

О.С. Лімонов

**ЦИФРОВА ОБРОБКА
І ПЕРЕДАЧА ІНФОРМАЦІЇ**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.С. Лімонов

**ЦИФРОВА ОБРОБКА
І ПЕРЕДАЧА ІНФОРМАЦІЇ**

Конспект лекцій

Одеса - 2013

ББК – 32.972

Л 58

УДК – 681.3

Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету (протокол №_____ від _____.____.2013 р.).

Лімонов О.С.

Цифрова обробка і передача інформації: Конспект лекцій. -Одеса 2013. - 116с.

В конспекті лекцій викладені математичні моделі представлення сигналів та їх перетворень у дискретній та цифровій формі. Наведені способи синтезу та аналізу сигналів на основі теорії фільтрації. Наведені способи кодування сигналів та каналів передачі інформації.

Конспект призначений для бакалаврів з напрямку “Гідрометеорологія” зі спрямуванням у спеціалізацію “Технічні системи гідрометеорологічного моніторингу”, та для бакалаврів з напрямку “Комп’ютерні науки” зі спрямуванням у спеціальність “Комп’ютерний еколого-економічний моніторинг”.

Навчальне видання

О.С. Лімонов

**ЦИФРОВА ОБРОБКА
І ПЕРЕДАЧА ІНФОРМАЦІЇ**

Конспект лекцій

Підп. до друку
Умовн. друк. арк..

Формат 60×84/16
Тираж

Папір офс.
Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, Львівська, 15

ЗМІСТ

	ПЕРЕДМОВА.....	6
1	ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ.....	7
1.1	Цифрова обробка сигналів.....	7
1.1.1	Узагальнена схема цифрової обробки сигналів.....	7
1.1.2	Основні типи сигналів і їхній математичний опис. Нормування часу.....	11
1.1.3	Типові дискретні сигнали.....	13
1.1.4	Основна смуга частот. Нормування частоти.....	16
1.2	Математичний апарат опису сигналів і лінійних систем.....	17
1.2.1	Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем у p -області і в частотній області.....	18
1.2.2	Перетворення Лапласа.....	18
1.2.3	Перетворення Фур'є.....	19
1.2.4	Ряд Фур'є.....	20
1.2.5	Математичний опис дискретних сигналів і лінійних систем у z -області й у частотній області.....	21
1.2.6	Дискретне перетворення Лапласа.....	22
1.2.7	Z -перетворення.....	22
1.2.8	Зв'язок Z -перетворення з дискретним перетворенням Лапласа.....	23
1.2.9	Перетворення Фур'є.....	23
1.3	Опис лінійних дискретних систем в часовій області.....	25
1.3.1	Імпульсна характеристика.....	27
1.3.2	Співвідношення вхід-вихід.....	28
1.3.3	Формула згортки.....	29
1.3.4	Різницеве рівняння.....	34
1.3.5	Рекурсивні і не рекурсивні лінійні дискретні системи.....	36
1.3.6	Системи з скінченною і нескінченною імпульсною характеристикою.....	37
1.3.7	Властивості лінійних дискретних систем.....	39
1.3.8	Властивість запам'ятовування лінійних дискретних систем... ..	39
1.3.9	Стійкість лінійних дискретних систем.....	40
1.3.10	Оцінка стійкості за імпульсною характеристикою: критерій стійкості.....	41
1.4	Опис лінійних дискретних систем у z -області.....	43
1.4.1	Передатна функція. Співвідношення вхід-вихід.....	43
1.4.2	Взаємозв'язок між передатною функцією і різницеvim рівнянням.....	48

1.5	Опис лінійних дискретних систем у частотній області.....	50
1.5.1	Частотна характеристика.....	50
1.5.2	Зв'язок частотної характеристики з передатною функцією....	53
1.5.3	Співвідношення вхід-вихід.....	54
1.5.4	Властивості частотних характеристик.....	54
1.5.5	Основна смуга частот.....	56
1.6	Двовимірне перетворення Фур'є.....	57
1.6.1	Згортки функцій.....	59
1.6.2	Глобальна згортка двовимірних дискретних просторових функцій.....	60
1.6.3	Глобальна згортка спектрів.....	61
1.6.4	Локальна згортка в двовимірному просторі.....	61
1.6.5	Локальна згортка в двовимірній спектральній області.....	62
2	ТЕОРІЯ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ.....	64
2.1	Структурні схеми лінійних дискретних систем.....	64
2.1.1	Структури рекурсивних лінійно дискретних систем.....	65
2.1.2	Пряма структура.....	65
2.1.3	Пряма канонічна структура 1.....	66
2.1.4	Канонічна структура 2.....	68
2.1.5	Канонічна структура 3.....	69
2.1.6	Каскадна структура.....	72
2.1.7	Рівнобіжна структура.....	73
2.1.8	Структури не рекурсивних лінійно дискретних систем.....	74
2.1.9	Пряма структура.....	75
2.1.10	Каскадна структура.....	76
2.1.11	Вибір структури.....	76
2.2	Цифрова фільтрація.....	77
2.2.1	Фур'є - фільтрація сигналів зображень.....	78
2.2.2	Фільтрація в частотно-просторовій області.....	81
2.3	Основні визначення і класифікація цифрових фільтрів.....	82
2.3.1	Синтез цифрових фільтрів.....	85
2.3.2	Вимоги до цифрових фільтрів.....	85
2.3.3	Типи вибірових фільтрів і завдання вимог до них.....	87
2.3.4	Синтез скінченної імпульсної характеристики фільтрів методом вікон.....	92
2.3.5	Постановка задачі. Визначення методу.....	92
2.3.5.1	Загальна характеристика задачі.....	92
2.3.5.2	Явище Гібса.....	95
2.3.5.3	Вікна і їхні основні параметри.....	99
2.3.5.4	Прямокутне вікно (вікно Діріхле).....	100
2.3.5.5	Трикутне вікно (вікно Бартлетта).....	100
2.3.5.6	Узагальнене косинусне вікно.....	101

2.3.5.7	Вікно Кайзера.....	105
2.3.5.8	Визначення величини пульсацій Гібса.....	107
2.3.5.9	Методика синтезу скінченної імпульсної характеристики фільтрів на основі вікон.....	113
	ЛІТЕРАТУРА.....	116

ПЕРЕДМОВА

Цифрова обробка і передача інформації широко використовується в системах комп'ютерної обробки інформації, системах зв'язку, метеорологічній радіолокаційній техніці, телеметрії метеорологічних даних.

В цифрову обробку і передачі інформації входять різні способи дискретних перетворень сигналів, їх кодування для використання в телеметричних трактах передачі інформації.

В конспекті лекцій розглядаються способи математичного представлення цифрової обробки, теорія фільтрації цифрових сигналів, теорія інформації, теорія кодування сигналів та трактів передачі.

В конспекті лекцій викладені математичні моделі представлення сигналів та їх перетворень у дискретній та цифровій формі. Наведені способи синтезу та аналізу сигналів на основі теорії фільтрації. Наведені способи кодування сигналів та каналів передачі інформації.

Конспект призначений для бакалаврів з напрямку “Гідрометеорологія” зі спрямуванням у спеціалізацію “Технічні системи гідрометеорологічного моніторингу”, та для бакалаврів з напрямку “Комп'ютерні науки” зі спрямуванням у спеціальність “Комп'ютерний еколого-економічний моніторинг”.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

1.1 Цифрова обробка сигналів

Цифрова обробка сигналів (ЦОС) — це область науки і техніки, у якій вивчаються загальні для різних технічних додатків принципи, методи й алгоритми обробки сигналів засобами цифрової обчислювальної техніки.

1.1.1 Узагальнена схема цифрової обробки сигналів

Узагальнена схема ЦОС (рис. 1.1) відображає послідовність процедур, необхідних для перетворення вихідного аналогового сигналу $x(t)$ в інший аналоговий сигнал $y(t)$ по заданому алгоритму засобами цифрової обчислювальної техніки.

У цифровій обробці сигналу можна виділити три основних етапи:

- формування цифрового сигналу $x_\delta(nT)$ з вихідного аналогового сигналу $x(t)$;
- перетворення цифрового сигналу $x_\delta(nT)$ у цифровий сигнал $y_\delta(nT)$ по заданому алгоритму;
- формування результуючого аналогового сигналу $y(t)$ з цифрового сигналу в $y_\delta(nT)$.

В узагальненій схемі ЦОС цим етапам відповідають три функціональних пристрої:

- кодер;
- пристрій ЦОС;
- декодер.

Узагальнена схема і часові діаграми поетапного процесу ЦОС наведені на (рис. 1.1, *a-e*). Розглянемо кожний з етапів:

1. На першому етапі кодер з вхідного аналогового сигналу $x(t)$ (рис. 1.1, *a*) формує цифровий сигнал $x_\delta(nT)$ (рис. 1.1, *б*), без чого принципово неможлива цифрова обробка. До складу кодера входять аналоговий фільтр нижніх частот (ФНЧ) і аналого-цифровий перетворювач (АЦП).

Аналоговий фільтр нижніх частот призначений для обмеження спектра $X(j\omega)$ вхідного аналогового сигналу $x(t)$.

Необхідність обмеження спектра впливає з теореми Котельникова, відповідно до якої частота дискретизації f_A вибирається з умови $f_A \geq 2f_A$, де f_A — верхня частота спектра сигналу.

Можливість обмеження спектра зв'язана з особливостями частотного розподілу енергії сигналу: основна частина його енергії зосереджена в

області $f \leq f_{\hat{A}}$, тобто амплітуди спектральних складових, починаючи з деякої частоти $f > f_{\hat{A}}$, істотно знижуються (рис. 1.2, а). Вибір значення $f_{\hat{A}}$ визначається конкретним типом сигналу і розв'язуваною задачею. При обробці аудіо-відеосигналів вибір $f_{\hat{A}}$ залежить від особливостей психофізичного сприйняття цих сигналів. Наприклад, для стандартного телефонного сигналу верхня частота $f_{\hat{A}}$ дорівнює 3,4 кГц, а мінімальна стандартна частота дискретизації $f_{\hat{A}}$ — 8 кГц.

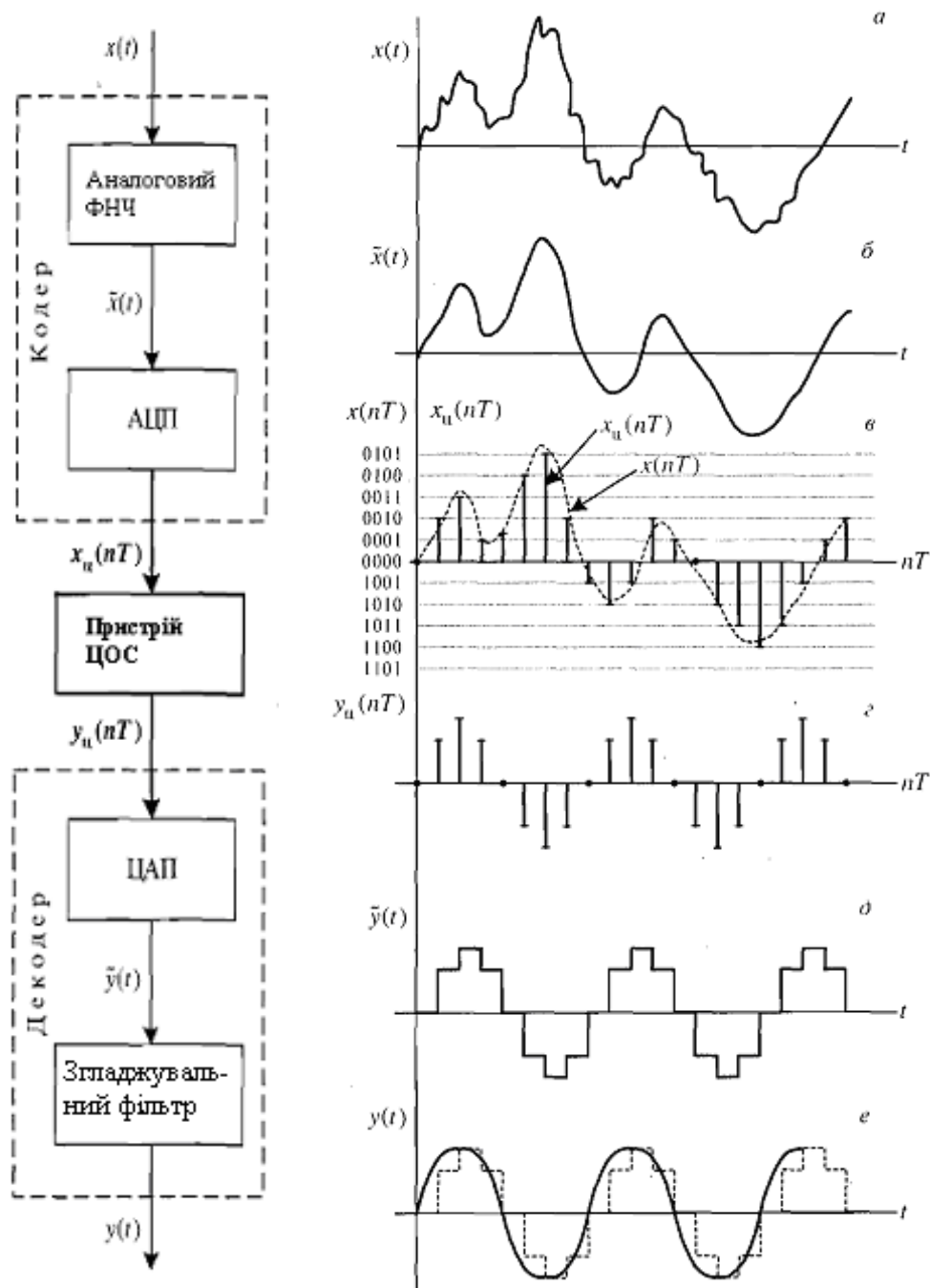


Рисунок. 1.1 - Узагальнена схема цифрової обробки сигналу

На виході ФНЧ одержують аналоговий сигнал $x(t)$ з фінітним (обмеженим по частоті) спектром $\tilde{X}(j\omega)$ (рис. 1.2, б), оцінка похибки при переході від сигналу $x(t)$ до сигналу $\tilde{x}(t)$ [1].

Аналого-цифровий перетворювач формує цифровий сигнал $x_o(nT)$ за допомогою дискретизації і квантування сигналу $\tilde{x}(t)$ (рис. 1.1, в).

Дискретизація за часом (дискретизація) являє собою процедуру узяття миттєвих значень – відліків - аналогового сигналу $\tilde{x}(t)$ з інтервалом часу, рівним періоду дискретизації T . Значення відліків $x(nT)$ збігаються зі значеннями сигналу $\tilde{x}(t)$ у моменти часу $l = nT$:

$$x(nT) = \tilde{x}(t)|_{l=nT}.$$

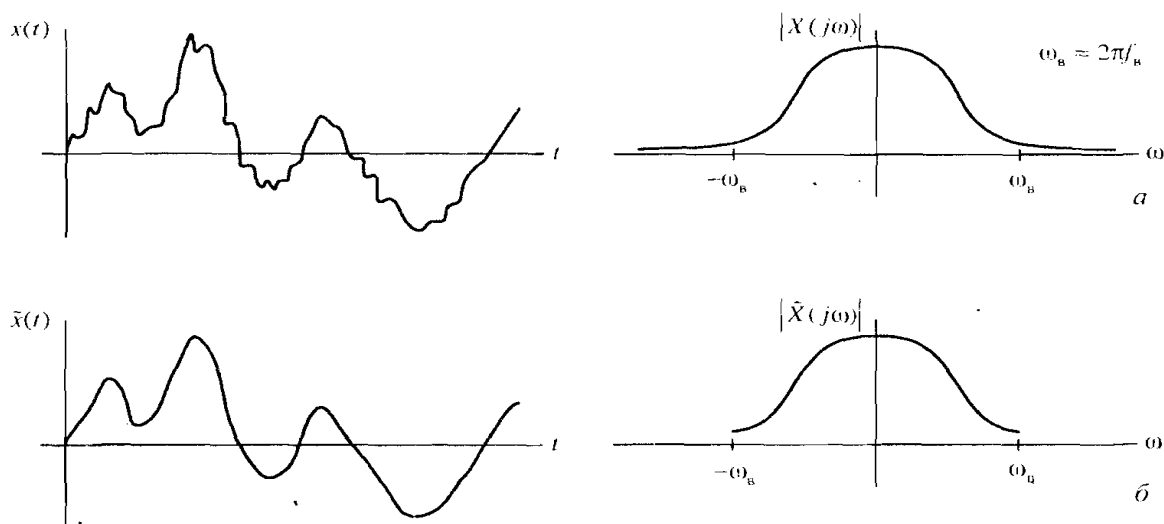


Рисунок 1.2 - Сигнали і їхні амплітудні спектри на вході (а) і виході (б) ФНЧ

Сукупність відліків $x(nT)$, $n=0, 1, \dots$ називають дискретним сигналом.

Квантування за рівнем (квантування) проводиться з метою представлення точних значень відліків $x(nT)$ у вигляді двійкових чисел скінченної розрядності - квантованих відліків $x_o(nT)$. Для цього динамічний діапазон дискретного сигналу $x(nT)$ розбивається на скінчене число дискретних рівнів — рівнів квантування— і кожному відліку за визначеним правилом привласнюється значення одного з найближчих рівнів, між якими він виявляється. Рівні квантування кодуються двійковими числами розрядності b , що залежить від числа рівнів квантування R :

$$R \leq 2^b,$$

де $b = \text{int}(\log_2 R)$. На часовій діаграмі (рис. 1.1, в) для прикладу обрано 5 рівнів квантування (без урахування знака), тому $b = 3$ і відліків $x_o(nT)$ кодуються чотирьохрозрядними двійковими числами: один розряд знаковий, три значущих.

Сукупність квантованих відліків $x_o(nT)$, $n=0, 1, \dots$ називають цифровим сигналом.

Детерміновані і ймовірні оцінки помилки квантування $e_{\hat{e}d}(n)$ за рахунок АЦП

$$e_{\hat{e}d}(n) = x(nT) - x_o(nT).$$

На другому етапі пристрій ЦОС перетворює цифровий сигнал $x_o(nT)$ (рис. 1.1, в) у цифровий сигнал $y_o(nT)$ (рис. 1.1, з) за заданим алгоритмом.

Пристрій ЦОС може бути реалізований апаратно чи програмно. У першому випадку — у вигляді спеціалізованого цифрового пристрою, у другому — у вигляді програми на комп'ютері або цифровому процесорі обробки сигналів (ЦПОС). Програмна реалізація переважає.

Пристрої ЦОС можуть працювати в реальному чи нереальному часі.

У реальному часі обробка сигналів повинна виконуватися в темпі надходження відліків вхідного сигналу $x_o(nT)$, $n = 0, 1, \dots$ і відповідати таким вимогам:

- час циклу Δt_n при обчисленні відліку $y_o(nT)$ не повинен перевищувати інтервал між двома сусідніми відліками $x_o(nT)$, тобто період дискретизації T

$$\Delta t_n \leq T;$$

- тактова частота f_τ процесора повинна бути багато вище за частоту дискретизації f_A сигналу $x_o(nT)$

$$f_\tau \gg f_A.$$

Останнє викликано тим, що в алгоритмах ЦОС кількість операцій у циклі, необхідних для обчислення одного відліку $y_o(nT)$, дуже велика. Наприклад, для стандартного телефонного сигналу з частотою дискретизації 8 кГц тактова частота повинна бути не менш 6 МГц.

У реальному часі виконується обробка сигналів, яка пов'язана з їхньою передачею каналами зв'язку, у тому числі, мережою *Internet*. До типових задач ЦОС у реальному часі відносяться: виявлення, фільтрація, стискання, розпізнавання сигналів і ін.

У нереальному часі виконується обробка сигналів, пов'язана,

насамперед, з їхнім дослідженням. До типових задач ЦОС у нереальному часі відносяться: студійна обробка аудіо і відеосигналів; обробка даних різної фізичної природи, отриманих від датчиків, і ін.

3. На третьому етапі декодер формує результуючий аналоговий сигнал $y(t)$ з цифрового сигналу $y_o(nT)$. До складу декодера входять цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП) і згладжувальний фільтр.

Цифро-аналоговий перетворювач формує з цифрового сигналу $y_o(nT)$ (рис. 1.1, з) східчастий аналоговий сигнал $\tilde{y}(t)$ (рис. 1.1, д).

Фільтр що згладжує, (низькочастотний) усуває східчастий ефект (стрибки) у вихідному сигналі ЦАП $\tilde{y}(t)$. На виході згладжувального фільтра, одержуємо аналоговий сигнал $y(t)$ (рис. 1.1, е) — результат перетворення вихідного сигналу $x(t)$.

Предметами вивчення в дійсному курсі лекцій є:

- дискретні і цифрові сигнали;
- пристрою ЦОС: лінійні і нелінійні дискретні системи, методи й алгоритми цифрової обробки сигналів.

1.1.2 Основні типи сигналів і їхній математичний опис. Нормування часу

Сигналом називають фізичний процес, що несе в собі інформацію. Математично сигнали описуються функціями часу тип яких залежить від типу сигналу. До основних типів сигналів відносять: аналоговий, дискретний і цифровий.

Аналоговим називають сигнал, неперервний за часом і станом (рис. 1.3, а). Такий сигнал описується неперервною чи кусково-неперервною функцією $x(t)$, при цьому й аргумент, і функція можуть мати будь-які значення з деяких інтервалів $t_1 \leq t \leq t_2$, $x_1 \leq x \leq x_2$ відповідно.

Дискретним називають сигнал, дискретний за часом і неперервний за станом (рис. 1.3, б). Такий сигнал описується решітковою функцією (послідовністю) $x(nT)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, що визначена тільки в дискретні моменти часу nT і може мати будь-яке значення з деякого інтервалу $x_1 \leq x \leq x_2$.

Інтервал T називають періодом дискретизації, а зворотну величину — частотою дискретизації

$$f_A = \frac{1}{T}. \quad (1.1)$$

Значення послідовності в моменти часу nT називають відліками. Дискретний сигнал може бути як дійсним, так і комплексним. В

останньому випадку його дійсна і уявна частини описуються дійсними послідовностями

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT).$$

Цифровим називають сигнал, дискретний за часом і квантований за станом (рис.1.3,в). Такий сигнал описується квантово-решітковою функцією (квантовою послідовністю) $x_{\kappa}(nT)$, відліки якої у кожен момент часу nT приймають дискретні значення рівнів квантування з деякого інтервалу $x_1 \leq x \leq x_2$.

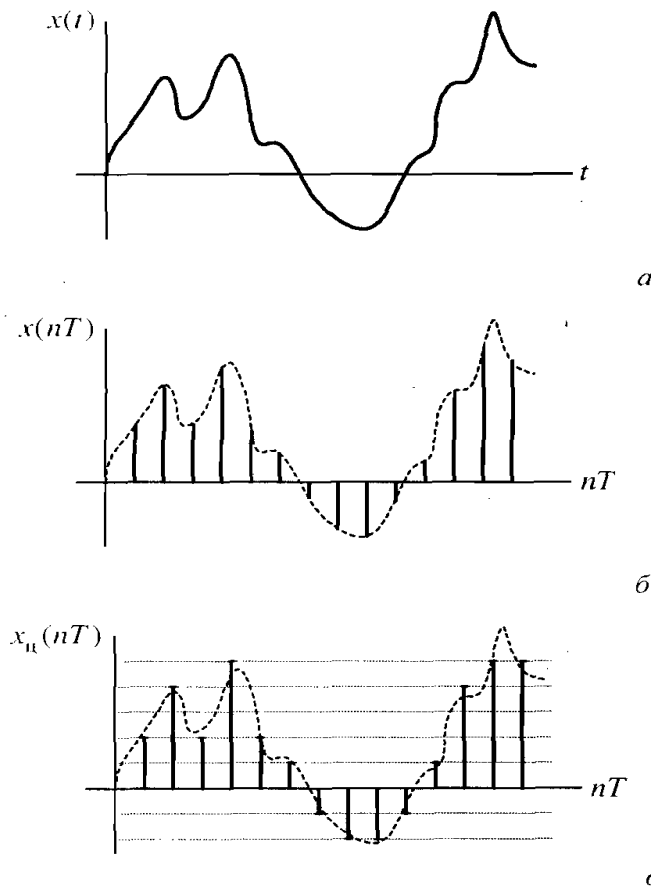


Рисунок 1.3 - Основні типи сигналів: аналоговий (а), дискретний (б) і цифровий (в)

При описі дискретних і цифрових сигналів зручно користатися нормованим часом \hat{t}

$$\hat{t} = \frac{t}{T},$$

яке при $t = nT$ має сенс номера відліку n

$$\hat{t} = \frac{t}{T} = \frac{nT}{T} = n \quad (1.2)$$

і означає, що відлік узятий у момент nT . Це дозволяє описувати дискретний сигнал функцією з цілою змінною $x(n)$ і вважати тотожними позначення дискретного сигналу $x(n)$ і $x(nT)$:

$$x(nT) \equiv x(n)$$

1.1.3 Типові дискретні сигнали

У ЦОС ряд дискретних сигналів використовують в якості тестових і називають типовими. До них відносяться:

1. Цифровий одиничний імпульс, описуваний послідовністю

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = m; \\ 0, n \neq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

цей сигнал дорівнює одиниці при $n = 0$ і нулю при всіх інших значеннях n (рис. 1.4, а).

Затриманий цифровий одиничний імпульс описується послідовністю

$$u_0(n - m) = \begin{cases} 1, n = m; \\ 0, n \neq m, \end{cases} \quad (1.4)$$

цей сигнал, на відміну від незатриманого, дорівнює одиниці при $n = m$ і нулю при всіх інших значеннях n (рис. 1.4, б).

З визначення затриманого цифрового одиничного імпульсу (1.4) випливає важливе співвідношення з

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n - m). \quad (1.5)$$

При визначенні (1.4) послідовність $u_0(n - m)$ дорівнює нулю у всіх точках n , крім $n = m$ (де вона дорівнює одиниці), тому доданки в (1.5) при всіх значеннях m , крім $m = n$, дорівнюють нулю, а виходить, сума дорівнює $x(n)$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)u_0(n - m) &= x(0)u_0(n) + x(1)u_0(n - 1) + \dots + x(n)u_0(n - n) + \\ &+ x(n+1)u_0[n - (n+1)] + \dots = 0 + 0 + \dots + x(n)u_0(0) + 0 + \dots = x(n). \end{aligned}$$

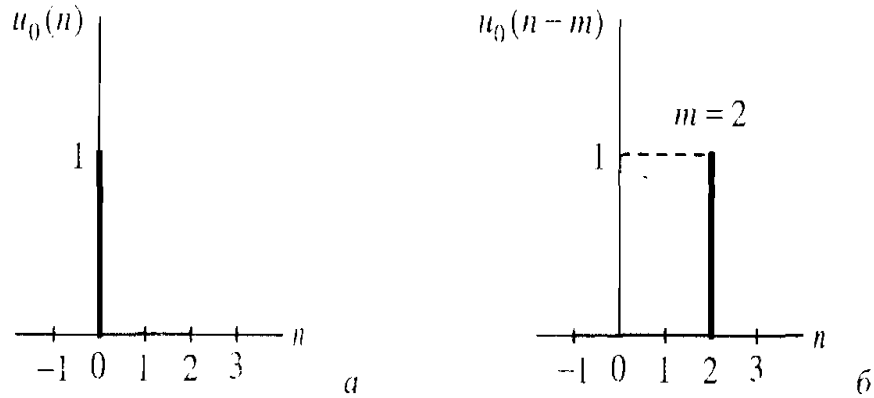


Рисунок 1.4 - Цифровий одиничний (а) і затриманий цифровий одиничний (б) імпульси

За аналогією з властивістю дельта-функції співвідношення (1.5) називають фільтрувальною властивістю або властивістю селективності цифрового одиничного імпульсу.

2. Цифровий одиничний стрибок, описуваний послідовністю

$$u_1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0; \\ 0, n < 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

цей сигнал дорівнює одиниці при всіх від'ємних значеннях n (рис.1.5.а).

3. Затриманий цифровий одиничний стрибок (рис.1.5,б) описується послідовністю

$$u_1(n-m) = \begin{cases} 1, n \geq m; \\ 0, n < m, \end{cases} \quad (1.7)$$

цей сигнал, на відміну від незатриманого, дорівнює одиниці при всіх значеннях $n \geq m$ і нулю при інших значеннях n .

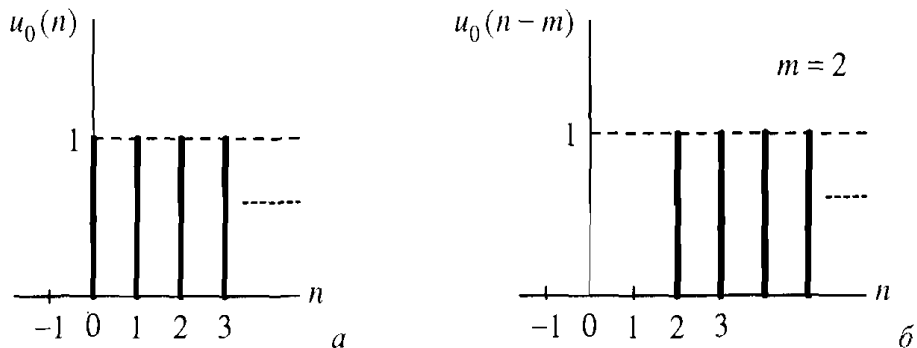


Рисунок 1.5 - Цифровий одиничний (а) і затриманий цифровий одиничний (б) стрибки

де a — дійсна константа. У залежності від величини і знака a

дискретна експонента буде:

- $|a| < 1$ і $a > 0$ - знакопостійна яка убуває (рис. 1.6,а);
- $|a| < 1$ і $a < 0$ - знакоперемінна яка убуває (рис. 1.6,б);
- $a > 1$ - зростаючої;
- $|a| = 1$ і $a > 0$ - цифровим одиничним стрибком;
- $|a| = 1$ і $a < 0$ - знакозмінної послідовності одиниць.

