МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.В. ГЛУШКОВ, О.Ю. ХЕЦЕЛІУС, А.А. СВИНАРЕНКО,
Л.А.ВІТАВЕЦЬКА, Т.О.ФЛОРКО

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Конспект лекцій

О д е с а – 2011

ББК 28.082:22.1
Г 13
УДК 504:534.1

Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Свинаренко А.А., Вітавецька Л.А., Флорко Т.О., Математичне програмування (Конспект лекцій).–Одеса, Вид.: Екологія, 2011.

У конспекту лекцій викладені питання лінійного, нелінійного, цілочисельного, динамічного програмування, особливості транспортної задачі, та інше.

Для студентів спеціальності «менеджмент» університетів. Конспект лекцій використовується для денної та заочної форм навчання.

Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету (протокол №8 від 28.10.2010 р.).

ЗМІСТ	Стор.

ПЕРЕДМОВА

Серед багатьох типів економіко-математичних моделей існують такі, серед яких важливими є оптимізаційні моделі, що характеризуються великою кількістю економічних та технологічних зв'язків. Їх вибір підпорядковується заданим критеріям ефективності.

В літературі [6] такий вибір пов'язують із задачею раціонального ведення господарства, раціональної діяльності, тобто з роподілом обмежених ресурсів для ефективного досягнення поставленої мети. Внаслідок обмеженості ресурсів доводиться вибирати той чи інший варіант їх використання. При доцільному виборі можна досягти поставленої мети, не перевищуючи межу використання ресурсів.

Проблему раціонального ведення господарства можна розглядати з позиції методу математичної оптимізації в економіці. Задачу оптимізації можна сформулювати як пошук таких значень деяких змінних, що задовольняють обмеження, при яких досягається максимум чи мінімум функції. Останні є критерієм ефективності виробництва.

Серед задач раціонального ведення господарства, які пов'язані з розподілом обмежених ресурсів, слід розрізняти ті, що розглядаються у фіксовані моменти часу, і задачі на перспективу. Але у будь-якому випадку математично задача полягає у відшуканні змінних, що оптимізують задану функцію і задовольняють систему обмежень.

Перш ніж вибирати метод для розв'язання задачі необхідно з'ясувати, до якого класу вона належить. Умовно задачі математичного програмування, які полягають у дослідженні функції на екстремум (найбільше і найменше значення), на змінні якої накладені певні обмеження, можна розбити на такі:

- задачі лінійного та нелінійного програмування (в залежності від вигляду невідомих математичної моделі задачі);
- задачі динамічного та статичного програмування (з урахуванням чи без урахування часу);
- задачі детермінованого та статистичного програмування (в залежності від характеру вихідних параметрів моделі).

Математична модель будь-якої оптимізаційної моделі залежить від двох складових:опису економічних та технологічних зв'язків, що випливають із змісту задачі;задання критерію ефективності її розв'язку.

Розв’язок математичної моделі задачі, який забезпечує критерій ефективності її розв’язку, називається оптимальним. У залежності від конкретної моделі ці розв’язки можуть набувати різного змісту.

У данному посібнику розглянуті питання лінійного, нелінійного, цілочисельного, динамічного, стохастичного програмвання, особливосі транспортної задачи тощо.

Користуючись випадком, автори висловлюють подяку декану Інституту математики, механіки та економіки Одеського національного університету ім. І.Мечникова, д-ру фіз.-мат. н., професору Шевчуку В.Г., завідувачам кафедр вищої математики та комп’ютерного моделювання Одеського національного політехнічного університету, д-ру фіз.-мат. н., професору Новікову В.В. та д-ру фіз.-мат. н., професору Усову А.В., за корисні дискусії з ряду питань.

Розділ 1

ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

§1.1. Основні властивості задач лінійного програмування

Перед лінійним програмуванням (ЛП) стоять дві важливі проблеми:
1) моделювання економічних задач;
2) пошук найефективнішого (оптимального) плану на базі побудованої математичної моделі [1], [3].

Задача лінійного програмування (ЗЛП) полягає в наступному: серед всіх невід’ємних розв’язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (=,\ge)\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (=,\ge)\ b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (=,\ge)\ b_m, \end{cases} \tag{1}$$

знайти такий, при якому функція $z(x)$

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2}$$

набуває найбільшого значення.

Залежно від системи обмежень, ЗЛП має такі основні форми: стандартна, канонічна та загальна. Стандартна форма має вигляд:

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \ \to\ \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le\ b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le\ b_m, \end{cases} \tag{3}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_n \ge 0.$$

Якщо

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

тоді стандартна форма у матричному вигляді:

$$z = c^T x \;\to\; \max$$

$$Ax \;\le\; b \qquad (4)$$

$$x \;\ge\; 0,$$

де $\quad c^T = (c_1, c_2, \dots , c_n)$,

$c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ – скалярний добуток векторів c та x, знак T – це транспонування.

Загальна ЗЛП має вигляд:

$$z = c^T x \;\to\; \max$$

$$Ax \;\le\; (=, \ge) \;\; b \qquad (5)$$

x □□□ 0.

Компоненти вектора c називають *коефіцієнтами вартості*, сам вектор c – *вектор вартості*.

Вектор b – це матриця умов або *витрат*. Функція $z = c^T x$ називається *цільовою функцією*.

Обмеження Ax □ (=, □) b називають *основними обмеженнями*, а обмеження x □ 0 – *прямими*.

Стандартна форма ЗЛП

1) Цільова функція максимізується.

2) Обов'язкова присутність прямих обмежень.
3) Основні обмеження містять знак нерівності «≤». Кількість основних обмежень може бути будь-якою.

$$z = c^T x \;\to\; \max$$

$$Ax \;\le\; b; \qquad (6)$$

$$x \;\ge\; 0.$$

Канонічна форма ЗЛП

1) Цільова функція (2) максимізується.
2) Обов'язкова присутність прямих обмежень.
3) Основні обмеження мають знак «=», кількість основних обмежень менша, ніж кількість невідомих.
4) Вектор обмежень b невід'ємний ($b \ge 0$).

$$z = c^T x \;\to\; \max$$

$$Ax \;=\; b,\; b \;\ge\; 0 \qquad (7)$$

$$x \;\ge\; 0,$$

$$m \;<\; n.$$

Будь-яку ЗЛП можна звести до стандартної або канонічної форми.

Правила зведення ЗЛП до стандартної або канонічної форми.

1) У випадку мінімізації цільової функції $z = c^T \cdot x$, вводячи функцію $w = -z$, дістанемо оптимізацію на максимум:
2)

$$\min z = \max w$$

2) Основне обмеження у вигляді рівності, яке має від'ємну праву частину

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \;=\; -\,b_k,$$

можна замінити на обмеження з невід'ємною правою частиною, якщо обидві його частини помножити на –1:

$$-a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \ldots - a_{kn}x_n \;=\; b_k.$$

3) Для зведення обмеження у вигляді нерівності:

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n \le b_l,$$

до канонічної форми необхідно ввести додаткову невідому $x_{n+1} \ge 0$. Тоді отримаємо

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n + x_{n+1} = b_l,$$

4) Для перетворення обмеження:

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n \ge b_s,$$

до канонічної форми необхідно додаткову змінну $x_{n+2} \ge 0$ відняти від лівої частини:

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n - x_{n+2} = b_s.$$

5) Для того, щоб звести обмеження

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \ge b_p,$$

до стандартної форми, необхідно обидві частини нерівності помножити на –1:

$$-a_{p1}x_1 - a_{p2}x_2 - \ldots - a_{pn}x_n \le -b_p.$$

6) Для перетворення обмеження

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r,$$

до стандартної форми розглянемо два обмеження:

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \le b_r,$$

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n \ge b_r.$$

Останнє з них треба домножити на –1.

Приклад. Розглянемо ЗЛП

$$w = -2x_1 - 4x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 1600 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

У стандартній формі (6) отримаємо:

$$z = 2x_1 + 4x_2 \;\to\; \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \;\leq\; 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 \;\leq\; 1600 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

Для зведення до канонічної форми (7) додаємо до лівих частин обмежень – нерівностей нові додаткові змінні x_3 та x_4.

$$z = 2x_1 + 4x_2 \;\to\; \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \;=\; 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 \;=\; 1600 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0, \;\; x_4 \geq 0.$$

§1.2. Основні визначення та теореми лінійного програмування

Розглянемо основні обмеження прикладу з попереднього параграфу. Вони мають вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \;=\; 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 \;=\; 1600 \end{cases}$$

де $m = 2$, $n = 4$, $m < n$.

Коли система містить рівнянь менше, ніж невідомих, то вона має нескінченну множину розв’язків. Розглянемо:

$$(x_1,x_2), \;\; (x_1,x_3), \;\; (x_1,x_4),$$

$$(x_2,x_3), \;\; (x_2,x_4), \;\; (x_3,x_4).$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	1700	1600
2	0	425	0	–525
3	0	320	420	0
4	$566\frac{2}{3}$	0	0	$466\frac{2}{3}$
5	800	0	–700	0
6	300	200	0	0

З усіх розв’язків ми отримали 4, які задовольняють основні та прямі обмеження, і саме серед них знаходиться оптимальний розв’язок задачі. Це той розв’язок, який надає цільової функції максимального значення.

Означення. Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, який є розв’язком ЗЛП, називається *оптимальним розв’язком*.

Означення. Будь-який вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє всім обмеженням ЗЛП, називається *допустимим розв’язком (планом)*.

Означення. Вектор x називається *базисним розв’язком*, якщо $n - m$ його компонентів дорівнюють «0», а решта m компонент обчислюються, як єдиний розв’язок системи основних обмежень, які містять m рівнянь відносно n невідомих.

Змінні, прирівняні до 0, називаються *вільними*, а змінні, одержані як розв’язок системи обмежень, називаються *базисними*.

Означення. Базисний розв’язок називається *допустимим*, якщо всі його компоненти невід’ємні, тобто задовольняють прямі обмеження (опорні плани).

Означення. Множина K називається *опуклою*, якщо для будь-яких двох елементів цієї множини, відрізок, який їх з’єднує, повністю належить множині K.

Означення. *Вершиною* опуклої множини називається точка множини, для якої не існує відрізка, який містить в собі цю точку і повністю належить цій множині.

Теорема. *Множина допустимих розв’язків в ЗЛП є опуклою.*

Теорема. *Базисні допустимі розв'язки відповідають вершинам опуклої множини.*

Якщо ЗЛП має оптимальний розв'язок, то він міститься серед базисних допустимих розв'язків, тобто серед вершин опуклої множини. Якщо ЗЛП має нескінченну множину розв'язків, то вони містяться на однієї з границь опуклої множини (коли лінія рівня цільової функції паралельна однієї з границь області). ЗЛП не має розв'язків, коли область допустимих розв'язків – це опукла, необмежена множина.

§1.3. Симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування

Після зведення задачі ЛП у стандартній формі до канонічної форми введенням нових додаткових змінних отримуємо:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \ldots x_{n+m} \geq 0. \end{array}$$

Отримали задачу, яка називається канонічною ЗЛП в базисній формі. Вона містить змінні, які входять в основні обмеження один раз в одне рівняння з коефіцієнтом 1 ($x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$) і називаються *базисними*.

m – кількість основних обмежень, n – кількість змінних.

Нам треба знайти початковий базисний допустимий розв'язок.

$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_n$ – базисні змінні;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – небазисні (вільні) змінні.

Нехай:

$$\begin{array}{c} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \ldots, \\ x_n = 0. \end{array}$$

Тоді:

$$\begin{array}{c} x_{n+1} = b_1, \\ x_{n+2} = b_2, \\ \ldots, \\ x_{n+m} = b_m - \end{array}$$

початковий базисний допустимий розв’язок.

Умову ЗЛП у базисній формі зручно задати у вигляді симплекс-таблиці

c	x	b	c_1	c_2	… c_n	c_{n+1}	c_{n+2}	…	c_{n+m}	θ
			x_1	x_2	… x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	
c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	… a_{1n}	1	0	…	0	$\frac{b_1}{a_{1s}}$
c_{n+2}	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	… a_{2n}	0	1	…	0	$\frac{b_2}{a_{2s}}$
…	…	…	…			…	…	…	…	…
c_{n+m}	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	… a_{mn}	0	0	…	1	$\frac{b_m}{a_{ms}}$
Δj		z	Δ_1	Δ_2	… Δ_n	…	…	…	Δ_{n+m}	

x містить змінні, які є базисними,
c – відповідні коефіцієнти цільової функції,
b – початковий базисний допустимий розв’язок задачі, який не дорівнює нулю.

Решта таблиці містить коефіцієнти основних обмежень.

Побудуємо оціночний рядок за формулою:

$$\Delta j = z_j - c_j$$

(для кожного j-того стовпчика матриці коефіцієнтів обчислюється сума добутків відповідних коефіцієнтів цього стовпчика та стовпчика c, а потім віднімається відповідне c_j):

$$\Delta_1 = c_{n+1}a_{11} + c_{n+2}a_{21} + \ldots + c_{n+m}a_{m1} - c_1$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\Delta j = c_{n+1}a_{1j} + c_{n+2}a_{2j} + \ldots + c_{n+m}a_{mj} - c_j$$

В оціночному рядку у стовпчику b знаходиться початкове значення цільової функції.

Алгоритм розв’язання ЗЛП симплекс методом

1. Продивляємось усі елементи оціночного рядка. Якщо всі оцінки $\Delta j \geq 0$, то записаний в таблиці базисний допустимий розв’язок є оптимальним, а відповідне значення цільової функції максимальне.

2. Якщо серед оцінок Δj є хоча б одна від'ємна, то виберемо стовпчик з найменшою від'ємною оцінкою і назвемо його ключовим стовпчиком. Нехай номер цього стовпчика s ($\Delta_s < 0$). Якщо у ключовому стовпчику усі елементи $a_{is} < 0$, то ЗЛП розв'язків не має, бо цільова функція необмежена.

3. Якщо серед елементів ключового стовпчика є додатні, то для них обчислюємо відповідні величини, які записуємо у стовпчик θ. $\theta_i = b_i/a_{is}$ (відношення елементів стовпчика b до відповідних додатних коефіцієнтів ключового стовпчика). Серед отриманих відношень θ_i виберемо найменше. Номер цього відношення визначає номер ключового рядка r.

Елемент a_{rs}, який знаходиться на перетині ключового стовпчика та ключового рядка, називається ключовим елементом. З його допомогою ми перетворюємо таблицю та одержуємо новий базисний допустимий розв'язок. Номер рядка показує, яку базисну змінну виводимо з базису, а номер стовпчика ключового елементу вказує, яку вільну змінну треба ввести в базис.

Перетворення таблиці

1. Ключовий рядок ділимо на ключовий елемент.
2. Елементи ключового стовпчика, крім самого ключового елементу, замінимо нулями.
3. Для решти елементів таблиці використовуємо метод Жордана-Гаусса.

Для перетворення елементу a_{ij} будуємо прямокутник, діагональ якого утворюють елемент a_{ij} та ключовий елемент a_{rs}.

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots\cdots & a_{rs} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{rj} & \cdots\cdots & a_{rs} \end{array}$$

$$a_{ij}^{*} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$$

Перетворену таблицю аналізуємо за оціночним рядком.

