \quad \text{і} \quad q \geq q_s, \quad (5.5.1)$$

де γ_{ma} – вологоадіабатичний градієнт температури.

Шукані зміни температури та масової частки водяної пари знаходять з умови про сталість у процесі конвекції у цих шарах вологої статичної енергії (E_v)

$$E_v = c_p T + gz + L_v q \quad (5.5.2)$$

установлення в цих шарах вологоадіабатичного градієнта, за якого еквівалентно-потенціальна температура при вертикальних переміщеннях не змінюється, і рівності нового значення вологості її значенню при стані насичення за нового значення температури. Ці умови описуються такими співвідношеннями:

$$\int_{p_l}^{p_t} (c_p \delta T + L_v \delta q) dp = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial p} [\Theta^*(T + \delta T, q + \delta q, p)] = 0; \quad (5.5.3)$$

$$q + \delta q = q_s(T + \delta T),$$

де $\Theta^* = \Theta \exp \frac{L_v q_s}{c_p T}$ – еквівалентно-потенціальна температура.

Для того, щоб знайти значення δT і δq , уведемо між рівнями p_t і p_l проміжні рівні p_k . Далі інтеграл у співвідношенні (5.5.3) обчислюється наближено з урахуванням цих рівнів (наприклад, за методом трапецій), а похідна за p апроксимується скінченними різницями з урахуванням рівнів p_k . Для кожного з цих рівнів записується й останнє рівняння (5.5.3). У підсумку одержана система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення шуканих значень δT і δq на усіх уведених рівнях, розв'язуючи яку дістанемо нові значення δT і δq . Далі процес повторюється, використовуючи ці нові значення: за допомогою критеріїв (5.5.1) відшукуються нові значення p_t і p_l , складається система лінійних рівнянь тощо. Описаний обчислювальний процес закінчується, якщо на усіх рівнях p_k не виконуються умови (5.5.1). Після одержання остаточного значення δq розрахову-

ється кількість опадів за співвідношенням

$$W = -\frac{1}{g} \int_0^{p_s} \delta q dp. \quad (5.5.4)$$

У випадку сухоадіабатичного процесу (сухоадіабатичне пристосування) замість критеріїв (5.5.1) використовується критерій $\gamma \geq \gamma_a$, а для визначення збільшення температури використовуються співвідношення:

$$\int_{p_i}^{p_t} c_p \delta T dp = 0; \quad (5.5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} [\Theta(T + \delta T, p)] = 0,$$

які є окремим випадком співвідношень (5.5.3).

5.5.2 Метод умовної нестійкості другого роду

У методі конвективного пристосування не робиться ніяких припущень щодо причин і природи конвективних рухів, що істотно обмежує можливості методу. Зокрема, він зовсім виключає конвекцію в інверсійних шарах атмосфери, що суперечить даним спостережень. Обґрунтованішими з фізичної точки зору є методи параметризації конвекції, що базуються на гіпотезі умовної нестійкості другого роду, яку ще називають гіпотезою "проникаючої" конвекції чи гіпотезою "гарячих башт". Згідно цієї гіпотези конвективні рухи можливі як у шарах з вологадіабатичною нестійкістю, так і в інверсійних шарах. Виникнув під впливом сили Архімеда чи безладних турбулентних пульсацій, конвективні рухи стимулюються великомасштабними висхідними рухами та припливом вологи через її горизонтальні адвекції та випаровування з підстильної поверхні. Ці фактори можна розглядати як вторинну нестійкість атмосфери, яку й називають умовною нестійкістю другого роду.

Застосування цієї гіпотези для параметризації купчастої конвекції розглянемо на прикладі методики, запропонованої Куо. У підґрунті цієї методики лежать такі положення:

- 1) купчаста хмара має форму прямого циліндра, який сягає від рівня конденсації до рівня конвекції;
- 2) усередині хмари вертикальні градієнти температури і вологості

дорівнюють їх значенням за вологоадіабатичного процесу;

3) відсутня будь-яка взаємодія між хмарою та навколишнім середовищем, відсутнє затягнення повітря у хмару;

4) купчаста хмара існує нетривалий час і при досягненні певного стану "розчиняється" миттєво у навколишньому середовищі, через що змінюються температура, вологість, енергія та інші характеристики повітря у просторі, що було зайняте хмарою, та навколишньому середовищі.

Нехай α є часткою площі, що займає конвективна хмарність усередині одиничної площі, T_c і \tilde{T} – температура повітря у хмарі та навколишньому середовищі, q_c і \tilde{q} – масова частка водяної пари у хмарі та навколишньому середовищі, \bar{T} і \bar{q} – середні значення T і q на досліджуваній площі, які встановлюються по закінченні процесу конвекції.

Згідно розглянутої гіпотези у результаті (по закінченні) конвекції середні за площею значення \bar{T} і \bar{q} визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \alpha T_c + (1 - \alpha)\tilde{T}; \\ \bar{q} &= \alpha q_c + (1 - \alpha)\tilde{q}.\end{aligned}\tag{5.5.6}$$

Звідси випливає, що зміни температури і вологості повітря на цій площі, що відбулися у процесі розвитку конвекції, описуються виразами:

$$\begin{aligned}\delta T &= \bar{T} - \tilde{T} = \alpha(T_c - \tilde{T}); \\ \delta q &= \bar{q} - \tilde{q} = \alpha(q_c - \tilde{q}).\end{aligned}\tag{5.5.7}$$

Таким чином, якщо значення температури та масової частки водяної пари усередині хмари та навколишньому середовищі у деякий момент часу відомі, то для визначення їх значень, які встановляться на досліджуваній площі через розвиток конвекції, потрібно визначити величину α . Для цього припускається рівність між кількістю вологи, що надходить до хмари, та її кількістю, що є необхідною для установалення стану насичення усередині об'єму хмари. Також припускається, що надходження вологи ε_w до хмари відбувається через адвекцію вологи з підхмарного шару (A_q) та випаровування з підстильної поверхні (E_s). Величина A_q для шару між поверхнями p_s і p_{cond} розраховується за співвідношенням

$$A_q = -\frac{1}{g} \int_{p_s}^{p_{cond}} \left[\left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + q \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dp,\tag{5.5.8}$$

де p_{cond} – рівень конденсації.

Величина E_s описується формулою

$$E_s = \rho_{z_1} C |V_{z_1}| (q_s - q_{z_1}), \quad (5.5.9)$$

де індексом s позначені величини біля поверхні землі, а z_1 – на верхній межі ВГШ, і C – швидкість конденсації за рахунок великомасштабних процесів. Рівень конденсації z_{cond} може бути розрахований, наприклад, за формулою Ферреля

$$z_{cond} = 122(T_s - T_{ds}), \quad (5.5.10)$$

де T_s і T_{ds} – температура повітря та значення точки роси біля земної поверхні (°C).

Кількість вологи, яка потрібна для досягнення стану насичення у хмарі, можна визначити за співвідношенням

$$\varepsilon_{w,2} = \frac{1}{g} \int_{p_{conv}}^{p_{cond}} \left[(q_s - \bar{q}) + \frac{c_p}{L_v} (T_c - \bar{T}) \right] dp, \quad (5.5.11)$$

де p_{conv} – рівень конвекції.

Якщо δt є часом формування (існування) купчастої хмари, то зазначене вище припущення про рівність вологи, що надходить до хмари і потрібної для досягнення повітрям стану насичення, стосовно одиниці часу та площі можна подати у вигляді

$$\varepsilon_{w,1} \delta t = \alpha \varepsilon_{w,2}. \quad (5.5.12)$$

Звідси одержуємо для α

$$\alpha = \frac{\varepsilon_{w,2}}{\varepsilon_{w,1}} \delta t. \quad (5.5.13)$$

З урахуванням сказаного вище для припливів до одиниці об'єму тепла і вологи у результаті процесу конвекції одержимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= c_p \rho \frac{\alpha}{\delta t} (T_c - \bar{T}); \\ \varepsilon_w &= \frac{\alpha}{\delta t} (q_c - \bar{q}). \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

Для визначення кількості опадів достатньо проінтегрувати останній вираз (5.5.14) від рівня конденсації до рівня конвекції.

5.5.3 Параметризація конвекції в ансамблях купчастих хмар

Цей метод, запропонований Аракавою, Шубертом та ін., ґрунтується на припущенні про взаємодію купчастих хмар з навколишньою атмосферою, стан якої описується метеорологічними величинами; значення останніх визначаються великомасштабним процесом.

Зазначений зв'язок описується рівняннями балансу енергії та вологи, осередненими за площею, достатньо великою, щоб містити сукупність хмар, які розрізняються за розмірами, але меншою за великомасштабне збурення. Уважаючи площу осереднення, що дорівнює площі чарунки сітки прогностичної моделі, одиничною, рівняння балансу статичної енергії (E_c) за відсутності променевого теплообміну і масової частки водяної пари можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{E_c}}{\partial t} &= -\nabla \mathbf{V} \overline{E} - \frac{\partial \overline{\tau E_c}}{\partial p} + L_v (C - E) - \frac{\partial \overline{\tau' E'_c}}{\partial p}; \\ \frac{\partial \overline{q}}{\partial t} &= -\nabla \mathbf{V} \overline{q} - \frac{\partial \overline{\tau q}}{\partial p} + E - C - \frac{\partial \overline{\tau' q'}}{\partial p}.\end{aligned}\tag{5.5.15}$$

Величини $\overline{\tau' E'_c}$ і $\overline{\tau' q'}$, які характеризують інтенсивність турбулентних потоків статичної енергії вологи, пов'язаних з купчастими хмарами, можна подати таким чином:

$$\begin{aligned}\overline{\tau' E'_c} &= -M(p)(E_c - \overline{E_c}); \\ \overline{\tau' q'} &= -M(p)(q - \overline{q}),\end{aligned}\tag{5.5.16}$$

де $M(p)/g$ – вертикальний потік хмарної маси у купчастих хмарах;

E_c і q – енергія і вологість у хмарах;

$\overline{E_c}$ і \overline{q} – енергія і вологість у навколишньому середовищі.

Величину $M(p)$ надалі будемо називати повним потоком маси у купчастих хмарах.

Наведені наближені співвідношення для вертикальних турбулентних потоків одержані за припущенням про те, що вертикальна швидкість у хмарах більша, ніж у навколишньому середовищі, а частка покриття площі чарунки сітки хмарами є невеликою (менше 10%).

Система рівнянь (5.5.15)-(5.5.16) буде замкненою лише у тому випадку, коли відомі вертикальні профілі змінних M , E_c , q , E і C . Замкнення цієї системи рівнянь можливе за допомогою уведення показника швидкості зтягнення маси у хмари λ (параметр утягнення). Можна припустити, що цей параметр визначається радіусом хмари r за співвідношенням $\lambda \approx cr^{-1}$, де c – стала. Для цього показника припускається умова його сталості за висотою, і він описується виразом

$$\lambda = \frac{1}{m(z, \lambda)} \frac{\partial m(z, \lambda)}{\partial z}, \quad (5.5.17)$$

де $m(z, \lambda)$ – потік на рівні z маси у хмарах, що мають показник утягнення λ у інтервалі $\Delta\lambda/2 + \lambda \geq \lambda \geq \lambda - \Delta\lambda/2$.

Сукупність купчастих хмар можна розділити на типи за величиною λ , що взагалі еквівалентне їх розділенню за максимальною висотою їх вершин.

Із співвідношення (5.5.17) випливає, що

$$m(z, \lambda) = m_l(\lambda) \exp \begin{cases} m_l(\lambda) \exp[\lambda(z - z_l)] & \text{при } z_l < z < z_d; \\ 0 & \text{при } z > z_d, \end{cases} \quad (5.5.18)$$

де $m_l(\lambda)$ – потік маси у хмарах на рівні їх основи $z = z_l$;

z_d – рівень "витікання" чи дисипації хмар.

Чим меншим є радіус хмари, тим більшим є параметр утягнення і нижче розташований рівень дисипації z_d .

Загальний потік маси в ансамблі купчастих хмар виражається через

$$M(z) = \int_0^{\lambda_d(z)} m(z, \lambda) d\lambda, \quad (5.5.19)$$

де $\lambda_d(z)$ – максимальна величина λ , за якої хмари досягають висоти z .

Витікання маси з хмар описується виразом

$$D(z) = m(z, \lambda_d) \frac{\partial \lambda_d(z)}{\partial z}. \quad (5.5.20)$$

Для замкнення виписаної системи рівнянь необхідно ще одне рівняння для змінної $m_l(\lambda)$. Визначення цієї функції пов'язане з великими труднощами. В одному з конкретних методів параметризації таке додаткове співвідношення одержане з припущення про статичну рівновагу ансамбля купчастих хмар з великомасштабним процесом. Останнє сходиться

до сталості за часом існування ансамблю хмар роботи A , що здійснюється силами плавучості у хмарах, тобто до умови

$$\frac{dA}{dt} = 0. \quad (5.5.21)$$

Остаточні результати при використанні викладеного методу одержуються після чисельного розв'язання (грунтуючись на рівнянні (5.5.21)) інтегрального рівняння Фредгольма першого роду.