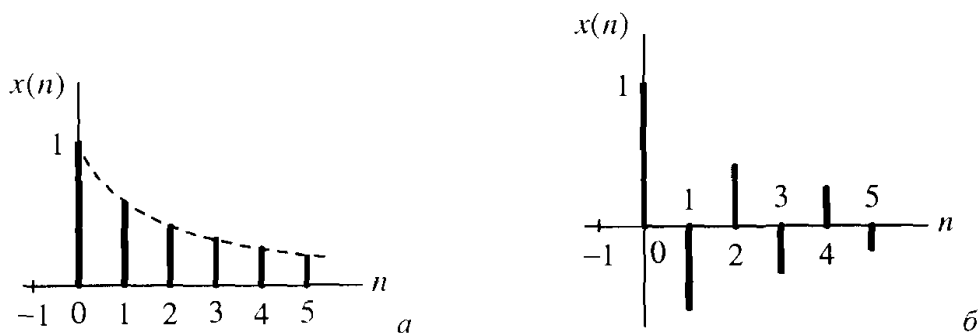


Рисунок 1.6 – Знакопостійна (а) і знакоперемінна (б) дискретні експоненти

4. Дискретний гармонійний сигнал, наприклад, дискретна косинусоїда, описувана послідовністю

$$x(nT) = x(n) = A \cos(2\pi f n T) = A \cos(\omega n T) \quad (1.9)$$

де T - період дискретизації; A - амплітуда; ω - кругова частота, зв'язана з частотою f коефіцієнтом пропорційності 2π

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.10)$$

Дискретна косинусоїда виходить з аналогової

$$x(t) = A \cos(2\pi f t) = A \cos(\omega t)$$

у результаті заміни безупинного часу дискретним (рис. 1.7)

$$x(nT) = x(n) = A \cos(\omega t) \Big|_{\omega = nT} = A \cos(\omega T n).$$

Дискретна синусоїда описується аналогічно.

5. Дискретний комплексний гармонійний сигнал, описуваний комплексною послідовністю

$$x(n) = A e^{j\omega T n}$$

або двома дійсними послідовностями: косинусоїдою (дійсна частина) і

синусоїдою (уявна частина)

$$x(nT) = A \cos(\omega T n) + jA \sin(\omega T n).$$

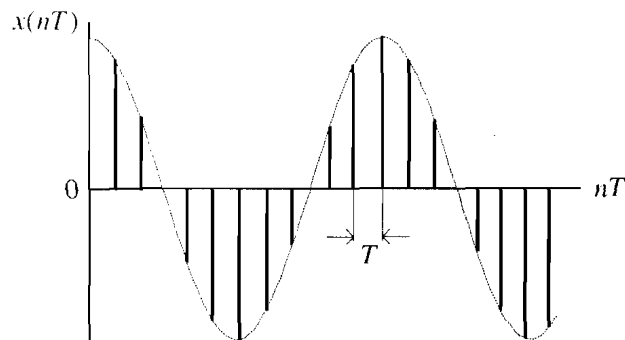


Рисунок 1.7 - Дискретна косинусоїда

1.1.4 Основна смуга частот. Нормування частоти

Відповідно до теореми Котельникова, верхня частота f_A аналогового сигналу не повинна перевищувати половини частоти дискретизації f_A цього сигналу. Отже, дискретні сигнали доцільно розглядати в області $\left[0; \frac{f_A}{2}\right]$ що називається основною смугою частот або основним діапазоном частот.

Це дозволяє ввести поняття нормованих частот:

- \hat{f} - відношення поточної частоти f до частоти дискретизації f_A

$$\hat{f} = \frac{f}{f_A} = fT; \quad (1.11)$$

- $\hat{\omega}$ - відношення поточної частоти ω до частоти дискретизації f_A

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_A} = \omega T. \quad (1.12)$$

Нормовані частоти \hat{f} і $\hat{\omega}$ зв'язані співвідношенням, подібним (1.10):

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_A} = \frac{2\pi f}{f_A} 2\pi \hat{f}.$$

У залежності від обраної шкали частот основна смуга відповідає областям:

$$f \rightarrow \left[0; \frac{f_A}{2} \right];$$

$$\hat{f} \rightarrow [0; 0,5];$$

$$\omega \rightarrow \left[0; \frac{\omega_A}{2} \right] = \left[0; \frac{\pi}{T} \right];$$

$$\hat{\omega} \rightarrow [0; \pi].$$

Звичайна перевага віддається абсолютній частоті f і нормованій частоті $\hat{\omega}$.

Наприклад, дискретна косинусоїда (1.9) в області нормованих частот має вигляд:

$$x(n) = A \cos(2\pi \hat{f}n) = A \cos(\hat{\omega}n).$$

Уведення нормованої частоти вказує на те, що при ЦОС важливі не абсолютні значення частот сигналу і дискретизації, а їхнє відношення.

Контрольні запитання:

1. Які основні етапи при ЦОС?
2. Що входить в перший етап ЦОС?
3. Що входить в другий етап ЦОС?
4. Що входить в третій етап ЦОС?
5. Що називають аналоговим, дискретним цифровим сигналом?
6. Що таке цифровий одиничний імпульс?
7. Що таке цифровий одиничний стрибок?
8. Що таке дискретна експонента?
9. Що таке нормовані частоти?

1.2 Математичний апарат опису сигналів і лінійних систем

В цьому розділі обговорюється математичний опис аналогових і дискретних сигналів і лінійних систем у різних областях.

В часовій області:

- сигнали (аналогові і дискретні) описуються функціями часу;
- лінійні системи (аналогові і дискретні) описуються:
- характеристиками. Характеристика лінійної системи визначається

як її реакція на деякий тестовий сигнал, тобто характеристика — це сигнал, описуваний функцією часу;

- співвідношення вхід-вихід. Співвідношення вхід-вихід лінійної системи описується лінійним рівнянням, що встановлює зв'язок між вхідним і вихідним сигналами — функціями часу. За замовчуванням будемо вважати, що системи мають один вхід і один вихід.

Тип функції часу визначається типом сигналу:

- неперервна функція $x(t)$ описує аналоговий сигнал;
- послідовність (решіткова функція) $x(nT)$ описує дискретний сигнал.

Крім часової, сигнали і лінійні системи можуть описуватися й в інших областях (в областях інших незалежних змінних), при цьому відповідні функції часу перетворюються у функції іншої змінної. Таке перетворення не слід плутати з перетворенням функцій одної змінної, наприклад з перетворенням вхідного сигналу у вихідний. Зміст терміна “перетворення” завжди ясний з контексту.

Дана лекція містить короткий опис математичного апарату, що традиційно використовується для перетворення функцій часу при описі сигналів і лінійних систем у наступних областях:

- в області комплексної змінної (p -області - для безупинних функцій $x(t)$, z -області — для послідовностей $x(nT)$);
- у частотній області.

При вивченні матеріалу рекомендується звернути особливу увагу на взаємозв'язку:

- однотипних перетворень безупинної функції $x(t)$ і послідовності $x(nT)$;
- між різними перетвореннями кожної з цих функцій.

1.2.1 Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем у p -області і в частотній області

Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем у p -області (на комплексній p -площині) і в частотній області засновано відповідно на перетвореннях Лапласа і Фур'є функції часу $x(t)$, для яких виконується умова

$$x(t)|_{t<0}=0. \quad (1.13)$$

1.2.2 Перетворення Лапласа

Перетворенням Лапласа функції $x(t)$ (1.13) називається наступна пара взаємно однозначних перетворень:

- пряме перетворення

$$X(p) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt; \quad (1.14)$$

- зворотне перетворення

$$x(t) = L^{-1}[X(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(p) e^{pt} dp, \quad (1.15)$$

де: $L[x(t)]$, $L^{-1}[X(p)]$ — символічні позначення прямого і зворотного перетворень Лапласа; $x(t)$ - оригінал - дійсна або комплексна функція (1.13), неперервна чи кусково-неперервна, однозначна на будь-якому скінченному інтервалі в області визначення, що має експонентний порядок $O(e^{\lambda t})$ і обмежену можливість зростання

$$|x(t)| \leq A e^{\lambda t} \quad (A \text{ і } \lambda \text{ не дорівнюють нескінченності});$$

p - оператор Лапласа

$$p = \sigma + j\omega; \quad (1.16)$$

$X(p)$ - L -зображення (L -образ) функції $x(t)$, результат перетворення Лапласа; σ_0 абсциса абсолютної збіжності інтеграла (1.14).

Перетворення Лапласа справедливо тільки в області абсолютної збіжності інтеграла (1.14)

$$\int_0^{\infty} |x(t) e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)| |e^{-j\omega t}| e^{-\sigma t} dt = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (1.17)$$

обумовленою абсцисою абсолютної збіжності σ_0 . На комплексній p -площині це область, де $\operatorname{Re}(p) = \sigma \geq \sigma_0$.

Як відомо в області збіжності інтеграла (1.17) забезпечується і збіжність інтеграла (1.14), однак зворотне не завжди справедливо. Може статися, що інтеграл (1.14) сходиться за рахунок збалансованості площин з додатними і від'ємними знаками, а інтеграл (1.17) розходиться.

1.2.3 Перетворення Фур'є

Перетворенням Фур'є функції $x(t)$ (1.13) називається така пара взаємно однозначних перетворень:

- пряме перетворення

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (1.18)$$

- зворотне перетворення

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.19)$$

де: $x(t)$ - оригінал - дійсна чи комплексна функція (1.13), що задовольняє умови Діріхле: на будь-якому скінченному інтервалі в області задання визначена, однозначна, неперервна чи кусково-неперервна, має скінченне число екстремумів і розривів першого роду; $X(j\omega)$ - фур'є-зображення (фур'є-образ) функції $x(t)$, результат перетворення Фур'є.

Перетворення Фур'є справедливо тільки в області абсолютної збіжності інтеграла (1.18)

$$\int_0^{\infty} |x(t)e^{-j\omega t}| dt = \int_0^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (1.20)$$

Умови збіжності перетворень Лапласа (1.17) і Фур'є (1.20) дозволяють затверджувати, що перетворення Фур'є справедливо для більш вузького класу сигналів, ніж перетворення Лапласа.

1.2.4 Ряд Фур'є

Неперервна періодична функція часу $x(t)$ з періодом T_s , що задовольняє в межах періоду умови Діріхле, може бути представлена у вигляді ряду Фур'є

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\Delta\omega t}, \quad (1.22)$$

де: $\Delta\omega$ - період дискретизації по частоті:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_s} \left(T_s \frac{2\pi}{\Delta\omega} \right); \quad (1.23)$$

$X(k)$ - коефіцієнти Фур'є (комплексні числа):

$$X(k) = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} x(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt; \quad (1.24)$$

k - номер коефіцієнта Фур'є, що відповідає частоті $k\Delta\omega$.

Аналогічно, неперервна періодична функція частоти $X(\omega)$ з періодом ω_s , що задовольняє в межах періоду умовам Діріхле, може бути представлена у вигляді ряду Фур'є, симетричного (1.22),

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\Delta\omega}, \quad (1.25)$$

де: Δt - період дискретизації за часом:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_s} \left(\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t} \neq \frac{2\pi}{T_s} \right); \quad (1.26)$$

$x(n)$ - коефіцієнти Фур'є (комплексні числа):

$$x(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} X(\omega) e^{jn\Delta\omega} d\omega; \quad (1.27)$$

n - номер коефіцієнта Фур'є, що відповідає часу $n\Delta t$.

На підставі (1.23) і (1.26) можна записати співвідношення для періодів функцій і періодів дискретизації в часовій і частотній областях

$$T_s \Delta\omega = \omega_s \Delta t.$$

Порівнюючи ряди (1.22) і (1.25), легко помітити взаємозамінність незалежних змінних час-частота.

1.2.5 Математичний опис дискретних сигналів і лінійних систем у z -області й у частотній області

Математичний опис дискретних сигналів і лінійних систем у z -області (на комплексній z -площині) і в частотній області засновано відповідно на Z -перетворенні і перетворенні Фур'є послідовності $x(nT)$, для якої виконується умова

$$x(nT)|_{n<0} = 0. \quad (1.28)$$

1.2.6 Дискретне перетворення Лапласа

Дискретне перетворення Лапласа (D -перетворення) послідовності $x(nT)$ (1.28) має пряму аналогію з перетворенням Лапласа (1.14) безупинної функції.

У результаті переходу від неперервного часу до дискретного

$$t \Rightarrow nT$$

і заміни неперервної функції послідовністю

$$x(t) \Rightarrow x(nT)$$

інтеграл у (1.14) замінюється сумою.

Відповідно, дискретним перетворенням Лапласа називається наступний ряд

$$X(e^{pT}) = D[x(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}, \quad (1.29)$$

де: $D[x(nT)]$ - символічне позначення дискретного перетворення Лапласа; $x(nT)$ - оригінал - дійсна або комплексна послідовність (1.28); $X(e^{pT})$ - D -зображення (D -образ) послідовності $x(nT)$, результат дискретного перетворення Лапласа.

Дискретне перетворення Лапласа однозначно зв'язує послідовність $x(nT)$ з її D -зображенням $X(e^{pT})$ і справедливо тільки в області абсолютної збіжності ряду (1.29)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)e^{-pnT}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| |e^{-j\omega nT}| e^{-\sigma nT} = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| e^{-\sigma nT} < \infty, \quad (1.30)$$

обумовленою абсцисою збіжності σ_0 . На комплексній p -площини це область, де $\text{Re}(p) = \sigma \geq \sigma_0$.

1.2.7 Z -перетворення

При дослідженні дискретних сигналів і лінійних систем, як правило, замість дискретного перетворення Лапласа використовують Z -перетворення, що виходить з дискретного перетворення Лапласа (1.29) у результаті заміни змінних

$$z = e^{pT}. \quad (1.31)$$

Z -перетворенням послідовності $x(nT)$ (1.28) називається наступний ряд:

$$X(z) = Z[x(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}, \quad (1.32)$$

де: $Z[x(nT)]$ - символічне позначення Z -перетворення; $x(nT)$ - оригінал - дійсна або комплексна послідовність (1.28); $X(z)$ — z -зображення (z -образ) послідовності $x(nT)$, результат Z -перетворення.

Z -перетворення однозначно зв'язує послідовність $x(nT)$ з її z -зображенням $X(z)$ і справедливо тільки в області абсолютної збіжності ряду (1.32)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)z^{-n}| < \infty. \quad (1.33)$$

Як відомо, в області збіжності ряду (1.33) забезпечується і збіжність ряду (1.32), однак зворотне не завжди справедливо. Може трапитися, що ряд (1.32) сходиться за рахунок збалансованості доданків з додатними і від'ємними позначками, а ряд (1.33) розходиться [1].

1.2.8 Зв'язок Z -перетворення с дискретним перетворенням Лапласа

Порівнюючи дискретне перетворення Лапласа (1.29) і Z -перетворення (1.32), легко побачити їхній взаємозв'язок

$$X(z)|_{z=e^{pT}} = X(p^{pT}).$$

Може виникнути питання, чому при дослідженні дискретних сигналів і лінійних систем використовують Z -, а не D -перетворення. Справа в тім, що подібно перетворенню Лапласа неперервних функцій, Z -перетворення послідовності дозволяє одержати алгебраїчні співвідношення (поки не будемо вникати, які саме), у той час як D -перетворення приводить до дуже незручного для аналізу трансцендентним співвідношенням.

1.2.9 Перетворення Фур'є

Перетворенням Фур'є послідовності $x(nT)$ (1.28) називається такий ряд:

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega Tn}, \quad (1.34)$$

де: $x(nT)$ оригінал - дійсна або комплексна послідовність (1.28);

$X(e^{j\omega T})$ - фур'є-зображення (фур'є-образ) послідовності $x(nT)$, результат перетворення Фур'є.

Перетворення Фур'є однозначно пов'язує послідовність $x(nT)$ з її фур'є-зображенням $X(e^{j\omega T})$ і справедливо тільки в області абсолютної збіжності ряду (1.34)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(nT)e^{-j\omega T n}| < \infty. \quad (1.35)$$

Умови збіжності Z -перетворення (1.33) і перетворення Фур'є (1.35) дозволяють затверджувати, що перетворення Фур'є справедливо для більш вузького класу дискретних сигналів.

З (1.34) видно, що фур'є-зображення $X(e^{j\omega T})$ послідовності $x(nT)$ є періодичною функцією, оскільки аргумент даної функції $e^{j\omega T}$ (який, у свою чергу, теж є функцією) періодичний з періодом по частоті ω , що дорівнює частоті дискретизації $\omega_A = \frac{2\pi}{T}$:

$$e^{j\omega T} = e^{j\left(\omega \pm k \frac{2\pi}{T}\right)T} e^{j\omega T} e^{\pm j2\pi k} = e^{j\omega T}. \quad (1.36)$$

Виходить, неперервна періодична функція частоти $X(e^{j\omega T})$ може бути представлена рядом Фур'є (1.25) при $\omega_s = \omega_A$ і $\Delta t = T$

$$X(\omega) = X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\Delta t\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega nT}, \quad (1.37)$$

де коефіцієнти Фур'є $x(n)$ обчислюються за формулою (1.27)

$$x(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.38)$$

Дійсно, підставляючи $x(n) = x(nT)$ у (1.37) і з огляду на умову (1.28), одержуємо перетворення Фур'є (1.34)

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}.$$

Тому формула (1.38) являє собою не що інше, як обернене перетворення Фур'є.

Таким чином, перетворенням Фур'є послідовності $x(nT)$ називається пара взаємно однозначних перетворень (1.34)-(1.38):

- пряме перетворення

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}; \quad (1.39)$$

- зворотне перетворення

$$x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X(e^{j\omega T}) e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.40)$$

Контрольні запитання:

1. Як описуються сигнали і лінійні системи в часовій області?
2. В які області перетворюються часові функції при описанні сигналів і лінійних систем?
3. Що таке перетворення Лапласа?
4. Що таке ряд Фур'є?
5. Що таке дискретне перетворення Лапласа?

1.3 Опис лінійних дискретних систем в часовій області

Системою обробки сигналів (системою) називається об'єкт, що виконує необхідне перетворення вхідного сигналу у вихідний.

Вхідний сигнал системи називається дією, вихідною-реакцією.

У загальному випадку взаємозв'язок між вхідними і вихідними сигналами системи з декількома входами і виходами — співвідношення вхід(вихід) - описується рівнянням в операторній формі

$$Y = F(X), \quad (1.41)$$

де: X , Y - вектори, елементами яких є дія і реакції (функції часу) відповідно; F - оператор, що визначає математичне перетворення (лінійне чи нелінійне алгебраїчне, диференціальне і т.д.).

Для систем з одним входом і одним виходом, рівняння (1.41) приймає вигляд:

$$y = F(x), \quad (1.42)$$

де x , y - дія і реакція (функції часу) відповідно.

За замовчуванням будемо розглядати системи з одним входом і одним виходом.

Відповідно до визначення, системою можна назвати як фізичний пристрій, так і оператор F (математичне перетворення).

Приведемо необхідні визначення:

1. Система називається лінійною, якщо вона відповідає двом умовам:

- реакція на суму дій дорівнює сумі реакцій на кожну з дій (властивість адитивності або принцип суперпозиції):

$$F(x_1 + x_2 + \dots) = F(x_1) + F(x_2) + \dots; \quad (1.43)$$

- помножено дію на ваговий коефіцієнт відповідає реакція, помножена на той же коефіцієнт (властивість однорідності):

$$F(ax) = aF(x). \quad (1.44)$$

Співвідношення вхід-вихід лінійної системи описується рівнянням (1.42) з лінійним оператором F , тобто лінійним рівнянням.

2. Система називається дискретною, якщо вона перетворює вхідний дискретний сигнал $x(nT)$ у вихідний дискретний сигнал $y(nT)$ (рис. 1.8). Ці сигнали можуть бути дійсними або комплексними.

$$y(nT) = F[x(nT)].$$



Рисунок 1.8 - До визначення лінійної дискретної системи

3. Дискретна система називається стаціонарною, якщо її реакція інваріантна стосовно початку відліку часу (властивість інваріантності в часі), тобто для реакцій $y(nT)$ і $y_1(nT) = y[(n - m)T]$ при будь-якій цілому m справедлива рівність

$$y(nT) = y_1[(n + m)T].$$

Параметри стаціонарної системи незмінні в часі. За замовчуванням будемо розглядати стаціонарні системи.

У стаціонарній системі затримка дії на час mT ($m > 0$) приводить до затримки реакції на той же час

$$x[(n - m)T] \Rightarrow y[(n - m)T].$$

4. Початкові умови в дискретній системі можуть бути нульовими чи ненульовими.

Ознакою нульових початкових умов є відсутність реакції $y(nT) = 0$ при відсутності дії $x(nT) = 0$.

Позначивши момент початку дії $n = 0$, нульові початкові умови можна записати в наступному загальному вигляді

$$\begin{cases} x[(n-i)T] \Big|_{n-i < 0, i=1,2,\dots} = 0; \\ y[(n-k)T] \Big|_{n-k < 0, k=1,2,\dots} = 0, \end{cases} \quad (1.45)$$

що означає: усі значення дії і реакції, що може пам'ятати дискретна система, у моменти часу, що передують початковому, дорівнюють нулю.

Ознакою ненульових початкових умов є наявність ненульових значень реакції (вільних коливань) при відсутності дії.

5. Дискретна система називається такою, фізично реалізованою, якщо для неї виконуються умови фізичної реалізації: при нульових початкових умовах реакція не може виникнути раніш дії; значення реакції $y(nT)$ у кожен момент часу n залежать від поточного $x(nT)$ і попередніх значень дії $x[(n-m)T], m > 1$, але не залежать від його наступних значень $x[(n+m)T], m \geq 1$. Умови фізичної реалізації відображають причинно-наслідковий зв'язок реакції з дією (принцип причинності).

Розглянемо опис лінійної дискретної системи (ЛДС) у часовій області: основну характеристику і співвідношення вхід-вихід.

1.3.1 Імпульсна характеристика

В часовій області основною характеристикою лінійної дискретної системи, так само як і лінійної аналогової системи, є імпульсна характеристика (ІХ).

Імпульсною характеристикою $h(nT)$ лінійної дискретної системи називається її реакція на цифровий одиничний імпульс $u_0(nT)$ при нульових початкових умовах (рис. 1.9).



Рисунок 1.9 - До визначення імпульсної характеристики

Імпульсну характеристику $h(nT)$ вважають основною характеристикою лінійної системи, тому що, знаючи неї, можна визначити

реакцію на кожну (довільну) дію.

В часовій області ЛДС може також описуватися перехідною характеристикою. Перехідною характеристикою $g(nT)$ лінійної дискретної системи називається її реакція на цифровий одиничний стрибок $u_1(nT)$ при нульових початкових умовах (рис. 1.10).



Рисунок 1.10 - До визначення перехідної характеристики

Перехідна характеристика лінійної аналогової системи пов'язана з її імпульсною характеристикою співвідношенням

$$g(t) = \int_0^t h(t) dt.$$

Аналогічно, перехідна характеристика лінійної дискретної системи пов'язана з її імпульсною характеристикою співвідношенням

$$g(nT) = \sum_{m=0}^n h(mT).$$

Наприклад, якщо імпульсна характеристика має вигляд дискретної експоненти яка зменшується

$$h(n) = \alpha^n, |\alpha| < 1,$$

та перехідна характеристика визначається як сума скінченної зменшуваної геометричної прогресії і має наступний вигляд:

$$g(nT) = \sum_{m=0}^n h(mT) = \sum_{m=0}^n \alpha^m = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}.$$

Знаючи перехідну характеристику $g(nT)$, також можна визначити реакцію на довільну дію.

1.3.2 Співвідношення вхід-вихід

Співвідношення вхід-вихід відображає взаємозв'язок між вхідним

$x(nT)$ і вихідним $y(nT)$ сигналами ЛДС, тобто реакцію ЛДС на довільну дію.

В часовій області співвідношення вхід-вихід ЛДС описується лінійними рівняннями:

- формулою згортки (згорткою), якщо використовується імпульсна характеристика;
- різницеvim рівнянням, якщо використовуються параметри ЛДС.

1.3.3 Формула згортки

Одержимо рівняння взаємозв'язку між вхідним $x(nT)$ і вихідним $y(nT)$ сигналами для ЛДС, заданою своєю імпульсною характеристикою $h(nT)$.

Скористаємося визначенням ІХ і властивостями ЛДС. Будемо послідовно записувати відповідності, що вказуються стрілкою, між дією і реакцією:

- по визначенню, дії у вигляді цифрового одиничного імпульсу відповідає реакція, називана імпульсною характеристикою,

$$u_0(nT) \Rightarrow h(nT);$$

- на підставі властивості інваріантності в часі для стаціонарних лінійних систем дії, затриманій на час mT , відповідає реакція, затримана на той же час,

$$u_0[(n-m)T] \Rightarrow h[(n-m)T] x(mT);$$

- на підставі властивості однорідності (1.44) лінійних систем, множенню дії на константу $x(mT)$ відповідає реакція, помножена на ту ж константу,

$$u_0[(n-m)T] x(mT) \Rightarrow h[(n-m)T] x(mT);$$

- на підставі властивості адитивності (1.43) лінійних систем реакція на суму дій дорівнює сумі реакцій на кожен із дій

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_0[(n-m)T] x(mT) \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[(n-m)T] x(mT);$$

- для систем, що фізично реалізуються

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_0[(n-m)T] x(mT) \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} h[(n-m)T] x(mT);$$

- ліворуч маємо дію у вигляді (1.5)

$$x(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} u_0 [(n-m)T] x(mT),$$

праворуч — реакцію

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h[(n-m)T] x(mT), \quad (1.46)$$

де $h[(n-m)T]$ - імпульсна характеристика, затримана на m періодів дискретизації.

Лінійне рівняння (1.46) називають формулою згортки (згорткою): реакція $y(nT)$ обчислюється як дискретна згортка дії $x(nT)$ і імпульсної характеристики $h(nT)$.

Виконавши в (1.46) заміну змінних, можна одержати інший варіант запису формули згортки

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT) x[(n-m)T]. \quad (1.47)$$

Для нормованого часу формули (1.46) і (1.47) приймають вигляд відповідно

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m), \quad (1.48)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m). \quad (1.49)$$

При стандартному позначенні операції згортки, формули (1.48) і (1.49) записуються в компактному вигляді

$$y(n) = x(n) \star h(n).$$

Лінійна дискретна система, співвідношення вхід-вихід якої описується у вигляді формули згортки, відповідає умовам фізичної реалізації: при нульових початкових умовах

$$\begin{cases} x(n-m)|_{n-m<0} = 0; \\ h(n-m)|_{n-m<0} = 0, \end{cases}$$

реакція не може виникнути раніш дії. Значення реакції $y(nT)$ у кожен момент часу n залежать від поточного і попередніх значень дії, але не залежать від його наступних значень.

Лінійні рівняння (1.48) і (1.49) розв'язуються методом прямої

підстановки при нульових початкових умовах, тому формула згортки безпосередньо описує алгоритм обчислення реакції по відомій дії й імпульсній характеристиці ЛДС.

Відзначимо, що для обчислення реакції лінійної аналогової системи по формулі згортки у вигляді інтеграла необхідно вибрати метод (алгоритм) чисельного інтегрування, однак усі подібні методи є наближеними і принципово вносять методичну погрішність.

Покажемо тотожність результатів при обчисленні по формулі згортки в двох варіантах її запису (1.48) і (1.49) при нульових початкових умовах. Визначимо реакцію в точці $n = 3$:

- по формулі згортки (1.48) маємо:

$$y(3) = h(3)x(0) + h(2)x(1) + h(1)x(2) + h(0)x(3);$$

- по формулі одержуємо такий самий результат:

$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0).$$

Вибір варіанта формули визначається зручністю застосування в конкретному випадку.

Для прикладу обчислити реакцію ЛДС по формулі згортки при нульових початкових умовах. Імпульсна характеристика і дія задані графічно на (рис. 1.11). Потрібно визначити 8 відліків реакції.

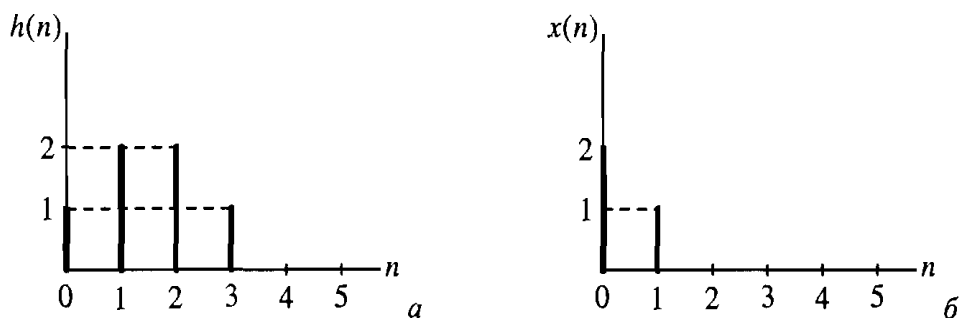


Рис. 1.11. Імпульсна характеристика (а) і дію (б)

Рішення. Обчислення реакції приведені в табл. 1.1, а графік отриманої реакції — на (рис. 1.12).

Механізм обчислення відліків реакції $y(n), n = 0, 1, 2, \dots$ по формулі згортки можна представити як обчислення сум локальних добутків двох послідовностей — імпульсної характеристики і дії.

Таблиця 1.1 - Обчислення реакції по формулі згортки

n	Реакція
0	$y(3) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) + h(2)x(-2) + \dots = 1 \cdot 2 = 2$
1	$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) + h(2)x(-1) + \dots =$ $= h(0)x(1) + h(1)x(0) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$
2	$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) + \dots =$ $= h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$
3	$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) + h(4)x(-1) + \dots =$ $= h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$
4	$y(4) = h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1) + h(4)x(0) + h(5)x(-1) + \dots =$ $= h(0)x(4) + h(1)x(3) + h(2)x(2) + h(3)x(1) + h(4)x(0) =$ $= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$
5	$y(5) = h(0)x(5) + h(1)x(4) + h(2)x(3) + h(3)x(2) + h(4)x(1) + h(5)x(0) +$ $+ h(6)x(-1) + \dots = h(0)x(5) + h(1)x(4) + h(2)x(3) + h(3)x(2) + h(4)x(1)$ $+ h(4)x(1) + h(5)x(0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$
6	$y(6) = 0$
7	$y(7) = 0$

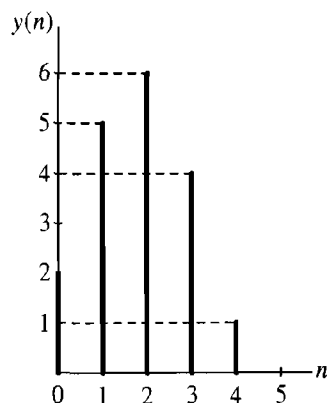


Рисунок 1.12 - Реакція

При цьому одна з послідовностей фіксована, а інша дзеркально відображається щодо осі ординат і потім ковзає ліворуч праворуч по осі часу. При використанні формули згортки (1.50) фіксованої буде імпульсна характеристика, а ковзним — дія.

