Литература: 1. *Swanson W.P.* Calculation of neutron yields released by electron incident on selected materials // Health Physics. 1978. V. 35. P. 353-367. **2.** *International* Atomic Energy Agency, IAEA-TECDOC-Draft, No3. Handbook on Photonuclear Data for applications. Vienna, 2000. **3.** GEANT4 Physics Reference Manual, GEANT4 Working Group CERN (June 21, 2004). **4.** *Breismeister J.F. ed.* MCNP - A General Monte Carlo N-Particle Transport Code. LA-13709-M. Los Alamos National Laboratory: Los Alamos, NM, 2000. **5.** *Rudyche Y., Dovbnya A., Prokhorets I., Prokhorets S., Khazhmuradov M.* Applying of the program code for modeling of the subcritical assembly controlled by enlecron accelerator // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations. 2006. №2(46). P. 159-161. **6.** *Degtyarenko P.V., Kossov M.V. and Wellisch H.P.* Chiral invariant phase space event generator, III Photonuclear reactions below ?(3,3) excitation // Eur. Phys. J. A 9. 2001. **7.** *Degtyarenko P.V.* Applications of the photonuclear fragmentation model to radiation protection problems, in: Proceedings of Second Specialist's. Meeting on Shielding Aspects of Accelerators, Targets and Irradiation Facilities (SATIF-2). CERN, Geneva, Switzerland, 12-13 October 1995. Published by Nuclear Energy Agency, Organization for Economic Co-operation and Development. 1996. P. 67-91. **8.** *Prokhorets I.M., Prokhorets S.I., Rudychev Y.V., Khazhmuradov M.A., Fedorchenko D.V.* Questions of the effective methods choosing for neutron-physical processes simulation // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Nuclear Physics Investigations. 2007. **9.** *White M.C.* Development and Implementation of Photonuclear Cross-Section Data For Mutually Coupled Neutron-Photon Transport Calculations in the Monte Carlo N-Particle (MCNP) Radiation Transport Code. LA-13744-T. Los Alamos National Laboratory: Los Alamos, NM, 2000.

Поступила в редколлегию 06.09.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Путятин Е.П.

Рудычев Егор Владимирович мл. научный сотрудник Национального Научного Центра Харьковский Физико-технический институт. Научные интересы: радиационная безопасность, математическое моделирование, оптимизация комплексных систем. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, тел. (057)335-65-94. e-mail: khazhm@kipt.kharkov.ua.

Прохорец Светлана Ивановна, мл. научный сотрудник Национального Научного Центра Харьковский Физико-технический институт. Научные интересы: математическое моделирование. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, тел. (057)335-65-94. e-mail: khazhm@kipt.kharkov.ua.

Хажмурадов Манап Ахмадович, д-р техн. наук, профессор, начальник отдела Национального Научного Центра Харьковский Физико-технический институт. Научные интересы: математическое моделирование, оптимизация комплексных систем, альтернативные источники энергии. Адрес: Украина, 61108, Харьков, ул. Академическая, 1, тел. (057)335-68-46. e-mail: khazhm@kipt.kharkov.ua

УДК621.865.8:004.421

МЕТОД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДУГИ КОЛА ДЛЯ СИСТЕМ ПРОГРАМНОГО ВІДТВОРЕННЯ РУХІВ

НЕВЛЮДОВ І.Ш., ВЕЛИКОДНИЙ С.С.

Розглядається створення методу формування програмної траєкторії руху автоматичної електромеханічної системи, що забезпечує відтворення багатокоординатного погодженого руху одного або декількох виконавчих органів за заданою пласкою або просторовою траєкторією кола, яка визначена мінімальною кількістю точок у абсолютній системі координат.

Вступ

Актуальність теми випливає з необхідності створення більш досконалих систем відтворення рухів (СВР: промислові роботи, автоматичні маніпулятори, верстати з ЧПК, контрольно-вимірювальні машини, динамічні іспитові стенди, радіотелескопи та ін. [1]) та, відповідно, розвитку досліджень в області синтезу ефективних алгоритмів програмного керування рухом виконавчих пристроїв, що реалізують просторовий рух за заданими траєкторіями.

Метою дослідження є формування нового методу, що забезпечує високу швидкодію, найвищу точність опису траєкторій руху та надає простий аналітичний підхід до побудови принципово нових інтерполяторів у рамках цього методу.

Виконання поставленої мети забезпечується в роботі вирішенням таких *задач*:

– визначення відносної (рухливої) декартової прямокутної системи координат;

– вибір напрямку руху робочого органу (РО) маніпулятора за дугою кола і розрахунок довжини дуги у відносній системі координат;

– визначення відносних і абсолютних прямокутних поточних координат рухливої точки дуги кола.

1. Основні функції та типові режими рухів СВР

СВР є підсистемами автоматичних систем керування (СК) і відносяться до спеціального класу СК рухом промислових і спеціальних модулів зі складною кінематичною структурою [2].