Приклад.

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

x_3, x_4 – базисні змінні;
x_1, x_2 – вільні.
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$,
$x_3 = 1700$, $x_4 = 1600$;
$z = 0$.

$x_o = (0; 0; 1700; 1600)$ – початковий роз'вязок.
$z_o = 0$.

c	x	b	2	4	0	0	θ	
			x_1	x_2	x_3	x_4		
0	x_3	1700	3	4	1	0	425	
0	x_4	1600	2	5	0	1	320	→
	Δj	0	–2	–4	0	0		
				↑				
0	x_3	420	$^7/_5$	0	1	$-^4/_5$	300	→
4	x_2	320	$^2/_5$	1	0	$^1/_5$	800	
	Δj	1280	$-^2/_5$	0	0	$^4/_5$		
			↑					
2	x_1	300	1	0	$^5/_7$	$-^4/_7$		
4	x_2	200	0	1	$-^2/_7$	$^3/_7$		
	Δj	1400	0	0	$^1/_7$	$^4/_7$		

Від'ємна оцінка Δj при обчислюванні значення цільової функції дозволяє отримати значення більші, ніж на попередньому етапі.

$$x_1 = (0; 320; 420; 0),$$
$$z_1 = 1280$$

$$x_2 = (300; 200; 0; 0),$$
$$z_2 = 1400$$

x_2 – оптимальний розв'язок
($\Delta j \geq 0$).

Отже ідея методу полягає в переході від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб значення цільової функції оптимізувалося (зростало). Зазначимо, що змінні задачі, які переходять з базисних у вільні, обираються так, щоб зберігалась умова невід'ємності задачі. Крім того, на кожному кроці в базисі змінюється лише одна базисна і одна вільна невідомі.

§1.4. Метод штучного базису

Розглянемо ЗЛП в канонічній формі, але не в базисній:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots &\ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (8)$$

$$m < n, \quad b_i \geq 0, \; x_1 \geq 0, \; \ldots, \; x_n \geq 0.$$

Задача у такій формі не містить базисних змінних. Для розв’язання задачі (8) розглянемо допоміжну задачу. Для цього вводимо m додаткових штучних змінних:

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \; (\geq 0).$$

В кожне рівняння основних обмежень додамо по одній штучній змінній:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots &\ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m. \end{aligned} \qquad (9)$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+m} \rightarrow \max.$$

Додаткові змінні мають невід’ємні значення. Тому, якщо їх помножити на нескінченно велике число M і взяти зі знаком «–» та, крім того, ввести їх у цільову функцію, яка максимізується, то найбільшого значення функція набуває у випадку, коли всі додаткові змінні будуть дорівнювати нулю.

Величина M в (9) має значення штрафу за те, що штучні змінні увійдуть до базису.

Ціль методу – отримати допустимий базисний розв’язок, який не містить штучних додаткових змінних у складі базисних.

c	x	b	c_1	c_2	…	c_n	$-M$	…	$-M$
			x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}
$-M$ … $-M$	x_{n+1} … x_{n+m}	b_1 … b_m							

$M >> 0$.

1. Якщо в оптимальному розв'язку M-задачі штучні змінні дорівнюють «0», то отриманий розв'язок є оптимальним розв'язком вихідної задачі.
2. Якщо в оптимальному розв'язку M-задачі хоча б одна штучна змінна ≥ 0, то вихідна задача не має розв'язку, бо умови несумісні.
3. Якщо M-задача не має розв'язку, то і вихідна задача не має оптимального розв'язку.

При розв'язанні ЗЛП в канонічній формі можуть виникнути такі ситуації:

1) всі рівняння основних обмежень містять одну базисну змінну (тоді можна отримати початковий базисний допустимий розв'язок і застосувати звичайний симплекс-метод);

2) жодне з рівнянь основних обмежень не містить базисних невідомих (тоді вводимо стільки штучних базисних змінних, скільки маємо основних обмежень. Для розв'язання застосовується M-метод);

1) якщо кількість рівнянь основних обмежень містить базисні змінні, а решта їх не має, то штучні змінні вводяться по кількості недостаючих до базису. Для розв'язання застосовується M-метод.

§1.5. Двоїста задача лінійного програмування

Розглянемо ЗЛП у стандартній формі:

$$z = c^{\mathrm{T}}x \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_n;$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ldots\ , x_n \geq 0.$$

Побудуємо для (10) двоїсту задачу, використовуючи такі правила:

1. Введемо змінні y_1, y_2, … , y_m. Кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості основних обмежень вихідної задачі, а кількість основних обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі.
2. Коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі – це праві частини основних обмежень вихідної задачі. Цільова функція мінімізується.
3. Стовпчики матриці основних обмежень вихідної задачі є коефіцієнтами основних обмежень двоїстої задачі. Знаки нерівностей основних обмежень двоїстої задачі «≥». Коефіцієнти цільової функції вихідної задачі є правими частинами основних обмежень двоїстої задачі.
4. Всі змінні двоїстої задачі задовольняють прямим обмеженням.

Маємо:

$$u = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \ \rightarrow\ \min$$

$$\begin{gathered} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ \geq\ c_1; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ \geq\ c_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ \geq\ c_n; \end{gathered} \qquad (11)$$

$$y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0,\ \ldots\ , y_m \geq 0.$$

Приклад. Для ЗЛП

$$z = -4x_1 + 3x_2 \ \rightarrow\ \max$$

$$\begin{gathered} -8x_1 + 3x_2 \ \leq\ 12; \\ -x_1 + 5x_2 \ \leq\ 5; \\ 5x_1 - 8x_2 \ \leq\ 8; \end{gathered}$$

$$x_1 \ \geq\ 0;\ \ x_2 \ \geq\ 0$$

побудувати двоїсту.

$$u = 12y_1 + 5y_2 + 8y_3 \ \rightarrow\ \min$$

$$\begin{gathered} -8y_1 - y_2 + 5y_3 \ \geq\ -4; \\ 3y_1 + 5y_2 - 8y_3 \ \geq\ 3; \end{gathered}$$

$$y_1 \geq 0;\ y_2 \geq 0;\ y_3 \geq 0.$$

Теорема. *Якщо одна з двоїстих одна одній задач має оптимальний розв'язок, то і друга задача має оптимальний розв'язок. Значення цільової функції вихідної та двоїстої задач співпадають. Якщо x^* – оптимальний розв'язок вихідної задачі, y^* – оптимальний розв'язок двоїстої задачі, то $c^T x^* = b^T y^*$.*

Теорема. *Для того, щоб допустимі розв'язки x^* та y^* були оптимальними розв'язками вихідної та двоїстої задач, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*

$$1)\quad y_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$Y^* \cdot (A \cdot X^* - B) = 0;$$

$$2)\quad x_j^* \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_j^* - c_i \right) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$X^* \cdot (A \cdot Y^* - C) = 0.$$

Перше обмеження означає, що на оптимальному розв'язку, або i-та компонента розв'язку двоїстої задачі дорівнює нулю (тобто вільна), або відповідне обмеження вихідної задачі виконується як рівність.

Аналогічно і друга умова – або j-та компонента розв'язку вихідної задачі дорівнює нулю, або відповідне обмеження двоїстої задачі виконується як рівність.

Розв'язання двоїстої задачі

Якщо одна з двоїстих задач має стандартну форму, то зводячи її до канонічної форми та розв'язавши симплекс-методом, ми одночасно розв'язали і двоїсту задачу. Якщо вихідна задача має оптимальний розв'язок, то оптимальній розв'язок двоїстої задачі міститься в останній симплекс-таблиці в оціночному рядку в стовпчиках, які відповідають початковим базисним змінним.

Приклад. Ми розв'язали симплекс-методом задачу

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700;$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 1600;$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Отримали, що

$$x_1 = 300,$$
$$x_2 = 200,$$
$$z = -1400.$$

Двоїста задача має вигляд:

$$u = 1700y_1 + 1600y_2 \rightarrow \min$$

$$3y_1 + 2y_2 \ge 2;$$

$$4y_1 + 5y_2 \ge 4;$$

$$y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0.$$

З тієї ж симплекс-таблиці маємо:

$$y_1 = {}^2/_7\,;$$
$$y_2 = {}^4/_7\,;$$
$$u = 1400.$$

§1.6. Економічний аналіз вихідної та двоїстої задач

Розглянемо задачу раціонального використання ресурсів. Нехай підприємство виготовляє n видів виробів, маючи m різних ресурсів. Відомі: 1) витрати ресурсів, які задані матрицею A, елементи якої a_{ij} – витрати i-го виду ресурсів на виробництво одиниці j-го виду виробів; 2) запаси ресурсів, які задаються вектором B, елементи якого b_i – запас i-го виду ресурсів; 3) прибуток від реалізації j-го виду виробів c_j. Необхідно скласти план виробництва виробів із запасів ресурсів, який забезпечить максимальний прибуток підприємству.

Побудуємо відповідну математичну модель. Нехай x_j – план виробництва j-го виду виробів. Набір $x_1, x_2, \dots, x_n$ – це план підприємства по виготовленню усіх видів виробів.

Нехай z – прибуток, який планується при реалізації виготовлених виробів. Тоді

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

Обмеженість ресурсів означає, що витрати кожного з них не повинні перевищувати їх запас. Таким чином, з'являються обмеження:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{gathered}$$

План виробництва не може визначатися від'ємною величиною, тому

$$\begin{gathered} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ \ldots, \\ x_n \ge 0. \end{gathered}$$

Підприємство може продавати ресурси, які воно має у розпорядженні. Тоді виникає задача визначення таких цін на ресурси, щоб продаж був не менш ефективним, ніж виробництво товарів. При цьому вважається, що покупець бере увесь запас ресурсів і вимагає, щоб їх вартість була мінімальною.

Побудуємо відповідну модель. Нехай y_i – вартість i-го виду ресурсів, тоді u – вартість усієї покупки

$$u = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \rightarrow \min.$$

Основні обмеження відображають вимоги покупця. Прибуток від продажу ресурсів повинен бути не меншим за прибуток від продажу готового виробу.

Прибуток від продажу одного виду ресурсів:

$$\begin{gathered} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n. \end{gathered}$$

Ціни на ресурси повинні бути невід'ємними – так з'являються прямі обмеження.

Сформульовані постановки задач утворюють пару двоїстих задач. Розв’язавши одну з них симплекс-методом, ми відразу знаходимо і розв’язок двоїстої задачі.

Властивості розв’язків

1. Компоненти вектора y_i^* – оптимальний розв’язок двоїстої задачі. Вони показують, наскільки виросте максимальний прибуток підприємства при додатковому залученні до виробництва одиниці i-го виду ресурсів.
2. y_i^* показують граничну ефективність використання даного виду ресурсів.
3. Компоненти y_i^* відображають порівняну дефіцитність ресурсів. Ресурс називається дефіцитним, якщо додаткове залучення його до процесу виробництва приведе до підвищення прибутку, тобто, якщо $y_i^* > 0$, то ресурс дефіцитний. Якщо $y_i^* = 0$ – ресурс не є дефіцитним. З двох дефіцитних ресурсів більш дефіцитний той, чия вартість вища.

Приклад.

Підприємство виготовляє два види виробів і витрачає два види ресурсів. Відомі: витрати ресурсів, їх запаси і прибуток, який буде одержаний від реалізації одиниці продукції.

Види ресурсів	Виріб 1	Виріб 2	Запаси
Сировина 1	3	4	1700
Сировина 2	2	5	1600
Прибуток	2	4	

Необхідно:

1) скласти математичну модель задачі (треба так організувати випуск продукції, виходячи з наявних ресурсів, щоб одержати найбільший прибуток);
2) скласти математичну модель двоїстої задачі;
3) розв’язати одну з них і одержати розв’язок другої;
4) проаналізувати розв’язки з економічної точки зору.

Нехай x_1 – запланована кількість виробів 1-го виду, x_2 – другого виду. Прибуток від реалізації цих виробів визначається функцією

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

Запаси ресурсів на виробництво продукції обмежені:

$$3x_1 + 4x_2 \le 1700;$$

$$2x_1 + 5x_2 \le 1600;$$

$$x \ge 0, x_2 \ge 0.$$

y_1 – вартість продажу сировини 1-го виду;
y_2 – другого виду.

Цільова функція визначає ціну продажу всіх ресурсів:

$$u = 1700y_1 + 1600y_2 \to \min$$

$$3y_1 + 2y_2 \ge 2;$$

$$4y_1 + 5y_2 \ge 4;$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0.$$

Продаж ресурсів повинен бути не менш вигідним, ніж продаж готової продукції.

Розв'язавши задачу симплекс-методом (див. стор. 13), ми одержали оптимальний розв'язок вихідної задачі:

$$x_{\text{опт}} = (300; 200; 0; 0)$$
$$z_{max} = 1400.$$

Виробів 1-го виду необхідно виробляти 300 одиниць, виробів 2-го виду – 20 одиниць. Основні обмеження канонічної задачі:

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700;$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600,$$

де x_3 та x_4 – додаткові змінні.

В оптимальному розв'язку вони мають нульові значення, тому основні обмеження стандартної задачі виконуються як рівності.

Це означає, що наявні ресурси 1-го та 2-го виду витрачені повністю. Якби одна з додаткових змінних не дорівнювала б нулю, це означало б, що відповідне обмеження виконується як рівність, а сама змінна відповідає остачі невикористаної сировини.

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі

$$y_{\text{опт}} = (2/7,\ 4/7)$$
$$u_{min} = 1400.$$

Вартість одиниці ресурсу 1-го виду становить $^2/_7$ грошових одиниць, вартість одиниці ресурсу 2-го виду – $^4/_7$ грошових одиниці.

Виходячи з цін на ресурси, можна зробити висновок, що сировина 1-го та 2-го виду дефіцитна, але сировина 2-го виду більш дефіцитна, бо $^4/_7 > {^2/_7}$.

$y_1 = {^2/_7}$, отже, виходячи з теореми двоїстості, перше основне обмеження вихідної задачі повинно виконуватись як рівність. Це означає, що ресурси 1-го виду використані повністю.

$y_2 = {^4/_7}$, отже друге основне обмеження вихідної задачі виконується як рівність, і відповідний ресурс використано повністю.

Якби одна з змінних y_1 чи y_2 дорівнювала б нулю, це означало б, що відповідна сировина не є дефіцитною, її вартість дорівнює нулю, а відповідна нерівність виконувалась би як рівність. Це означало б, що є остача даної сировини.

Виходячи з теореми двоїстості, $x_1 \neq 0$ та $x_2 \neq 0$. Це означає, що основні обмеження двоїстої задачі повинні виконуватись як рівності. З економічної точки зору це означає, що витрати при виробництві товару збігаються з прибутком від реалізації цього товару.

Якщо б $x_1 = 0$, чи $x_2 = 0$, то відповідне обмеження двоїстої задачі виконувалось би як нерівність, тобто витрати при виробництві перевищували б прибуток від продажу і відповідний товар виробляти було б невигідно.