5.6 Питання для самоконтролю

- 1) Що таке параметризація процесів?
- 2) Які процеси належать до підсіткового масштабу?
- 3) Які процеси параметризуються в прогностичних моделях і чому це робиться?
- 4) Які потоки радіації складають радіаційний баланс на деякому рівні атмосфери?
- 5) Що розуміють під інтегральними функціями поглинання?
- 6) Що являє собою інтегральна функція пропускання?
- 7) За якими даними можна одержати радіаційний приплив тепла?
- 8) Як урахується вплив хмарності на радіаційний приплив тепла?
- 9) Сформулюйте принцип методу множинного розсіювання.
- 10) На чому ґрунтується методика параметризації процесів у планетарному граничному шарі?
- 11) За якими даними можна одержати турбулентний приплив тепла?
- 12) Які співвідношення використовуються для одержання турбулентних потоків кількості руху?
- 13) В чому полягає суть параметризації граничного шару атмосфери за методом І.А. Кібеля?
- 14) Яким чином урахується ефект приземного шару в прогностичних моделях?
- 15) Поясніть суть об'ємно-аеродинамічної параметризації.
- 16) Що таке від'ємна в'язкість?
- 17) Перелічіть процеси, які мають місце при фазових перетвореннях водяної пари в атмосфері.
- 18) Які фізичні фактори визначають приплив тепла за рахунок фазових переходів води в атмосфері?
- 19) У чому полягає сутність методу конвективного пристосування?

РОЗДІЛ 6 ОПЕРАТИВНІ ПРОГНОСТИЧНІ МОДЕЛІ ЗА ПОВНИМИ РІВНЯННЯМИ

Світовий досвід свідчить, що сучасні чисельні моделі, які ґрунтуються на повних рівняннях гідротермодинаміки, вже спроможні надійно завбачати майбутній розвиток атмосферних процесів на термін до п'яти-семи діб. Технології моделювання атмосферних процесів, які використовуються на сьогодні у світовій практиці, забезпечують можливість застосування чисельних методів прогнозу погоди високого рівня розділення (до 2-5 км) та з великим ступенем точності. Серед них найбільш широке поширення мають система MM5, створена у США, та розроблена декількома європейськими країнами система ARPEGE-ALADIN. Кожна з цих систем має свої переваги та недоліки, які зумовлені способами реалізації моделей, схемами одержання початкових і межових умов, використанням різних типів горизонтальних і вертикальних сіток, методами параметризації ефектів підсіткового масштабу тощо. Слід також відзначити, що модель ALADIN є спектральною, MM5 – скінченнорізницевою.

6.1 Прогностична модель MM5

Цей комплекс є програмним продуктом Пенсільванського університету і Національного Центра Атмосферних Досліджень США, початкові розробки якого належать до середини 1970-х років і пов'язані з ім'ям відомого фахівця в області мезометеорології Р. Антеса. У 1978 р. з'явилася узагальнююча публікація, яка присвячена опису можливостей моделі для мезометеорологічних досліджень атмосфери і поширення домішок. З того часу відбулося багато змін, пов'язаних з розширенням застосування моделі. Ось деякі з них: можливість багатоцільового використання, негідростатичність динаміки, що дозволяє використання моделі для горизонтальних масштабів у декілька кілометрів, здатність здійснювати обчислення на машинах з пам'яттю, що розширюється і розподіляється, чотиривимірне засвоєння даних і залучення великої кількості фізичних процесів. На сьогодні ця модель відома як MM5 (мезометеорологічна модель п'ятого покоління), що підтримується декількома допоміжними програмами. Вони об'єднані під назвою "моделюючий комплекс MM5".

У моделі MM5 для прогнозу може використовуватися система рівнянь як з урахуванням наближення гідростатики, так і без нього. В останньому випадку, вертикальна координата σ визначається виразом

$$\sigma = \frac{p_0 - p_t}{p_s - p_t},$$

де p_s і p_t – тиск біля поверхні землі та на верхній межі атмосфери;
 p_0 – еталонне значення тиску.

Еталонні значення тиску, температури (T_0) і густини (ρ_0), а також відхилення від них, задаються таким чином:

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= p_0(z) + p'(x, y, z, t); \\ T(x, y, z, t) &= T_0(z) + T'(x, y, z, t); \\ \rho(x, y, z, t) &= \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Тиск у точках сітки визначається через вираз $p = p^* \sigma + p_t + p'$, де $p^*(x, y) = p_s(x, y) - p_t$. Відхилення тиску p' є величиною, що прогнозується.

У моделі ММ5 використовуються такі прогностичні рівняння:

1) кількості руху

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* u}{\partial t} &= -m^2 \left(\frac{\partial p^* uu}{\partial x m} + \frac{\partial p^* vu}{\partial y m} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} p^* u \dot{\sigma} + uDIV - \\ &- \frac{mp^*}{\rho} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right) + p^* \ell v + D_x; \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* v}{\partial t} &= -m^2 \left(\frac{\partial p^* uv}{\partial x m} + \frac{\partial p^* vv}{\partial y m} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} p^* v \dot{\sigma} + vDIV - \\ &- \frac{mp^*}{\rho} \left(\frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial y} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right) - p^* \ell u + D_y; \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* w}{\partial t} &= -m^2 \left(\frac{\partial p^* uw}{\partial x m} + \frac{\partial p^* vw}{\partial y m} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} p^* w \dot{\sigma} + wDIV + \\ &+ p^* g \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{1}{p^*} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} + \frac{T'_v}{T} - \frac{T_0 p'}{T p_0} \right) - p^* g(q_c + q_r) + D_z; \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

2) баричної тенденції

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* p'}{\partial t} &= -m^2 \left(\frac{\partial p^* up'}{\partial x m} + \frac{\partial p^* vp'}{\partial y m} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} p^* p' \dot{\sigma} + p'DIV - \\ &- m^2 p^* \kappa p \left(\frac{\partial u}{\partial x m} - \frac{\sigma}{mp^*} \frac{\partial p^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial v}{\partial y m} - \frac{\sigma}{mp^*} \frac{\partial p^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) + \\ &+ \rho_0 g \kappa p \frac{\partial w}{\partial \sigma} + p^* \rho_0 g w; \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

3) припливу тепла

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* T}{\partial t} = & -m^2 \left(\frac{\partial p^* u T}{\partial x m} + \frac{\partial p^* v T}{\partial y m} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} p^* T \dot{\sigma} + T DIV - \\ & + \frac{1}{\rho c_p} \left(p^* \frac{Dp'}{Dt} - \rho_0 g p^* w - D_{p'} \right) + p^* \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_r}{c_p} + \varepsilon_t; \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

де

$$\begin{aligned} \frac{Dp'}{Dt} = & \frac{\partial p^* p'}{\partial t} + m^2 \left(\frac{\partial p^* u p'}{\partial x m} + \frac{\partial p^* v p'}{\partial y m} \right) - \frac{\partial}{\partial \sigma} p^* p' \dot{\sigma}; \\ DIV = & m^2 \left(\frac{\partial p^* u}{\partial x m} + \frac{\partial p^* v}{\partial y m} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} p^* \dot{\sigma}; \\ \dot{\sigma} = & -\frac{\rho_0 g}{p^*} w - \frac{m \sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x} u - \frac{m \sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial y} v; \end{aligned}$$

m – масштабний множник, який ураховує особливості картографічної проекції;

$\dot{\sigma}$ – аналог вертикальної швидкості;

D_x, D_y, D_z – складові дисипативних сил по осях x, y і z відповідно;

T_v – віртуальна температура;

q_c, q_r – кількість вологи у хмарах та опадах відповідно;

$\varepsilon_p, \varepsilon_r, \varepsilon_t$ – приплив тепла за рахунок фазових перетворень вологи, променистого та турбулентного теплообмінів відповідно;

$D_{p'}$ – поправка до ε_r , яка ураховує різницю тиску по горизонталі.

Для розв'язання рівнянь моделі (6.1.1)-(6.1.5) використовується шахова просторова сітка (рис. 6.1.1). Використовуючи індекс j для осі x і i для осі y , оператори диференціювання та осереднення подаються у вигляді:

$$\begin{aligned} a_x = & \frac{a_{i,j+1/2} - a_{i,j-1/2}}{\Delta x}; \\ \bar{a}^x = & \frac{a_{i,j+1/2} + a_{i,j-1/2}}{2}. \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

При осередненні по вертикалі береться до уваги нерівномірність кроку сітки у цьому напрямку і нелінійна зміна деяких полів, наприклад, температури і вологості. Осереднення на проміжних рівнях по вертикалі здійснюється за допомогою формули

$$\bar{a}^\sigma = \frac{a_{k+1/2}(\sigma_k - \sigma_{k-1/2}) + a_{k-1/2}(\sigma_{k+1/2} - \sigma_k)}{(\sigma_{k+1/2} - \sigma_{k-1/2})}, \quad (6.1.7)$$

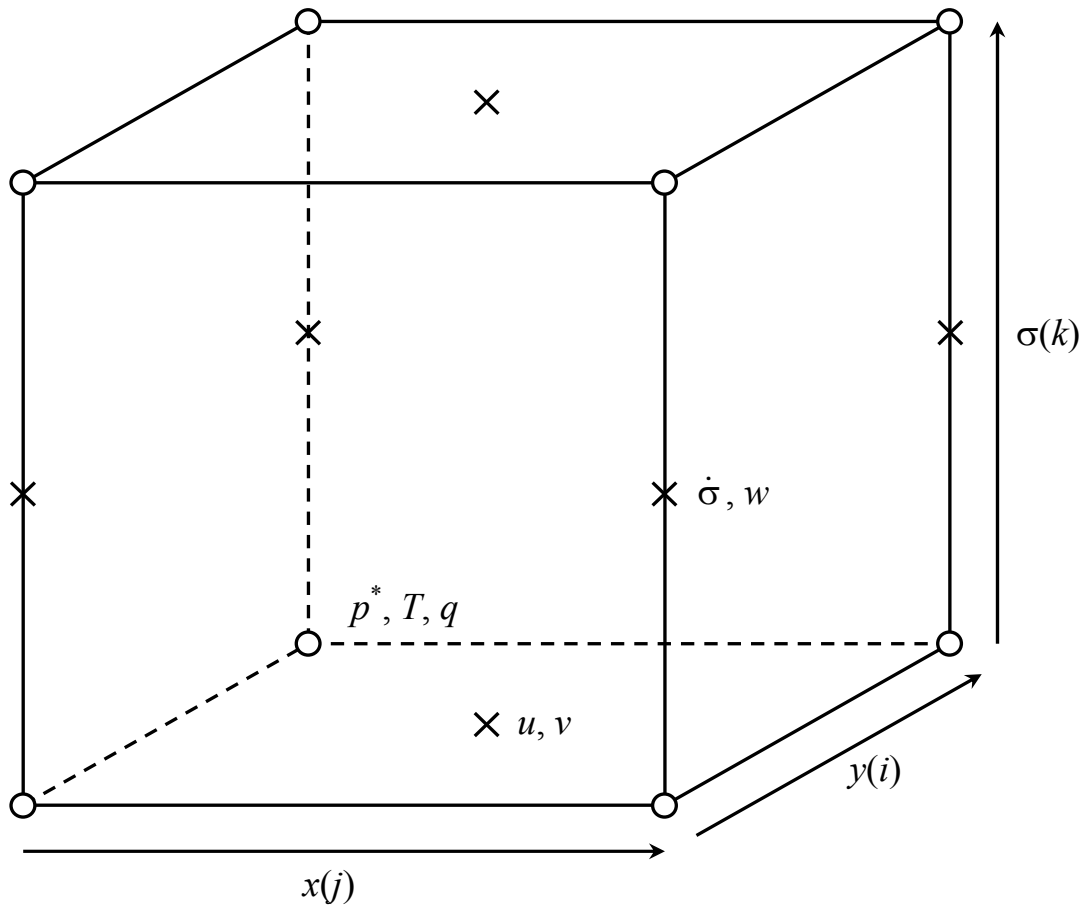


Рисунок 6.1.1 – Розташування прогностичних величин в вузлах просторової сітки

а на основних рівнях використовується друге з рівнянь (6.1.6).

У скінченнорізницевому наближенні рівняння кількості руху моделі записуються у вигляді:

$$\frac{\partial p_d^* u}{\partial t} = -m^2 \left[\left(\bar{u}^x \frac{\overline{p_d^* u}}{m} \right)_x + \left(\bar{u}^y \frac{\overline{p_d^* v}}{m} \right)_y \right] - \left(\overline{p_d^* \sigma} \overline{\sigma}^{xy} \right)_\sigma + \overline{u DIV}^{xy} -$$

$$- \frac{m p_d^*}{\bar{\rho}^{xy}} \left[\bar{p}'_x{}^y - (\overline{\sigma p^*})_x \frac{\overline{p'_\sigma}}{p^*} \right] + p_d^* \ell v + D(p_d^* u);$$

$$\frac{\partial p_d^* v}{\partial t} = -m^2 \left[\left(\bar{v}^x \frac{\overline{p_d^* u}}{m} \right)_x + \left(\bar{v}^y \frac{\overline{p_d^* v}}{m} \right)_y \right] - \left(\overline{p_d^* \sigma} \overline{\sigma}^{xy} \right)_\sigma + \overline{v DIV}^{xy} -$$

$$- \frac{m p_d^*}{\bar{\rho}^{xy}} \left[\bar{p}'_y{}^x - (\overline{\sigma p^*})_y \frac{\overline{p'_\sigma}}{p^*} \right] - p_d^* \ell u + D(p_d^* v);$$

де $p_d^* = \overline{p^*}^{xy}$;

$$DIV = m^2 \left[\left(\frac{\overline{p_d^* u}}{m} \right)_x + \left(\frac{\overline{p_d^* v}}{m} \right)_y \right] + p^* \dot{\sigma}_\sigma. \quad (6.1.10)$$

Оператори, які ураховують підсіткові ефекти і дифузію, виражаються через $D(a) = k_\Omega \Delta x^2 (a_{xxxx} + a_{yyyy}) + (k_t a_z)_z$ (зміни у ГША), при цьому схема четвертого порядку на межах області інтегрування замінюється схемою другого порядку.