Процеси відтворення рухів відбуваються в основних складових частинах СВР: пристрої керування, інформаційно-вимірювальній системі, виконавчих пристроях та в робочих органах об'єкта керування. Процес відтворення рухів умовно можна розділити на два етапи:

1) вироблення впливів, що задають, по положенню, які забезпечують рух виконавчих механізмів по окремих координатах (або РО в цілому) за бажаною траєкторією з необхідними швидкостями та прискореннями;

2) відпрацьовування з необхідною якістю впливів, що задають, контурами положень, які включають в себе як складові частини виконавчі й робочі органи об'єкта.

Однією з **основних функцій** СВР, що повинні бути реалізовані в процесі вироблення завдання, є перетворення впливів, що задають, які сформовані для окремих осей, з однієї системи координат в іншу [3]. Для багатокоординатних верстатів із ЧПК – це перетворення заданих рухів із системи координат, зв'язаної з деталлю, до системи координат верстата; для промислових роботів (ПР) – з абсолютної системи координат робота, жорстко прив'язаної до земної системи координат, у відносну систему координат, зв'язану із суглобами робота і РО. На цій же стадії процесу відтворення рухів пристрій керування повинен сформувати координати проміжних точок траєкторії заданої точки об'єкта керування або проміжних положень вектора, що відповідає орієнтації РО або деталі. Ця задача вирішується на підставі інформації про координати початкової і кінцевої точок та у вигляді траєкторії або інформації про початковий та кінцевий напрямки вектора, що орієнтує. Це – процедура так званої інтерполяції в системах програмного відтворення рухів [4].

На другому етапі, тобто в процесі відпрацьовування впливів, що задають, повинні бути реалізовані такі основні функції: знімання інформації про лінійне або кутове переміщення по окремих координатах виконавчих і робочих органів об'єкта; формування керуючих впливів на виконавчі органи по окремих координатах руху об'єкта. Рішення останньої задачі ґрунтується на інформації про завдання і реальне положення об'єкта по окремих координатах; при цьому враховуються динамічні характеристики відтвореного руху, а також виконавчих і робочих органів об'єкта.

Види впливів, що задають, залежать від призначення і режимів роботи СВР.

Через різноманіття режимів роботи СВР вимоги до них різні. В одних випадках, наприклад, необхідне точне відпрацьовування сигналів, що задають, по окремих координатах руху РО, в інших – точне відтворення самої траєкторії, причому не тільки при русі з постійною контурною швидкістю v, але й з постійним контурним прискоренням $\dot{v}$. В останньому випадку в ролі критерію якості використовується (замість погрішностей по окремих координатах, наприклад погрішностей ε_X та ε_Y по площинних прямокутних координатах X та Y) *контурна* (*траєкторна*) *погрішність* δ (рис. 1).

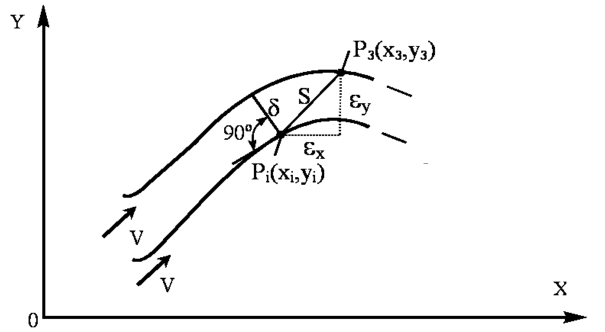

Рис. 1. Визначення траєкторної погрішності: $P_3(x_3, y_3)$, $P_i(x_i, y_i)$ – точки заданої та реальної траєкторії; V – траєкторна швидкість

Траєкторні погрішності, в зручному для практичного використання вигляді, можуть бути отримані лише для конкретних видів траєкторій, зокрема для *прямої* і *кола* [2]. Однак для більшості випадків застосування програмного керування рухом ПР таких траєкторій досить. В окремих випадках ці траєкторії зручно доповнити рухами по *еліпсу* і *параболі* n-го порядку.

2. Основні системи координат ПМ СВР

Більшість РО виконавчих пристроїв СВР із погляду класичної механіки відносяться до *твердих тіл* [3]. Тому рівняння рухів РО можуть бути записані відповідно до законів руху твердого тіла.

Відомо, що для завдання руху твердого тіла в просторі необхідно вибрати *систему відліку*, стосовно якого розглядається рух досліджуваного тіла. Для СВР, насамперед, для ПР та маніпуляторів, що містять багатоланкові маніпуляційні системи, характерна наявність декількох систем відліку (більш двох). З кожною системою відліку жорстко зв'язують яку-небудь *систему координат*, так що положення кожної точки тіла, що рухається, щодо обраної системи відліку можна однозначно визначити трьома координатами цієї точки.

Систему координат, пов'язану з основою (стійкою) ПМ, умовно назвемо *абсолютною системою координат*, оскільки така система відліку звичайно жорстко прив'язана до Земної системи координат. Відповідно, *відносною системою координат* назвемо систему координат, пов'язану з РО модуля.