§1.7. Двоїстий симплекс-метод

Розглянемо задачу ЛП у вигляді:

$$z = c^T x \to \max,$$
$$Ax = b,$$
$$x \geq 0.$$

Припустимо, що праві частини основних обмежень містять від'ємні значення, а самі обмеження містять базисні змінні у явному вигляді. Якщо б $b \geq 0$, то це була б канонічна ЗЛП у базисній формі. При складанні симплекс-таблиці для такої задачі може виникнути ситуація, коли всі оцінки

$\Delta j \geq 0$. Така задача називається канонічною задачею у двоїстій базисній формі.

Ідея методу полягає в переході від одного базисного розв'язку до другого (для яких виконується критерій оптимальності), поки серед них не з'явиться допустимий розв'язок.

Основний симплекс-метод називається методом послідовного покращення базисних допустимих розв'язків. Двоїстий симплекс-метод називається методом послідовного уточнення оцінок.

В основному симплекс-методі перебираються базисні допустимі розв'язки, поки не знайдеться оптимальний. В двоїстому симплекс-методі перебираються базисні розв'язки з виконаним критерієм оптимальності, поки не буде отриманий допустимий розв'язок.

Алгоритм двоїстого симплекс-методу

1. Якщо серед елементів b_i стовпчика b немає від'ємних, то критерій оптимальності виконаний, базисний розв'язок допустимий та оптимальний.
2. Якщо серед елементів b_i стовпчика b є від'ємні, то обираємо рядок з найменшим значенням b_r. Рядок з номером r – ключовий.
   Якщо всі елементи ключового рядка невід'ємні, задача розв'язків не має (цільова функція необмежена).

3. Якщо серед елементів ключового рядка є від'ємні, то для них обчислюється оцінка $\theta_j = \dfrac{\Delta j}{a_{rj}}$.

Серед цих оцінок θ_j обирається максимальна, яка визначає ключовий стовпчик з номером s. Елемент a_{us} ключовим. З його допомогою перетворюється таблиця [3].

Розділ 2

Транспортна задача

§2.1. Постановка транспортної задачі і побудова її математичної моделі

Класична транспортна задача (ТЗ) полягає у пошуку найбільш економного плану перевезення однорідного продукту (чи взаємозаміняючих продуктів) з пунктів виробництва (станцій відправлення) до пунктів споживання (станцій призначення), ефективність якого будемо оцінювати за критерієм найменшої вартості перевезення.

Нехай на m пунктах відправлення $A_1, \ldots, A_m$ зосереджено $a_1, \ldots, a_m$ одиниць деякого однорідного вантажу. Цей вантаж необхідно перевезти в n пунктів призначення $B_1, \ldots, B_n$, причому в кожний з них потрібно завезти відповідно $b_1, \ldots, b_n$ одиниць цього вантажу.

Вартість перевезення c_{ij} одиниці вантажу з пункту A_i в пункт B_j вважається заданою.

Треба скласти такий план перевезення, щоб загальна вартість його виявилася мінімальною.

Заради простоти будемо вважати, що загальний запас вантажу на всіх станціях відправлення дорівнює загальній сумі потреб всіх пунктів призначення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i. \qquad (1)$$

Таку задачу називають *ТЗ з правильним балансом* (або *закритою ТЗ*).

Якщо умова (1) порушується, таку задачу називають *ТЗ з неправильним балансом* (або *відкритою ТЗ*).

Заради простоти викладок і для наочності всі дані транспортної задачі (вартості c_{ij}, запаси a_i, потреби b_j) заносять в спеціальну таблицю, яку називають матрицею перевезень (табл..1).

Оскільки наперед невідомо, скільки вантажу потрібно перевезти з пункту A_i до пункту B_j, щоб план перевезень був оптимальним, то позначимо його через x_{ij}.

Всі невідомі занесемо в табл.2

Таблиця 1

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1}	…	c_{ij}	…	c_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	…	b_j	…	b_n	

Таблиця 2

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	x_{11}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	x_{i1}	…	x_{ij}	…	x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	…	x_{mj}	…	x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	…	b_j	…	b_n	

Для складання математичної моделі задачі скористаємося такими міркуваннями: кількість вантажу, який планується перевезти до пункту B_j з усіх пунктів відправлення, з одного боку, дорівнює $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, з іншого — b_j. Оскільки загальна сума запасів дорівнює загальній сумі потреб, то ці величини рівні між собою, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2'}$$

З кожного пункту відправлення до пунктів призначення відправлено таку кількість вантажу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{2''}$$

Разом системи (2') і (2") складають систему обмежень транспортної задачі. В розгорнутому вигляді вона має вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \tag{2}$$

Систему обмежень (2) легко скласти, якщо скористатися табл.2. Для цого слід пам'ятати, що сума всіх x_{ij}, розміщених в i-му рядку, дорівнює запасу a_i у пункті відправлення A_i, а сума x_{ij} з j-го стовпчика дорівнює потребам b_j пункту споживання B_j.

Вартість перевезення вантажу з пункту A_i в пункт B_j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Щоб знайти загальну вартість перевезення, треба просумувати вартості перевезення всіх клітинок. Отже, загальна вартість перевезення

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (\min). \tag{3}$$

Виходячи з економічної постановки задачі, тепер можемо сформулювати її математичну модель: *серед всіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь (2) знайти такий, при якому форма z в (3) набуде найменшого значення*.

Із фізичних міркувань випливає, що оптимальний розв'язок транспортної задачі завжди існує.

Теорема. *Ранг матриці системи обмежень транспортної задачі (2) визначається за формулою*

$$R = m + n - 1, \tag{4}$$

де m — число пунктів відправлення, а n — споживання.

§2.2. Метод найменшої вартості пошуку опорних планів транспортної задачі

Оскільки транспортна задача є задачею ЛП, то її можна розв'язувати симплекс-методом. Однак через просту будову системи обмежень (2) симплекс-метод у цьому разі значно спрощується. Це вже можна помітити на прикладі відшукання початкових планів. Заповнюють клітинки матриці перевезень A_iB_j меншим з чисел її рядка і стовпчика, тобто числом min (a_i,b_j).

Починають заповнювати ті клітинки таблиці, де вартості перевезення на даному етапі є мінімальними (табл.3).

Таблиця 3

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	1 45	3	4	4 15	60
A_2	2 22	3	2 13	2	3	35
A_3	3	5	2 7	4 18	4 15	40
Потреби	22	45	20	18	30	135

Найменша вартість в клітинці A_1B_2, тому заповнюємо ї. Наступна мінімальна вартість 2, в клітинках A_2B_1, A_2B_3, A_2B_4, A_3B_3. Можна вибрати будь-яку із цих клітинок, наприклад A_2B_1, потім A_2B_3, A_3B_3. Клітинку A_2B_4 не заповнюємо, тому що запаси A_2 вичерпано. Вибираємо клітинку A_3B_4 з мінімальною вартістю 4, з вартістю 3 всі клітинки заповнені і т.д.

Зауваження. Число базисних клітинок завжди має дорівнювати рангу ТЗ, у протилежному випадку доповнюємо їх до відповідної кількості за рахунок вільних з базисним значенням 0.

§2.3. Критерій оптимальності опорних розв’язків за методом потенціалів

Ми вже вміємо знаходити початкові опорні плани. Зрозуміло, що опорні плани в табл.3 не є оптимальними. Критерій оптимальності знаходимо із співвідношення між оптимальними розв’язками двоїстих задач. Запишемо двоїсту задачу до транспортної, математична модель якої задана формулами (2) і (3).

$$\left\{\begin{array}{l|l}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1 & \alpha_1 \\
x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2 & \alpha_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\
x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m & \alpha_m \\
x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1 & \beta_1 \\
x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2 & \beta_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \\
x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n & \beta_n
\end{array}\right.$$

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \qquad (\min).$$

Введемо двоїсті змінні $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ і за правилами складання двоїстих задач складемо двоїсту задачу, система обмежень якої має вигляд

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij} \qquad (7)$$

$$(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n).$$

Нерівності (7), враховуючи співвідношення між оптимальними розв’язками двоїстих задач, можна конкретизувати:

а) для базисних невідомих (клітинок)

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}\ ; \qquad (7')$$

б) для вільних невідомих (клітинок)

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}\ . \qquad (7'')$$

Зауваження. Взагалі кажучи, у співвідношеннях (7'') ми мали б писати знак строгої нерівності, але щоб врахувати факти виродженості задачі, ми будемо допускати у формулах (7”) і рівності, що не суперечить співвідношенням між оптимальними розв’язками двоїстих задач. Цей метод називають методом потенціалів. Розглянемо його на прикладі табл.4.

Поставимо у відповідність пунктам A_i потенціали α_i, B_j – β_j і побудуємо систему рівнянь

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \tag{8}$$

для всіх базисних клітинок.

Таблиця 4

Пункти	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	4 ①	1 45	3 ①	4 ①	4 15	0
A_2	2 2	3 ③	2 ①	2 18	3 15	–1
A_3	3 20	5 ④	2 20	4 ①	4 ⓪	0
β_j	3	1	2	3	4	

Для базисної клітинки A_1B_2 рівняння системи має вигляд

$$\alpha_1 + \beta_2 = 1;$$

$$A_2B_1 - \alpha_2 + \beta_1 = 2 \text{ і т.д.}$$

Для відшукання потенціалів α_i, β_j з табл.4 дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 1, \\ \alpha_1 + \beta_5 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_5 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_1 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2. \end{cases} \tag{9}$$

Система рівнянь (9) складається з рівнянь, до кожного з яких входять дві невідомі. Всього маємо 7 рівнянь і 8 невідомих. Ранг системи (8) дорівнює 7 (у загальному випадку $m + n - 1$). Тому одну з невідомих беруть за вільну (наприклад, α_1). Покладемо $\alpha_1 = 0$. Із першого рівняння знайдемо β_2, з другого β_5, з п'ятого α_2 і т.д.

В результаті розв'язок системи (9) має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -1,\\
&\alpha_3 = 0;\\
&\beta_1 = 3, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2,\\
&\beta_4 = 3,\\
&\beta_5 = 4.
\end{aligned} \tag{10}$$

Теорема. *Для того, щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти*

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j), \tag{11}$$

обчислені для вільних клітинок,
де α_i і β_j — розв'язки системи (8), були невід'ємними.

Перевіримо на оптимальність розв'язок табл.4. Потенціали задаються розв'язками (10). За формулами (11) обчислюємо коефіцієнти:

$$\gamma_{11} = 4 - (0 + 3) = 1,$$
$$\gamma_{13} = 3 - (0 + 2) = 1$$
і т.д.

Ці числа поміщаємо в табл.4 і обводимо кружком.

Із табл..4 випливає, що всі коефіцієнти

$$\gamma_{ij} \geq 0$$

для вільних клітинок. Тому знайдений опорний план буде оптимальним і

$$x_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & 0 & 18 & 15 \\ 20 & 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$z_{\min} = 290.$$

Для обчислення потенціалів не обов'язково складати систему рівнянь (9). Їх можна знайти безпосередньо за таблицею, користуючись таким правилом: *невідомий потенціал дорівнює різниці вартості базисної клітинки і значення відомого потенціалу.*

Наприклад, покладемо с табл.4 $\alpha_1 = 0$. Із базисних клітинок A_1B_2 і A_1B_5 знаходимо β_2 і β_5 як різницю між вартістю і $\alpha_1 = 0$. У стовпчику B_5 є ще одна базисна клітинка A_2B_5, тому $\alpha_2 = 3 - 4 = -1$; із клітинок A_2B_1 аналогічно знаходимо β_1, β_4 і т.д.

Проілюструємо цей метод за допомогою табл.5.

План не є оптимальним, тому що є від'ємні значення γ_{ij} у клітинках A_2B_1, A_3B_1, A_3B_3.

Таблиця 5

						α_i
	4 22	1 38	3	4	4	0
	2	3 7	2	2 20	3 8	2
	3	5	2	4 10	4 30	4
β_j	4	1	0	0	0	

§2.4. Пошук опорних розв'язків за допомогою циклу перерахунку

Із табл..5 випливає, що план неоптимальний, оскільки є від'ємні коефіцієнти γ_{ij} (γ_{21}, γ_{31}, γ_{33}), тому необхідно вказати способи переходу до наступного опорного плану таким чином, щоб значення цільової функції мінімізувалось. Вкажемо метод, який дає змогу це зробити. Введено деякі означення.

Означення. *Циклом* в матриці будемо називати *замкнену ламану лінію*, вершини якої розміщені в клітинках матриці перевезень і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпчику.

Можливі цикли, які схематично зображені на рис. 1.

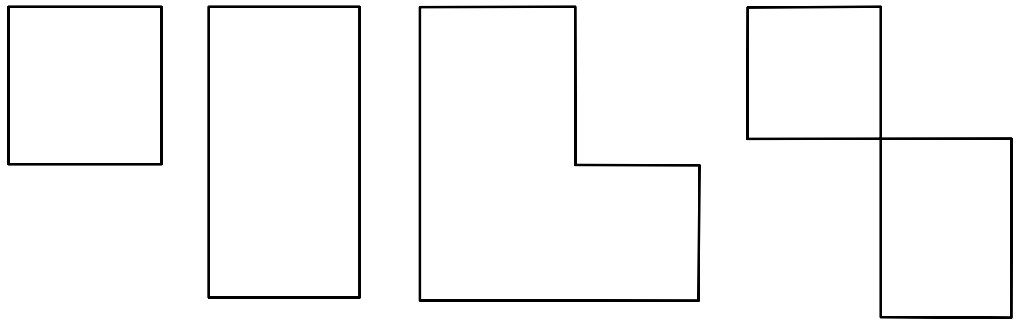


Рис. 1

Перпендикулярні ламані циклу в матриці можуть перетинатися, а точки перетину не будуть вершинами циклу.

Означення. Вершини одного і того самого відрізку циклу будемо називати *сусідніми*.

Означення. Цикл, сусіднім вершинам якого поставлені у відповідність протилежні знаки («+», «–»), називають *означеним***.**

Означення. Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітинці, а всі інші в базисних, називають *циклом перерахунку.*

Наприклад, в табл.5 для клітинки A_3B_1 цикл перерахунку зображено на рис. 2.

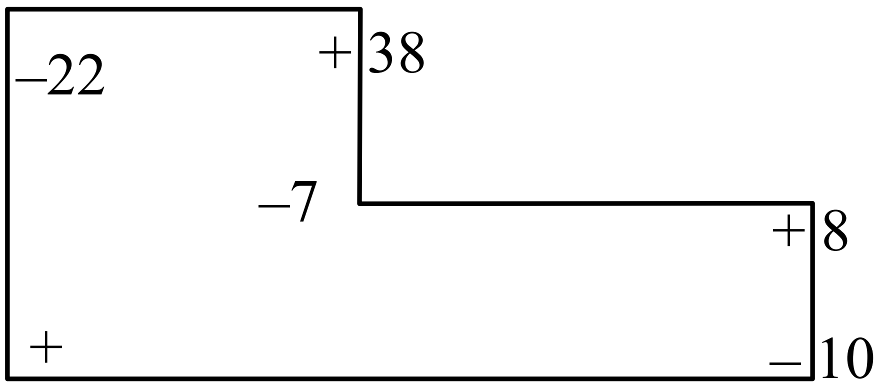


Рис. 2

Домовимося завжди у вільній клітинці у відповідність ставити знак «+».

Означення. *Зсувом по циклу перерахунку* на число θ називають таку операцію, при якій в додатній вершині додається одне і те саме число θ, а у від’ємних віднімається.