Механізм обчислення згортки (1.50) приведений на (рис.1.13) Фіксована імпульсна характеристика показана на (рис.1.13, а), дія - на (рис.1.13,б), дзеркально відображена дія — на (рис.1.13,в), а результат його послідовного ковзання — на (рис.1.13,г-з).

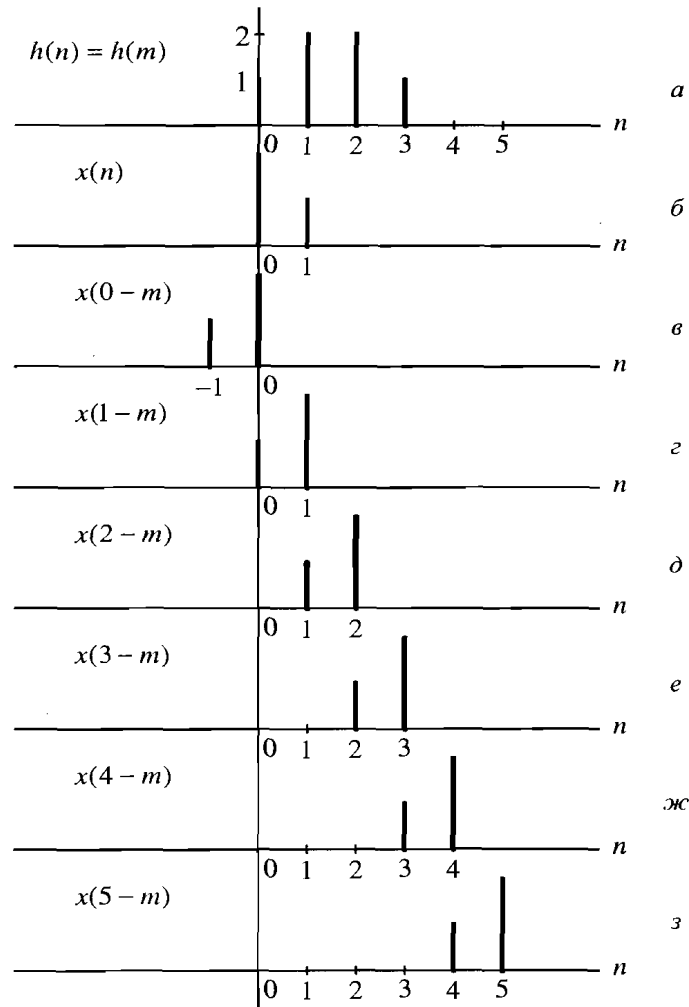


Рисунок 1.13 - Обчислення реакції по формулі згортки

Перший відлік реакції $y(0)$ обчислюється як сума локальних добутків послідовностей на (рис.1.13,а,в), другий відлік реакції $y(1)$ - як сума локальних добутків послідовностей на (рис.1.13,а,г), і т.д.

Очевидно, що обчислення варто припинити, як тільки всі локальні добутки виявляться рівними нулю. Це відбудеться, коли послідовності “розійдуться”, тобто в двох множених послідовностях не буде жодного збігу відліків ні в один з моментів часу n . У розглянутому прикладі послідовності “розходяться” при зрушенні ковзної дії по осі часу на $m=5$ (рис.1.13,з).

Розглянутий механізм обчислення реакції по формулі згортки дозволяє зробити наступні висновки:

- якщо тривалість дії і імпульсної характеристики нескінченна, то тривалість реакції також нескінченна;
- якщо тривалості дії $x(nT)$ і імпульсної характеристики $h(nT)$ скінченні і дорівнюють NT і MT відповідно, то тривалість реакції $y(nT)$ також скінченна і дорівнює LT , де

$$L = N + M - 1. \quad (1.50)$$

При $n \geq L$ послідовності (імпульсна характеристика і дзеркально відображена ковзна дія) “розходяться” і $y(nT) = 0$.

Якщо дія і імпульсна характеристика скінченні, формули (1.48) і (1.49) здобувають вигляд:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(n-m)x(m); \quad (1.51)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x(n-m). \quad (1.52)$$

Маємо довжину дії $N=1$ і довжину імпульсної характеристики $M=4$, тому довжина L реакції дорівнює (див. рис. 1.12)

$$L=4+2-1=5.$$

Операцію дискретної згортки у формулах (1.48) і (1.49) називають лінійною (аперіодичною) згорткою, на відміну від іншого її різновиду - кругової (періодичної) згортки.

1.3.4 Різницеве рівняння

Поряд з формулою згортки взаємозв'язок між дією $x(nT)$ і реакцією $y(nT)$ - співвідношення вхід-вихід - може описуватися лінійним різницеvim рівнянням (РР)

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[(n-k)T], \quad (1.53)$$

де: b_i, a_k коефіцієнти (дійсні константи); $x(nT)$, $y(nT)$ - дія і реакція (дійсні або комплексні); i, k - значення затримок для дії і реакції відповідно; N, M - константи; $x[(n-i)T], y[(n-k)T]$ дія і реакція, затримані на i і k періодів дискретизації відповідно. Коефіцієнти b_i, a_k називають внутрішніми параметрами (параметрами) ЛДС.

Для нормованого часу різницеве рівняння приймає вигляд

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k). \quad (1.54)$$

Лінійна дискретна система, співвідношення вхід-вихід якої описується у вигляді різницевого рівняння (1.54), відповідає умовам

фізичної реалізації: при нульових початкових умовах (1.45) реакція не може виникнути раніш дії. Значення реакції $y(nT)$ у кожен момент часу n залежать від поточного і попередніх значень дії, але не залежать від її наступних значень.

Різницеве рівняння має пряму аналогію з лінійним диференціальним рівнянням, що описує співвідношення вхід/вихід аналогової лінійної системи,

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} - \sum_{k=1}^{M-1} b_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}, \quad (1.55)$$

де: b_i, a_k - коефіцієнти (дійсні константи), обумовлені значеннями резисторів, ємностей і індуктивностей; $x(t)$, $y(t)$ - аналогові дія і реакція (струму або напруги).

Перехід від диференціальних рівнянь до різницевого обумовлений розходженням функцій, що описують вхідний і вихідний сигнали аналогових і дискретних лінійних систем. Аналогові сигнали описуються безупинними, а дискретні — решітковими функціями часу, тому обчислення похідних у (1.55) розв'язується обчисленням розділених різностей у (1.54).

Диференціальне рівняння (1.55) зважується за допомогою одного з методів (алгоритмів) чисельного інтегрування. Вибір методу — досить складна проблема, однак кожних з цих методів є наближенням, тобто принципово вносить методичну похибку. При невдало обраному методі похибка обчислення функції часу $y(t)$ може виявитися наростаючою, що приведе до непередбаченого результату.

Різницеве рівняння (1.54) розв'язується методом прямої підстановки при нульових початкових умовах, що не вносить методичної похибки, тому воно безпосередньо описує алгоритм обчислення реакції по відомій дії і параметрах ЛДС.

Наприклад розв'язати різницеве рівняння:

$$y(n) = x(n) - 0.5y(n-1)$$

методом прямої підстановки при заданій дії:

$$x(n) = 0.1^n$$

і нульових початкових умовах. Обчислити 5 відліків реакції.

Рішення. Обчислення реакції приведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2 - Обчислення реакції методом прямої підстановки

n	Дію	Реакція
0	$x(n) = 1$	$y(0) = x(0) - 0,5y(-1) = 1 - 0,5 \cdot 0 = 1$
1	$x(1) = 0,1$	$y(1) = x(1) - 0,5y(0) = 0,1 - 0,5 \cdot 1 = -0,4$
2	$x(2) = 0,01$	$y(2) = x(2) - 0,5y(1) = 0,01 - 0,5 \cdot (-0,4) = 0,21$
3	$x(3) = 0,001$	$y(3) = x(3) - 0,5y(2) = 0,001 - 0,5 \cdot 0,21 = -0,104$
4	$x(4) = 0,0001$	$y(4) = x(4) - 0,5y(3) = 0,0001 - 0,5 \cdot (-0,104) = 0,0521$
...

1.3.5 Рекурсивні і не рекурсивні лінійні дискретні системи

Лінійна дискретна система називається рекурсивною, якщо хоча б один з коефіцієнтів a_k , $k = 1, 2, \dots, M - 1$ різницевого рівняння (1.54) не дорівнює нулю.

Порядок рекурсивної ЛДС дорівнює порядку РР (1.54), тобто

$$\max \{ (M - 1), (N - 1) \}. \quad (1.56)$$

Згідно (1.54), реакція $y(n)$ рекурсивної ЛДС у кожен момент часу n визначається:

- поточним відліком дії $x(n)$;
- передісторією дії $x(n - i)$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$;
- передісторією реакції $y(n - k)$, $k = 1, 2, \dots, M - 1$.

Приведемо приклади різницевих рівнянь найпростіших рекурсивних ЛДС:

- першого порядку

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n - 1) - a_1 y(n - 1); \quad (1.57)$$

- другого порядку

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n - 1) + b_2 x(n - 2) - a_1 y(n - 1) - a_2 y(n - 2). \quad (1.58)$$

Лінійна дискретна система називається нерекурсивною, якщо всі коефіцієнти a_k різницевого рівняння (1.54) дорівнюють нулю

$$a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (1.59)$$

Для нерекурсивної ЛДС різницеві рівняння (1.53) і (1.54) приймають вигляд:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i [x(n-i)T]; \quad (1.60)$$

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i). \quad (1.61)$$

Порядок нерекурсивної ЛДС дорівнює порядку РР (1.61), тобто $N-1$.

Згідно (1.61), реакція $y(n)$ нерекурсивної ЛДС у кожен момент часу n визначається:

- поточним відліком дії $x(n)$;
- передісторією дії $x(n-i)$, $i=1, 2, \dots, N-1$.

Приведемо приклад різницевого рівняння найпростішої нерекурсивної ЛДС другого порядку:

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2). \quad (1.62)$$

1.3.6 Системи зі скінченною і нескінченною імпульсною характеристикою

Оцінимо особливості імпульсних характеристик рекурсивних і не рекурсивних ЛДС, описуваних різницевами рівняннями (1.54) і (1.61) відповідно.

Розглянемо процедуру розрахунку ІХ безпосередньо по РР і порівняємо результати на прикладах найпростіших рекурсивної і нерекурсивної систем.

Наприклад, обчислити імпульсну характеристику нерекурсивної ЛДС другого порядку, співвідношення вхід-вихід якої описується РР (1.62)

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2).$$

Рішення. Відповідно до визначення, ІХ - це реакція на цифровий одиничний імпульс (див. рис. 1.9), тому, виконавши заміну

$$\begin{cases} x(n) \Rightarrow u_0(n); \\ y(n) \Rightarrow h(n), \end{cases} \quad (1.63)$$

перепишемо РР у вигляді

$$y(n) = b_0 u_0(n) + b_1 u_0(n-1) + b_2 u_0(n-2)$$

і вирішимо його методом прямої підстановки при нульових початкових

умовах:

$$h(n) = b_0 u_0(0) + b_1 u_0(-1) + b_2 u_0(-2) = b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = b_0;$$

$$h(1) = b_0 u_0(1) + b_1 u_0(0) + b_2 u_0(-1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = b_1;$$

$$h(2) = b_0 u_0(2) + b_1 u_0(1) + b_2 u_0(0) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = b_2;$$

$$h(3) = b_0 u_0(3) + b_1 u_0(2) + b_2 u_0(1) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 = 0;$$

$$h(n) = 0 \text{ при } n > 1.$$

Поширюючи отримані результати на не рекурсивну ЛДС довільного порядку, приходимо до наступних висновків:

- імпульсна характеристика нерекурсивної ЛДС має скінченну тривалість;

- значення відліків $h(n)$ дорівнюють коефіцієнтам різницевого рівняння

$$h(n) = b_i, n = i = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (1.64)$$

Тому не рекурсивні ЛДС називають системами з скінченною імпульсною характеристикою (СІХ-системами).

Наприклад обчислити імпульсну характеристику рекурсивної ЛДС першого порядку, співвідношення вхід-вихід якої описується РР (1.57) при $b_1 = 0$

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n - 1).$$

Рішення. Виконаємо заміну перепишемо РР у вигляді

$$h(n) = b_0 u_0(n) - a_1 h(n - 1)$$

і вирішимо його методом прямої підстановки при нульових початкових умовах:

$$h(0) = b_0 u_0(0) - a_1 h(-1) = b_0;$$

$$h(1) = b_0 u_0(1) - a_1 h(0) = -a_1 b_0;$$

$$h(2) = b_0 u_0(2) - a_1 h(1) = -a_1 (-a_1 b_0) = a_1^2 b_0;$$

$$h(3) = b_0 u_0(3) - a_1 h(2) = -a_1 (a_1^2 b_0) = -a_1^3 b_0;$$

Обчислення ІХ можна продовжувати нескінченно по формулі

$$h(n) = - (1)^n a_1^n b_0, n = 4, 5, \dots$$

Поширюючи отримані результати на рекурсивну ЛДС довільного порядку, дійдемо висновку, що імпульсна характеристика рекурсивної ЛДС має нескінченну тривалість.

Тому рекурсивні ЛДС називають системами з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ-системами).

1.3.7 Властивості лінійних дискретних систем

Раніше було відзначено, що всі стаціонарні лінійні системи (аналогові і дискретні) мають загальні властивості:

- адитивності;
- однорідності;
- інваріантності в часі.

Розглянемо ще дві найважливіших властивості лінійних дискретних систем:

- властивість запам'ятовування;
- стійкість.

1.3.8 Властивість запам'ятовування лінійних дискретних систем

Властивість запам'ятовування системи має на увазі її здатність “пам'ятати передісторію” (попередній відлік дії) при обчисленні реакції в поточний момент часу. Тривалість передісторії (кількість попередніх відліків дії) визначає тривалість запам'ятовування.

Розглянемо властивість пам'яті нерекурсивних і рекурсивних ЛДС.

Відповідно до різницевого рівняння нерекурсивної ЛДС (1.61), при обчисленні реакції $y(n)$ у поточний n -й момент часу система “пам'ятає” $(N - 1)$ попередніх відліків дії. Отже, не рекурсивна ЛДС має властивість запам'ятовування, її тривалість скінченної і дорівнює $(N - 1)$.

Відповідно до різницевого рівняння рекурсивної ЛДС (1.54), кожен поточний відлік реакції $y(n)$ можна виразити через попередні відліки дії:

$$\begin{aligned} y(0) &= b_0 x(0); \\ y(1) &= b_0 x(1) + b_1 x(0) - a_1 y(0) = b_0 x(1) + b_1 x(0) - a_1 [b_0 x(0)]; \end{aligned}$$

$$y(2) = b_0x(2) + b_1x(1) + b_2x(0) - a_1y(1) - a_2y(0) = b_0x(2) + b_1x(1) + b_2x(0) - a_1[b_0x(1) + b_1x(0) - a_1b_0x(0)] - a_2[b_0x(0)].$$

У такий спосіб:

- відлік реакції $y(n)$ залежить від поточного відліку дії $x(0)$;
- відлік $y(1)$ залежить від поточного і попереднього відліку дії $x(1-i), i=0,1$;
- відлік $y(2)$ залежить від поточного і двох попередніх відліків дії $x(2-i), i=0,1,2$.

Аналогічним чином, нескладно показати, що відлік $y(3)$ залежить від відліку дії $x(3-i), i=0,1,2,3$ і т.д.

Отже, при обчисленні відліку реакції в поточний i -й момент часу система “пам’ятає” усю передісторію дії, а виходить, рекурсивна ЛДС має властивість запам’ятовування і її тривалість у загальному випадку нескінченна. Це властивість запам’ятовування рекурсивних ЛДС порозумівається наявністю зворотного зв’язку (1.54), завдяки чому будь-який ненульовий відлік дії циркулює в системі нескінченно. З часом він загасає, але є присутнім, принаймні, теоретично.

1.3.9 Стійкість лінійних дискретних систем

ЛДС називається стійкою, якщо при обмеженій дії

$$\max_n |x(n)| \leq R_x,$$

де R_x - будь-яке як завгодно велике додатне число, що не дорівнює нескінченності, і довільних, але обмежених початкових умовах реакція буде також обмеженою

$$\max_n |y(n)| \leq R_y,$$

де R_y - будь-яке як завгодно велике додатне число, не рівне нескінченності.

Існують дві критерії стійкості ЛДС. Один з них дозволяє оцінити стійкість ЛДС по її характеристиці в часовій області, іншої— по зображенню цієї характеристики в z -області.

1.3.10 Оцінка стійкості по імпульсній характеристиці: критерій стійкості

У даному розділі, який присвячений опису ЛДС у часовій області, розглянемо критерій, що дозволяє оцінити стійкість ЛДС по її імпульсній характеристиці.

Якщо жоден з коефіцієнтів розкладання імпульсної характеристики у вигляді

$$h(n) = A_0 u_0(n) + \sum_{k=1}^{M-1} A_k \alpha_k^n$$

не дорівнює нулю:

$$A_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, K,$$

критерій стійкості формулюється в такий спосіб: для того щоб лінійна дискретна система була стійка, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова абсолютної збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (1.65)$$

Доказ. При відомій імпульсній характеристиці $h(n)$ реакція може бути обчислена по формулі згортки (1.49)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m).$$

Для модуля реакції справедливі співвідношення:

$$|y(n)| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)x(n-m)| = \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| |x(n-m)|.$$

Оцінимо максимальне значення $|y(n)|$ підставивши замість відліків дії $|x(n-m)|$ їх максимально припустиму величину R_x :

$$\max_n |y(n)| \leq R_x \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)|. \quad (1.66)$$

Якщо реакція обмежена значенням R_y :

$$\max_n |y(n)| \leq R_x \sum_{m=0}^{\infty} |h(m)| R_y,$$

необхідно, щоб виконувалася умова (1.65).

З іншого боку, для того щоб реакція в (1.66) була обмеженою, досить виконання умови (1.65), що і було потрібно довести.

Якщо хоча б один з коефіцієнтів розкладання A_k дорівнює нулю, можлива ситуація, коли умова (1.65) виконується, а ЛДС — не стійка. Приклад подібної ЛДС [2].

Критерій (1.65) дозволяє стверджувати, що нерекурсивні ЛДС (СІХ-системи) принципово стійкі, оскільки їхня імпульсна характеристика скінченна.

Перш ніж робити висновки про стійкість рекурсивних ЛДС, розглянемо простий приклад.

Наприклад, визначити, чи стійка рекурсивна ЛДС, імпульсна характеристика якої має вигляд дискретної експоненти

$$h(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0; \\ 0, n < 0, \end{cases}$$

Рішення. Підставивши у ІХ одержимо ряд типу

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(m)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n. \quad (1.67)$$

при $q = |a|$ і область його збіжності $|a| < 1$.

У цій області імпульсна характеристика має вигляд загасаючої експоненти (рис. 1.6), а ЛДС, відповідно до критерію (1.65), є стійкою.

Поза областю збіжності, при $|a| > 1$, ряд (1.67) виявляється розбіжним $|a| \geq 1$ а ЛДС, відповідно до критерію (1.65), не стійкою.

Узагальнюючи даний результат, можна зробити наступні висновки:

- рекурсивні ЛДС (НІХ-системи) вимагають перевірки на стійкість;
- імпульсна характеристика стійкої рекурсивної ЛДС має характер загасаючої функції часу.

Контрольні запитання:

1. Які необхідні визначення використовуються для опису ЛДС?
2. Що таке імпульсна характеристика ЛДС?
3. Що таке згортка для ЛДС?
4. Які висновки впливають з механізму обчислення реакції ЛДС по формулі згортки?
5. Як взаємозв'язок між дією і реакцією ЛДС описується різницеvim рівнянням?
6. Що таке рекурсивні і не рекурсивні ЛДС?

7. Що таке ЛДС з скінченною і без скінченною імпульсною характеристикою?
8. Що таке властивості запам'ятовування ЛДС?
9. Що таке стійкість ЛДС?
10. Що таке критерій стійкості ЛДС при оцінюванні її за імпульсною характеристикою?

1.4 Опис лінійних дискретних систем у z -області

Перед цим розглядався опис ЛДС у часовій області: імпульсна характеристика і співвідношення вхід-вихід. У цій лекції вивчається їхнє відображення в z -області.

Опис ЛДС у z -області дозволяє:

- увести фундаментальне для теорії лінійних систем поняття передатної функції;
- перейти від різницевого рівняння до алгебраїчних;
- спростити аналіз стійкості;
- забезпечити автоматичний перехід до частотних характеристик і т.д.

1.4.1 Передатна функція. Співвідношення вхід-вихід

У z -області основною характеристикою ЛДС є z -зображення імпульсної характеристики $h(n)$, що визначається за допомогою Z -перетворення

$$H(z) = Z[h(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (1.68)$$

і називається передатною функцією (ПФ). Це математичне визначення ПФ.

По відомому z -зображенню імпульсна характеристика $h(n)$ знаходиться за допомогою зворотного Z -перетворення

$$h(n) = Z^{-n}[H(z)]. \quad (1.69)$$

Співвідношення вхід-вихід ЛДС у часовій області описується за допомогою згортки або різницевого рівняння. Розглянемо їхнє відображення в z -області по черзі.

Формула згортки

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)x(m); \\ \sum_{m=0}^{\infty} x(n-m)h(m) \end{cases}$$

у z -області, відповідно до теореми про згортку (при нульових початкових умовах) відповідає рівняння

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad (1.70)$$

де $X(z)$ і $Y(z)$ - z -зображення дії і реакції відповідно. Це дозволяє представити передатну функцію як відношення

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (1.71)$$

і визначити її подібно передатної функції лінійних аналогових систем.

Передатною функцією $H(z)$ лінійної дискретної системи називається відношення z -зображення реакції до z -зображення дії при нульових початкових умовах.

Дане визначення не суперечить математичному: оскільки імпульсна характеристика $h(n)$ являє собою реакцію на дію у вигляді цифрового одиничного імпульсу $u_0(n)$, то, підставивши z -зображення даних сигналів у $H(z)$ (1.71) і з огляду на, що $Z[u_0(n)] = 1$, одержимо $H(z)$ (1.68):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Z[h(n)]}{Z[u_0(n)]} = Z[h(n)].$$

Різницевому рівнянню

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k)$$

у z -області при нульових початкових умовах відповідає рівняння, що легко можна одержати, виконавши Z -перетворення лівої і правої частин РР,

$$Z[y(n)] = Z\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k) \right\}.$$

Скористаємося властивістю лінійності Z -перетворення і теоремою

про затримку:

$$Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} - Y(z) \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k},$$

приведемо подібні члени й одержимо співвідношення вхід-вихід у z -області у вигляді алгебраїчного рівняння:

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z). \quad (1.72)$$

Поділивши обидві частини (1.73) на $X(z)$, одержимо, відповідно до визначення (1.72), передатну функцію, що не залежить ні від дії, ні від реакції і виражену явно через внутрішні параметри ЛДС (коефіцієнти різницевого рівняння),

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}. \quad (1.73)$$

ПФ загального вигляду (1.73) являє собою дрібно-раціональну функцію, чисельник і знаменник якої є багаточленами відносно z^{-1} порядків $(N - 1)$ і $(M - 1)$ з дійсними коефіцієнтами b_i і a_k відповідно.

Порядок передатної функції (1.73) дорівнює

$$\max \{ (M - 1), (N - 1) \}.$$

Тут і далі будемо думати, що порядок багаточлена чисельника не перевершує порядку багаточлена знаменника

$$(N - 1) \leq (M - 1).$$

Як будь-яка дрібно-раціональна функція, ПФ (1.73) характеризується своїми особливими точками (полюсами) і нулями.

Нулями називають значення z , при яких ПФ (1.73) дорівнює нулю.

Особливими точками (полюсами) називають значення z , при яких знаменник ПФ (1.73) дорівнює нулю.

Особливі точки і нулі ПФ лінійних дискретних систем знаходяться аналогічно тому, як це робиться для ПФ лінійних аналогових кіл. Попередньо необхідно записати $H(z)$ (1.73) як дрібно-раціональну

функцію щодо позитивних ступенів z , для чого чисельник і знаменник $H(z)$ варто помножити на z^{M-1} :

$$H(z) = \frac{z^{M+1} \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{z^{M-1} \left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k} \right)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{(M-1)-i}}{z^{M-1} 1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}}.$$

Далі доцільно виділити два випадки:

1. Передатна функція $H(z)$ являє собою неправильну дрібно-раціональну функцію: порядок багаточлена чисельника дорівнює порядку багаточлена знаменника

$$(N - 1) = (M - 1).$$

Тоді в результаті множення чисельника і знаменника $H(z)$ (1.73) на z^{M-1} маємо:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{(M-1)-i}}{z^{M-1} 1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k}}. \quad (1.74)$$

Нулями даної передатної функції є корені рівняння чисельника (корені чисельника):

$$\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{(M-1)-i} = 0, \quad (1.75)$$

а полюсами - корені рівняння знаменника (корені знаменника):

$$z^{M-1} 1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{(M-1)-k} = 0. \quad (1.76)$$

Якщо серед полюсів або нулів зустрічаються однакові, їх називають кратними.

2. Передатна функція $H(z)$ являє собою правильну дрібно-раціональну функцію: порядок багаточлена чисельника $(L - 1)$ менше порядку багаточлена знаменника $(M - 1)$

$$(L - 1) < (M - 1),$$

де $(L - 1)$ може мати значення

$$(L - 1) = 0, 1, \dots, (M - 2).$$

Полюси передатної функції $H(z)$ визначаються так само, як у першому випадку. Що стосується нулів, то крім $(L - 1)$ коренів чисельника додаються нулі $z = \infty$, кратність яких дорівнює різниці порядків багаточленів знаменника і чисельника

$$(M - 1) - (L - 1) = M - L.$$

Як правило, ці нулі не вважаються інформативними, тому часто їх опускають.

Наприклад, маємо ПФ другого порядку

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Після множення чисельника і знаменника на $z^{M-1} = z^2$ одержимо ПФ

$$H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2},$$

що представляє собою, правильний дріб, у якій порядок чисельника $(L - 1) = 1$ на одиницю менше порядку знаменника $(M - 1) = 2$:

$$(M - 1) - (L - 1) = M - L = 1.$$

Отже, така ПФ має два нулі: один — корінь чисельника

$$b_1 z + b_2 = 0 \Rightarrow z_{01} = -\frac{b_2}{b_1}$$

і другий — неінформативний $z_{02} = \infty$.

Нулі і полюси передатної функції зручно зображувати у вигляді точок на комплексній z -площині. Положення точок визначається їхніми координатами, найчастіше полярними. Нулі зображуються кружками ($^{\circ}$), а полюси - зірочками (*). Сукупність нулів ($^{\circ}$) і полюсів (*) на z -площині називають картою нулів і полюсів. Надалі стане ясно, що така карта - одна з найважливіших графічних характеристик ЛДС[3].

1.4.2 Взаємозв'язок між передатною функцією і різницеvim рівнянням

З зіставлення передатної функції загального вигляду (1.73) і різницевого рівняння зрозумілий їхній взаємозв'язок при нульових початкових умовах:

- чисельник ПФ зв'язаний з відліком дії $b_i x(n-i)$ РР;
- затримка відліку $x(n-i)$ відображається в ПФ ступенем z^{-i} ;
- коефіцієнт b_i зберігається.

Символічно це можна записати в такий спосіб:

$$b_i x(n-i) \Rightarrow b_i z^{-i};$$

- знаменник ПФ зв'язаний з відліками реакції $y(n)$ і $a_k y(n-k)$ РР;
- вільний член знаменника завжди дорівнює $1(a_0=1)$, у РР він відповідає реакції $y(n)$;
- затримка відліку $y(n-k)$ відображається в ПФ ступенем z^{-k} ;
- у коефіцієнта a_k змінюється знак. Символічно це можна записати в такий спосіб:

$$a_k y(n-k) \Leftrightarrow -a_k z^{-k}.$$

Найпростіші ЛДС, описувані передатними функціями 1-го і 2-го порядків, називають ланками 1-го і 2-го порядків.

Розглянемо різновиди передатних функцій, обумовлені типом ПДВ.

1. Рекурсивні ЛДС описуються ПФ загального вигляду (1.73) і можуть мати будь-яке математичне представлення.

Серед ПФ (1.73) виділяють ПФ полюсного вигляду, у якої чисельник - багаточлен нульового ступеня

$$H(z) = \frac{b_0}{\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-1k}}. \quad (1.77)$$

ПФ (1.77) має $(M-1)$ полюсів і $(M-1)$ кратних нулів, рівних 0. Вона може мати математичне представлення:

- у вигляді добутку найпростіших множників

$$H(z) = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^{M-1} (1 - \alpha_k z^{-1})}; \quad (1.78)$$

- у вигляді добутку множників другого порядку з дійсними коефіцієнтами

$$H(z) = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} (1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2})}; \quad (1.79)$$

- у вигляді сум простих дробів (1.86) і дробів другого порядку (1.77) з дійсними коефіцієнтами.

Ланку називають **базовою**, якщо чисельник його передатної функції $H(z)$ дорівнює 1.

2. **Нерекурсивні** ЛДС описуються ПФ, що може розглядатися як окремий випадок $H(z)$ загального вигляду (1.73) при $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, M - 1$. При цьому знаменник $H(z)$ виявляється рівним одиниці, і ПФ має вигляд раціональної функції

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N-1} b_i z^{-i} \quad (1.80)$$

чи, з урахуванням (1.73),

$$H(z) = \sum_{n=1}^{N-1} h(n) z^{-n}, \quad (1.81)$$

передатна функція (1.81) може бути представлена:

- у вигляді добутку найпростіших множників

$$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^{N-1} H_i(z) = b_0 \prod_{i=1}^{N-1} (1 - \beta_i z^{-1}); \quad (1.82)$$

- у вигляді добутку множників другого порядку з дійсними коефіцієнтами

$$H(z) = \prod_{i=1}^{\frac{M-1}{2}} H_i(z) = b_0 \prod_{i=1}^{\frac{M-1}{2}} (b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}), \quad (1.83)$$

де $(N - 1)$ - парне число.

Контрольні запитання:

1. Що таке співвідношення вхід-вихід ЛДС в z -області?

2. Що таке порядок, нулі і полюси передатної функції ЛДС в z -області?
3. Який зв'язок існує між передатною функцією і різницеvim рівнянням ЛДС в z -області?
4. Які різновиди передатної функції ЛДС в z -області можливі?