Вираз для вертикальної швидкості $\dot{\sigma}$ у скінченнорізницевому поданні має вигляд

$$\dot{\sigma} = -\frac{\overline{\rho_0}}{p^*} g w - \frac{m\sigma}{p^*} \overline{p^*}^x u^{xy\sigma} - \frac{m\sigma}{p^*} \overline{p^*}^y v^{xy\sigma}, \quad (6.1.11)$$

а рівняння кількості руху у вертикальному напрямку записується, як

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* w}{\partial t} = & -m^2 \left[\left(\overline{w^x} \frac{\overline{p^* u}}{m} \right)_x + \left(\overline{w^y} \frac{\overline{p^* v}}{m} \right)_y \right] - \left(\overline{p^* w} \dot{\sigma}^\sigma \right)_\sigma + \overline{w DIV}^\sigma + \\ & + p^* g \frac{\overline{\rho_0}}{\rho} \left[\frac{1}{p^*} p'_\sigma - \frac{1}{\gamma} \frac{\overline{p' T_0}^\sigma}{p_0 T} \right] + p^* g \frac{\overline{\rho_0}}{\rho} \left[\frac{\overline{T'_v}^\sigma}{T} - \frac{R}{c_p} \frac{\overline{p' T_0}^\sigma}{p_0 T} \right] - \\ & - p^* g (\overline{q_c + q_r})^\sigma + D(p^* w). \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

Рівняння баричної тенденції без урахування неадіабатичних членів і припливу тепла подаються у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* p'}{\partial t} = & -m^2 \left[\left(\overline{p'^x} \frac{\overline{p^* u}}{m} \right)_x + \left(\overline{p'^y} \frac{\overline{p^* v}}{m} \right)_y \right] - \left(\overline{p^* p'} \dot{\sigma}^\sigma \right)_\sigma + p' DIV + \\ & + p^* \rho_0 g \overline{w}^\sigma - m^2 p^* \gamma p \left[\left(\frac{\overline{u}^y}{m} \right)_x - \left(\overline{\sigma p^*}^x \right)_x \frac{\overline{u}_\sigma^{xy\sigma}}{m p^*} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\overline{v}^x}{m} \right)_y - \left(\overline{\sigma p^*}^y \right)_y \frac{\overline{v}_\sigma^{xy\sigma}}{m p^*} - \frac{\rho_0 g}{m^2 p^*} w_\sigma \right]; \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* T}{\partial t} = & -m^2 \left[\left(\overline{\frac{p^* u}{T}} \right)_x + \left(\overline{\frac{p^* v}{T}} \right)_y \right] - \left(\overline{p^* T \dot{\sigma}} \right)_\sigma + T \text{DIV} + \\ & + \frac{1}{\rho c_p} \left[p^* \frac{Dp'}{Dt} - \rho_0 g \overline{p^* w} - D(p^* p') \right] + p^* \frac{\dot{Q}}{c_p} + D(p^* T). \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Через те, що в рівняннях моделі не ураховується гідростатичне наближення, то вони містять швидкі акустичні хвилі, а це, у свою чергу, потребує маленьких кроків за часом для забезпечення стійкості розв'язку. Щоб відфільтрувати акустичні хвилі від інших, інтегрування за часом для членів, що містять такі хвилі, здійснюється з короткішим часовим кроком у порівнянні з рештою доданків. Використання системи скорочених рівнянь для короткого часового кроку робить моделювання ефективнішим. Скорочені рівняння містять взаємодію між кількістю руху та тиском і записуються у вигляді:

1) кількість руху в горизонтальній площині

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{m}{\rho} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right) = S_u; \quad (6.1.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{m}{\rho} \left(\frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\sigma}{p^*} \frac{\partial p^*}{\partial y} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right) = S_v; \quad (6.1.16)$$

2) кількість руху в вертикальній площині

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\rho_0 g}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} + \frac{g}{\gamma} \frac{p'}{p} = S_w; \quad (6.1.17)$$

3) баричної тенденції

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} + m^2 \gamma p \left[\frac{\partial u/m}{\partial x} - \frac{\sigma}{m p^*} \frac{\partial p^*}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial v/m}{\partial y} - \frac{\sigma}{m p^*} \frac{\partial p^*}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right] - \\ - \frac{\rho_0 g \gamma p}{p^*} \frac{\partial w}{\partial \sigma} - \rho_0 g w = S_{p'}, \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

де члени S містять зміни за рахунок адвекції, дифузії, сил плавучості та Коріоліса і залишаються незмінними для проміжних кроків за часом.

Для інтегрування маленькими кроками за часом використовується напівнеявна схема Клемпа-Вільгельмсона. Спочатку, ґрунтуючись на

значеннях u , v , w і p' у момент часу τ , інтегруються перші два рівняння кількості руху для визначення $u^{\tau+1}$ і $v^{\tau+1}$. Ці величини потім використовуються у рівнянні баричної тенденції, що призводить до центрованого у часі явного подання акустичних хвиль, які розповсюджуються у горизонтальній площині. Розповсюдження акустичних хвиль по вертикалі ураховується через установлення залежності $w^{\tau+1}$ і $p'^{\tau+1}$ від осереднених значень p' і w відповідно у рівняннях (6.1.17) і (6.1.18). Наприклад, у рівнянні (6.1.17) p' подається у вигляді

$$\overline{p'}^\beta = \frac{1}{2}(1 + \beta)p'^{\tau+1} + \frac{1}{2}(1 - \beta)p'^{\tau}; \quad (6.1.19)$$

аналогічна процедура використовується для w у рівнянні (6.1.18). Параметр β визначає часове зважування, де нуль дає центроване за часом середнє значення, а додатні значення призводять до зсуву до майбутнього часового кроку, що може використовуватися для придушення акустичних хвиль. На практиці використовуються значення $\beta = 0,2 - 0,4$.

З просторовими похідними другого порядку скінченнорізницеві подання рівнянь (6.1.17) і (6.1.18) можуть бути скомбіновані вилученням $p'^{\tau+1}$ у скінченнорізницеве рівняння для $w^{\tau+1}$, яке розв'язується прямою рекурсією на трьохдіагональній матриці.

Неявна схема диференціювання по вертикалі робить можливою незалежність кроків за часом від вертикального розділення моделі, тому крок залежить тільки від відстані між вузлами горизонтальної сітки. Щоб керувати акустичними хвилями, які розповсюджуються у горизонтальній площині, додатково використовується метод демпфування Скамарока-Клемпа. Цей метод схожий на екстраполяцію у часі членів з тиском у рівняннях (6.1.15) і (6.1.16); на практиці екстраполяція становить $0,1\Delta t$.

Температура і вологість повітря прогнозуються за допомогою звичайної схеми "чехарда" з кроком Δt , тому що у них не містяться доданки з акустичними хвилями. За цією ж схемою оцінюються члени S в (6.1.15)-(6.1.18), але для них крок від $t - \Delta t$ до $t + \Delta t$ звичайно розділяється на чотири кроки тривалістю Δt , протягом яких постійно коректуються складові вектора швидкості вітру та тиск.

Релаксаційна межева умова містить "ослаблення" або "підштовхування" прогностичних змінних моделі у напрямку великомасштабного аналізу. Цей метод містить ньютоніві та дифузійні члени

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_n = F(n)F_1(\alpha_{LS} - \alpha_{MC}) - F(n)F_2\Delta_2(\alpha_{LS} - \alpha_{MC}), \quad n = 2, 3, 4. \quad (6.1.20)$$

Член F збільшується лінійно від зовнішньої межі таким чином, що

$$F(n) = \frac{5-n}{3}, \quad n = 2, 3, 4; \quad (6.1.21)$$

$$F(n) = 0, \quad n > 4, \quad (6.1.22)$$

F_1 і F_2 задаються через:

$$F_1 = \frac{1}{10\Delta t}; \quad (6.1.23)$$

$$F_2 = \frac{\Delta s^2}{50\Delta t}, \quad (6.1.24)$$

і індекс MC стосується змінних, які розраховані за моделлю, а LS – до великомасштабних змінних, які одержуються або за спостереженнями, або після моделювання великомасштабних процесів.

Цей метод не використовується для вертикальної швидкості, яка може вільно змінюватися у просторі; винятком є вузли на межах, де приймається умова рівності градієнта нулю. Компоненти вектора швидкості вітру в тих вузлах на межі, в яких спостерігається приплив повітря, визначаються аналогічно процедурі, що використовується для температури і тиску, а у вузлах з відтоком повітря екстраполюються з внутрішніх вузлів сітки. Такі межові умови для швидкості є необхідними тільки при розрахунку нелінійних дивергентних членів у рівняннях горизонтальної кількості руху і не застосовуються при обчисленні горизонтальної дивергенції.

Вміст вологи у хмарах та опадах у вузлах з припливом повітря вважається рівним нулю, а у вузлах з відтоком повітря приймається умова рівності градієнта нулю.

Одною з особливостей моделі ММ5 є верхня межева умова типу випромінювання, яка дозволяє проходити хвильовій енергії повз межу без відбиття. Для негідростатичних хвиль вона записується у вигляді

$$\hat{p} = \frac{\rho N}{K} \hat{w}, \quad (6.1.25)$$

де \hat{p} і \hat{w} – горизонтальні Фур'є-компоненти тиску і вертикальної швидкості;

ρ і N – густина повітря і частота Брента-Вяйсяля біля верхньої межі моделі;

K – загальне горизонтальне хвильове число компонентів розкладення Фур'є.

Ця верхня межа умова поєднується з неявним розрахунком тиску і вертикальної кількості руху. Перед тим, як ці значення будуть відомі у момент часу $n + 1$, величини на верхній межі моделі (w_1 зміщене на півкроку сітки уверх відносно p_1 ; див. рис. 6.1.1) можуть бути подані у вигляді (за відомих a і b)

$$p_1^{n+1} = b + aw_1^{n+1}. \quad (6.1.26)$$

Коефіцієнт $a(x, y, t)$ залежить від термодинамічної структури і заданої нижньої межевої умови для w . Він змінюється у межах 5% від сталого значення навіть в умовах гірської місцевості, а також майже не залежить від часу. Величина $b(x, y, t)$ залежить від тиску і, в більшій мірі, від баричної тенденції. Тому замінюючи змінну a її середнім значенням \bar{a} , запишемо замість (6.1.26)

$$\hat{p} = \hat{b} + \bar{a}\hat{w}. \quad (6.1.27)$$

Тепер, використовуючи спільно (6.1.25) і (6.1.27) для хвильового числа $K = 2\pi/\lambda$ і приймаючи на верхній межі моделі $\bar{\rho N}$, одержимо вираз для компоненти розкладення Фур'є вертикальної швидкості

$$\hat{w} = \frac{K\hat{b}}{\bar{\rho N} - \bar{a}K}. \quad (6.1.28)$$

Щоб одержати w_1^{n+1} , об'єднаємо в одному операторі обмежене за площею двовимірне косинус-перетворення, пряме перетворення, множення та зворотне перетворення. Тоді

$$w_{IJ} = \sum_{i=I-6}^{I+6} \sum_{j=J-6}^{J+6} \alpha_{ij} b_{ij}, \quad (6.1.29)$$

де перетворення обмежене до 13×13 точок, а значення масиву α можуть бути розраховані попередньо і залишатися незмінними протягом інтегрування у часі. Елементи масиву α шукають за допомогою формули

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=0}^6 \sum_{l=0}^6 \frac{\delta_i \delta_j \delta_k \delta_l}{36} \cos \frac{2\pi k i}{12} \cos \frac{2\pi l j}{12} f(K), \quad (6.1.30)$$

де $f(K) = \frac{K}{\bar{\rho N} - \bar{a}K}$, $K = \sqrt{\hat{k}^2 + \hat{l}^2}$, а $\delta = 1$ за виключенням меж підсумову-

вання, де $\delta = 0,5$.

При визначенні ефективних хвильових чисел беруться до уваги скінченні різниці градієнта тиску і дивергенції. Для сітки, поданої на рис. 6.1.1, ефективні хвильові числа можуть бути виражені у членах безрозмірних хвильових чисел k і l , де

$$\begin{aligned}\hat{k} &= \frac{2}{\Delta x} \sin \frac{k\pi}{12} \cos \frac{l\pi}{12}; \\ \hat{l} &= \frac{2}{\Delta x} \sin \frac{l\pi}{12} \cos \frac{k\pi}{12},\end{aligned}\tag{6.1.31}$$

а Δx – крок сітки.

Таким чином, схему використання верхньої межевої умови типу випромінювання можна сформулювати таким чином: за попередньо розрахованими значеннями параметрів \bar{a} і $\overline{\rho N}$ обчислюються коефіцієнти α за допомогою (6.1.30), а потім протягом інтегрування у часі застосовується формула (6.1.29).

Наприкінці відзначимо, що для параметризації підсіткових процесів в моделі ММ5 використовуються інтегральні функції поглинання та схема Лаціса-Хансена для параметризації променевого теплообміну, схеми Дідорффа і Блекедара для параметризації процесів у граничному шарі атмосфери, параметризація енергії фазових перетворень, аналогічна описаній у розділі 5, а також схеми Куо, Аракави-Шуберта і Грелла для відтворення конвективних процесів.

6.2 Прогностична модель ARPEGE

У Європі найуспішнішими вважаються чисельні прогнози, підготовлені у Європейському Центрі Середньострокових Прогнозів Погоди (ECMWF, далі ЄЦ). Цей Центр був створений у середині 1970-х рр. країнами Європейського співтовариства на їхні внески завдяки інтелектуальним зусиллям вчених, фахівців з фізики атмосфери й обчислювальної математики. Ключовим моментом у його розвитку можна вважати залучення для роботи над окремими структурами моделі іноземних фахівців з усіх країн Європи та Америки. Країни, а також вчені, що приймали участь у розробці окремих блоків моделі, одержали можливість використовувати створену колективними зусиллями чисельну модель у своїх країнах.

Модель ЄЦ називається у Великій Британії IFS (Integrated Forecast System), а у Франції – ARPEGE (аббревіатура французькою мовою). Від цієї

головної моделі бере свій початок регіональна модель для обмеженої території, що ідентична базовій, тому що в ній використовуються ті ж основні рівняння і параметризації процесів підсіткових масштабів. Ця модель одержала назву ALADIN. Її основне призначення - давати прогноз для території окремих країн і локальний прогноз при накладених межових умовах із глобальної моделі.

Модель ARPEGE є спектрально-різницевою. По широті використовується спектральне розкладання, а по довготі – розкладання по поліномах Лежандра. По вертикалі використовується гібридна система (η -система) координат з 31 рівнем. Усікання спектра здійснюється для 199 гармонік, що відповідає горизонтальним розмірам близько 200 км. Усікання поблизу полюса (за який необов'язково береться географічний) здійснюється для близько 700 гармонік.

Гібридна система координат, що використовується у моделі ARPEGE, ґрунтується на гідростатичному тиску і дозволяє чисельне розв'язання рівнянь для стисливої атмосфери. До того, як розглядати координату η , треба увести вертикальну координату "гідростатичного тиску" π , який визначається у кожній точці вагою одиничної площі стовпа повітря вище цієї точки. В локальних декартових координатах π визначається виразом

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = -\rho g, \quad (6.2.1)$$

тобто

$$\pi(x, y, z, t) = \int_z^{\infty} \rho(x, y, z', t) g dz'. \quad (6.2.2)$$

Співвідношення між гібридною координатою η і гідростатичним тиском π задається величиною

$$m = \frac{\partial \pi}{\partial \eta}, \quad (6.2.3)$$

а як аналог вертикальної швидкості використовується величина $\dot{\eta}$ або $\dot{\pi}$.

Використання гібридної координати η дозволяє подати нижню межову умову за наявності орографії. Використовуючи гідростатичний тиск, цю координату можна увести через співвідношення

$$\pi(x, y, \eta, t) = A(\eta) + B(\eta)\pi_s(x, y, t), \quad (6.2.4)$$

де π_s – приземний гідростатичний тиск.

Область визначення координати η може бути узята у загальному вигляді як $[\eta_s, \eta_T]$, а на практиці $\eta_s = 1$ і $\eta_T = 0$.

З такою вертикальною координатою нижня межа умова моделі ARPEGE визначається топографією підстильної поверхні; для $\eta = 1$ виконується умова $\pi = \pi_s$, що згідно з (6.2.4) є еквівалентом:

$$\begin{aligned} A(1) &= 0; \\ B(1) &= 1. \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Якщо обмежити область визначення змінних моделі якоюсь ізобаричною поверхнею, для якої $\eta = 0$, а гідростатичний тиск є сталим, то позначивши останній через π_T , можна записати:

$$\begin{aligned} A(1) &= \pi_T; \\ B(1) &= 0. \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Також вважається, що не існує потоку маси через межі розрахункової області, тобто $\dot{\eta}(1) = \dot{\eta}(0) = 0$.

Прогностичними змінними у моделі ARPEGE є зональна та меридіональна складові вектору вітру u і v , температура T , безрозмірний негідростатичний тиск \hat{p} , вертикальна "псевдодивергенція" \hat{d} , приземний гідростатичний тиск π , масова частка водяної пари q . Вирази для величин \hat{p} і \hat{d} мають вигляд:

$$\hat{p} = \frac{p - \pi^*}{\pi_r^*(\eta)}; \tag{6.2.7}$$

$$\hat{d} = -g \frac{\pi^*}{RT^*} \frac{\partial w}{\partial \pi^*}, \tag{6.2.8}$$

де індекс r позначає належність величини до однорідного умовного вихідного стану, а "*" – до ізотермічного, гідростатично збалансованого стану.

Прогностичними рівняннями моделі ARPEGE є:

1) рівняння кількості руху

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -RT \frac{\nabla p}{p} - \frac{\partial p}{\partial \pi} \nabla \Phi + \hat{\mathbf{D}}; \tag{6.2.9}$$

2) рівняння вертикальної "псевдодивергенції"

$$\begin{aligned} \frac{d(\hat{d})}{dt} = & -\frac{g^2}{RT^*} \frac{\partial}{\partial \log \pi^*} \frac{\partial(\pi^* \hat{p})}{\partial \pi} + g \frac{\pi^*}{m^* RT^*} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} \cdot \nabla_w - \hat{d} \frac{\partial(m\dot{\eta})}{\partial \pi} + \\ & + (m\dot{\eta}) \frac{\hat{d}}{\pi^*} \frac{\partial \pi^*}{\partial \pi} - \pi^* (m\dot{\eta}) \frac{\partial}{\partial \pi^*} \left(\frac{\partial \pi^*}{\partial \pi} \frac{\hat{d}}{\pi^*} \right) + \pi^* (m\dot{\eta}) \frac{\partial}{\partial \pi} \left(\frac{\hat{d}}{\pi^*} \right) - \frac{g\pi^*}{m^* RT^*} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \eta}; \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

3) рівняння тенденції негідростатичного тиску

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = -\alpha \hat{p} D_3 - \frac{\pi}{\pi^*} \left(\alpha D_3 + \frac{\dot{\pi}}{\pi} \right) - \frac{\hat{p}}{\pi^*} (m\dot{\eta}) \frac{\partial \pi}{\partial \pi} + \frac{1}{\pi^*} \frac{\dot{Q}p}{c_v T}; \quad (6.2.11)$$

4) рівняння припливу тепла

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{RT}{c_v} D_3 + \frac{\dot{Q}}{c_v}; \quad (6.2.12)$$

5) рівняння тенденції приземного гідростатичного тиску

$$\frac{\partial \pi_s}{\partial t} = -\nabla \int_0^1 m \mathbf{V} d\eta. \quad (6.2.13)$$

У системі рівнянь (6.2.9)-(6.2.13) використовуються такі позначення:

$$\begin{aligned} D_3 = & \nabla \mathbf{V} + \frac{1}{m} \frac{p}{RT} \nabla \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} - \frac{g}{m} \frac{p}{RT} \frac{\partial w}{\partial \eta}; \\ m\dot{\eta} = & B \int_0^1 \nabla \cdot m \mathbf{V} d\eta - \int_0^\eta \nabla \cdot m \mathbf{V} d\eta; \\ \frac{\dot{\pi}}{\pi} = & \frac{1}{\pi} \left(\mathbf{V} \cdot \nabla \pi - \int_0^\eta \nabla \cdot m \mathbf{V} d\eta \right). \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Відзначимо також, що рівняння для масової частки водяної пари залучається у систему рівнянь у випадку, коли моделюються неадіабатичні атмосферні процеси.

Для інтегрування кроками за часом у моделі ARPEGE використовується напівнеявна схема, в якій окремо апроксимуються лінійні та нелінійні члени.

Наприкінці відзначимо, що для параметризації підсіткових процесів у моделі ARPEGE застосовуються інтегральні функції поглинання для параметризації променевого теплообміну, К-теорія для параметризації процесів у граничному шарі атмосфери, параметризація енергії фазових

перетворень, а також, аналогічні описаним у розділі 5 для відтворення конвективних процесів.

6.3 Порівняльний аналіз якості сучасних моделей прогнозу за повними рівняннями

Після того, як у середині 1950-х років результати чисельного прогнозу погоди почали розглядатися не тільки як теоретичні експерименти, а й дістали деяке практичне застосування, виникло питання про якість ("успішність") прогнозів. Одним з перших параметрів, застосованих для оцінки успішності, була відносна похибка горизонтального градієнта геопотенціальних висот на поверхні АТ-500 гПа (S1), уведена метеорологічною службою США. Практика роботи з цим параметром показала, що його значення більше 70% відповідає "марному прогнозу", а 20% і менше – "досконалому прогнозу".

На рис. 6.3.1 подані зміни за часом параметра S1 для прогнозів на 36 та 72 години тиску на рівні моря та висоти поверхні АТ-500 гПа для Північної Америки. Насамперед, можна казати про те, що у теперішній час прогноз АТ-500 гПа на 36 годин є близьким до того, що у 1950-х роках уважалося "досконалим прогнозом". Чисельні прогнози здатні дуже добре загально відбивати положення та інтенсивність великомасштабних атмосферних хвиль, а також основні центри високого та низького тиску, які визначають загальний розвиток погодних умов при прогнозі на 36 годин. У той же час, прогнози тиску на рівні моря містять атмосферні процеси більш дрібного масштабу, такі як атмосферні фронти, мезомасштабні конвективні системи, що визначають наявність опадів у теплу пору року, тощо, внаслідок чого вони все ще далекі від досконалості. Хоч успішність таких прогнозів також істотно покращилась за минулі роки, параметр S1 все ще набагато перевищує межу у 20%. З іншого боку, точність прогнозів на 72 години у теперішній час є такою ж, що й успішність прогнозів на 36 годин приблизно 10-20 років тому. Аналогічне покращення якості прогнозів спостерігається й для інших величин, що прогнозуються, наприклад, опадів.

Покращення якості чисельного прогнозу погоди за останні 40-50 років є наслідком чотирьох факторів:

- обчислювальна потужність сучасних суперкомп'ютерів дозволила використовувати в оперативних атмосферних моделях дрібніше розділення просторової сітки та досконаліші апроксимації;
- покращене подання у моделях дрібномасштабних фізичних процесів (хмар, опадів, турбулентних потоків тепла, вологи, кількості руху, а також радіаційних процесів);

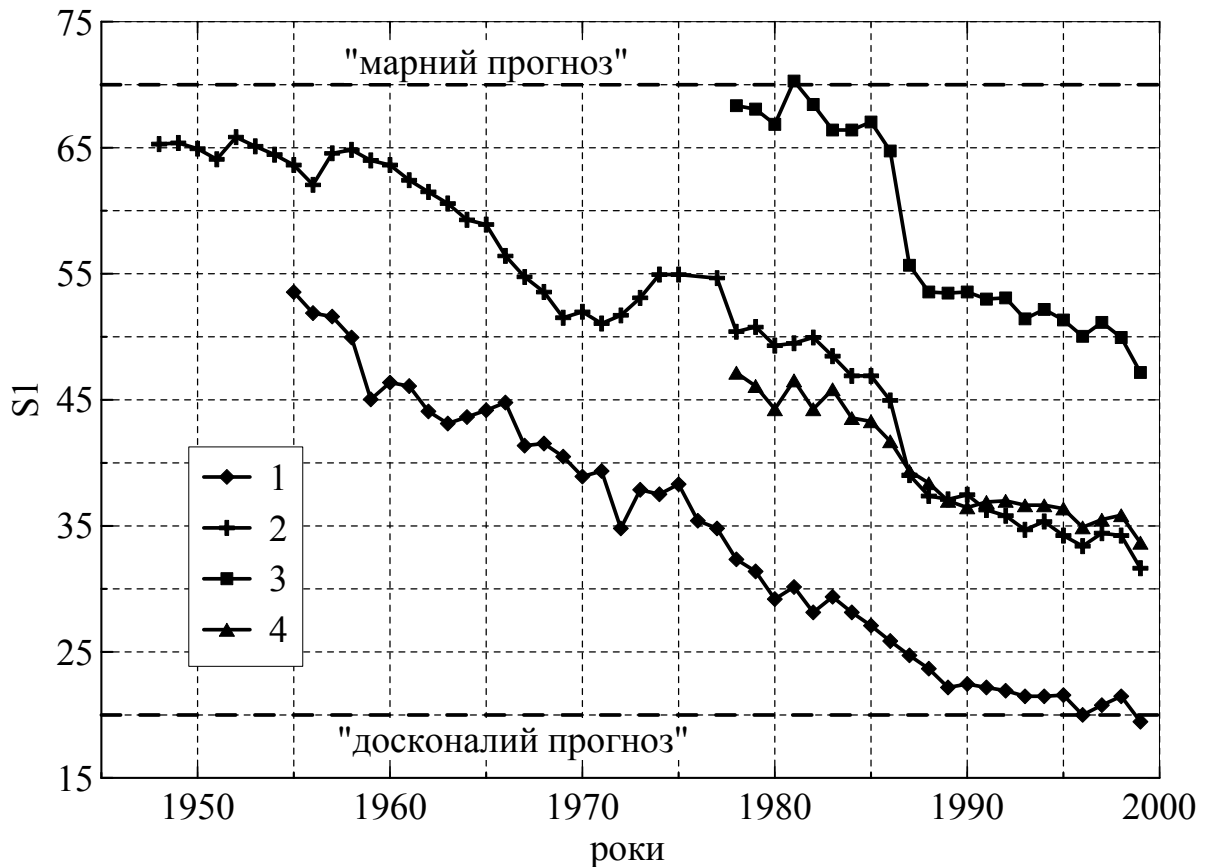


Рисунок 6.3.1 – Зміни за часом успішності чисельного прогнозу моделями метеорологічної служби США над Північною Америкою тиску на рівні моря на 36 (2) и 72 (3) години, и висоти АТ-500 гПа на 36 (1) и 72 (4) години

- використання точніших методів засвоєння даних, що привело до точніших початкових умов, які використовуються у моделях;
- збільшення кількості доступних даних над океанами та у південній півкулі, особливо з метеорологічних супутників Землі.

З розвитком обчислювальної техніки, комунікаційних ліній та самих методів чисельного прогнозу погоди у багатьох метеорологічних служб з'явилася можливість реалізувати локальне моделювання на основі одержаної інформації про початкові та межові умови. Дві такі локальні системи (MM5 і Aladin) розглядалися вище.

Починаючи з 1991 року, Всесвітня метеорологічна організація видає щорічний спеціальний звіт про розвиток оперативних моделей чисельного прогнозу, внесок у який роблять усі бажаючі члени ВМО. У 2004 році у такий звіт були включені повідомлення від 42 національних метеорологічних служб. Природно, що зовсім не усі національні служби використовують для чисельного прогнозу погоди суперЕОМ і більшість повідомлень належить до локальних моделей, прогноз за якими у теперішній час можна давати за допомогою персональних комп'ютерів.

У табл. 6.3.1 наведені відомості стосовно ЕОМ, які використовуються при чисельному прогнозі погоди у деяких країнах світу. З сорока двох повідомлень національних служб представлені тільки одинадцять, десять з яких (окрім Індії) для прогнозування використовують суперкомп'ютери, а дев'ять (окрім Данії) здійснюють прогнозування як на глобальному, так і регіональному та мезо- масштабах (табл. 6.3.2). Індійська метеорологічна служба є яскравим прикладом того, як за допомогою звичайного (майже) персонального комп'ютера можна здійснити короткочасний прогноз погоди над деяким регіоном, використовуючи тільки регіональну модель. Як правило, у цьому випадку як межові умови беруться дані глобальної моделі, які можна дістати за допомогою комунікаційних мереж. Треба також згадати метеорологічну службу Данії, у якій протягом декількох років розроблялася оригінальна локальна модель прогнозу HIRLAM. Ця модель застосовується, головним чином, для чисельного прогнозу у Північній Європі.

Наявність серед країн, які подали дані до ВМО щодо розвитку оперативних моделей чисельного прогнозу Алжиру, Armenii, Грузії, Казахстану, Киргизії та деяких інших, свідчить про те, що на сьогодні чисельний прогноз погоди на регіональному рівні перестав бути прерогативою економічно розвинутих держав, які в спромозі самостійно розробити та реалізувати на суперкомп'ютері модель чисельного прогнозу. З цією метою є достатнім використання майже звичайних персональних ЕОМ і однієї з локальних моделей прогнозу, наприклад, MM5 або ALADIN, які використовують межові умови з глобальних моделей.

Таблиця 6.3.1. Відомості про обчислювальні засоби, що використовуються для моделювання з метою прогнозу погоди у деяких країнах

Країна	ЕОМ	Кількість процесорів	Об'єм пам'яті, Гб ¹	Об'єм диска, Тб ²
Австралія	NEC SX-6	144	1152	14
Велика Британія	NEC SX-6	120	480	26
Германія	IBM RS6000 SP	1920	1920	7,6
Данія	NEC SX-6	64	n/a ³	n/a
Індія	SGI Origin 200	2	2	0,009
Канада	IBM P690	960	2126	8,67
Китай	IBM 1600	80	n/a	n/a
Росія	Cray-EL	n/a	n/a	n/a
США	IBM 1600 655	2816	5632	44
Франція	Fujitsu VPP5000	31	208	n/a
Японія	Hitachi SR8000E	n/a	640	4,8

¹ Об'єм оперативної пам'яті (1 Гб = 1 073 741 824 байт).

² Об'єм пам'яті накопичувального диска (1 Тб = 1 099 511 627 776 байт).

³ Інформація відсутня.

У табл. 6.3.3 наведені відомості про якість результатів прогнозу за моделями, що згадувались у табл. 6.3.2. Відзначимо, що усі моделі, які використовуються для глобального прогнозу є спектральними. Як можна бачити, найуспішнішим на сьогодні є прогноз висоти ізобаричної поверхні АТ-500 гПа на 24 години (середня помилка становить близько 3-4 м, а дані на цій карті наведені з точністю 10 м = 1 дам), що може бути підтвердженням даних з рис. 6.3.1. У той же час, прогнозу із завчасністю 72 години є менш успішним.

Таблиця 6.3.2. Відомості про наявність різних моделей прогнозу у національних метеорологічних службах деяких країн

Країна	Глобальна модель	Регіональна модель	Мезомасштабна модель
Австралія	GASP	LAPS	MESO-LAPS
Велика Британія	IFS-Global	IFS-Local	IFS-Meso
Германія	GME	LM	– ¹
Данія	–	DMI-HIRLAM	–
Індія	–	LAFS	–
Канада	GEM	GEM	HIMAP
Китай	NMC-MM5	NMC-MM5	NMC-MM5
Росія	Hemispheric	"Region"	–
США	GFS	RFS	HiRes
Франція	ARPEGE	ALADIN	ALADIN
Японія	GSM0103	RSM0103	MSM0409

¹ Інформація відсутня або прогнозування за моделлю не виконується.

Таблиця 6.3.3. Середня квадратична помилка прогнозу висоти геопотенціальної поверхні АТ-500 гПа (H_{500} ; м) і вектора швидкості вітру на поверхні АТ-250 (V_{250} ; м/с) відносно даних аналізу в Північній півкулі на терміни 24 і 72 години за глобальними моделями прогнозу у національних метеорологічних службах деяких країн

Країна	H_{500}		V_{250}	
	24 години	72 години	24 години	72 години
Австралія	15,4	41,3	5,6	11,7
Велика Британія	10,8	29,2	4,2	9,3
Германія	12,6	31,5		
Канада	12,4	31,7	5,0	10,6
Китай	14,2	38,5	5,8	11,7
США	12,0	30,4	4,7	9,9
Франція	10,9	30,3	4,9	10,4
Японія	12,0	31,4	5,1	10,5

Відзначимо також той факт, що найякісніші глобальні прогнози, згідно з табл. 6.3.3, дають метеорологічні служби Великої Британії, США і Франції. Причини того, що прогноз за різними моделями має різну успішність полягають, насамперед, у тому, що ці моделі мають різне розділення у просторі, використовують різні схеми інтегрування за часом, а також різні схеми параметризації підсіткових процесів тощо. З іншого боку, навіть якщо б у різних метеорологічних службах використовувалися ідентичні за структурою моделі чисельного прогнозу, але процедура асиміляції даних спостережень дещо розрізнялася, тобто неістотно розрізнялися б вихідні та межові умови, результати прогнозу за цими ідентичними моделями були б різними. Більш того, розбіжності між прогнозами збільшувалися б зі збільшенням завчасності. Деякі причини такої неузгодженості розглядаються у наступному підрозділі.

6.4 Проблема передбачуваності атмосферних рухів

У своїй роботі 1951 р. Чарні звернув увагу на те, що навіть якщо чисельні моделі будуть постійно удосконалюватися, прогнози погоди, проте, не будуть виправдовуватися повністю, що пов'язано як з неминучими недоліками моделі, так і з скінченними помилками у початкових умовах. Але у 1963 р. Лоренц довів, що атмосфера подібно будь-якій стійкій динамічній системі має межу передбачуваності (яку він оцінив приблизно у два тижня) навіть якщо використовується досконала модель і відомі майже ідеальні за точністю початкові умови. Доказ Лоренца ґрунтувався на тому факті, що результати прогнозування на декілька тижнів, що виконувався за однією моделлю, але з початковими умовами, які відрізнялися на помилку округлення, розбігаються настільки сильно, як і дві випадкові траєкторії моделі.

Спочатку, метою експерименту Лоренца був доказ того, що точність прогнозу за допомогою статистичних методів не може досягти точності прогнозу за допомогою нелінійної динамічної моделі і, відповідно, чисельні методи прогнозу мають перевагу перед статистичними. Для цього він побудував атмосферну модель із зовнішнім джерелом тепла та дисипацією і шукав за її допомогою неперіодичний розв'язок (періодичний розв'язок може бути легко одержаний, ґрунтуючись на минулому стані моделі). Після того, як зовнішній приплив тепла був зроблений функцією широти і довготи, такий розв'язок був знайдений. Лоренц зробив два прогнозування на декілька років уперед, причому в одному з них початкові умови були округлені до третього знаку після коми. Результати цих прогнозувань практично повністю відрізнялись один від одного, хоч протягом перших декількох діб інтегрування вони співпадали, а потім

починали розбігатися в останніх знаках після коми, що й призводило до цілковитої неузгодженості розв'язків після двох місяців інтегрування.

Ґрунтуючись на результатах цього експерименту, Лоренц зробив висновок, що саме початкові помилки округлення відповідальні за одержаний результат: вони монотонно збільшуються, поки не стають домінуючими у розв'язку. Таким чином, Лоренц відкрив фундаментальну теорему передбачуваності: нестійкі системи мають скінченну межу передбачуваності, а стійкі, навпаки, такої межі не мають через те, що вони є або стаціонарними, або періодичними.

У своїй доповіді 1972 р. "Передбачуваність: чи викликає змах крил метелика у Бразилії торнадо у Техасі?", Лоренц навів декілька головних концепцій атмосферної передбачуваності:

"... Я припускаю, що за декілька років мізерно малі збурення не збільшать і не зменшать частоту випадків різноманітних явищ погоди, таких як торнадо; якнайбільше що вони можуть зробити, це змінити послідовність, в якій спостерігаються ці явища. Питання ж, яке дійсно є цікавим для нас, полягає у тому, чи зможуть вони (збурення) спричинити, наприклад, таке, що дві різних синоптичних ситуації, які відрізняються на характеристику, таку ж малу, що й вплив одного метелика, через достатній проміжок часу стануть двома ситуаціями, які розрізняються настільки суттєво, що в одній з них може виникнути торнадо. Кажучи більш технічною мовою, чи є поведінка атмосфери нестійкою стосовно збурень малої амплітуди?

Зв'язок між цим запитанням і нашою здатністю передбачати погоду є очевидним. Через те, що ми не знаємо, ні скільки є метеликів, ні їх місцезнаходження, ні, тим паче, який метелик махає крилами у будь-який поточний момент часу, ми не можемо, якщо відповідь на наше запитання позитивна, точно спрогнозувати торнадо у достатньо віддалений момент часу. Більш того, ми не здатні виявити такі великі системи, як купчасто-дощові хмари, коли вони "непомітно" рухаються між станціями спостережень, що може погіршити прогноз загального характеру погоди навіть на недалеке майбутнє...

... Факти [що відповідь на запитання, чи є атмосфера нестійкою, позитивна] є незаперечними. Найважливіші наслідки цього такі:

1. Незначні помилки у більш грубій структурі типу погоди (ті особливості, які легко виявляються існуючою мережею спостережень) подвоюються протягом приблизно трьох діб. Тільки-но помилки стають більшими, темпи зростання зменшуються. Це обмеження дозволяє нам збільшити інтервал задовільного прогнозу на три доби кожного разу, коли ми зменшуємо вдвічі помилки спостережень, і дає надію в остаточному підсумку здійснити задовільний прогноз на декілька тижнів уперед.

2. Незначні помилки у більш дрібній структурі (наприклад, у положенні окремих хмар) збільшуються набагато швидше, подвоюючись за

декілька годин чи навіть менше. Це обмеження значною мірою не погіршує наші здібності збільшувати завчасність прогнозу, тому що звичайно такі структури взагалі не прогнозуються.

3. Помилки у більш дрібній структурі, які досягають значущої величини, призводять до помилок у більш грубій структурі. Цей наслідок, який затвердився менше, ніж попередні, означає, що приблизно через добу у більш грубій структурі будуть мати місце помітні помилки, які згодом будуть збільшуватися через те, що вони були присутні спочатку. Зменшення удвічі помилок спостереження у більш дрібній структурі (що є задачею великої складності) збільшить завчасність задовільного прогнозу тільки на декілька годин або менше. Можливість прогнозу на два тижні або більше уперед, відповідно, істотно зменшується.

4. Деякі окремі величини, такі як середня тижнева температура або тижнева кількість опадів, можуть бути спрогнозовані на інтервал часу, для якого прогноз усієї синоптичної ситуації є неможливим."*

З того часу, як Лоренцем було зроблене це важливе відкриття, що започаткувало нову науку про хаос, його висновки не зазнали будь-яких помітних змін. Істотне просування уперед у галузі чисельних прогнозів погоди було зроблене внаслідок розуміння того, що хаотичний режим атмосфери вимагає заміни одиничних "детерміністичних" прогнозів "ансамблем" прогнозів з різницями у початкових умовах та характеристиках моделі, що реально відображує невизначеності наших знань про атмосферу. Це розуміння привело до того, що у двох найбільших метеорологічних центрах США та Європи у грудні 1992 р. був уведений в оперативну практику прогноз ансамблем.

Таким чином, Лоренц припустив, що межа детерміністичної передбачуваності становить близько двох тижнів. Ця оцінка була і залишається придатною оцінкою межі передбачуваності, незважаючи на те, що різні моделі дають різні оцінки. Як відзначалося вище, час подвоєння величини незначної похибки для об'єктів синоптичного масштабу у помірних широтах, для яких головним джерелом нестійкості є бароклинність, був оцінений у три доби. Сучасні моделі мають набагато краще розділення і менш інертні, ніж ранні моделі за повними рівняннями. Тому чисельні експерименти з цими моделями, аналогічні здійсненому Лоренцем, показали, що час подвоєння величини незначної помилки для них становить не три, а дві доби.

Лоренц також запропонував простий спосіб для параметризації збільшення незначних помилок у досконалій моделі, в якій єдиним джерелом помилок є нестійке збільшення незначних помилок у початкових умовах, за допомогою логістичного рівняння

* Переклад авторів.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a\varepsilon(1 - \varepsilon). \quad (6.4.1)$$

Тут ε є середньоквадратичною помилкою прогнозу, масштабованою таким чином, щоб при прогнозі на тривалий термін $\varepsilon \rightarrow 1$, тобто є середньоквадратичною помилкою прогнозу, поділеною на корінь квадратний подвоєної кліматичної мінливості.

Рівняння (6.4.1) установлює, що дуже малі помилки збільшуються експонентно зі швидкістю a . Коли вони досягають скінченної амплітуди, швидкість збільшення помилки зменшується внаслідок останнього множника у правій частині рівняння, який сповільнює її, поки ε не стане приблизно дорівнювати одиниці. Розв'язок логістичного рівняння (6.4.1) має вигляд

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_0 e^{at}}{1 + \varepsilon_0 (e^{at} - 1)}, \quad (6.4.2)$$

де ε_0 – початкова помилка.

На рис. 6.4.1 поданий розв'язок для двох значень початкової помилки (10% і 1%), швидкості її збільшення $a = 0,35$ за добу, що відповідає часу подвоєння близько двох діб. Помилка аналізу для геопотенціальних висот поверхні 500 гПа в сучасних операційних прогностичних системах має порядок 5-15 м, а природна мінливість – близько 100 м, отже сучасний рівень помилки в початкових даних становить $\sim 10\%$ або менше. Верхня межа для найкращої початкової помилки, яка може бути досягнута через засвоєння даних, може бути цілком розумно оцінена у не більше ніж 1%. Останнє є наслідком того, що, як відзначалося Лоренцем, навіть якщо система спостережень була найвищою мірою досконалою для синоптичних масштабів рухів, помилки на менших (підсіткових) масштабах збільшаються дуже швидко і через нелінійні взаємодії внесуть скінченні помилки у вихідні синоптичні масштаби моделі.

Розв'язки логістичного рівняння для початкових помилок 10% і 1% (див. рис. 6.4.1) підтверджують той факт, що два тижні дійсно є розумною оцінкою часу, після якого помилки прогнозу стають настільки великими, що можливість передбачати погоду у помірних широтах зникає зовсім. Діапазон між двома кривими є спрощеною верхньою оцінкою того, наскільки можуть бути покращені прогнози через удосконалення початкових умов.

Проте, це тільки оцінка для середньої передбачуваності досконалої моделі. Реальна ж передбачуваність змінюється у широких межах і залежить від "атмосферної нестійкості доби". Двотижнева "межа", яка здава-

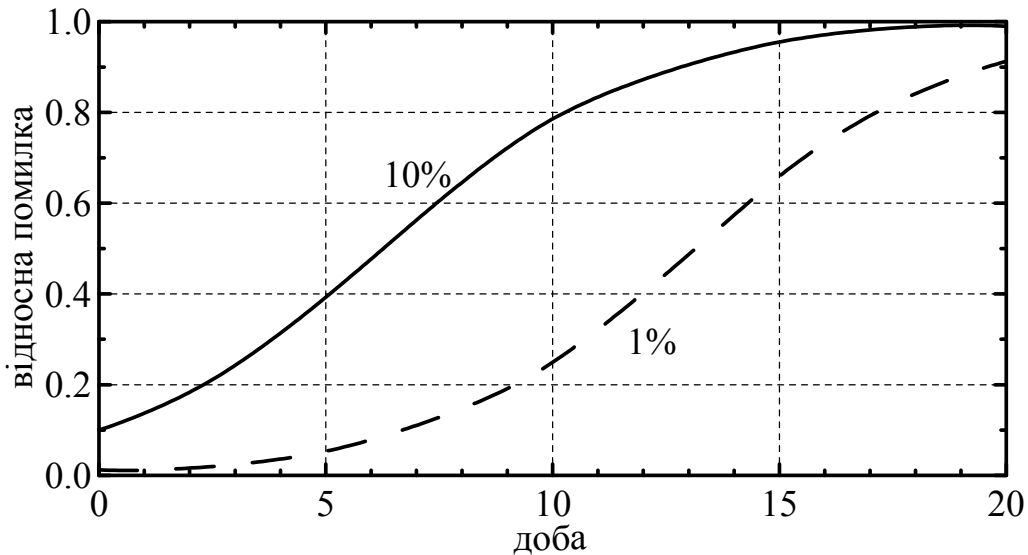


Рисунок 6.4.1 – Зміни за часом середньоквадратичної помилки прогнозу, розділеної на корінь квадратний подвоєної кліматичної мінливості

лася дуже великою у 1960-х роках, коли успішність прогнозу на дві доби була невеликою, зараз вже не настільки велика у порівнянні із завчасністю прогнозу сучасних моделей. Наприклад, протягом дуже "передбачуваного" періоду у грудні 1995 р. деякі чисельні прогнози погоди на 15 діб все ще залишалися успішними: коефіцієнт кореляції для аномалій метеорологічних величин у позатропічних широтах Північної півкулі перевищував 0,7. Але існують також періоди, для яких передбачуваність атмосферних процесів набагато менша за середню, внаслідок чого у різних оперативних глобальних прогнозах виявилось різке зменшення успішності середньострокового прогнозу на ту ж саму добу. Внаслідок добової мінливості передбачуваності атмосферних процесів велике значення набувають ансамблі прогнозів, які надають засіб для оцінки такої мінливості. Практика показала, що використання ансамблів прогнозів поліпшує їх справджуваність.

Аналіз рівняння (6.4.2) показує, що межа передбачуваності залежить від швидкості збільшення помилки. Як правило, часові масштаби атмосферної нестійкості співвідносяться з просторовими масштабами таким чином, що дрібномасштабна нестійкість збільшується набагато швидше за великомасштабну. З цієї причини порівняно короткі синоптичні хвилі, як правило, є менш передбачуваними, ніж довгіші (наприклад, хвилі Россбі), а мезомасштабні явища, такі як фронти, лінії шквалів, мезомасштабні конвективні системи, торнадо тощо за своєю природою можуть бути спрогнозовані на короткій термін порядку однієї доби чи менше. Конвекція є типовим прикладом явища невеликого часового масштабу – купчасті хмари збільшуються експоненційно протягом приблиз-

но 10 хвилин. Отже, передбачити опади, пов'язані з окремою внутрішньомасовою купчастою хмарою більше ніж на одну годину уперед неможливо. Проте, якщо конвективна діяльність формується за рахунок процесів більшого масштабу, то передбачуваність опадів з купчастих хмар буде набагато більшою, ніж для окремої купчасто-дощової хмари. Наприклад, відомо, що спрогнозувати літні зливові опади важко. Але коли внутрішньомасова конвекція влітку є наслідком діяльності систем синоптичного масштабу, може бути спрогнозоване як місце її виникнення, так і час. Отже, передбачуваність у цьому випадку стає вищою, ніж власна передбачуваність мезомасштабної конвективної діяльності. Аналогічно, мезомасштабні явища, які є наслідком взаємодії процесів синоптичного масштабу з підстильною поверхнею, набагато більш передбачувані, ніж ті, що виникли поза цієї взаємодії.

Наведемо два приклади несподівано одноманітного переміщення мезомасштабних процесів. Як вже зазначалося вище, дуже важко передбачити конвективну діяльність влітку, якщо вона не пов'язана з процесами синоптичного масштабу. Але дослідження відбивної здатності хмар, виконані за допомогою радара, показали, що зона найактивнішої конвективної діяльності над США має тенденцію регулярно зміщатися у східному напрямку, а її інтенсивність модулюється добовим циклом. Окремі максимуми такого хвильоподібного переміщення можуть простежуватися протягом 1-3 діб. Це припускає, що така конвективна діяльність, у принципі, може бути передбачена на добу чи дві. Іншим прикладом одноманітного переміщення конвективних хмар є так зване коливання Меддена-Джуліана (МДК), яке має зональне хвильове число 1 і максимальну амплітуду в тропіках. Ця хвиля рухається у східному напрямку навкруги екватора з періодом від 30 до 60 діб. МДК простежується не завжди, але існують періоди у декілька місяців, коли воно дуже помітне. Хоч сучасні моделі не можуть відтворити МДК, його регулярність свідчить про те, що, у принципі, передбачуваність злизових опадів, пов'язаних з ним (якщо скористатися динамічними чи статистичними методами) може становити місяць або більше.

В обох цих прикладах дрібномасштабна конвекція організується в одноманітне довготривале переміщення. Зважаючи на все, доки динамічні моделі не будуть спроможні повністю відтворити такі квазірегулярні переміщення, єднання статистичних та динамічних методів може бути кращим способом для використання "прихованої" довгострокової передбачуваності з метою прогнозу.

Попереднє обговорення стосується головним чином передбачуваності погоди у помірних широтах. У динаміці атмосфери помірних широт переважає бароклінна нестійкість, пов'язана з процесами синоптичного масштабу, і межа детерміністичної передбачуваності погоди є відбиттям швидкості розвитку цієї барокліної нестійкості. У тропіках ситу-

ація повністю відрізняється від помірних широт, тому що бароклінною нестійкістю тут можна, як правило, знехтувати, а переважаючими стають баротропна та конвективна нестійкості, а також їх взаємодія. Феномени, подібні східним хвилям, є проявом баротропної нестійкості і менш інтенсивні, ніж прояви бароклівної нестійкості, наприклад, циклони помірних широт. При цьому, східні хвилі модулюються опадами з конвективних хмар, тоді як у помірних широтах опади мають менший вплив на розвиток хвиль синоптичного масштабу. Більше того, глобальні атмосферні моделі не спроможні настільки точно параметризувати процеси підсіткового масштабу (наприклад, конвекцію, про що казалося у розділі 5), які переважають у тропіках, як чисельно представляти бароклісну динаміку, що домінує у помірних широтах. Тому у тропіках припущення про досконалу модель є набагато менш обґрунтованим, ніж у помірних широтах.

Рівняння (6.4.1) достатньо добре описує збільшення помилки у досконалій моделі. Для швидкості збільшення випадкової помилки у недосконалій моделі у логістичному рівнянні (6.4.1) повинна бути присутньою не тільки швидкість збільшення помилки початкових умов, а й різноманітні недоліки моделі

$$\frac{dv}{dt} = (bv + s)(1 - v), \quad (6.4.3)$$

де v – дисперсія випадкової помилки (сталі чи осереднені за часом помилки визначаються заздалегідь);

b – швидкість збільшення дисперсії невеликої помилки внаслідок нестійкості ("зовнішнє" джерело);

s – "зовнішнє" джерело дисперсії випадкової помилки внаслідок недоліків моделі.