Теорема. *Зсув за означеним циклом в матриці перевезень перетворює один розв’язок системи обмежень транспортної задачі в інший цієї самої задачі.*

Теорема. *Для будь-якої вільної клітинки існує лише один цикл перерахунку.*

За допомогою зсуву за циклом перерахунку можна перейти до нового опорного плану, в якому значення цільової функції буде меншим, ніж у попередньому. Проілюструємо це за допомогою рис. 3:

$$\theta = \min(22; 7; 10) = 7.$$

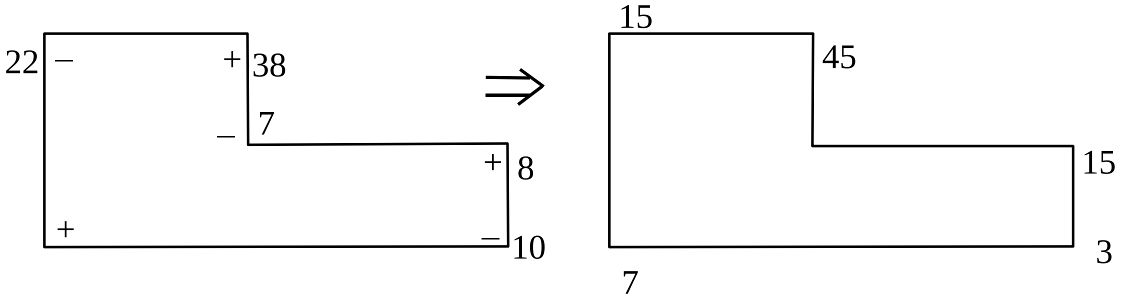


Рис. 3

Виберемо у від'ємних вершинах базисне значення min (22; 7; 10) = 7 і зробимо зсув на цю величину. Для того, щоб число базисних клітинок не змінилося, клітинку, на значення якої здійснюємо зсув, зроимо вільною. Додамо в додатних вершинах циклу (рис. 3) число 7, а у від'ємних віднімемо 7. В результаті дістанемо опорний план (табл.6).

Таблиця 6

4 15	1 45	3	4	4
2	3	2 20	2 15	3
3	5	2	4 3	4 30

Зауваження. Значення базисних клітинок, які не брали участі в циклі перерахунку, в новій таблиці залишаються без змін

Зауваження. У вироджених задачах часто зсув треба робити на число 0, яке не змінює базисних значень. Тоді цей нуль переводять у вільну клітинку циклу перерахунку, залишаючи попередню вільною

За методом потенціалів перевіряємо опорний план на оптимальність. Якщо розв'язок оптимальний, то обчислюємо мінімальне значення функції, а якщо ні, то знову будуємо цикл перерахунку і за допомогою зсуву переходимо до наступного опорного плану. Процес продовжують доти, доки розв'язок не стане оптимальним.

§2.5. Транспортна задача з неправильним балансом

На практиці транспортні задачі, в яких загальна сума запасів не дорівнює загальній сумі потреб, називають транспортними задачами з неправильним балансом (іноді їх називають відкритими). Розв’язують такі задачі розподільчим методом, зводячи їх попередньо до відповідної задачі з правильним балансом. Для цього вводять фіктивний пункт призначення чи відправлення в залежності від дефіциту потреб чи запасів. Вартості у фіктивних пунктах вважають рівними нулю (щоб не змінювалась загальна вартість перевезень).

Приклад. Нехай транспортну задачу задано матрицею перевезень

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

і запасами та потребами відповідно

$$a_i = (60, 40),$$
$$b_j = (20, 30, 45, 15).$$

Загальні сумі запасів 60 + 40 = 100 і потреб 20 + 30 + 45 + 15 = 110 різні, тому треба ввести фіктивний пункт постачання із запасами, що дорівнюють різниці 110 – 100 = 10, і нульовими вартостями.

Зауваження. При розв’язуванні транспортних задач з неправильним балансом доцільно будувати таблиці дещо в іншій формі (табл. 7).

Таблиця 7

a_i \ b_j	20	30	45	15	α
60	3 —	4 30	6 30	7 —	–2
40	2 20	5 —	8 5	1 15	0
10	0 —	0 —	0 10	0 —	–8
β	2	6	8	1	

Знайдемо початковий опорний план методом найменшої вартості. При цьому у розрахунок фіктивний пункт не враховуватимемо, тому що всі вартості в ньому найменші (нулі), а на загальну вартість вони не впливають. Остачу після заповнення основних клітинок заносимо до відповідних клітинок фіктивного пункту. Для наочності в пунктах, де використані всі запаси або потреби, вільні клітинки, що залишилися, позначаємо знаком «—». У нашому прикладі в кінці непозначеною залишилася клітинка A_3B_3, в якій розміщуємо залишок 10 од.

Розв'язок, знайдений методом найменшої вартості, не є оптимальним, причому умова оптимальності порушується лише для клітинки A_2B_2: $\gamma_{22} = 5 - (6 + 0) = -1$. Будуємо для цієї клітинки цикл перерахунку і в ньому робимо зсув на число $\theta = 5$ (цього досягнемо також, якщо замінимо неправильний квадрат $[A_2B_2]$ на правильний (зсувом на $\theta = 5$).

4 30	6 30
5	8 5

$\Rightarrow$

4 25	6 35
5 5	8

В результаті зсуву дістанемо табл.8.

Таблиця 8

20	30	45	15	
3 —	4 25	6 35	7 —	–1
2 20	5 5	8 —	1 15	0
0 —	0 —	0 10	0 —	–7
2	5	7	1	

Легко перевірити, що опорний розв'язок табл..8 оптимальний,

$$x_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 35 & 0 \\ 20 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$z_{\min} = 4\times 25 + 6\times 36 + 2\times 20 + 1\times 15 = 365 \text{ од.}$$

Значення оптимального плану у фіктивному пункті можна тлумачити таким чином: пункт B_3 недоодержує 10 од. вантажу.

Розділ 3

ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

§3.1. Нерівність Гоморрі

У попередніх розділах розглядалися задачі математичного програмування, в яких змінні мали властивості подільності та адитивності. Це рівносильно лінійності цільової функції та системи обмежень. У таких випадках змінні в оптимальному розв’язку нерідко набували і дробових значень, що з економічної точки зору пояснити важко.

Відмова від цих припущень приводить до нового класу задач – задач цілочисельного програмування.

Загальна постановка такої задачі має вигляд:

знайти

$$(\max)z = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \tag{1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \qquad \vdots\vdots\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$x_j \ \ (j = 1, 2, \ldots, n) - \text{цілі числа.} \tag{3}$$

(Останні два обмеження $x_j \geq 0$, x_j – цілі числа можна записати простіше – $x_j = 0, 1, 2\ 3\ \ldots$.)

Із відомих задач, в яких змінні можуть набувати лише цілих значень, такою може бути задача про використання сировини. Якщо в ній змінною x_j (або однією з них) позначено види продукції, що мають велику вартість, то дробове значення не має змісту в рамках реальної задачі (наприклад, турбіни для гідроелектростанції).

Прикладом задачі цілочисельного програмування можуть бути транспортна задача і задача про комівояжера. Нагадаємо, зміст останньої: комівояжеру треба відвідати кожне з n міст, починаючи і закінчуючи свій маршрут в одному й тому самому місті і не заїжджаючи двічі в одне й те саме місто.

Якщо між містами i та j немає прямого маршруту, то покладають $c_{ij} = \infty$ (на практиці достатньо велике число m). Крім того, можливо, що:

$$c_{ij} \neq c_{ji}.$$

Математична модель задачі має вигляд:

$$\min \quad z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}, \quad (c_{ij} = \alpha)^{*}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n), \ \text{(від'їзд)}, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n), \ \text{(приїзд)},$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо цикл включає переїзд з міста } i \text{ в } j, \\ 1 & \text{– в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Можна навести і багато інших задач, в яких за фізичним змістом задачі виникає умова цілочисельності.

Очевидно, що задача цілочисельного програмування буде складнішою, ніж задача лінійного програмування, оскільки вона включає додаткову умову (3). Тому оптимальне значення в задачі (1)-(3) не більше, ніж у відповідній задачі без умови цілочисельності. Якщо оптимальний розв'язок вихідної задачі виражається у цілих числах, то цей розв'язок буде одночасно і розв'язком задачі цілочисельного програмування. В протилежному випадку шуканий розв'язок можна одержати за допомогою заокруглення.

По-перше, така постановка проблеми ускладнюється тим, що коефіцієнти a_{ij} у системі обмежень (2) можуть бути від'ємними і тоді невідомо, як краще заокруглювати. По-друге, немає простих критеріїв, які б дали змогу визначити, що знайдений план є оптимальним. Тому виникає потреба у створенні прямих методів пошуку цілочисельних розв'язків.

Відомі методи пошуку таких розв'язків можна поділити на дві групи:

1) всі розв'язки задачі (1), (2) є цілочисельними;

2) одна частина невідомих задачі цілочисельна, а друга може бути довільною.

Методи пошуку оптимальних розв'язків задач першої групи значно простіші. Проте їх поєднує одна особливість: вони легко розв'язуються на ЕОМ. У задачах невеликої розмірності часто вдається використати спеціальні властивості задачі і створити метод, який дає змогу швидко знайти оптимальний план.

Розглянемо детальніше пошук розвозку задачі цілочисельного програмування, в якій всі змінні цілочисельні, методом відтинання площин (методом Гоморрі).

Означення. *Цілою частиною числа* а називають найбільше ціле число, яке менше або дорівнює йому (позначають $[a]$):

$$\left[\frac{10}{3}\right]=3; \quad [6]=6; \quad [-2{,}3]=-3.$$

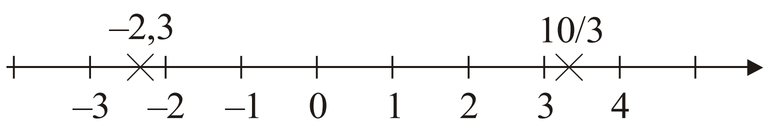


Рис. 4

Означення. *Дробовою частиною числа* а називають різницю між числами а та її цілою частиною (позначають *f(a)*):

$$f(a)=a-[a]. \tag{6}$$

Наприклад (рис. 4):

$$f\left[\frac{10}{3}\right] = \frac{10}{3}-3 = \frac{1}{3},$$

$$f(-2{,}3) = -2{,}3 - (-3) = 0{,}7,$$

$$f(6) = 6 - 6 = 0.$$

Очевидно,

$$f(a) \geq 0,$$

причому

$$f(a) = 0$$

тоді і тільки тоді, коли a – ціле число. В теорії чисел для дробової частини числа виводять такі властивості:

$$1)\ f(a+b) \leq f(a)+f(b) \tag{7}$$

1) якщо $n \geq 0$ – ціле,

$$f\left(n\,a\right)\le n\;f\left(a\right).$$

Властивості 1) та 2) легко перевірити. Властивість 1) підтверджує простий приклад:

$$f(-2/3 + 5/3) = 0$$

$$f(-2/3) + f(5/3) = 1/3 + 2/3 = 1.$$

У вигляді рівності властивості 1), 2) можна записати лише для цілих додатних чисел *a, b* і *n*.

Для обмеження задачі (1), (2) властивості 1), 2) дають змогу записати нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\,f\left(a_{ij}\right)\le\;f\left(b_j\right), \tag{8}$$

яку називають нерівністю Гоморрі. Вона відіграє важливу роль у пошуку цілочисельних розв'язків. Наприклад, обмеження задачі має вигляд:

$$2{,}3x_1 + 0{,}7x_2 - 1{,}4x_3 + x_4 = 0{,}1.$$

Нерівність Гоморрі перетворює його в інше обмеження

$$f\left(2{,}3x_1 + 0{,}7x_2 - 1{,}4x_3 + x_4\right)\le 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}6x_3 \ge 0{,}9.$$

§3.2. Метод Гоморрі

Алгоритм методу Гоморрі можна описати за допомогою наступних кроків.

КРОК 1. Знайдемо розв'язок задачі (1), (2) без умови цілочисельності.

КРОК 2. Якщо оптимальний план цілочисельний, то задача розв'язана. У протилежному випадку вибираємо базисну змінну з найбільшою дробовою частиною і за обмеженням цієї базисної невідомої складаємо нерівність Гоморрі.

КРОК 3. До обмежень задачі додаємо обмеження з кроку 2 (нерівність Гоморрі). Розв'язуємо розширену задачу і повертаємось до кроку 1. Процес повторюємо доти, доки розв'язок не буде цілочисельним або симплекс-таблиці не покажуть, що задача не має розв'язку.

Весь алгоритм методу можна зобразити у вигляді блок схеми (рис. 5).

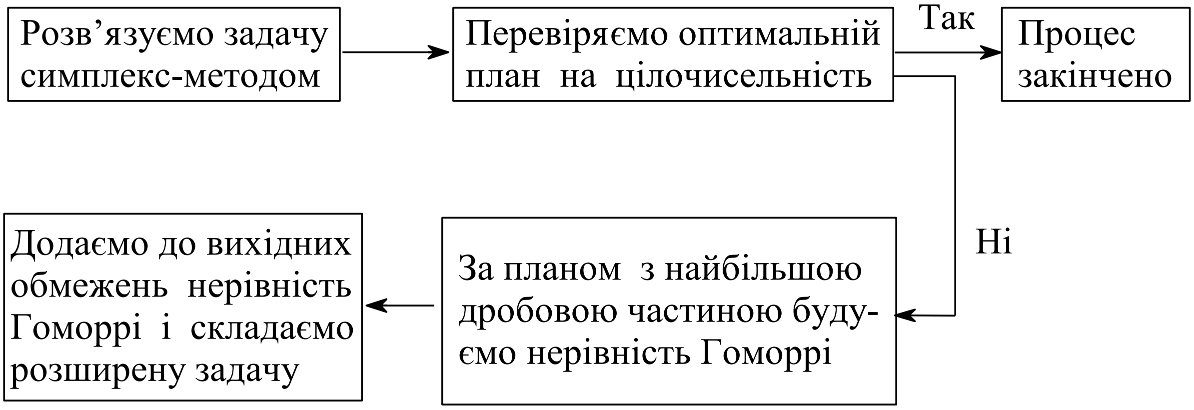


Рис. 5

Детальніше процес методу розглянемо на прикладі.

Приклад. На придбання обладнання для нової виробничої дільниці виділено 20 у.г.о. Обладнання можна розмістити на площі, меншій ніж 38 м^2. Підприємство може замовити обладнання двох типів *А* та *В* з такими даними:

А) вартість 5 у.г.о.; потребує площі 8 м^2; випускає 7 тис. од. продукції за зміну;

В) вартість 2 у.г.о.; потребує площі 4 м^2; випускає 3 тис. од.

Треба розрахувати оптимальний варіант придбання обладнання, який би забезпечив максимальний обсяг продукції. Позначимо через x_1 кількість одиниць обладнання *А*, через x_2 – *В*, тоді математичну модель задачі формуємо таким чином:

знайти $(\max)\ z = 7x_1 + 3x_2$ за таких обмежень:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38, \end{cases}$$
$$x_j = 0, 1, 2, \ldots$$

Записуємо канонічну форму задачі

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20, \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 = 38, \end{cases}$$

$$x_j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$(\max)\ z = 7x_1 + 3x_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_0 - 7x_1 - 3x_2 = 0.$$

Результати обчислень подані в табл.1.