1.5 Опис лінійних дискретних систем у частотній області

Раніше розглядався опис ЛДС у часовій області: імпульсна характеристика і співвідношення вхід-вихід, приводиться їхнє відображення в частотній області.

Опис ЛДС у частотній області дозволяє:

- увести фундаментальне для теорії лінійних систем поняття частотної характеристики. При проектуванні більшості систем ЦОС саме до частотних характеристик пред'являються і притримуються вимоги;
- визначати реакцію ЛДС у сталому режимі не тільки на гармонійну дію, але і на будь-яку дію, яку можна представити як лінійну комбінацію гармонійних дій [4].

1.5.1 Частотна характеристика

У частотній області основною характеристикою ЛДС є фур'є-зображення імпульсної характеристики $h(nT)$, що визначається за допомогою перетворення Фур'є

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega T n} \quad (1.84)$$

чи для нормованих часу і частоти

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\hat{\omega} n} \quad (1.85)$$

і називається комплексною частотною характеристикою (КЧХ) чи частотною характеристикою (ЧХ). Це математичне визначення ЧХ.

По відомому фур'є-зображенню $H(e^{j\omega T})$ імпульсна характеристика $h(nT)$ знаходиться за допомогою зворотного перетворення Фур'є

$$h(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} H(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega. \quad (1.86)$$

З теорії лінійних аналогових систем відомо, що в сталому режимі гармонійна дія викликає гармонійну реакцію тієї ж частоти, але (у загальному випадку) іншої амплітуди і початкової фази.

Розглянемо реакцію ЛДС на дискретний комплексний гармонійний дію

$$x(n) = C_x e^{j\hat{\omega}n} = C_x e^{j\varphi_x(\hat{\omega})}, -\infty < n < \infty, \quad (1.87)$$

с амплітудою і фазою відповідно

$$C_x = \text{const};$$

$$\varphi_x(\hat{\omega}) = \hat{\omega}n.$$

Для обчислення реакції скористаємося формулою згортки

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)C_x e^{j\hat{\omega}(n-m)} =$$

$$= C_x e^{j\hat{\omega}n} y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e^{j\hat{\omega}m} = x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)e^{j\hat{\omega}m}, -\infty < n < \infty, \quad (1.88)$$

звідси, з урахуванням визначення ЧХ,

$$y(n) = x(n)H(e^{j\hat{\omega}}). \quad (1.89)$$

Комплексну функцію $H(e^{j\hat{\omega}})$ можна виразити через її модуль і аргумент:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = |H(e^{j\hat{\omega}})| e^{j \arg \left[H(e^{j\hat{\omega}}) \right]} = A(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})}. \quad (1.90)$$

Модуль частотної характеристики $H(e^{j\hat{\omega}})$ називають амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ):

$$A(\hat{\omega}) = |H(e^{j\hat{\omega}})|, \quad (1.91)$$

а аргумент – фазочастотною характеристикою (ФЧХ) ЛДС:

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arg \left[H(e^{j\hat{\omega}}) \right]. \quad (1.92)$$

Перепишемо вираження для реакції,

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x(n)H(e^{j\hat{\omega}}) = C_x e^{j\varphi_x(\hat{\omega})} A(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})} = \\
 &= C_x A(\hat{\omega}) e^{j[\varphi_x(\hat{\omega}) + \varphi(\hat{\omega})]} = C_y e^{j\varphi_y(\hat{\omega})},
 \end{aligned}
 \tag{1.93}$$

з чого випливає, що реакція на комплексний гармонійний сигнал є комплексний гармонійний сигнал тієї ж частоти, що і дія, але з частотно-залежними амплітудою

$$C_y = C_x A(\hat{\omega})$$

і фазою

$$\varphi_y(\hat{\omega}) = \varphi_x(\hat{\omega}) + \varphi(\hat{\omega}).$$

Частотну характеристику можна представити як відношення гармонійних сигналів - дії і реакції

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \left. \frac{y(n)}{x(n)} \right|_{x(n)=C_x e^{j\hat{\omega}n}} = \frac{C_x}{C_y} e^{j[\varphi_y(\hat{\omega}) - \varphi_x(\hat{\omega})]}$$

і визначити в такий спосіб.

Частотною характеристикою $H(e^{j\hat{\omega}})$ лінійної дискретної системи називається частотна залежність відношення реакції до дискретної гармонійної дії в сталому режимі.

Істотно, що для лінійних систем (аналогових і дискретних) відношення двох функцій часу - гармонійних реакції і дії - дає функцію, що не залежить від часу.

Пояснимо, чому введено обмеження “у сталому режимі”. Теоретично, гармонійні сигнали - дія і реакція - існують в області нормованого часу $-\infty < n < \infty$. Однак на практиці мають справи з умовно гармонійною дією в області $0 \leq n < \infty$, де час $n=0$ відповідає початку дії. Як відомо, протягом деякого часу $0 \leq n < n_0$ після виникнення дії ЛДС працює в режимі перехідних коливань, коли реакція не є періодичним сигналом. Через деякий час n_0 процес встановлюється і реакція стає періодичним сигналом: $y(n) = y(n+N)$, де N - число відліків на періоді. Тому в даному випадку має сенс говорити про реакцію як про гармонійний сигнал у сталому режимі. При розрахунку реакції по формулі згортки (1.83) у діапазоні $0 \leq n < n_0$ на виході ЛДС будемо мати значення реакції в режимі перехідних коливань - неперіодичний сигнал, а починаючи з моменту n_0 - значення реакції в сталому режимі - гармонійну дію. Приклад

розрахунку реакції на гармонійний дію по формулі згортки в програмному середовищі MATLAB, де приводяться графіки дії і реакції, з яких видно, що через деякий час після виникнення дії реакцію можна вважати гармонійним сигналом у сталому режимі.

Зіставивши вирази для реакції (1.88) і дії (1.82), дамо визначення АЧХ і ФЧХ, подібні тим, що існують для лінійних аналогових систем.

Амплітудно-частотною характеристикою $A(\hat{\omega})$ лінійної дискретної системи називається частотна залежність відношення амплітуди реакції до амплітуди дискретної гармонійної дії в сталому режимі:

$$\frac{C_x}{C_y} = \frac{C_x A(\hat{\omega})}{C_x} = A(\hat{\omega}).$$

Фазочастотною характеристикою $\varphi(\hat{\omega})$ лінійної дискретної системи називається частотна залежність різниці фаз реакції і дискретного гармонійного дії в сталому режимі:

$$\varphi_y(\hat{\omega}) = \varphi_x(\hat{\omega}) = [\varphi_x(\hat{\omega}) + \varphi(\hat{\omega})] - \varphi_x(\hat{\omega}) = \varphi(\hat{\omega}).$$

1.5.2 Зв'язок частотної характеристики з передатною функцією

Порівняємо передатну функцію з частотною характеристикою (1.79). Очевидний їхній взаємозв'язок: ЧХ $H(e^{j\hat{\omega}})$ збігається з ПФ $H(z)$, якщо область значень змінної z на комплексній z -площині обмежена точками на одиничній окружності $e^{j\hat{\omega}}$:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}. \quad (1.94)$$

Це дозволяє при відомій передатній функції шляхом $z = e^{j\hat{\omega}}$ автоматично одержати частотну характеристику у вигляді

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-ji\hat{\omega}}}{\sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\hat{\omega}}}. \quad (1.95)$$

1.5.3 Співвідношення вхід-вихід

Взаємозв'язок (1.94) дозволяє також від відомих співвідношень вхід-

вихід у z -області:

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} X(z)$$

автоматично перейти до відповідного співвідношенням у частотній області:

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = H(e^{j\hat{\omega}})X(e^{j\hat{\omega}}), \quad (1.96)$$

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{j\hat{\omega}i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{j\hat{\omega}k}} X(e^{j\hat{\omega}}),$$

де

$$X(e^{j\hat{\omega}}) = X(e^{j\omega T}),$$

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = Y(e^{j\omega T})$$

являють собою фур'є-зображення дії і реакції відповідно.

На підставі (1.96) частотну характеристику ЛДС можна визначити як відношення фур'є-зображень реакції і дії при нульових початкових умовах

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{Y(e^{j\hat{\omega}})}{X(e^{j\hat{\omega}})}.$$

Підкреслимо, що частотна характеристика (1.95), так само як і передатна функція (1.73), залежить винятково від внутрішніх параметрів ЛДС і не залежить ні від дії, ні від реакції [5].

1.5.4 Властивості частотних характеристик

Перелічимо основні властивості частотних характеристик:

1. Безперервність. ЧХ, АЧХ і ФЧХ - перервні (чи частково-перервні) функції частоти по визначенню.

2. Періодичність. ЧХ, АЧХ і ФЧХ - періодичні функції частоти з періодом, що дорівнює частоті дискретизації $\omega_A = \frac{2\pi}{T}$.

Доказ. Періодичність функцій випливає з періодичності аргументу

$e^{j\omega T}$ з періодом по частоті ω , рівним $\omega_A = \frac{2\pi}{T}$.

Відповідно, період ЧХ, АЧХ і ФЧХ у залежності від використовуваної шкали частот буде дорівнювати:

$$f \Rightarrow f_A; \quad (1.97)$$

$$\hat{f} \Rightarrow 1; \quad (1.98)$$

$$\omega \Rightarrow \omega_A; \quad (1.99)$$

$$\hat{\omega} \Rightarrow 2\pi. \quad (1.100)$$

3. Парність АЧХ і непарність ФЧХ. Якщо коефіцієнти ПФ- дійсні числа (а інші випадки ми не розглядаємо), то модуль частотної характеристики (АЧХ) є парною, а аргумент (ФЧХ) – непарною функцією частоти:

$$|H(e^{j\omega T})| = |H(e^{-j\omega T})|;$$

$$\arg\left[H(e^{j\omega T})\right] = -\arg\left[H(e^{-j\omega T})\right].$$

Нагадаємо, що парною називається функція, що не змінюється при зміні знака аргументу. Якщо ж при зміні знака аргументу змінюється знак функції, але її абсолютне значення зберігається незмінним, функція називається непарною.

Доказ. Запишемо частотну характеристику у вигляді

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)e^{-j\omega Tn} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)\cos(\omega nT) - j \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)\sin(\omega nT),$$

чи коротко

$$H(e^{j\omega T}) = \text{Re} - j \text{Im},$$

де дійсна частина – парна

$$\text{Re} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)\cos(\omega nT),$$

а уявна - непарна функція частоти

$$\text{Im} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) \sin(\omega nT),$$

так як у першому випадку маємо суму косинусів (парних функцій), а в другому - синусів (непарних функцій).

Змінивши знак аргументу $\omega \rightarrow -\omega$, одержимо:

$$H(e^{-j\omega T}) = \text{Re} + j \text{Im}.$$

Для модуля частотної характеристики справедлива рівність

$$|H(e^{j\omega T})| = |H(e^{-j\omega T})| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2},$$

отже, АЧХ - парна функція частоти.

Для аргументу частотної характеристики, приймаючи до уваги, що арктангенс – непарна функція, справедливі рівності:

$$\arg \left(H(e^{j\omega T}) \right) = \arctg \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right);$$

$$\arg \left(H(e^{-j\omega T}) \right) = \arctg \left(\frac{-\text{Im}}{\text{Re}} \right) = -\arctg \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right);$$

$$\arg \left(H(e^{j\omega T}) \right) = -\arg \left(H(e^{-j\omega T}) \right),$$

отже, ФЧХ - непарна функція частоти.

1.5.5 Основна смуга частот

Найменування “основна смуга частот” виникло в результаті того, що при дискретизації аналогового сигналу його спектр за умовою теореми Котельникова обмежується верхньою частотою

$$f_a \leq \frac{f_A}{2},$$

унаслідок чого спектри дискретних сигналів, а також частотні характеристики ЛДС має сенс розглядати тільки в діапазоні $\left[0; \frac{f_A}{2} \right]$, що і назвали основним діапазоном чи основною смугою частот.

Нагадаємо, що в залежності від використовуваної шкали частот основна смуга відповідає областям:

$$f \Rightarrow \left[0; \frac{f_A}{2} \right]; \quad (1.101)$$

$$\hat{f} \Rightarrow [0; 0,5]; \quad (1.102)$$

$$\omega \Rightarrow \left[0; \frac{\omega_A}{2} \right] = \left[0; \frac{\pi}{T} \right]; \quad (1.103)$$

$$\hat{\omega} \Rightarrow [0; \pi]. \quad (1.104)$$

АЧХ і ФЧХ розраховують і зображують на графіку в основній смузі частот; при необхідності їх легко продовжити на будь-якому інтервалі частот, з огляду на властивості періодичності, а також парності АЧХ і непарності ФЧХ.

Контрольні запитання:

1. Що таке частотні характеристики ЛДС?
2. Як частотна характеристика зв'язана з передатною функцією?
3. Які властивості частотної характеристики?

1.6 Двовимірне перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є можливо, якщо усі функції, визначені на скінченному інтервалі, є періодичними в просторовій і частотно-просторовій областях. Періодичні повторення, таким чином, повинні мати місце як для просторової функції зображення в напрямках x і y , так і для її частотного опису уздовж частотних осей u і v , додатковою умовою є абсолютна яка підсумовується $f(x,y)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)| dx dy < \infty.$$

Пряме одновимірне перетворення Фур'є:

$$\hat{F}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jux} dx,$$

де $e^{-jux} = \cos ux - j \sin ux$ і $u = 2\pi f_x$.

При перетворенні в частотно-просторовій області обчислюється функція, описувана за допомогою гармонійних коливань з амплітудами, що залежать від частоти (стаціонарні коливання для випадку періодичних функцій): $\hat{F}(u) = A(u) - jB(u)$.

Зворотне одновимірне перетворення Фур'є:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(u) e^{jux} du.$$

У загальному випадку ця функція може бути комплексною, але у випадку чи зображення якого-небудь іншого фізичного сигналу вона завжди дійсна.

Склавши $u = 2\pi f_x$ і $v = 2\pi f_y$, одержимо вираз відповідно для прямого і зворотного двовимірного перетворення Фур'є:

$$\hat{F}(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy,$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv.$$

При цьому існує відповідність $f(x, y) \leftrightarrow \hat{F}(u, v)$.

Ці двовимірні перетворення Фур'є можна поширити і на дискретний випадок, для цього x і y потрібно замінити на mx і ny , а інтеграл – на суму. Межі підсумовування при цьому Mx і Ny . Так як $f(x, y)$ і $f(m, n)$ періодично повторюються, тож, і спектр $\hat{F}(k, l)$ буде періодичним.

Таким чином, пряме двовимірне ДПФ запишеться у вигляді:

$$\hat{F}(k, l) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N} \right) \right],$$

де $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$ – індекси в просторовій області, $0 \leq k \leq M-1$, $0 \leq l \leq N-1$ – індекси в частотно-просторовій області, а зворотне двовимірне ДПФ запишеться у вигляді:

$$f(m, n) = \frac{1}{MN} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{F}(k, l) \exp \left[j2\pi \left(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N} \right) \right].$$

Відповідність також можна позначити символічно $f(m,n) \leftrightarrow \hat{F}(k,l)$.

1.6.1 Згортки функцій

Одновимірна дискретна згортка. Якщо дискретний вхідний сигнал є імпульсом із площею, що дорівнює 1 у момент $k=0$ і якщо вектор-стовпець може бути описаний як дзеркально відбитий вектор-рядок, тобто

$$\begin{bmatrix} s_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix} = (1, 0, 0, \dots)',$$

тоді вихідний сигнал дискретної системи буде її імпульсним відгуком:

$$\begin{bmatrix} h_j \end{bmatrix} = (h_0, h_1, h_2, \dots)'.$$

Довільний вхідний сигнал для лінійної системи $\begin{bmatrix} h_{ek} \end{bmatrix}$ можна представити як накладення імпульсів, зсунутих у часі (просторі) і перемножених з коефіцієнтом h_{ek} :

$$(s_{eo}, s_{e1}, s_{e2}, \dots)' = s_{eo}(1, 0, 0, 0, \dots)' + s_{e1}(0, 1, 0, 0, \dots)' + s_{e2}(0, 0, 1, 0, \dots)' + \dots$$

Кожен імпульс викликає свій власний імпульсний відгук, і в результаті вихідний сигнал можна представити як

$$(s_{ao}, s_{a1}, s_{a2}, \dots)' = s_{eo}(h_o, h_1, h_2, h_3, \dots)' + s_{e1}(0, h_o, h_1, h_2, \dots)' + s_{e2}(0, 0, h_o, h_1, \dots)' + \dots,$$

чи в іншому вигляді

$$\begin{aligned} s_{ao} &= s_{eo} h_o; \\ s_{a1} &= s_{eo} h_1 + s_{e1} h_o; \\ s_{a2} &= s_{eo} h_2 + s_{e1} h_1 + s_{e2} h_o; \\ &\dots \end{aligned}$$

чи в загальному випадку,

$$s_{ai} = \sum_{k=0}^i h(i-k) s_{ek} = \sum_{k=0}^i h(i-k) h_k$$

де $i, k = 0, 1, 2, \dots$ і $s_e, s_a, t, h = 0$ для $i, k < 0$.

У матричній формі згортка може бути представлена як

$$\begin{bmatrix} s_{ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i \end{bmatrix}_{Dr} \begin{bmatrix} s_{ek} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ei} \end{bmatrix}_{Dr} \begin{bmatrix} h_k \end{bmatrix},$$

чи в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} s_{a0} \\ s_{a1} \\ s_{a2} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_{e0} \\ s_{e1} \\ s_{e2} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{e0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s_{e1} & s_{e0} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s_{e2} & s_{e1} & s_{e0} & 0 & 0 & \dots \\ s_{e3} & s_{e2} & s_{e1} & s_{e0} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Символічно може бути записана як

$$\begin{bmatrix} s_{ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_k \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} s_{ei} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ek} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} h_i \end{bmatrix}.$$

1.6.2 Глобальна згортка двовимірних дискретних просторових функцій

Нехай дані дві просторові функції $f_0(m, n)$ на інтервалі $0 \leq m \leq M_f - 1$; $0 \leq n \leq N_f - 1$ і $h_0(m, n)$ на інтервалі $0 \leq m \leq M_h - 1$; $0 \leq n \leq N_h - 1$.

Прийнемо $M_f + M_h - 1 \leq M - 1$; $N_f + N_h - 1 \leq N - 1$ [6].

Просторові функції $f_0(m, n)$ і $h_0(m, n)$ перенесемо в новий формат $(M - 1, N - 1)$ за допомогою додавання нульових елементів:

$f_0(m, n) \rightarrow f(m, n)$ і $h_0(m, n) \rightarrow h(m, n)$; $0 \leq m \leq M - 1$; $0 \leq n \leq N - 1$.

Для того щоб можна було здійснити перетворення й аналогічні обчислення в частотно-просторовій області, будемо вважати просторові функції $f(m, n)$, $h(m, n)$ у напрямках m і n також періодичними. Тоді можна записати наступні співвідношення:

$$f(m, n) \leftrightarrow \hat{F}(k, l); 0 \leq m, k \leq M - 1; h(m, n) \leftrightarrow \hat{H}(k, l); 0 \leq n, l \leq N - 1.$$

Глобальна згортка (рис. 1.14) дискретних просторових функцій для кожної просторової координати m і n може бути представлена як:

$$g(m, n) = f(m, n) \star h(m, n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) h(m - i, n - j) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} h(i, j) f(m - i, n - j).$$

При цьому виконується відповідність

$$g(m, n) = f(m, n) \star h(m, n) \leftrightarrow \hat{G}(k, l) = \hat{F}(k, l) \cdot \hat{H}(k, l).$$

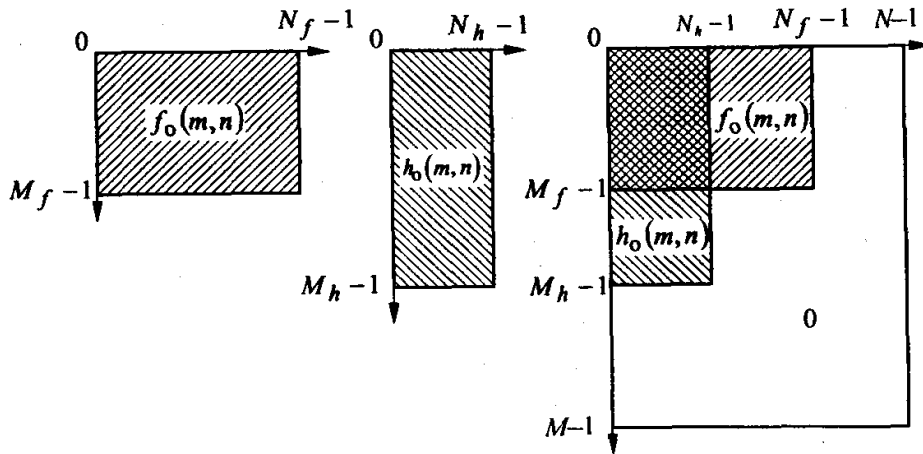


Рисунок 1.14 – Перетворення просторової області при глобальній згортці

1.6.3 Глобальна згортка спектрів

Визначаючи умови і здійснюючи переформатування аналогічно глобальній згортці двовимірних дискретних просторових функцій $\hat{F}_0(k,l)$ $\hat{H}_0(k,l)$ для функцій одержимо для дискретної глобальної згортки в спектральній області для кожної спектральної складової $\hat{G}_0(k,l)$:

$$\hat{G}(k,l) = \hat{F}(k,l) \star \hat{H}(k,l) \leftrightarrow g(m,n) \cdot h(m,n),$$

$$\hat{G}(k,l) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{F}(i,j) \hat{H}(k-i, l-j) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{H}(i,j) \hat{F}(k-i, l-j).$$

Глобальна згортка спектрів відповідає перемножуванню в просторовій області. Це перемножування в загальному випадку переважніше згортки спектрів, оскільки виконується простіше і швидше з технічної точки зору.

1.6.4 Локальна згортка в двовимірному просторі

Нехай дана просторова дискретна функція $f(m,n)$ на інтервалі $0 \leq m \leq M-1$; $0 \leq n \leq N-1$, наприклад зображення, записане в пам'ятовування. Зробимо згортку $f(m,n)$ з іншою локальною просторовою функцією $h(i,j)$, заданою як функція вікна з розмірами L_i , L_j , тобто визначеної на інтервалі $0 \leq i \leq L_i-1$; $0 \leq j \leq L_j-1$.

Алгоритм згортки для кожної просторової координати m , n дає результат

$$g(m,n) = \sum_{i=0}^{L_i-1} \sum_{j=0}^{L_j-1} h(i,j) f(m-i, n-j) = \sum_{i=m-(L_i-1)}^m \sum_{j=n-(L_j-1)}^n h(m-i, n-j) f(i,j).$$

У випадку симетричного оператора згортки з скінченною довжиною характеристики

$$g(m,n) = \sum_{i=0}^{L_i-1} \sum_{j=0}^{L_j-1} h(i,j) f(m-i, n-j).$$

При проведенні згортки необхідно враховувати, що в області визначення функції $(M-1, N-1)$ у матриці результатів $\{g(m,n)\}$ приграничні рядки і стовпці будуть містити не цілком відфільтровані (некоректні) дані, тобто у відкоригованій матриці результатів ці рядки і стовпці повинні бути виключені.

Взаємозв'язок між $h(i,j)$ і $f(m,n)$ наступний:

$$g(m,n) = h(i,j) \star f(m,n) \leftrightarrow \hat{G}(k,l) = \hat{H}(k,l) \star \hat{F}(k,l).$$

1.6.5 Локальна згортка в двовимірній спектральній області

Представлена локальна згортка може бути розглянута як згортка спектрів. Визначимо $\hat{F}(k,l)$ на інтервалі $0 \leq k \leq M-1$; $0 \leq l \leq N-1$ і $\hat{H}(s,t)$ на інтервалі $0 \leq s \leq S-1$; $0 \leq t \leq T-1$.

Необхідно побудувати локальну згортку спектрів:

$$g(m,n) = h(i,j) \star f(m,n) \leftrightarrow \hat{G}(k,l) = \hat{H}(k,l) \cdot \hat{F}(k,l).$$

З урахуванням попереднього співвідношення буде:

$$\hat{G}(k,l) = \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{t=0}^{T-1} \hat{H}(s,t) \hat{F}(k-s, l-t).$$

Процес згортки в двовимірному просторі можна продемонструвати в такий спосіб.

Знайдемо задану просторову функцію $f(m,n)$

$$\{f_{m,n}\} = \begin{pmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} & \dots & f_{0,N-1} \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{M-1,0} & \dots & \dots & f_{M-1,N-1} \end{pmatrix}.$$

Необхідно зробити згортку її з кожною, у тому числі несиметричною віконною функцією $h(i,j)$:

$$\{h_{i,j}\} = \begin{pmatrix} h_{aa} & h_{ab} & h_{ac} \\ h_{ba} & h_{bb} & h_{bc} \\ h_{ca} & h_{cb} & h_{cc} \end{pmatrix}.$$

Дискретна згортка утвориться у випадку, коли дзеркальна до $h\{i,j\}$ матриця віконної функції $h\{-i,-j\}$ “пересувається” по матриці вихідної функції і для кожного положення (точки згортки) m, n обчислюється згортка:

$$\{h_{i,j}\} = \begin{pmatrix} h_{cc} & h_{cb} & h_{ca} \\ h_{bc} & h_{bb} & h_{ba} \\ h_{ac} & h_{ab} & h_{aa} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow i \\ \leftarrow \\ j \end{matrix}$$

Наприклад, для точки згортки $f_{m,n} = f_{22}$:

$$\begin{aligned} g_{22} = & h_{cc}f_{00} + h_{cb}f_{01} + h_{ca}f_{02} + \\ & + h_{bc}f_{10} + h_{bb}f_{11} + h_{ba}f_{12} + \\ & + h_{ac}f_{20} + h_{ab}f_{21} + h_{aa}f_{22} \end{aligned}$$

Перевага локальної згортки в порівнянні з глобальною складається в меншій потребі в обсязі запам'ятовування для коефіцієнтів $h(i,j)$ унаслідок менших розмірів вікна $h\{i,j\}$.

Контрольні запитання:

1. Що таке пряме двовимірне перетворення Фур'є?
2. Що таке зворотне двовимірне перетворення Фур'є?
3. Що таке глобальна згортка двовимірних дискретних просторових функцій?
4. Що таке локальна згортка у двовимірній спектральній області?

2 ТЕОРІЯ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

2.1 Структурні схеми лінійних дискретних систем

Структурна схема (структура) ЛДС відображає алгоритм обчислення реакції. Нагадаємо, що в часовій області співвідношення вхід-вихід при відомих параметрах ЛДС описується різницеvim рівнянням, що розв'язується методом прямої підстановки при нульових початкових умовах. Таким чином, алгоритм обчислення реакції задається безпосередньо різницеvim рівнянням, і в цьому сенсі структура ЛДС відображає різницеве рівняння.

Алгоритм обчислення реакції по РР заснований на виконанні трьох типів операцій з відліками сигналу:

- затримки на період дискретизації T ;
- множення на константу;
- алгебраїчного додавання.

На структурній схемі їм ставиться у відповідність три види елементів:

- елемент затримки (рис. 2.1, а);
- помножувач (рис. 2.1, б);
- суматор (рис. 2.1, в).

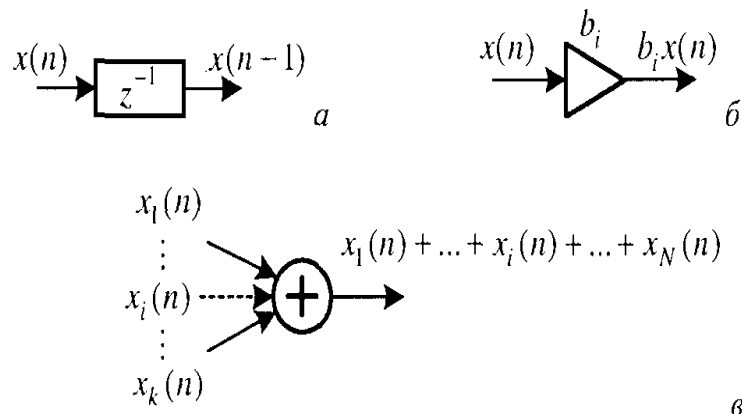


Рисунок 2.1 – Елементи структурної схеми ЛДС: елемент затримки (а), помножувач (б), суматор (в)

Умовне зображення елемента затримки пов'язане з тим, що затримка сигналу на період дискретизації T відображається в z -області добутком z -зображення даного сигналу на z^{-1} :

$$x(nT) \Rightarrow X(z);$$

$$x(nT - T) \Rightarrow X(z)z^{-1}.$$

Фізично елемент затримки являє собою регістр, що зберігає один попередній (затриманий) відлік сигналу.

Структура ЛДС може бути реалізована апаратно або програмно. У першому випадку - у вигляді спеціалізованого цифрового пристрою на інтегральних логічних елементах, у другому - у вигляді програми на комп'ютері або цифровому процесорі обробки сигналів (ЦПОС). Розвиток технології ЦПОС зробив програмну реалізацію переважною.

Різницевому рівнянню відповідає передатна функція (1.73). Однак передатна функція може мати й інші, еквівалентні види математичного представлення і, отже, різниці рівняння можуть мати різні види, відображувані різними структурами ЛДС. От чому структура ЛДС визначається виглядом передатної функції.

З цих позицій розглянемо структури рекурсивних і нерекурсивних ЛДС.

2.1.1 Структури рекурсивних ЛДС

Рекурсивним ЛДС відповідають три основних види математичного представлення ПФ $H(z)$:

- дрібно-раціональний (1.73);
- добуток множників другого порядку (1.84);
- сума дробів другого порядку (1.86), що визначають три основні структури:

- пряму;
- каскадну;
- рівнобіжну.

2.1.2 Пряма структура

Пряма структура визначається передатною функцією $H(z)$ (1.73), представленою в дрібно-раціональному вигляді (у загальному вигляді):

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}},$$

і відображає різницеве рівняння

$$y(n) = - \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k).$$

На рис. 2.2 приведена пряма структура ланки 2-го порядку, описуваною передатною функцією (1.79) і різницеvim рівнянням (1.80).