Розв'язок (6.4.3) має вигляд

$$v(t) = 1 - \frac{1 + s}{1 + \mu}, \quad (6.4.4)$$

де
$$\mu = \frac{v_0 + s/b}{1 - v_0} e^{(b+s)t}.$$

Рівняння (6.4.4) достатньо добре відповідає динаміці помилок, що спостерігаються. При цьому швидкість збільшення внутрішніх помилок становить близько 0,4 за добу у помірних широтах і 0,1 за добу у тропіках. Швидкість збільшення зовнішніх помилок внаслідок недоліків моделей істотно менше у помірних широтах (0,05 за добу), а у тропіках досягає цілком значущої величини у 0,1-0,2 за добу. Хоч ці оцінки, одержані за

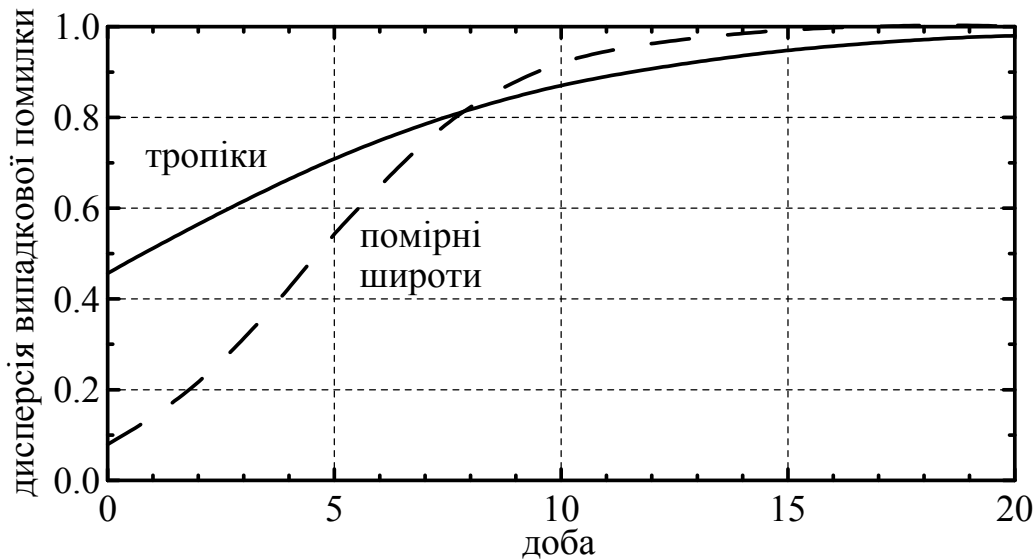


Рисунок 6.4.2 – Зміни за часом дисперсії помилки прогнозу за наявності внутрішніх та зовнішніх помилок у тропіках і помірних широтах

допомогою припасування помилок, що спостерігаються, дійсні тільки у випадку виконання рівняння (6.4.4), вони якісно відбивають той факт, що процеси синоптичного масштабу у тропіках є менш нестійкими, ніж у позатропічних широтах, завдяки відсутності барокліної нестійкості. У той же час моделювання процесів у тропіках є набагато складнішою задачею через труднощі, пов'язані з параметризацією купчастої конвекції, яка є більш важливою у тропіках, ніж у помірних та високих широтах. Ці результати є підтвердженням того, що якби конвекція не відіграла такої домінуючої ролі у тропіках, прогноз погоди на триваліший період часу у цьому регіоні був би успішнішим, ніж у помірних широтах. У дійсності, домінуюча роль тропічної конвекції і складності, пов'язані з її параметризацією, призводять до того, що на сьогодні чисельний прогноз у тропіках зберігає успішність лише протягом приблизно 3-5 діб, тоді як прогноз у позатропічних широтах залишається успішним у середньому 7 діб, ілюстрацією чого може бути рис. 6.4.2.

6.5 Питання для самоконтролю

- 1) У чому полягає головна відмінність прогностичної системи MM5 від системи ARPEGE-ALADIN?
- 2) Які вертикальні координати використовуються у системах MM5 та ARPEGE-ALADIN?
- 3) Перелічіть прогностичні рівняння моделі ARPEGE-ALADIN.

- 4) Які вимоги ставляться до оперативних моделей?
- 5) Як задаються початкові та межові умови в розглянутих у цьому розділі моделях?
- 6) Як розташовуються прогностичні величини у вузлах просторової сітки?
- 7) Які схеми інтегрування за часом використовуються в моделі MM5?
- 8) Які підсіткові процеси параметризуються в моделі MM5?
- 9) Якою є модель ARPEGE з точки зору чисельних методів її розв'язання?
- 10) Яким чином в моделі ARPEGE параметризуються ефекти граничного шару атмосфери?
- 11) Що таке "досконалий прогноз"?
- 12) Чому існує межа передбачуваності атмосферних рухів?
- 13) Які помилки вихідної інформації найбільшою мірою впливають на успішність прогнозу?
- 14) Що таке прогноз ансамблем?
- 15) Чому прогноз у позатропічних широтах є більш успішним, ніж у тропіках?
- 16) Які фактори сприяли покращенню якості чисельного прогнозу погоди в останні десятиріччя?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 376 с.
2. Гандин Л.С. Машина предсказывает погоду. – Л.: Гидрометеоиздат, 1965. – 171 с.
3. Гандин Л.С., Дубов А.С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1968. – 427 с.
4. Динамика погоды: Пер. с англ. / Под ред. С. Манабе. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 420 с.
5. Долгосрочное и среднесрочное прогнозирование погоды. Проблемы и перспективы: Пер. с англ. / Под ред. Д. Бариджа, Э. Челлена. – М.: Мир, 1987. – 288 с.
6. Ківганов А.Ф. Хвильові процеси в атмосфері. – Одеса: АО БАХВА, 2001. – 180 с.
7. Ківганов А.Ф., Хоменко Г.В., Хохлов В.М. Бонадренко В.М. Гідродинамічні моделі прогнозу погоди і сіткові методи їх реалізації. – Одеса: ТЭС, 2002. – 179 с.
8. Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды / Под ред. В.В. Быкова. – Л.: Гидрометеоиздат, 1969. – 734 с.
9. Матвеев Л.Т. Теория общей циркуляции атмосферы и климата Земли. – Л.: Гидрометеоиздат, 1991. – 295 с.
10. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях: Пер. с англ. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 136 с.
11. Модели общей циркуляции атмосферы: Пер. с англ. / Под ред. С.А. Машковича. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 351 с.
12. Монин А.С. Прогноз погоды как задача физики. – М.: Наука, 1969. – 184 с.
13. 70 лет Гидрометцентру России / Под ред. А.А. Васильева, А.Ф. Фролова и др. – С.-Пб.: Гидрометеоиздат, 1999. – 276 с.
14. Kalnay E. Atmospheric modelling, data assimilation and predictability. – Cambridge University Press, 2003. – 340 pp.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Адаптація метеорологічних полів 118-120, 166, 245

Вихор

потенціальний Ертеля 254, 257
швидкості 83
абсолютний 84, 88, 90, 108, 113, 117, 258
адвективна складова 90, 98, 100, 102
відносний 83, 111
бароклінний фактор 90, 93-102
дивергентний фактор 90, 93, 98
зсувний фактор 90-93
меридіональна складова 91, 97
переносний 83, 84

Геопотенціал 31, 48

Граничний шар 93, 264, 267, 277
внутрішній приземний 276, 285, 286
планетарний 276, 277, 286

Дисперсійне рівняння 27
акустичні хвилі 28
гравітаційні хвилі 40
ізотермічна атмосфера 34
інерційні коливання 40
хвилі Лемба 29, 31

Енергія 165

внутрішня 46, 117, 260-263
кінетична 214, 246, 247, 260-263
механічна 262
потенціальна 262

Ентальпія 262

Ентропія 26, 254, 256, 257

Закон

адіабатичний 26
всесвітнього тяжіння 14
збереження 12, 254
енергії 12, 16, 18, 41, 46

Закон збереження

кількості руху (імпульсу) 12, 13, 15, 18, 41
маси 12, 15, 16, 18, 41, 46

Засвоєння даних 226, 300, 314, 320

Інсоляція 269, 270

Калманівська фільтрація 229

Коефіцієнт

молекулярної в'язкості 19, 284

турбулентності 19, 20, 276

вертикальний 19, 20, 277

вихровий 276, 287

горизонтальний 19, 20

Критерій

Куранта-Фрідрікса-Леві 154, 159, 160, 184, 186-188

найкращого подання 194

Масштабний множник 76-79

Межові умови 16, 35, 62, 66, 74, 109, 122, 138, 145, 150, 205, 213, 218, 222, 224,
230, 259, 271, 278, 306-309, 311

випромінювання 232, 233

двобічної взаємодії 236

дифузійне згасання 233

модифікація тенденції 233, 234

нульової дивергенції 232

ослаблення потоку 234, 235

тверда стінка 35, 231

фіктивні 109, 219

Метод

Аракави та Шуберта 297-299

варіаційний 227

Гальоркіна 195, 203-206, 209

колокації 202, 203, 206

Куо 294-296

найменших квадратів 203

послідовної корекції 229, 230

Множинне розсіювання 274

Наближення

адіабатичне 16, 47, 48, 55, 86, 112, 254

Буссінеска 33, 37-39

квазігеострофічне 30, 31, 36, 37, 61, 108-109, 117, 119,

гідростатичне 39-41

Неадіабатичні припливи тепла 24, 254
за рахунок фазових перетворень вологи 23, 47, 287-292
променистий 23, 47, 269-275
турбулентний 23, 47, 277

Оператор

Гамільтона 13
Лапласа 20, 133, 215

Оптимальна інтерполяція 227-229

Параметр

Коріоліса 15, 32, 258
статичної стійкості 56
теплової інерції 280

Потік

довгохвильової радіації 270-273
короткохвильової радіації 270-273

Проекції картографічні

пряма рівнокутна циліндрична (Меркатора) 78
рівнокутна конічна (Ламберта) 77, 78
стереографічна полярна 77

Рівняння

гідростатики 37, 40, 52
Ейлера 19,
Лапласа припливне 33
Нав'є-Стокса 19
нерозривності 22, 29, 46, 59, 65, 78, 218, 220
припливу тепла 22-24, 46, 55, 56, 113, 302, 305, 312
Пуассона 109
руху 12, 18, 21, 30, 43, 44, 86
стану 16, 46
сухого повітря 46
вологого повітря 96
статики 48, 55, 57, 65, 113, 205, 217, 218

Сітка

Еліассена 249, 250
Лоренца 174
Річардсона 250
розхитана 167, 168, 174, 249
Чарні-Філліпса 174

Сила

баричного градієнта 12, 15, 45, 97,
відцентрова 13, 14
гравітаційна 12, 14
Коріоліса 13, 20, 30, 31, 36, 37, 43, 45, 104
молекулярної в'язкості 19, 21, 23
турбулентної в'язкості 19, 20, 23
тяжіння 14, 15, 20, 40-42, 45, 83

Скінченнорізницева схема

Адамса-Бешфорта 178, 179
Ейлера 175, 176, 182, 183, 188, 189
за потоком 181, 186, 189, 190
Кранка-Ніколсона 190, 191
Куріхари модифікована 243, 244
Лакса-Вендрофа 179, 180, 186, 187
Мацуно 177, 187, 188, 239-242, 249
напівнеявна 148, 149, 190, 305, 312
неявна 148, 176, 181, 182, 188, 190, 306
Нігта 238-243
Окамури 243
проти потоку 158, 159, 181, 184-186, 189, 233, 235
Темпертона 244, 245
трапецій 176, 190
Хойну 177
центральної різниць 178, 183, 184, 248-251
явна 148, 153, 175-177, 182

Успішність прогнозу 313, 314, 321, 324

Фільтр Роберта-Асселіна 249

Функції розкладання 199-201

Функція Гріна 110

динамічний фактор 114, 115
термічний фактор 115

Хвилі

акустичні 25, 27-29, 36-39, 118, 305, 306
внутрішні 35, 38, 119
гравітаційні 29-31, 36, 38-41, 104, 118, 119, 165, 166, 170-172, 217, 230,
239, 242
зовнішні 29, 31, 35, 39, 40
інерційні 30, 37, 38, 40, 104, 165, 166, 170-172, 174, 230, 249, 258

Хвилі

Лемба 28-31, 38-40

Россбі 31, 37, 104, 217

Число

Кібеля 100, 104, 105

Річардсона 277, 281, 283

Шмідта 291

ДОДАТОК А

ПЕРЕЛІК СИМВОЛІВ ТА СТАЛИХ

A	амплітуда коливань
\tilde{A}	альbedo системи Земля-атмосфера
A_s	альbedo земної поверхні
a	середній радіус Землі ($= 6,37122 \cdot 10^6$ м)
C	швидкість конденсації
C_g	теплоємність на одиницю площі
C_s	теплоємність на одиницю об'єму
c	параметр статичної стійкості
c^2	$= \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma)$
c_p	питома теплоємність за сталого тиску ($= 1004,64$ Дж кг ⁻¹ К ⁻¹)
c_{pm}	питома теплоємність водяної пари за сталого тиску ($= 1810$ Дж кг ⁻¹ К ⁻¹)
c_s	швидкість звуку
c_v	питома теплоємність за сталого об'єму ($= 717,60$ Дж кг ⁻¹ К ⁻¹)
D	вектор дисипативних сил
D_m	вектор сили молекулярної в'язкості
D_t	вектор сили турбулентної в'язкості
D_θ, D_λ	складові сил турбулентної в'язкості по осях θ і λ
D_i	середній діаметр кристалів льоду
D_s	плоска дивергенція
d	відстань між вузлами сітки
E	швидкість випаровування
$E_e, E_{e'}, E_{k'}, E_n$	ентальпія, внутрішня, кінетична та потенціальна енергії
E_c	ступінь уловлювання хмарними частинками частинок опадів
E_s	потік водяної пари від земної поверхні в атмосферу
E_v	волога статична енергія
e	фактор ексцентриситету земної орбіти
e_{sw}, e_{si}	тиск насичення над водою і льодом відповідно
F_k	сила Коріоліса
F_x, F_y, F_z	складові вектора сили Коріоліса
f'	флуктуація величини f від основного стану f_0
G	вектор сили тяжіння
g_x, g_y, g_z	складові вектора сили тяжіння
g	прискорення вільного падіння ($= 9,80616$ м с ⁻²)
H	висота ізобаричної поверхні
\bar{H}	висота вільної поверхні
H_m	потік тепла вглиб земної поверхні