Остання симплекс-таблиця дає оптимальний план, але він не є цілочисельним. Тому переходимо до кроку 2. Дробовому плану відповідає обмеження:

$$x_2 - 2x_3 + 5/4x_4 = 15/2. \qquad (9)$$

Нерівність Гоморрі для нього має вигляд:

$$1/4x_4 \geq ½$$

$$\left[f\left(x_2 - 2x_3 + 5/4x_4\right)\ \text{J}\ 1/4x_4\ \text{і}\ 1/2\right].$$

До обмежень початкової задачі додаємо обмеження (9) і задачу знову розв'язуємо симплекс-методом. Для зменшення обчислень дописуємо його до канонічної форми оптимальної симплекс-таблиці:

Таблиця 1

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	x_0	0	–7	–3	0	0
	1	x_3	20	$\boxed{5}$	2	1	
	2	x_4	38	8	4	0	1
II	0	x_0	28	0	–1/5	7/5	0
	1	x_1	4	1	2/5	1/5	
	2	x_4	6	0	$\boxed{4/5}$	–8/5	1
III	0	x_0	59/2	0	0	0	¼
	1	x_1	1	1	0	1	–1/2
	2	x_2	15/2	0	1	–2	5/4

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + \dfrac{5}{4}x_4 = \dfrac{15}{2}, \\ \dfrac{1}{4}x_4 \geq \dfrac{1}{2}, \\ x_j = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$(\max)\quad z=\frac{59}{2}-x_3-\frac{1}{4}x_4.$$

Канонічну форму останньої задачі знайдемо за двоїстим симплекс-методом:

$$\begin{cases} x_1+x_3-\frac{1}{2}x_4=1,\\ x_2+2x_3+\frac{5}{4}x_4=\frac{15}{2},\\ \frac{1}{4}x_4-x_6=\frac{1}{2},\\ x_j=0,1,2,\ldots, \end{cases}$$

$$(\max)\quad z=\frac{59}{2}-x_3-\frac{1}{4}x_4.$$

Таблиця 2

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	x_0	59/2	0	0	¼	0	0
	1	x_1	1	1	0	1	½	0
	2	x_2	15/2	0	1	–2	5/4	0
	3	x_5	–1/2	0	0	0	–1/4	1
II	0	x_0	29	0	0	1	0	1
	1	x_1	2	1	0	1	0	2
	2	x_2	5	0	1	–2	0	5
	3	x_3	2	0	0	0	1	–4

Оскільки у нульовому рядку симплекс-таблиці немає від’ємних чисел, то план оптимальний. Крім того, він цілочисельний.

$$x_{\text{опт}} = (2, 5, 0, 2, 0),$$

$$z_{\max} = 29.$$

Задачу розв’язано. У даному прикладі оптимальне значення можна знайти за допомогою заокруглення. Але просте заокруглення дає значення:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 7,\ z = 7 + 3 \times 7 = 28.$$

Серед методів цілочисельного програмування, в яких накладаються умови цілочисельності на частину змінних, найпоширенішим є метод гілок і границь. За цим методом із деякої множини задач лінійного програмування за певними правилами вибирають одну і розв'язують її доти, доки потрібний розв'язок не буде знайдено ([1], [2], [15]). Крім того, є наближені методи пошуку цілочисельних розв'язків [2].

Розділ 4

Задачі нелінійного програмування

§4.1. Особливості задач нелінійного програмування

У задачах лінійного програмування, які розглядалися раніше, всі невідомі входили як до системи обмежень, так і до цільової функції, у першому степені. Тому ці задачі були досить простими у постановці і за методами розв'язування.

Зрозуміло, що ряд економічних задач допускають такі математичні моделі, до яких невідомі або деяка їх частина входять нелінійно. У більшості випадків нелінійність моделі обумовлюється, як правило, структурними співвідношеннями економічного процесу або непропорційністю зміни витрат, випуску продукції, показників якості.

У загальній постановці задачу нелінійного програмування (НЛП) записують так:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$(\max) z(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2}$$

де $F_1(x)$, …, $F_n(x)$, $z(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – довільні функції.

У конкретних задачах частина обмежень (або всі) можуть бути нерівностями. Крім того, на невідомі можуть накладатися умови невід'ємності і т.п.

Однією з основних особливостей задач НЛП є можливість різними способами задавати цільову функцію. Якщо в лінійному випадку вона була строго монотонною і досягала свого оптимального значення лише у вершині многокутника розв'язку, то тут картина зовсім інша.

Друга особливість задач НЛП випливає із порушення властивості опуклості многокутника розв'язків задач ЛП. Легко навести приклади задач, де область розв'язків задачі НЛП буде багатозв'язною. Приронью, що чисельна реалізація моделей нелінійного програмування є значно більш складною, чим, скажемо, подібних моделей лінійного програмування. Авжеж, відповідні чисельні реалізації за теперишнього часу відносяться до числа актуальних задач сучасної обчислювальної математики.

§4.2. Геометрична інтерпретація задач нелінійного програмування

Розглянемо випадок двох змінних з обмеженнями-нерівностями.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 5$$

за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Система обмежень лінійна, тому область розв'язків складається з многокутника розв'язків.

Неважко помітити, що цільову функцію можна записати таким чином:

$$z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 .$$

Отже z є квадратом радіуса кола. При фіксованому z маємо коло з центром у точці $C(1,2)$, а найбільше концентричне коло буде проходити через точку B(6,0) многокутника розв'язків. Тому

$$z_{\min} = (6-1)^2 + (0-2)^2 = 29.$$

Аналогічно:

$$z_{\max} = (1-1)^2 + (2-2)^2 = 0..$$

В даному випадку найменше значення функції міститься в області розв'язків, а найбільше — на її границі (рис. 6). Якщо в цьому ж прикладі розглянути функцію:

$$z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 ,$$

то найменше значення буде в точці *C*, а найбільше в точці *O* (рис. 7).

$$z_{\max} = (4-0)^2 + (4-0)^2 = 32.$$

$$z_{\min} = \left(\frac{4+4-6}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2.$$

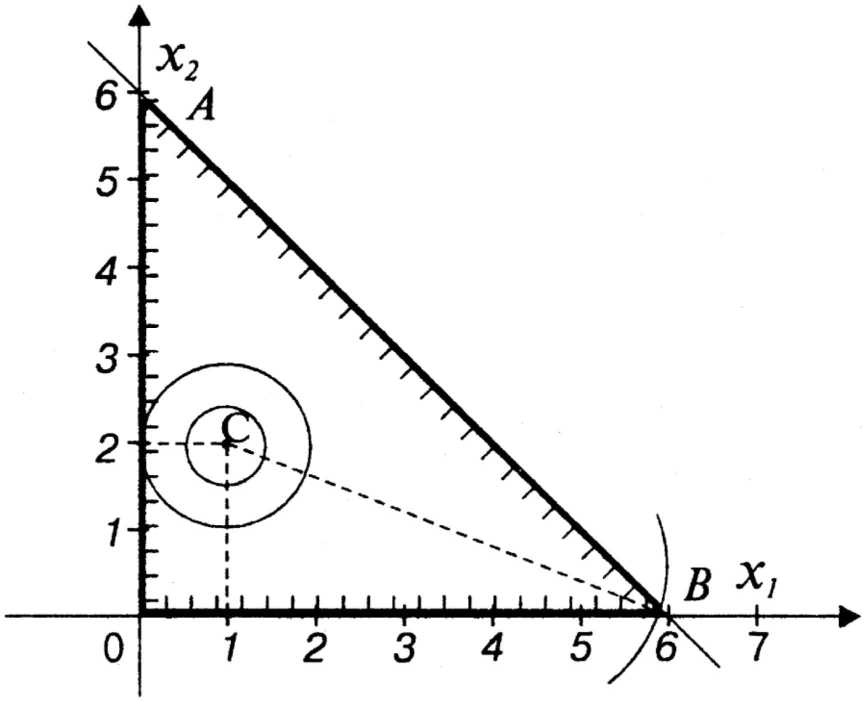


Рис. 6

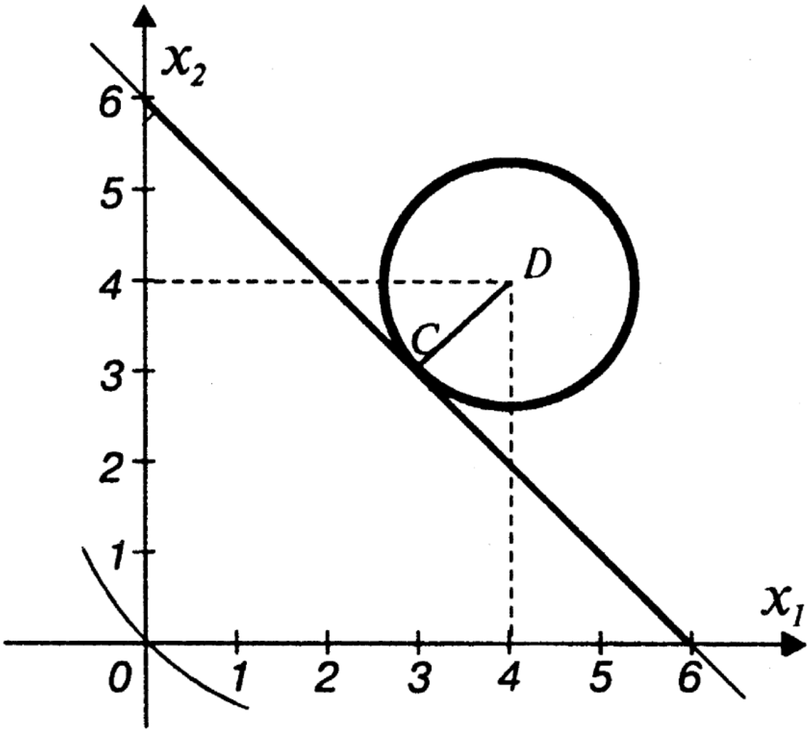


Рис. 7

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 8$ за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \times x_2 \le 3, \\ 0 \le x_1 \le 5, \\ 0 \le x_6 \le 6. \end{cases}$$

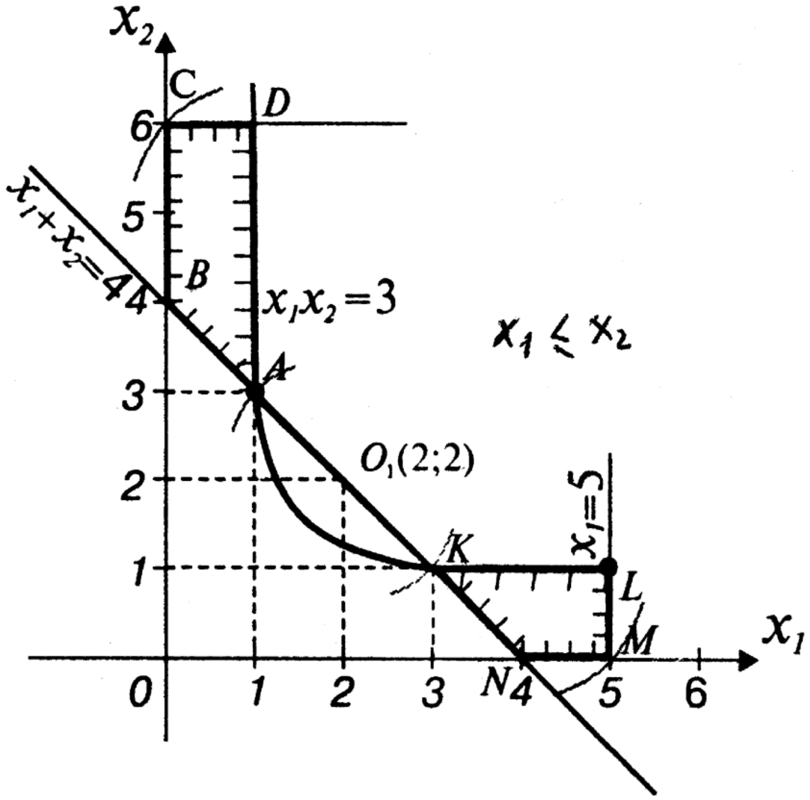


Рис. 8

З рис. 8 випливає, що область розв'язків є незв'язною — складається з двох окремих частин. Маємо два однакових локальних мінімуми в точках A і K. Координати цих точок можна знайти як розв'язок системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_1 = 4, & x_2 = 3, \quad x_2 = 1, \\ x_1 x_2 \le 3, & x_2 = 1, \quad x_2 = 3, \end{cases}$$

$$z_{\min} = 1 - 4 \times 1 + 3 - 4 \times 3 + 8 = 2.$$

Легко перевірити, що маємо і два локальні максимуми в точках $C(0,6)$ і $M(5,0)$.

$$z(M) = 5^2 - 4 \times 5 + 8 = 13, \qquad z(C) = 6^2 - 4 \times 6 + 8 = 20.$$

§4.3. Задачі нелінійного програмування без обмежень. Необхідні та достатні умови оптимальності точки

Вивчення загальної задачі НЛП (1), (2) почнемо з найпростішого випадку, коли на змінні функції (2) не накладено жодних обмежень. Таку задачу називають задачею без обмежень.

Покажемо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Відомо, що у випадку однієї змінною в точках, де функція досягає найбільшого чи найменшого значення, перша похідна перетворюється в нуль. Для функції багатьох змінних перших похідних більше, ніж одна. Їх можна брати за будь-яким аргументом.

Означення. *Частинною похідною першого порядку* $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ *називають похідну функції* $z(x_1 \ldots, x_n)$ *по* x_i*, яку обчислюють у припущенні, що всі інші змінні величини є сталими.*

Приклад. Частинні похідні першого порядку функції $z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - \; -2x_2^2 + 3$ мають вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1 + 2;$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_2 - 2.$$

Означення. *Вектор, складений з частинних похідних функції* $z(x)$ *першого порядку, називають градієнтом функції (позначають* ∇ *— "набла" або "grad").*

$$\nabla = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right).$$

У курсі диференціального числення зазначається, що вектор-градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції в даній точці. Очевидно, що коли в деякій точці x_0 значення функції оптимальне, то воно буде оптимальним і по будь-якій змінній, а для них, як відомо з курсу диференціального числення,

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Отже, необхідною умовою оптимальності точки x_0 є така:

$$\text{grad } z(x_0) = 0. \tag{4}$$

або у розгорнутій формі —

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(x)}{\partial x_1} = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial z(x)}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Рівності (3), (4) допускають наочну фізичну інтерпретацію: швидкість зростання функції в точці дорівнює нулю і її можна назвати точкою спокою.

Домовимося, розв'язки системи (4) позначати через x^* (серед них можуть бути і точки, які не є оптимальними). Щоб визначити характер оптимальності точки x недостатньо частинних похідних першого порядку, необхідно обчислити частинні похідні вищих порядків.