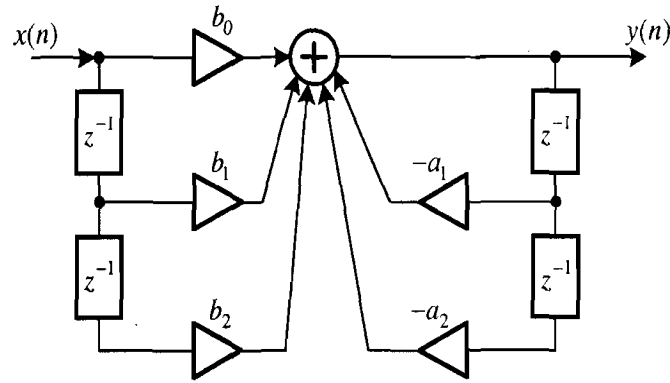


Рисунок 2.2 – Пряма структура ланки 2-го порядку

У загальному випадку пряма структура містить $[(N - 1) + (M - 1)]$ елементів затримки, з них: $(N - 1)$ - для попередніх відліків дії і $(M - 1)$ - для попередніх відліків реакції. Розглянемо канонічні структури, що дозволяють звести число елементів затримки до мінімуму.

Структуру називають канонічною, якщо число елементів затримки в ній мінімально і дорівнює порядку передатної функції $\max[(M - 1), (N - 1)]$. Представимо три різновиди таких структур.

2.1.3 Пряма канонічна структура 1

Пряма канонічна структура 1 визначається еквівалентним представленням передатної функції $H(z)$ (1.73) у вигляді добутку двох передатних функцій

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = \frac{V(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y(z)}{V(z)} = H_1(z) H_2(z), \quad (2.1)$$

одна з яких описує рекурсивну частину ЛДС

$$H(z) = \frac{V(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}},$$

а друга - нерекурсивну

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}$$

Передатним функціям $H_1(z), H_2(z)$, відповідно до їх визначення,

відповідають різницеві рівняння

$$v(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k); \quad (2.2)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i v(n-i). \quad (2.3)$$

відображувані прямими структурами.

На рис. 2.3, а показана пряма структура ланки 2-го порядку у вигляді послідовного з'єднання рекурсивної (2.2) і нерекурсивної (2.3) частин. У цьому випадку ПФ (2.1) і РУ (2.2) і (2.3) приймають вигляд

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}); \quad (2.4)$$

$$v(n) = x(n) - a_1 v(n-1) - a_2 v(n-2); \quad (2.5)$$

$$y(n) = b_0 v(n) + b_1 v(n-1) + b_2 v(n-2). \quad (2.6)$$

Об'єднання двох ліній затримки в одну (на підставі рівності вхідного і вихідного сигналів у точці А) приводить до прямої канонічної структури 1 (рис. 2.3, б).

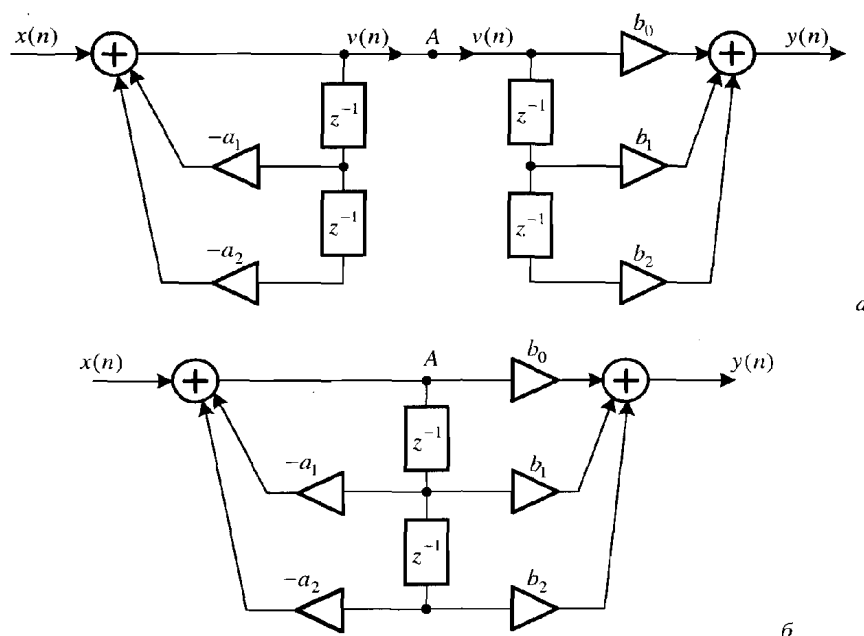


Рисунок 2.3 – Пряма канонічна структура 1 ланки 2-го порядку: послідовне з'єднання рекурсивної і нерекурсивної частин (а); об'єднання двох ліній затримки в одну (б)

2.1.4 Канонічна структура 2

Канонічна структура 2 визначається іншим еквівалентним представленням передатної функції $H(z)$ (1.73), яку можна одержати шляхом розподілу чисельника на знаменник за правилом розподілу багаточленів при $N=M$:

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = b_0 + \frac{\sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = \\ &= H_{i\delta}(z) + H_p(z) = \frac{Y_{i\delta}}{X(z)} + \frac{Y_{p\delta}}{X(z)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

у результаті чого $H(z)$ представляється у вигляді суми двох передатних функцій, що описують нерекурсивну (з індексом “нр”)

$$H_{i\delta}(z) = \frac{Y_{i\delta}}{X(z)} + \frac{Y_{i\delta}}{X(z)} = b_0 \quad (2.8)$$

і рекурсивну (з індексом “р”)

$$H_p(z) = \frac{Y_p(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \quad (2.9)$$

частини ЛДС.

Передатній функції $H_{i\delta}(z)$ (2.8) відповідає різницеве рівняння

$$y_{i\delta}(n) = b_0 x(n). \quad (2.10)$$

Для того щоб одержати РР, що відповідає $H_\delta(z)$, представимо її, подібно (2.1), у вигляді добутку двох передатних функцій

$$H_p(z) = \frac{Y_p(z)}{X(z)} = \frac{V(z)}{X(z)} \cdot \frac{Y_p(z)}{V(z)} = H_{p1}(z) H_{p2}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k}$$

і запишемо різницеві рівняння у вигляді (2.2) і (2.3):

$$v(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k); \quad y_p(n) = \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) v(n-k),$$

сукупність яких відображається прямою канонічною структурою 1. У підсумку передатній функції $H(z)$ (2.7)

$$H(z) = H_{ip}(z) = H_{p1}(z)H_{p2}(z) = b_0 \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) z^{-k} \quad (2.11)$$

відповідає система різницевих рівнянь

$$\begin{cases} y(n) = y_{i\delta}(n) + y_{\delta}(n) = b_0 x(n) + \sum_{k=1}^{M-1} (b_k - b_0 a_k) v(n-k); \\ v(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k v(n-k), \end{cases} \quad (2.12)$$

відображуванa канонічною структурою 2.

На рис. 2.4 приведена канонічна структура 2 ланки 2-го порядку. У цьому випадку ПФ (2.11) і система РР (2.12) приймають вигляд:

$$H(z) = b_0 + \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} [(b_1 - b_0 a_1) z^{-1} + (b_2 - b_0 a_2) z^{-2}]; \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} y(n) = b_0 x(n) + (b_1 - b_0 a_1) v(n-1) + (b_2 - b_0 a_2) v(n-2); \\ v(n) = x(n) - a_1 v(n-1) - a_2 v(n-2). \end{cases} \quad (2.14)$$

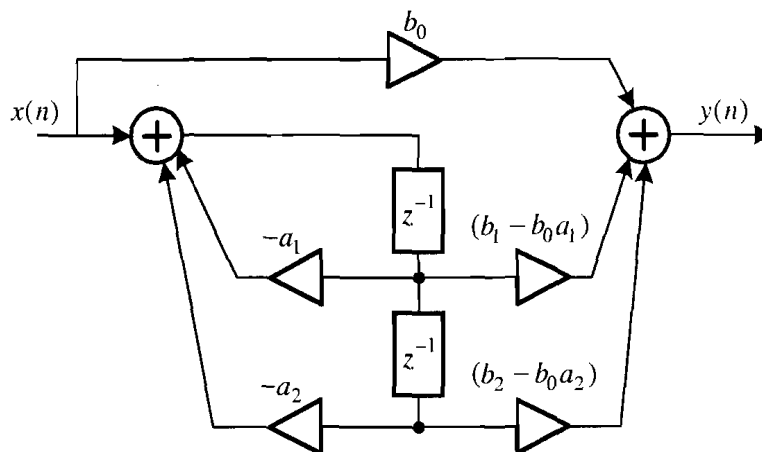


Рисунок 2.4 – Канонічна структура 2 ланки 2-го порядку

2.1.5 Канонічна структура 3

Канонічна структура 3 визначається ще одним еквівалентним

представленням передатної функції $H(z)$ (1.73), що виходить у такий спосіб:

- припускаючи $N=M$, помножимо ліву і праву частини $1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}$:

$$H(z) \left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k} \right) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \left(1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k} \right);$$

- скоротимо загальні множники в чисельнику і знаменнику праворуч:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i z^{-i} - H(z) \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k};$$

- представимо передатну функцію у вигляді розкладання (у сходовій формі):

$$\begin{cases} H(z) = b_0 + z^{-1} H_1(z); \\ H_1(z) = [b_1 - a_1 H(z)] + z^{-1} H_2(z); \\ H_2(z) = [b_2 - a_2 H(z)] + z^{-1} H_3(z); \\ \dots\dots\dots \\ H_{M-1}(z) = b_{M-1} - a_{M-1} H(z) \end{cases} \quad (2.15)$$

таким чином, що $H(z)$ визначається послідовною підстановкою знизу вгору [6].

Одержимо систему різницевих рівнянь, що відповідає даній ПФ, для чого:

- помножимо ліву і праву частини всіх рівностей (2.15) на $X(z)$:

$$\begin{cases} H(z)X(z) = b_0 X(z) + z^{-1} H_1(z)X(z); \\ H_1(z)X(z) = b_1 X(z) - a_1 H(z)X(z) + z^{-1} H_2(z)X(z); \\ H_2(z)X(z) = b_2 X(z) - a_2 H(z)X(z) + z^{-1} H_3(z)X(z); \\ \dots\dots\dots \\ H_{M-1}(z)X(z) = b_{M-1} X(z) - a_{M-1} H(z)X(z); \end{cases} \quad (2.16)$$

- позначимо:

$$\begin{cases} Y(z) = H(z)X(z); \\ V_1(z) = H_1(z)X(z); \\ V_2(z) = H_2(z)X(z); \\ \dots\dots\dots \\ V_{M-1}(z) = H_{M-1}(z)X(z); \end{cases}$$

- підставимо в (2.16):

$$\begin{cases} Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1} V_1(z); \\ V_1(z) = b_1 X(z) - a_1 Y(z) + V_2(z); \\ V_2(z) = b_2 X(z) - a_2 Y(z) + V_3(z); \\ \dots\dots\dots \\ V_{N-1}(z) = b_{N-1} X(z) - a_{N-1} Y(z); \end{cases}$$

- використовуючи властивості Z-перетворення, запишемо РР у вигляді системи:

$$\begin{cases} y(n) = b_0 x(n) + v_1(n-1); \\ v_1(n) = b_1 x(n) - a_1 y(n) + v_2(n-1); \\ v_2(n) = b_2 x(n) - a_2 y(n) + v_3(n-1); \\ \dots\dots\dots \\ v_{M-1}(n) = b_{M-1} x(n) - a_{M-1} y(n). \end{cases} \quad (2.17)$$

Так як розв'язується знизу нагору, то і відображається канонічною структурою 3.

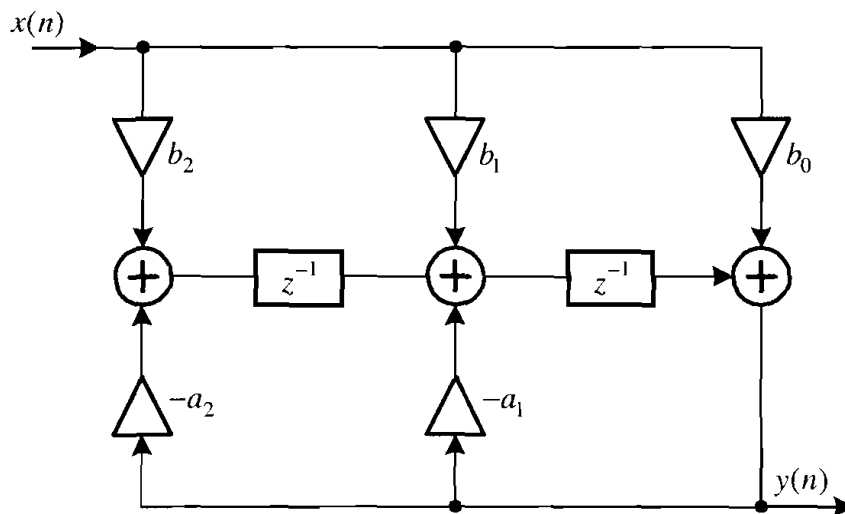


Рисунок 2.5 – Канонічна структура 3 ланки 2-го порядку

На рис. 2.5 приведена канонічна структура 3 ланки 2-го порядку. У цьому випадку ПФ (2.15) і система РР (2.17) приймають вигляд:

$$\begin{cases} H(z) = b_0 + z^{-1}H_1(z); \\ H_1(z) = [b_1 - a_1H(z)] + z^{-1}H_2(z); \\ H_2(z) = b_2 - a_2H(z), \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} y(n) = b_0 x(n) + v_1(n-1); \\ v_1(n) = b_1 x(n) - a_1 y(n) + v_2(n-1); \\ v_2(n) = b_2 x(n) - a_2 y(n). \end{cases} \quad (2.19)$$

2.1.6 Каскадна структура

Каскадна структура визначається передатною функцією $H(z)$ (1.84), представленою у вигляді добутку множників другого порядку:

$$H(z) = \prod_{k=1}^K H_k(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right),$$

де $b_{0k}, b_{1k}, b_{2k}, a_{1k}, a_{2k}$ - вагові коефіцієнти, а K - кількість ланок 2-го порядку.

При прямій структурі всіх ланок (див. рис. 2.2) даному вигляду передатної функції відповідає система різницевих рівнянь

[illegible]

з якого випливає, що реакція k -ї ланки, $k = 1, 2, \dots, (K - 1)$, служить дією для $(k + 1)$ -ї ланки, тому дана система відображається каскадним з'єднанням рекурсивних ланок 2-го порядку - каскадною структурою.

На рис. 2.6 зображена каскадна структура з трьох ланок 2-го порядку прямої або канонічної структури.

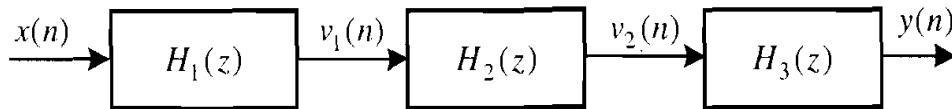


Рисунок 2.6 – Каскадна структура з трьох ланок 2-го порядку

2.1.7 Рівнобіжна структура

Рівнобіжна структура визначається передатною функцією $H(z)$ (1.87), представленій у вигляді суми дробів другого порядку:

$$H(z) = \sum_{k=1}^K H_k(z) = \sum_{k=1}^K \left(\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right),$$

де $b_{0k}, b_{1k}, a_{1k}, a_{2k}$ - вагові коефіцієнти, а K - кількість ланок 2-го порядку.

Одержимо різницеве рівняння, що відповідає даному вигляду ПФ, для чого:

- помножимо ліву і праву частини (1.87) на $X(z)$:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \sum_{k=1}^K H_k(z)X(z) = \sum_{k=1}^K \left(\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right) X(z);$$

- позначимо:

$$V_k(z) = H_k(z)X(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} X(z),$$

у результаті чого маємо співвідношення вхід-вихід у вигляді (1.23);

- представимо реакцію $Y(z)$ у вигляді суми реакцій:

$$Y(z) = \sum_{k=1}^K V_k(z);$$

- виконаємо зворотне Z -перетворення лівої і правої частин і запишемо різницеве рівняння яке шукаємо

$$y(n) = \sum_{k=1}^K v_k(n), \quad (2.20)$$

де

$$v_k(n) = b_{0k}x(n) + b_{1k}x(n-1) - a_{1k}v_k(n-1) - a_{2k}v_k(n-2). \quad (2.21)$$

З РР (2.20) випливає, що дія для всіх ланок однакова, а реакція дорівнює сумі реакцій окремих ланок, тому дане РР відображається рівнобіжним з'єднанням рекурсивних ланок 2-го порядку - рівнобіжною структурою.

На рис. 2.7 зображена рівнобіжна структура з трьох ланок 2-го порядку прямої або канонічної структури.

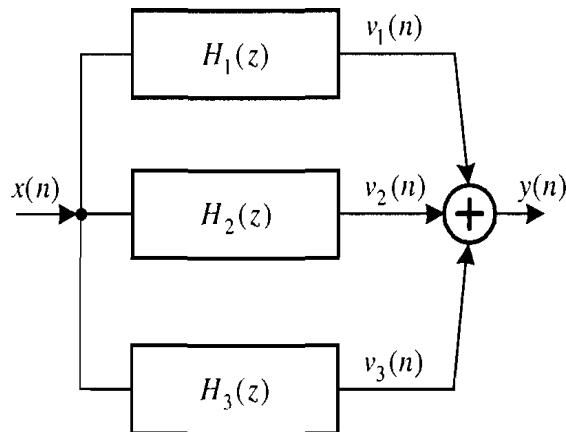


Рисунок 2.7 – Рівнобіжна структура з трьох ланок 2-го порядку

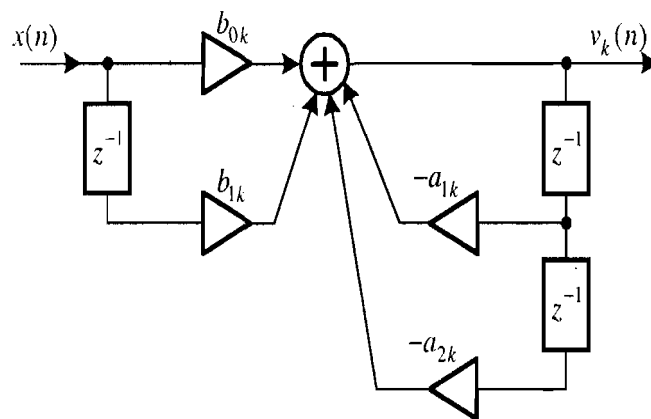


Рисунок 2.8 – Пряма структура ланки 2-го порядку при рівнобіжній структурі

На рис. 2.8 приведений приклад прямої структури ланки 2-го порядку, описуваного ПФ (1.80) і РР (1.81) при $b_2 = 0$.

2.1.8 Структури нерекурсивних ЛДС

Нагадаємо, що передатна функція нерекурсивних ЛДС може розглядатися як окремий випадок $H(z)$ загального вигляду (1.73) при

$a_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M - 1$. У цьому випадку знаменник $H(z)$ виявляється рівним 1, а дрібно-раціональна функція - раціональною.

Нерекурсивним ЛДС відповідають два основних види математичного представлення ПФ $H(z)$:

- раціональний;
 - добуток множників другого порядку,
- які визначають дві основні структури:
- пряму;
 - каскадну.

2.1.9 Пряма структура

Пряма структура (рис.2.9) визначається передатною функцією $H(z)$, представленою у вигляді раціональної функції

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i},$$

і відображає різницеве рівняння

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n - i).$$

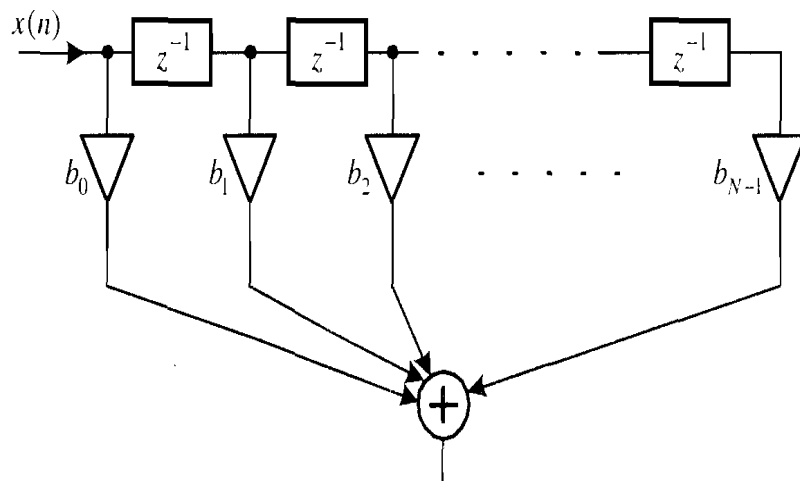


Рисунок 2.9 – Пряма структура нерекурсивної ЛДС

Приводиться різновид прямої структури - пряма приведена структура для нерекурсивних ЛДС із лінійною фазочастотною характеристикою [7].

- для цифрових фільтрів вигляд передатної функції визначається методом синтезу, тим самим структура власно кажучи виявляється автоматично обраною: для рекурсивних фільтрів звичайно вона каскадна чи паралельна, а для нерекурсивних - пряма (приведена);

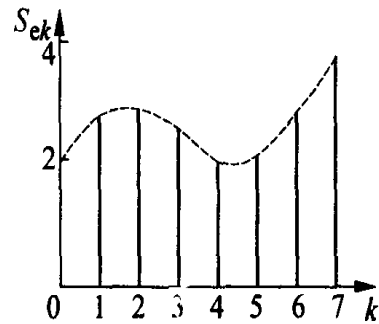
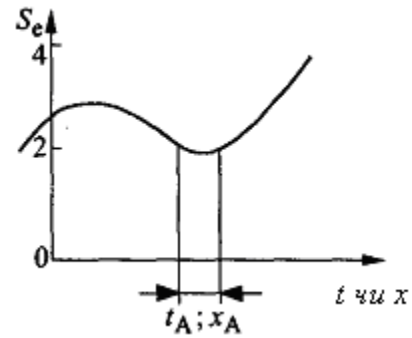
- при виборі структури окремих ланок 2-го порядку і послідовностей їхнього розташування в каскадному з'єднанні необхідно мати на увазі, що від цього залежить похибка обчислень - власні шуми системи [8].

Контрольні запитання:

1. На яких типах операцій заснований алгоритм обчислення реакції ЛДС по різницевого рівнянню?
2. Які основні види математичного представлення передатної функції в z -області відповідають рекурсивним ЛДС?
3. Що таке пряма структурна ланка 2-го порядку?
4. Що таке пряма канонічна структура 1?
5. Що таке канонічна структура 2?
6. Що таке канонічна структура 3?
7. Що таке каскадна структура ?
8. Що таке рівнобіжна структура ?
9. Які бувають структурні не рекурсивні ЛДС?

2.2 Цифрова фільтрація

Цифровий фільтр реалізує алгоритм згортки в дискретному просторі чи дискретно в часі.



Часовий чи просторовий
безупинний (аналоговий) сигнал

Часовий чи просторовий
дискретний (цифровий) сигнал

Рисунок 2.11 – Формування послідовності імпульсів з аналогового сигналу

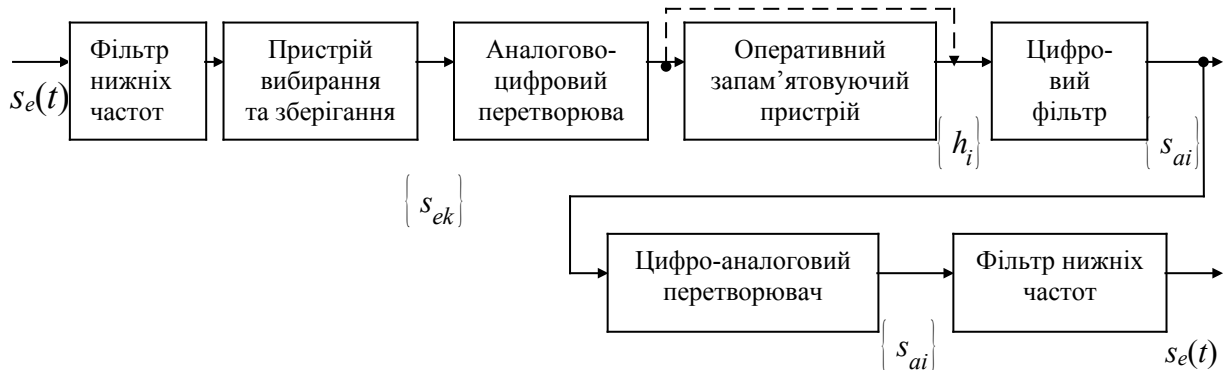


Рисунок 2.12– Цифрова фільтрація

Дискретизація безупинного сигналу $s_e(t)$ чи $s_e(x)$ здійснюється шляхом формування його відліків у точках t чи x , розташованих еквідистантно, при цьому формуються дискретні в часі чи просторі значення сигналу $s_e(kt)$ чи $s_e(kx)$:

$$s_e(t) \text{ чи } s_e(x) \rightarrow \text{зчитування} \rightarrow s_e(kt) \text{ чи } s_e(kx)$$

Індекс k обчислюється як $k = t/t$ чи $k = x/x$.

У термінах просторових частот $f = 1/t$ чи $f_{Ax} = 1/x$.

При формуванні відліків щоб уникнути накладення спектрів варто

виконувати умови теореми Котельникова (теореми відліків):

$$f_{max} \leq f/2; \quad f_{x\ max} \leq f_{Ax}/2.$$

Це означає, що частота формування відліків повинна, принаймні, у два рази перевищувати найвищу частоту, що міститься в сигналі, що зчитується. Іншими словами, смуга частот сигналу повинна бути обмежена половиною частоти зчитування. Помилки, пов'язані з неточностями виконання цих обмежень надалі не можуть бути усунуті. Ці помилки з погляду форми й амплітуди можуть бути значними і приведуть до перекручування, а в ряді випадків і до невірної відтворення сигналу.

2.2.1 Фур'є - фільтрація сигналів зображень

Згортка в просторовій області двовимірним фільтром з скінченною імпульсною характеристикою.

Типовою задачею обробки зображень є згортка функції зображення $f(m,n)$ з деяким локальним оператором, заданим у вигляді вікна $h(i,j)$ і що задовольняє визначеним умовам симетричності. Цей «фільтр» і є двовимірний фільтр із скінченною імпульсною характеристикою, що містить непарне число рядків і стовпців. Розмір вікна звичайно буває 3×3 ; 5×5 ; 7×7 ; ... 15×15 . Рівне число рядків і стовпців умова не обов'язкова, але зустрічається найбільше часто. Умови застосування виглядів симетрії задаються властивостями системи, яку потрібно реалізувати.

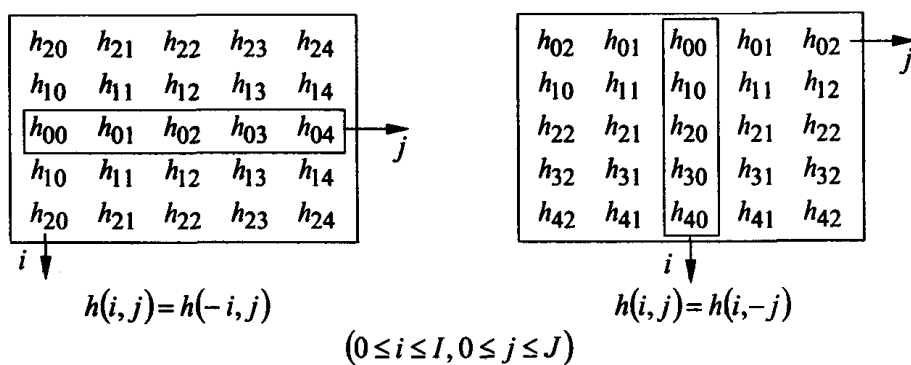
Передатна функція двовимірного фільтра, що має $(2I+1)$ рядків і $(2J+1)$ стовпців, в області просторових частот має вигляд:

$$\hat{H}(f_x, f_y) = \sum_{i=-I}^I \sum_{j=-J}^J h(i, j) \exp \left[-j2\pi \left(i \frac{f_x}{f_{Ax}} + j \frac{f_y}{f_{Ay}} \right) \right],$$

де f_x, f_y – відліки двовимірної просторової частоти; $\hat{H}(f_x, f_y)$ – передатна функція; f_{Ax}, f_{Ay} – частота узяття відліків у напрямках x і y ; $h(i,j)$ – коефіцієнти фільтра i -того рядка і j -го стовпця, у межах вікна розміром $(2I+1) \times (2J+1)$.

Якщо зображення задане на інтервалі $0 \leq m \leq M-1$; $0 \leq n \leq N-1$ і заданий локальний оператор з розміром вікна $2I+1$ у напрямку рядків і $2J+1$ у напрямку стовпців, і цей оператор має квадратну чи октаьну симетрію, то область згортки зображення зменшується за рахунок рядків I, J , що *обрамляють*. (рис. 1.14).