Незважаючи на велику різноманітність кінематичних схем роботів і маніпуляторів, в механіці СВР як *"абсолютні"* в основному застосовуються такі системи координат (рис. 2): *права Декартова прямокутна, циліндрична* і *сферична* [5]. Кожна точка М тіла, що рухається, у прямокутній системі координат має три поступальні (переносні) координати: x, y, z (див. рис. 2, а). У *циліндричній* системі координат положення точки визначається двома поступальними ρ, z і однією обертальною φ координатами (див. рис. 2, б). У *сферичній* системі координат точка визначається двома обертальними φ, θ й однією поступальною r координатами (див. рис. 2, в).

Рис. 2. Основні системи координат: *а* – Декартова прямокутна; *б* – циліндрична; *в* – сферична

Зазначені координати будь-якої основної системи координат визначають три *ступені свободи* РО СВР, тобто задають положення якої-небудь точки РО, зокрема центра ваги – так зване *макроположення* РО. Для точного позиціонування РО, наприклад схопу, і орієнтування його щодо деталі необхідні ще три додаткові ступені свободи та, відповідно, три *додаткові координати*. Звичайно це три кути повороту прямокутної системи координат, "прив'язаної" до РО, – α, β, γ (*кути Ейлера* [4]) щодо обраної точки макроположення, що вважається нерухомою.

3. Загальна характеристика методу інтерполяції

Метод розроблено стосовно задач програмного керування рухом РО робототехнічних комплексів і верстатів із ЧПК, призначених для зварювання, різання, пайки, нанесення покрить, розкрою, механообробки та інших технологічних операцій, виконуваних електричною дугою, лазерним променем, плазмою, пульверизатором, різцем і т.п. Метод призначено для розрахунку і відтворення координат поточної (робочої) точки траєкторії руху РО по дузі кола *в абсолютній системі координат* (АСК), пов'язаній з основою СВР, і у *відносній системі координат* (ВСК), пов'язаній з РО та обумовленій площиною, що проходить через три задані точки.

Метод дозволяє разом з розробленими програмами формування руху за *прямою* і перетворення *систем координат* реалізувати керування маніпуляційною системою різних СВР по кожній прямокутній координаті переміщення РО при інтерполяції довільно заданої траєкторії руху. При цьому точність відтворення визначається технологічними вимогами до якості виробу або операції та залежить від можливостей системи ЧПК і точності роботи електроприводів по кожній координаті [1]. Передбачається, що РО, наприклад зварювальна голівка робота, рухається по дузі кола з необхідною постійною швидкістю, проходячи послідовно через три точки, задані в АСК модуля.

4. Постановка задачі інтерполяції дуги кола

Для ПР і автоматичних маніпуляторів, що виконують зварювальні, фарбувальні, обробні та інші роботи, часто потрібно здійснювати рух РО (зварювальної голівки, фарбопульта, інструмента та ін.) по колу. Процес навчання такого СВР істотно спрощується, якщо його програмне забезпечення містить алгоритми, що дозволяють формувати сигнали керування для руху по дузі кола, заданій трьома точками в опорній системі координат модуля. При цьому звичайно потрібно, щоб РО модуля переміщався з необхідною швидкістю, проходячи послідовно через три задані точки.

Розглянемо рух РО СВР по дузі кола, заданій трьома точками з координатами $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{r}_2 = =\{x_2, y_2, z_2\}$ і $\vec{r}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$ у деякій нерухомій системі координат OXYZ (рис. 3), пов'язаній, наприклад, з основою робота, тобто АСК робота.

Для розкриття методу організуємо рух СВР по дузі кола стосовно двох *постановок задачі* (ПЗ):

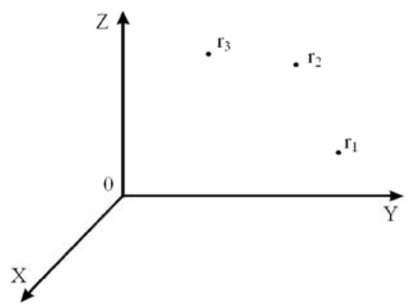

Рис. 3. Завдання вихідних точок дуги кола в абсолютній системі координат робота

1. Організувати рух РО СВР по дузі кола з заданої початкової точки $\vec{r}_1$ у задану кінцеву точку $\vec{r}_3$ через задану точку $\vec{r}_2$ з постійною заданою кутовою швидкістю $\omega_{зад}$. Визначити необхідний час t переміщення РО за розрахованою траєкторією з точки $\vec{r}_3$ у точку $\vec{r}_3$.

2. Організувати рух РО СВР за дугою кола з заданої початкової точки $\vec{r}_1$ у задану кінцеву точку $\vec{r}_3$ через задану точку $\vec{r}_2$ за заданий час $t_{зад}$. Визначити необхідну постійну кутову швидкість ω переміщення РО з початкової точки $\vec{r}_1$ у кінцеву $\vec{r}_3$.

Обидві постановки задачі припускають попередній розрахунок довжини *l* дуги кола і визначення поточних координат положення кінця РО в кожен заданий дискретний момент часу t_i у процесі руху.

Для реалізації руху з заданою швидкістю ω або за заданий час $t_{зад}$ зв'яжемо з вихідними точками $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ плоску систему координат: $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}$, яка лежить у площині кола і початок якої збігається з центром кола, що проходить через ці точки. Назвемо цю систему координат *відносною системою координат*.

Можна визначити такий *алгоритм формування поточних координат* руху РО за дугою кола:

Крок 1. Задати відносну систему координат $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$.

Крок 2. Визначити поточні координати точки руху $\hat{x}_i$, $\hat{y}_i$, $\hat{z}_i$ у ВСК.

Крок 3. За допомогою матриці **T** перетворення систем координат знайти поточні координати точки руху x_i, y_i, z_i в опорній системі координат – АСК: *OXYZ.*

5. Перетворення систем координат

Для того щоб задати відносну систему координат $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$, необхідно визначити координати її початку – точки $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ центра кола, що проходить через три вихідні точки $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ і $\vec{r}_3$ та лежить у площині, що проходить через ці точки (рис. 4).

Визначивши $\vec{r}_0$, задамо систему координат $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ у такий спосіб. Початок координат помістимо в точку $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$. *Вісь* $\hat{O}\hat{X}$ проведемо через точку $\vec{r}_1$. Нехай вектор $\overrightarrow{r_0 r_1}$ буде напрямним для осі $\hat{O}\hat{X}$.

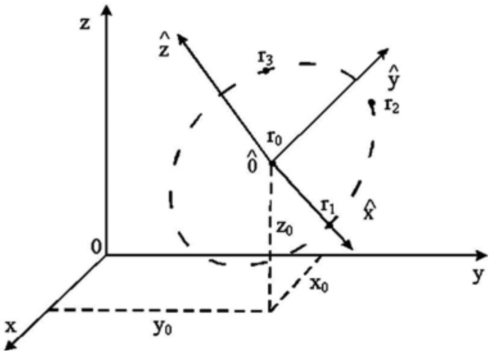

Рис. 4. До перетворення систем координат

Вісь $\hat O \hat Z$ проведемо через точку $\vec r_0$ перпендикулярно до площини, що проходить через вихідні точки $\vec r_1, \vec r_2$ і $\vec r_3$. *Вісь* $\hat O \hat Y$ повинна бути перпендикулярною до площини, утвореної осями $\hat O \hat X$ і $\hat O \hat Z$, і проходити через точку $\vec r_0$. Тому вісь $\hat O \hat Y$ може бути задана як лінія перетинання двох ортогональних площин: $\hat X \hat O \hat Y$ і $\hat Z \hat O \hat Y$. При цьому необхідно стежити за тим, щоб система координат $\hat O \hat X \hat Y \hat Z$, так само, як і АСК OXYZ, була *правобічною*, що визначається напрямком осі $\hat O \hat Y$ (див. рис. 4).

Нехай x, y, z і $\hat x$, $\hat y$, $\hat z$ – координати однієї і тієї ж поточної точки $\vec r$ дуги кола щодо двох різних однобічних Декартових систем координат OXYZ і $\hat O \hat X \hat Y \hat Z$. Нехай, при цьому, система координат $\hat O \hat X \hat Y \hat Z$ розташована щодо системи OXYZ таким чином, що *вісь* $\hat O \hat X$ має направляючі косинуси: t_{11}, t_{21}, t_{31}; *вісь* $\hat O \hat Y$: t_{12}, t_{22}, t_{23} ; *вісь* $\hat O \hat Z$: t_{13}, t_{23}, t_{33}. Тоді щодо системи координат $\hat O \hat X \hat Y \hat Z$ *вісь* OX має направляючі косинуси: t_{11}, t_{12}, t_{13}; *вісь* OY: t_{21}, t_{22}, t_{23}; *вісь* OZ: t_{31}, t_{32}, t_{33}. Якщо початок $\vec r_0$ системи координат $\hat O \hat X \hat Y \hat Z$ має в системі координат OXYZ координати x_0, y_0, z_0, то *перетворення* відносних координат $\hat x$, $\hat y$, $\hat z$ точки руху дуги кола в абсолютні координати x, y, z мають такий вигляд:

$$x = t_{11}\hat x + t_{12}\hat y + t_{13}\hat z + x_0,$$

$$y = t_{21}\hat x + t_{22}\hat y + t_{23}\hat z + y_0,$$

$$z = t_{31}\hat x + t_{32}\hat y + t_{33}\hat z + z_0, \quad (1)$$

або в матричній формі

$$\vec r = \mathbf{A}\vec{\hat r} + \vec r_0, \quad (2)$$

де **A** – *матриця направляючих косинусів* (або *матриця обертання*):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Запишемо матрицю **A** у розширеному вигляді, з представленням її в однорідних координатах:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & x_0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & y_0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Тоді перетворення (2) прийме вигляд:

$$\vec r = \mathbf{T}\vec{\hat r}, \quad (5)$$

де **T** – *матриця перетворення прямокутних систем координат* (або *матриця стану* РО СВР).

Із отриманих співвідношень випливає, що, задавши в ВСК $\hat O \hat X \hat Y \hat Z$ рух точки і визначивши її координати в системі $\hat O \hat X \hat Y \hat Z$, можна за допомогою перетворення (5) визначити координати цієї точки в АСК – OXYZ. Таке перетворення являє собою рішення *зворотної задачі кінематики* СВР. Крім рішення такої задачі, тобто переходу від відносної системи координат $\hat O \hat X \hat Y \hat Z$ до абсолютної OXYZ, необхідно вирішити і *пряму задачу кінематики* СВР. Для цього визначимо матрицю $\mathbf{T}^{-1}$ прямого переходу від системи OXYZ до системи $\hat O \hat X \hat Y \hat Z$ за формулою:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T\vec r_0 \\ 0\ \ 0\ \ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

де $\vec r_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$, T – умовна позначка операції транспонування матриці (вектора). Тоді перетворення абсолютних координат точки руху у відносні координати прийме вигляд:

$$\vec{\hat r} = \mathbf{T}^{-1}\vec r\ . \quad (7)$$

Розглянемо складові матриці $\mathbf{T}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}; \quad (8)$$

$$-\mathbf{A}^T\vec r_0 = -\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(t_{11}x_0 + t_{21}y_0 + t_{31}z_0) \\ -(t_{12}x_0 + t_{22}y_0 + t_{32}z_0) \\ -(t_{13}x_0 + t_{23}y_0 + t_{33}z_0) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Для перевірки абсолютної й відносної систем координат на однобічність досить знайти визначник матриці A:

$$\det\ \mathbf{A} = t_{11}(t_{22}t_{33}\text{-}t_{32}t_{23})\text{-}t_{12}(t_{21}t_{33}\text{-}t_{31}t_{23}) + t_{13}(t_{21}t_{32}\text{-}t_{22}t_{31}); (10)$$

при цьому detA=1, якщо прямокутні системи координат однобічні (обидві правобічні або обидві лівосторонні), та detA= –1 – у протилежному випадку.

6. Розрахунок довжини дуги кола

Обидві постановки задачі інтерполяції (див. **розд. 4**) припускають попередній розрахунок довжини *l* дуги кола. Для розрахунку довжини дуги необхідно знати її центральний кут. Значення цього кута знайдемо як кут n_{13} між векторами $\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_1}$ і $\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_3}$. Знаючи координати довжини і скалярний добуток цих векторів, можна визначити і косинус кута між ними:

$$\cos\ n_{13} = \frac{(\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_1})(\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_3})}{|\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_1}||\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_3}|}, \qquad (11)$$

де $\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_1} = \{\hat{x}_1 - \hat{x}_0, \hat{y}_1 - \hat{y}_0, \hat{z}_1 - \hat{z}_0\}$,

$$\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_3} = \{\hat{x}_3 - \hat{x}_0, \hat{y}_3 - \hat{y}_0, \hat{z}_3 - \hat{z}_0\}; \qquad (12)$$

$$|\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_1}| = \sqrt{(\hat{x}_1 - \hat{x}_0)^2 + (\hat{y}_1 - \hat{y}_0)^2 + (\hat{z}_1 - \hat{z}_0)^2},$$

$$|\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_3}| = \sqrt{(\hat{x}_3 - \hat{x}_0)^2 + (\hat{y}_3 - \hat{y}_0)^2 + (\hat{z}_3 - \hat{z}_0)^2}. \qquad (13)$$

Звідси з урахуванням, що відносні координати $\hat{x}_0 = \hat{y}_0 = \hat{z}_0 = 0$, одержимо

$$\cos\ n_{13} = \frac{\hat{x}_1\hat{x}_3 + \hat{y}_1\hat{y}_3 + \hat{z}_1\hat{z}_3}{\sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2 + \hat{z}_1^2}\sqrt{\hat{x}_3^2 + \hat{y}_3^2 + \hat{z}_3^2}}, \qquad (14)$$

де $\cos n_{13}$ – косинус кута, центрального для дуги r_1r_3.

Крім кута n_{13} необхідно знайти і центральний кут n_{12} між векторами $\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_1}$ і $\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_2}$, знання значення якого дозволить вибрати *„вірний”* напрямок (*за годинниковою стрілкою* або *проти годинникової стрілки*) руху РО по дузі кола: від точки $\vec{r}_1$ до точки $\vec{r}_3$ суворо через точку $\vec{r}_2$. Аналогічно (14) знайдемо

$$\cos\ n_{12} = \frac{\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{y}_1\hat{y}_2 + \hat{z}_1\hat{z}_2}{\sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{y}_1^2 + \hat{z}_1^2}\sqrt{\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2 + \hat{z}_2^2}}, \qquad (15)$$

де $\cos n_{12}$ – косинус кута, центрального для дуги r_1r_3.

Знаючи косинус центрального кута, можна визначити і сам центральний кут. Точки $\vec{\hat{r}}_1$ і $\vec{\hat{r}}_3$ можуть знаходитися у будь-яких чвертях системи координат $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}$, значить, використовуючи тригонометричні формули приведення, *кути* $\mathbf{n_{12}}$ і $\mathbf{n_{13}}$ будемо *обчислювати* за такими узагальненими формулами:

1. Якщо $\cos n_{1j} \geq 0$ і $\hat{x}_j \geq 0$, $\hat{y}_j > 0$, то

$$n_{1j} = \arccos(\cos n_{1j}) = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos^2 n_{1j}}{\cos^2 n_{1j}}},\ j = 2,3. \qquad (16)$$

2. Якщо $\cos n_{1j} < 0$ і $\hat{x}_j < 0$, $\hat{y}_j \geq 0$, то

$$n_{1j} = p - \arccos|\cos n_{1j}| = p - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos^2 n_{1j}}{\cos^2 n_{1j}}},\ j = 2,3. \qquad (17)$$

3. Якщо $\cos n_{1j} \geq 0$ і $\hat{x}_j \geq 0$, $\hat{y}_j < 0$, то

$$n_{1j} = p + \arccos|\cos n_{1j}| = p + \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos^2 n_{1j}}{\cos^2 n_{1j}}},\ j = 2, 3. \qquad (18)$$

4. Якщо $\cos n_{1j} > 0$ і $\hat{x}_j > 0$, $\hat{y} \leq 0$, то

$$n_{1j} = 2p - \arccos(\cos n_{1j}) = 2p - \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-\cos^2 n_{1j}}{\cos^2 n_{1j}}},\ j = 2, 3. \qquad (19)$$

Аналізуючи значення центральних кутів n_{12} і n_{13}, вибирають *„вірний”* напрямок руху РО по дузі кола: за годинниковою стрілкою або проти неї.

Помітимо, що у математиці позитивним вважається центральний кут, відлічуваний точкою, що рухається проти годинникової стрілки, а негативним – за годинниковою. У розглянутому випадку, коли напрямок руху РО СВР за дугою кола обрано, для розрахунку довжини ℓ_{1j} дуги значення має лише абсолютна величина центрального кута n_{1j}, а не його знак. Тому незалежно від напрямку руху РО кут n_{1j} будемо вважати позитивним та для його обчислення застосовувати *таке правило:*

1) якщо при обраному русі проти годинникової стрілки РО знаходиться у I чверті площини $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$ або при обраному русі за годинниковою стрілкою РО знаходиться у IV чверті площини $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$, то для обчислення кута n_{1j} варто скористатися формулою (16);

2) якщо при русі проти годинникової стрілки РО знаходиться у II чверті або при русі за годинниковою стрілкою РО знаходиться у III чверті, то для обчислення кута n_{1j} варто скористатися формулою (17);

3) якщо при русі проти годинникової стрілки РО знаходиться у III чверті або при русі за годинниковою стрілкою РО знаходиться у II чверті, то для обчислення кута n_{1j} варто скористатися формулою (18);

4) якщо при русі проти годинникової стрілки РО знаходиться у IV чверті або при русі за годинниковою стрілкою РО знаходиться у I чверті, то для обчислення кута n_{1j} варто скористатися формулою (19).

Отримана величина кута n_{1j} (j = 2, 3) буде обчислена у радіанах [*рад*]. Для перекладу її в кутові градуси [*кут.град*] можна скористатися формулою:

$$n_{1j,у.г.} = \frac{180 \cdot n_{1j}}{\pi}\ [\textit{кут.град}],\ j=2, 3. \qquad (20)$$

Тоді *довжина* ℓ_{1j} дуги кола розраховується за формулами:

$$\ell_{1j} = R \cdot n_{1j}\ [\textit{ум.лін.од.}],\ j = 2, 3 \qquad (21)$$

або

$$\ell_{1j} = \frac{R \cdot n_{1j,у.г.} \cdot \pi}{180}\ [\textit{ум.лін.од.}],\ j=2, 3, \qquad (22)$$

де $R = |\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_1}| = |\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_2}| = |\overrightarrow{\hat{r}_0\hat{r}_3}|$ – радіус кола, *ум.лін.од.*

7. Визначення поточних координат положення РО СВР на дузі кола

Розрахувавши довжину ℓ_{13} дуги, що описує РО СВР при русі по колу, нескладно визначити поточні координати положення кінця РО на кривій, у кожен заданий дискретний момент часу t_i, у процесі руху. Для цього необхідно виконати *такі дії:*

1. Визначити час t, за який РО опише шукану дугу: $\hat{r}_1\hat{r}_3$:

$$t = \frac{n_{13}}{\omega_{зад}}\ [c], \tag{23}$$

де $\omega_{зад}$ – задана постійна кутова швидкість руху РО, *рад/с* (див. **розд. 4**, П3=1); або визначити необхідну постійну кутову швидкість w переміщення РО по дузі $\hat{r}_1\hat{r}_3$:

$$w = \frac{n_{13}}{t_{зад}}\ [рад/с], \tag{24}$$

де $t_{зад}$ – заданий час, за який РО описує шукану дугу $\hat{r}_1\hat{r}_3$, *с* (див. **розд. 4**, П3=2).

2. Визначити необхідний дискретний крок Δt за часом t (або по $t_{зад}$) руху РО по дузі кола і задати дискретні моменти часу t_i:

$$\Delta t = \frac{t}{N}\ [c] \text{ або } \Delta t = \frac{t_{зад}}{N}\ [c]; \tag{25}$$

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t\ \ [c] \text{ або } t_i = \Delta t \cdot i\ [c]\ \ \forall\ i = \overline{1, N};\ t_0 = 0, \tag{26}$$

де N – задана кількість інтервалів дискретизації за часом, що повинна знаходитися у межах: $10 \le N \le 21600$. У перерахуванні в кутові одиниці виміру мінімальний крок по дузі ℓ_{13}, рівній довжині кола, складає: $\Delta\ \ell_{13}$=1 *кут. хв* = 60 *кут. с*.

3. Визначити збільшення $\Delta\varphi$ кута $\varphi(t)$ на одному інтервалі дискретизації Δt:

$$\Delta\varphi = \omega_{зад}\Delta t\quad [рад] \text{ або } \Delta\varphi = \omega\Delta t\quad [рад]\,. \tag{27}$$

4. Визначити поточні значення кута $\varphi(t_i)$ в дискретні моменти часу t_i:

$$\varphi(t_i) = \varphi(t_{i-1}) + \Delta\varphi \qquad [рад]$$

$$\text{або } \varphi(t_i) = \Delta\varphi \cdot i \quad [рад] \qquad \forall i = \overline{1, N}; \qquad \varphi(t_0) = 0. \tag{28}$$

5. При заданому постійному радіусі R дуги $\hat{r}_1\hat{r}_3$ кола визначити поточні відносні координати положення кінця РО СВР на кривій у кожен заданий дискретний момент часу t_i, що можна зробити шляхом перетворення полярної системи координат у прямокутну ВСК $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ (рис. 5):

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= R \cdot \cos\varphi(t_i), \\ \hat{y}_i &= R \cdot \sin\varphi(t_i), \\ \hat{z}_i &= 0 \qquad\qquad \forall i = \overline{0, N}. \end{aligned} \tag{29}$$

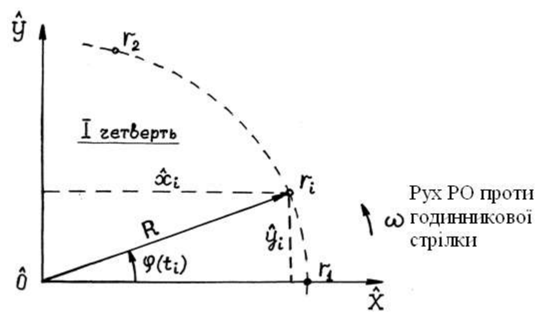

Рис. 5. До визначення відносних поточних координат положення РО на дузі кола

6. При заданій матриці стану РО **T** визначити на підставі перетворення (5) поточні абсолютні координати положення кінця РО на дузі кола в кожен заданий дискретний момент часу t_i:

$$\begin{aligned} x_i &= t_{11}\hat{x}_i + t_{12}\hat{y}_i + t_{13}\hat{z}_i + x_0, \\ y_i &= t_{21}\hat{x}_i + t_{22}\hat{y}_i + t_{23}\hat{z}_i + y_0, \\ z_i &= t_{31}\hat{x}_i + t_{32}\hat{y}_i + t_{33}\hat{z}_i + z_0, \\ 1 &= 1 \qquad\qquad \forall i = \overline{0, N}. \end{aligned} \tag{30}$$

Висновки

Отже, у статті розглянуто формування методу інтерполяції дуги кола для систем програмного відтворення рухів багатокоординатного погодженого руху одного або декількох виконавчих органів, причому сама дуга визначена мінімальною кількістю точок у абсолютній системі координат.

При вирішенні задач, поставлених безпосередньо перед виконанням роботи, була досягнута мета дослідження: сформувати новий метод опису траєкторій руху.

У *результаті досліджень* розглянуто: основні функції та типові режими рухів СВР, основні системи координат ПМ СВР, загальну характеристику методу інтерполяції дуги кола, перетворення систем координат, розрахунок довжини дуги кола, визначення поточних координат положення РО СВР на дузі кола.

Наукова новизна отриманих результатів: вперше процес «навчання» СВР істотно спрощується, якщо її програмне забезпечення містить алгоритми, які розроблені на підставі методів, що дозволяють автоматично формувати сигнали керування виконавчими пристроями, які реалізують рух РО СВР за заданою просторовою траєкторією.

Практична значущість отриманих результатів. При практичному застосуванні математичного забезпечення вихідні дані можуть бути задані в результаті розв’язання зворотної задачі кінематики або визначені інженером-технологом аналітично, але з передбаченими необхідними перевірками умов коректності завдання вихідних точок та умов фізичної реалізації сформованої траєкторії руху РО СВР. Метод може бути використано при викладанні відповідних дисциплін у вищих навчальних закладах III–IV рівнів акредитації, зокрема на факультеті ЕА ХНУРЕ при проведенні лабораторних і практичних робіт з дисциплін за напрямом «Робототехніка». Також практичні результати можуть бути використані у цехах із верстатами з ЧПК і промисловими роботами на Харківському заводі підйомно-транспортного обладнання, заводі «Комунар» та на ХДПЗ ім. Т.Г. Шевченка.