Введемо матрицю, складену з частинних похідних другого порядку — матрицю Гессе.

$$H(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} & ,\dots, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & ,\dots, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} & ,\dots, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_n} & ,\dots, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Найпростішими умовами додатної (від'ємної) визначеності матриці є умови Рауса–Гурвіца. Додатна (від'ємна) визначеність матриці є узагальненням додатного (від'ємного) числа на більш складні математичні об'єкти.

Для матриці $H(x)$ випишемо головні мінори.

$$M_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} \end{vmatrix},$$

$$\ldots$$

$$Mn = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Умови Рауса-Гурвіца додатної визначеності матриці $H(x)$ (min) через головні мінори запишемо у вигляді:

$$M_1 > 0,\ M_2 > 0,\ \ldots,\ M_n > 0. \tag{6}$$

Умови max мають вигляд

$$M_1 < 0,\ M_2 > 0,\ M_3 < 0,\ \ldots,\ (-1)^n M_n \geq 0. \tag{7}$$

Приклад. Найти оптимальні значення функції

$$z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 3.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2 = 0, \\ 2x_2 - 2 = 0, \end{cases} \qquad x^* = (-1,1).$$

Матриця $H(x)$ для даної функції має вигляд

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = 2 > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Отже, в точці (–1,1) маємо мінімум

$$z_{\min} = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 1.$$

§4.4. Задачі нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями

Розглянемо загальну задачу НЛП

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$(\max) \qquad z(x_1, \ldots, x_n). \tag{9}$$

в якій функції $F_i(x)$ ($i = 1, \ldots, m$), $z(x)$ два рази неперервно диференційовані. Для визначення її оптимальних точок користуються функцією Лагранжа

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = z(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i(x), \tag{10}$$

яка дає змогу задачу з обмеженнями звести до задачі без обмежень. Очевидно, що на обмеженнях (8)

$$L(x, \lambda) = z(x) \quad \text{і}$$

$$z_{\max}(x^*) = L_{\max}(x^*, \lambda).$$

Необхідні умови оптимальності точки x^* функції $L(x,\lambda)$ мають вигляд

$$\operatorname{grad} L(x, \lambda) = 0, \tag{11}$$

або в розгорнутій формі —

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} = \dfrac{\partial z}{\partial x_n} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_1} = F_1(x) = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_m} = F_m(x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Із системи $n + m$ рівнянь (12) випливає, що для її побудови достатньо взяти частинні похідні по x від функції Лагранжа, зрівняти їх з нулем і додати до них систему обмежень (8).

Характер оптимальності точки з'ясовують за допомогою достатніх умов. Застосовуємо їх лише до функції $z(x)$, оскільки $F_i(x^*) = 0$.

Приклад. Визначити оптимальні значення функції

$$z = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2$$

при обмеженні:

$$x_1 + x_2 = 2 .$$

Перед тим, як будувати функцію Лагранжа, обмеження записуємо таким чином, щоб у правій частині був нуль:

$$x_1 + x_2 - 2 = 0,$$

$$L(x,\lambda) = 2x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + x_1 + 2 + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda.$$

Складаємо систему для відшукання точок, підозрілих на оптимальність

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2 + \lambda = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Виключимо λ з перших двох рівнянь, в результаті чого дістанемо

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x_1 + 4 = 0, \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Точка: $x^* = (-1,3)$
є підозрілою на оптимальність. Для визначення типу оптимальності обчислюємо матрицю $H(x)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = 1;$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$M_1 = 4 > 0;$$

$$M_2 = 7 > 0.$$

Отже, в точці x* маємо мінімум

$$z_{\min} = 2\times(-1)^2 + (-1)\times 3 + 3^2 + 2\times(-1) - 43 = -6.$$

Зауваження. Із наведених міркувань випливає, що при обчисленні координат оптимальної точки конкретне значення λ нас не цікавить. Отже, там, де це можливо, множники Лагранжа треба виключати, що дасть змогу знизити порядок системі рівнянь.

Цікаво порівняти дану задачу з аналогічною задачею без обмежень.

Система для знаходження мінімуму (а він буде існувати тому, що значення $H(x)$ не залежить від обмеження) має вигляд

$$\begin{matrix} 4x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^*(8/7, 18/7); \quad z(x^*) = -308/49 = -6{,}29.$$

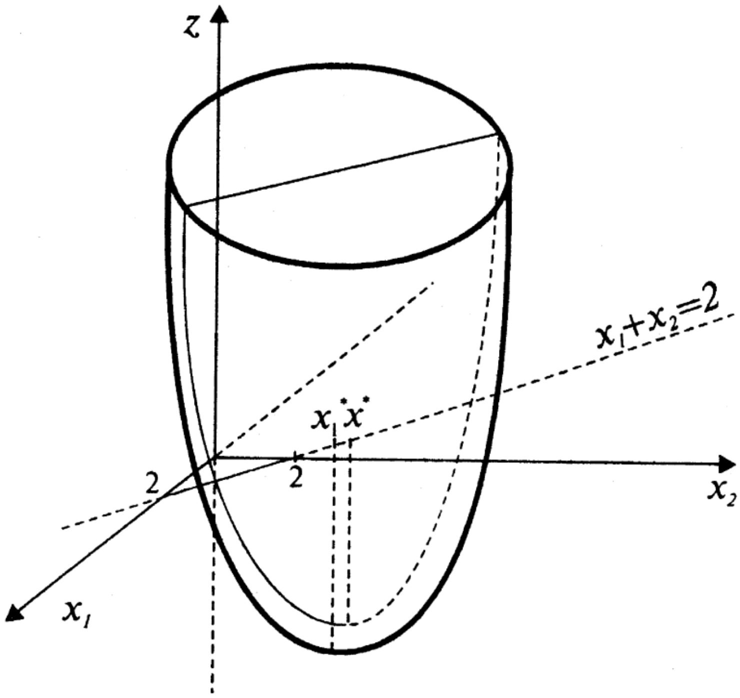


Рис. 9

Із рис. 9 випливає, що геометрично задача без обмежень зображується параболоїдом, площина $x_1 + x_2 = 2$ відтинає його частину — параболу. Природно, що мінімум задачі з обмеженнями не менший, ніж глобальний мінімум функції.

Обмеженість класу задач, в яких вдається знайти оптимальні значення функції, ті самі, що й для однієї змінної: точка має бути внутрішньою.

§4.5. Задачі нелінійного програмування з обмеженнями-нерівностями. Умови Куна-Таккера

На практиці частіше зустрічаються задачі, в яких оптимальні точки не обов’язково містяться всередині області розв’язків. Як правило, це буде тоді, коли в обмеженнях трапляються нерівності. Наприклад, якщо на змінні задачі накладені умови невід’ємності.

Спочатку розглянемо задачу НЛП, коли всі обмеження являють собою нерівності:

$$\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n) \geq 0, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ g_m(x_1,\ldots,x_n) \geq 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$(\max) \quad z(x_1,\ldots,x_n). \tag{14}$$

На область розв’язків задачі (13), (14) накладається умова регулярності, яка виконується, коли її границя складається, наприклад, з диференційованих функцій. Випадки, коли порушується ця умова, являють собою спеціальні математичні побудови, і їх існування на практиці є мало ймовірним. Полягає ця умова в тому, що існує такий вектор y і точка границі області, для яких

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} y_i < 0.$$

В результаті цього порушується замкненість області.

Для визначення оптимальних точок задачі (13), (14) користуються теоремою Куна-Таккера ([1], [3]).

Теорема. *Нехай x^* — оптимальна точка задачі (13), (14) регулярної області. Тоді*

1) x^* — допустима точка, існують множники $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1,\ldots,m)$;

$$2)\ \lambda_i g_i(x^*) = 0 \ (i = 1,\ldots,m); \tag{15}$$

$$3)\ \nabla(x^*)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \nabla g_i(x_i)=0. \qquad (16)$$

Перша умова теореми є очевидною. Друга стверджує, що коли точка x^* не лежить на границі i-го обмеження і $g_i(x^*)>0$, то відповідний множник Лагранжа дорівнює нулю. Третя умова теореми — рівність нулю вектора-градієнта функції Лагранжа задачі (13), (14). У розгорнутому вигляді умови (16) є системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i \dfrac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_i}=0, \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_n}+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i \dfrac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_i}=0. \end{cases}$$

Якщо в задачі є мішані обмеження (частина рівнянь і частина нерівностей), то у формулюванні теореми змінюється лише умова 2). Для обмежень нерівностей $\lambda_i \geq 0$, для рівнянь λ_i може мати довільний знак, причому

$$\lambda_i g_i(x^*)=0 \qquad (i=1,\ldots,m). \qquad (17)$$

Коли функція $f(x)$ вигнута, а система обмежень утворює опуклу область, умови Куна-Таккера стають не тільки необхідними, але й достатніми.

Зауваження. Зрозуміло, що умова (15) для обмежень-рівнянь є тривіальною

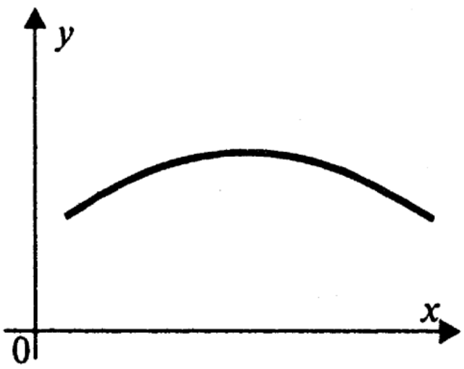
$$g_i(x^*)=0.$$

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається вигнутою, якщо

$$f\left[\tau x^{(1)}+(1-\tau)x^{(2)}\right]\geq \tau f\left(x^{(1)}\right)+(1-\tau)f\left(x^{(2)}\right),$$

$$0\leq\tau\leq 1.$$

Графічно це зображено на рис. 10.



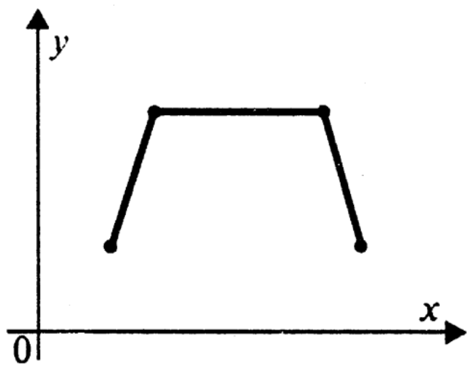


Рис. 10

Для опуклості області достатньо, щоб функції $g_i(x)$ ($I = 1, \ldots, m$) були вигнутими.

§4.6. Сідлові точки та їх зв'язок з функцією Лагранжа

Попередні параграфи підкреслюють важливу роль функції Лагранжа в задачах НЛП. Фактично вона залежить від змінних двох видів:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{і} \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m).$$

Виявляється, що задача НЛП має розв'язок в тих випадках, коли функція Лагранжа має сідлову точку.

Означення. *Нехай $x \in X$, $y \in Y$. Кажуть, що функція $K(x,y)$ має сідлову точку (x_0,y_0), якщо*

$$\boldsymbol{K(x,y_0) \leq K(x_0,y_0) \leq K(x_0,y)} \tag{18}$$

Функція, яка міститься в лівій частині нерівності, залежить лише від x, а в другій — від y. У неперервних функціях

$$K_{\max}(x,y_0) = K_{\min}(x_0,y) = K(x_0,y_0), \tag{19}$$

$$x \in X\,, y \in Y\,,$$

тобто оптимальні значення функцій збігаються. Графічно для двох змінних сідлову точку можна подати так, як це зображено на рис. 11.

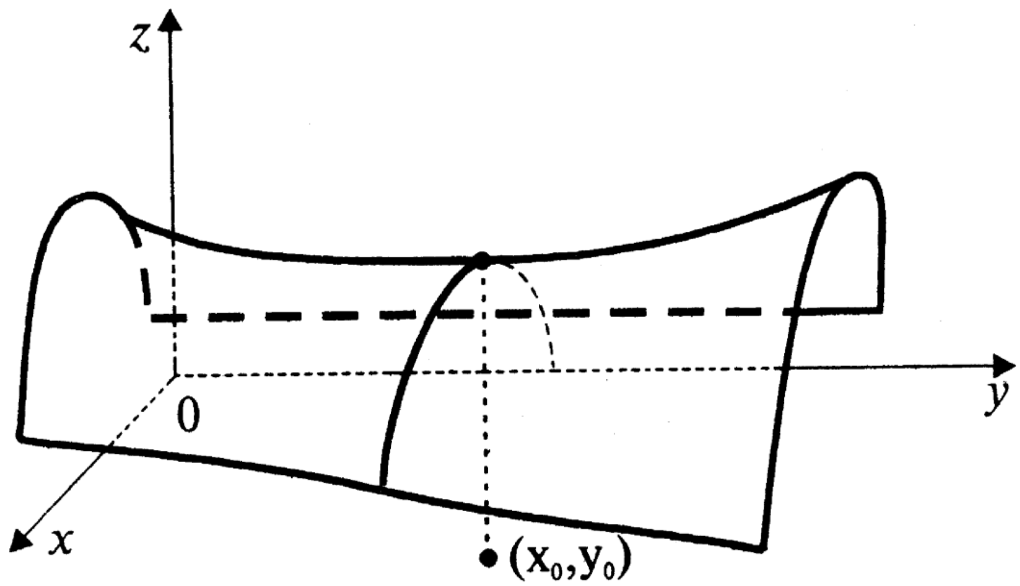


Рис. 11

Для функції Лагранжа замість y необхідно підставити λ. Введемо функцію

$$L_*(x) = \min_{\lambda\in\Lambda} L(x,\lambda), \tag{20}$$

де Λ — область зміни $\lambda_i(i=1,\ldots,m)$. Для задачі (13), (14) Λ складається з обмежень $\lambda_i \geq 0 \ (i=1,\ldots,m)$;

$$L^*(\lambda) = \max_{x\in X} L(x,\lambda), \tag{21}$$

X — складають обмеження (13)

$$\left(g_i(x) \geq 0 \ (i=1,\ldots,m)\right).$$

У термінах функцій $L_*(x)$ і $L^*(\lambda)$ пряму задачу формулюють у вигляді: знайти $\max\limits_{x\in X} L_*(x)$ серед таких x, що

$$g_i(x) \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Двоїсту задачу з вигнутими функціями $f(x)$, $g_i(x)$ ($i = 1, \ldots, n$) запишемо у вигляді: знайти

$$\min\left[f(x) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i(x)\right]$$

при

$$\nabla f(x)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \nabla g_i(x)=0, \quad \lambda_\mathrm{i} \geq 0 \quad (i=1,\ldots,m).$$

Для вихідної і двоїстої задач можна сформулювати умови Куна-Таккера, суть яких зводиться до такого твердження: для того щоб задача НЛП мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб відповідна функція Лагранжа мала сідлову точку. Додаткову інформацію можна отримати в літературі [2], [3].

Розділ 5

ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

§5.1. Основні ідеї обчислювального методу динамічного програмування

У *динамічному програмуванні* розглядаються методи, що дозволяють шляхом поетапної оптимізації отримати загальний (результуючий) оптимум ([2], [4], [5]).