H_s	потік відчутного тепла від земної поверхні в атмосферу
H_{sa}	висота однорідної атмосфери ($= RT/g$)
h	верхня межа планетарного граничного шару
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	одичні орти координат x, y, z відповідно
K	коефіцієнт вихрової дифузії
K_a	коефіцієнт фонові молекулярної дифузії ($= 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$)
K_m	коефіцієнт теплообміну між поверхневими та глибинними шарами ґрунту
k	горизонтальне хвильове число
k_s	горизонтальний коефіцієнт турбулентності
k_t	коефіцієнт турбулентності
k_z	вертикальний коефіцієнт турбулентності
k_Ω	коефіцієнт вихрової турбулентності
L	горизонтальний масштаб рухів; довжина хвилі
$L_{R\uparrow}$	потік довгохвильової висхідної радіації
$L_{R\downarrow}$	потік довгохвильової низхідної радіації
L_s	приховане тепло сублімації ($= 2,85 \cdot 10^6 \text{ Дж кг}^{-1}$)
L_v	приховане тепло конденсації ($= 2,5104 \cdot 10^6 \text{ Дж кг}^{-1}$)
ℓ	параметр Коріоліса ($= 2\omega \sin \varphi$)
M, M_b	дійсний та головний масштаби карти
m	масштабний множник
N	частота Брента-Вяйсяля
n	вертикальне хвильове число
n_c	концентрація льодяних ядер у повітрі
$P(\xi)$	інтегральні функції пропускання
P_{CON}	конденсація (випаровування) водяної пари
P_{ID}	швидкість перетворення водяної пари у хмарні кристали
P_{II}	швидкість виникнення хмарних кристалів
P_{MF}	швидкість танення (замерзання) внаслідок переносу
P_{RA}	швидкість збільшення кількості вологи у хмарах за рахунок опадів
P_{RC}	швидкість перетворення хмарних крапель (кристалів) у дощ (сніг)
P_{RE}	випаровування (сублімація) дощових крапель (снігу)
P_{RM}	швидкість танення снігу під час падіння
p	атмосферний тиск
p_0	стандартний тиск (1000 гПа)
p_{cond}	тиск на рівні конденсації
p_{conv}	тиск на рівні конвекції
p_s	тиск біля поверхні землі
\dot{Q}	швидкість нагріву повітря
q	масова частка водяної пари

q_c	водяна пара, що сконденсувалася; кількість вологи у хмарах
q_r	кількість вологи в опадах
q_s	масова частка насиченої водяної пари
R	питома газова стала для сухого повітря ($= 287,04 \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$)
R_v	питома газова стала для водяної пари ($= 461,5 \text{ Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1}$)
R_i	число Річардсона
r	відстань від центру Землі до точки над поверхнею Землі; радіус-вектор
S	питома ентропія ($= c_p \ln \Theta$)
S^0	сонячна стала
S_I	інсоляція на верхній межі атмосфери
$S_{R\downarrow}$	потік короткохвильової низхідної радіації
S_c	число Шмідта
T	температура повітря
T_d	значення точки роси
T_0, T_g	температура земної поверхні
T_m	температура глибинного шару ґрунту
T_v	віртуальна температура
t	час
u	зональна складова вектору вітру (вздовж осі x)
u_g, v_g	складові геострофічного вітру
\mathbf{V}	вектор швидкості вітру
V	довільний об'єм повітря
V_f	швидкість падіння частинок опадів
v	меридіональна складова вектору вітру (вздовж осі y)
v^*	динамічна швидкість
W	кількість опадів
w	вертикальна складова вектору вітру (вздовж осі z)
z_0	шорсткість підстильної поверхні
α_L	інтегральний коефіцієнт поглинання для потоку довгохвильової радіації
α_S	інтегральний коефіцієнт поглинання для потоку короткохвильової радіації
β	параметр сферичності; параметр Россбі
Γ	гамма-функція
γ	вертикальний градієнт температури
γ_a	сухоадіабатичний градієнт температури
γ_{ma}	вологоадіабатичний градієнт температури
$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	кроки по координатних осях x, y і z
Δt	крок за часом
δ	схилення Сонця
ε	джерела і стоки тепла

ε_p	приплив тепла за рахунок фазових переходів вологи
ε_r	променистий приплив тепла
ε_t	турбулентний приплив тепла
Φ	геопотенціал
$\dot{\Phi}$	тенденція геопотенціалу для середнього рівня
Φ_s	геопотенціал земної поверхні
η	гібридна вертикальна координата
\varkappa	$= c_p/c_v$
κ	$= R/c_p$
κ_0	стала фон Кармана ($= 0,4$)
λ	географічна довгота місця; радіус деформації
λ_g	теплопровідність ґрунту
μ	динамічна в'язкість повітря
Θ	потенціальна температура повітря
Θ^*	еквівалентно-потенціальна температура
θ	доповнення до широти
θ_0	зенітна відстань Сонця
ν	коефіцієнт молекулярної в'язкості
π	число π ; гідростатичний тиск
ρ	густина повітря
ρ_w	середня щільність частинок опадів у повітрі
ρ_{wv}	густина водяної пари
σ	частота; вертикальна координата
σ_{SB}	стала Стефана-Больцмана ($= 5,669 \cdot 10^{-8} \text{ Вт м}^{-2} \text{ К}^{-4}$)
$\dot{\sigma}$	вертикальна складова вектору вітру (вздовж осі σ)
τ	вертикальна складова вектору вітру (вздовж осі p)
$\hat{\tau}$	вертикальна складова вектору вітру (вздовж осі ζ)
τ_s	вертикальний турбулентний потік імпульсу
φ	географічна широта місця; полярний (азимутальний) кут
χ	параметр теплової інерції
Ω	вихор швидкості руху
Ω_a	вектор абсолютного вихору швидкості руху
$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$	складові вихору швидкості на осі декартових координат
$\tilde{\Omega}_p$	складова вихору швидкості на вісь p
$\tilde{\Omega}$	потенціальний вихор
ω	вектор кутової швидкості обертання Землі
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	складові вектора кутової швидкості обертання Землі
ω	кутова швидкість обертання Землі ($= 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$)
ζ	безрозмірна вертикальна координата ($= p/p_0$)
∇	оператор Гамільтона
∇^2	оператор Лапласа (лапласіан)

ДОДАТОК Б

ХАРАКТЕРНІ ЗНАЧЕННЯ МЕТЕОРОЛОГІЧНИХ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ПОХІДНИХ*

Похідна	Метеорологічні величини					
	u, v (м с ⁻¹), 7·10 ⁰	p (кг м ⁻¹ с ⁻²), 10 ⁵	T (К), 3·10 ²	ρ (кг м ⁻³), 10 ⁰	w (м с ⁻¹), 10 ⁻²	Ω (с ⁻¹), 2·10 ⁻⁵
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$	1,2·10 ⁻⁵	8·10 ⁻⁴	7·10 ⁻⁶	3·10 ⁻⁸	2·10 ⁻⁸	4·10 ⁻¹¹
$\frac{\partial}{\partial t}$	1,2·10 ⁻⁴	8·10 ⁻³	7·10 ⁻⁵	3·10 ⁻⁷	2·10 ⁻⁷	4·10 ⁻¹⁰
$\frac{\partial}{\partial z}$	2·10 ⁻³	10 ¹	6·10 ⁻³	10 ⁻⁴	3·10 ⁻⁶	6·10 ⁻⁹
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	1,2·10 ⁻⁶	10 ⁻³	7·10 ⁻⁷	10 ⁻⁸		
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	3·10 ⁻¹¹	1,5·10 ⁻⁹	2·10 ⁻¹¹	8·10 ⁻¹⁴		
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial t}$	3·10 ⁻¹⁰	1,5·10 ⁻⁸	2·10 ⁻¹⁰	8·10 ⁻¹³		
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$	5·10 ⁻⁹	3·10 ⁻⁷	3·10 ⁻⁹	6·10 ⁻¹²		
$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t}$	5·10 ⁻⁸	3·10 ⁻⁶	3·10 ⁻⁸	6·10 ⁻¹¹		

* Характерні значення метеорологічних величин та їх похідних були одержані М.І. Юдіним стосовно великомасштабних рухів у нижній половині тропосфери позатропічних широт при $\delta t = 12$ год., $(\delta x, \delta y) = 500$ км, $\delta z = 2,5$ км.

ДОДАТОК В

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ СХЕМ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ЧАСОМ

Схема	Властивості
<u>Ейлера</u> $f_q^{s+1} = f_q^s + F_q^s \Delta t$	явна, помилка апроксимації $O(\Delta t)$, абсолютно нестійка
<u>Трапецій</u> $f_q^{s+1} = f_q^s + \frac{1}{2}(F_q^s + F_q^{s+1})\Delta t$	неявна, помилка апроксимації $O[(\Delta t)^2]$
<u>Мацуну</u> $f_q^{(s+1)*} = f_q^s + F_q^s \Delta t ,$ $f_q^{(s+1)} = f_q^s + F_q^{(s+1)*} \Delta t$	явна, помилка апроксимації $O(\Delta t)$, стійка
<u>Хойну</u> $f_q^{(s+1)*} = f_q^s + F_q^s \Delta t ,$ $f_q^{(s+1)} = f_q^s + \frac{1}{2}(F_q^s + F_q^{(s+1)*})\Delta t$	явна, помилка апроксимації $O[(\Delta t)^2]$
<u>Центральних різниць (чехарди)</u> $f_q^{s+1} = f_q^{s-1} + 2\Delta t F_q^s$	неявна, помилка апроксимації $O[(\Delta t)^2]$, умовно стійка
<u>Адамса-Бешфорта</u> $f_q^{s+1} = f_q^s + \Delta t \left(\frac{3}{2} F_q^s - \frac{1}{2} F_q^{s-1} \right)$	явна, помилка апроксимації $O[(\Delta t)^2]$
<u>Лакса-Вендрофа</u> $f_q^{s+1} = f_q^s - c \left(\frac{f_{q+1/2}^{s+1/2} - f_{q-1/2}^{s+1/2}}{\Delta r} \right) \Delta t$	явна, помилка апроксимації $O[(\Delta t)^2]$, стійка
<u>"Проти потоку"</u> $f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \quad \text{при } c > 0,$ $f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s) \quad \text{при } c < 0$	явна, помилка апроксимації $O(\Delta t)$, умовно стійка
<u>"За потоком"</u> $f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s) \quad \text{при } c > 0,$ $f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \quad \text{при } c < 0$	явна, помилка апроксимації $O(\Delta t)$, абсолютно нестійка

<p><u>"Біжучого обчислення"</u></p> $f_{q+1}^{s+1} = \frac{1 - c \frac{\Delta t}{\Delta r}}{1 + c \frac{\Delta t}{\Delta r}} f_q^s + \frac{c \frac{\Delta t}{2\Delta r}}{1 + c \frac{\Delta t}{\Delta r}} (f_{q-1}^{s+1} + f_{q-1}^s)$	<p>неявна, помилка апроксимації $O[(\Delta t)^2]$</p>
<p><u>Кранка-Ніколсона</u></p> $\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -\frac{c}{2} \left(\frac{f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}}{2\Delta r} + \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} \right)$	<p>напівнеявна, нейтральна і абсолютно стійка</p>

Навчальне видання

ХОМЕНКО Г.В.
ХОХЛОВ В.М.

Гідродинамічні методи прогнозу погоди

Підручник

Підп. до друку 20.02.08
Умовн. а.а. 22,7

Формат 60×84/16
Тираж 100

Папір офс.
Зам №

Надруковано з готового оригінал макету

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул. Львівська, 15

X 76

Хоменко Г.В., Хохлов В.М.

Гідродинамічні методи прогнозу погоди: Підручник. – Одеса: Екологія, 2008. – 340 с.

ISBN

У підручнику викладаються фізичні та математичні аспекти гідродинамічних методів короткострокового прогнозу погоди. Велика увага приділяється питанням побудови прогностичних моделей як фільтрованих, так і за повними рівняннями, і сітковим методам їх реалізації.

Підручник призначений для студентів, магістрів та аспірантів університетів, які навчаються за спеціальністю "Метеорологія", а також може бути використаний фахівцями, що працюють у сфері практичного застосування чисельних методів прогнозу погоди.

Для вивчення матеріалу, викладеного у підручнику, потрібні знання фізики атмосфери, геофізичної гідродинаміки, хвильових процесів, динамічної метеорології та математики в обсязі програм гідрометеорологічних інститутів або відповідних факультетів університетів.

ББК 26.23

УДК 551.509.313