У *порівнянні з існуючими аналогами* [4, 6 – 8] цей метод може дозволити реалізувати програмне керування рухом відразу за кожною прямокутною координатою переміщення РО. СВР, що містять програмне забезпечення на основі поданого методу, можуть значно швидше виконувати розрахунок відповідної траєкторії руху поточної робочої точки у просторі та забезпечити найвищу точність опису траєкторій.

Перспективи розвитку даного методу полягають у створенні відповідного алгоритму, на підставі якого буде створений програмний засіб, що повинен точно розраховувати та наглядно відображувати траєкторію руху РО СВР у просторі, причому інтерфейс якого повинен повністю відповідати сучасним пристроям вводу інформації у СВР.

Література: 1. *Великодний С.С.* Аналіз динамічної точності дволанкового маніпулятора промислового робота // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. 2005. № 130. С. 82-85. **2.** *Худяєв О.А., Прокопенко О.О., Великодний С.С.* Алгоритмічні та програмні засоби автоматизованих систем керування. Харків: УПА, 2006. 120 с. **3.** *Худяев А.А.* Кинематика систем воспроизведения движений. Харьков: УИПА, 2000. 132 с. **4.** *Юревич Е.И.* Основы робототехники, 2-е издание. Санкт-Петербург: БХВ- Петербург, 2005. 416 с. **5.** *Костюк В.І.,Спину Г.О., Ямпольський Л.С.* Робототехніка. Київ: Вища школа, 1998. 448 с. **6.** *Олссон Г., Пиани Дж.* Цифровые системы автоматизации и управления. Санкт-Петербург: Невский Диалект. 2001. 557 с. **7.** *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. Москва: Лаборатория Базовых Знаний. 2002. 832 с. **8.** *Yim Y., Zhang Y., Daff D.* Modular Robots // IEEE SPECTRUM. 2002. № 2. P. 30-34.

Надійшла до редколегії 20.09.2007

Рецензент: д-р техн. наук Дубровський В.В.

Невлюдов Ігор Шакирович, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри ТАВР ХНУРЕ. Наукові інтереси: автоматизація технологічних процесів у радіоелектронному приладобудуванні. Адреса: Україна, 61000, Харків, пр. 50-річчя СРСР, б. 16, кв. 473, тел. 702-14-86 (роб.), 778-77-44 (дом.).

Великодний Станіслав Сергійович, магістр, асистент кафедри ТАВР ХНУРЕ. Наукові інтереси: робототехніка, електропривод. Захоплення та хобі: туризм та вивчення філософських праць. Адреса: Україна, 61204, Харків, пр. Л. Свободи, б. 46, кв. 292, тел. 337-14-70 (дом.), 8-097-950-02-74 (моб.).

УДК618.514.01:517.977.5

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР КАК ОБЪЕКТ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА. I

РАДИЕВСКИЙ А. Е.

В классе задач аналитического конструирования оптимальных регуляторов исследуется задача динамического синтеза для гармонического осциллятора как обьекта управления. Исследование базируется на положениях теории экстремальных задач.

1. Введение

Развитие механики тесно связано с изучением маятника и маятниковых систем. За более чем 300 лет, прошедших со времени, когда Галилей обратил внимание на изохронность колебаний маятника, ни одной механической системе не было уделено столько всестороннего теоретического внимания, как маятнику[1]. Маятник и маятниковые системы постоянно привлекали к себе внимание исследователей в различных областях математики, механики, физики и техники. Уравнение движения маятника является одним из фундаментальных, описывает широкий класс колебательных процессов. В силу своей простоты маятник служил хорошей моделью для изучения сложных динамических процессов [2], что позволяло проводить экспериментальную проверку различных теоретически обнаруженных колебательных эффектов, значительно расширить область применения маятниковых моделей для математического описания колебательных процессов[3]. Одной из разновидностей многообразия моделей маятниковых систем является математическая модель гармонического осциллятора.

Интересс к изучению названной модели объясняется тем, что, с одной стороны, можно провести исследования общетеоретических положений[4], а с другой - возможно их использование при изучении конкретных маятниковых систем (например, проблематика стабилизации положения плазменного шнура[5], движение вращающегося в пространстве тела с одной осью симметрии[6] и др.).

В настоящей работе в классе задач аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) исследуется линейная модель гармонического осциллятора без демпфирования как обьекта управления (ОУ).

Целью данного исследования является разработка математического, алгоритмического и технического обеспечения процедуры проектирования для исследуемой задачи динамического синтеза.

2. Постановка и особенности задачи

На движениях ОУ

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + B\,u \qquad (1)$$

необходимо определить алгоритм управления (АУ), который доставляет экстремум критерию качества