Звичайно методами динамічного програмування оптимізують роботу деяких *керованих систем*, ефект якої оцінюється *адитивною*, або *мультиплікативною*, цільовою функцією. **Адитивною** називається така функція декількох змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значення якої обчислюється як сума деяких функцій f_j, що залежать тільки від однієї змінної x_j:

$$f(x_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{1}$$

Доданки адитивної цільової функції відповідають ефекту рішень, що приймаються на окремих етапах керованого процесу. Аналогічно, **мультиплікативна** функція розпадається на добуток додатних функцій різних змінних:

$$f(x_2, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{2}$$

Оскільки логарифм функції типу (2) є адитивною функцією, досить розглянути функції вигляду (1).

Викладемо суть обчислювального методу *динамічного програмування* на прикладі задачі оптимізації

$$f(x_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max \tag{3}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, a_j > 0, x_j \ge 0. \tag{4}$$

Зазначимо, що про лінійність і диференційовність функцій $f_j(x_i)$ не робиться ніяких припущень, тому застосування класичних методів оптимізації (наприклад, методу Лагранжа) для розв'язання задачі (3)-(4) або проблематично, або просто неможливо.

Змістовно задача (3)-(4) може бути інтерпретована як проблема оптимального вкладення деяких ресурсів j коефіцієнтів, що приводяться до єдиної розмірності (наприклад, грошей) за допомогою a_j, в різні активи (інвестиційні проекти, підприємства і т.п.), що характеризуються функціями прибутку f_j, тобто такого розподілу обмеженого об'єму ресурсу *(b), який* максимізує сумарний прибуток. Уявимо ситуацію, коли вона вирішується послідовно для кожного активу. Якщо на першому кроці прийнято рішення про вкладення в n-й *актив* x_n одиниць, то на інших кроках ми зможемо розподілити $b - a_n x_n$ *одиниць* ресурсу. Абстрагуючись від міркувань, на основі яких приймалося рішення на першому кроці (припустимо, ми з будь-яких причин не могли на нього вплинути), буде цілком природним вчинити так, щоб на *кроках,* що залишилися *розподіл поточного об'єму ресурсу стався оптимально, що* рівнозначно розв'язанню задачі

$$\max \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \tag{5}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \le b - a_n x_n,\ a_j > 0,\ x_j \ge 0. \tag{6}$$

Очевидно, що максимальне значення (5) залежить від розміру залишку, що розподіляється, і якщо кількість ресурсів, що залишилася визначити через ξ, то величину (5) можна виразити як функцію від ξ:

$$\Lambda_{n-1}(\xi) = \max_{\substack{x_1,\dots,x_{n-1} \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \le \xi}} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j), \tag{7}$$

де індекс *n-1* вказує на кількість кроків, що залишилася. Тоді сумарний прибуток, що отримується як наслідок рішення, прийнятого на першому кроці, і оптимальних рішень, прийнятих на інших кроках, буде

$$\Omega_n(x_n) = f_n(x_n) + \Lambda_{n-1}(b - a_n x_x). \tag{8}$$

Якби була можливість впливати на x_n, то ми для отримання максимального прибутку повинні були б максимізувати Ω_n по змінної x_n, тобто знайти $\Lambda_{n-1}(b)$ і фактично розв'язати задачу:

$$\max_{0 \le x_n \le \frac{b}{a_n}} \Omega_n(x_n) = \max_{0 \le x_n \le \frac{b}{a_n}} \{f_n(x_n) + \Lambda_{n-1}(b - a_n x_n)\} = \Lambda_n(b). \qquad (9)$$

В результаті ми отримуємо вираз для значення цільової функції задачі при оптимальному поетапному процесі прийняття рішень про розподіл ресурсу. Воно внаслідок побудови даного процесу дорівнює глобальному оптимуму цільової функції

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j(s_j) \right\} = \Lambda_n(b), \qquad (10)$$

тобто значенню цільової функції при одномоментному розподілі ресурсу.

Якщо у виразі (9) замінити значення b на ξ і n на k, то його можна розглядати як *рекуррентну формулу*, що дозволяє послідовно обчислювати оптимальні значення цільової функції при розподілі об'єму ресурсу ξ за k кроків:

$$\Lambda_k(\xi) = \max_{0 \le x_k \le \frac{\xi}{a_k}} \{f_k(x_k) + \Lambda_{k-1}(\xi - a_k x_k)\}. \qquad (11)$$

Значення змінної x_k, при якому досягається максимум, позначимо $\hat{x}_k(\xi)$.

При $k = 1$ формула (11) виглядає

$$\Lambda_k(\xi) = \max_{0 \le x_1 \le \frac{\xi}{a_1}} f_1(x_1),$$

тобто допускає безпосереднє обчислення функцій $\Lambda_1(\xi)$ і $\hat{x}_k(\xi)$.

Скориставшись (12) як базою рекурсії, можна з допомогою (11) послідовно обчислити $\Lambda_k(\xi)$ і $\hat{x}_k(\xi)$, $k \in 1:n$. Поклавши на останньому кроці $\xi = b$, в силу (9), знайдемо глобальний максимум функції (3), який дорівнює $\Lambda_n(b)$, і компоненту оптимального плану $x_n^* = \hat{x}_n(b)$. Отримана компонента дозволяє обчислити нерозподілений залишок на наступному кроці при оптимальному плануванні: $\xi_{n-1} = b - a_n x_n^*$, і, в свою чергу, знайти $x_{n-1}^* = \hat{x}_{n-1}(\xi_{n-1})$. Внаслідок подібних обчислень послідовно будуть знайдені всі компоненти оптимального плану.

Таким чином, динамічне програмування являє собою цілеспрямований перебір варіантів, який призводить до знаходження глобального максимума. Рівняння (11), яке виражає оптимальне рішення на *k-м* кроці через рішення, прийняті на попередніх кроках, називається *основним рекуррентним співвідношенням динамічного програмування*. У той же час потрібно помітити, що описана схема рішення при загальній постановці задачі має чисто теоретичне значення, оскільки замикає обчислювальний процес на побудову функцій $\Lambda_k(\xi)(k \in 1:n)$, тобто зводить вихідну задачу (3)-(4) до іншої вельми складної проблеми. Однак при певних умовах застосування рекуррентних співвідношень може виявитися корисним. Насамперед це відноситься до задач, які допускають табличне задання функцій $\Lambda_k(\xi)$. Додаткову інформацію з розглянутих питань можна отримати в [4], [5].

§5.2. Принцип оптимальності Беллмана

Ще раз підкреслимо, що значення підходу, що реалізовується в динамічному програмуванні, полягає в *заміні розв'язання вихідної багатомірної задачі послідовністю задач меншої розмірності*.

Сформулюємо основні вимоги до задач, виконання яких дозволяє застосувати даний підхід:

- об'єктом дослідження повинна служити *керована система (*об'єкт) із заданими допустимими станами *і* допустимими управліннями*;*
- задача повинна дозволяти інтерпретацію як , багатокроковий процес, кожний крок якого складається з прийняття *рішення* про вибір одного з допустимих управлінь, що призводять до *зміни стану* системи;
- задача не повинна залежати від кількості кроків і бути визначеною на кожному з них;
- стан системи на кожному кроці повинен описуватися однаковим (по складу) набором параметрів;
- подальший стан, в якому з'являється система після вибору рішення на *k*-му кроці, залежить тільки від даного рішення і початкового стану на початок *k*-го кроку. Дана властивість є основною з точки зору ідеології динамічного програмування і називається *відсутністю післядії.*

Розглянемо питання застосування моделі динамічного програмування в узагальненому вигляді. Нехай стоїть задача управління деяким абстрактним *об'єктом,* який може перебувати в різних станах. Поточний стан об'єкта ототожнюється з деяким набором параметрів, що позначаються надалі ξ і іменуються *вектором стану*. Передбачається що задано множину Ξ всіх можливих станів. Для об'єкта визначено також множину *допустимих управлінь* (керуючих впливів *X*), яку, не поменшуючи спільності, можна вважати числовою множиною. Керуючі впливи можуть здійснюватися в дискретні моменти часу k ($k \in 1{:}n$), причому управлінське *рішення* полягає у виборі одного з управлінь $x_k \in X$. *Планом* задачі або *стратегією управління* називається вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, компонентами якого служать управління, вибрані на кожному кроці процесу. У зв'язку з передбачуваною *відсутністю післядії* між кожними двома послідовними станами об'єкта ξ_k і ξ_{k+1} існує відома функціональна залежність, що включає також вибране управління: $\xi_{k+1} = \varphi(x_k, \xi_k)$, $k \in 1{:}\,n-1$. Тим самим задання початкового стану об'єкта $\xi_1 \in \Xi$ і вибір плану x однозначно визначають *траєкторію поведінки* об'єкта, як це показано на *рис. 12*.

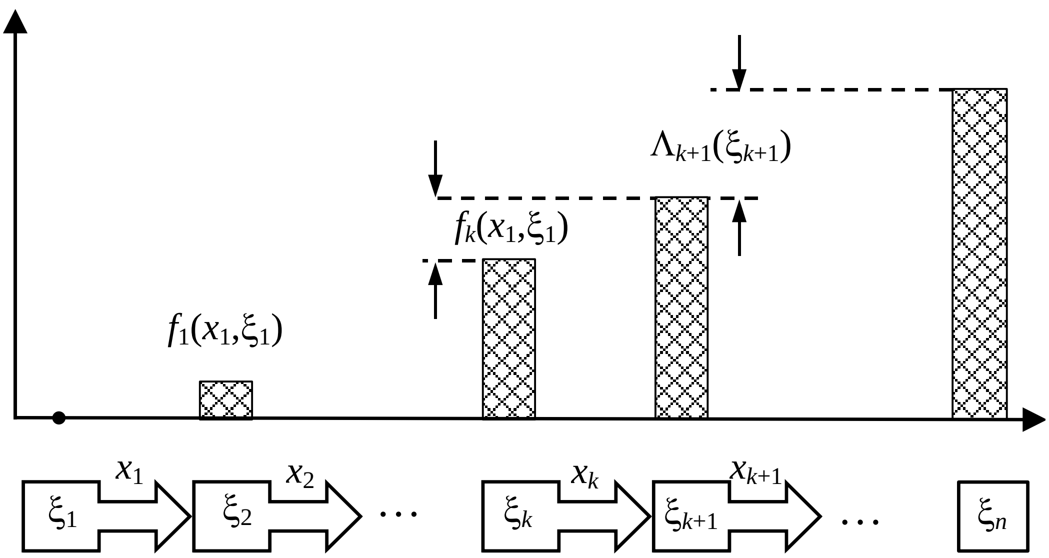


Рис. 12

Ефективність управління на кожному кроці k залежить від поточного стану ξ_k, вибраного управління x_k і кількісно оцінюється за допомогою функцій $f_k(x_k, \xi_k)$, що є складовими адитивної цільової функції*, що характеризує загальну* ефективність управління об'єктом. (Зазначимо, що у визначення функції включається область допустимих значень x_k, і ця область, як правило, залежить від поточного стану ξ_k). Оптимальне управління, при заданому початковому *стані* ξ_1*, зводиться* до вибору такого оптимального плану x^*, при якому досягається максимум суми значень f_k на відповідній *траєкторії.*

Основний принцип динамічного програмування полягає в тому, що на кожному кроці потрібно прагнути не до ізольованої оптимізації функції $f_k(x_k, \xi_k)$, а вибирати оптимальне управління x_k^* в припущенні про оптимальність всіх подальших кроків. Формально вказаний принцип реалізовується шляхом відшукання на кожному кроці k *умовних оптимальних управлінь*, що забезпечують найбільшу сумарну ефективність, починаючи з цього кроку, в припущенні, що поточним є стан ξ.

Позначимо $\Lambda_k(\xi)$ максимальне значення суми функцій f_k протягом кроків від k до n (що отримується при *оптимальному* управлінні на даному відрізку процесу), при умові, що об'єкт на початку кроку k знаходиться в стані ξ. Тоді функції $\Lambda_k(\xi)$ повинні задовольняти рекуррентному співвідношенню:

$$\Lambda_k(\xi) = \max_{x_k} \{f_k(x_k, \xi) + \Lambda_{k+1}(\xi_{k+1})\},\ k \in 1:(n-1), \tag{14}$$

де $\xi_{k+1} = \varphi_k(x_k, \xi)$.

Співвідношення (14) називають *основним рекуррентним співвідношенням* динамічного програмування. Воно реалізовує базовий принцип динамічного програмування, відомий також як *принцип оптимальності Беллмана.*

Оптимальна стратегія управління повинна задовольняти наступній умові: *які б не були початковий стан* ξ_k *k-му кроці і вибране на цьому кроці управління* x_k, *подальші управління (управлінські рішення) повинні бути оптимальними по відношенню до стану* $\xi_{k+1} = \varphi_k(x_k, \xi)$, *що виходить внаслідок рішення, прийнятого на k-му кроці.*

Основне співвідношення (14) дозволяє знайти функції $\Lambda_k(\xi)$ тільки в поєднанні з початковою умовою, якою *в нашому випадку* є рівність

$$\Lambda_n(\xi) = \max_{x_n} \{f_n(x_n, \xi)\}.$$

Важливо ще раз підкреслити, що сформульований вище принцип оптимальності застосуємо тільки для управління об'єктами, у яких вибір оптимального управління не залежить від передісторії керованого процесу, тобто від того, яким шляхом система прийшла в поточний стан. Саме ця обставина дозволяє здійснити декомпозицію задачі і зробити можливим її практичне розв’язання.

.

Розділ 6

ТЕОРІЯ ІГОР

§6.1. Предмет теорії ігор. Термінологія і класифікація ігор

Задачі теорії гри відносяться до області прийняття рішень в умовах невизначеності, а їх специфіка полягає в тому, що, як правило, мається на увазі невизначеність, що виникає внаслідок дій двох або більш «розумних» противників, здатних оптимізувати свою поведінку за рахунок інших. Серед типових прикладів такої поведінки можуть бути названі дії конкуруючих фірм на одному ринку або планування військових операцій.

Одним з основних питань в задачах з колективним вибором рішень є *питання про визначення оптимальності*, тобто питання, які рішення потрібно визнавати найкращими в ситуації оптимізації по декількох критеріях, що відображають різні інтереси. Багато які методи розв'язання проблем теорії гри засновані на зведенні їх до задач математичного програмування. На найбільш простих з них ми зупинимося в цьому розділі.

Теорія гри починається з робіт Е.Бореля (1921 р.), а принциповим етапом в її становленні як самостійного наукового напряму стала монографія Дж.Неймана, що вийшла в 1944 р.

Особливістю теорії ігор як наукової дисципліни стала специфічна термінологія, що вживається в ній. Термін «*гра*» застосовується для позначення сукупності правил і угод, якими керуються суб'єкти, поведінку яких ми вивчаємо. Кожний такий суб'єкт k, де $k \in 1{:}K$, або *гравець*, характеризується наявністю індивідуальної системи цільових установок і *стратегій* $s_1^k, s_2^k, \ldots, s_{m_k}^k$, тобто можливих варіантів дій в грі.