Розрізняють наступні *форми симетрії*:



Половинна симетрія

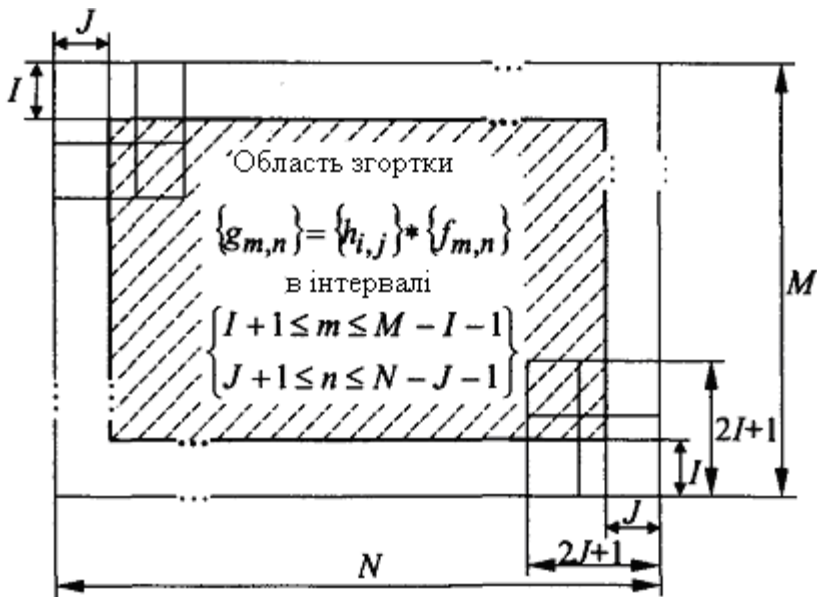
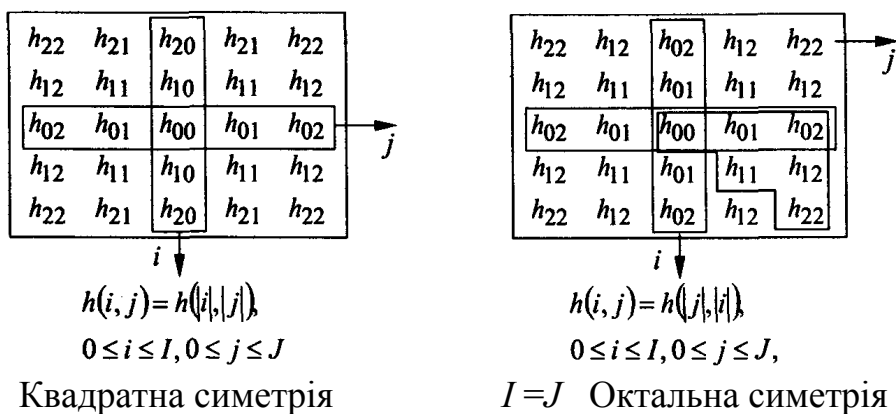


Рисунок 2.13 – Форми симетрії вікна

Рисунок 2.14 – Формування діючої області зображення при використанні локального оператора

Рівняння для сум згортки кожного елемента зображення $g(m, n)$ на інтервалі $I+1 \leq m \leq M-I-1$, $J+1 \leq n \leq N-J-1$ одержимо, використовуючи умови квадрантної симетрії оператора вікна:

$$\begin{aligned}
g(m,n) = & h(0,0)f(m,n) + \sum_{i=1}^I h(i,0) [f(m+i,n) + f(m-i,n)] + \\
& + \sum_{j=1}^J h(0,j) [f(m,n+j) + f(m,n-j)] + \\
& + \sum_{i=1}^I + \sum_{j=1}^J h(i,j) [f(m+i,n+j) + f(m+i,n-j) + f(m-i,n+j) + f(m-i,n-j)]
\end{aligned}$$

При октальній симетрії оператора одержимо для $I = J$:

$$\begin{aligned}
g(m,n) = & h(0,0)f(m,n) + \sum_{j=1}^J h(0,j) [f(m,n+j) + f(m,n-j) + f(m+j,n) + f(m-j,n)] + \\
& + \sum_{j=1}^J h(j,j) [f(m+j,n+j) + f(m+j,n-j) + f(m-j,n+j) + f(m-j,n-j)] + \\
& + \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=i+1}^J h(i,j) [f(m+j,n+j) + f(m+j,n+i) + f(m-i,n-j) + f(m-j,n-i) + \\
& + f(m+i,n-j) + f(m+j,n-i) + f(m-i,n+j) + f(m-j,n+i)] .
\end{aligned}$$

Звідси добре видний принцип формування складових згортки – всі елементи зображення, що відносяться до того самого коефіцієнта, підсумовуються на поточній позиції згортки і тільки потім перемножуються з цим коефіцієнтом.

2.2.2 Фільтрація в частотно-просторовій області

Згортка дискретної просторової функції $f(m,n)$ у локальному вікні з оператором $h(i,j)$ відповідає перемножуванню їхніх спектрів у частотно-просторовій області:

$$g(m,n) \star h(i,j) \leftrightarrow \hat{G}(k,l) = \hat{F}(k,l) \cdot \hat{H}(k,l) .$$

Дискретна функція зображення $f(m,n)$ у границях $(M-1) \times (N-1)$ має спектр також у границях $(M-1) \times (N-1)$. Локальний оператор, що наприклад володіє квадрантною чи октальною симетрією СІХ - фільтр $h(i,j)$, має спектр, обмежений рамкою $(2I+1) \times (2J+1)$; звичайно в границях $(M-1) \times (N-1)$. Перш ніж використовувати спектри спільно, необхідно виконати узгодження формату фільтра $h(i,j)$ у просторовій області з періодичною структурою зображення $f(m,n)$. Це виробляється шляхом додавання нулів, причому при вдалому позиціюванні нескінченного фільтра в рамках $(M-1) \times (N-1)$ можна досягти виконання умов симетрії для перетворення Фур'є. Наприклад, створення парної просторової функції $h(m,n)$ з $h(i,j)$ дасть усі $B(k,l)=0$ і спектр буде складатися з дійсних $A(k,l)$ складових.

При побудові частотно-просторового спектра треба враховувати типові повторювані структури спектральних компонентів $A(k,l)$ і, крім

того, зміну знака уявних елементів $Y(k,l)$. Застосувавши правила перемноження комплексних чисел, одержимо для кожної окремої позиції k,l у частотно-просторовій області добуток $\hat{G}(k,l) = \hat{F}(k,l)\hat{H}(k,l)$.

Фільтрація є зважування спектра зображення спектром фільтра:

$$\begin{aligned}\hat{G}(k,l) &= A_G(k,l) - jB_G(k,l) = [A_F(k,l) - jB_F(k,l)] [A_H(k,l) - jB_H(k,l)] = \\ &= [A_F(k,l)A_H(k,l) - B_F(k,l)B_H(k,l)] + j[A_F(k,l)B_H(k,l) + B_F(k,l)A_H(k,l)].\end{aligned}$$

Спрощений запис для кожної позиції k,l буде мати вигляд

$$A_G = A_F A_H - B_F B_H, \quad B_G = A_F B_H - B_F A_H.$$

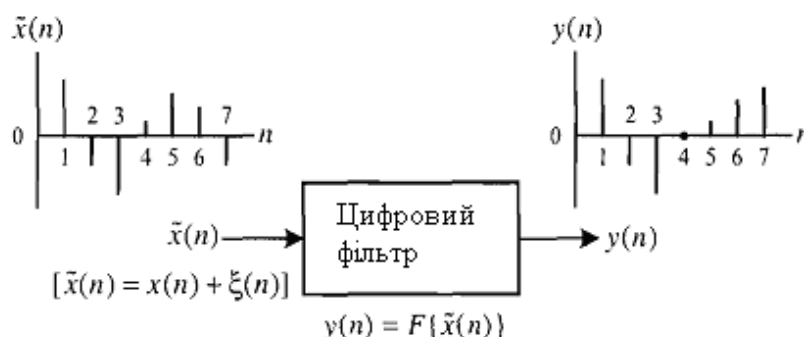
Якщо фільтрація спектра $\hat{F}(k,l)$ здійснюється зі спектром $\hat{H}(k,l) = A_H$, що має тільки дійсні компоненти, зображення $g(m,n)$, назад трансформоване зі спектра $\hat{G}(k,l)$, не буде мати просторового зсуву відносно $f(m,n)$. Якщо ж мають уявні складові $B_H(k,l)$, то, приводячи до зсуву по фазі в частотно-просторовій області, вони приведуть до зсуву й у просторовій області [9].

Контрольні запитання:

1. Як здійснюються цифрова фільтрація?
2. Які форми симетрії розрізняють?
3. Як формується дійсна область зображення при використанні локального оператора?
4. Як проводиться фільтрація у частотно-просторовій області?

2.3 Основні визначення і класифікація цифрових фільтрів

Під цифровим фільтром (ЦФ) у широкому сенсі розуміють будь-яку цифрову систему (коло), що відповідно до заданого $y(n) = F\{\tilde{x}(n)\}$ (рис. 2.15) здійснює перетворення діючого на її вході адитивного $\tilde{x}(n) = x(n) + \xi(n)$ цифрового сигналу $x(n)$ або його параметрів з



перешкодою $\xi(n)$. Наприклад, у зазначеному сенсі до цифрових фільтрів відносяться: фільтри, погоджені із сигналами, адаптивні фільтри, амплітудні і фазові коректори, диференціатори, перетворювачі Гілберта і т.д. Зрозуміло, сигнал $y(n)$ на виході реального ЦФ буде відповідати переданому сигналу чи його параметрам з деякою точністю, обумовленою властивостями алгоритму. Інакше кажучи, на виході реального ЦФ завжди має місце різного ступеня наближення $y(n) \approx x(n)$. Проте, для останнього співвідношення використовується знак рівності, якщо немає необхідності в іншому.

Рисунок 2.15 – До визначення цифрового фільтра

Цифровий фільтр у вузькому сенсі — це частотно-вибіркове коло, що забезпечує селекцію цифрових сигналів по частоті. До таких фільтрів відносяться: фільтри нижніх частот (ФНЧ), фільтри верхніх частот (ФВЧ), смугові фільтри (СФ), режекторні фільтри (РФ).

У даному розділі розглядається синтез частотно-вибіркових фільтрів, амплітудних коректорів, диференціаторів, перетворювачів Гілберта і узгоджених фільтрів [9].

Як і всі цифрові системи, цифрові фільтри поділяються на два великих класи: нерекурсивні (СІХ) і рекурсивні (НІХ). У свою чергу, у кожному з цих класів виділяють лінійні і нелінійні фільтри. Розглянуті тут фільтри є лінійними, тобто оператор $F[\tilde{x}(n)]$ відповідає властивості лінійності:

$$F[a_1\tilde{x}_1(n) + a_2\tilde{x}_2(n)] = a_1F[\tilde{x}_1(n)] + a_2F[\tilde{x}_2(n)].$$

Формою представлення лінійного оператора F , зокрема, є різницеве рівняння.

Будемо також думати, що досліджувані фільтри:

- фізично можливі. Це означає, що:
 - виконується умова причинності: при нульових початкових умовах реакція $y(n)$ не залежить від майбутніх значень дії $x(n)$. Інакше кажучи, реакція не може виникнути раніш дії. Наприклад, якщо початок дії приходить на момент n_0 , то реакція $y(n)|_{n < n_0} = 0$;
 - фільтр реалізується на заданій елементній базі;
- стаціонарні. Це означає, що:
 - реакція $y(n)$ не залежить від моменту подачі дії $x(n)$, тобто затриманий на n_0 дії $x(n - n_0)$ відповідає реакція $y(n - n_0)$;
 - коефіцієнти передатної функції (різницевого рівняння) є постійні, що не залежать від часу, а тому і всі характеристики фільтра також не залежать від часу.

Таким чином, вивчаються стаціонарні, лінійні, фізично можливі

вибіркові цифрові фільтри.

KIX - фільтри можуть бути побудовані на базі рекурсивних ланок (наприклад, при використанні методу частотної виборки). Такі варіанти тут не розглядаються, тому надалі терміни “нерекурсивні фільтри” і “CIX - фільтри” використовуються як синоніми. Цифрові фільтри, як і будь-яка цифрова система, можуть бути реалізовані апаратно, чи апаратно-програмно, що визначається метою, призначенням і місцем ЦФ у передбачуваній системі.

Апаратна реалізація має на увазі використання різноманітних функціональних блоків (регістрів, суматорів, помножувачів, пристроїв запам'ятовування, логічних елементів і т.п.), поєднаних у єдиний пристрій. Програмна реалізація означає, що фільтр представлений у вигляді програми, написаної мовою програмування, що відповідає конкретному операційному блоку. Так, для персонального комп'ютера це буде кожна з мов високого рівня, а для мікропроцесорного комплексу чи цифрового процесора – мова відповідного асемблера.

Апаратно-програмна реалізація говорить про те, що частина функцій фільтра виконуються апаратно (аналого-цифрове і цифро-аналогове перетворення, множення, синхронізація, прийом (передача) даних і т.д.), а інша частина функцій виконується програмно.

Під проектуванням ЦФ розуміють процес, у результаті якого пред'являється програма чи цифровий пристрій, що відповідає заданим вимогам і обмеженням.

Процес проектування ЦФ містить у собі наступні етапи:

1. Синтез, результатом якого є функціональна схема фільтра з коефіцієнтами. Власне процедури синтезу CIX- і NIX - фільтрів істотно розрізняються, однак мають однакову послідовність дій:

- завдання вимог до фільтрів;
- рішення задачі апроксимації характеристик фільтра, у результаті якої розраховуються коефіцієнти передатної функції (різницевого рівняння);
- конструювання функціональної схеми ЦФ.

2. Вибір чи розробка ефективних алгоритмів обчислень з урахуванням арифметики, використовуваної при заданому методі реалізації: з комою що плаває чи фіксована. Алгоритм залежить від розрядності регістрів процесора, кількості акумуляторів, можливості різних паралельних операцій, наявності пристроїв, що виконують операцію множення з нагромадженням і іншими особливостями процесора. Кінцевою метою цього етапу є забезпечення функціонування фільтра в реальному часі при мінімальних втратах якості обробки сигналів.

3. Перевірка моделюванням проектного фільтра в нереальному часі по стандартних сигналах з використанням програмних засобів налагодження:

- симуляторів системи команд (симуляторів), що імітують роботу конкретного процесора на рівні його команд;
- налаштування — буферних програм, що надають розроблювачу необхідний інтерфейс і забезпечують функціональні можливості стимуляторів.

Задача перевірки моделювання складається у виявленні й усуненні можливих логічних і інших схованих помилок, іспиті на відповідність сконструйованого фільтра заданим характеристикам, включаючи частотні, часові і шумові.

4. Практична реалізація і налагодження в реальному часі за допомогою апаратних засобів налагодження: емуляторів і перевірочних модулів.

Результати перевірки моделювання і налагодження можуть вплинути на зміну ряду рішень від вибору структурної схеми ЦФ аж до завдання нових вимог.

Для вивчення етапів 2–4 тут же розглядаються дії тільки на етапі синтезу ЦФ, причому основна увага приділяється частотно-виборчим СІХ- і НІХ-фільтрам. Особливостям синтезу інших цифрових фільтрів [10].

2.3.1 Синтез цифрових фільтрів

Кожний із класів ЦФ (НІХ і СІХ) має свої, принципово відмінні, методи синтезу, що вивчаються окремо для кожного класу. При цьому виділяються фільтри, у яких реалізовані принципи оптимального синтезу, і фільтри, при синтезі яких принципи оптимальності не приймаються в увагу.

2.3.2 Вимоги до цифрових фільтрів

Вимоги до фільтрів можуть формулюватися як у часовий (рис. 2.16,а), так і в частотній областях (рис. 2.16,б), що визначається призначенням фільтра й областю його опису.

В часовій області (рис. 2.16,а) вимоги можуть задаватися до імпульсного $h(n)$ чи перехідної $g(n)$ характеристики при широких допусках до частотних властивостей фільтра. Так, узгоджені із сигналами фільтри повністю визначаються імпульсною характеристикою, у той час як фільтри, що входять до складу високошвидкісних систем, дуже критичні до тривалості перехідних процесів, тому такі фільтри зручніше описувати перехідними характеристиками.

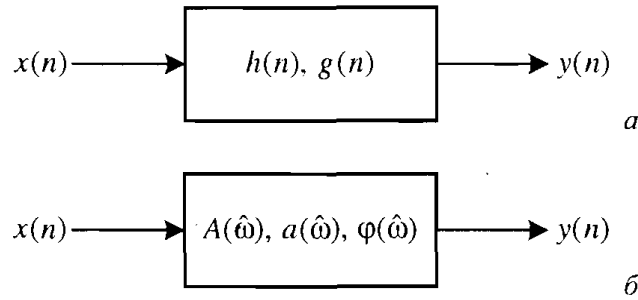


Рисунок 2.16 – Опис фільтра в часовий (а) і в частотній (б) областях

У частотній області (рис. 2.16,б) звичайно синтезуються вибірккові фільтри. При цьому вимоги можуть пред'являтися:

- тільки до АЧХ чи до характеристики ослаблення (загасання) без яких-небудь обмежень на ФЧХ;

- тільки до ФЧХ, коли важливо збереження фазових, а тому і часових співвідношень між гармонійними складовими прийнятого сигналу. Це фазові коректори, у яких АЧХ не залежить від частоти, тобто $A(\hat{\omega}) = \text{const}$ на всьому інтервалі частот $0 < \hat{\omega} < \pi$;

- одночасно і до АЧХ, і до ФЧХ. Наприклад, як буде показано надалі, можливий синтез СІХ-фільтрів із заданої АЧХ і лінійної ФЧХ, що у загальному вигляді представляється формулою

$$\varphi(\omega) = -C\omega T + \varphi_0,$$

де: T – період дискретизації; C – константа; $\omega = 2\pi f$; φ_0 – початкова фаза [8].

При цьому час групової затримки (ЧГЗ) виявляється постійним.

$$\tau_{A \times \varphi} = - \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = CN = \text{const}.$$

При завданні вимог у частотній області й у процесі синтезу самі частоти можуть задаватися як дійсними (f [Гц], ω [рад/с]), так і нормованими ω [рад], що визначається зручністю і традиціями. Оскільки зв'язки між перерахованими представленнями частот відомі, буде не важко переходити від однієї частоти до іншої.

Розглянемо вимоги до частотно-вибірккових ЦФ. На рис. 2.17–2.20,а представлені ідеальні АЧХ фільтрів: НЧ, ВЧ, смугового і режекторного відповідно, які, унаслідок їхньої фізичної неможливості, необхідно апроксимувати у заздалегідь обумовлених допусках, що залежать від ряду практичних обмежень. Ці обмеження пов'язані, насамперед, із призначенням синтезованого фільтра. Всі обмеження і допуски складають

вимоги, пропоновані до фільтра.

Вимоги до фільтрів містять у собі:

- завдання частоти дискретизації f_A [Гц] і типу вибіркості (НЧ, ВЧ і т.д.);

- завдання вимог до АЧХ $A(f)$ чи до характеристики ослаблення (загасання) $a(f)$, що представляє собою логарифмічну АЧХ. При цьому необхідно пам'ятати, що:

- завдання вимог починається з установки всіх граничних частот фільтра тільки в основній смузі частот $0 \leq f \leq f_A/2$;

- вимоги в перехідних смугах вибіркових фільтрів не задаються;

- вимоги формулюються у вигляді припустимих відхилень від нормованої АЧХ $\hat{A}(f)$ [чи від $a(f)$] у смугах пропускання і загасання і відображаються на діаграмі допусків;

- АЧХ $A(f)$ є безрозмірною величиною і виражається в абсолютних одиницях;

- характеристики ослаблення і загасання позначаються однаково $a(f)^2$, розмірність $a(f)$ виражається в децибелах, зв'язок між $A(f)$ і характеристикою ослаблення $a(f)$ визначається формулою

$$a(f) = 20 \lg \hat{A}(f), \quad (2.23)$$

а при відображенні вимог у вигляді характеристики загасання

$$a(f) = -20 \lg \hat{A}(f); \quad (2.24)$$

- вибір методу апроксимації АЧХ $A(f)$ (чи $a(f)$).

2.3.3 Типи вибіркових фільтрів і завдання вимог до них

У даному пункті вивчаються вимоги, пропоновані до АЧХ і характеристик ослаблення (загасання) вибіркових фільтрів. Усі вимоги відображаються на діаграмах. При постановці задач оптимального синтезу ідеальну АЧХ звичайно позначають $\xi(f)$. Найбільше докладно викладаються вимоги до ФНЧ, що неважко перенести і на інші фільтри.

1. Фільтр нижніх частот (ФНЧ) має три частотних смуги (рис. 2.17, б): смугу пропускання (СП), смугу затримування (СЗ), чи придушення (рис. 2.17, в) і загасання (рис. 2.17, г), і перехідну смугу.

Смуга пропускання (СП) обмежується частотою зрізу f_x ; ширина

смуги пропускання $\Delta f_{II} = f_{\chi}$; σ_1 —максимально припустиме відхилення від 1 (рис. 2.17, б); a_{\max} максимально припустиме ослаблення (рис. 2.17, в) у смузі пропускання

$$a_{\max} = 20 \lg(1 - \sigma_1). \quad (2.25)$$

Відповідно максимально припустиме загасання в смузі пропускання (рис. 2.17, з) має вигляд

$$a_{\max} = -20 \lg(1 - \sigma_1).$$

Важливим є та обставина, що відповідно до методу синтезу СІХ- фільтрів відхилення АЧХ від 1 (відповідно $a(f)$ від 0) задається симетрично $1 - \sigma_1 \leq A(f) \leq 1 + \sigma_1$, а для НІХ- фільтрів відхилення задається тільки в одну сторону так, щоб АЧХ не перевищувала одиниці ($1 - \sigma_1 \leq A(f) \leq 1$) і характеристика ослаблення, відповідно, не перевищувала нуля ($a(f) \leq 0$), що відображено на рис. 2.17, б, в винесеними діаграмами. Це означає, що для НІХ- фільтра, синтезованого з тими ж допусками, що і СІХ- фільтр, необхідно задавати в смузі пропускання припустиме відхилення АЧХ

$$\sigma_{1A^2\delta} = 2\sigma_{1E^2\delta},$$

припустиме відхилення характеристики ослаблення

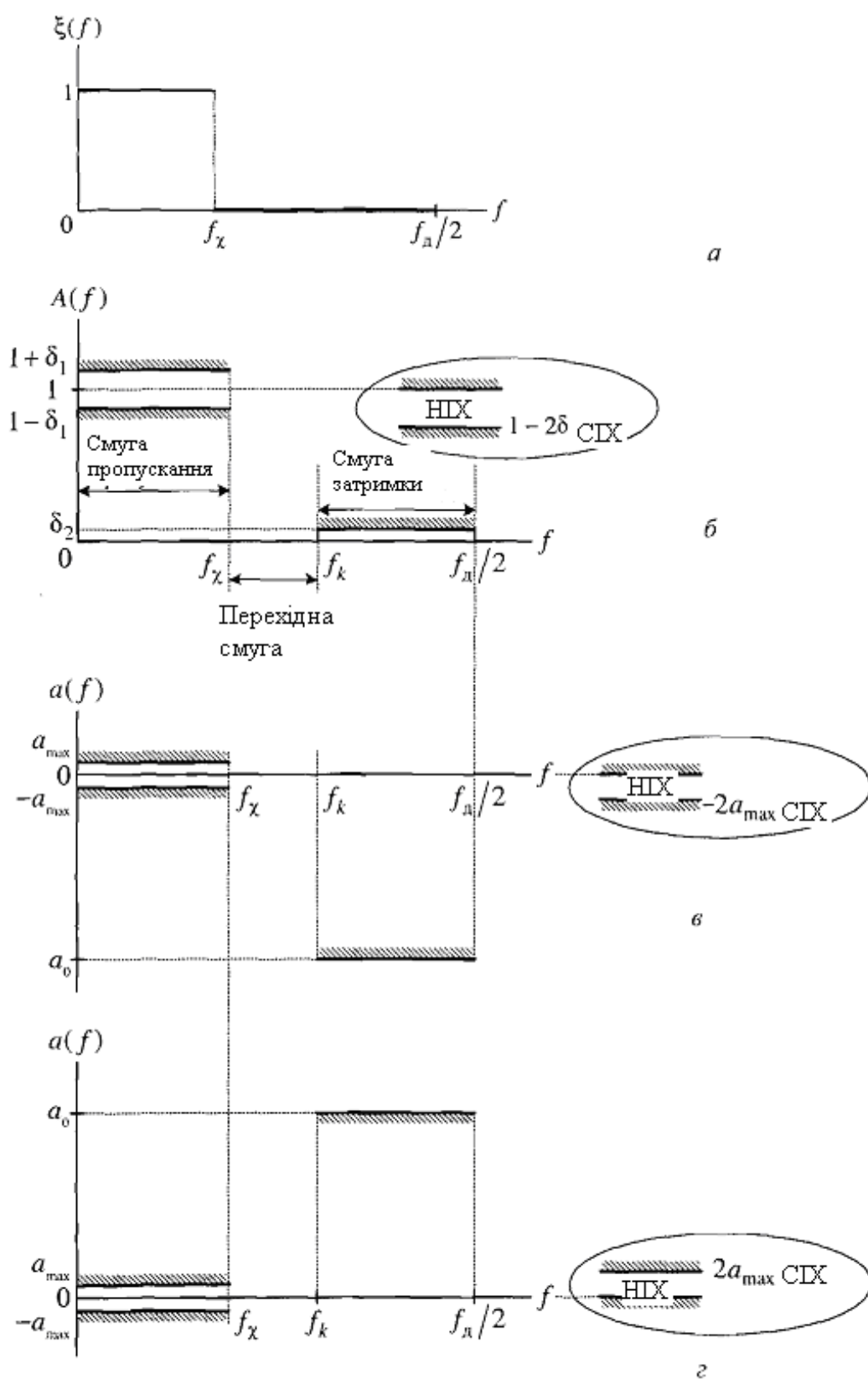


Рисунок 2.17 – Діаграми вимог до ФНЧ: ідеального АЧХ (*a*), вимоги до АЧХ (*б*), вимоги до характеристики ослаблення (*в*), вимоги до характеристики загасання (*г*)

$$a_{\max \hat{A}^2 \hat{O}} = 2a_{\max \hat{E}^2 \hat{O}} \text{ [дБ]},$$

припустимо відхилення характеристики загасання

$$a_{\max \hat{A}^2 \hat{O}} = -2a_{\max \hat{E}^2 \hat{O}} \text{ [дБ]}.$$

Причина, з якої нормована АЧХ НІХ- фільтрів у смузі пропускання не перевищує одиниці, порозумівається методикою синтезу НІХ- фільтрів по аналогових фільтрах-прототипах [11].

Смуга затримування (ослаблення) (СЗ) лежить у межах від граничної частоти f_k до половини частоти дискретизації $f_{\bar{A}}/2$; її ширина $\Delta f_{\bar{N}C} = f_{\bar{A}}/2 - f_k$; σ_2 – максимально припустиме відхилення АЧХ від 0; a_0 – максимально припустиме ослаблення в смузі затримування

$$a_0 = 20 \lg \sigma_2 < 0, \quad (2.26)$$

а в термінах характеристики загасання a_0 – мінімально припустиме загасання в смузі затримування

$$a_0 = a_{\min} = -20 \lg \sigma_2 > 0. \quad (2.27)$$

Перехідна смуга розташовується між смугами пропускання і затримування, її ширина $\Delta f = f_k - f_{\chi}$. Оскільки в цій смузі вимоги не задаються, задовільним виявиться будь-яке рішення, якщо воно відповідає вимогам у смугах пропускання і затримування.

2. Фільтр верхніх частот (ФВЧ) має, як і ФНЧ, три частотних смуги, що розташовані в зворотному, відносно ФНЧ, порядку (рис. 2.18):

- смуга затримування в межах від 0 до f_k , $\Delta f_{\bar{N}C} = f_k$;
- перехідна смуга в межах від f_k до f_{χ} , $\Delta f = f_{\chi} - f_k$;
- смуга пропускання в межах від f_{χ} до $f_{\bar{A}}/2$, $\Delta f_{CI} = f_{\bar{A}}/2 - f_{\chi}$.

Інші параметри визначаються так само, як і для ФНЧ.

3. Смуговий фільтр (СФ) характеризується п'ятьма частотними смугами (рис. 2.19), з яких центральна – смуга пропускання, дві смуги затримування і дві перехідних смуги. Негативний індекс частоти означає, що частота розташована ліворуч від середини смуги пропускання. На рис. 2.19, б позначені: f_k – гранична частота першої смуги затримування ПЗ1, ширина якої $\Delta f_{\bar{N}C1} = f_k$; f_{χ} – ліва частота зрізу смуги пропускання; f_{χ} – права частота зрізу смуги пропускання, ширина смуги пропускання $\Delta f_{CI} = f_{\chi} - f_{-\chi}$; f_k – гранична частота другої смуги затримування ПЗ2,

ширина якої $\Delta f_{\text{НЧ}} = f_{\text{д}}/2 - f_k$.

Рисунок 2.18 – Діаграми вимог до ФВЧ: ідеального АЧХ (а), вимоги

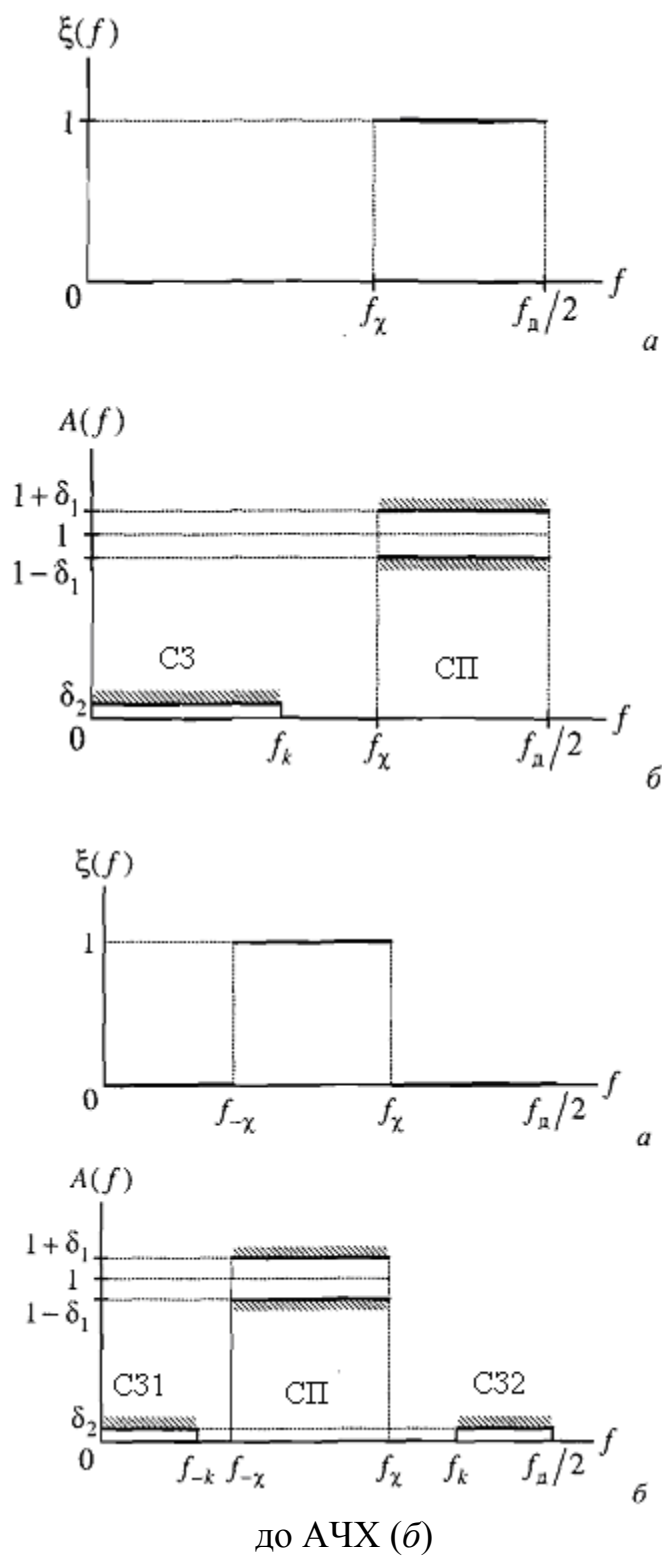


Рисунок 2.19 – Діаграми вимог до СФ: ідеального АЧХ (а),
вимоги до АЧХ (б)

Перехідні смуги 1 і 2 мають ширину $\Delta f_1 = f_{-k} - f_{-\chi}$ і $\Delta f_2 = f_{\chi} - f_k$ відповідно.

При завданні вимог до СФ варто мати на увазі, що в загальному випадку $\Delta f_{\tilde{N}1} \neq \Delta f_{\tilde{N}2}$, $\Delta f_1 \neq \Delta f_2$ і припустимі відхилення від нуля в смугах затримування не зобов'язані бути однаковими.

4. Режекторний фільтр (РФ), іноді називаний смуго-загороджувальним, подібно СФ характеризується п'ятьма смугами (рис. 2.20), з яких дві смуги пропускання, одна смуга затримування і дві перехідних смуги. Від'ємний індекс частоти означає, що частота розташована ліворуч від середини смуги затримування. На рис. 2.20, б позначені: $f_{-\chi}$ – частота зрізу першої смуги пропускання, ширина якої $\Delta f_{CI1} = f_{-\chi}$; f_k, f_{-k} – нижня і верхня граничні частоти смуги затримування, $\Delta f_{\tilde{N}} = f_k - f_{-k}$; f_{χ} – частота зрізу другої смуги пропускання, ширина якої $\Delta f_{\tilde{N}2} = f_A/2 - f_{\chi}$.

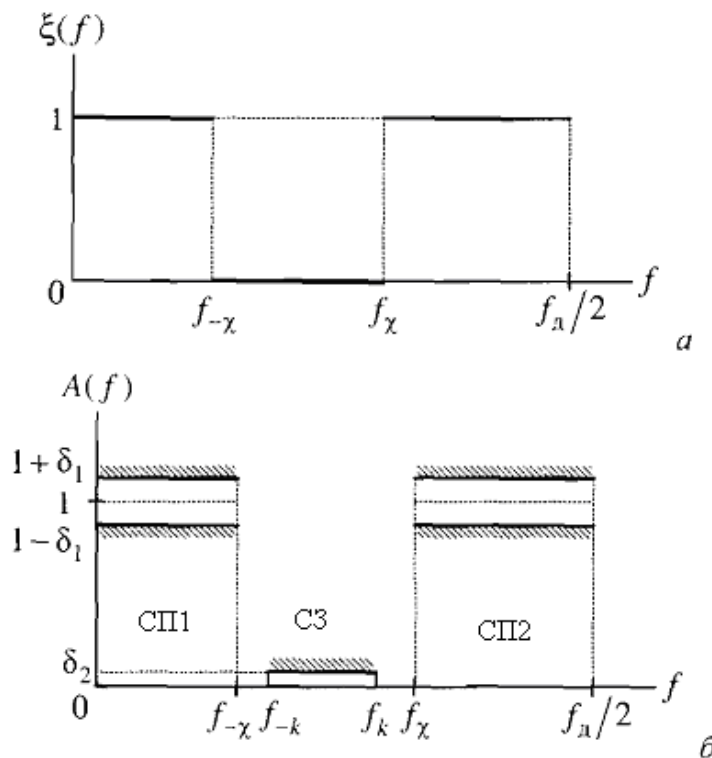


Рисунок 2.20 – Діаграми вимог до РФ: ідеального АЧХ (а), вимоги до АЧХ (б)

Перехідні смуги 1 і 2 мають ширину $\Delta f_1 = f_{-k} - f_{-\chi}$ і $\Delta f_2 = f_{\chi} - f_k$ відповідно.

При завданні вимог до РФ варто мати на увазі, що в загальному випадку $\Delta f_{CI1} \neq \Delta f_{CI2}$, $\Delta f_1 \neq \Delta f_2$ припустимі відхилення від одиниці в

смугах пропускання не зобов'язані бути однаковими.

2.3.4 Синтез скінченної імпульсної характеристики фільтрів методом вікон

Серед достатньої розмаїтості методів синтезу СІХ-фільтрів з лінійною ФЧХ найбільше застосування в різних додатках одержали два “класичних”: методи вікон і метод оптимального (за Чебишевим) синтезу. У даному розділі вивчається перший метод.

Звернемо увагу на той факт, що оскільки коефіцієнти b_i передатної функції (перерахунок h_i , імпульсної характеристики) СІХ-фільтрів з лінійної ФЧХ мають визначену симетрію, досить знати лише половину необхідних коефіцієнтів синтезованого фільтра. Ця властивість дозволяє істотно спростити процедуру розрахунку коефіцієнтів і тому скоротити час їхнього обчислення [11].

2.3.5 Постановка задачі. Визначення методу

В основі обговорюваного методу лежить проста ідея: оскільки частотна характеристика $H(e^{j\hat{\omega}})$ цифрових фільтрів є періодичною функцією, природно скористатися її представленням у вигляді ряду Фур'є для того, щоб обчислити відліки імпульсної характеристики фільтра за допомогою зворотного перетворення Фур'є [11].

2.3.5.1. Загальна характеристика задачі

Без утрати спільності задамося метою розрахувати коефіцієнти (імпульсну характеристику) фільтра НЧ. Ідеальна АЧХ такого фільтра (рис. 2.21) є частково-постійною періодичною функцією з розривом на граничній частоті $\hat{\omega}_c$; при цих умовах в основній області частот ідеальна АЧХ описується функцією

$$A_i(\hat{\omega}) = H_i(e^{j\hat{\omega}}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_c; \\ 0, & \text{іначе} \end{cases}$$

а періодична функція $H_i(e^{j\hat{\omega}})$ може бути представлена рядом Фур'є

$$H_i(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_i(n) e^{-j\hat{\omega}Tn}, \quad (2.28)$$

у якому коефіцієнти Фур'є дорівнюють відлікам ідеальної імпульсної

характеристики:

$$h_i(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H_i(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega. \quad (2.29)$$



Рисунок 2.21 – Ідеальна періодична АЧХ фільтра НЧ

Ясно, що ідеальна передатна функція описує фізично неможливий НІХ-фільтр, оскільки його імпульсна характеристика починається в $(-\infty)$, тобто реакція передуює дії. Найпростіший шлях конструювання фізично можливої передатної функції складається у виключенні всіх членів ряду, що мають від'ємний індекс $n < 0$. Однак така операція дає нескінченну імпульсну характеристику, що відповідає НІХ-фільтру. Для одержання імпульсної характеристики СІХ-фільтра довжини N необхідно обмежити ряд (2.28) ще і зверху до $N-1$ членів, тобто усікти його в межах $0 \leq n \leq N-1$. Процедура усікання ряду (2.28) по суті являє собою операцію множення ідеальної ІХ (2.29) на послідовність $w_R(n)$ вигляду

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (2.30)$$

У результаті множення утвориться реальна імпульсна характеристика $h(n)$ СІХ-фільтра

$$h(n) = w_R(n) h_i(n), \quad (2.31)$$

частотна характеристика якого згідно (2.28) набуває вигляду:

$$H_i(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega T n}. \quad (2.32)$$

Виконуючи в (2.32) заміну $e^{j\omega T} = z$, одержуємо передатну функцію фільтра

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}. \quad (2.33)$$

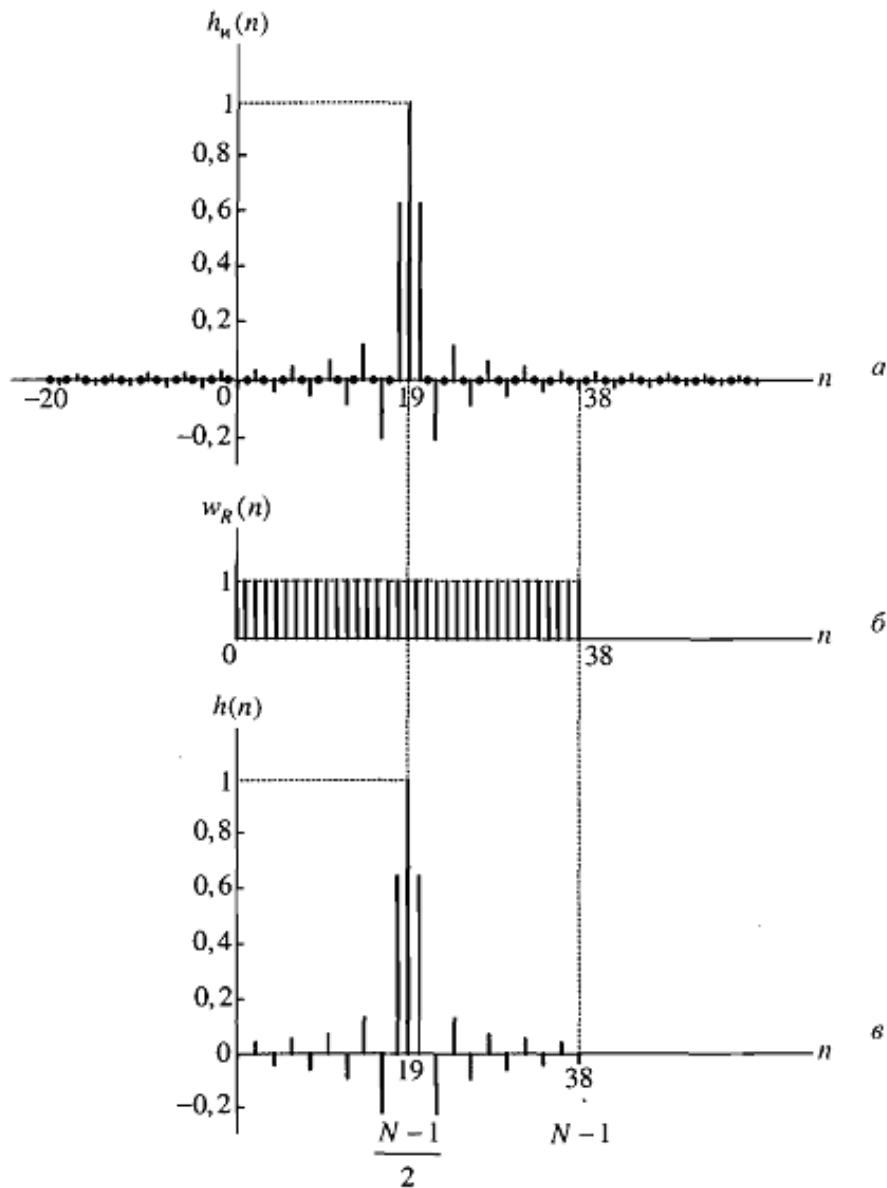


Рисунок 2.22 – Процедура усікання ІХ: відрізок “ідеальної” ІХ (а), послідовність (2.30) (б), реальна ІХ (результат множення на $w_R(n)$) (в)

Приклад формування ІХ фільтра НЧ типу 1 при $N=39$ за допомогою (2.30) показаний на рис. 2.22, де нульовий відлік ідеальної ІХ, що має максимальне значення, дорівнює одиниці, для зручності зсунутий вправо на 19 відліків (рис. 2.22,а); відліки реальної ІХ (рис. 2.22,в), що мають нульові значення, не відзначені [12].

Здавалося б, рішення знайдене. Дійсно, підбираючи значення N і контролюючи поведінку АЧХ, за кілька ітерацій можна знайти таке N , при якому вимоги до заданого фільтра будуть виконані.

2.3.5. 2 Явище Гібса

Перекручування обумовлені характером збіжності ряду Фур'є в точці розриву першого роду, якою і є точка $\hat{\omega}_N$ (див. рис. 2.21, 2.23, б):

- по-перше, у точці розриву $\hat{\omega}_N$ першого роду ряд Фур'є збігається до середнього граничних значень функції ліворуч і праворуч; у нашому випадку це означає, що

$$B(\hat{\omega}_0) = \frac{B(\hat{\omega}_N - 0) + B(\hat{\omega}_N + 0)}{2},$$

де $B(\hat{\omega}_N - 0) = 1$ – межа ліворуч, $B(\hat{\omega}_N + 0) = 0$ – межа праворуч; тому в точці $\hat{\omega}_N$ незалежно від величини N завжди буде

$$B(\hat{\omega}_N) = A(\hat{\omega}_N) = 0,5;$$

- по-друге, у точці розриву збіжність ряду Фур'є не є рівномірною і носить особливий характер, що виражається в появі пульсацій поблизу точки розриву, максимум яких ліворуч і праворуч складає $\approx 9\%$ від АЧХ і залишається таким поза залежністю від N . Цей феномен, одержав назву явища Гібса.

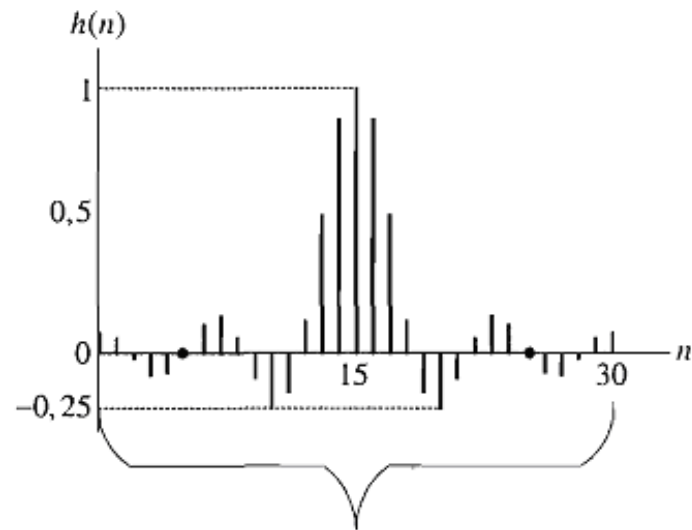
На рис. 2.23,б показана амплітудна функція ФНЧ, імпульсна характеристика якого (рис. 2.23, а) має довжину $N=31$. Видно, що в результаті усікання формуються пульсації як у смузі затримування, так і в смузі пропускання фільтра; крім того, утвориться перехідна смуга (заштрихована область на рис. 2.23,б), ширина якої $\Delta\hat{\omega} = \hat{\omega}_k - \hat{\omega}_\chi$ тим менше, чим більше значення N , причому середина перехідної смуги приходить на частоту $\hat{\omega}_N$.

Вивчимо явище Гібса більш докладно, для чого звернемося до формули. Тут і далі будемо розглядати тільки фільтри типу 1, тобто обмежимося N непарними, оскільки саме такі фільтри найбільше часто використовуються на практиці [13].

Імпульсна характеристика представлена добутком двох функцій у часовій області: ідеальної ІХ і деякою ваговою функцією, чому в частотній області відповідає згортка Фур'є-зображень цих функцій. Фур'є-зображення $h(n)$ представляє собою частотну характеристику $H(e^{j\hat{\omega}})$ фільтра, а Фур'є-зображення вагової функції $w_R(n)$ є її спектром $W_R(e^{j\hat{\omega}})$, що прийнято називати частотною характеристикою функції $w_R(n)$.

Знайдемо частотну характеристику функції, для чого виконаємо перетворення Фур'є:

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_R(n) e^{-j\hat{\omega}n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\hat{\omega}n}. \quad (2.34)$$



Довжина імпульсної характеристики $N = 31$ *a*

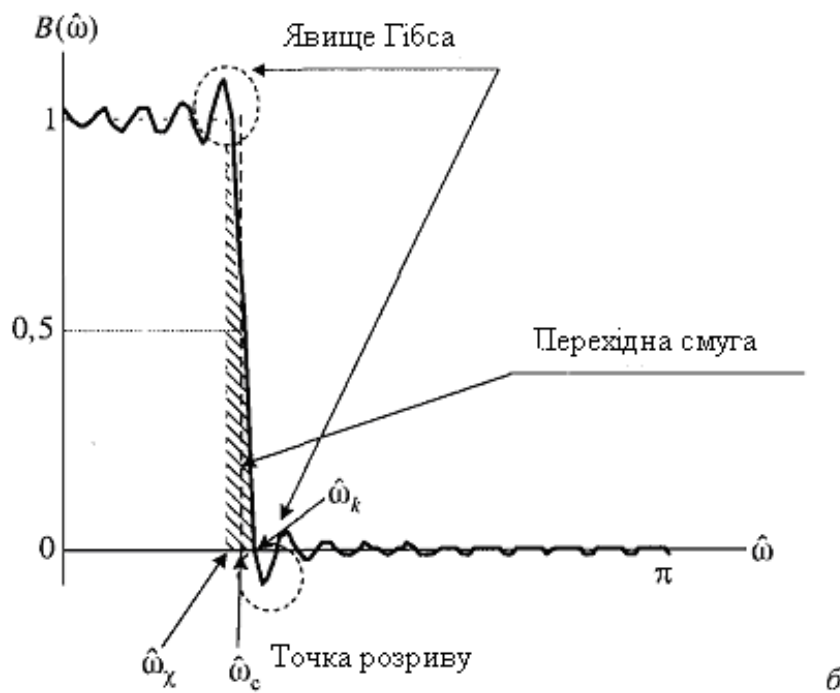


Рисунок 2.23 – Явище Гібса: імпульсна характеристика ФНЧ, $N = 31$ (*a*), амплітудна функція (*б*)

Видно, що $W_R(e^{j\hat{\omega}})$ являє собою суму N членів геометричної прогресії які убуюють

$$S_N = a_0 \frac{1 - q^N}{1 - q},$$

перший член якої $a_0 = e^{-j0n} = 1$, а знаменник $q = e^{-j\hat{\omega}}$. Тому (2.34) можна записати у вигляді:

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = 1 \frac{1 - e^{-j\hat{\omega}N}}{1 - e^{-j\hat{\omega}}} = \frac{e^{-j\hat{\omega}N/2} (e^{j\hat{\omega}N/2} - e^{-j\hat{\omega}N/2})}{e^{-j\hat{\omega}/2} (e^{j\hat{\omega}/2} - e^{-j\hat{\omega}/2})}$$

чи

$$W_R(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-j(N-1)\hat{\omega}/2} \frac{\sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}. \quad (2.35)$$

Функція (2.35) відома під назвою ядра Діріхле, причому $W_R(e^{j\hat{\omega}})|_{\hat{\omega}=0} = N$.

Якщо не враховувати множник, що характеризує лінійний фазовий зсув, то графік нормованого дійсного співмножника ядра Діріхле

$$\tilde{W}_R(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{\omega}}{2}\right)}. \quad (2.36)$$

буде мати форму, показану на рис. 2.24, а при $N=31$; модуль її зображений на рис. 2.24, б. Ця функція має характер швидко загасаючих коливань з максимальним значенням N на частоті $\hat{\omega}=0$. Заштрихована область з максимальною амплітудою називається головною пелюсткою, а інші області — бічними пелюстками.

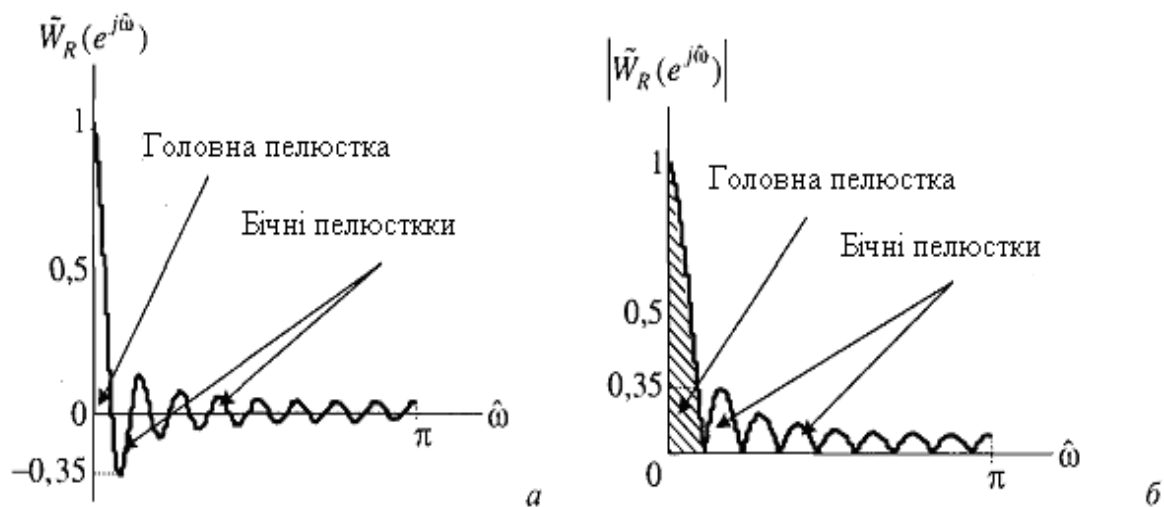


Рисунок 2.24 – Графік функції (2.36) при $N=31$ (а) і її модуль (б)

Функція (2.36) дорівнює нулю, якщо дорівнює нулю її чисельник

$$\sin\left(\frac{\hat{\omega}N}{2}\right)=0 \quad (\hat{\omega} \neq 0),$$

тобто при

$$\frac{\hat{\omega}N}{2}=k\pi, k=1,2,\dots,N.$$

Отже, функція $W_R(e^{j\hat{\omega}})$ (2.35) дорівнює нулю на частотах

$$\hat{\omega}=k\frac{2\pi}{N}, k=1,2,\dots,N,$$

а ширина всіх її пелюсток, включаючи головну, однакова і складає

$$\Delta\hat{\omega}=\frac{2\pi}{N},$$

причому зі збільшенням N ширина пелюсток зменшується і збільшується число пульсацій. На рис. 2.24, а ширина кожної пелюстки складає

$$\Delta\hat{\omega}=\frac{2\pi}{31},$$

а головний пелюсток займає область $0 \leq \hat{\omega} \leq \frac{2\pi}{31}$.

Відомо, що множенню функцій у часовій області відповідає комплексна згортка в частотній області на періоді $[-\pi, \pi]$, тому можна записати у вигляді:

$$H(e^{j\hat{\omega}})=\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(e^{j\varphi})W_R(e^{j(\hat{\omega}-\varphi)})d\varphi. \quad (2.37)$$

Але оскільки

$$H_i(e^{j\hat{\omega}})=\begin{cases} 1, & 0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_c; \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

тоді усікання ряду Фур'є до N членів означає, що $H(e^{j\omega})$ являє собою кругову згортку частотної характеристики ідеального фільтра НЧ $H_i(e^{j\omega})$ з ядром Діріхле. Отже, частотна характеристика ідеального фільтра $H_i(e^{j\omega})$

виявиться розмитою. У результаті одержуємо амплітудну характеристику (див. рис. 2.23, б, $N=31$), у якій поблизу точки розриву спостерігаються два ефекти:

- виникають помилки апроксимації у вигляді пульсацій, зумовлених бічними пелюстками функції $W_R(e^{j\hat{\omega}})$;
- утвориться перехідна смуга, що згладжує розрив, ширина якої залежить від ширини головної пелюстки функції $W_R(e^{j\hat{\omega}})$ і фактично дорівнює їй: чим більше N , тим уже головний пелюстка.

2.3.5.3 Вікна і їхні основні параметри

Явище Гібса порозумівається, як відзначалося раніше, нерівномірною збіжністю ряду Фур'є в точці розриву. Керувати збіжністю ряду Фур'є можна за допомогою вагової послідовності скінченної довжини $w(n)$ (w – перша буква англійського слова *window* – вікно), називаної вікном чи ваговою функцією. Метод полягає в тому, що коефіцієнти ряду Фур'є (тобто імпульсна характеристика $h_i(n)$ ідеального фільтра) збільшуються на $w(n)$. У результаті, подібно, виходить імпульсна характеристика

$$h(n) = h_i(n)w(n) \quad (2.38)$$

і відповідна їй передатна функція реального фільтра

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)w(n)z^{-n},$$

де N — довжина функції $w(n)$.

Обмежена на інтервалі $0 \leq n \leq N-1$ і дорівнювана нулю поза цим інтервалом додатна симетрична вагова функція називається вікном

$$w(n) = \begin{cases} w(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{ідеї } n \notin [0, N-1]. \end{cases} \quad (2.39)$$

Метод конструювання передатної функції за допомогою обмеження ряду вікном часто називається методом вікон чи методом зважування.

Відомо велику кількість вікон, застосування яких визначається характером поставленої задачі синтезу фільтрів. Нижче розглядаються найбільше часто використовувані вікна: прямокутне, трикутне, узагальнене косинусоїдне (сімейство вікон Хенінга, Хемінга, Блекмана) і Кайзера [12].

2.3.5.4 Прямокутне вікно (вікно Діріхле)

Саме прямокутне вікно

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{і щось інше} \end{cases}$$

було використано при простому усередненні ряду Фур'є і вивченні явища Гібса (рис. 2.22, 2.24); отримана частотна характеристика цього вікна і досліджене її поведіння. Можна показати, що при будь-якому N амплітуда пульсацій залишається незмінною і складає $\approx 9\%$ поблизу частоти зрізу $\hat{\omega}_\chi$ причому $A(\hat{\omega}_\chi) = 0,5$ і $\hat{\omega}_\chi = \frac{(\hat{\omega}_\chi + \hat{\omega}_k)}{2}$.

Аналіз прямокутного вікна дозволяє зробити висновок про те, що вікно є “гарним”, якщо воно відповідає двом вимогам:

- ширина головної пелюстки частотної характеристики мала;
- амплітуда бічних пелюсток частотної характеристики швидко зменшується зі збільшенням частоти $\hat{\omega}$.

Ці вимоги несумісні, і необхідний компромісний варіант.

2.3.5.5 Трикутне вікно (вікно Бартлета)

Трикутне вікно, називане також вікном Бартлета (рис. 2.25, а), у часовій області представляється співвідношенням

$$w_T(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & n = 0, \dots, \frac{N-1}{2}; \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & n = \frac{N-1}{2}, \dots, N-1; \\ 0, & \text{і щось інше} \end{cases} \quad (2.40)$$

Нулі $B_T(\hat{\omega})$ розташовуються на частотах, де $\sin(N\hat{\omega}/4) = 0$, а саме:

$$N\hat{\omega}/4 = k\pi; \hat{\omega} = \frac{4\pi}{N}k; \Delta\hat{\omega} = \frac{4\pi}{N}.$$

Це означає, що головна і бічна пелюстки мають ширину $\Delta\hat{\omega}$, що у два рази перевищує ширину пелюсток прямокутного вікна, чим і досягається ефект згладжування пульсацій при одночасному збільшенні перехідної смуги фільтра (рис. 2.25, б) [13].

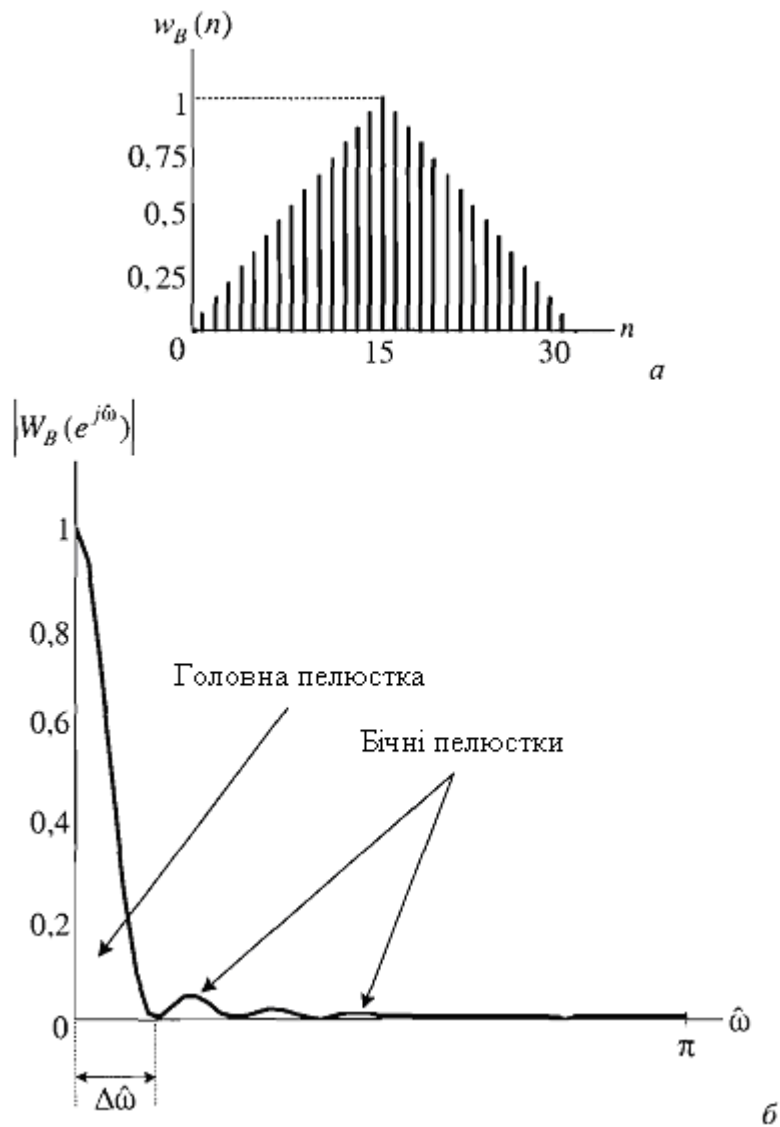


Рисунок 2.25 – Часова (а) і частотна (б) характеристики трикутного вікна при $N = 31$ (а)

Частотна характеристика $W_T(e^{j\hat{\omega}})$ і амплітудна функція $B_T(\hat{\omega})$ трикутного вікна мають вигляд

$$W_T(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{2}{N} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\hat{\omega}} \left[\frac{\sin(N\hat{\omega}/4)}{\sin(\hat{\omega}/2)} \right]^2; \quad (2.41)$$

$$B_T(\hat{\omega}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(N\hat{\omega}/4)}{\sin(\hat{\omega}/2)} \right]^2. \quad (2.42)$$

2.3.5.6 Узагальнене косинусне вікно

Узагальнене косинусне вікно описується виразом

$$w_H(n) = \begin{cases} a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{N-1}n + a_2 \cos \frac{4\pi}{N-1}n; & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.43)$$

Воно має три широко використовуваних форми, що утворюють сімейство косинусних вікон, що відрізняються параметрами a_0, a_1, a_2 , які відповідають умові

$$a_0 + |a_1| + a_2 = 1.$$

Значення цих параметрів і найменування відповідних вікон зазначені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Параметри вікон

Вікна	Параметри		
	a_0	a_1	a_2
Хенінга	0,5	-0,5	0
Хемінга	0,54	-0,46	0
Блекмана-Херіса	0,42	-0,5	0,08

Для одержання частотної характеристики узагальненого вікна представимо його у вигляді добутку:

$$w_H(n) = w_R(n) \left[a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{N-1}n + a_2 \cos \frac{4\pi}{N-1}n \right],$$

де $w_R(n)$ – прямокутне вікно, довжина якого N дорівнює довжині вікна $w_H(n)$.

Розкриємо в останньому виразі дужки

$$w_H(n) = a_0 w_R(n) + a_1 w_R(n) \cos \frac{2\pi}{N-1}n + a_2 w_R(n) \cos \frac{4\pi}{N-1}n \quad (2.44)$$

і замінимо косинуси за формулою Ейлера

$$w_H(n) = a_0 w_R(n) + \frac{a_1}{2} w_R(n) e^{j \frac{2\pi}{N-1}n} + \frac{a_1}{2} w_R(n) e^{-j \frac{2\pi}{N-1}n} + \frac{a_2}{2} w_R(n) e^{j \frac{4\pi}{N-1}n} + \frac{a_2}{2} w_R(n) e^{-j \frac{4\pi}{N-1}n}. \quad (2.45)$$

Це вираження дозволить відразу записати формулу частотної характеристики, якщо множення послідовності $x(n)$ на $e^{j\hat{\omega}_0 n}$ частотній області дає зсув на $\hat{\omega}_0: X(e^{j(\hat{\omega}-\hat{\omega}_0)})$, з урахуванням сказаного з (2.45) одержуємо:

$$w_H(e^{j\hat{\omega}}) = a_0 W_R(e^{j\hat{\omega}}) + \frac{a_1}{2} W_R\left(e^{j\left(\hat{\omega} - \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right) + \frac{a_1}{2} W_R\left(e^{j\left(\hat{\omega} + \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right) + \\ + \frac{a_2}{2} W_R\left(e^{j\left(\hat{\omega} - \frac{4\pi}{N-1}\right)}\right) + \frac{a_2}{2} W_R\left(e^{j\left(\hat{\omega} + \frac{4\pi}{N-1}\right)}\right). \quad (2.46)$$

Для вікон Блекмана-Херіса (рис. 2.26) і Хемінга (рис. 2.27) коефіцієнт k_f виявляється значно менше, ніж для прямокутного вікна, оскільки максимальний рівень бічних пелюсток істотно знижується.

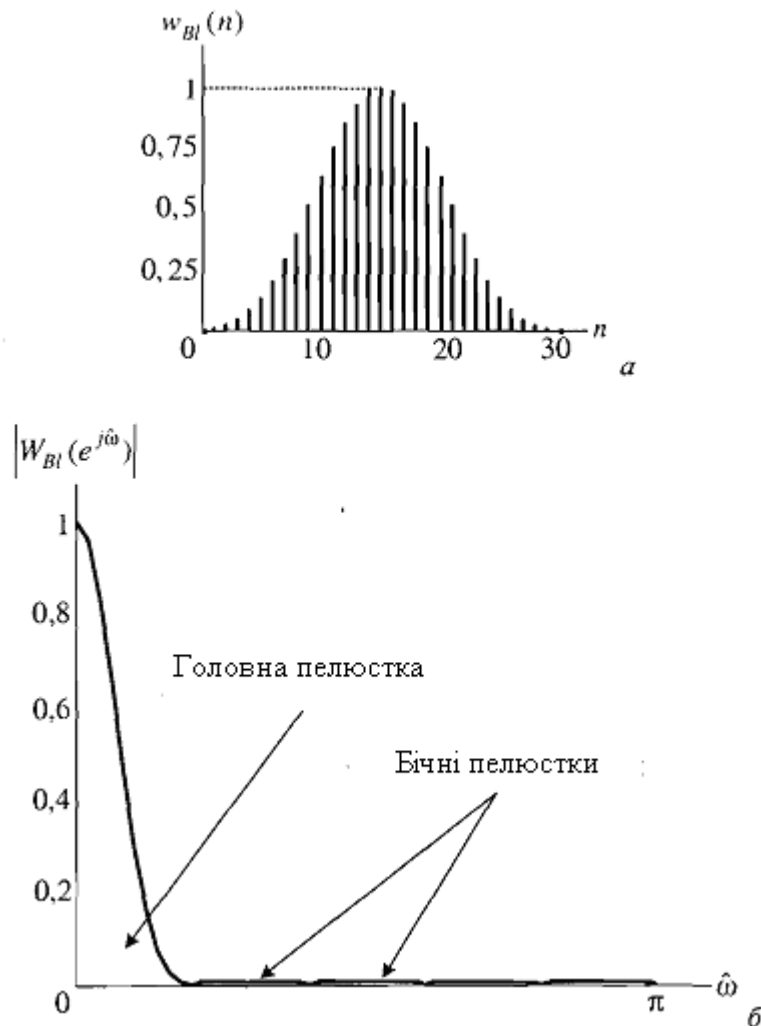


Рисунок 2.26 – Часова (а) і частотна (б) характеристики трикутного вікна Блекмана-Херіса при $N = 31$

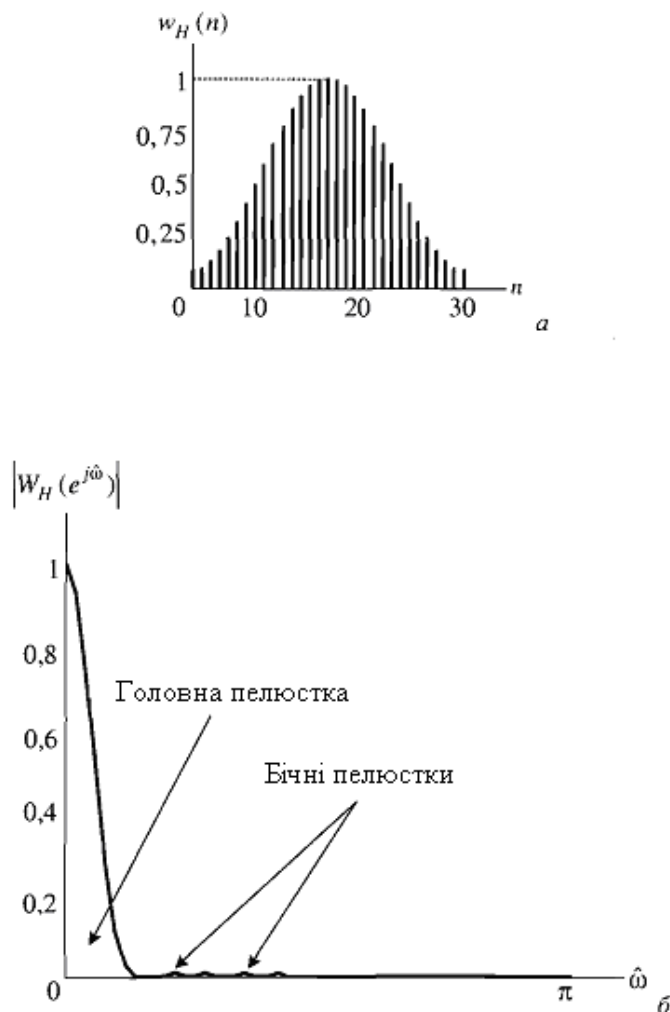


Рисунок 2.27 – Часова (а) і частотна (б) характеристики трикутного вікна Хемінга при $N=31$

Звідси ясно, що частотна характеристика узагальненого вікна являє собою суму зсунутих по частоті частотних характеристик прямокутного вікна $W_R(e^{j\omega})$; при цьому другий, третій, четвертий і п'ятий компоненти істотно зменшують амплітуду бічної пелюстки поблизу головної пелюстки, у результаті чого рівні бічних пелюсток (2.46) виявляються значно нижче, ніж у прямокутного вікна. Однак ширина головної пелюстки для вікон Хемінга і Хемінга виявляється в два рази (за рахунок складання $2\pi/(N-1)$), а для вікна Блекмана-Херіса — у три рази (за рахунок складання $4\pi/(N-1)$) більше, ніж ширина головної пелюстки прямокутного вікна [13].

Ступінь придушення бічних пелюсток характеризують коефіцієнтом пульсації k_f :

$$k_f = \frac{\max_{\omega \neq 0} |W_H(e^{j\omega})|}{|W_H(e^{j0})|} 100\%.$$

Значення основних параметрів розглянутого сімейства вікон зведені в табл. 2.2. Зазначені величини можуть змінюватися в незначних межах у залежності від довжини N і частоти зрізу фільтра.

Таблиця 2.2 – Значення основних параметрів вікон

Тип вікна	Ширина головної пелюстки	Максимальний рівень бічних пелюсток, дБ	Коефіцієнт пульсацій $k_f(N)\%$		
			$N=11$	$N=21$	$N=31$
Прямокутне	$2\pi/N$	-13	22,34	21,89	21,80
Хенінга	$4\pi/N$	-35	2,69	2,67	2,67
Хемінга	$4\pi/N$	-43	1,47	0,93	0,82
Блекмана-Херіса	$6\pi/N$	-67	0,08	0,12	0,12

2.3.5.7 Вікно Кайзера

Уважний розгляд табл. 2.2 приводить до висновку, що між шириною головної пелюстки (тобто шириною перехідної смуги АЧХ фільтра) і коефіцієнтом пульсацій існує явна залежність: зменшення коефіцієнта пульсації для розглянутих вікон супроводжується збільшенням ширини головної пелюстки, що може регулюватися тільки зміною довжини вікна N . З іншого боку, коефіцієнт пульсації для конкретного вікна мало залежить від N , змінюючись у невеликих межах. Ця обставина дозволяє при синтезі фільтра спочатку підібрати вікно з придатними коефіцієнтами пульсації, а потім підібрати довжину N вікна, при якій забезпечується необхідна перехідна смуга. Однак при цьому завжди виходить або занадто велика довжина N , що найчастіше може привести до труднощів реалізації, або надмірна ширина перехідної смуги.

Описане протиріччя в значній мірі може бути переборене (але не вирішено остаточно) компромісом, що досягається за допомогою вікна Кайзера, обумовленого формулою

$$w_K(n) = \begin{cases} I_0 \left(\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{N-1} \right)^2} \right), & |n| \leq \frac{N-1}{2}; \\ 0, & |n| > \frac{N-1}{2}, \end{cases} \quad (2.47)$$

$$I_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x/2}{n!} \right]^2 \quad (2.48)$$

де: – модифікована функція Беселя першого роду нульового порядку; N – довжина СІХ-фільтра (непарна); α – параметр, що визначає величину пульсацій.

Значення α і N обчислюються за емпіричними формулами Кайзера, що приводяться нижче, у які входять загасання в смузі затримування

$$a_{\min} = -20 \lg \delta$$

і нормована ширина перехідної смуги

$$\Delta F = \hat{f}_k - \hat{f}_\chi = (\hat{\omega}_k - \hat{\omega}_\chi) / 2\pi,$$

причому параметр α залежить від вимог до a_{\min} :

$$\alpha = \begin{cases} 0,1102(a_{\min} - 8,7), & a_{\min} > 50; \\ 0,5842(a_{\min} - 21)^{0,4} + 0,07886(a_{\min} - 21), & 21 < a_{\min} < 50; \\ 0, & a_{\min} < 21. \end{cases} \quad (2.49)$$

Вікна Кайзера мають одну чудову властивість: для фіксованого відхилення δ добуток $(N - 1)$ на нормовану ширину перехідної смуги ΔF є практично постійною величиною, що називається D -фактором

$$D = (N - 1) \cdot \Delta F \Big|_{\delta = \text{fix}}, \quad (2.50)$$

звідки

$$N = \left[\frac{D}{\Delta F} + 1 \right], \quad (2.51)$$

де $[x]$ – найближче ціле, що не перевершує x .

D -фактор можна обчислити за формулою

$$\alpha = \begin{cases} \left(\frac{a_{\min} - 7,95}{14,36} \right), & a_{\min} > 21; \\ 0,9222, & a_{\min} < 21. \end{cases} \quad (2.52)$$

Зі співвідношень (2.50) – (2.52) випливає:

- з одного боку, довжина фільтра N обернено пропорційна ширині нормованої перехідної смуги ΔF ;

- з іншого боку, N прямо пропорційно залежить від a_{\min} , що дозволяє

добиватися компромісного значення N за рахунок зниження пульсацій k_f і розширення перехідної смуги.

Розглянуті параметри показані в табл. 2.3. По співвідношеннях і значенням параметрів табл. 2.3 неважко визначити довжину N .

Частотна характеристика вікна Кайзера обчислюється за допомогою виразу

$$w_K(\hat{f}) = \frac{(N-1) \cdot \text{sh} \left[\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{N-1} \right)^2} \right]}{\alpha I_0(\alpha) \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{N-1} \right)^2}}, \quad (2.53)$$

Таблиця 2.3 – Параметри вікна Кайзера

Затухання в смугі затримки a_{\min} , дБ	Параметр α	D -фактор $D = (N-1) \cdot \Delta F$	Затухання в смугі затримки a_{\max} , дБ
30	2,117	1,536	0,27
40	3,395	1,884	0,0864
50	4,551	2,928	0,0274
60	5,653	3,625	0,00868
70	6,755	4,321	0,00275
80	7,857	5,017	0,000868
90	8,959	5,714	0,000275
100	10,061	6,410	0,000087

де $\text{sh}(x)$ – гіперболічний синус

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Обчислення функції $I_0(\alpha)$ зручно робити через представлений статецьний ряд, що сходиться дуже швидко і для $\alpha \geq 19$ уже при 25 членах розкладання дає дуже гарний результат; якщо ж $\alpha < 19$, число членів розкладання істотно знижується і для $\alpha = 19$ виявляється рівним 5.

2. Оцінити довжину N фільтра, що розраховується, можна по заданій довжині ширини смуги ΔF або по табл. 2.3.

2.3.5.8 Визначення величини пульсацій Гібса

Раніше було сказано, що ліворуч і праворуч від точки розриву, тобто

поблизу частоти $\hat{\omega}_\chi$ при усіканні ряду до N членів виникають пульсації, що завжди складають $\approx 9\%$ від значення АЧХ. Покажемо це, для чого запишемо ряд в еквівалентній формі:

$$H_i(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k \cos k\hat{\omega} + b_k \sin k\hat{\omega}). \quad (2.54)$$

Зробимо усікання ряду до N членів, що означає одержання нової функції як часткової суми (2.54):

$$H_k(\hat{\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{N-1} (a_k \cos k\hat{\omega} + b_k \sin k\hat{\omega}) = \sum_{k=0}^R (a_k \cos k\hat{\omega} + b_k \sin k\hat{\omega}),$$

де, як і раніше, прийняте $R = N - 1$. Отримана функція періодична з періодом 2π , являє собою частотну характеристику, і для неї справедливі наступні співвідношення:

$$H_N(\hat{\omega}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^R (a_k \cos k\hat{\omega} + b_k \sin k\hat{\omega}); \quad (2.55)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) \cos k\Omega d\Omega; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) \sin k\Omega d\Omega, \quad (2.56)$$

де частота Ω уведена щоб уникнути плутанини в позначенні частот у наступних формулах. Одержимо $H_N(\hat{\omega})$ підстановкою (2.56) у (2.55):

$$\begin{aligned} H_N(\hat{\omega}) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) \frac{1}{2} d\Omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) \sum_{k=0}^R (\cos k\Omega \cos k\hat{\omega} + \sin k\Omega \sin k\hat{\omega}) d\Omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^R (\cos k\Omega \cos k\hat{\omega} + \sin k\Omega \sin k\hat{\omega}) \right\} d\Omega. \end{aligned}$$

Застосування відомого співвідношення

$$\cos k\Omega \cos k\hat{\omega} + \sin k\Omega \sin k\hat{\omega} = \cos k(\Omega - \hat{\omega})$$

дає

$$H_N(\hat{\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^R \cos k(\Omega - \hat{\omega}) \right\} d\Omega. \quad (2.57)$$

Знайдемо суму S_N , що стоять у фігурних дужках, для спрощення

запису прийнявши $\Omega - \hat{\omega} = \alpha$:

$$S_N(\hat{\omega}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^R \cos k\alpha .$$

Помножимо останню рівність на $\sin(\alpha/2)$:

$$S_N \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin + \sum_{k=0}^R \sin \frac{\alpha}{2} \cos k\alpha . \quad (2.58)$$

Зробимо заміну добутку, що є під знаком суми в (2.58), за відомим співвідношенням

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cos k\alpha = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\alpha}{2} - k\alpha \right) + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + k\alpha \right) \right] ,$$

запишемо (2.57) у вигляді розгорнутої суми

$$\begin{aligned} S_N \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} & \left[\sin \frac{\alpha}{2} + \left(\sin \frac{3\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \left(\sin \frac{5\alpha}{2} - \sin \frac{3\alpha}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \dots + \left(\sin \frac{2R+1}{2} \alpha - \frac{2R-1}{2} \alpha \right) \right] \end{aligned}$$

і після скорочення доданків одержимо

$$S_N \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{2R+1}{2} \alpha ,$$

відкіля випливає

$$S_N = \frac{\sin(2R+1) \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} .$$

Підставляючи отримане для суми вираження в (2.57) і з огляду на $\Omega = \hat{\omega} + \alpha$, одержуємо:

$$S_N(\hat{\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\hat{\omega} + \alpha) \frac{\sin(2R+1) \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2R+1) \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha ,$$

де межі інтегрування приведені до основної смуги частот $\hat{\omega} \in [0, \pi]$.
Крім того, відповідно до умови задачі, $H(\hat{\omega}) = 1$ при $0 \leq \hat{\omega} \leq \hat{\omega}_\chi$ (див. рис.

2.21), що дозволяє записати функціонал

$$H_N(\hat{\omega}_\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\hat{\omega}_\chi} \frac{\sin(2R+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha. \quad (2.59)$$

Для визначення місця розташування екстремумів необхідно взяти похідну від (2.59) по α і результат дорівняти нулю. Відповідно до визначення інтеграла

$$\int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x),$$

досить дорівняти нулю підінтегральний вираз (2.59)

$$\frac{\sin(2R+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 0.$$

Остання рівність виконується за умови

$$\sin \frac{\sin(2R+1)\alpha}{2} = 0,$$

звідки для k -го екстремуму справедливо

$$\frac{2R+1}{2}\alpha = k\pi, k=1,2,\dots$$

Перший, найближчий ліворуч до точки розриву АЧХ, екстремум знаходиться на частоті α , що відповідає $k=1$,

$$\frac{2R+1}{2}\alpha = \pi; \alpha = \frac{2\pi}{2R+1}$$

тому верхня межа інтегрування в (2.59) буде дорівнювати цій же частоті

$$H_N\left(\frac{2\pi}{2R+1}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{2R+1}} \frac{\sin(2R+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha.$$

Для зручності обчислення зробимо заміну змінної

$$v = \frac{2R+1}{2} \alpha,$$

тоді

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{2R+1} \text{ і } d\alpha = \frac{2}{2R+1} dv,$$

і верхня межа інтегрування по новій змінній v виявиться рівною π , оскільки

$$\alpha_{\text{аадо}} = \frac{2\pi}{2R+1} = \frac{2v_{\text{аадо}}}{2R+1}, v_{\text{аадо}} = \pi,$$

Скористаємося цією заміною й у підінтегральному виразі помножимо чисельник і знаменник на v :

$$H_N(\pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} \frac{\frac{v}{(2R+1)}}{\sin \frac{v}{(2R+1)}} dv = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} \frac{\frac{v}{(2R+1)}}{\sin \frac{v}{(2R+1)}} dv.$$

При $N \rightarrow \infty$ (тобто $R \rightarrow \infty$) другий дріб у підінтегральному виразі (2.89) виявляється рівним одиниці

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\frac{v}{(2R+1)}}{\sin \frac{v}{(2R+1)}} = 1,$$

у чому можна переконатися, розкривши невизначеність. Тому маємо

$$H(\pi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v} dv = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi),$$

де інтеграл

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin v}{v} dv$$

являє собою інтегральний синус, значення якого при $x = \pi$ можна взяти з довідника:

$$\text{Si}(\pi) \approx 1,8516.$$

Множачи $\text{Si}(\pi)$ на $2/\pi$, одержуємо $H(\pi) \approx 1,17876$.

Шукана величина першої пульсації Гібса δ_I поблизу точки розриву

на частоті

$$\hat{\omega}_1 = \frac{2\pi}{2(N-1)+1} = \frac{2\pi}{2N-1} < \hat{\omega}_x$$

ліворуч складе половину різниці між значенням отриманого функціонала й одиницею (значенням нормованої АЧХ ліворуч від точки розриву)

$$\delta_I = \frac{H_N \left(\frac{2\pi}{2R+1} \right) - 1}{2}.$$

Отже, незалежно від N ліворуч від точки розриву $\hat{\omega}_x$ має місце приблизно 9 %-вий викид АЧХ

$$(1,17876 - 1)/2 = 0,08949 \rightarrow \approx 9\%.$$

Аналогічно показується, що на частоті

$$\hat{\omega}_2 = \frac{4\pi}{2(N-1)+1} = \frac{4\pi}{2N-1} > \hat{\omega}_x,$$

найближчої праворуч до точки розриву, також має місце викид $\approx 9\%$ щодо нуля [13].

Сказане дозволяє зробити три важливих висновки:

- пульсації, що спостерігаються в смугах пропускання і затримування, є наслідком повільної збіжності ряду Фур'є, що обумовлено наявністю розриву АЧХ на частоті $\hat{\omega}_c$ (праворуч від частоти зрізу $\hat{\omega}_x$ смуги пропускання);

- зі збільшенням N частота пульсацій росте при зменшенні їхньої амплітуди як на нижніх, так і на верхніх частотах; однак амплітуди пульсацій поблизу частоти $\hat{\omega}_c$ (перша пульсація ліворуч і перша пульсація праворуч) залишаються незмінними і складають 9 %;

- розглянуті пульсації забезпечують просочування небажаних спектральних складових оброблюваного сигналу, і тому при проектуванні СІХ-фільтрів виключають просте усікання ряду Фур'є; цей метод потребує такого перетворення, при якому відзначені пульсації придушувалися б до заданої величини. Зокрема, пульсації в смузі пропускання можуть дати значну помилку при каскадній реалізації СІХ-фільтрів: якщо число каскадів дорівнює M , то при пульсації $(1+\delta)$, властивому одному каскаду, загальна пульсація фільтра виявляється рівною $(1+\delta)^M$ і може спричинити переповнення.

2.3.5.9 Методика синтезу скінченної імпульсної характеристики фільтрів на основі вікон

Нагадаємо, що відліки імпульсної характеристики СІХ-фільтрів одночасно є і коефіцієнтами його передатної функції (різницевого рівняння), тому задача синтезу в даному випадку зводиться до одержання імпульсної характеристики.

Методика синтезу містить у собі:

1. Завдання вимог до фільтра.
2. Обчислення імпульсної характеристики $h_i(n)$ “ідеального” фільтра. Зупинимося на цьому пункті більш докладно.

Раніше було показано, що при усіканні ідеальної імпульсної характеристики (тобто при множенні її на прямокутне вікно) на частоті розриву АЧХ f_c (чи $\hat{\omega}_c$) завжди будемо мати значення 0,5 (чи $\alpha=6\text{дБ}$), тобто ця частота знаходиться в межах перехідної смуги $\Delta F = f_k - f_\chi$ (див. рис. 2.21). Однак саме з цією частотою пов'язане обчислення $h_i(n)$. Визначимо частоту f_c такий, щоб f_χ і f_k розташовувалися симетрично відносно f_c ; інакше кажучи, будемо думати, що

$$f_c = \frac{f_\chi + f_k}{2}.$$

Вираз для імпульсних характеристик вибіркового фільтрів при усіканні до N членів (N непарне) наведений в табл. 2.4.

Звичайно ж, визначення імпульсної характеристики залежить від довжини N ; у свою чергу, вибір N пов'язаний з типом використовуваного вікна.

3. Вибір вікна і довжини фільтра (чи порядку $R=N-1$).

Як відзначалося раніше, ширина перехідної смуги фільтра дорівнює ширині головної пелюстки вікна, величина якої може бути визначена для деяких типів вікон з табл. 2.2. Це означає, що:

- по-перше, чим більш вузьку перехідну смугу потрібно одержати, тим більше повинна бути довжина вікна, а тому і довжина фільтра;
- по-друге, чим більше придушення потрібно в смузі затримування, тим більш гладке вікно необхідно використовувати.

Останнє приводить до збільшення ширини перехідної смуги і, як наслідок, до збільшення довжини фільтра для того, щоб домогтися виконання заданих вимог. Тут у наявності протиріччя вимог, що спонукає до пошуку розумного компромісу. Якщо вікно обране, то N оцінюється по другому стовпці табл. 2.2, а саме:

Таблиця 2.4 – Формули для імпульсних характеристик фільтрів

Тип фільтра	Імпульсна характеристика		Примітка
	$h(n)$	$h(0)$	
ФНЧ	$\frac{\sin 2\pi \hat{f}_c n}{n\pi}$	$2\hat{f}_c$	$\hat{f}_c = \frac{f_k - f_{\chi}}{2f_a}$
ФВЧ	$-\frac{\sin 2\pi \hat{f}_c n}{n\pi}$	$1 - 2\hat{f}_c$	
СФ	$\frac{\sin 2\pi n \hat{f}_{c_2} - \sin 2\pi n \hat{f}_{c_1}}{n\pi}$	$2(\hat{f}_{c_2} - \hat{f}_{c_1})$	$\hat{f}_{c_1} = \frac{f_k - f_{\chi}}{2f_a}$;
РФ	$\frac{\sin 2\pi n \hat{f}_{c_1} - \sin 2\pi n \hat{f}_{c_2}}{n\pi}$	$1 - 2(\hat{f}_{c_1} - \hat{f}_{c_2})$	$\hat{f}_{c_2} = \frac{f_k + f_{\chi}}{2f_a}$

$$N = \frac{k\pi}{\Delta F},$$

де $k = 2, 4, 6$; ΔF – нормована ширина перехідної смуги.

У випадку вибору вікна Кайзера довжина N визначається по формулах $N = \left\lceil \frac{D}{\Delta F} + 1 \right\rceil$, $\alpha = \begin{cases} (\frac{a_{\min} - 7,95}{14,36}), & a_{\min} > 21; \\ 0,9222, & a_{\min} < 21. \end{cases}$ після того як отримане

значення N , обчислюються підрахунком обраної функції вікна $w(n)$.

4. Розрахунок імпульсної характеристики реального фільтра. Розрахунок ІХ здійснюється за формулою

$$h(n) = h_i(n)w(n),$$

де $h_i(n)$ береться з табл. 2.4.

Оскільки імпульсна характеристика знайдена, то, здавалося б, процедура на цьому повинна бути закінченою. На жаль, унаслідок наближеної оцінки параметра N , від якого цілком залежить імпульсна характеристика, а тому і частотні властивості фільтра, у край рідко отриманий фільтр задовольняє заданим вимогам, що викликає необхідність перевірити їхнє виконання.

5. Перевірка виконання заданих вимог.

Для перевірки виконання заданих вимог розраховується АЧХ: якщо вимоги виконуються, то на цьому процедуру конструювання передатної функції можна завершити; якщо вимоги не задовольняються, необхідно при обраному вікні збільшити N і повторити кроки 2–5.

Може статися так, що вимоги виконуються з великим запасом – тоді

варто перевірити, чи не можна зменшити N . Інакше кажучи, за деяку кількість ітерацій (проб) обов'язково знайдеться найменше значення N , при якому вимоги виконуються.

Може статися і так, що при обраному вікні довжина фільтра виявляється занадто великою, а фільтр з яких-небудь причин (великі власні шуми, забезпечення роботи в реальному масштабі часу, елементна база) не може бути реалізований. Тоді вибирається інше вікно і процедура повторюється.

Нарешті, вимоги до фільтра можуть виявитися такими, що при обраному вікні вони в принципі ні при яких N не задовольняються; у цьому випадку необхідно перейти до іншого вікна і повторити процедуру.

Контрольні запитання:

1. Що таке цифровий фільтр в широкому смислі?
2. Що таке цифровий фільтр в вузькому смислі?
3. Які етапи включає в себе проектування цифрових фільтрів?
4. Які вимоги до цифрових фільтрів ставляться в часовій області?
5. Які вимоги до цифрових фільтрів ставляться в частотній області?
6. Що включає в себе вимоги до фільтрів?
7. Які вимоги ставляться до ФНЧ?
8. В чому відмінність вимог к ФВЧ від вимог до ФНЧ?
9. Скільки частотних смуг характеризують смуговий фільтр (СФ)?
10. Які частотні смуги у режекторного фільтра (РФ)?
11. Що таке найкращі параметри в задачі оптимального синтезу цифрового фільтра?
12. Які основні етапи виділяються в задачах оптимального синтезу?
13. Чим обумовлюється перекинування при явищі Гібса?
14. Що таке методи вікон?
15. Що таке прямокутне вікно?
16. Що таке загальне конусне вікно?
17. Що таке вікно Кейзера?
18. Як визначається величина пульсацій Гібса?
19. Що включає методика синтезу КІХ-фільтрів на основі вікон?

ЛІТЕРАТУРА

1. Ifeachor E. C, Jervis B. W. Digital Signal Processing / Prentice Hall, 2001.-360p.
2. Itakura F. Line spectrum representation of linear prediction coefficients of speech signals// J. Ac. Soc. Am. — 1975.-96p.
3. Vaidyanathan P. P. Multirate Systems and Filter Banks / Prentice Hall/ Englewood Cliffs. — NY, 1993.-439p.
4. Адаптивные фильтры / Под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. — М.: Мир, 1988.-320с.
5. Анохин В. В., Ланнэ А. А. MATLAB для DSP. Цикл статей / ChipNews, 2000.— №2—4, 7, 9; 2001.— №2; Цифровая обработка сигналов. 2000.-120с.
6. Антонию А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование. — М.: Радио и связь, 1983.-140с.
7. Аоки М. Введение в методы оптимизации. — М.: Наука, 1977.-99с.
8. Башарин С. А., Соловьева Е. Б. Моделирование и анализ нелинейных электрических цепей: Учеб. пособие. — СПб.: СПбГЭТУ, 1999.-156с.
9. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей: Учеб. для вузов. — М.: Радио и связь.-320с.
10. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов.— М.: Мир, 1989.-385с.
11. Вайдънатхан П. П. Цифровые фильтры, блоки фильтров и полифазные цепи с многочастотной дискретизацией: Метод, обзор // ТИИЭР, 1990.-292с.
12. Витязев В. В. Цифровая частотная селекция сигналов.— М.: Радио и связь, 1993.-220с.
13. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М., 1984.-129с.