Досить поширений спосіб математичного опису гри заснований на заданні функцій $f_k\left(s_{i_1}^1, s_{i_2}^2, \ldots, s_{i_k}^k, \ldots, s_{i_K}^K\right)$, кожна з яких визначає результат (платіж, виграш), що отримується k-м гравцем в залежності від набору стратегій $S = \left(s_{i_1}^1, s_{i_2}^2, \ldots, s_{i_k}^k, \ldots, s_{i_K}^K\right)$, застосованого всіма учасниками гри. Функції $f_k, k \in 1: K$ також називають *функціями виграшу*, або платіжними функціями. У тому випадку, якщо для будь-яких S

$$\sum_{k=1}^{K} f_k(S) = 0,$$

гра називається грою з нульовою сумою. Гру з двома учасниками і нульовою сумою називають *антагоністичною*. Антагоністична гра, тобто гра, в якій виграш одного учасника дорівнює програшу іншого, в силу відносно простої постановки задачі є найбільш вивченим розділом теорії гри. Однак зміст теорії гри, безумовно, не вичерпується ними. У класифікації ігрових моделей виділяють гру з кінцевими і нескінченними наборами стратегій у гравців, виділяють гру по можливих кількостях ходів у учасників. Також ігри діляться на *некооперативні* і *кооперативні*, тобто ті, в яких функції виграшу учасників залежать від коаліцій, що утворюються ними. Крім цього ігра можна розрізнювати по обсягу інформації, що є у гравців відносно минулих ходів. У зв'язку з цим вони діляться на гру з *повною* і *неповною інформацією*. Зацікавлений читач може звернутися до таких джерел, як [12], [13].

§6.2. Матрична гра і поняття сідлової точки

Розглянемо більш детально антагоністичні ігри і їх основні властивості. Зручним способом задання гри двох учасників з нульовою сумою є *платіжна матриця*. Звідси, до речі, з’являється ще одна з назва - *матрична гра*. Кожний елемент платіжної матриці a_{ij} містить числове значення *виграшу гравця* I (програшу гравця II), якщо перший застосовує стратегію i, а другий – стратегію j. Теміни *виграш і програш* потрібно розуміти в широкому значенні, так як вони можуть приймати негативні значення і з життєвої точки зору означати протилежне. Нетривіальність задачі передусім полягає в тому, що кожний з гравців робить свій вибір, не знаючи про вибір іншого, що істотно ускладнює процес оптимізації вибираної стратегії.

Класичним прикладом антагоністичної гри є гра з двома учасниками, що загадують незалежно один від одного числа. Передбачається, що якщо їх сума виявляється парною, то виграш, рівний 1, досягається першому гравцеві, а якщо непарної, то другому. Поклавши, що для обох гравців загадання непарного числа є першою стратегією, а парного - другою, можемо записати платіжну матрицю даної гри:

$$\begin{array}{c|cc} & н/ч & ч \\ \hline н/ч & 1 & -1 \\ ч & -1 & 1 \end{array} \qquad (1)$$

Рядки матриці (6.1) відповідають стратегіям гравця I, стовпці - стратегіям гравця II, а її елементи - результатам першого гравця. Також з визначення гри маємо, що елементи даної матриці, взяті із зворотним знаком, відповідають виграшам другого гравця.

Більш складна і змістовна платіжна матриця може бути отримана, якщо дещо модифікувати запропоновану гру. Припустимо, що обидва учасника мають право загадувати числа від 1 до 4, що складає їх відповідні стратегії. У випадку, якщо результат складання задуманих чисел буде парним, то другий гравець, виплачує першому суму, що вийшла, а якщо непарним, то перший - другому. Запишемо платіжну матрицю для такої гри:

$$A=\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \\ 4 & -5 & 9 & -7 \\ 5 & 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}}_{\begin{matrix}1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \end{array} \tag{2}$$

Деяка умовність і штучність в постановці проблеми не повинні в цьому випадку нас бентежити, оскільки до подібної форми може бути зведена модель, що описує, наприклад, змагання двох фірм за ринок збуту продукції, що знову відкрився і т.п.

Як вже зазначалося, найважливішим в теорії гри є питання про оптимальність рішення (вибору стратегії) для кожного з гравців. Проаналізуємо з цієї точки зору деяку матричну гру, для якої задана платіжна матриця $A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$. При виборі гравцем I стратегії i його гарантований прибуток незалежно від дій гравця II складе min a_{ij}. Оскільки він може вибирати i самостійно, то доцільно цей вибір зробити таким, щоб він при будь-якій стратегії противника максимізував величину гарантованого прибутку, тобто забезпечував отримання $\min\limits_{j}\max\limits_{j} a_{i,j}$. Такий принцип вибору стратегії отримав назву «принцип максиміна». З іншого боку, аналогічні *міркування можуть* бути проведені з приводу дій другого гравця. Його найбільший програш при виборі стратегії j складе, $\max\limits_{i} a_{i,j}$, і, отже, йому потрібно вибирати стратегію так, щоб мінімізувати величину програшу при будь-яких діях суперника, тобто забезпечити $\min\limits_{j}(\max\limits_{i} a_{i,j})$. У цьому суть принципу мінімакса.

Можна довести справедливість наступного співвідношення:

$$\max_{i}\min_{j} a_{i,j} \le \min_{j}\max_{i} a_{i,j}. \tag{3}$$

Однак очевидний інтерес представляє ситуація, при якій значення виграшу (платежу), що отримується гравцем I при виборі ним максимінної стратегії, дорівнює платежу (програшу) ІІ-го гравця при мінімаксної стратегії

$$\max_i \min_j a_{i,j} = \min_j \max_i a_{i,j}. \tag{4}$$

У цьому випадку кажуть, що гра має *сідлову точку.* Збіг значень гарантованих виграшів гравців при максимінній і мінімаксній стратегії означає можливість досягнення в грі деякого оптимального (стабільного) стану, від якого невигідно відхилятися жодному з учасників. Поняття «оптимальність» тут означає, що жоден розумний (обережний) гравець не прагне змінити свою стратегію, оскільки його противник, в принципі, зможе вибрати таку стратегію, яка дасть гірший для першого результат. Стратегії i^* і j^*, що створюють сідлову точку, називаються *оптимальними,* а значення $v = a_{i^*,j^*}$ називають *ціною гри*. Трійка (i^*, j^*, v) вважається *розв'язком матричної гри з сідловою точкою.*

Неважко помітити, що не всяка гра володіє сідловою точкою. Зокрема, як гра (1), так і гра (2) сідлової точки не мають. Прикладом гри, що має сідлову точку, є гра з платіжною матрицею (5).

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 & 17 \\ 8 & -3 & 2 & 11 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

У даній матриці мінімальні (гарантовані) виграші першого гравця по рядках рівні 1, 5 і (- 3). Отже, його максимінному вибору буде відповідати стратегія 2, що гарантує виграш 5. Для другого гравця максимальні програші по стовпцях матриці становитимуть 8, 10, 5, 17, тому доцільно зупинитися на стратегії 3, при якій він програє тільки 5. Таким образом, друга стратегія першого гравця і третя стратегія другого утворять сідлову точку зі значенням 5, тобто для гри з матрицею (5) має рішення (2; 3; 5).

§6.3. Змішані стратегії

Подальший розвиток теорії матричної гри засновується на дослідженні гри як деякого процесу, що повторюється. Дійсно, навряд чи можна дати змістовні рекомендації з такого питання, як слід чинити учасникам гри, що проводиться однократно і не має сідлової точки. У разі ж її багаторазових повторів природною і плідною представляється ідея *рандомизації* вибору стратегії гравцями, тобто внесення в процес вибору елемента випадковості. Дійсно, систематичне відхилення, наприклад, гравця І від максимінної стратегії з метою збільшення виграшу може бути зафіксовано другим гравцем і покарано. У той же час абсолютно хаотичний вибір стратегій не принесе в середньому найкращого результату.

Змішаною стратегією *гравця I в грі з матрицею* $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$ *називається впорядкований набір дійсних чисел* $x_i, i \in 1:m$, *що задовольняють умовам*

$$x_i \geq 0,\ i \in 1:m;\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \tag{6}$$

Числа інтерпретуються як імовірності застосування гравцем I стратегій 1, 2, …, *m*, які, на відміну від змішаних, також називають *чистими стратегіями*.

Аналогічно вводиться поняття змішаних стратегій гравця II які визначаються як набір чисел $y_i, j \in 1:n$, що задовольняють умовам

$$y_i \geq 0,\ j \in 1:n;\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \tag{7}$$

Тоді, якщо гравець I застосовує змішану стратегію $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а гравець II змішану стратегію $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *то* математичне очікування виграшу гравця I (програшу гравця II) визначається співвідношенням

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} s_i y_j. \tag{8}$$

Надалі через *X* будемо позначати множину допустимих змішаних стратегій гравця I, що визначається умовою (7), а через *Y* - що визначається умовою (8) множину допустимих змішаних стратегій гравця II.

До пошуку рішення гри в змішаних стратегіях, так само як і в попередньому пункті, можуть бути застосовані критерії максиміна-мінімакса. Відповідно до них гравець I буде вибирати свою змішану стратегію $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ таким чином, щоб максимізувати найменший середній виграш:

$$\max_{x \in X} \left[\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j \right], \tag{9}$$

який, як можна довести, дорівнює

$$\max_{x\in X}\left[\min\left\{\sum_{i=1}^{m}a_{i,1}x_i,\sum_{i=1}^{m}a_{i,2}x_i,\ldots,\sum_{i=1}^{m}a_{i,n}x_i\right\}\right], \qquad (10)$$

а гравець II - свою змішану стратегію так, щоб мінімізувати найбільший середній програш:

$$\min_{y\in Y}\left[\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_i y_j\right], \qquad (11)$$

також рівний

$$\min_{y\in Y}\left[\max\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{1,j}y_j,\sum_{j=1}^{n}a_{2,j}y_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}a_{m,j}y_j\right\}\right]. \qquad (12)$$

Аналогічно з (3) для будь-яких $x\in X$ і $y\in Y$ справедлива нерівність

$$\max_{x\in X}\left[\min_{y\in Y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_i y_j\right]\le\min_{y\in Y}\left[\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_i y_j\right]. \qquad (13)$$

Стратегії $x^*\in X$ і $y^*\in Y$ називають **оптимальними змішаними стратегіями**, *якщо для* будь-яких $x\in X$ і $y\in Y$ справедлива рівність

$$F\left(x^*,y^*\right)=\max_{x\in X}\left[\min_{y\in Y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_i y_j\right]=\min_{y\in Y}\left[\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_i y_j\right]. \qquad (14)$$

$v=F\left(x^*,y^*\right)$ називають ціною гри, і якщо x^* і y^* існують, то кажуть, що *гра має розв'язок в змішаних стратегіях (x*, y*, v).*

Справедлива фундаментальна теорема Дж. Неймана, яку ми приведемо без доказу [14].

Теорема (*основна теорема матричної гри*). *Будь-яка матрична гра має розв'язок в змішаних стратегіях*

§6.4. Розв'язування матричної гри методами лінійного програмування

Розглянемо деякі способи рішення матричної гри. Задача, що вирішується першим гравцем, (10) була сформульована як максимізація найменшої з сум

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i ,$$

але якщо визначити деяке x_{m+1}, для якого виконується

$$x_{m+1} \le \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i ,\ j \in 1:n, \tag{15}$$

то вона може бути зведена до задачі лінійного програмування:

$$f : x_{m+1} \to \max \tag{16}$$

з обмеженнями

$$D = \{x \in R^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i \ge x_{m+1}, j \in 1:n; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1; x_i \ge 0, i \in 1:m\}. \tag{17}$$

Провівши аналогічні міркування, приходимо до того, що задача мінімізації найбільшого очікуваного програшу, що вирішується гравцем II (6.12), зводиться до задачі лінійного програмування

$$f^* : y_{n+1} \to \min, \tag{18}$$

$$D = \{y \in R^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \ge y_{n+1}, i \in 1:m; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; y_j \ge 0, j \in 1:n\}. \tag{19}$$

Таким чином, ми отримуємо можливість застосовувати всі можливості апарату лінійного програмування для пошуку оптимальних стратегій обох гравців.

Досить легко перевірити, що задачі (16)-(17) і (18)-(19) утворюють двоїсту пару. Тут в певному значенні ми повернулися до проблем, що вже розглядалися, а саме до взаємозв'язку між наявністю рішення у деякої оптимізаційної задачі і існуванням сідлової точки у відповідної функції Лагранжа. У цьому випадку аналогічний зв'язок простежується між сідловою точкою гри і розв’язком пари задач оптимізації.

.

Список рекомендованої літератури

1. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое про граммирование. – М.: Высшая школа, 1976, 1980.
2. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике. – «Питер», 2000.
3. Бугір М.К. Математика для економістів. – К.: Видавничий центр “Академія”, 1998.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960.
5. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965.
6. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975.
7. Зайченко Ю.П. Исследование операций. – К.: Вища школа, 1988.
8. Ляшенко И.Н. и др. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища школа, 1975.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1981.
10. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ, Изд-во “ДИС”, 1998.
11. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. Единый подход. М., 1973.
12. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., 1964.
13. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. М., 1960.
14. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., 1970.
15. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М., 1977.
16. Глушков А.В., Лобода А.В. Програмна реалізація моделей нейронно-мережевих систем. Блок структури нейро-мережі: Препр. /МОНУ Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, 2001.
17. Glushkov A.V., Vitavetskaya L.A., Ambrosov S.V., Loboda A.V. Nevral networks programming and thinking mashines approach. – Odessa National University, 2001.
18. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М., 1980.

19. Моисеев Н.Н. Современное состояние теории исследования операций.- М., 1979.
20. Муртаф Б. Современное линейное программирование.- М., 1984.
21. Глушков А.В., Амбросов С.В., Витавецкая Л.А., Лобода А.В., Математическое программирование. – Одесса: ТЕС, 2003.
22. Khetselius O.Y. Applied Mathematics, Lecture’s Note.-Odessa, TEC, 2009.
23. Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Svinarenko A.A., Buyadzhi V.V., Methods of computational mathematics and mathematical physics, P.1. Lecture’s Notes- Odessa: TEC, 2015.
24. Glushkov A.V. , Khetselius O.Yu., Kruglyak Yu.A., Ternovsky V.B., Calculational Methods in Quantum Geometry and Chaos theory, P.3 Lecture’s Notes - Odessa: TEC, 2015.
25. Kruglyak Yu.A., Glushkov A.V., Prepelitsa G.P., Buyadzhi V.V., Calculational Methods in Quantum Geometry and Chaos theory, P. 4. Lecture’s Notes - Odessa: TEC, 2015.
26. Khetselius, O.Yu. Quantum structure of electroweak interaction in heavy finite Fermi-systems. Astroprint: Odessa, 2011.
27. Glushkov A.V., Relativistic Quantum Theory. Quantum, mechanics of Atomic Systems.-Odessa: Astroprint, 2008.
28. Khetselius O.Yu., Hyperfine structure of atomic spectra.-Odessa: Astroprint, 2008.
29. Glushkov A.V., Atom in electromagnetic field.-Kiev: KNT, 2005.
30. Glushkov A.V., Relativistic and correlation effects in spectra of atomic systems.-Odessa: Astroprint, 2006.
31. Glushkov, A.V. Methods of a Chaos Theory. OSENU: Odessa, 2012.

Конспект лекцій

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

для студентів спеціальності “менеджмент” університетів.

Автори: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф., Свинаренко А.А., д.ф-м.н., проф., Вітавецька Л.А., к.ф.-м.н., доц., Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц.