

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.І.Герасимов, І.С.Андріанова

**ФІЗИКА В ЗАДАЧАХ. Ч.ІІ. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА  
І ТЕРМОДИНАМІКА**

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки,  
молоді та спорту України  
України як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів із природничих  
напрямів підготовки.

**О д е с а  
“Екологія”  
2013**

**ББК 22.2**  
**Г37**  
**УДК 531**

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_.200\_\_р.).*

**Рецензенти:**

Директор інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України (м.Київ),  
головний вчений секретар НАН України, академік НАН України

А.Г.Загородній

Академік ВШ України, член-кореспондент АПН України, заслужений діяч науки і  
техніки України, голова комісії з фізики та астрономії навчально-методичної ради  
загальноосвітніх навчальних закладів МОН України, зав. каф. медичної та біологічної  
фізики Національного медичного університету ім. О.О. Богомольця (м.Київ), д.ф.-м.н.,  
проф. О.В.Чалий

Зав.каф. теплофізики Одеського національного університету ім. І.І.Мечникова,  
д.ф.-м.н., проф. В.В.Калінчак

**Герасимов О.І. , Андріанова І.С.**

Г37 Фізика в задачах. Ч.ІІ. Молекулярна фізика і термодинаміка: Навчальний  
посібник /О.І.Герасимов, І.С.Андріанова.– Одеса: Вид-во “Екологія”, 2013. –150с.

ISBN

Навчальний посібник з розділу «Молекулярна фізика і термодинаміка» курсу загальної фізики має за мету поліпшення засвоєння змісту фізики студентами вищих навчальних закладів природничих напрямів підготовки за допомогою детального розгляду та розв’язання типових задач з окремих її підрозділів.

Акцент посібника спрямовано на роз’яснення, усвідомлення та застосування фізичних законів на шляху розв’язання конкретних задач.

Посібник може бути корисним для студентів, магістрів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників вищих навчальних закладів із природничих напрямків підготовки.

**ББК 22.2**

ISBN

© Одеський державний  
екологічний університет, 2013

## ЗМІСТ

Передмова . . . . .	4
Вступ . . . . .	5
Розділ 1. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії . . .	7
Розділ 2. Ідеальний газ. Параметри та рівняння стану ідеального газу . . . . .	15
Розділ 3. Основи молекулярно-кінетичної теорії газів . . . . .	40
Розділ 4. Процеси переносу в газах . . . . .	59
Розділ 5. Основи термодинаміки. Перший закон термодинаміки .	74
Розділ 6. Основи термодинаміки. Другий закон термодинаміки. Ентропія системи . . . . .	104
Розділ 7. Реальні гази. Рівняння Ван-дер-Ваальса . . . . .	121
Розділ 8. Фазові переходи. Термодинамічні властивості рідини та пари . . . . .	127
Додатки . . . . .	144
Література . . . . .	150

## ПЕРЕДМОВА

Посібник продовжує видання методичних матеріалів з курсу загальної фізики «Фізика у задачах та прикладах», який спрямовано на засвоєння змісту дисципліни шляхом детального розв'язання типових задач з окремих її розділів. Поточний том посібника присвячено викладенню класичних положень молекулярної фізики і термодинаміки рівноважних процесів і містить досить велику кількість вправ, яких на думку авторів, достатньо для якісного практичного засвоєння цього розділу. Як і у першому томі посібника («Механіка»), головна увага приділяється детальній методичній проробці розв'язків типових задач.

Задачі для самостійного розгляду спираються на типові, поширюють коло питань розділу, до якого вони відносяться, та свідомо прокладають стежки безпосередньо до комплексних фахових завдань. Студент може користуватися посібником, перебуваючи на різних рівнях засвоєння матеріалів курсу, і контролювати рівень знань за допомогою тестових вправ (понятійний рівень) чи шляхом розв'язання типових задач. Посібник розраховано на студентів міждисциплінарних напрямків підготовки, тому задачі та вправи підібрані таким чином, щоб задовольнити категорії студентів, які мають різні ступені мотивації до вивчення фізики. Все вищеописане здійснюється із безумовним утриманням концептуального змісту фізики (у даному випадку її розділу «Термодинаміка») та її спрямованості на розв'язання практичних і актуальних задач вивчення навколишнього середовища та технологічних процесів.

Список літератури відсилає користувача до поглиблення отриманих знань та навичок за допомогою вивчення додаткових джерел інформації та доповнює довідкову базу посібника.

Автори висловлюють щиру подяку рецензентам за важливі дискусії та рекомендації стосовно як змістовних положень посібника, так і категорій завдань, які включено до змісту.

## ВСТУП

**Способи опису макросистем. Молекулярна фізика та термодинаміка.**

**Предмет молекулярної фізики і термодинаміки.** Молекулярна фізика і термодинаміка вивчають поведінку макросистем.

Макросистемою називають систему, яка містить велику кількість частинок.

У цьому сенсі до макросистем належать гази, рідина, тверді тіла і плазма, які складаються з атомів, молекул та іонів.

Існують два способи опису таких систем та процесів, що відбуваються в них: **статистичний і термодинамічний.**

**Молекулярна (статистична) фізика** – розділ фізики, який вивчає властивості макросистем в залежності від властивості та взаємодії частинок, які утворюють ці системи, тобто спирається на молекулярно-кінетичну теорію.

Головна задача статистичної фізики – пояснити властивості тіл, які спостерігаються безпосередньо на досліді (тиск, густину, температуру, тощо), як результат сукупної дії великої кількості молекул, які знаходяться у стані неперервного руху. Це дозволяє використання **статистичного методу**, який базується на наступних твердженнях:

1. Сукупність великої кількості молекул (колективу) має властивості, яких не має кожна окрема молекула.

2. Статистична фізика працює з середніми значеннями величин, які характеризують поведінку кожної молекули (швидкість, імпульс, енергія).

3. Існує зв'язок між макроскопічними властивостями колективу молекул і середніми значеннями величин, що характеризують властивості окремих молекул (мікроскопічними властивостями).

4. У статистичній фізиці розглядається конкретна молекулярна модель і до неї застосовуються математичні методи статистики, які базуються на теорії ймовірностей. Таким чином статистичний метод дозволяє визначити не тільки середні значення величин, що вивчаються, але й оцінити ймовірність будь-якого іншого можливого значення.

**Термодинаміка** вивчає властивості макроскопічних систем і процеси, що протікають у них, не спираючись на жодні модельні уявлення про атомно - молекулярну структуру речовини. За допомогою деяких інтегральних понять (тиск, температура, об'єм) та функцій стану (внутрішня енергія, ентропія) термодинаміка дозволяє зробити висновки щодо протікання процесів у макросистемі без розгляду мікроскопічної поведінки окремих частинок. Термодинамічний метод оснований на аналізі

умов та кількісних співвідношень, які виконуються у системі при різних перетвореннях енергії. Співвідношення між різними видами енергії дозволяють вивчати фізичні властивості досліджуваних макроскопічних систем при різних процесах і прогнозувати напрям зміни стану системи.

В основу термодинаміки покладені фундаментальні закони (начала термодинаміки), які є узагальненням великої кількості дослідних фактів. Висновки термодинаміки носять узагальнений характер і застосовуються не тільки до теплових процесів, але й до інших фізичних явищ (електричних, магнітних і т. ін.)

Таким чином, термодинаміка та статистична фізика мають загальний предмет вивчення – властивості макросистем (речовини) та процеси, що відбуваються в них. Вивчаючи досліджувані об'єкти з різних точок зору, статистична фізика і термодинаміка доповнюють і збагачують одна одну, утворюючи єдине ціле.

## РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

**Тема:** Основні положення молекулярно-кінетичної теорії; їх експериментальні підтвердження. Маса та діаметр молекул.

### Основні поняття і формули.

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовини з точки зору молекулярно-кінетичних уявлень. В основу молекулярно-кінетичної теорії покладені такі положення:

1. Усі тіла в природі складаються з молекул (атомів). Молекула – найменша частинка речовини, яка зберігає всі її хімічні властивості. Молекули складаються з атомів та в залежності від речовини мають різну структуру. Маса та розміри молекул є дуже малими.

2. Молекули знаходяться у стані неперервного хаотичного руху, який називають тепловим.

3. Між молекулами діють сили притягання та відштовхування, які залежать від відстані між молекулами і проявляються на невеликих відстанях. Ці сили мають електромагнітну природу.

При наближенні молекул сили притягання, які прийнято вважати додатними, змінюються на сили відштовхування – від’ємні сили. Відстань між молекулами, на якій змінюється знак сили, приймають за діаметр молекули (рис. 1.1).

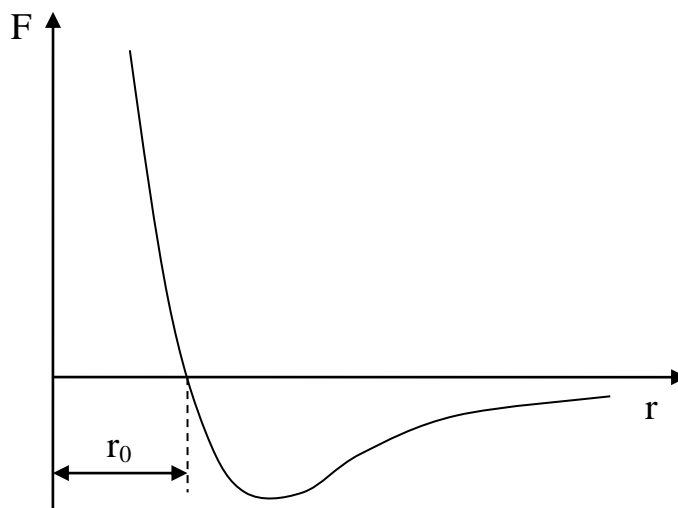


Рис. 1.1.

Молекули різних речовин по-різному взаємодіють між собою. Взаємодія залежить від типу молекул і відстані між ними. Цим пояснюється наявність різних агрегатних станів речовини (твердий, рідкий, газоподібний).

Найбільш яскравими експериментальними підтвердженнями положень МКТ є:

броунівський рух – хаотичний рух макроскопічних частинок внаслідок одночасної дії на неї великої кількості мікрочастинок);

дифузія – напрямлений рух частинок із області з більшою концентрацією в область з меншою концентрацією);

прагнення газів зайняти увесь об'єм посудини, у якій вони знаходяться; наявність у твердих тіл певної форми і розмірів, обумовлене силами притягання між атомами і молекулами;

електронний та іонний мікроскопи дозволяють отримати фотографії, на яких видна дискретна будова речовини (хоча наші органами чуттів сприймають речовину як суцільне і неперервне).

### **Маса і діаметр молекул.**

Для характеристики мас атомів і молекул використовують величини, які отримали назву відносної атомної маси елементу і відносної молекулярної маси речовини.

Відотною атомною масою  $A_r$  хімічного елементу називають відношення маси атома  $m_0$  цього елементу до  $1/12$  маси атома  $m_{0C}$  ізотопу вуглецю  $^{12}_6C$ :

$$A_r = \frac{m_0}{m_{0C}/12}. \quad (1.1)$$

Відотною молекулярною масою  $M_r$  речовини називають відношення маси молекули цієї речовини до  $1/12$  маси атома ізотопу вуглецю  $^{12}_6C$ :

$$M_r = \frac{m_0}{m_{0C}/12}. \quad (1.2)$$

Одиниця маси, яка дорівнює  $1/12$  маси атома вуглецю, носить назву атомної одиниці маси (а.о.м.) Атомна одиниця маси дорівнює

$$m_{a.o.m.} = m_{0C}/12 = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}. \quad (1.3)$$

Кількість речовини вимірюється у молях.

Один моль – це кількість речовини, яка містить стільки частинок (атомів, молекул) скільки атомів міститься у масі  $0,012\text{кг}$  ізотопу вуглецю  $^{12}_6C$ .

Кількість атомів або молекул в одному молі речовини, має назву числа (сталої) Авогадро  $N_A$ .

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Масу одного моля речовини називають молярною масою  $M$ . Молярна маса дорівнює добутку маси молекули  $m_0$  на сталу Авогадро:

$$M = m_0 N_A. \quad (1.4)$$

Для визначення молярної маси речовини можна також скористатися співвідношенням:

$$M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}. \quad (1.5)$$

Кількість речовини, тобто кількість молів  $\nu$  у даній масі  $m$ , може бути визначена як відношення кількості молекул  $N$  до числа Авогадро  $N_A$ :



$$\nu = \frac{N}{N_A}, \quad (1.6)$$

або за формулою

$$\nu = \frac{m}{M}. \quad (1.7)$$

Маси молекул дуже малі, мають порядок  $(10^{-27} \div 10^{-25})$  кг.

Оцінку лінійних розмірів молекул можна провести, користуючись моделлю щільної упаковки молекул рідини в деякому об'ємі куба  $V$ . (рис.1.2). Якщо вздовж ребра куба розміщується  $n$  молекул, то діаметр молекули можна визначити із співвідношення:

$$d = \frac{L}{n} = \frac{L}{\sqrt[3]{N}},$$

де загальна кількість молекул  $N$  даної речовини в об'ємі  $V$  може бути визначена через кількість молів  $\nu$  і число

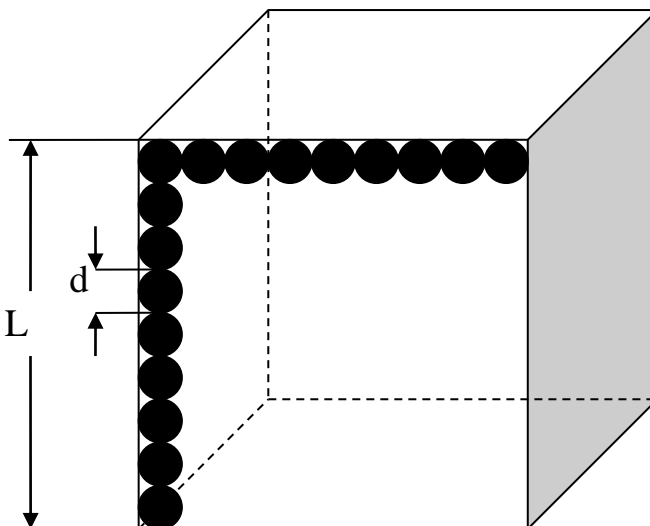


Рис. 1.2

Авогадро:  $N = \nu N_A = \frac{m N_A}{M} = \frac{\rho V N_A}{M} = \frac{\rho L^3 N_A}{M}$ , де  $M$  – молярна маса речовини;  $\rho$  – її густина. Тоді

$$d = \frac{L \sqrt[3]{M}}{\sqrt[3]{\rho L^3 N_A}} = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}}. \quad (1.8)$$

Наприклад, для води  $\rho = 10^3$  кг / м<sup>3</sup>;  $M = 0,018$  кг/моль і  $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$  м = 3 Å.

**Методичні вказівки.** Серед задач по даній темі можна виділити:

- задачі, в яких визначаються і порівнюються розміри молекул і відстані між ними. Оцінку лінійних розмірів у першому наближенні проводять для молекул рідини у припущенні, що кожна молекула має форму кулі і займає об'єм у вигляді кубу з ребром, яке дорівнює діаметру молекули.

- задачі, в яких за кількістю або властивостями окремих молекул слід установити деякий макроскопічний параметр речовини або навпаки (наприклад, визначення маси молекули за молярною масою і т. ін.). Для розв'язання подібних задач слід використовувати зв'язок між різними способами опису кількості речовини. Так, одному молю речовини відповідає

- маса речовини, яка дорівнює молярній масі  $M$ ;
- об'єм, який дорівнює молярному об'єму  $V_m$ ;
- кількість молекул, яка дорівнює числу Авогадро  $N_A$ .

У випадку газу, що є частково іонізованим, при визначенні молярної маси, кількості молів, кількості частинок слід урахувати, що внаслідок іонізації кількість частинок подвоюється. Такий газ слід розглядати як суміш молекулярного та атомарного газів з різними молярними масами.

### Приклади розв'язання задач

**Приклад 1.1.** Визначити кількість речовини, що міститься в 1 літрі води.

$V = 10^{-3} \text{ м}^3$ $A_r(\text{H}) = 1$ $A_r(\text{O}) = 16$ $\rho = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ <hr/> $v - ?$	<p>Розв'язання.</p> <p>Кількість речовини, тобто кількість молів води, що міститься в одному 1л, обчислюємо за формулою (1.7):</p> $v = \frac{m}{M}.$ <p>Масу води <math>m</math> визначаємо за її густиною <math>\rho</math> та об'ємом <math>V</math>:</p> $m = \rho V.$ <p>Тоді</p> $v = \frac{\rho V}{M}$
---	---

Молярну масу води знаходимо за її відносною молекулярною масою, яка дорівнює

$$M_r(\text{H}_2\text{O}) = 2 \cdot A_r(\text{H}) + A_r(\text{O}) = 2 \cdot 1 + 16 = 18 \text{ а.о.м.}$$

Згідно (1.5)  $M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$

$$v = \frac{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = 55,6 \text{ моль}$$

**Приклад 1.2.** Обчислити у кілограмах масу молекули води.

$M_r = 18 \text{ а.о.м.}$ $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ $m_{\text{а.о.м.}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ <hr/> $m_0 - ?$	<p>Розв'язання.</p> <p><b>1 спосіб.</b> Відносна молекулярна маса молекули води (<math>\text{H}_2\text{O}</math>) дорівнює <math>M_r = 18 \text{ а.о.м.}</math> Відповідно молярна маса води складає:</p> $M = M_r \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$ <p>За формулою (1.4) отримуємо:</p> $m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{0,018 \text{ кг} \cdot \text{моль}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}} \approx 3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$
--	--

**2 спосіб.** Використовуючи значення відносної маси молекули води

$M_r=18$  а.о.м. та атомної одиниці маси  $m_{a.o.m.}=1,66 \cdot 10^{-27}$  кг (1.3), за формулою (1.2) знаходимо  $m_0 = M_r \cdot m_{a.o.m.} = 18 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг  $\approx 3 \cdot 10^{-26}$  кг.

**Приклад 1.3.** Оцінити лінійні розміри молекули води, приймаючи, що вона має форму кульки.

$\begin{array}{l} M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1} \\ N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \\ \rho = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \\ \hline d - ? \end{array}$	<p style="text-align: center;">Розв'язання.</p> <p>Відповідно моделі щільної упаковки молекул їх лінійні розміри можна оцінити за формулою (1.8)</p> $d = \frac{L \sqrt[3]{M}}{\sqrt[3]{\rho L^3 N_A}} = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}},$ <p>де <math>N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}</math> – стала Авогадро.</p> $d = \sqrt[3]{\frac{0,018}{10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ (м)} = 3,1 \text{ \AA}.$
---	---

Перевірка одиниці вимірювання:  $[d] = \left( \frac{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{\text{кг} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{моль}^{-1}} \right)^{\frac{1}{3}} = \text{м}.$

**Приклад 1.4.** Оцінити, яка доля простору, зайнятого водою, приходить на самі молекули, а яка – на проміжки між ними. Молекули води представити у вигляді кульок, діаметр яких оцінений у попередньому прикладі.

$\begin{array}{l} M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1} \\ N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \\ d = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м} \\ \hline \frac{V_1}{V}; \frac{V_2}{V} - ? \end{array}$	<p style="text-align: center;">Розв'язання.</p> <p>Об'єм <math>V</math>, який займає маса води <math>m</math>, дорівнює</p> $V = \frac{m}{\rho} \quad (1), \text{ де } \rho - \text{густина води.}$ <p>Об'єм <math>V_1</math>, зайнятий власно молекулами води, знаходимо за формулою</p> $V_1 = V_0 \cdot N, \quad (2)$ <p>де <math>V_0 = \frac{1}{6} \pi d^3</math> (3) – об'єм однієї молекули;</p>
--	--

$N = \frac{m}{M} \cdot N_A$  (4) – кількість молекул у масі води  $m$  (тут  $M$  – молярна маса води).

З урахуванням виразів (3) і (4) формула (2) набуває вигляду:

$$V_1 = \frac{m}{6M} \pi d^3 N_A. \quad (5)$$

За формулами (1) і (5) знаходимо долю об'єму, що приходить на самі молекули:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\pi d^3 N_A \rho}{6M}$$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3,14 \cdot 3,1^3 \cdot 10^{-30} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 10^3}{6 \cdot 18 \cdot 10^{-3}} = 0,52.$$

Об'єм  $V_2$ , який приходить на проміжки між молекулами, дорівнює

$$V_2 = V - V_1, \text{ а його доля } \frac{V_2}{V} = 1 - \frac{V_1}{V} = 0,48.$$

Перевірка одиниці вимірювання:  $\left[ \frac{V_1}{V} \right] = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{м}^3} = 1.$

Відповідь:  $\frac{V_1}{V} = 0,52$ ;  $\frac{V_2}{V} = 0,48$ .

**Приклад 1.5.** Скільки частинок знаходиться у 4г кисню, якщо відомо, що степінь його дисоціації  $\alpha = 0,020$ ? Степінь дисоціації  $\alpha$  – відношення кількості молекул, що потерпіли дисоціацію до їх початкової кількості.

$m = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$ $M = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль}^{-1}$ $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ $\alpha = 0,020$ <hr/> $N = ?$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>При степені дисоціації <math>\alpha</math> маса газу <math>m</math> буде містити <math>2\alpha \frac{m}{M}</math> молів атомарного кисню (оксигену) та <math>(1 - \alpha) \frac{m}{M}</math> молів молекулярного кисню.</p>
---	---

Загальна кількість молів у посудині, де знаходиться кисень,

$$2\alpha \frac{m}{M} + (1 - \alpha) \frac{m}{M} = (1 + \alpha) \frac{m}{M}.$$

Відповідно кількість частинок дорівнює  $N = N_A (1 + \alpha) \frac{m}{M}.$

$$N = 6,02 \cdot 10^{23} (1 + 0,2) \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} = 9,03 \cdot 10^{22}.$$

$$[N] = \frac{\text{моль} \cdot \text{моль}^{-1}}{\text{моль} \cdot \text{моль}^{-1}} = 1.$$

Відповідь:  $N = 9,03 \cdot 10^{22}$  частинок.

### Задачі для самостійного розв'язування

- 1.1. Знайти масу атома гелію, заліза, урану.
- 1.2. Визначити масу  $m_1$  однієї молекули води.
- 1.3. Визначити масу кіломолю  $M$  і масу  $m_1$  молекули куховарської солі.
- 1.4. Знайти масу однієї молекули  $\text{CO}_2$ .

- 1.5. Визначити масу  $m_1$  одного атома водню і число  $N$  атомів, що містяться в одному грамі водню.
- 1.6. Знайти число  $n$  атомів, що містяться в краплині ртуті масою  $m=1$  г.
- 1.7. Знайти число  $\nu$  кіломолив і число  $n_0$  молекул, що містяться в об'ємі  $V = 1\text{ м}^3$  води при температурі  $t=4^\circ\text{C}$ .
- 1.8. Порівняти кількість речовини у брусках золота і заліза а) однакової маси; б) однакового об'єму.
- 1.9. Знайти об'єм одного молю кисню, якщо його густина дорівнює  $1,9\text{ кг/м}^3$ .
- 1.10. Визначити об'єм 5 молів міді.
- 1.11. У скільки разів кількість атомів у 54г алюмінію більша за число Авогадро?
- 1.12. Як і у скільки разів кількість атомів у 11г діоксиду вуглецю у відрізняється від числа Авогадро?
- 1.13. Чому дорівнює маса водню, яка містить  $1,5 \cdot 10^{22}$  молекул?
- 1.14. Густина натрію  $\rho = 970 \text{ кг/м}^3$ . Визначити концентрацію вільних електронів у натрії, якщо на один атом натрію приходить 1 вільний електрон.
- 1.15. Знайти відстань між найближчими атомами кубічної кристалічної решітки заліза.
- 1.16. Оцінити діаметр атомів ртуті.
- 1.17. Визначити масу  $m_1$  однієї молекули сірковуглецю  $\text{CS}_2$  приймаючи, що молекули в рідині мають форму кулі і розташовані впритул один до одного; визначити порядок величини діаметру  $d$  молекули.
- 1.18. В посудині, що має форму куба, знаходиться при нормальних умовах 3375 молекул газу. Визначити довжину ребра посудини. (Урахувати, що при нормальних умовах 1 моль газу займає об'єм 22,4 л).
- 1.19. Визначити, яка частина об'єму, що газ займає при нормальних умовах, припадає на об'єм його молекул. Молекули газу вважати кульками діаметром  $0,27\text{ нм}$ .
- 1.20. Радонові ванни, які використовують для лікування, містять  $N = 1,7 \cdot 10^6$  атомів радону ( $M=0,222\text{ кг/моль}$ ) в 1л води. Визначити кількість молекул води, яка припадає на 1 атом радону.
- 1.21. Яка кількість молів знаходиться в 6г парів йоду, якщо його ступінь дисоціації дорівнює 40?
- 1.22. Яка кількість частинок знаходиться у 7г азоту, якщо ступінь дисоціації його молекул  $\alpha = 50\%$ ?
- 1.23. Яка кількість частинок знаходиться в масі  $m = 5,0$  г кисню, якщо його ступінь дисоціації  $\alpha = 15\%$ ?
- 1.24. За 5 діб із стакану повністю випарилось 50г води. Скільки в середньому вилітало молекул з поверхні води за 1 с?

1.25. Як змінився б тиск всередині газу або рідини, якби сили притягання між молекулами раптово зникли?

### Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. Кількістю речовини називають фізичну величину, яка чисельно дорівнює:

- 1) числу молекул у наданій порції речовини;
- 2) числу молів у наданій порції речовини;
- 3) числу молекул у 1 кг речовини;
- 4) числу молів в 1 кг речовини;
- 5) числу молів в 0,012 кг вуглецю.

2. Число Авогадро характеризує:

- 1) кількість частинок в 1 кг речовини;
- 2) кількість частинок в 1 молі речовини;
- 3) кількість молів в 1 кг речовини;
- 4) масу 1 моля речовини;
- 5) кількість молів у даній речовині.

3. У скільки разів число Авогадро є більшим за число атомів у 9г алюмінію ( $M=0,027\text{кг/моль}$ )?

- 1) 1;      2) 3;      3) 9;      4) 27;      5) 81.

4. Дати оцінку маси молекули кисню

- 1)  $\approx 5,0 \cdot 10^{-23}$  кг;      2)  $\approx 5,0 \cdot 10^{-24}$  кг;      3)  $\approx 5,0 \cdot 10^{-25}$  кг;  
4)  $\approx 5,0 \cdot 10^{-26}$  кг;      5)  $\approx 5,0 \cdot 10^{-27}$  кг.

5. Кількість атомів кисню, яка міститься в масі  $m = 1,0\text{г}$  діоксиду вуглецю ( $\text{CO}_2$ ), дорівнює

- 1)  $2,4 \cdot 10^{19}$ ;      2)  $2,7 \cdot 10^{19}$ ;      3)  $2,7 \cdot 10^{22}$ ;      4)  $3,4 \cdot 10^{22}$ ;      5)  $4,7 \cdot 10^{20}$ .

6. Відношення об'єму атома срібла ( $M_1 = 0,108 \text{ кг/моль}$ ) до об'єму атома заліза ( $M_2=0,0560 \text{ кг/моль}$ ) дорівнює

- 1) 1,20;      2) 1.25;      3) 1.30;      4) 1,40;      5) 1.50.

7. У першій посудині міститься  $m_1=2,0 \text{ г}$  гелію ( $M_1(\text{He}) = 0,004 \text{ кг/моль}$ ), у другій –  $m_2=3,0 \text{ г}$  аргону ( $M_2(\text{Ar}) = 0,040 \text{ кг/моль}$ ), у третій –  $m_3=30 \text{ г}$  діоксиду вуглецю ( $M_3(\text{CO}_2)= 0,044 \text{ кг/моль}$ ). У якій з посудин знаходиться найбільша кількість молекул, а у якому – найменша?

- 1) у першій найбільша, у другій найменша;
- 2) у першій найбільша, у третій найменша;
- 3) у третій найбільша, у другій найменша;
- 4) у другій найбільша, у першій найменша;
- 5) у другій найбільша, у третій найменша.

8. Якщо маса мікроскопічної пилінки вуглецю дорівнює  $m = 0,050$  нг, то вона складається з  $N$  атомів

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $N = 3,0 \cdot 10^{14}$ ; | 2) $N = 2,0 \cdot 10^{14}$ ; |
| 3) $N = 3,0 \cdot 10^{13}$ ; | 4) $N = 2,5 \cdot 10^{13}$ ; |
| 5) $N = 2,0 \cdot 10^{13}$ . |                              |

## **РОЗДІЛ 2. ІДЕАЛЬНИЙ ГАЗ. ПАРАМЕТРИ ТА РІВНЯННЯ СТАНУ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ**

**Тема:** Попередні відомості: термодинамічні системи; параметри стану термодинамічної системи; термодинамічні процеси. Ідеальний газ, його властивості та параметри. Температурні шкали. Рівняння стану та види ізопроеесів. Експериментальні закони ідеального газу. Рівняння Менделєєва-Клапейрона. Закон Дальтона.

### **Основні поняття і формули.**

**Параметри стану термодинамічної системи. Термодинамічні процеси.**

**Термодинамічною системою (ТС)** називають сукупність макроскопічних тіл, які розглядаються методами термодинаміки, тобто з точки зору обміну енергією між собою і з зовнішнім середовищем.

Наприклад, рідина та її пара утворюють термодинамічну систему.

В окремих випадках система може складатися з одного твердого, рідкого або газоподібного тіла.

Термодинамічні системи, які можуть обмінюватися з зовнішнім середовищем енергією та речовиною, називають **відкритими** системами.

Термодинамічні системи, для яких неможливим є обмін із зовнішнім середовищем ані енергією, ані речовиною, мають назву **ізолюваних**.

Термодинамічні системи, які не можуть обмінюватися із зовнішнім середовищем речовиною, називають **закритими**. Серед них виділяють **замкнені** системи, для яких є неможливим обмін енергією із зовнішнім середовищем шляхом виконання роботи, та **адіабатні** системи, для яких неможливим є теплообмін.

**Термодинамічними параметрами стану** системи називають сукупність значень фізичних величин, які характеризують стан системи (температура, тиск, об'єм, густина і т. ін.).

Параметри стану не завжди мають певні значення для будь-якої частини системи. Наприклад, тіло, яке підігрівають з одного боку і охолоджують з протилежного, у різних точках має різну температуру, тобто його стан не можна охарактеризувати певним значенням температури.

Стан системи, в якому хоча б один з параметрів не має певного значення при незмінній зовнішній дії, називають **нерівноважним**.

Стан термодинамічної системи є **рівноважним**, якщо всі параметри системи для будь-яких її частин мають рівні значення, які не змінюються з часом, тобто зберігають свої значення нескінченно довго при незмінних зовнішніх умовах.

Стан системи, при якому термодинамічні параметри з часом не змінюються, має назву **стаціонарного**. При стаціонарному стані системи термодинамічні параметри можуть зберігати свої значення не тільки внаслідок рівноваги системи, але й внаслідок впливу зовнішніх умов. Отже, не всякий стаціонарний стан є рівноважним.

Якщо систему, яка знаходиться у нерівноважному стані, ізолювати від зовнішнього середовища, то вона переходить у рівноважний стан. Такий перехід називають **процесом релаксації** або просто **релаксацією**. Час, за який початкове відхилення деякого термодинамічного параметра від рівноважного значення зменшується в  $e$  ( $e = 2,718$ ) разів, має назву **часу релаксації**. Для кожного параметру час релаксації має своє значення. Найбільше з цих значень є часом релаксації системи.

**Термодинамічним процесом** називають перехід системи із одного стану в інший.

Такий перехід завжди пов'язаний з порушенням рівноваги системи. Наприклад, для зменшення об'єму газу, який знаходиться в посудині під поршнем, необхідно перемістити поршень. При цьому збільшується тиск газу, в першу чергу, поблизу поршня. Рівновага порушується тим більше, чим швидше переміщується поршень. Якщо поршень пересувати дуже повільно, то порушення рівноваги є незначним, і тиск у різних точках мало відрізняється від рівноважного значення, яке відповідає даному об'єму газу. При нескінченно повільному стисканні тиск газу у кожен момент часу буде мати певне значення. Стан газу весь час буде рівноважним, і нескінченно повільний процес буде складатися із послідовності рівноважних станів.

Процес, який складається із неперервної черги рівноважних станів, називають **рівноважним** або **квазістатичним**. Рівноважним може бути тільки нескінченно повільний процес. При зміні напрямку рівноважного процесу (наприклад, заміні стискання газу його розширенням) система проходить через ті самі рівноважні стани, що у прямому процесі, але у зворотній послідовності.

Якщо вздовж координатних осей відкласти значення деяких термодинамічних параметрів (наприклад, тиск  $p$  і об'єм  $V$  або тиск  $p$  і температуру  $T$  і т. ін.), то рівноважний стан системи можна відобразити точкою на відповідній координатній площині, а рівноважний процес – безперервною лінією.



Нерівноважні стани і процеси так зображати неможливо. Нерівноважні процеси між двома рівноважними станами системи умовно зображують штриховими лініями.

Термодинамічний процес, що здійснює система, називають **оборотним**, якщо після нього можливо повернути систему і все навколишнє середовище у початковий стан без будь-яких змін. Якщо процес не задовольняє цю умову, то він є **необоротним**. Необхідною умовою оборотності процесів є їх рівноважність (квазістатичність), тобто будь-який оборотний процес є рівноважним, але не кожен рівноважний процес є оборотним. Усі реальні процеси відбуваються з кінцевою швидкістю і супроводжуються тертям і теплообміном при кінцевій різниці тів, що контактують, тобто є необоротними. Але при деяких умовах протікання процесів їх приблизно можна вважати оборотними.

**Коловим процесом** або **циклом** називають сукупність декількох термодинамічних процесів, внаслідок яких система повертається в початковий стан.

Колові процеси на діаграмах станів (у координатах  $p$ - $V$ ,  $p$ - $T$ ,  $V$ - $T$ ) зображується замкненими кривими.

З трьох агрегатних станів речовини найбільш простим є газоподібний стан, оскільки в цьому випадку сили, що діють між молекулами вельми малі і ними за певних умов можна знехтувати. Для пояснення властивостей речовини у газоподібному стані використовують фізичну модель – ідеальний газ.

● **Ідеальним газом** називають такий газ, в якому відсутні сили міжмолекулярної взаємодії.

Властивості ідеального газу:

- розміром молекул газу порівняно з розмірами посудини, в якій вони знаходяться, можна знехтувати, тобто вважати їх матеріальними точками;
- молекули газу є вільними. Це означає, що до зіткнення з іншими молекулами або стінками посудини, в якій знаходиться газ, вони рухаються прямолінійно і рівномірно (внаслідок відсутності сил, що діють між молекулами на відстані);
- зіткнення молекул між собою або зі стінками посудини, є абсолютно пружними. У процесі руху молекули наближаються до стінок посудини або одна до одної на досить малі відстані, на яких між молекулами газу або газу та стінки виникають сили взаємодії, що дуже швидко зменшуються із відстанню. Під дією цих сил молекули змінюють напрям свого руху. Процес зміни напрямку руху носить назву **зіткнення**.

Будь-який реальний газ із зменшенням його густини все більше наближається до ідеального. Газ можна розглядати як ідеальний, якщо середні відстані між молекулами значно перевищують їх діаметр. Остання умова виконується при достатньо малих значеннях тиску і не занадто низьких температурах. (При зниженні температури до таких значень, що наближаються до абсолютного нуля газ переходить у рідку фазу, для якої характерна відносно більша взаємодія молекул між собою.)

Найважливішими параметрами стану ідеального газу є температура, тиск, об'єм. Розглянемо їх фізичний (термодинамічний) зміст.

- **Об'єм** газу завжди співпадає з об'ємом посудини, в якій знаходиться газ. З термодинамічної точки зору будь-яка компонента газу має об'єм  $V$ , рівний фізичному об'єму посудини, в яку поміщено газ:  $V = V_{\text{посуд.}}$ .

У Міжнародній системі одиниць (СІ) об'єм вимірюється в  $\text{м}^3$ .

У системі СГС об'єм вимірюється в  $\text{см}^3$ :  $1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$ .

Позасистемна одиниця 1 літр =  $1 \text{ дм}^3 = 10^{-3} \text{ м}^3$ .

- Властивість газу тиснути на стінки посудини – одна з основних властивостей газу. Тиск – один із головних його параметрів.

**Тиск  $p$**  – відношення нормальної складової сили  $F_n$ , з якою газ діє на

стінку, до площі її поверхні  $S$ :  $p = \frac{F_n}{S}$ .

**Термодинамічний зміст тиску.** При зіткненнях зі стінками посудини, молекули справляють на неї силову дію, яку описує сила. Така ж за величиною і протилежна за напрямом сила діє на газ з боку стінок (згідно третьому закону Ньютона). Зрозуміло, що сила дії молекул на стінку тим більша, чим більша площа стінки. Для того, щоб фізичні закони не залежали від розмірів тіл, їх виражають через відносні величини. Тому дію газу на стінку характеризують не силою, а тиском.

Тиск у СІ вимірюється в паскалях:  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ .

Інші одиниці вимірювання тиску та співвідношення між ними:

Система СГС:  $[P] = 1 \text{ дин/см}^2 = 0,1 \text{ Па}$ ;

$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$ ;

$1 \text{ атм (фізична атмосфера)} = 760 \text{ мм.рт.ст. (міліметрів ртутного стовпчика)} = 101325 \text{ Па}$ ;

$1 \text{ ат (технічна атмосфера)} = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$  (при розв'язуванні задач невеликою різницею між  $1 \text{ атм}$  і  $1 \text{ ат}$  часто нехтують) ;

$1 \text{ мм.рт.ст.} = 1 \text{ Тор} = 1/760 \text{ атм} = 133,3 \text{ Па} = 1,33 \cdot 10^3 \text{ дин/см}^2$ .

- **Температура** вводиться для кількісного визначення внутрішньої, або теплової енергії.

**Термодинамічний зміст температури.** Перші уявлення про температуру виникли з відчуття тепла та холоду: в повсякденні температура для нас – величина, яка відрізняє "гаряче" від "холодного". У строгому сенсі поняття температури має зміст тільки для рівноважних станів.

Фізичний параметр, однаковий у всіх частинах системи тіл, які знаходяться у стані теплової рівноваги, тобто не обмінюються енергією між собою шляхом теплопередачі, носить назву **температури**.

Якщо при установленні теплового контакту між тілами одне з них передає енергію другому шляхом теплопередачі, то першому тілу приписують більшу температуру, ніж другому. Тіла, які знаходяться у тепловій рівновазі, мають однакову температуру; і навпаки, якщо тіла мають однакову температуру, між ними установлена тепла рівновага.

З точки зору молекулярно-кінетичної теорії температура рівноважної системи характеризує інтенсивність теплового руху атомів, молекул та інших частинок.

Своєрідність температури як фізичної величини полягає в тому, що, на відміну від багатьох інших характеристик (маси, довжини, об'єму, заряду і т. ін.) вона **не є адитивною** величиною. Це означає, що температура всього тіла не дорівнює, тобто не може бути визначена як сума температур його частин.

Ряд властивостей тіл – об'єм, електричний опір і т. ін. залежить від температури, і кожне з них може бути використано для кількісного визначення температури.

### **Температурні шкали.**

**Абсолютна шкала температур (шкала Кельвіна).** Одиниця температури у системі СІ – кельвін (К) відповідає абсолютній температурній шкалі, яка в якості нульової точки має мінімальну можливу температуру  $T_0=0$ . Другою фіксованою точкою шкали є температура потрійної точки чистої води:  $T_r(\text{H}_2\text{O}) = 273,15 \text{ К}$ . За таким вибором різниця температур між точкою кипіння води при нормальному тиску і точкою плавлення льоду з достатньою точністю дорівнює 100К. (Для теоретичного градування шкали використовують II закон термодинаміки.)

**Абсолютна температура  $T$  пропорційна середній кінетичній енергії поступального руху молекул речовини.**

В цьому полягає фізичний зміст абсолютної температури.

**Шкала Цельсія.** За шкалою Цельсія точка плавлення льоду дорівнює  $0^\circ\text{C}$ , а точка кипіння води при тиску  $p=1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$  дорівнює  $100^\circ\text{C}$ .

Отже, різниця температур в градусах Цельсія ( $^\circ\text{C}$ ) і в кельвінах (К) однакова, шкали відрізняються тільки вибором нульової температури.

Температура  $T$ , відрхована за абсолютною шкалою температур, пов'язана з температурою  $t$  за шкалою Цельсія співвідношенням:

$$T = t + 273,15. \quad (2.1)$$

Абсолютному нулю температури  $T_0=0K$  відповідає значення  $t = -273,15^\circ C$ .

**Інші шкали.** У франкомовних країнах для градуювання термометрів використовують також шкалу Реомюра ( $R$ ); в англomовних – шкалу Фаренгейта ( $F$ ). Зв'язок між цими шкалами та шкалою Цельсія надають формули:  $t(^{\circ}R) = (4/5) t(^{\circ}C)$ ;  $t(^{\circ}F) = (9/5) t(^{\circ}C) + 32^{\circ}F$ .

Притому  $0^{\circ}C = 0^{\circ}R = 32^{\circ}F$ ;  $100^{\circ}C = 80^{\circ}R = 212^{\circ}F$ .

Порівняння температурних шкал Фаренгейта, Цельсія і Кельвіна (абсолютної) наведено на рис.2.1.

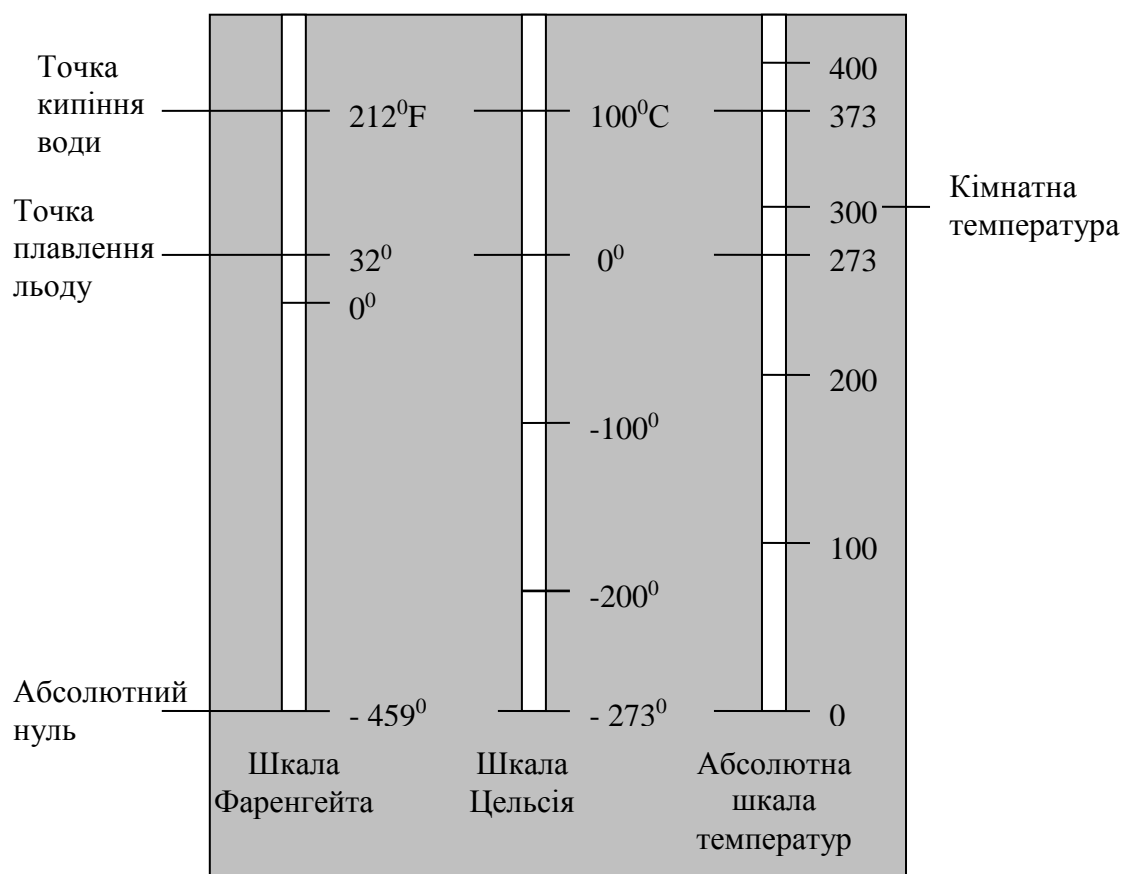


Рис. 2.1.

### Рівняння стану і види ізопроеесів.

● **Рівнянням стану** називають рівняння, яке пов'язує основні параметри стану термодинамічної системи. У загальному вигляді його можна записати так:

$$f(V, p, T) = 0.$$

Важливо усвідомити, що методами термодинаміки вид рівняння стану установити неможливо. Термодинаміка отримує знання про рівняння стану з дослідів або з інших розділів фізики ( за звичаєм, статистичної фізики).

- Зміна стану газу, яка супроводжується зміною всіх або кількох його параметрів, носить назву **газового процесу**. Газовий процес є окремим випадком термодинамічних процесів, які відбуваються у термодинамічних системах при переході із одного стану в другий.

- Для постійної маси газу розрізняють такі ізопроееси:

**T = const** – ізотермічний процес;

**V = const** – ізохорний процес;

**p = const** – ізобарний процес;

**Q = 0** (без теплообміну з зовнішніми тілами) – адіабатний процес, в ході якого зберігається ентропія системи **S = const**.

Графіки цих процесів на діаграмах мають відповідно назву ізотерми, ізохори, ізобари або адіабати. (рис.2.2.).

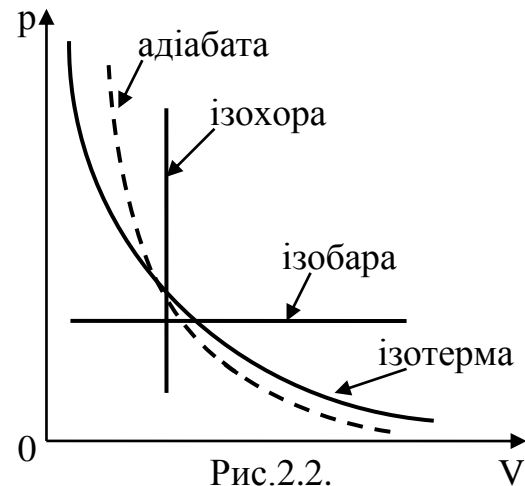


Рис.2.2.

- Для ізопроеесів у ідеальному газі експериментально встановлені відповідні газові закони.

### Ізотермічний процес.

Закон Бойля – Маріотта:

Для даної маси газу при  $T = \text{const}$  тиск змінюється обернено пропорційно об'єму:

$$P \cdot V = \text{const}, \text{ при } m = \text{const}; T = \text{const}. \quad (2.2)$$

Звідки для однакової маси газу при тій самій температурі газ займає тим більший об'єм, чим нижче тиск:  $p_1 > p_2$  при  $V_2 > V_1$  (рис.2.2).

### Ізобарний процес.

Закон Гей-Люссака:

Для даної маси газу при  $p = \text{const}$  об'єм зростає лінійно з температурою.

$$\text{При } m = \text{const}, p = \text{const} \quad V = V_0(1 + \alpha t), \quad (2.3)$$

де  $V_0$  – об'єм газу при  $t = 0^\circ \text{C}$ ;  $\alpha = (1/273) \text{ град}^{-1}$  – температурний коефіцієнт об'єму (температурний коефіцієнт теплового поширення).

З урахуванням значення  $\alpha$  та зв'язку між температурою за шкалою Цельсія та Кельвіна рівнянню (2.3) можна надати вигляду:

$$V = \alpha V_0(273 + t) = \alpha V_0 T, \text{ або } \frac{V}{T} = \text{const}. \quad (2.4)$$

### Ізохорний процес:

Закон Шарля.

Для даної маси газу при  $V = \text{const}$  тиск зростає лінійно з температурою.

$$\text{При } m = \text{const}, V = \text{const} \quad p = p_0(1 + \gamma t), \quad (2.5)$$

де  $p_0$  – тиск газу при  $t=0^\circ\text{C}$ ;  $\gamma = (1/273)$  град $^{-1}$  – термічний коефіцієнт тиску.

Інакше: 
$$p = \gamma p_0 T, \quad \text{або} \quad \frac{p}{T} = \text{const}. \quad (2.6)$$

Графіки ізохорного процесу для тієї самої маси при двох значеннях тиску  $p_1$  і  $p_2$  ( $p_1 > p_2$ ) зображені на  $V$ - $T$  – діаграмі на рис.2.3. Відповідно графіки ізобарного процесу при двох значеннях об'єму  $V_1$  і  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ) і однакої масі представлені на  $p$ - $T$  – діаграмі на рис. 2.4.

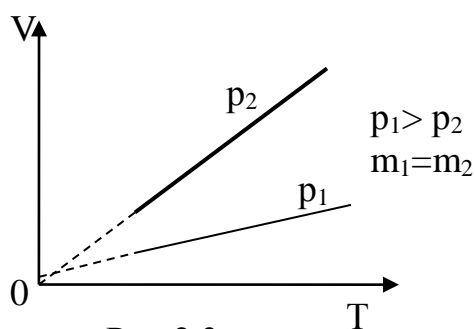


Рис.2.3.

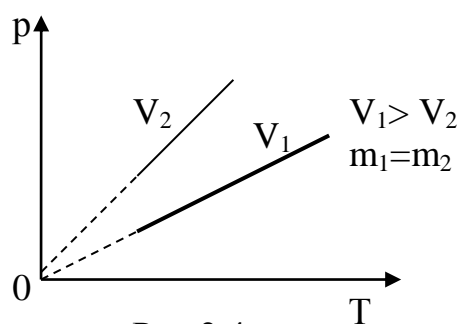


Рис.2.4.

● **Рівняння Менделєєва –Клапейрона (рівняння стану ідеального газу).** Об'єднання законів Бойля – Маріотта та Гей-Люссака приводить до рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона), яке зв'язує всі основні його параметри:

$$\frac{pV}{T} = \text{const при } m = \text{const}. \quad (2.7)$$

На основі дослідів з різними газами було встановлено, що при однакових значеннях тиску та температури один моль будь-якого газу займає однаковий об'єм – **закон Авогадро**.

Значення цього об'єму за нормальними умовами ( $t=0^\circ\text{C}$  та  $p=1,013 \cdot 10^5 \text{Па}$ ) дорівнює  $V_\mu = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{м}^3/\text{моль}$ .

З урахуванням закону Авогадро Д.І.Менделєєв записав рівняння Клапейрона для одного моля ідеального газу у вигляді:

$$\frac{pV_\mu}{T} = R, \quad (2.8)$$

де  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$  – однакова для всіх газів універсальна газова стала.

Фізичний зміст універсальної газової сталої: універсальна газова стала чисельно дорівнює роботі поширення, яку виконує один моль ідеального газу при нагріванні на 1 К в ізобарному процесі.

Для довільної маси газу  $m$  рівняння стану ідеального газу (**рівняння Менделєєва – Клапейрона**) приймає вигляд:

$$pV = \nu RT, \quad (2.9)$$

де  $\nu = \frac{m}{M}$  – кількість молів газу,  $M$  – молярна маса.

Інакше

$$p = \frac{\rho RT}{M}, \quad (2.10)$$

де  $\rho$  – густина газу.

З рівняння Менделєєва – Клапейрона можна отримати кожний з газових законів.

Рівняння Менделєєва – Клапейрона можна записати в іншій формі, якщо виразити  $\rho$  і  $M$  у вигляді  $\rho = m_0 n$ ;  $M = m_0 N_A$  ( $m_0$  – маса молекули;  $N_A$  – число Авогадро;  $n$  – чисельна густина молекул газу) і використати сталу Больцмана  $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Стала Больцмана є числовим

еквівалентом, який зв'язує абсолютну температуру, виміряну в одиницях енергії, з температурою яка виміряна в кельвінах.

Тоді

$$p = nkT. \quad (2.11)$$

На відміну від рівняння (2.9), яке дозволяє застосування тільки для рівноважного ідеального газу з постійними значеннями параметрів вздовж всього об'єму, рівняння (2.11) можна застосовувати також у випадку локальної рівноваги.

При локальній рівновазі параметри системи є неперервними функціями координат і часу, але їх зміна у просторі відбувається настільки повільно, що на відстані, яка дорівнює довжині вільного пробігу, нею можна знехтувати. Також можна знехтувати зміною параметрів у часі за час релаксації тієї частини системи, до якої застосовують поняття локальної рівноваги.

#### • Парціальний тиск. Закон Дальтона.

Нехай в об'ємі  $V$  при температурі  $T$  знаходиться суміш ідеальних газів, маси яких дорівнюють  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , а молярні маси відповідно  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . **Парціальним тиском** газу, що входить до газової суміші, називають тиск, який спричиняв би цей газ, якби він займав увесь об'єм посудини при тій самій температурі  $T$ .

**Закон Дальтона:** сумарний тиск газової суміші дорівнює сумі парціальних тисків газів, що входять до неї.

$$p = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (2.12)$$

де  $p_i = \frac{m_i}{M_i} \cdot \frac{RT}{V}$  – парціальний тиск і-ої компоненти в суміші газів.

**Методичні вказівки.** Закони ідеального газу можна використовувати у випадку газів при умовах, які не дуже відрізняються від нормальних ( $t=0^\circ\text{C}$ ,  $p=1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ), а також до розріджених газів.

Задачі на закони ідеального газу можна умовно поділити на декілька груп.

До першої групи можна віднести задачі, в яких стан газу не змінюється, і за відомими параметрами та масою газу слід визначити невідомі величини. При розв’язанні таких задач слід використовувати рівняння Менделєєва – Клапейрона (2.9) або (2.11).

До другої – задачі, в яких розглядається декілька станів газу. Тоді:

- якщо маса газу в процесі переходу з одного стану у другий не змінюється, то розв’язок задачі можна провести за рівнянням Клапейрона (2.7), записавши його для двох станів у вигляді 
$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2};$$
- якщо маса газу змінюється, то для кожного з станів газу слід записати рівняння Менделєєва – Клапейрона (2.9);
- якщо один з параметрів газу і його маса залишаються постійними, то в залежності від виду процесу використовують одне з рівнянь (2.2), (2.4) або (2.6).

При необхідності також слід використовувати додаткові умови у вигляді допоміжних співвідношень, які впливають з умови задачі, наприклад, виразити тиск і об’єм через інші задані величини.

Якщо в умові задачі тиск заданий через показання технічного манометру, то для знаходження повного тиску в балоні показання манометру слід збільшити на атмосферний тиск  $p_{\text{атм}}$ , оскільки манометр вимірює лише надлишковий порівняно з атмосферним тиск.

Розв’язання задач, в яких розглядаються процеси, що зв’язані зі зміною станів декількох газів, можна проводити аналогічно, записавши відповідні рівняння для кожного з газів окремо і використовуючи закон Дальтона (2.11).

При розв’язуванні задач у багатьох випадках графічне зображення процесів дозволяє значно спростити розв’язок, проаналізувати залежність між чисельними параметрами різних станів газу. При цьому слід пам’ятати, що можливим є графічне зображення тільки рівноважних (квазістатичних) процесів.

**Примітка.** На перший погляд може здатися, що у багатьох задачах даного розділу недостатньо даних для розв’язання. При розв’язанні задач слід



вважати, що основні характеристики речовини, яка є об'єктом даної задачі, а саме - молярна маса, хімічна формула, і т. ін. є відомими.

### Приклади розв'язання задач

**Приклад 2.1.** Знайти густину кисню при нормальних умовах.

$p \approx 10^5 \text{ Па}$ $T = 0^\circ \text{ C} = 273 \text{ К}$ $R = 8,31 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)}$ $M = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$	<p>Розв'язання</p> <p>При нормальних умовах <math>P = 760 \text{ мм.рт.ст.}</math>,  <math>T = 0^\circ \text{ C}</math>.  Застосуємо рівняння Менделєєва –  Клапейрона (2.9)</p> $pV = \frac{m}{M} RT, \quad (1)$
$\rho - ?$	

де  $p$  – тиск газу,  $V$  – об'єм газу;  $m$  – маса газу;  $M$  – молярна маса газу;  $R$  – універсальна газова стала;  $T$  – термодинамічна температура. Густина речовини  $\rho = \frac{m}{V}$ . (2)

Розв'язуємо сумісно (1) і (2). Для цього з (2) виразимо  $m$  і підставимо в (1):

$$pV = \frac{\rho V RT}{M}, \quad \text{або} \quad p = \frac{\rho RT}{M}.$$

Звідки  $\rho = \frac{pM}{RT}$ .

$$\rho = \frac{10^5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 273} = 1,41 \left( \text{кг / м}^3 \right).$$

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[\rho] = \frac{\text{Па} \cdot \text{кг/моль}}{\text{Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н/м}^2 \cdot \text{кг/моль}}{\text{Н} \cdot \text{м/(моль} \cdot \text{К)} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Відповідь  $\rho = 1,41 \text{ кг/м}^3$ .

**Приклад 2.2.** Скільки молекул міститься у посудині ємністю 5л, яка заповнена вуглекислим газом? Температура у посудині –  $127^\circ \text{ C}$ , тиск –  $0,1 \text{ МПа}$ .

$V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ $T = 400 \text{ К}$ $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ $p = 0,1 \text{ МПа}$	<p>Розв'язання</p> <p>Кількість молекул <math>N = \nu N_A</math>,  де <math>\nu</math> – кількість речовини; <math>N_A</math> – постійна  Авогадро.</p> <p>Кількість речовини <math>\nu</math> знайдемо,  скориставшись рівнянням Менделєєва –  Клапейрона (2.9)</p>
$N - ?$	

$$pV = \nu RT,$$

де  $p$  – тиск газу,  $V$  – об'єм газу;  $R$  – газова постійна;  $T$  – термодинамічна температура.

$$\nu = \frac{pV}{RT}. \quad \text{Тоді} \quad N = \frac{pVN_A}{RT}.$$

$$N = \frac{0,1 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{8,31 \cdot 400} = 9,06 \cdot 10^{22}.$$

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}}{\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}} = 1 \text{ (безрозмірна величина)}.$$

Відповідь:  $N = 9,06 \cdot 10^{22}$ .

**Приклад 2.3.** У балоні об'ємом 5л міститься гелій під тиском 2МПа при температурі 127°C. Після того, як з балону взяли деяку масу гелію, температура у балоні зменшилась на 10 градусів, а тиск – до 1,5 МПа. Яку масу гелію було взято з балону?

$V = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ $p_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ Па}$ $p_2 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ Па}$ $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ $T_1 = 400 \text{ К}$ $T_2 = 390 \text{ К}$ $M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}.$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Записуємо рівняння Менделєєва – Клапейрона (2.9) для початкового і кінцевого станів газу у балоні.</p> $p_1 V = \frac{m_1}{M} RT_1; \quad (1) \quad p_2 V = \frac{m_2}{M} RT_2, \quad (2)$ <p>де <math>p_1, m_1, T_1</math> – тиск, маса, термодинамічна температура у початковому стані; <math>p_2, m_2, T_2</math> – відповідні величини у кінцевому стані; <math>V</math> – об'єм балону; <math>M</math> – молярна маса гелію; <math>R</math> –</p>
<hr/> $m - ?$	

універсальна газова стала.

З (1) і (2) виразимо  $m_1$  і  $m_2$ :

$$m_1 = \frac{p_1 VM}{RT_1}; \quad m_2 = \frac{p_2 VM}{RT_2};$$

Тоді

$$m_1 - m_2 = \frac{p_1 VM}{RT_1} - \frac{p_2 VM}{RT_2} = \frac{VM}{R} \left( \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right)$$

$$m_1 - m_2 = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8,31} \left( \frac{2 \cdot 10^6}{400} - \frac{1,5 \cdot 10^6}{390} \right) = 0,00277 \text{ кг} = 2,77 \text{ г}$$

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[m_1 - m_2] = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})} \left( \frac{\text{Па}}{\text{К}} - \frac{\text{Па}}{\text{К}} \right) = \frac{\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}}{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}}{\text{К}} = \text{кг}$$

Відповідь:  $m_1 - m_2 = 2,77\text{г}$ .

**Приклад 2.4.** У посудині об'ємом  $V=25\text{л}$  міститься  $m_1=100\text{г}$  гелію і  $m_2=140\text{г}$  азоту при температурі  $t=27^\circ\text{C}$ . Знайти тиск у посудині.

$$\begin{array}{l} V = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{м}^3 \\ m_1 = 0,10 \text{кг} \\ m_2 = 0,14 \text{кг} \\ M_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{кг/моль} \\ M_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{кг/моль} \\ T = 300 \text{К} \\ \hline p - ? \end{array}$$

**Розв'язання**  
Скористаємося законом Дальтона (2.12), згідно з яким тиск у суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків.

$$p = p_1 + p_2, \quad (1)$$

$$\text{де } p_1 = \frac{m_1}{M_1} \frac{RT}{V} \text{ і } p_2 = \frac{m_2}{M_2} \frac{RT}{V}. \quad (2)$$

Тут  $M_1$  і  $M_2$  - молярні маси гелію і азоту

відповідно.

Підставимо (2) в (1):

$$p = \frac{m_1}{M_1} \frac{RT}{V} + \frac{m_2}{M_2} \frac{RT}{V} = \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{V}. \quad (3)$$

$$p = \left( \frac{100 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} + \frac{140 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \right) \frac{8,31 \cdot (27 + 273)}{25 \cdot 10^{-3}} = 2,99 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Перевірка одиниці вимірювання:

$$[p] = \frac{\text{кг}}{\text{кг/моль}} \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}$$

Відповідь:  $p=2,99 \text{ МПа}$ .

**Примітка.** Із формули (3), отриманої на основі закону Дальтона випливає, що кількість молів суміші дорівнює сумі чисел молів окремих її компонентів:  $\nu = \nu_1 + \nu_2 = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}$ .

**Приклад 2.5.** За умовою попередньої задачі визначити молярну масу суміші газів.

$$\begin{array}{l} m_1 = 0,10 \text{кг} \\ m_2 = 0,140 \text{кг} \\ M_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{кг/моль} \\ M_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{кг/моль} \\ \hline M_{\text{сум}} - ? \end{array}$$

**Розв'язання**  
Перш за все розглянемо поняття молярної маси суміші. Властивості ідеального газу можуть мати не тільки хімічно однорідні гази, але й їх суміші. Тоді для застосування рівняння стану ідеального газу до газової суміші, їй слід приписати деяку відносну молекулярну масу. Зрозуміло, що це поняття не має хімічного сенсу, але є корисним при

розв'язуванні задач. Маса суміші у кілограмах, що чисельно дорівнює уявній відносній молекулярній масі суміші, і є молярною масою  $M_{\text{сум}}$ , яка задовольняє рівнянню Менделєєва – Клапейрона, записаному для суміші:

$$p = \frac{m}{M_{\text{сум}}} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{m_1 + m_2}{M_{\text{сум}}} \cdot \frac{RT}{V}. \quad (1)$$

Порівняння виразу (1) з виразом (3) попередньої задачі, дає:

$$\frac{m_1 + m_2}{M_{\text{сум}}} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2},$$

звідки

$$M_{\text{сум}} = \frac{M_1 M_2 (m_1 + m_2)}{m_1 M_2 + m_2 M_1}. \quad (2)$$

$$M_{\text{сум}} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3} \cdot (0,10 + 0,14)}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,14 + 28 \cdot 10^{-3} \cdot 0,10} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/моль)}$$

Відповідь:  $M_{\text{сум}} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

**Приклад 2.6.** Густина суміші азоту і водню при температурі  $t = 27^\circ\text{C}$  і тиску  $p = 2 \text{ ат}$  дорівнює  $\rho = 0,3 \text{ кг/м}^3$ . Знайти концентрації молекул азоту ( $n_1$ ) і водню ( $n_2$ ) в суміші.

$t = 27^\circ\text{C}$ $p = 2 \text{ ат}$ $\rho = 0,3 \text{ кг/м}^3$	<p>Розв'язання.</p> <p>Застосуємо для суміші газів рівняння (2.11), яке є справедливим для сукупності будь-яких частинок.</p> <p><math>p = nkT</math>, звідки</p>
$n_1; n_2 - ?$	$n = n_1 + n_2 = \frac{p}{kT}. \quad (1)$

Для визначення концентрацій азоту і водню необхідно мати ще одне рівняння, яке зв'язує величини  $n_1$  та  $n_2$ . Скористаємося виразом (2), отриманим при розв'язанні попередньої задачі (див. приклад 2.5) для молярної маси суміші, а також залежністю між масою газу  $m$  та його концентрацією  $n$ .

$$M_{\text{сум}} = \frac{M_1 M_2 (m_1 + m_2)}{m_1 M_2 + m_2 M_1}. \quad (2)$$

$$m = \rho V = n m_0 V = \frac{n V M}{N_A}, \quad (3)$$

де  $m_0$  – маса однієї молекули.

Після підстановки виразів для  $m_1$  і  $m_2$ , отриманих за формулою (3), і скорочення знаходимо

$$M_{\text{сум}} = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{(n_1 + n_2)}.$$

З іншого боку, з рівняння стану ідеального газу  $M_{\text{сум}} = \frac{mRT}{Vp} = \rho \frac{RT}{p}$ .

Тобто 
$$\frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{(n_1 + n_2)} = \rho \frac{RT}{p}. \quad (4)$$

Сумісне розв'язання системи рівнянь (1) і (4) дає:

$$n_1 = \frac{\rho RT - p M_2}{kT(M_1 - M_2)}; \quad n_2 = \frac{\rho RT - p M_1}{kT(M_2 - M_1)}.$$

Виражаємо величини, що входять до формул в одиницях СІ:  
 $p = 2,00 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$ ,  $T = 300 \text{ К}$ ,  $M_1 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  $M_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  
 $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ ,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}$ .

$$n_1 = \frac{0,3 \cdot 8,31 \cdot 300 - 2 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (28 - 2) \cdot 10^{-3}} = 3,3 \cdot 10^{24};$$

$$n_2 = \frac{0,3 \cdot 8,31 \cdot 300 - 2 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (2 - 28) \cdot 10^{-3}} = 4,4 \cdot 10^{25}.$$

$$[n] = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{моль} \cdot \text{К}} - \frac{\text{Па} \cdot \text{кг}}{\text{моль}}}{\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot \frac{\text{кг}}{\text{моль}}} = \text{м}^{-3}.$$

**Приклад 2.7.** Вертикальна посудина розділена на дві рівні частини важким теплоізолюючим поршнем. У верхній половині знаходиться водень при температурі  $T$  і тиску  $p$ ; у нижній – кисень при температурі  $2T$ . Сосуд перевернули. Після охолодження кисню до температури  $T/2$  поршень знов установився посередині посудини. Температура водню залишилася незмінною. Визначити тиск кисню в першому та другому випадках.

Розв'язання.

При рівновазі поршня сила тяжіння, що діє на поршень урівноважена силами тиску газу знизу та зверху. Тому різниця тисків газу в нижній і верхній частинах циліндру має однакове значення в обох розглянутих випадках. Таким чином, приходимо до першого рівняння, яке відображує умову механічної рівноваги поршня у двох випадках:

$$p_1 - p = p - p_2, \quad (1)$$

де  $p$  – тиск водню, який залишається незмінним при незмінних об'ємі та температурі;  $p_1$  і  $p_2$  – тиск кисню при температурах  $T_1 = 2T$  і  $T_2 = \frac{T}{2}$

відповідно. Друге рівняння записуємо для двох станів кисню на основі закону Шарля, оскільки маса кисню та його об'єм в обох випадках є однаковими:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2T}{T} \quad (2)$$

Приводимо рівняння (1) і (2), які утворюють систему, до виду

$$p_1 + p_2 = 2p; \quad (3)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = 4. \quad (4)$$

Сумісний розв'язок рівнянь (3) і (4) дає:  $p_1 = \frac{8}{5}p$ ;  $p_2 = \frac{2}{5}p$ .

**Приклад 2.8.** На рисунку 2.5 наведений графік зміни стану ідеального газу в координатах  $(p, T)$ . Представити цей коловий процес (цикл) у координатах  $(p, V)$  і  $(V, T)$ .

Розв'язання.

З законів Шарля та Гей-Люссака випливає, що лінії постійного об'єму – ізохори (в координатах  $(p, T)$ ) та лінії постійного тиску – ізобари (в координатах  $(V, T)$ ) є прямими, що проходять через початок координат (див. рис.2.3, 2.4).

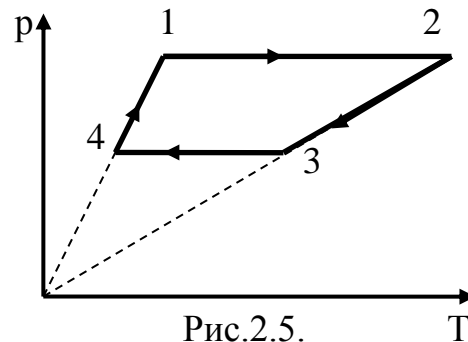


Рис.2.5.

Отже, процеси 1-2 та 3-4 є ізобарними процесами, а 2-3 та 4-1 – ізохорними. Звертаємо увагу на те, що процес ізобарного поширення газу (процес 1-2) протікає при більшому тиску, ніж його стискання (процес 3-4), а процес 2-3 протікає при більшому об'ємі, ніж процес 4-1. Тоді в координатах  $(p, V)$  графік циклу зображується прямокутником 1234 (див. рис. 2.6).

В координатах  $(V, T)$  цикл зображується аналогічно заданому на рис.2.5 з тією відміною, що похилі прямі відповідають ізобарним процесам, а горизонтальні – ізохорним (рис.2.7).

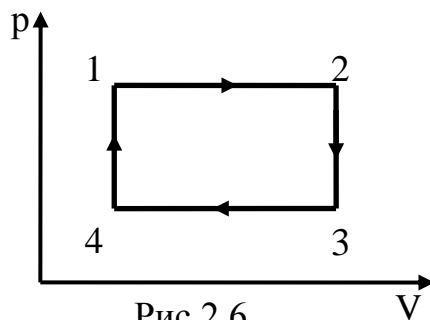


Рис.2.6.

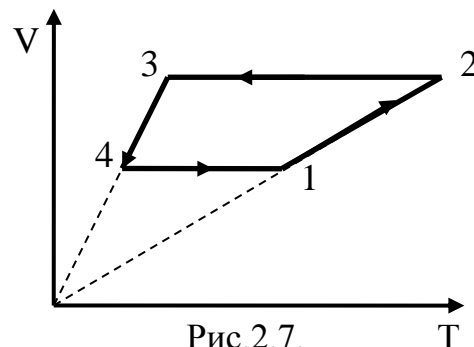


Рис.2.7.

**Приклад 2.9.** На рисунку 2.8 зображено замкнений процес 1-2-3-4, точки 1 і 3 якого відповідають ізотермам з температурами  $t_1=27^\circ\text{C}$  і  $t_2=177^\circ\text{C}$ . У стані 1 об'єм газу дорівнює  $V_1=3\text{ дм}^3$ . При якому значенні об'єму  $V_2$  точки 2 і 3 будуть знаходитися на одній ізотермі? Чому дорівнює температура  $T$  цієї ізотерми?

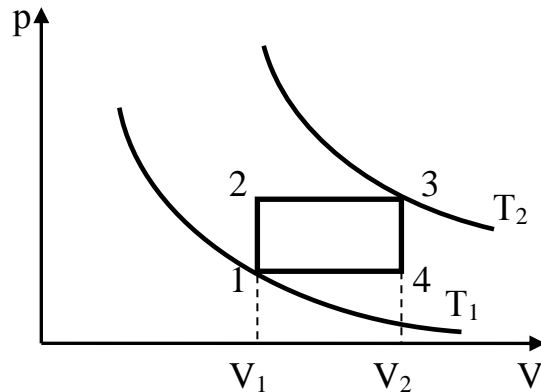


Рис. 2.8.

$T_1=300\text{K}$ $T_2=450\text{K}$ $V_1=3\cdot 10^{-3}\text{м}^3$	Розв'язання
$V_2 - ? \quad T - ?$	Процеси 2-3 та 3-4 – ізобаричні. На основі закону Гей-Люссака для станів 2 і 3 маємо $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T}{T_2}$ (1), для станів 1 і 4 – $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T}$ (2), звідки $\frac{T}{T_2} = \frac{T_1}{T}$ (3).

співвідношення (3) виражаємо температуру  $T$  ізотерми, до якої належать точки 2 і 4:

$$T = \sqrt{T_1 T_2}. \quad (4)$$

Із співвідношення (1) з урахуванням виразу для температури (4) знаходимо об'єм  $V_2$ :

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T} = V_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

$$T = \sqrt{300 \cdot 450} = 367,4 \text{ (K)}; \quad V_2 = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{450}{300}} = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ (м}^3\text{)}.$$

**Приклад 2.10.** Об'єм циліндру поршневого насоса дорівнює  $V_1$ . Насос з'єднаний з балоном об'ємом  $V$ , який містить повітря при нормальному атмосферному тиску  $p_0$ . Знайти тиск у балоні після  $n$  робочих ходів поршня, якщо насос працює у режимі нагнітання повітря у балон. Температура газу під час роботи насоса не змінюється.

Розв'язання.

Під час одного ходу поршня у режимі нагнітання насос захоплює з атмосфери об'єм  $V_1$  при атмосферному тиску  $p_0$ . Після  $n$  робочих ходів у балон буде введена маса повітря, що міститься при атмосферному тиску в об'ємі  $nV_1$ . Оскільки за умовою задачі температура газу залишається

незмінною, спричинений введеною масою газу додатковий парціальний тиск  $p_n$  можна знайти за законом Бойля-Маріотта (2.2):

$$p_n V = p_0 n V_1, \quad \text{звідки} \quad p_n V = p_0 n \frac{V_1}{V}.$$

Повний тиск повітря у балоні дорівнює:

$$p = p_n + p_0 = p_0 \left( \frac{V_1}{V} n + 1 \right).$$

**Приклад 2.11.** Об'єм циліндру поршневого насосу дорівнює  $V_1$ . Насос з'єднаний з балоном об'ємом  $V$ , який містить повітря при нормальному атмосферному тиску  $p_0$ . Знайти тиск у балоні після  $n$  робочих ходів поршня, якщо насос працює у режимі розрідження повітря у балоні. Температуру газу під час роботи насосу вважати постійною. Побудувати графік залежності тиску в балоні від кількості ходів поршня.

Розв'язання.

До початку роботи насосу у режимі розрідження повітря в балоні займало об'єм  $V$  при тиску  $p_0$ . Наприкінці першого ходу поршня та сама маса повітря займає об'єм  $V + V_1$  при тиску  $p_1$ . Згідно умови зміною температури можна знехтувати і вважати її постійною. Тоді параметри двох станів газу можна зв'язати за законом Бойля – Маріотта:

$$p_1 (V + V_1) = p_0 V, \quad \text{звідки} \quad p_1 = \frac{p_0 V}{V + V_1}. \quad (1)$$

Далі розглядаємо значення об'єму і тиску газу в балоні на початку і наприкінці другого ходу поршня, які дорівнюють відповідно  $V$  і  $p_1$  та  $V + V_1$  і  $p_2$ :

$$p_2 (V + V_1) = p_1 V. \quad (2)$$

З рівняння (1) з урахуванням виразу (2) отримуємо:

$$p_2 = \frac{p_1 V}{V + V_1} = \left( \frac{V}{V + V_1} \right)^2 p_0.$$

Аналогічні викладки дають для тиску у балоні наприкінці  $n$ -го робочого ходу вираз

$$p = p_n = \left( \frac{V}{V + V_1} \right)^n p_0. \quad (3)$$

Графік залежності тиску в посудині від кількості ходів поршня  $n$  є графіком показникової функції з основою  $\left( \frac{V}{V + V_1} \right) < 1$ , звідки випливає, що з кожним циклом тиск зменшується на все меншу величину (рис.2.8).



Згідно з формулою (3) тиск в балоні зменшується з кожним ходом насосу, і може бути досягнуте будь-яке розрідження повітря у балоні. В дійсності відкачати повітря із посудини повністю, так, щоб тиск у ньому дорівнював нулю, неможливо. Для кожного насосу існує деяке значення тиску  $p_{\min}$ , нижче якого він не дає розрідження.

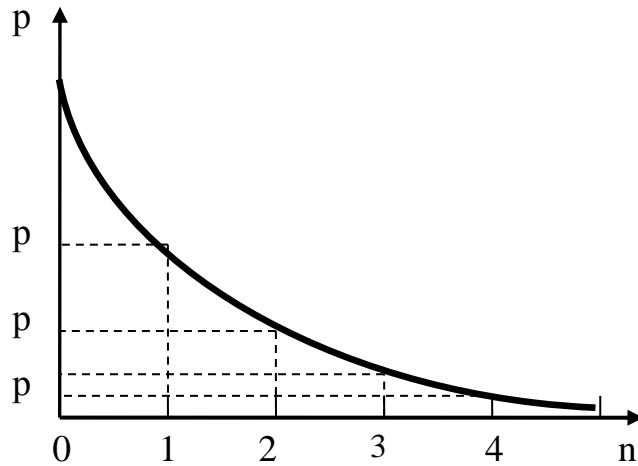


Рис.2.8.

**Приклад 2.12.** За умовою попередньої задачі знайти мінімальний тиск  $p_{\min}$ , до якого може бути розріджене повітря у балоні.

Розв'язання.

При виштовхуванні повітря в атмосферу між поршнем і клапаном, через який виштовхується повітря завжди залишається невеличкий, але кінцевий об'єм  $\Delta V$ . При деякому мінімальному тиску в посудині  $p_{\min}$  повітря, яке стискається поршнем від початкового об'єму камери циліндру  $V_1$  до об'єму  $\Delta V$ , буде мати тиск не вищий за атмосферний  $p_0$  і не зможе вийти зовні. Насос буде працювати вхолосту. Отже для визначення граничного значення тиску, яке обумовлене існуванням шкідливого простору  $\Delta V$  можна записати умову:  $p_{\min} V_1 = p_0 \Delta V$ . Звідки  $p_{\min} = p_0 \frac{\Delta V}{V_1}$ .

Для досягнення значного розрідження як правило використовують декілька насосів, з'єднаних послідовно. Кожний наступний насос відкачує повітря не в атмосферу, а в об'єм, із якого відкачує повітря насос попереднього ступеня.

### Задачі для самостійного розв'язування

- 2.1. Водень масою  $m = 2\text{г}$  міститься у балоні об'ємом  $V = 800\text{ см}^3$  під тиском  $p = 0,2\text{МПа}$ . Чому дорівнює температура  $t$  газу?
- 2.2. Азот масою  $m = 28\text{г}$  міститься у закритій посудині при температурі  $t=27^\circ\text{C}$  під тиском  $p=750\text{мм рт.ст.}$  Визначити об'єм посудини.
- 2.3. У посудині об'ємом  $V = 10\text{л}$  під тиском  $p = 640\text{мм рт. ст.}$  міститься кисень. Температура кисню  $t = 27^\circ\text{C}$ . Знайти масу кисню.
- 2.4. Вичислити густину  $\rho$  азоту, що знаходиться у балоні під тиском  $p=20\text{атм.}$  Температура азоту  $t=17^\circ\text{C}$ .
- 2.5. Знайти густину  $\rho$  повітря при нормальних умовах.

- 2.6. Тиск  $p$  насиченої водяної пари при температурі  $t=27^{\circ}\text{C}$  дорівнює 26,7мм рт.ст. Визначити густину  $\rho$  водяної пари за цих умов, приймаючи його за ідеальний газ.
- 2.7. При якій температурі  $t$  густина насичуючої водяної пари дорівнює  $\rho = 90 \text{ г/л}$ ? Тиск вважати рівним  $p = 12,5 \text{ кПа}$ .
- 2.8. Закрита посудина у формі кубу об'ємом  $V = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  містить повітря при нормальних умовах. Яка сила тиску буде діяти на кожну з граней кубічного сосууду, якщо його нагріли до  $150^{\circ}\text{C}$ ?
- 2.9. Деякий газ знаходиться під тиском  $p=7 \text{ атм}$  при температурі  $t=35^{\circ}\text{C}$ . Визначити відносну молекулярну масу газу  $M_r$ , якщо густина газу  $\rho=12,2 \text{ кг/м}^3$ .
- 2.10. Балон об'ємом  $V=50 \text{ л}$  заповнений киснем. Температура кисню  $t=20^{\circ}\text{C}$ . Після того, як частину кисню витратили, тиск у балоні знизився на  $\Delta p=2 \text{ атм}$ . Визначити масу  $\Delta m$  витраченого кисню.
- 2.11. У балоні об'ємом  $V=20 \text{ л}$  знаходиться аргон під тиском  $p_1=8 \text{ атм}$  і температурі  $t_1=50^{\circ}\text{C}$ . Після того, як з балону взяли деяку кількість аргону, тиск у балоні знизився до  $p_2 = 6 \text{ атм}$  і установилася температура  $t_2=30^{\circ}\text{C}$ . Визначити масу аргону  $\Delta m$ , що взята з балону.
- 2.12. У балоні міститься  $m = 2 \text{ кг}$  повітря під тиском  $p = 10^7 \text{ Па}$ . Внаслідок витікання газу тиск у балоні знизився до  $p=5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Яка маса газу  $\Delta m = m_1 - m_2$  витекла з балона? Температуру вважати постійною.
- 2.13. Кімната має площу підлоги  $S = 50 \text{ м}^2$  і висоту  $h = 4 \text{ м}$ . Яка кількість повітря  $\nu$  міститься у цій кімнаті при температурі  $t = 29^{\circ}\text{C}$ ? Тиск вважати нормальним.
- 2.14. Закритий балон ємністю  $V = 5 \text{ л}$  заповнений повітрям масою  $m = 2,9 \text{ г}$  при температурі  $t_1 = 17^{\circ}\text{C}$ . На скільки збільшиться тиск у балоні при нагріванні повітря до  $t_2 = 37^{\circ}\text{C}$ ?
- 2.15. У посудині міститься ідеальний газ під тиском  $p = 0,2 \text{ Мпа}$ . Об'єм посудини  $V = 2 \text{ л}$ , температура у посудині  $t = 7^{\circ}\text{C}$ . Скільки молекул  $N$  міститься у посудині?
- 2.16. Водень масою  $m = 10 \text{ г}$  міститься у посудині об'ємом  $V = 2 \text{ л}$ . Знайти концентрацію  $n$  молекул у посудині.
- 2.17. Найбільш низький тиск, який можна отримати за допомогою найдосконалішої вакуумної техніки, приблизно дорівнює  $p = 10^{-12} \text{ Па}$ . Скільки молекул  $n$  при такому тиску містить  $1 \text{ см}^3$  при температурі  $0^{\circ}\text{C}$ ?
- 2.18. При температурі замерзання води густина повітря (азоту) на рівні моря дорівнює  $\rho = 1,255 \text{ кг/м}^3$ . Маса молекули азоту  $4,68 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$ . Якій абсолютній температурі (за шкалою Кельвіна) відповідає температура замерзання води, а саме  $0$  градусів за шкалою Цельсія?
- 2.19. У закритому балоні об'ємом  $V = 10 \text{ л}$  міститься  $m_1 = 2 \text{ г}$  води і  $m_2 = 5 \text{ г}$  вуглекислого газу ( $\text{CO}_2$ ) при температурі  $t = 127^{\circ}\text{C}$ . Вважаючи що при

такій температурі вся вода перетворюється на пару, знайти тиск  $p$  у балоні.

2.20. Дві посудини однакового об'єму містять кисень. У одній посудині тиск  $p_1 = 10$  атм і температура  $t_1 = 120^\circ\text{C}$ , в іншому  $p_2 = 15$  атм і  $t_2 = 70^\circ\text{C}$ . Посудини з'єднали трубкою і охолодили кисень, що знаходиться в них, до температури  $t = 20^\circ\text{C}$ . Визначити тиск  $p$ , що встановився, в посудинах.

2.21. У балоні об'ємом  $V = 11,2$  л знаходиться водень за нормальних умов. Після того, як у балон було додатково введено деяку кількість гелію, тиск у балоні зріс до  $p = 1,5$  атм, а температура не змінилася. Визначити масу гелію, уведеного у балон.

2.22. Посудина об'ємом  $V = 0,01\text{ м}^3$  містить азот масою  $m_1 = 7\text{ г}$  і водень масою  $m_2 = 1\text{ г}$  при температурі  $t = 7^\circ\text{C}$ . Визначити тиск  $p$  суміші газів.

2.23. У посудині міститься  $m_1 = 10$  г водню і  $m_2 = 14\text{ г}$  азоту при температурі  $t = 7^\circ\text{C}$  і тиску  $p = 0,5\text{ МПа}$ . Знайти: 1) молярну масу суміші  $M$ ; 2) об'єм посудини  $V$ .

2.24. Балон об'ємом  $V = 15$  л містить суміш водню і азоту при температурі  $t = 27^\circ\text{C}$  і тиску  $p = 2,3$  атм. Маса суміші  $m = 145$  г. Визначити масу  $m_1$  водню і масу  $m_2$  азоту.

2.25. Один з балонів об'ємом  $V_1 = 20\text{ л}$  містить азот під тиском  $p_1 = 25$  атм; другий балон об'ємом  $V_2 = 44\text{ л}$  містить кисень під тиском  $p_2 = 16$  атм. Після з'єднання балонів між собою гази утворили однорідну суміш (без зміни температури). Знайти парціальні тиски  $p_1$  і  $p_2$  обох газів суміші і повний тиск  $p$  суміші.

2.26. Знайти густину  $\rho$  газової суміші, що складається по масі з однієї частини водню і восьми частин кисню при тиску  $p = 720\text{ мм рт.ст.}$  і температурі  $t = 15^\circ\text{C}$ . 2.14. У посудині знаходиться суміш  $m_1 = 4\text{ г}$  закису азоту ( $\text{N}_2\text{O}$ ) і  $m_2 = 24\text{ г}$  азоту. Визначити густину суміші  $\rho$  при температурі  $t = 27^\circ\text{C}$  і тиску  $p = 3 \cdot 10^5\text{ Па}$ .

2.27. Газова суміш, що складається з кисню і азоту, знаходиться у балоні під тиском  $p = 10$  атм. Вважаючи, що маса кисню складає 20% від маси суміші, визначити парціальні тиски  $p_1$  і  $p_2$  кожного з газів.

2.28. Дві теплоізольовані посудини з об'ємами  $V_1 = 1\text{ л}$  і  $V_2 = 3\text{ л}$  сполучені трубкою з краном. До відкриття крану у першій посудині містився азот під тиском  $p_1 = 0,5 \cdot 10^5\text{ Па}$  і температурі  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ , а у другій – азот під тиском  $p_2 = 1,5 \cdot 10^5\text{ Па}$  і температурі  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ . Знайти які тиск  $p$  і температура  $t$  устанавляється у суміші газів, якщо відкрити кран.

2.29. У посудині знаходиться 1л води при температурі  $27^\circ\text{C}$ . Чому б дорівнював тиск усередині посудини, якби сили притягання між молекулами води раптово зникли?

2.30. Сухе повітря по об'єму складається на 78% з азоту і на 21% з кисню. Визначити для повітря відношення маси азоту до маси кисню.

2.31. Маса  $m = 716$  мг органічної сполуки у газоподібному стані, яка має формулу  $(C_3H_6O)_n$  при тиску  $p = 10^5$  Па і температурі  $t = 200^\circ\text{C}$  займає об'єм  $V = 243$  см<sup>3</sup>. Визначити значення параметру  $n$ .

2.32. Два балони з киснем місткістю 2л та 7л з'єднали трубкою. Який тиск установиться в балонах, якщо до з'єднання він відповідно дорівнював  $1,0 \cdot 10^5$  Па и  $0,52 \cdot 10^5$  Па? Температура газу не змінилася.

2.33. На рисунку 2.9 наведений графік зміни стану ідеального газу в координатах  $(V, T)$ . Представити цей коловий процес (цикл) у координатах  $(p, V)$  і  $(p, T)$ .

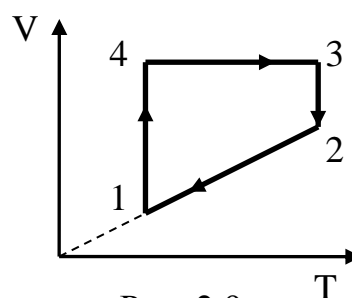


Рис. 2.9

2.34. На рисунку 2.9 наведений графік зміни стану ідеального газу в координатах  $(V, T)$ . Представити цей коловий процес (цикл) у координатах  $(p, V)$  і  $(p, T)$ .

2.35. Об'єм деякої маси ідеального газу при ізобаричному нагріванні на  $\Delta T = 10$  К збільшився на  $\alpha = 0,03$  частини від початкового значення. Визначити початкову температуру газу.

2.36. Визначити температуру газу, який знаходиться у закритій посудині, якщо тиск газу збільшився на 0,5% від початкового значення при нагріванні на  $1^\circ\text{C}$ .

2.37. При нагріванні деякої маси ідеального газу на  $\Delta t = 250^\circ\text{C}$  його об'єм збільшився на  $\alpha = \frac{1}{7}$ , а його тиск на  $\beta = \frac{1}{2}$  свого початкового значення.

Якою була початкова температура газу?

2.38. На якій глибині бульбашка повітря, що спливає у воді, мала вдвічі менший об'єм, ніж біля поверхні води? Атмосферний тиск  $p_0 = 10^5$  Па, густина води  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Зміною температури, тиском пари та кривизною поверхні знехтувати.  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

2.39. Повітряна бульбашка на дні озера глибиною  $h = 16$  м має об'єм  $V = 1,10$  см<sup>3</sup>. Температура на дні  $t_1 = 5^\circ\text{C}$ , а на поверхні —  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ . Знайти об'єм повітряної бульбашки, коли вона досягне поверхні води.

2.40. Аквалангіст, що знаходиться на глибині  $h = 12$  м від поверхні води, вдихнув повітря та заповнив весь об'єм легенів, який дорівнює  $V = 5,5$  л. До якого об'єму розширяться його легені, якщо він швидко винирне на поверхню? Чи розумно це робити?

2.41. Шину автомобіля накачали при температурі  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  до надлишкового тиску  $p_1 = 200$  кПа. Після того, як автомобіль пройшов 100 км, температура в шині піднялась до  $t_2 = 40^\circ\text{C}$ . Яким при цьому буде тиск усередині шини?

2.42. Пляшка заповнена газом та щільно закрита пробкою, площа перерізу якої  $S = 2,5$  см<sup>2</sup>. До якої температури слід нагріти газ, щоб пробка вилетіла з пляшки, якщо сила тертя, яка утримує пробку  $F = 12$  Н? Початковий тиск

у плящі і зовнішній тиск повітря однакові і дорівнюють  $p_0 = 100 \text{ кПа}$ , а початкова температура  $T_0 = 270 \text{ К}$ .

2.43. Усередині закритого з обох боків горизонтального циліндра знаходиться тонкий поршень, який може рухатися в циліндрі без тертя. З одного боку поршня знаходиться водень масою  $m_1 = 3,0 \text{ г}$ , з другого – азот масою  $m_2 = 21 \text{ г}$ . Яку частину об'єму циліндру займає водень?

2.44. Визначити густину суміші  $m_1 = 4 \text{ г}$  водню і  $m_2 = 32 \text{ г}$  при температурі  $t = 7^\circ \text{C}$  і тиску  $p = 10^5 \text{ Па}$ .

2.45. Балон місткістю  $V_1 = 2 \text{ л}$  заповнений газом при тиску  $p_1 = 12 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , другий балон місткістю  $V_2 = 5 \text{ л}$  заповнений тим самим газом при тиску  $p_2 = 2,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Який тиск установиться в балонах, якщо їх з'єднати тонкою трубкою? Процес ізотермічний.

2.46. Лазерні трубки об'ємом  $V_0 = 60 \text{ см}^3$  заповнюються сумішшю гелію і неону в молярному відношенні  $k = 5:1$  відповідно при загальному тиску в трубці  $p_0 = 800 \text{ Па}$ . Яку кількість лазерних трубок можна заповнити газом, який міститься в двох балонах об'ємом  $V = 2 \text{ л}$  кожен, якщо тиск у балоні з гелієм  $p_1 = 6670 \text{ Па}$ , у балоні з неоном  $p_2 = 2670 \text{ Па}$ .

2.47. У посудині об'ємом  $V = 0,5 \text{ л}$  знаходиться  $m = 1 \text{ г}$  пароподібного  $\text{J}_2$ . При температурі  $t = 1000^\circ \text{C}$  тиск у посудині виявився рівним  $p = 10^5 \text{ Па}$ . Знайти ступінь дисоціації молекул йоду  $\text{J}_2$  на атоми  $\text{J}$  за цими умовами. Молярна маса  $\text{J}_2$  дорівнює  $M = 0,254 \text{ кг/моль}$ .

2.48. У посудині, розділеній навпіл перегородкою, знаходиться  $m_1 = 2 \text{ г}$  водню і  $m_2 = 32 \text{ г}$  кисню при температурі  $t_0 = 27^\circ \text{C}$  і однаковому тиску. Після того, як перегородку прибрали, і гази прореагували, установилася температура  $t = 127^\circ \text{C}$  і тиск  $p = 10^5 \text{ Па}$ . Визначити початковий тиск у посудині.

2.49. Об'єм циліндра поршневого насосу  $V_1 = 0,5 \text{ л}$ . Насос з'єднаний з балоном ємністю  $V_2 = 3,0 \text{ л}$ , який містить повітря при нормальному атмосферному тиску. Знайти тиск повітря в балоні після  $n = 6$  робочих ходів поршня у випадках режимів роботи 1) нагнітального; 2) розріджувального.

2.50. Автомобільну камеру об'ємом  $V = 12 \text{ л}$  необхідно накачати до тиску  $p = 3,5 \text{ атм}$ . Визначити кількість ходів насоса, який забирає при кожному ході  $V_1 = 600 \text{ см}^3$  повітря при нормальному тиску, якщо камера спочатку 1) була порожнею; 2) півзаповненою; 3) повністю заповненою при нормальному атмосферному тиску.

2.51. Який тиск установиться в резервуарі пневматичного гальма трамвайного вагону після 250 ходів насоса? Об'єм резервуара дорівнює

$V=30$  л, а насос за один хід подає  $V_1 = 500\text{см}^3$  повітря при нормальному тиску. Зміною температури знехтувати.

2.52. Об'єм посудини  $V=5\cdot 10^3\text{см}^3$ , об'єм циліндра насоса, який працює у розріджувальному режимі, дорівнює  $250\text{см}^3$ . Після  $n = 50$  ходів поршня в посудині установився тиск  $h = 5,5$  кПа. Яким був початковий тиск у посудині?

### Тестові завдання

#### 1. Установити відповідність:

Процес	Рівняння процесу
1) ізотермічний	А) $\frac{V}{T} = \text{const}$
2) адіабатний	Б) $PV = \text{const}$
3) ізохорний	В) $PV^\gamma = \text{const}$
4) ізобарний	Г) $\frac{P}{T} = \text{const}$

#### 2. Процес

Процес	Параметр, який залишається незмінним
1) ізотермічний	А) тиск $P$
2) адіабатний	Б) температура $T$
3) ізохорний	В) ентропія $S$
4) ізобарний	Г) об'єм $V$

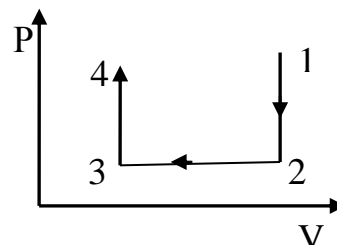
Вибрати вірну відповідь:

3. Якщо температуру газу, що знаходиться в балоні, збільшити у 3 рази, то густина газу в балоні

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) зменшиться у 3 рази;  | 4) збільшиться у 6 разів; |
| 2) зменшиться у 6 разів; | 5) не зміниться.          |
| 3) збільшиться у 3 рази; |                           |

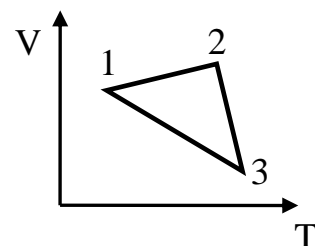
4. Яка точка на  $p$ - $V$  – діаграмі зміни стану ідеального газу, що зображена на рисунку, відповідає мінімальній температурі?

- 1) 1;      2) 2;      3) 3;      4) 4.



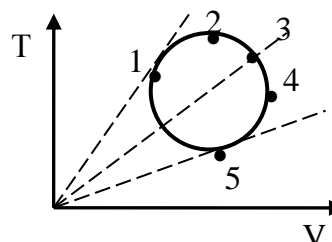
5. Ідеальний газ здійснює замкнений цикл, показаний на рисунку. Тиск газу зменшується на ділянках

- |           |                   |
|-----------|-------------------|
| 1) 1 – 2; | 2) 1 – 2 і 2 – 3; |
| 3) 2 – 3; | 4) 2 – 3 і 3 – 1; |
| 5) 3 – 1. |                   |



6. Ідеальний газ здійснює замкнений цикл, показаний на рисунку. Тиск газу є максимальним у точці

- |       |       |
|-------|-------|
| 1) 1; | 2) 2; |
| 3) 3; | 4) 4; |
| 5) 5. |       |



7. Рівняння Менделєєва – Клапейрона виражає формула

1)  $PV = \text{const}$ ;    2)  $PV = \frac{2}{3} W_k$ ;    3)  $PV = \frac{m}{M} RT$ ;    4)  $PV^\gamma = \text{const}$ .

8. Якщо при ізобарному нагріванні ідеального газу від температури  $17^\circ\text{C}$  його густина зменшилась у 2 рази, то температура газу збільшилась на

1)  $34^\circ\text{C}$ ;    2)  $17^\circ\text{C}$ ;    3)  $68^\circ\text{C}$ ;    4)  $290^\circ\text{C}$ ;    5)  $563^\circ\text{C}$ .

9. Якщо бульбашка повітря підіймається при постійній температурі і атмосферному тиску  $100 \text{ кПа}$  з глибини  $80 \text{ м}$  на поверхню водоймища, її об'єм збільшується в

1) 16 разів;    2) 8 разів;    3) 4 рази;    4) 6 разів;    5) 9 разів.

10. Для збільшення об'єму газу в 2 рази порівняно з його об'ємом при температурі  $T=273 \text{ К}$ , цей газ потрібно ізобарно нагріти на

1)  $546 \text{ К}$ ;    2)  $273 \text{ К}$ ;    3)  $200 \text{ К}$ ;    4)  $117 \text{ К}$ ;    5)  $77 \text{ К}$ .

11. Якщо повітря у відкритій посудині нагріти від  $27$  до  $127^\circ\text{C}$ , то його маса в посудині зменшиться у

1) 0,5 рази;    2) 2,7 рази;    3) 1,33 рази;    4) 3 рази    5) не зміниться.

12. Водень  $\text{H}_2$ , кисень  $\text{O}_2$ , азот  $\text{N}_2$  та водяна пара  $\text{H}_2\text{O}$  (Молярні маси відповідно дорівнюють  $2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  $32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  $28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$  та  $18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ) знаходяться при однаковому тиску і температурі. При цих умовах мінімальну густину має

1) водень;    2) кисень;    3) азот;    4) водяна пара.

13. В однакових посудинах при однакових температурах знаходяться однакові маси водню  $\text{H}_2$ , кисню  $\text{O}_2$ , азоту  $\text{N}_2$  та водяної пари  $\text{H}_2\text{O}$ . (Молярні маси відповідно дорівнюють  $2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  $32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  $28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$  та  $18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ). Найбільшим буде тиск в посудині з

1) воднем;    2) киснем;    3) водяною парою;    4) азотом.

14. Якщо кисень ( $\text{O}_2$ ) і метан ( $\text{CH}_4$ ) знаходяться при однаковому тиску і однаковій температурі, відношення густини кисню до густини метану дорівнює

1) 0,9;    2) 1,2;    3) 1,5;    4) 2;    5) 3.

15. При випуску з балону частини газу його температура зменшилась у  $n$  разів, тиск – у

$k$  разів. Із балону була випущена частина газу  $\frac{\Delta m}{m} = \frac{m - m_1}{m}$ , яка дорівнює

1)  $\frac{k-1}{n}$ ;    2)  $\frac{1-n}{k}$ ;    3)  $\frac{n}{k}$ ;    4)  $\frac{k}{n}$ ;    5)  $1 - \frac{n}{k}$ .

16. Ідеальний газ здійснює процес 1 – 2, показаний на рисунку. Кінцеве значення тиску газу  $p_2$  дорівнює

1)  $p_2 = 3p_1$ ;    2)  $p_2 = 6p_1$ ;    3)  $p_2 = 2p_1$ ;    4)  $p_2 = 0,5p_1$ ;    5)  $p_2 = 0,3p_1$ .

17. Якщо газ поширюється за законом  $pV^2 = \text{const}$ , його температура

- 1) зростає;
- 2) зменшується;
- 3) не змінюється;
- 4) відповідь залежить від кількості речовини у газі;
- 5) газ не може здійснити такий процес.

18. Якщо газ поширюється за законом  $\frac{p}{V^2} = \text{const}$ , його температура

- 1) зростає;
- 2) зменшується;
- 3) не змінюється;
- 4) відповідь залежить від кількості речовини у газі;
- 5) газ не може здійснити такий процес.

### РОЗДІЛ 3. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ГАЗІВ

**Тема:** Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу. Середня кінетична енергія руху молекул. Швидкості молекул газу. Закон розподілу молекул за швидкостями. Барометрична формула. Розподіл частинок у потенціальному полі. Розподіли Максвелла та Больцмана як окремі випадки розподілу Гіббса.

Зіткнення молекул і явища переносу: дифузія, в'язкість та теплопровідність газів.

#### Основні поняття і формули

• Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів зв'язує між собою макро- і мікропараметри стану. Може бути виведено з використанням статистичного методу на основі уявлення про тиск газу як результат зміни імпульсу стінки при зіткненні з нею молекул.

**Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеальних газів:**

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v^2 \rangle. \quad (3.1)$$

Тиск, який спричиняють молекули ідеального газу на стінки посудини є пропорційним масі молекули  $m_0$ , концентрації молекул  $n$  і середньому значенню квадрату швидкості молекули  $\langle v^2 \rangle$ .

Рівнянню (3.1) можна надати вигляду:

$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_k \rangle, \quad (3.1,a)$$

де  $\langle \epsilon_k \rangle$  – середня кінетична енергія поступального руху молекули.

Множення виразу (3.1a) на об'єм газу  $V$  дає:

$$pV = \frac{2}{3} W_k \quad (3.1,b)$$

**Добуток тиску ідеального газу на його об'єм дорівнює  $\frac{2}{3}$  величини кінетичної енергії поступального руху всіх його молекул.**

• Для одноатомної молекули середня кінетична енергія поступального руху молекули при температурі  $T$  дорівнює

$\langle \epsilon_k \rangle = \frac{3}{2} kT$  ( $k$  – стала Больцмана), що відповідає трьом ступеням вільності ( $i=3$ ), оскільки для завдання положення центра молекули необхідні три координати ( $x, y, z$ ).



Двохатомні (подібні гантелі) або багатоатомні молекули окрім енергії поступального руху мають також кінетичну енергію обертального руху, причому при зіткненні двох молекул енергія одного виду руху переходить в іншу (див. рис. 3.1).

**Закон рівнорозподілу енергії:** середня енергія на одну ступінь вільності  $= \frac{1}{2}kT$ .

Таким чином, для багатоатомної молекули

$$\langle \epsilon_k \rangle = \frac{i}{2}kT, \quad \text{де } i -$$

кількість ступенів вільності молекули. (3.2)

Для одноатомного газу  $i = 3$ ;

для двохатомного –  $i = 5$  ( $i_{\text{пост.}}=3$ ;

$i_{\text{оберт.}}=2$ );

для багатоатомного –  $i = 6$  ( $i_{\text{пост.}}=3$ ;

$i_{\text{оберт.}}=3$ ).

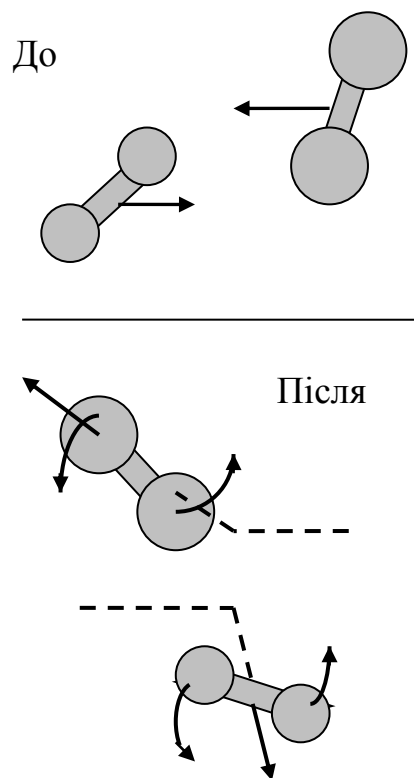


Рис.3.1. Після зіткнення двох молекул виникає обертальний рух.

### Статистичний опис хаотичного руху молекул

• **Поняття функції розподілу густини ймовірності.** Нехай  $x_i$  – деяка характеристика системи (наприклад, швидкість руху молекул). Припустимо, що в результаті серії, яка складалась із  $N$  іспитів, значення величини  $x_i$  випало  $N_i$  разів.

**Ймовірністю  $p_i$**  появи події  $x_i$  називають границю відношення  $N_i/N$  при нескінченній кількості іспитів:  $p_i = \lim N_i/N$ .

Середнє значення дискретної величини  $x$  дорівнює:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^n p_i x_i. \quad (3.3)$$

Для аналізу розподілу неперервних величин використовують поняття **функції розподілу густини ймовірності  $f(x)$** , яка дорівнює відношенню ймовірності  $dp$  попадання величини  $x$  в інтервал від  $x$  до  $x+dx$  до ширини цього інтервалу.

$$f(x) = dp/dx. \quad (3.4)$$

За допомогою функції  $f(x)$  можна розрахувати ймовірність попадання величини  $x$  до шуканого інтервалу значень, наприклад, від  $x_1$  до  $x_2$ .

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (3.5)$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини  $x$  належать до інтервалу  $(a, b)$ , то її середнє значення і середнє значення її квадрату розраховують за формулами:

$$\langle x \rangle = \int_a^b x f(x) dx; \quad (3.6)$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_a^b x^2 f(x) dx. \quad (3.7)$$

Інтеграл функції  $f(x)$  у межах від  $-\infty$  до  $+\infty$  відповідає достовірній події і дорівнює 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (3.8)$$

Умова (3.9) носить назву умови нормування функції густини розподілу ймовірності.

#### • Закон розподілу молекул по швидкостям (закон Максвелла).

При рівноважному стані ідеального газу зіткнення молекул приводять до рівномірного розподілу у просторі напрямів їх руху.

Усі напрями руху молекул газу мають рівну ймовірність! Можливі значення швидкостей знаходяться в межах від 0 до  $\infty$ , але їх імовірність є різною.

Функція розподілу молекул газу по швидкостям має назву розподілу Максвелла.

Згідно розподілу Максвелла кількість молекул  $dN$ , модуль швидкості яких лежить у діапазоні від  $v$  до  $v + dv$ , дорівнює

$$dN = N \cdot 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv, \quad (3.9)$$

де  $N$  – повна кількість молекул;  $m_0$  – маса молекули.

Відповідно формулі (3.9) функція розподілу густини ймовірності  $f(v) = \frac{dN}{N \cdot dv}$ , яка, з одного боку, визначає густину ймовірності того, що окрема молекула має швидкість, яка належить до одиничного інтервалу швидкостей поблизу даної швидкості  $v$ ; з другого – надає відносну кількість молекул, швидкості яких належать до цього інтервалу, має вигляд:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (3.10)$$

Графічне зображення функції розподілу Максвелла (3.10) наведено на рис.3.2. Крива розподілу дозволяє визначити відносну кількість молекул  $\frac{\Delta N}{N}$ , швидкості яких попадають в будь-який інтервал, наприклад, від  $v_1$  до  $v_2$ :

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv. \quad (3.11)$$

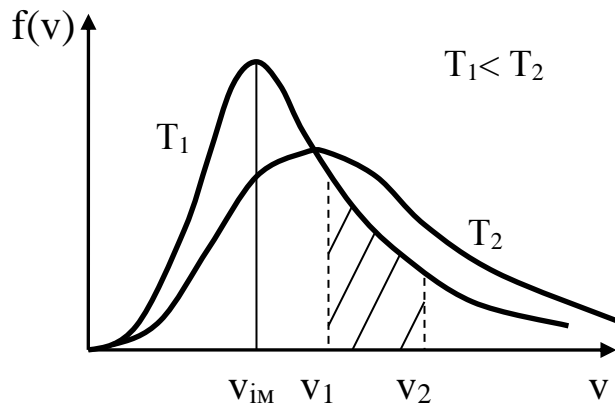


Рис. 3.2.

На рис.3.2 ця кількість молекул зображується площиною заштрихованої смуги.

Швидкість, що відповідає максимуму функції розподілу (рис.3.2), має назву найбільш імовірної швидкості  $v_{im}$ . Для її знаходження необхідно дослідити функцію розподілу (3.10) на екстремум.

Результат такого дослідження дає:

$$v_{im} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (3.12)$$

Більшість молекул мають швидкості, які є близькими до значення  $v_{im}$  (див. табл. 3.1). При збільшенні температури  $v_{im}$  зростає, і максимум кривої розподілу (рис.3.2) зміщується вправо.

Таблиця 3.1.

Підстановка (3.12) у формулу (3.11) надає максимальне значення функції

розподілу  $f(v_{im})$ , яке пропорційне  $\sqrt{\frac{m_0}{T}}$ .

Отже, при збільшенні температури крива розподілу стає все нижчою, більш пологою, але площа під нею не змінюється і залишається рівною одиниці, згідно умовою нормування (3.8).

$\frac{v}{v_{im}}$	$\frac{\Delta N}{N}, \%$
0 – 0,5	8,1
0,5 – 1,5	70,7
1,5 – 2	16,6
2 – 3	4,6
3	0,04
5	$6 \cdot 10^{-9}$

Використання функції розподілу Максвелла для обчислення середньої та середньоквадратичної швидкості молекул ідеального газу за формулами (3.6) та (3.7) дає:

$$- \text{середня арифметична швидкість } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \quad (3.13)$$

$$- \text{середня квадратична швидкість } v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (3.14)$$

Введення у розгляд відносної швидкості молекул  $u = \frac{v}{v_{\text{ім}}}$ , де  $v$  – надана швидкість,  $v_{\text{ім}}$  – найбільш ймовірна швидкість, дозволяє надати функції розподілу (3.10) більш компактного виду, який часто використовують при розв’язку задач:

$$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2. \quad (3.15)$$

#### ● Розподіл частинок у потенціальному полі (розподіл Больцмана).

Функція розподілу частинок по координатам в потенціальному полі сил носить назву розподілу Больцмана. У випадку, якщо потенціальна енергія частинок залежить тільки від координати  $z$ . Розподіл Больцмана має вигляд:

$$f(z) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{U(z)}{kT}} dz} e^{-\frac{U(z)}{kT}}, \quad (3.16)$$

де  $U(z)$  – потенціальна енергія частинки в точці з координатою  $z$ .

Як наслідки з розподілу Больцмана можна отримати:

- барометричну формулу;
- формулу розподілу концентрації частинок по координатам в потенціальному полі сил.

● **Барометрична формула.** Усі тіла на земній поверхні, в тому числі молекули, знаходяться в полі тяжіння Землі. Внаслідок дії сили тяжіння і хаотичного руху молекул повітря устатковується деякий нерівномірний розподіл молекул за висотою: чим вище шар повітря, тим менша там концентрація молекул і меншим є тиск.

Барометрична формула, яка надає залежність тиску газу від висоти  $h$  в полі сили тяжіння, має вигляд

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} \quad (3.17)$$

де  $p_0$  – тиск при  $h = 0$ ;  $p$  – тиск на висоті  $h$ ;  $g$  – прискорення сили тяжіння.

При використанні барометричної формули слід пам’ятати, що вона отримана при наступних припущеннях:

- температура атмосфери є однаковою на різних висотах (так звана, ізотермічна атмосфера);
- прискорення вільного падіння не залежить від висоти ( $g = \text{const}$ );
- повітря – ідеальний газ.

• **Залежність концентрації частинок від  $\vec{r}$  в потенціальному полі сил  $U(\vec{r})$ :**

$$n(\vec{r}) = n(\vec{r}_0) e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}, \quad (3.18)$$

де  $n(\vec{r}_0)$  - концентрація частинок в точці з нульовою потенціальною енергією  $U(\vec{r}_0) = 0$ .

Згідно з формулою (3.18) концентрація частинок більше там, де менше їх потенціальна енергія, і навпаки, менше в тих місцях, яким відповідає більше значення потенціальної енергії.

Для розподілу частинок в потенціальному полі тяжіння Землі  $U = m_0gh$ , і формула (3.18) приймає вигляд

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0gh}{kT}} \quad (3.19)$$

Формула (3.19), яка надає розподіл концентрації молекул газів, що входять до складу повітря, з висотою може бути отримана також із барометричної формули (3.17) за допомогою формули (2.11)  $p = nkT$ .

Для обох розподілів – Максвелла і Больцмана є характерним наявність експоненціального множника, в показнику якого стоїть відношення кінетичної енергії  $\left(\frac{m_0v^2}{2}\right)$  або потенціальної енергії ( $W_p$ ) до величини, яка визначає середню енергію теплового руху молекул ( $kT$ ).

Об'єднання формул (3.10) і (3.18) визначає середню концентрацію молекул  $dn$  у деякому місці простору, швидкості яких належать до інтервалу  $(v, v+dv)$ :

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_0 \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{U + \frac{mv^2}{2}}{kT}} v^2 dv. \quad (3.20)$$

Таким чином,  $dn$  визначається тільки повною енергією молекули

$$W = U + \frac{mv^2}{2}.$$

Температура газу визначається середньою кінетичною енергією молекул. Виникає питання, чому в потенціальному полі температура є постійною, хоча зміна потенціальної енергії молекули обов'язково повинна

приводити до зміни її кінетичної енергії? Тобто, чому при русі молекул уверх, кінетична енергія кожної з них зменшується, а температура залишається постійною, тобто постійною є середня кінетична енергія молекул? Справа в тому, що при русі уверх молекули дійсно уповільнюються, але найбільш повільні з них вибувають із пучка. При русі донизу, навпаки, молекули не тільки прискорюються, але одночасно пучок поповнюється більш повільними молекулами. Ці процеси приводять до того, що середня швидкість теплового руху молекул залишається незмінною.

### Методичні вказівки.

- У кінетичній теорії, яка розглядає газ як сукупність великої кількості молекул, що рухаються хаотично, і тому є статистичною теорією, використовуються різні типи середніх швидкостей молекул: середня квадратична швидкість  $v_{\text{кв}}$ , середня арифметична швидкість  $\langle v \rangle$  і найбільш ймовірна швидкість  $v_{\text{ім}}$ . Ці три швидкості зв'язані між собою залежністю яку визначають формули (3.12) – (3.14). Для будь-якого газу при тій самій температурі  $v_{\text{ім}} : \langle v \rangle : v_{\text{кв}} = 1,41 : 1,60 : 1,73$ .

Середню квадратичну швидкість  $v_{\text{кв}}$  використовують у тих випадках, коли необхідно розрахувати фізичну величину, яка є пропорційною квадрату швидкості молекул, наприклад, тиск газу, кінетичну енергію поступального руху молекул.

Середня арифметична швидкість  $\langle v \rangle$  використовується для визначення середніх значень фізичних величин, до формул яких швидкість входить у першій степені, наприклад середній імпульс молекул, середня кількість зіткнень в одиницю часу, середня довжина вільного пробігу молекул.

Найбільш ймовірна швидкість  $v_{\text{ім}}$ , якій відповідає максимум функції розподілу, є корисною при розв'язуванні задач, які пов'язані з застосуванням функції розподілу. Вона дозволяє перейти до функції розподілу відносної швидкості  $u = \frac{v}{v_{\text{ім}}}$  у вигляді  $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$  (3.15).

- Для невеликих інтервалів швидкостей  $\Delta u \ll u$ , що є рівносильним нерівності  $\Delta v \ll v$ , функція  $f(u)$  дозволяє обчислити кількість молекул  $\Delta N$ , відносні швидкості яких лежать в інтервалі від  $u$  до  $u + \Delta u$  за формулою

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 \Delta u, \quad (3.20)$$

де  $N$  – загальне число молекул;  $\Delta u = \frac{\Delta v}{v_{\text{ім}}}$ .

При розв'язуванні таких задач зручно використовувати таблицю 3.2.

Таблиця 3.2

u	$\frac{\Delta N}{N\Delta u}$	u	$\frac{\Delta N}{N\Delta u}$	u	$\frac{\Delta N}{N\Delta u}$
0	0	0,9	0,81	1,8	0,29
0,1	0,02	1,0	0,83	1,9	0,22
0,2	0,09	1,1	0,82	2,0	0,16
0,3	0,18	1,2	0,78	2,1	0,12
0,4	0,31	1,3	0,71	2,2	0,09
0,5	0,44	1,4	0,63	2,3	0,06
0,6	0,57	1,5	0,54	2,4	0,04
0,7	0,68	1,6	0,46	2,5	0,03
0,8	0,76	1,7	0,36		

Якщо інтервали швидкостей, які розглядаються в задачі, не задовольняють вище указаним нерівностям, повна кількість молекул  $\Delta N$ , швидкості яких лежать в інтервалі  $\Delta u = u_1 - u_2$  може бути знайдена тільки інтегруванням згідно (3.5):

$$\Delta N = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du. \quad (3.21)$$

• У випадку, коли розглядається розподіл молекул газу за значеннями проекції швидкості  $v_x$  слід використовувати функцію розподілу у відповідному вигляді:

$$f(v_x) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2}}. \quad (3.22)$$

• Основне рівняння кінетичної теорії газів (3.1) і закон Максвелла про розподіл молекул за швидкостями (формули (3.9), (3.10), (3.22)) є справедливими тільки для ідеального газу, бо при їх виведенні не урахується потенціальна енергія взаємодії молекул на відстані. Тому ці рівняння, а також рівняння (3.1,а,б), (3.11) - (3.15), що зв'язані з ними, можна використовувати тільки для не дуже сильно стиснених газів.

### Приклади розв'язання задач

**Приклад 3.1.** Середня квадратична швидкість руху молекул деякого газу  $v_{\text{кв}} = 800 \text{ м/с}$ . Знайти його густину  $\rho$ , якщо тиск  $p$  у балоні 380 мм рт.ст.

$p = 380 \text{ мм рт.ст.}$
$v_{\text{кв}} = 800 \text{ м/с}$
$\rho - ?$

Розв'язання  
Середня квадратична швидкість теплового руху молекул газу за формулою (3.14) дорівнює

$$v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \quad (1)$$

де  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ ;  $T$  – абсолютна температура;  $M$  – молярна маса газу.

Звідки 
$$v_{\text{KB}}^2 = \frac{3RT}{M}. \quad (2)$$

Порівняємо з рівнянням Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad (3)$$

З (2) виразимо  $\frac{RT}{M} = \frac{v_{\text{KB}}^2}{3}$  і підставимо в (3):

$$pV = \frac{mv_{\text{KB}}^2}{3}, \text{ або } p = \frac{m}{V} \cdot \frac{v_{\text{KB}}^2}{3} \quad (4)$$

За означенням густина  $\rho = m/V$ , тому з (4)  $\rho = \frac{3p}{v_{\text{KB}}^2}. \quad (5)$

Переведемо тиск у одиницю вимірювання в СІ:

$$p = 380 \text{ мм рт. ст.} \times 133 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Підстановка у (5) числових даних дає  $\rho = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 10^5}{(800)^2} = 0,23 \text{ кг/м}^3.$

Перевірка одиниці вимірювання:  $[\rho] = \frac{\text{Па}}{\text{м}^2 / \text{с}^2} = \frac{\text{Н} / \text{м}^2}{\text{м}^2 / \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^4} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$

Відповідь:  $\rho = 0,23 \text{ кг/м}^3.$

**Приклад 3.2.** Середня кінетична енергія поступального руху молекул водню  $\langle \epsilon_k \rangle = 5,86 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$ . Визначити середню швидкість молекул водню за тими самими умовами.

$$\begin{array}{l} \langle \epsilon_k \rangle = 5,86 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} \\ M = 2 \cdot 10^{-3} \text{ моль/К} \\ N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \\ \hline \langle v \rangle - ? \end{array}$$

Розв'язання  
Середня енергія поступального руху молекули

дорівнює  $\langle \epsilon_k \rangle = \frac{m_0 v_{\text{KB}}^2}{2}$ . Звідки

$$v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{2 \langle \epsilon_k \rangle}{m_0}}, \quad (1)$$

де  $m_0 = \frac{M}{N_A}$  (2) – маса молекули водню.

Формули (3.13) і (3.14), які надають  $\langle v \rangle$  і  $v_{\text{KB}}$ , дозволяють установити зв'язок між їх значеннями.



$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; \quad v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Тоді  $\frac{\langle v \rangle}{v_{\text{KB}}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}$ , звідки з урахуванням формул (1) і (2) отримуємо

$$\langle v \rangle = v_{\text{KB}} \sqrt{\frac{8}{3\pi}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi} \cdot \frac{2 \langle \epsilon_k \rangle}{m_0}} = \sqrt{\frac{16}{3\pi} \cdot \frac{\langle \epsilon_k \rangle N_A}{M}}.$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{16 \cdot 5,86 \cdot 10^{-21} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 1731 \text{ (м/с)}$$

$$[\langle v \rangle] = \left( \frac{\text{Дж} \cdot \text{моль}^{-1}}{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Відповідь:  $\langle v \rangle = 1731 \text{ м/с}$ .

**Приклад 3.3.** В деякому об'ємі газу знаходиться кількість молекул, яка дорівнює числу Авогадро  $N_A$ . Визначити кількість  $\Delta N$  молекул, швидкості яких не перевищують 0,001 найбільш імовірної швидкості  $v_{\text{ім}}$ . Газ вважати ідеальним.

Розв'язання

$\begin{array}{l} N = N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \\ v < v_{\text{ім}} \cdot 10^{-3} \\ \hline \Delta N - ? \end{array}$	<p>Для розв'язання задачі зручно скористатися розподілом молекул за відносними швидкостями (3.15), згідно якому <math>\frac{dN}{N du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2</math>. Звідки</p> $dN = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du, \quad (1)$
---	--

де  $N$  – повна кількість молекул в заданому об'ємі.

За умовою  $v_{\text{max}} = 0,001 v_{\text{ім}}$ , звідки  $u_{\text{max}} = \frac{v_{\text{max}}}{v_{\text{ім}}} = 0,001$ . Для таких значень  $u$  вираз (1) спрощується, якщо розкласти експоненту в ряд. Дійсно, для  $u \ll 1$   $e^{-u^2} \approx 1 - u^2$ . Нехтуючи значенням  $u^2 = 10^{-6}$  порівняно з одиницею, тобто обмежуючись першим членом розкладу, вираз (1) можна переписати у вигляді:

$$dN = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 du. \quad (2)$$

Інтегрування (2) за змінною  $u$  у межах від 0 до  $u_{\text{max}}$  дає:

$$\Delta N = \frac{4N_A}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\max}} u^2 du = \frac{4N_A}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^{u_{\max}} = \frac{4N_A}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u_{\max}^3}{3}.$$

$$\Delta N = \frac{4 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-9}}{\sqrt{3,14} \cdot 3} = 4,53 \cdot 10^{14} \text{ (молекул)}.$$

Відповідь:  $\Delta N = 4,53 \cdot 10^{14}$  молекул.

**Примітка:** Якщо за умовою задачі  $u$  можна порівняти з одиницею, підінтегральну функцію слід розкласти в ряд Маклорена

$$e^{-u^2} = 1 - \frac{u^2}{1!} + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \frac{u^8}{4!} - \dots$$

$$u^2 e^{-u^2} = u^2 - \frac{u^4}{1} + \frac{u^6}{2} - \frac{u^8}{6} + \dots$$

Далі проводять інтегрування, обмежуючись певною кількістю (наприклад, 4-5) членів розкладу.

**Приклад 3.4.** Яка частина молекул азоту при температурі  $t=150^\circ\text{C}$  має швидкості від  $v_1=300\text{м/с}$  до  $v_2=310\text{м/с}$ ?

$t=150^\circ\text{C}$ $v_1=300\text{м/с}$ $v_2=310\text{м/с}$ <hr/> $\frac{\Delta N}{N} - ?$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Оскільки інтервал швидкостей є невеликим (<math>\Delta v \ll v</math>), відносну кількість молекул <math>\frac{\Delta N}{N}</math> можна обчислити за наближеною формулою (3.23):</p> $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 \Delta u,$ <p style="text-align: right;">(1)</p> <p>де <math>u</math> – відносна швидкість, яка дорівнює <math>u = \frac{v}{v_{\text{ім}}}</math>. (<math>v</math> – швидкість молекули; <math>v_{\text{ім}}</math> – найбільш імовірна швидкість молекул.)</p> <p>За формулою (3.12) <math>v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}</math>.</p> <p>За умовою задачі <math>v_{\text{ім}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot (150 + 273)}{28 \cdot 10^{-3}}} = 500 \text{ (м/с)}</math>.</p> <p>Тоді, <math>u = \frac{300}{500} = 0,6</math>; <math>u^2 = 0,36</math>; <math>\Delta u = \frac{10}{500} = 0,02</math>; <math>e^{-u^2} = e^{-0,36} = 0,7</math></p> <p>і формула (1) дає:</p> $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot 0,7 \cdot 0,36 \cdot 0,02 = 0,0064 = 0,64\%$
---	--

**Приклад 3.5.** На якій висоті  $h$  атмосферний тиск  $p$  складає 50% від тиску  $p_0$  на рівні моря? Температуру вважати постійною і рівною  $t=0^\circ\text{C}$ , молярну масу для повітря вважати рівною  $M=0,029$  кг/моль.

$t=0^\circ\text{C}$ $p=0,5p_0$ $M=0,029$ кг/моль <hr/> $h - ?$	<p>Розв'язання</p> <p>Залежність атмосферного тиску від висоти над рівнем моря представлена барометричною формулою (3.17):</p> $p = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (1)$
---	---

де  $p$  – тиск на висоті  $h$ ;  $p_0$  - тиск на рівні моря;  $M$ – молярна маса повітря;  $g=9,8$  м/с<sup>2</sup> – прискорення сили тяжіння;  $R=8,31$  Дж/(моль · К) – газова стала;  $T$  – термодинамічна температура.

Поділимо обидві частини рівняння (1) на  $p$ :  $\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mgh}{RT}}$ , звідки  $\frac{p_0}{p} = e^{\frac{Mgh}{RT}}$ .

За умовою задачі  $\frac{p}{p_0}=2$ , тому  $2 = e^{\frac{Mgh}{RT}}$ . (2) Логарифмуємо вираз (2):

$$\ln 2 = \frac{Mgh}{RT}, \text{ звідки } h = \frac{RT \cdot \ln 2}{Mg}.$$

$$h = \frac{8,31 \cdot 273 \cdot 0,693}{0,029 \cdot 9,8} \text{ м} = 5,53 \cdot 10^3 \text{ м} = 5,5 \text{ км}.$$

$$[h] = \frac{\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}}{\text{кг}/\text{моль} \cdot \text{м}/\text{с}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2} = \text{м}.$$

Відповідь:  $h=5,53$  км.

**Приклад 3.6.** Визначити додатковий тиск на обшивку літака за рахунок різниці тиску в салоні і зовні літака. Висота польоту  $h = 8$ км, температура за бортом  $t=-18^\circ\text{C}$  і не залежить від висоти. Тиск у салоні літака і на поверхні землі дорівнює  $p_0 = 100$ гПа.

$h = 8 \cdot 10^3 \text{ м}$ $T = 255 \text{ К}$ $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ $g = 9,8 \text{ м}/\text{с}^2$ $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг}/\text{моль}$ $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ <hr/> $\Delta p - ?$	<p>Розв'язання</p> <p>Додатковий тиск, що діє зсередини на обшивку літака, дорівнює</p> $\Delta p = p_0 - p_h,$ <p>де <math>p_0</math> – тиск у салоні, <math>p_h</math> - тиск за бортом на висоті <math>h</math>.</p> <p>Значення <math>p_h</math> знаходимо за барометричною формулою (3.17). Тоді</p>
---	---

$$\Delta p = p_0 \left( 1 - e^{-\frac{Mgh}{RT}} \right), \text{ де } M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} - \text{молярна маса повітря.}$$

$$\text{Обчислення дає } \Delta p = 1 \cdot 10^5 \left( 1 - e^{-\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 10^3}{8,31 \cdot 255}} \right) = 0,66 \cdot 10^5 \text{ (Па).}$$

Відповідь:  $\Delta p = 0,66 \cdot 10^5$  Па. Отримане значення додаткового тиску показує, що значення сили, яка діє на одиницю площі обшивки літака є досить великим. Тому його слід урахувати при розрахунку конструкцій літака.

**Приклад 3.7.** Пилинки масою  $m = 10^{-21}$  кг розподілені в повітрі. Визначити товщину шару повітря, в межах якого концентрація пилинок відрізняється не більше, ніж на 1%. Температура  $T$  повітря є однаковою і дорівнює 300К.

$\left. \begin{array}{l} m = 10^{-21} \text{ кг} \\ \frac{\Delta n}{n} = 0,01 \\ T = 300 \text{ К} \\ \hline \Delta h = ? \end{array} \right\}$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Розподілу пилинок можна описати формулою Больцмана (3.17): <math>n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}</math>. (1)</p> <p>Оскільки <math>\frac{\Delta n}{n}</math> є малим, зміну концентрації замінюємо диференціалом <math>dn</math>, який знаходимо із формули (1):</p> $dn = -n_0 \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}} dh.$
---	--

$n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n$ , тому  $dn = -n \frac{mg}{kT} dh$ . Звідки виражаємо зміну висоти, що відповідає шуканому шару повітря:  $dh = -\frac{kT}{mg} \cdot \frac{dn}{n}$ . (2)

Знак мінус показує, що при зростанні координати відповідає зменшення концентрації. В даному випадку він несуттєвий і може не ураховуватися. Замінюємо в виразі (2) диференціали на  $\Delta h$  та  $\Delta n$ . Тоді

$$\Delta h = -\frac{kT}{mg} \cdot \frac{\Delta n}{n}. \quad (3)$$

$$\Delta h = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 0,01}{10^{-21} \cdot 9,8} = 4,23 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}$$

$$[\Delta h] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{с}^2}{\text{К} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{м}$$

Відповідь:  $\Delta h = 4,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

**Приклад 3.8.** Визначити середнє значення вертикальної координати молекул повітря в полі тяжіння Землі при температурі  $t=0^{\circ}\text{C}$ . Атмосферу вважати ізотермічною, залежністю прискорення вільного падіння від висоти знехтувати.

$$\begin{array}{l} T = 273 \text{ К} \\ g = 9,8 \text{ м/с}^2 \\ M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \\ R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \\ \hline \langle z \rangle - ? \end{array}$$

Розв'язання

Середнє значення координати  $\langle z \rangle$  можна визначити за формулою (3.6)  $\langle x \rangle = \int_a^b x f(x) dx$ ,

де у якості змінної  $x$  виступає координата  $z$ , а  $f(z)$ - функція розподілу частинок по координатам (розподіл Больцмана), яка в потенціальному полі Землі має вигляд:

$$f(z) = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{m_0 g z}{kT}} dz} e^{-\frac{m_0 g z}{kT}}. \quad (1)$$

Окремо обчислюємо інтеграл у знаменнику:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{m_0 g z}{kT}} dz = -\frac{kT}{m_0 g} e^{-\frac{m_0 g z}{kT}} \Big|_0^{\infty} = \frac{kT}{m_0 g}. \quad (2)$$

З урахуванням того, що  $\frac{k}{m_0} = \frac{R}{M}$ , після підстановки виразів (1) і (2) у формулу (3.6) отримуємо:

$$\langle z \rangle = \frac{Mg}{RT} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{Mgz}{RT}} dz. \quad (3)$$

Заміна змінної  $z = \frac{RT}{Mg} t$  перетворює інтеграл (3) у вигляд

$$\langle z \rangle = \frac{RT}{Mg} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt.$$

Інтегрування частинами дає:

$$\langle z \rangle = \frac{RT}{Mg} = \frac{8,31 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} \text{ м} = 7983 \text{ м} \approx 8 \text{ км}.$$

**Зауваження.** Відповідь  $\langle z \rangle = 8 \text{ км}$  свідчить, що більшість маси повітря зосереджена у невеликому шарі поблизу поверхні Землі порівняно з загальним об'ємом атмосфери. Це зайвий раз підкреслює актуальність питань охорони земної атмосфери від промислових викидів.

**Приклад 3.9.** Ротор центрифуги обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . За допомогою функції розподілу Больцмана, знайти розподіл концентрації  $n$  частинок масою  $m$  в залежності від відстані до осі обертання.

#### Розв'язання

Функція розподілу концентрації частинок в одновимірному потенціальному полі згідно (3.18)

$$n(r) = n(r_0) e^{-\frac{U(r)}{kT}}, \quad (1)$$

де  $n(r_0)$  - концентрація частинок в точці з нульовою потенціальною енергією  $U(r_0) = 0$ .

При обертанні центрифуги з кутовою швидкістю  $\omega$  на кожну частинку, яка знаходиться на відстані  $r$  від осі обертання діє відцентрова сила  $\vec{F}(r) = m\omega^2 \vec{r}$ . Потенціальну енергію, що відповідає заданому полю сил, знаходимо за зв'язком між силою і потенціальною енергією:

$$U(r) = -\int \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = -\int m\omega^2 r \cdot dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} + C.$$

Припустимо, що при  $r = 0$ ,  $U(r) = 0$ . Звідки константа  $C = 0$ . Остаточно

$$U(r) = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}. \quad (2)$$

Підстановка енергії (2) у функцію розподілу концентрації (1) дає для розподілу концентрації  $n$  частинок в залежності від відстані  $r$  до осі обертання вираз:

$$n(r) = n(r_0) e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}.$$

#### Задачі для самостійного розв'язування

3.1. У скільки разів середня квадратична швидкість молекул водню більша за середню квадратичну швидкість молекул кисню? Температуру газів вважати однаковою.

3.2. Вичислити найбільш імовірну швидкість молекул ідеального газу, у якого при нормальному атмосферному тиску густина  $\rho = 1$  г/л.

3.3. Вичислити середню арифметичну і середню квадратичну швидкості молекул ідеального газу, у якого при нормальному атмосферному тиску густина  $\rho = 1$  г/л.

3.4. Знайти середню арифметичну, середню квадратичну і найбільш імовірну швидкості молекул ідеального газу, у якого при тиску  $P = 300$  мм.рт.ст. густина дорівнює  $\rho = 0,3$  г/л<sup>3</sup>.

- 3.5. При якій температурі середня квадратична швидкість молекул азоту більша за їх найбільш імовірну швидкість на  $\Delta v = 50$  м/с?
- 3.6. Визначити температуру водню, при якій середня квадратична швидкість молекул більше за їх найбільш імовірну швидкість на  $\Delta v = 400$  м/с. Знайти середню арифметичну швидкість молекул водню при цій температурі.
- 3.7. При якій температурі газу, що складається з суміші азоту і кисню, найбільш імовірні швидкості молекул азоту і кисню відрізнятимуться одна від одної на  $\Delta v = 30$  м/с.
- 3.8. Знайти середню кінетичну енергію  $\langle \epsilon_k \rangle$  руху однієї молекули гелію, а також сумарну кінетичну енергію усіх молекул в одному кіломолі та в одному кілограмі гелію при температурі  $t = -200^\circ\text{C}$ .
- 3.9. Знайти середню кінетичну енергію  $\langle \epsilon_{\text{об}} \rangle$  обертального руху однієї молекули водню, а також сумарну кінетичну енергію  $W_k$  усіх молекул в одному кіломолі водню при температурі  $t = 17^\circ\text{C}$ .
- 3.10. Визначити імпульс  $p$  молекули гелію при температурі  $t = 27^\circ\text{C}$ . Швидкість молекул вважати рівною середній арифметичній швидкості молекули  $\langle v \rangle$ .
- 3.11. Знайти середню кінетичну енергію  $\langle \epsilon_{\text{об}} \rangle$  обертального руху однієї молекули водню, а також сумарну кінетичну енергію  $W_k$  усіх молекул в одному кіломолі водню при температурі  $t = 17^\circ\text{C}$ .
- 3.12. Газ займає об'єм  $V = 1$  л, під тиском  $p = 2$  атм. Визначити кінетичну енергію поступального руху всіх молекул, які знаходяться в цьому об'ємі.
- 3.13. У балоні об'ємом  $V = 10$  л міститься газ під тиском  $p = 10^4$  Па. Знайти кінетичну енергію  $W$  поступального руху його молекул.
- 3.14. Середня квадратична швидкість молекул ідеального газу  $v_{\text{кв}} = 500$  м/с. Знайти густину газу  $\rho$ , якщо його тиск дорівнює  $p = 50$  кПа.
- 3.15. Посудина об'ємом  $V = 4$  л містить  $m = 0,6$  г деякого газу під тиском. Визначити середню квадратичну швидкість молекул газу.
- 3.16. Яку кількість молекул  $N$  містить  $m = 20$  г газу, якщо середня арифметична швидкість його молекул при нормальних умовах дорівнює  $\langle v \rangle = 425$  м/с?
- 3.17. Маленькі пилінки, що знаходяться в азоті, рухаються, ніби дуже великі молекули. Маса кожної порошинки  $m_1 = 10^{-10}$  г. Температура газу  $t = 20^\circ\text{C}$ . Знайти середні квадратичні швидкості та середні кінетичні енергії поступального руху молекул азоту та пилинок.
- 3.18. Визначити енергію  $W$  обертального руху молекул, які містяться у  $m = 10$  г водню при температурі  $t = 17^\circ\text{C}$ .
- 3.19. Визначити середню кінетичну енергію  $\langle \epsilon_{\text{об}} \rangle$  обертального руху однієї молекули двоатомного газу, якщо сумарна кінетична енергія молекул одного кіломоля цього газу  $W_k = 3,01$  МДж/кмоль.

- 3.20. Двоатомний газ міститься у посудині об'ємом  $V = 5\text{л}$  під тиском  $p = 520\text{ мм рт.ст.}$  Знайти енергію  $W$  теплового руху його молекул.
- 3.21. Знайти енергію теплового руху  $W$  молекул двоатомного газу масою  $m = 2\text{кг}$ , який знаходиться під тиском  $p = 20\text{кПа}$  і має густину  $\rho = 2\text{кг/м}^3$ .
- 3.22. При якій температурі середня кінетична енергія теплового руху молекули ідеального газу дорівнює  $\langle \epsilon_k \rangle = 6,21 \cdot 10^{-21}\text{Дж}$ ?
- 3.23. У скільки разів енергія теплового поступального руху двоатомної молекули  $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle$ ? більша за енергію її обертального руху  $\langle \epsilon_{\text{обр}} \rangle$ ?
- Зв'язок між атомами вважати жорстким. пост
- 3.24. Яка частина молекул азоту має швидкості  $v$ , які відрізняються від найбільш імовірної  $v_{\text{ім}}$  не більш ніж на  $5\text{м/с}$ ? Температуру вважати рівною  $t = 27^\circ\text{C}$ .
- 3.25. У посудині об'ємом  $V = 10\text{л}$  міститься газ при температурі  $t = 17^\circ\text{C}$  і тиску  $p = 760\text{мм рт.ст.}$  Знайти кількість молекул  $\Delta N$ , швидкості яких лежать у інтервалі від  $v_1 = 1,10 \cdot 10^3\text{м/с}$  до  $v_2 = 1,12 \cdot 10^3\text{м/с}$ .
- 3.26. Визначити температуру кисню, при якій функція розподілу молекул по модулю швидкості  $f(v)$  матиме максимум при швидкості  $v_{\text{зп}} = 920\text{ м/с}$ . Знайти значення середньої арифметичної і середньої квадратичної швидкостей молекул кисню при цій температурі.
- 3.27. Знайти температуру азоту, при якій швидкостям молекул  $v_1 = 300\text{ м/с}$  і  $v_2 = 600\text{ м/с}$  відповідають однакові значення функції розподілу по модулю швидкості  $f(v)$ .
- 3.28. Визначити швидкість молекул аргону, при якій значення функції розподілу по модулю швидкості  $f(v)$  для температури  $T_0 = 300\text{ К}$  буде таким же, як і для температури в  $n = 5$  разів більшою. Молярна маса аргону  $M_1 = 40 \cdot 10^{-3}\text{ кг/моль}$ .
- 3.29. Визначити швидкість молекул ідеального газу, при якій значення функції розподілу по модулю швидкості  $f(v)$  для температури  $T_0$  буде таким самим, як і для температури в  $\eta$  разів більшої.
- 3.30. Визначити тиск повітря  $p$  на висоті  $h = 10\text{км}$  над рівнем моря. Температуру вважати незалежною від висоти і рівною  $t = 0^\circ\text{C}$ .
- 3.31. На якій висоті  $h$  атмосферний тиск повітря  $p$  складає  $50\%$  від тиску на рівні моря? Температуру вважати постійною і рівною  $t = 0^\circ\text{C}$ .
- 3.32. На якій висоті  $h$  над рівнем моря густина кисню  $\rho$  складає  $75\%$  від його густини на рівні моря? Температуру вважати постійною і рівною  $t = 0^\circ\text{C}$ .



## Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь:

1. На ступінь вільності поступального руху молекули припадає енергія

- 1)  $kT$ ;    2)  $\frac{1}{2}kT$ ;    3)  $\frac{3}{2}kT$ ;    4)  $\frac{5}{2}kT$ ;    5)  $\frac{1}{3}kT$ .

2. На обертальний рух двохатомної молекули з жорстким зв'язком припадає доля від всієї кінетичної енергії

- 1)  $1/3$ ;    2)  $2/5$ ;    3)  $3/2$ ;    4)  $1/2$ .

3. На поступальний рух двохатомної молекули з жорстким зв'язком припадає доля від її всієї кінетичної енергії

- 1)  $1/3$ ;    2)  $3/2$ ;    3)  $3/5$ ;    4)  $1/2$ .

4. Трихатомна молекула має жорсткий зв'язок між атомами. На поступальний рух припадає частина від всієї кінетичної енергії

- 1)  $1/2$ ;    2)  $3/5$ ;    3)  $2/5$ ;    4)  $3/7$ .

5. На обертальний рух трихатомної молекули з жорстким зв'язком припадає доля від всієї кінетичної енергії

- 1)  $1/3$ ;    2)  $2/5$ ;    3)  $3/2$ ;    4)  $1/2$ .

6. Якщо об'єм газу зменшити в 3 рази, а середню кінетичну енергію руху його молекул збільшити в 2 рази, то тиск газу

- 1) зменшиться в 1,5 рази;  
2) збільшиться в 1,5 рази;  
3) збільшиться в 3 рази;  
4) зменшиться в 6 разів;  
5) збільшиться в 1,5 рази.

7. Середня швидкість молекули ідеального газу зі зростанням температури:

- 1) не змінюється;    2) обернено пропорційно зменшується;  
3) прямо пропорційно зростає;    4) зростає пропорційно  $\sqrt{\theta}$ .

8. Молекули кисню і водню мають однакові середні квадратичні швидкості поступального руху. Значення швидкості молекул водню після того, як гази перемішали,

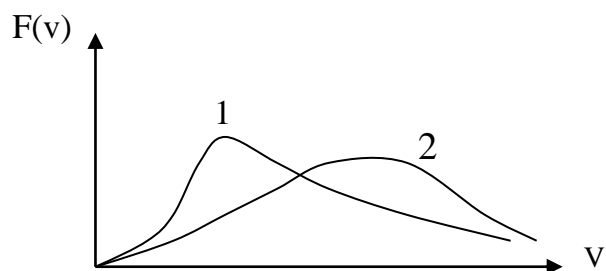
- 1) зростає  
2) зменшується  
3) не змінюється

9. Атмосферне повітря – складається з декількох газів. Середня квадратична швидкість хаотичного руху молекул водню порівняно зі швидкістю молекул азоту при даній температурі повітря буде:

- 1) більшою;    2) такою самою;  
3) меншою;    4) не залежить від природи молекул.

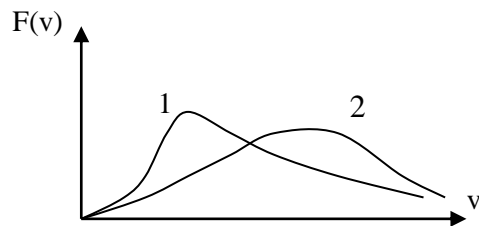
10. На рисунку зображено розподіл Максвелла для газу при різних температурах. Більшій температурі відповідає:

- 1) крива 1;  
2) крива 2;  
3) хід кривих не залежить від температури газу;



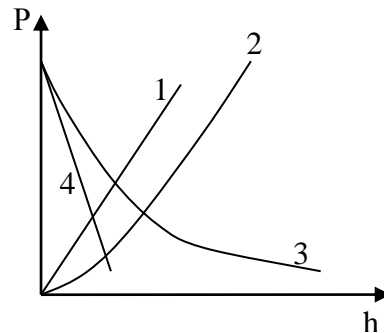
11. На рисунку зображено розподіл Максвелла для різних газів при однаковій температурі. Газу з більшою масою молекул відповідає

- 1) крива 1;
- 2) крива 2;
- 3) хід кривих не залежить від маси молекули газу;



12. Залежність атмосферного тиску від висоти над рівнем моря (барометричну формулу) правильно зображує

- 1) крива 1;
- 2) крива 2;
- 3) крива 3;
- 4) крива 4.



13. Атмосферний тиск із збільшенням висоти над рівнем моря

- 1) зменшується обернено пропорційно;
- 2) не змінюється;
- 3) прямо пропорційно зростає;
- 4) зменшується за експоненціальним законом.

14. Атмосфера Землі складається в основному з кисню і азоту. Якби доля водню та інших легких газів, що входять до складу атмосфери суттєво збільшилась, тиск на висоті  $h$ :

- 1) не змінився;
- 2) зменшився;
- 3) збільшився;
- 4) склад атмосфери не впливає на атмосферний тиск.

(Тиск у поверхні Землі в обох випадках вважати однаковим, а атмосферу — ізотермічною)

15. Атмосфера Землі складається в основному з кисню і азоту. Якби, замість суміші газів, атмосфера складалась з чистого кисню, тиск на висоті  $h$ :

- 1) не змінився;
- 2) зменшився;
- 3) збільшився ;
- 4) склад атмосфери не впливає на атмосферний тиск

(Тиск у поверхні Землі в обох випадках вважати однаковим, а атмосферу — ізотермічною)

16. Установити відповідність:

#### Вид рівняння

1. Основне рівняння МКТ
2. Рівняння стану ідеального газу
3. Рівняння Пуассона
4. Рівняння Бойля – Маріотта

#### Формула

- А.  $PV = \text{const}$
- Б.  $PV^\gamma = \text{const}$
- В.  $PV = \frac{2}{3} W_k$
- Г.  $PV = \frac{m}{M} RT$

## РОЗДІЛ 4. ПРОЦЕСИ ПЕРЕНОСУ В ГАЗАХ

**Тема:** Основні кінематичні характеристики молекулярного руху: середня довжина вільного пробігу та середнє число зіткнень за одиницю часу. Явища переносу – дифузія, в'язкість, теплопровідність та їх рівняння і кінетичні коефіцієнти.

### Основні поняття і формули

В процесі хаотичного руху молекули переносять із однієї точки об'єму газу у другу характерні для них значення енергії, маси, імпульсу. При наявності у просторі градієнтів температури, густини речовини, або якщо межують шари рідини або газу, що рухаються з різними швидкостями, виникають процеси вирівнювання цих неоднорідностей, які об'єднуються загальною назвою – явища переносу.

До явищ переносу належать:

- дифузія (обумовлена переносом маси);
- теплопровідність (обумовлена переносом енергії);
- внутрішнє тертя або в'язкість (обумовлена переносом імпульсу).

Ці явища виникають внаслідок порушення повної хаотичності руху молекул. Для газів це означає відхилення від формули Максвелла для розподілу молекул газу за швидкостями.

### Основні кінематичні характеристики молекулярного руху.

Швидкості молекул дуже великі – порядку сотень метрів в секунду (при кімнатних температурах). Можна припустити, що всі процеси, які відбуваються в газах (вирівнювання температур, розповсюдження запахів і т. ін.) повинні здійснюватись з великою швидкістю. Але практика свідчить про інше. Причина в тому, що при русі в газі молекули внаслідок зіткнень між собою змінюють напрям свого руху, траєкторії руху молекул газу – ламані лінії (рис.4.1), що й приводить до уповільнення процесів переносу.

При кількісному аналізі процесів переносу основними кінематичними характеристиками молекулярного руху є:

- ефективний діаметр молекул;
- ефективний переріз;
- частота зіткнень;
- середня довжина вільного пробігу.

● **Ефективний діаметр молекули  $d_{\text{ef}}$**  – мінімальна відстань, до якої наближаються при зіткненні центри двох молекул.

● **Ефективний переріз  $\sigma$**  – площа мішені, в яку повинен попасти центр молекули для зіткнення з даною молекулою. Тобто ефективний переріз –

це площа кола, радіус якого дорівнює ефективному діаметру молекули:  
 $\sigma = \pi d_{\text{еф}}^2$ .

Це уявна, а не геометрична площа, яка надає ймовірність зіткнення з конкретним результатом. Вона обирається такою, щоб ймовірність результату зіткнень дорівнювала ймовірності того, що частинка, рухаючись прямолінійно, без взаємодії попадає в площадку  $\sigma$ .

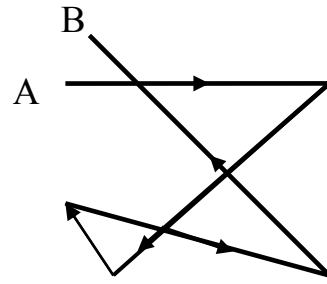


Рис. 4.1.

• **Середня довжина вільного пробігу  $\langle \lambda \rangle$ .**

Відстань, яку молекула проходить від зіткнення до зіткнення може бути великою або малою. Однак, внаслідок хаотичності руху середнє значення цієї величини  $\langle \lambda \rangle$ , яке називають **середньою довжиною вільного пробігу** молекул, для даного стану газу є постійною. Отже, за означенням середня довжин вільного пробігу дорівнює:

$\langle l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i$  ( $N$  – число відрізків ламаної траєкторії молекули, довжина яких -  $l_i$ ). Фактично  $\langle l \rangle$  – це довжина шляху, при якому ймовірність зіткнення молекули з деякою іншою дорівнює одиниці.

Середня довжина вільного пробігу молекули дорівнює

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_{\text{еф}}^2 n} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma n}, \quad (4.1)$$

де  $\sigma$  – ефективний переріз;  $n$  – концентрація молекул.

З (4.1) випливає, що довжина вільного пробігу молекул обернено пропорційна концентрації молекул і ефективному перерізу. Ефективний переріз зменшується при збільшенні температури, оскільки молекули внаслідок збільшення швидкості можуть наближатися на меншу відстань одна до одної.

В ізотермічному процесі спостерігається простий зв'язок між  $\langle l \rangle$  і тиском  $p$ , який може бути отриманим за допомогою рівняння  $p = nkT$ :

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} p \sigma}. \quad (4.2)$$

• Частинка, яка налітає на інші частинки, рухається із середньою швидкістю  $\langle v \rangle$  і проходить довжину вільного пробігу за час  $\langle \tau \rangle = \langle l \rangle / \langle v \rangle$ . Тому **середнє число зіткнень  $\langle z \rangle$**  кожної молекули з іншими в одиницю часу дорівнює

$$\langle z \rangle = \langle v \rangle / \langle l \rangle. \quad (4.3)$$

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} n \langle v \rangle \pi d_{\text{еф}}^2 = \sqrt{2} n \langle v \rangle \sigma. \quad (4.4)$$

## Рівняння переносу

- Маса  $\Delta M$  газу, яка переноситься внаслідок дифузії через площадку  $\Delta S$ , перпендикулярну до напрямку дифузії, за час  $\Delta t$  визначається законом Фіка (рівнянням дифузії), який в одновимірному випадку має вигляд:

$$\Delta M = -D \frac{\Delta n}{\Delta x} \Delta S \Delta t m_0, \quad (4.5)$$

де  $\frac{\Delta n}{\Delta x}$  – градієнт концентрації молекул певного сорту;  $D$  – коефіцієнт дифузії;  $m_0$  – маса однієї молекули.

Градієнт концентрації – вектор, напрям якого указує напрям найбільш швидкого зростання концентрації у просторі, а величина дорівнює похідній по координаті в цьому напрямі.

У рівнянні (4.5) припущено, що градієнт концентрації направлений у позитивному напрямку вісі  $OX$ . У загальному випадку  $\text{grad } n$  (або  $\nabla n$ )

$$\text{дорівнює } \nabla n = \frac{\partial n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial n}{\partial z} \vec{k}.$$

Знак "–" у формулі (4.5) показує, що перенос маси відбувається у напрямку, протилежному напрямку градієнту концентрації. При цьому концентрація усього газу, а не виділеної компоненти, повинна бути однаковою по всьому об'єму. Інакше перенос газу буде обумовлений не тільки дифузією, але й різницею тиску в різних частинах об'єму. І рівняння (4.5) не буде надавати повний потік частинок.

Коефіцієнт дифузії  $D$  – фізична величина, яка характеризує властивості речовини і чисельно дорівнює її масі, яка переноситься через одиницю поверхні, перпендикулярної до напрямку дифузійного потоку, за одиницю часу при градієнті густини  $\frac{\Delta(nm_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta \rho}{\Delta x}$ , який дорівнює одиниці.

Коефіцієнт дифузії газу  $D$  є пропорційним середній арифметичній швидкості молекул  $\langle v \rangle$  та їх середній довжині вільного пробігу  $\langle l \rangle$ :

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle. \quad (4.6)$$

- Сила  $F$  внутрішнього тертя (в'язкості), що діє між шарами газу або рідини виражається рівнянням Ньютона:

$$F = -\eta \frac{\Delta v}{\Delta z} \Delta S, \quad (4.7)$$

де  $\Delta v / \Delta z$  – градієнт швидкості течії газу у напрямку, перпендикулярному до  $\Delta S$ , тобто відношення зміни швидкості  $\Delta v$  двох шарів газу, які знаходяться на відстані  $\Delta z$  до величини цієї відстані;  $\eta$  – коефіцієнт внутрішнього тертя

або динамічний коефіцієнт в'язкості;  $\Delta S$  – площа шарів газу, між якими діє сила внутрішнього тертя.

Формула (4.7) визначає (у відповідності з третім законом Ньютона) модуль двох протилежно направлених сил, з якими шари діють один на одного вздовж поверхні  $\Delta S$ .

Коефіцієнт внутрішнього тертя  $\eta$  – фізична величина, яка характеризує властивості речовини і чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, яка діє на одиницю площини дотику шарів при одиничному градієнті швидкості.

Коефіцієнт внутрішнього тертя  $\eta$  є пропорційним густині газу  $\rho$ , середній арифметичній швидкості молекул  $\langle v \rangle$  та їх середній довжині вільного пробігу  $\langle l \rangle$ :

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \rho . \quad (4.8)$$

Поряд з динамічною в'язкістю використовують також кінематичну в'язкість  $\nu$ , яка дорівнює динамічній в'язкості, віднесеній до густини:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} . \quad (4.9)$$

- Кількість теплоти  $\Delta Q$ , яка переноситься внаслідок теплопровідності через площадку  $\Delta S$  за час  $\Delta t$ , визначається законом Фур'є (рівнянням теплопровідності), який в одновимірному випадку має вигляд:

$$\Delta Q = - \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \Delta S \Delta t , \quad (4.10)$$

де  $\Delta Q$  – кількість теплоти, яка переноситься за час  $\Delta t$  крізь площадку  $\Delta S$ ;  $\Delta T / \Delta x$  – градієнт температури;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

Знак "–" показує, що перенос теплоти відбувається у напрямку, протилежному напрямку градієнту температури, який спрямований у бік максимального зростання температури.

Коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  – фізична величина, яка характеризує властивості речовини і чисельно дорівнює кількості теплоти, яка переноситься через одиницю поверхні, перпендикулярної до напрямку теплового потоку, за одиницю часу при градієнті температури, який дорівнює одиниці.

У випадку газу коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  є пропорційним питомій теплоємності газу, густині газу  $\rho$ , середній арифметичній швидкості молекул  $\langle v \rangle$  та їх середній довжині вільного пробігу  $\langle l \rangle$ :

$$\lambda = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \cdot \rho \cdot c_v , \quad (4.11)$$

## Методичні вказівки

- При застосування рівнянь переносу для розв'язування задач слід пам'ятати, що рівняння (4.5), (4.7), (4.10) справедливі тільки в одновимірному випадку, коли градієнти відповідних параметрів системи направлені вздовж певної осі координат. При довільному напрямку градієнту рівняння переносу мають більш складний вигляд.

- Вирази (4.6), (4.8), (4.11) для коефіцієнтів, які характеризують відповідні явища переносу, отримані для ідеальних газів. Із них можна отримати простий зв'язок, який існує між коефіцієнтами:

$$\lambda = \eta c_v; \quad (4.12)$$

$$D = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\lambda}{c_v \rho}. \quad (4.13)$$

Це дозволяє за значенням одного з них визначити інший. Наявність зв'язку між коефіцієнтами процесів переносу обумовлена однаковістю фізичної природи процесів і тим, що їх описують рівняння одного виду.

Розмірності коефіцієнтів:  $[D] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ ;  $[\eta] = [\text{Па} \cdot \text{с}] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$ ;  $[\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{К} \cdot \text{м}}$ .

- Коефіцієнти динамічної в'язкості  $\eta$  і теплопровідності  $\lambda$ , у вирази яких входить добуток  $\langle l \rangle \cdot \rho$ , не залежать від густини, а також від тиску, оскільки  $\langle l \rangle$  є обернено пропорційним тиску, а  $\rho$  – прямо пропорційним. Це справедливо, доки  $\langle l \rangle$  є малим, порівняно з деяким характерним розміром  $d$  (наприклад, розмірами посудини при теплопровідності, або діаметром труби, по якій тече газ). Коли значення  $\langle l \rangle$  внаслідок зниження тиску наближається до  $d$ , довжина вільного пробігу перестає залежати від тиску, а  $\eta$  і  $\lambda$  зменшуються зі зменшенням тиску.

Саме такий стан газу, при якому довжина вільного пробігу молекул у посудині досягає його розмірів (відстані між протилежними стінками) називають фізичним вакуумом.

Незалежність названих коефіцієнтів від густини також порушується при великих значеннях густини газу, коли розмірами молекул не можна знехтувати порівняно з середньою довжиною вільного пробігу.

Залежність кінетичних коефіцієнтів  $\eta$  і  $\lambda$  від температури визначається в основному залежністю від неї середньої швидкості. Оскільки  $\langle v \rangle$  пропорційно  $\sqrt{T}$ , то динамічна в'язкість і теплопровідність зростають приблизно прямо пропорційно кореню квадратному від температури, якщо знехтувати невеликим зростом, зв'язаним зі зменшенням ефективного перерізу, яке приводить до зростання  $\langle l \rangle$ .

- Формула (4.6) коефіцієнту дифузії є справедливою у випадку дифузії «помічених» деяким способом молекул даного газу в середовищі інших молекул того самого газу (самодифузії). Вона також є приблизно вірною і

для випадку дифузії двох газів з близькими значеннями відносної молекулярної маси і ефективних діаметрів молекул.

У випадку взаємної дифузії газів, що сильно розрізняються значеннями указаних параметрів, формула не є справедливою і набуває більш складного вигляду.

При постійній температурі швидкість  $\langle v \rangle$  є постійною,  $\langle l \rangle$  є обернено пропорційним тиску. Тобто і коефіцієнт дифузії  $D$  при постійній температурі є обернено пропорційним тиску  $p$ . З іншого боку, при фіксованому значенні тиску  $\langle v \rangle$  зростає пропорційно  $\sqrt{T}$ , а  $\langle l \rangle$  пропорційно  $T$ , отже при постійному тиску  $D$  є пропорційним  $T^{\frac{3}{2}}$ .

**Приклад 4.1.** Визначити середню довжину вільного пробігу  $\langle l \rangle$  молекул азоту при нормальних умовах, а також середнє число зіткнень  $\langle z \rangle$  молекули за одну секунду при даних умовах.

$T=273 \text{ K}$ $p=10^5 \text{ Па}$ $d_{\text{еф}}=3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ $k=1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ <hr/> $\langle l \rangle$ -?	Розв'язання Середню довжину вільного пробігу молекул можна визначити за допомогою співвідношення (4.1): $\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_{\text{еф}}^2 n}, \quad (1)$ де $d_{\text{еф}}$ - ефективний діаметр молекули
--	--

знаходимо із таблиць;  $n$  – концентрація молекул при даних умовах.

Концентрацію молекул можна зв'язати з параметрами стану газу за допомогою рівняння (2.11):

$$p = nkT, \text{ звідки } n = \frac{p}{kT}, \quad (2)$$

де  $p$  – тиск газу;  $T$  – термодинамічна температура;  $k$  – постійна Больцмана.

Підставимо (2) у (1):

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d_{\text{еф}}^2 p}. \quad (3)$$

$$\langle l \rangle = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 10^5} = 9,52 \cdot 10^{-8} \text{ (м)}.$$

$$[\langle l \rangle] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{м}^2}{\text{К} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Н}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Середнє число зіткнень кожної молекули за 1 секунду можна визначити за формулою (4.3)



$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}, \quad (4)$$

де  $\langle v \rangle$  – середня арифметична швидкість теплового руху молекул;  $\langle l \rangle$  – середня довжина вільного пробігу молекул, яку вже визначено за формулою (3).

Середню арифметичну швидкість молекул знайдемо за допомогою формули (3.13).

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 4,54 \cdot 10^2 \text{ м/с.}$$

Підставимо значення  $\langle l \rangle$  і  $\langle v \rangle$  у формулу (4):  $\langle z \rangle = \frac{4,54 \cdot 10^2}{9,52 \cdot 10^{-8}} = 4,77 \cdot 10^9 \text{ (с}^{-1}\text{)}$

Відповідь:  $\langle l \rangle = 9,52 \cdot 10^{-8} \text{ м; } \langle z \rangle = 4,77 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ .

**Приклад 4.2.** Знайти число зіткнень, які відбуваються на протязі секунди між усіма молекулами водню, які знаходяться в об'ємі  $1 \text{ мм}^3$  при нормальних умовах. Прийняти для водню  $d_{\text{еф}} = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ .

#### Розв'язання

Середнє число зіткнень однієї молекули за секунду надає формула (4.4):

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} n \langle v \rangle \pi d_{\text{еф}}^2. \quad (1)$$

Якщо  $\langle z \rangle$  помножити на число усіх молекул  $N$ , то отримаємо результат, удвічі більший за шукану величину  $z$ . Дійсно, в одному зіткненні приймають участь одразу дві молекули, тому в число  $(z \cdot N)$  кожне зіткнення входить двічі. Отже

$$z = \frac{\langle z \rangle N}{2}. \quad (2)$$

Якщо  $n$  – кількість молекул в одиниці об'єму, то  $N = nV$ . (3)

Концентрацію молекул визначаємо із рівняння  $p = nkT$ :  $n = \frac{p}{kT}$ . (4)

Середня швидкість теплового руху молекул  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ . (5)

Підставляємо у формулу (2) вирази (1) та (3)-(5) і отримуємо

$$z = \frac{\sqrt{2} \pi d_{\text{еф}}^2 p^2 V}{2 k^2 T} \cdot \sqrt{\frac{8R}{\pi M T}}. \quad (6)$$

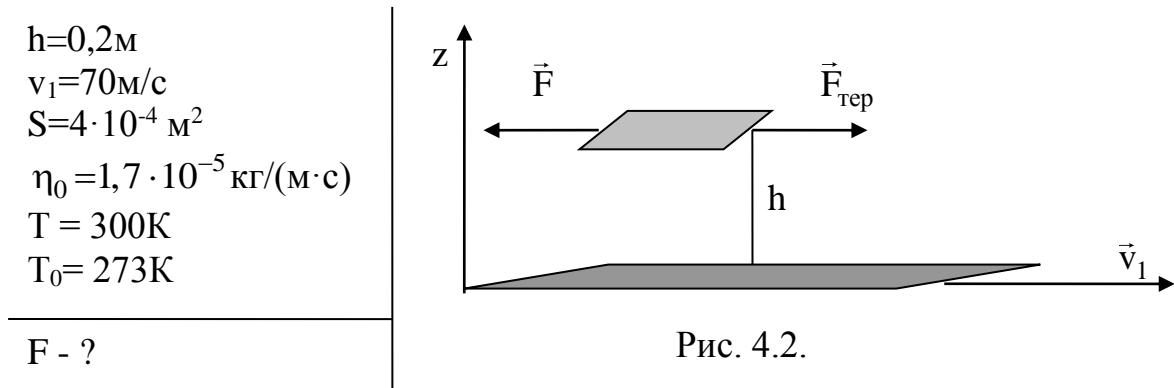
Підстановка даних задачі та значень постійних  $k$  і  $R$  дає

$$z = \frac{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 2,3^2 \cdot 10^{-20} \cdot 1,013^2 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{8 \cdot 8,31}}{2 \cdot 1,38^2 \cdot 10^{-46} \cdot 273 \sqrt{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 273}} = 1,6 \cdot 10^{26} \text{ с}^{-1}.$$

$$[z] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Н}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{К}^2}{\text{м}^4 \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{К}} \left( \frac{\text{Дж} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К}^2 \cdot \text{кг}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{Н}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{К} \cdot \text{м}}{\text{Н}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Відповідь:  $z = 1,6 \cdot 10^{26} \text{ с}^{-1}$ .

**Приклад 4.3.** На висоті  $h=20\text{см}$  над горизонтальною стрічковою трансмісією, яка рухається зі швидкістю  $v_1=70\text{м/с}$ , паралельно до неї підвішена пластинка площиною  $S=4\text{см}^2$  (див. рис.4.2). Яку силу слід прикласти до цієї пластинки, щоб вона залишалася нерухомою? В'язкість повітря при нормальних умовах  $\eta_0=1,7 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$ . В умовах досліду температура  $t=27^\circ\text{C}$ , тиск атмосферний.



Розв'язання

Пластинка залишиться нерухомою, якщо прикладена до неї сила  $\vec{F}$  і сила тертя  $\vec{F}_{\text{тер}}$ , що діє збоку рухомих шарів повітря, будуть скомпенсовані.

$\vec{F} = -\vec{F}_{\text{тер}}$ , а за модулем сили є рівними:  $F = F_{\text{тер}}$ .

Силу внутрішнього тертя виражаємо з рівняння Ньютона (4.7):

$$F_{\text{тер}} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} S. \quad (1)$$

При атмосферному тиску середня довжина вільного пробігу  $\langle l \rangle \ll h$ , тому для визначення динамічної в'язкості  $\eta$  можна скористатися формулою (4.8)

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \rho, \quad (2)$$

де

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}; (3) \quad \langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_{\text{еф}}^2 n}; (4) \quad \rho = m_0 n = \frac{M \cdot n}{N_A}. (5)$$

Підставляємо вирази (3) – (5) у формулу (2) і отримуємо

$$\eta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_{\text{еф}}^2 n} \cdot \frac{M \cdot n}{N_A} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_{\text{еф}}^2} \cdot \frac{M}{N_A} . \quad (6)$$

Аналогічно при нормальних умовах:

$$\eta_0 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_{\text{еф}}^2} \cdot \frac{M}{N_A} . \quad (7)$$

Діленням виразу (6) на (7) отримаємо  $\frac{\eta}{\eta_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}$ , звідки  $\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$  (8)

Підставляємо вираз (8) у формулу (10) і визначаємо силу F:

$$F_{\text{тер}} = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \cdot \frac{v_1}{h} S .$$

Обчислення дає

$$F = 1,7 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{\frac{300}{273}} \cdot \frac{70}{0,2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

$$[F] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \cdot \left( \frac{\text{К}}{\text{К}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\text{м} \cdot \text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \text{Н.}$$

Відповідь:  $F = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$

**Приклад 4.4.** Коефіцієнт внутрішнього тертя азоту при нормальних умовах дорівнює  $\eta = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ . Знайти коефіцієнт дифузії азоту D при цих умовах.

$\eta = 1,78 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ $P = 10^5 \text{ Па}$ $T = 273 \text{ К};$ $R = 8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$ $M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / \text{моль}$	<p>Розв'язання</p> <p>Скористаємося формулами (4.6) і (4.8) для коефіцієнтів D і <math>\eta</math></p>
$D - ?$	$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle ; \quad (1)$
	$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle \rho , \quad (2)$

де  $\langle v \rangle$  – середня арифметична швидкість теплового руху молекул;

$\langle l \rangle$  – середня довжина вільного пробігу молекул;  $\rho$  – густина газу.

З порівняння (1) і (2) випливає, що  $\eta = D\rho$ . (3)

Таким чином, для знаходження коефіцієнту дифузії азоту треба знайти його густину при нормальних умовах. З цією метою скористаємося

рівнянням Менделєєва – Клапейрона (2.9):  $PV = \frac{m}{M} RT$  . (4)

За означенням густина речовини  $\rho = m/V$ , тому виразимо звідси  $m$  і підставимо у (4):  $PV = \rho \cdot V \cdot \frac{RT}{M}$ , звідки  $\rho = \frac{PM}{RT}$ . (5)

Тоді рівняння (3) з урахуванням співвідношення (5) приймає вигляд:  
 $\eta = \frac{DPM}{RT}$ , звідки  $D = \frac{\eta RT}{PM}$ .

$$D = \frac{1,78 \cdot 10^{-5} \cdot 8,31 \cdot 273}{10^5 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$[D] = \frac{H \cdot c / \text{г}^2 \cdot \text{м}^2 / (\text{г} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2) \cdot \text{с}}{\text{г} / \text{г}^2 \cdot \text{м}^3 / (\text{г} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^2)} = \frac{\text{г} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{г} \cdot \text{м}^3} = \text{м}^2/\text{с}$$

Відповідь:  $D = 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

**Приклад 4.5.** Проміжок між двома концентричними сферами заповнений однорідною ізотропною речовиною. Радіуси сфер дорівнюють:  $R_1 = 10\text{см}$  і  $R_2 = 12\text{см}$ . Поверхня внутрішньої сфери підтримується при температурі  $T_1 = 320\text{К}$ , поверхня зовнішньої сфери – при температурі  $T_2 = 300\text{К}$ . За цими умовами від внутрішньої сфери до зовнішньої установлюється потік тепла  $\frac{dQ}{dt} = 2,00\text{кВт}$ . Вважаючи, що коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  речовини у

проміжку не залежить від температури, визначити: а) значення  $\lambda$ ;  
 б) залежність температури у проміжку від відстані  $r$  до центра сфери –  $T(r)$ .

$R_1 = 0,10\text{м}$ $R_2 = 0,12\text{м}$ $T_1 = 320\text{К}$ $T_2 = 300\text{К}$ $\frac{dQ}{dt} = 2,0\text{кВт}$	Розв'язання
	а) Оскільки за умовою задачі температура залежить тільки від відстані до центра сфери, згідно рівнянню (4.10) потік тепла через сферичну поверхню може бути вираженим як
$\lambda, T(r) - ?$	$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \frac{dT}{dr} S, \quad (1)$

де площа поверхні  $S = 4\pi r^2$  (2).

У якості радіуса  $r$  сферичної поверхні приймаємо радіус зовнішньої сфери  $R_2$ . З рівняння (1) знаходимо коефіцієнт теплопровідності речовини

$$\lambda = -\frac{dQ}{dt} \frac{\Delta R}{4\pi R_2^2 \Delta T} = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{R_2 - R_1}{4\pi R_2^2 (T_2 - T_1)}$$

$$\lambda = -2 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,02}{4 \cdot 3,14 \cdot (300 - 320)} = 13,3 \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$$

$$[\lambda] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

б) З рівняння (1) з урахуванням виразу (2) для площі поверхні виражаємо зміну температури  $dT$  при зміні відстані від  $r$  до  $r + dr$ :

$$dT = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \cdot \frac{dr}{r^2}. \quad (3)$$

Проводимо інтегрування виразу (3) у межах від значень  $T_1$ ,  $R_1$ , які відповідають внутрішній сфері до значень  $T$  і  $r$ , які відповідають довільній точці на відстані  $r$  від центру концентричних сфер.

$$\int_{T_1}^T dT = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \int_{R_1}^r \frac{dr}{r^2}.$$

$$\text{Тобто } T - T_1 = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \left( -\frac{dr}{r} \right) \Big|_{R_1}^r = -\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right),$$

$$\text{Звідки } T = T_1 - \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right). \quad (4)$$

$$T = 320 - \frac{2 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 13,3} \left( \frac{1}{0,1} - \frac{1}{r} \right) = 320 - 120 + \frac{12}{r} = 200 + \frac{12}{r}.$$

$$\text{Відповідь: } \lambda = 13,3 \frac{\text{Аò}}{\text{Ê · ì}}; \quad T = \left( 200 + \frac{12}{r} \right) \text{К}.$$

**Приклад 4.6.** При заповненні посудини Дюара рідким азотом за деякий час випарилась маса  $M_1 = 20$  г. Яка маса  $M_2$  випариться за той самий час з тієї самої посудини, якщо її заповнити воднем? Температура кипіння рідкого азоту при атмосферному тиску дорівнює 77,3 К, водню – 20,4 К. Температуру оточуючого середовища прийняти рівною 300 К.

$m_1 = 0,02 \text{ кг}$ $T_1 = 77,3 \text{ К}$ $T_2 = 20,4 \text{ К}$ $T_0 = 300 \text{ К}$ $L_1 = 199 \text{ кДж/кг}$ $L_2 = 448 \text{ кДж/кг}$ $m_2 = ?$	<p style="text-align: center;"><b>Розв'язання</b></p> <p>Посудини Дюара, в яких зберігають зріджені гази, це скляні або металеві колби з подвійними стінками. З простору між стінками для зменшення теплопровідності відкачують повітря до високого вакууму: <math>(10^{-3} - 10^{-5})</math> мм рт. ст. Молекули повітря, що залишаються, переносять тепло від оточуючого середовища до рідини, що приводить до поступового википання зрідженого газу, внаслідок чого його температура залишається незмінною. Щоб запобігти вибуху посудини внаслідок зростання тиску газу, що випаровується, шийку посудини Дюара тримають відкритою для виходу газу в атмосферу.</p> <p>Між стінками посудини створений фізичний вакуум: молекули проходять відстань між стінками без зіткнень. Тому формула (4.10), яка</p>
---	---

виводиться у припущенні зіткнень між молекулами газу, не може бути використана.

Для оцінки величини потоку тепла від зовнішньої стінки посудини Дюара до внутрішньої холодної стінки припустимо, що кожна молекула повітря, яка покидає стінку, має відповідну температурі стінки енергію. При зіткненні з протилежною стінкою молекула повністю віддає свою енергію, тобто зіткнення носять непружний характер.

Температуру зовнішньої стінки  $T_0$  будемо вважати рівною температурі оточення. Температура внутрішньої стінки дорівнює температурі кипіння  $T_1$ . Потік енергії  $Q_0$ , який переносять молекули повітря від гарячої стінки до холодної, пропорційний кількості молекул, які покидають гарячу стінку за одиницю часу, та енергії молекули

$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{i}{2} k T_0$  (1). Число таких молекул є пропорційним концентрації  $n_0$  молекул, які мають температуру гарячої стінки, та їх середній швидкості

$\langle v_0 \rangle = \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}}$  (2). З іншого боку, кількість цих молекул дорівнює числу молекул, які прилітають до гарячої стінки від холодної:

$$n_1 \langle v_1 \rangle S = n_0 \langle v_0 \rangle S, \quad (3)$$

де  $n_1$  – концентрація молекул, що мають температуру холодної стінки;

$\langle v_1 \rangle = \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}}$  (4) – їх середня швидкість;  $S$  – площа кожної з поверхонь посудини (невеликою різницею між внутрішньою і зовнішньою площинами нехтуємо).

Потік енергії  $Q_1$  визначається аналогічно потоку  $Q_0$ . Тоді потік тепла  $Q$  від гарячої стінки до холодної, який дорівнює різниці потоків енергії має значення:

$$Q = Q_0 - Q_1 = n_0 \langle v_0 \rangle S \cdot \frac{i}{2} k T_0 - n_1 \langle v_1 \rangle S \cdot \frac{i}{2} k T_1.$$

З урахуванням співвідношення (3) та формули (4) останньому виразу можна надати вигляду

$$Q = n_1 \langle v_1 \rangle S \cdot \frac{i}{2} k (T_0 - T_1) = n_1 S \cdot \frac{i}{2} k \cdot \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}} (T_0 - T_1),$$

або, якщо комбінацію постійних величин означити через  $C$ ,

$$Q = C n_1 \sqrt{T_1} (T_0 - T_1). \quad (5)$$

Концентрацію молекул  $n_1$  виразимо через повну концентрацію молекул повітря між стінками  $n$ , яка дорівнює  $n = n_0 + n_1$  з урахуванням

співвідношень (2)-(5):  $n = n_1 + n_0 = n_1 + \frac{n_1 \langle v_1 \rangle}{\langle v_0 \rangle} = n_1 + n_1 \sqrt{\frac{T_1}{T_0}}.$

$$\text{Звідки } n_1 = \frac{n}{1 + \sqrt{\frac{T_1}{T_0}}}. \quad (6)$$

Остаточно для потоку тепла (5) отримуємо:

$$Q = \frac{Cn\sqrt{T_1}}{1 + \sqrt{\frac{T_1}{T_0}}}(T_0 - T_1) = Cn\sqrt{T_0T_1}(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}).$$

За рахунок цього потоку тепла за одиницю часу випаровується маса зрідженого газу  $m_1$ , яка дорівнює  $m_1 = \frac{Cn}{L_1}\sqrt{T_0T_1}(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1}), \quad (7)$

де  $L_1$  – питома теплота випаровування.

Співвідношення (7) буде справедливим для будь-якого іншого зрідженого газу з температурою кипіння  $T_2$  і питомою теплотою випаровування  $L_2$ . Тому для відношення мас різних газів, які випаровуються за однаковий час з тієї самої посудини Дюара, отримуємо

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \frac{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_2})}{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1})}.$$

$$\text{Звідки } m_2 = \frac{m_1 L_1}{L_2} \cdot \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \frac{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_2})}{(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_1})}.$$

$$m_2 = 0,02 \cdot \frac{199 \cdot 10^3}{448 \cdot 10^3} \cdot \sqrt{\frac{20,4}{77,3}} \cdot \frac{\sqrt{300} - \sqrt{20,4}}{\sqrt{300} - \sqrt{77,3}} = 6,85 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

Відповідь:  $m_2 = 6,85 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$

**Зауваження.** Маса водню, який википає з посудини Дюара, менша за масу азоту, хоча температура кипіння водню є нижчою. Проте, швидкість википання за об'ємом у водню вища. Якщо від відношення мас перейти до відношення об'ємів, скориставшись значеннями густини рідкого азоту ( $\rho_1=0,8\text{кг/м}^3$ ) і рідкого водню ( $\rho_2=0,07\text{кг/м}^3$ ), отримуємо:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{6,85 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0,8}{0,07} = 3,9 \text{ (разів)}.$$

Тобто водень википає приблизно учетверо швидше азоту.

### Задачі для самостійного розв'язування

4.1. Визначити середню довжину вільного пробігу  $\langle l \rangle$  молекул водню при температурі  $t = 27^\circ\text{C}$  і тиску  $P = 1\text{мм рт.ст.}$

4.2. Знайти кількість зіткнень  $\langle z \rangle$  за одну секунду молекул газу, якщо при даних умовах середня квадратична швидкість його молекул дорівнює

$v_{\text{кв}}=500\text{м/с}$ , а середня довжина вільного пробігу молекули  $\langle l \rangle = 5\text{мкм}$ .

4.3. Оцініть число ударів молекул повітря о поверхню віконного скла площиною  $S=1\text{м}^2$  з боку аудиторії за інтервал часу  $\Delta t=1\text{с}$ . Температура повітря в аудиторії  $t=27^\circ\text{C}$ , тиск  $p=10^5\text{Па}$ , молярна маса повітря  $M=0,029\text{кг/моль}$ .

4.4. Довжина вільного пробігу молекул водню за нормальних умов  $\langle l \rangle=1,28 \times 10^{-5}\text{см}$ . Знайти ефективний діаметр молекули водню  $d_{\text{еф}}$ .

4.5.  $\nu=5$  молів повітря знаходяться у посудині об'ємом  $V=2\text{л}$ . Знайти середню довжину вільного пробігу  $\langle l \rangle$  молекул повітря в цих умовах. Ефективний діаметр молекули повітря прийняти рівним  $d_{\text{еф}} = 0,3 \cdot 10^{-9}\text{м}$ .

4.6. Вичислити середню довжину  $\langle l \rangle$  вільного пробігу молекул хлору при температурі  $t=0^\circ\text{C}$  і тиску  $p=1,5 \cdot 10^5\text{Па}$ . Ефективний діаметр молекули хлору  $d_{\text{еф}} = 3,5 \cdot 10^{-10}\text{м}$ .

4.7. При якому тиску  $p$  повітря, що знаходиться при температурі  $t=27^\circ\text{C}$ , середня довжина вільного пробігу його молекул складає  $\langle l \rangle=7,93 \times 10^{-3}\text{м}$ ? Ефективний діаметр молекули повітря прийняти рівним  $d_{\text{еф}} = 0,3\text{нм}$ .

4.8. Середня довжина вільного пробігу молекул водню за нормальних умов складає  $\langle l \rangle=0,1\text{мкм}$ . Визначити середню  $\langle l_1 \rangle$  їх вільного пробігу при тиску  $p=0,1\text{мПа}$ , якщо температура газу залишиться постійною.

4.9. Знайти середню довжину вільного пробігу  $\langle l \rangle$  молекул азоту, що знаходиться в колбі діаметром  $D=20\text{см}$  при тиску  $P=100\text{мкПа}$  і температурі  $T=280\text{К}$ . Чи можна вважати, що в колбі створений високий вакуум? Ефективний діаметр молекули азоту  $d_{\text{еф}} = 0,38\text{нм}$ .

4.10. Кисень знаходиться при  $t=0^\circ\text{C}$  в посудині з характерним розміром  $L=10\text{мм}$ . Знайти тиск  $p$  газу, нижче за який середня довжина вільного пробігу молекул  $\langle l \rangle > L$ , і відповідну цьому тиску концентрацію молекул кисню. Ефективний діаметр молекули кисню  $d_{\text{еф}} = 3,6 \cdot 10^{-10}\text{м}$ .

4.11. У скільки разів середня довжина  $\langle l \rangle$  вільного пробігу молекул азоту, що знаходиться за нормальних умов, більше середньої відстані  $\langle L \rangle$  між його молекулами? Ефективний діаметр молекули азоту  $d_{\text{еф}} = 0,38\text{нм}$ .

4.12. Тиск при вакуумі в рентгенівській трубці складає  $p=10^{-6}\text{мм рт.ст.}$  при температурі  $t=15^\circ\text{C}$ . У скільки разів довжина  $\langle l \rangle$  вільного пробігу електронів у цих умовах більше відстані  $L=50\text{мм}$  між катодом і антикатодом у трубці? Прийняти, що середня довжина вільного пробігу електронів у газі в  $\eta=5,7$  раз більше, ніж середня довжина вільного пробігу





## РОЗДІЛ 5. ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ. ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ

**Тема:** Перший закон термодинаміки. Застосування рівняння першого закону термодинаміки до ідеальних газів. Внутрішня енергія, теплоємність ідеального газу. Робота ідеального газу в різних процесах.

### Основні поняття і формули

- **Внутрішня енергія термодинамічної системи і способи її зміни.** Термодинамічна система може складатися із речовини у твердому, рідкому або газоподібному стані. Повна енергія такої системи складається з механічної енергії системи як цілого, внутрішньої енергії сукупності частинок, що хаотично рухаються та взаємодіють між собою, і енергії ядерної взаємодії нуклонів атомів системи.

З точки зору термодинаміки **внутрішня енергія системи – сума кінетичної енергії хаотичного руху частинок, що входять до неї і потенціальна енергія їх взаємодії.**

- Термодинаміка розрізняє два способи обміну енергією між закритою системою і зовнішніми тілами:

- шляхом здійснення системою (або над системою) роботи;
- шляхом теплообміну.

Здійснення роботи обов'язково зв'язано з переміщенням зовнішніх тіл, які діють на систему, і супроводжується макроскопічними переміщеннями частин системи: може змінюватися взаємне положення частин системи, її розміри. Виконання роботи може привести до зміни будь-якого виду енергії системи (внутрішньої, механічної).

Теплообмін пов'язаний з сукупністю процесів обміну енергією між окремими частинками термодинамічної системи і зовнішнім середовищем і може відбуватися шляхом конвекції, теплопровідності та випромінювання. Шляхом теплообміну можна змінити тільки внутрішню енергію системи.

**Зверніть увагу!** Робота і теплота мають розмірність енергії (одиниця вимірювання в СІ – джоуль), але не є видами енергії. Вони характеризують лише спосіб і міру передачі енергії, тобто процес її передачі, але не стан системи. Немає сенсу говорити про запас теплоти або роботи, які має система. Ці величини не є функціями стану, відрізняються від нуля лише в процесі передачі енергії і залежать від шляху переходу системи з одного стану в інший.

Передача енергії, в свою чергу, визначає зміну її внутрішньої енергії  $\Delta U$ . **Внутрішня енергія – функція стану термодинамічної системи.** Її значення не залежить від того, яким способом система була приведена в

певний термодинамічний стан. При поверненні системи в початковий стан після здійснення довільного термодинамічного циклу  $\Delta U = 0$ .

● **Перший закон (принцип) термодинаміки** – це закон збереження енергії при її перетвореннях в системах, які складаються з великої кількості частинок. Зокрема, рівняння першого закону термодинаміки виражає закон збереження і перетворення енергії стосовно теплових процесів.

Для нескінченно малих змін стану внутрішньої енергії системи  $dU$  є справедливим співвідношення:

$$\delta Q = \delta A + dU, \quad (5.1)$$

де величини елементарної кількості теплоти  $\delta Q$  і роботи  $\delta A$  є додатними, якщо тепло надається системі, і система здійснює роботу проти дії зовнішніх сил.

Відповідно рівнянню (5.1) перший закон термодинаміки може бути сформульований так: **елементарна кількість теплоти, що надана системі йде на зміну її внутрішньої енергії і на виконання системою роботи проти зовнішніх сил.**

Для кінцевих змін параметрів системи, тобто для переходу системи зі стану 1 в стан 2 інтегрування рівняння (5.1) дає:

$$Q = \Delta U + A. \quad (5.2)$$

У випадку здійснення термодинамічного циклу зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю і з рівняння (5.2) отримуємо, що

$$A = Q. \quad (5.3)$$

Це означає, що для циклічного процесу робота, яка виконується термодинамічною системою, не може перевищувати отриману нею кількість теплоти.

Інакше: **неможливе створення вічного двигуна першого роду, тобто такого періодично діючого двигуна, який би виконував роботу, більшу за отриману ним енергію.**

Зауважимо, що з тієї обставини, що в рівняння (5.1), яке представляє собою загальне математичне формулювання першого закону термодинаміки, входить теплота  $\delta Q$ , не слід робити висновок, ніби це є вираження лише окремого випадку закону збереження стосовно тільки теплових явищ.

Наприклад, для чисто механічних процесів, в яких теплота не приймає участі ( $\delta Q = 0$ ), рівняння (5.1) приймає більш простий вигляд, а саме:  $-dU = \delta A$ . Це означає, що виконана даною системою робота дорівнює зменшенню власної енергії системи.

В іншому випадку, коли в теплоізоляованій системі не відбувається ніяких перетворень енергії, окрім теплообміну між тілами, що входять до системи, то кількість теплоти, яку віддають тіла, що охолоджуються, дорівнює кількості теплоти, яку отримують тіла, що нагріваються.

Сумарна внутрішня енергія системи при цьому не змінюється, тобто  $\Delta U = 0$ . Відповідне рівняння називають **рівнянням теплового балансу**.

**Зауваження:** при запису виразів для елементарної кількості теплоти та елементарної роботи часто замість позначень  $\delta Q$  та  $\delta A$  використовують  $dQ$  та  $dA$ , розуміючи під цими позначеннями тільки малість цих величин.

- **Теплоємність** тіла (системи) – фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, необхідній для нагрівання тіла (системи) на один кельвін:

$$C_{\circ} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}, \quad [C_{\circ}] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right] \quad (5.4)$$

де  $\Delta Q$  - теплота, що підведена до тіла при підвищенні його температури на  $\Delta T$ .

**Питома теплоємність**  $c$  – величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, необхідній для нагрівання на 1К одиниці маси речовини:

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}, \quad [\tilde{n}] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right] \quad (5.5)$$

**Молярна теплоємність**  $C$  – величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, необхідній для нагрівання на 1К одного моля речовини:

$$\tilde{N} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{dQ}{dT} = \frac{M}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}, \quad [\tilde{N}] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right] \quad (5.6)$$

Молярна та питома теплоємності зв'язані між собою співвідношенням:

$$C = Mc, \quad (5.7)$$

де  $M$  – молярна маса речовини.

- **Застосування першого закону термодинаміки до ідеальних газів.**

Теплоємність газів залежить від процесу. Тому розрізняють теплоємність газу при постійному об'ємі ( $C_v$ ) та теплоємність газу при постійному тиску ( $C_p$ ).

**При постійному об'ємі** молярну та питому теплоємність газу надають формули:

$$C_v = \frac{i}{2} R; \quad c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}, \quad (5.8)$$

де;  $R$  – універсальна газова стала;  $i$  – кількість ступенів вільності молекул газу.

**При постійному тиску** молярна та питома теплоємність газу надається формулами

$$C_p = \frac{i+2}{2} R; \quad c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}. \quad (5.9)$$

Рівняння Р.Майєра зв'язує молярні теплоємності ідеального газу, виміряні за різними умовами:

$$C_p - C_v = R. \quad (5.10)$$

Рівняння (5.10) показує, що зміна температури моль ідеального газу на 1 К при постійному тиску потребує додаткової, порівняно з ізохорним нагріванням, теплоти, необхідної для виконання роботи при поширенні газу, без якого неможливо виконання умови  $p = \text{const}$ . Це значення дорівнює універсальній газовій постійній  $R$ .

Відношення теплоємності газу при постійному тиску і об'ємі  $\gamma$ , яке носить назву коефіцієнта Пуассона, визначається тільки кількістю ступенів вільності атомів або молекул газу і не залежить у явному вигляді від температури:

$$\gamma = \frac{i + 2}{i}. \quad (5.11)$$

У випадку багатоатомних молекул кількість ступенів вільності розраховується за формулою:

$$i = i_{\text{ііпд}} + 3_{\text{іаадо}} + 2^3_{\text{еіеєа}}, \quad (5.12)$$

$i_{\text{ііпд}}$ ,  $3_{\text{іаадо}}$ ,  $2^3_{\text{еіеєа}}$  — кількість ступенів вільності поступального, обертального та коливального рухів.

Значення  $2^3_{\text{еіеєа}}$  у виразі (5.12) множиться на 2, оскільки у коливальному русі присутні складові кінетичної і потенціальної енергії, середні значення яких є рівними.

Зауважимо, що теоретичні значення теплоємностей і коефіцієнту Пуассона добре узгоджуються з експериментальними даними в широкому інтервалі температур тільки для одноатомних газів ( $i=3$ ). Для багатоатомних молекул ці значення стрибкоподібно збільшуються при зростанні температури, оскільки при цьому збільшується кількість ступенів вільностей частинок. В області низьких температур здійснюється тільки поступальний рух молекул ( $i = i_{\text{ііпд}} = 3$ ), в області більш високих (в тому числі кімнатних температур) до них додаються ступені вільності, що зв'язані з можливістю обертального руху ( $i = i_{\text{ііпд}} + 3_{\text{іаадо}}$ ), а далі — коливального руху ( $i = i_{\text{ііпд}} + 3_{\text{іаадо}} + 2^3_{\text{еіеєа}}$ ).

● **Внутрішня енергія ідеального газу** дорівнює кінетичній енергії теплового руху його молекул (молекули не взаємодіють між собою):

$$U = \nu \frac{i}{2} RT = \nu C_v T, \quad (5.13)$$

де  $\nu = \frac{m}{M}$  — кількість моль ідеального газу. Звідки зміна внутрішньої енергії ідеального газу дорівнює:

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T \quad (5.14)$$

• **Елементарна робота**, яка виконується газом при елементарній зміні його об'єму  $dV$ , коли тиск  $p$  можна вважати постійним, дорівнює:

$$dA = pdV. \quad (5.15)$$

При поширенні газу ( $dV > 0$ ) робота газу – додатна величина. При стисканні газу  $dV < 0$ , і робота газу  $dA$  буде від'ємною величиною. Додатною в цьому випадку буде робота зовнішньої сили  $dA' = -dA > 0$ .

У загальному випадку робота, яка виконується газом при кінцевій зміні його об'єму від  $V_1$  до  $V_2$ :

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \quad (5.16)$$

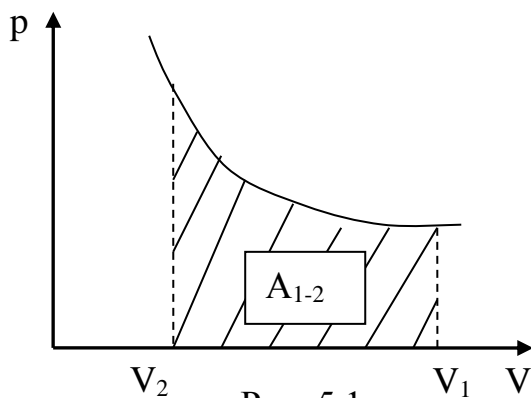


Рис. 5.1.

Для обчислення роботи можна також скористатися графічним методом: за геометричним змістом інтегралу робота, яка виконується в деякому процесі, на  $p$ - $V$  – діаграмі дорівнює площі фігури, яка обмежена віссю абсцис та лінією, що представляє собою графік процесу  $p = f(V)$  (рис.5.1).

Окремі випадки:

а) ізобаричний процес:  $A = p(V_2 - V_1); \quad (5.17)$

б) ізотермічний процес:  $A = \nu RT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right); \quad (5.18)$

в) адіабатний процес (який відбувається без теплообміну з оточуючим середовищем,  $Q = 0$ ):

$$A = -\Delta U = -\nu C_V \Delta T, \text{ або } A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] \quad (5.19)$$

де  $C_V$  – молярна теплоємність при постійному об'ємі;

$\gamma = C_p / C_V$  – коефіцієнт Пуассона.

• **Адіабатний процес та політропні процеси.** Адіабатний процес – процес, який відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем. Таким чином, для адіабатних процесів є характерною наявність якісної ізоляції від зовнішнього середовища або висока швидкість протікання процесу, при якій теплообмін з навколишнім середовищем є несуттєвим.

Приклади адіабатних процесів: робота двигунів внутрішнього згорання; процеси в термостатах; Розрідження та стискання газів при розповсюдженні звукової хвилі.

При адіабатному процесі параметри стану зв'язані рівняннями:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}; \quad (5.20)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \quad (5.21)$$

$$PV^{\gamma} = \text{const}; \quad (5.22)$$

Останнє рівняння (5.20) має назву рівняння Пуассона.

На діаграмі  $p$ - $V$  адіабата йде більш круто ніж ізотерма. Це пояснюється тим, що в ізотермічному процесі зміна тиску пов'язана тільки зі зміною об'єму і внаслідок цього концентрації молекул ( $p = nkT$ ), а в адіабатному процесі на зміну тиску одночасно впливає також зміна температури.

Ізохорний, ізобарний, ізотермічний і адіабатний процеси – мають одну загальну властивість – їх теплоємність не змінюється в ході процесу.

Термодинамічні процеси, в яких теплоємність залишається постійною називають **політропними процесами**.

Рівняння політропи має вигляд:

$$pV^n = \text{const}, \quad (5.23)$$

де  $n$  – показник політропи.

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_v}. \quad (5.24)$$

$C$  – теплоємність процесу.

$$C = \frac{nC_v - C_p}{n - 1}. \quad (5.25)$$

Ізохорний процес:  $n = \infty$ ;  $C = C_v$ ;

Ізобарний процес:  $n = 0$ ;  $C = C_p$ ;

Ізотермічний процес:  $n = 1$ ;  $C = \infty$ ;

Адіабатний процес:  $n = \gamma$ ;  $C = 0$ .

### Методичні вказівки.

- При розв'язуванні задач даної теми, перш за все необхідно уявляти, в яким способом термодинамічна система обмінюється енергією з зовнішніми тілами. В залежності від цього, вона може бути замкненою, адіабатично замкненою, замкненою у механічному відношенні і

незамкненою (відкритою). Відповідно рівняння першого закону термодинаміки (5.2) приймає різний вигляд.

▪ Якщо система замкнена, то теплообмін з навколишнім середовищем відсутній і робота не виконується. Має місце повна енергетична ізоляція системи від довкілля, тому внутрішня енергія системи не змінюється з часом. З рівняння першого закону термодинаміки випливає, що в цьому випадку зміна внутрішньої енергії системи  $\Delta U = 0$ . В такій системі може відбуватися тільки теплообмін між тілами, що входять до її складу, який описує рівняння теплового балансу. Внаслідок система переходить у стан термодинамічної рівноваги.

Нагадаємо формули, які можуть бути корисними при складанні рівняння теплового балансу (див. приклад 5.1).

При нагріванні речовини системи від одного стану 1 до другого 2 отриману кількість теплоти можна розрахувати за формулою

$$Q = m \int_{1-2} c dT = \nu \int_{1-2} C dT, \quad (5.26)$$

де  $c$  – питома теплоємність речовини,  $[c] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$ ;  $C$  – молярна

теплоємність,  $[\tilde{N}] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]$ . У більшості випадків значення  $c$  і  $C$  можна

вважати незалежними від температури і виносити за знак інтегралу. Тоді кількість теплоти  $Q$ , отриманої тілом масою  $m$  при нагріванні або віддане ним при охолодженні, визначається формулою

$$Q = cm\Delta T = \nu \tilde{N} \Delta T \quad (5.27)$$

Кількість теплоти  $Q$ , необхідної для переходу маси речовини  $m$  із твердого стану у рідкий при температурі плавлення, визначається формулою

$$Q = Lm, \quad (5.28)$$

де  $L$  – питома теплота плавлення, тобто кількість теплоти, необхідної для плавлення одиниці маси речовини.  $[L] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right]$ .

Кількість теплоти  $Q$ , необхідної для перетворення маси рідини  $m$  в пар при температурі кипіння, визначається формулою

$$Q = rm, \quad (5.29)$$



де  $r$  – питома теплота пароутворення, тобто кількість теплоти, необхідної для перетворення одиниці маси речовини з рідкого стану в пар при температурі кипіння.  $[r] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right]$ .

При повному згоранні палива масою  $m$  виділяється кількість теплоти

$$Q = qm, \quad (5.30)$$

де  $q$  – питома теплота згорання палива, тобто кількість теплоти, яка виділяється при згоранні одиниці маси палива.  $[q] = \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right]$ .

- У випадку адіабатичної замкненої системи теплообмін з оточенням відсутній, тому внутрішня енергія такої системи може змінюватися тільки за рахунок виконання роботи. Для такої системи  $\Delta U = -A$ .

- Якщо термодинамічна система є замкненою у механічному відношенні, то її внутрішня енергія може змінюватися тільки за рахунок теплообміну з навколишнім середовищем:  $\Delta U = Q$ .

- Зміна внутрішньої енергії незамкненої термодинамічної системи при переході з одного стану в інший обов'язково супроводжується зміною її механічної енергії. Згідно закону збереження і перетворення енергії для такої системи  $\Delta W + \Delta U = Q - A$  (5.28), де  $\Delta W$  – зміна повної механічної енергії системи. Цей закон є основою розв'язання багатьох задач з термодинаміки.

- Кількість теплоти, як впливає з першого закону термодинаміки, вимірюється в тих самих одиницях, що робота і енергія. Поряд з джоулем використовується позасистемна одиниця теплоти – калорія (кал), яка дорівнює кількості енергії, необхідної для нагріву 1 г води на один градус.

Співвідношення між калорією і джоулем виражає **механічний еквівалент теплоти**  $I = 4,185 \text{ Дж/кал}$ , тобто 1 кал теплоти є еквівалентною роботі 4,185 Дж.

У кілокалоріях вимірюють, як правило, енергетичну цінність харчових продуктів. Наприклад, при окисленні одного грама тваринного жиру звільняється біля 10 ккал енергії, тобто 41,8 кДж.

- Розв'язання задач на застосування першого закону термодинаміки до ідеальних газів зручно починати із з'ясування характеру процесу, що відбувається у газі (зрозуміло, якщо про це не говориться в умові задачі). Це не викликає труднощів у випадку ізохорного ( $V = \text{const}$ ) або ізобарного процесів ( $p = \text{const}$ ).

Ізотермічний процес ( $T = \text{const}$ ) розширення або стискання газу потребує достатнього теплообміну між газом і оточуючим середовищем. Цьому сприяє висока теплопровідність стінок посудини, в якій знаходиться газ, і повільне протікання процесу. Навпаки, умовою адіабатного процесу розширення або стискання газу є відсутність теплообміну з оточенням. На практиці ця умова виконується тим точніше, чим менша теплопровідність стінок посудини, в якій знаходиться газ, і чим швидше протікає процес.

- В ізохорному і ізобарному процесах кількість теплоти, отриманої газом, завжди зв'язана зі зміною його температури:

$$dQ = \nu C dT, \quad (5.31)$$

де  $C = C_v$  при ізохорному процесі і  $C = C_p$  при ізобарному процесі. При тому знаки  $dQ$  і  $dT$  завжди співпадають: надання системі теплоти завжди приводить до її нагрівання і навпаки.

При ізотермічному і адіабатному процесах такого простого зв'язку між зміною температури газу і отриманою теплотою не існує. При ізотермічному процесі відсутня зміна температури ( $dT=0$ ), хоча газ при цьому отримує або віддає теплоту. При адіабатному процесі, навпаки, газ не отримує і не віддає теплоту ( $dQ=0$ ), хоча при цьому змінюється його температура.

- У випадку декількох послідовних процесів, що здійснюються з газом, побудова їх графіка може полегшити розв'язання задачі.

### Приклади розв'язання задач

**Приклад 5.1.** Лід масою  $m_1 = 200\text{г}$  знаходиться у замкненому латунному калориметрі масою  $m_2 = 100\text{г}$  при температурі  $t_1 = -10^\circ\text{C}$ . В калориметр впускають деяку кількість пари при температурі  $t_2 = 150^\circ\text{C}$ . Визначити масу пари, якщо в результаті теплообміну в калориметрі установилася температура  $t = 20^\circ\text{C}$ .

$m_1 = 0,2\text{кг}$ $m_2 = 0,1\text{кг}$ $T_1 = 263\text{K}$ $T_2 = 423\text{K}$ $T = 293\text{K}$ $T_0 = 273\text{K}$ $T' = 373\text{K}$ $c_1 = 2090\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ $c_2 = 380\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ $c = 4190\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ $c_3 = 2200\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ $L = 335\text{кДж}/\text{кг}$ $r = 2,26\text{МДж}/\text{кг}$	<p>Розв'язання</p> <p>Термодинамічну систему «лід-пар-калориметр» можна вважати замкненою, оскільки її механічна енергія не змінюється, а невеликим теплообміном з зовнішнім середовищем можна знехтувати. Тоді процеси, що відбуваються в системі, зводяться до теплообміну між її компонентами, і зміна внутрішньої енергії системи дорівнює нулю, тобто</p>
--	--

$m_3 = ?$

$$\Delta U_{\text{л}} + \Delta U_{\text{к}} + \Delta U_{\text{п}} = 0, \quad (1)$$

де  $\Delta U_{\text{л}}$ ,  $\Delta U_{\text{к}}$ ,  $\Delta U_{\text{п}}$  – відповідно зміна внутрішньої енергії льоду, калориметра і пари. Визначаємо кожен з доданків.

Зміна внутрішньої енергії льоду: при його нагріванні до температури плавлення  $\Delta U_1 = c_1 m_1 (T_0 - T_1)$ ; у процесі плавлення  $\Delta U_2 = L m_1$ ; у процесі подальшого нагрівання холодної води:  $\Delta U_3 = c m_1 (T - T_0)$ .

Повна зміна внутрішньої енергії льоду дорівнює

$$\Delta U_{\text{л}} = c_1 m_1 (T_0 - T_1) + L m_1 + c m_1 (T - T_0), \quad (2)$$

де  $c_1$  і  $c$  – теплоємності льоду і води,  $L$  – питома теплота плавлення льоду,  $T_0 = 273\text{K}$  – температура плавлення льоду.

$$\text{Зміна внутрішньої енергії калориметра } \Delta U_{\text{к}} = c_2 m_2 (T - T_1), \quad (3)$$

де  $c_2$  – теплоємність латуні.

Зміна внутрішньої енергії пари: при охолодженні до температури конденсації  $T'$   $\Delta U_4 = c_3 m_3 (T_2 - T')$ ;

у процесі конденсації  $\Delta U_5 = -r m_3$  (знак "–" урахує віддачу теплоти парою в процесі конденсації);

при охолодженні води, що утворилася з пари,  $\Delta U_6 = c m_3 (T' - T)$ .

Повна зміна внутрішньої енергії пари дорівнює:

$$\Delta U_{\text{п}} = c_3 m_3 (T_2 - T') - r m_3 + c m_3 (T' - T). \quad (4)$$

Підстановка виразів (2) – (4) у рівняння теплового балансу (1) дає:

$$c_1 m_1 (T_0 - T_1) + L m_1 + c m_1 (T - T_0) + \\ + c_2 m_2 (T - T_1) + c_3 m_3 (T_2 - T') - r m_3 + c m_3 (T' - T) = 0.$$

Звідки

$$m_3 = \frac{m_1 (c_1 (T_0 - T_1) + L + c (T - T_0)) + c_2 m_2 (T - T_1)}{c_3 (T' - T_2) + r + c (T' - T)}.$$

$$m_3 = \frac{0,2 \cdot (2,09 \cdot 10^3 \cdot 10 + 33,5 \cdot 10^4 + 4,19 \cdot 10^3 \cdot 20) + 380 \cdot 0,1 \cdot 30}{2,2 \cdot 10^3 \cdot 50 + 2,26 \cdot 10^6 + 4,19 \cdot 10^3 \cdot 80} = 0,034 \text{ кг}$$

Відповідь:  $m_3 = 34 \text{ г}$ .

**Приклад 5.2.** Яку найменшу швидкість повинна мати свинцева куля, щоб при зіткненні зі сталеву плитою вона могла б цілком розплавитися, якщо на внутрішню енергію плити перетворюється 25% енергії, що виділяється при ударі? Температура кулі в момент удару дорівнює

$$\begin{aligned} k &= 0,25 \\ T_1 &= 390\text{K} \\ T_2 &= 600\text{K} \\ c &= 130 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K}) \\ L &= 25 \text{ кДж}/\text{кг} \end{aligned}$$

$v_0 - ?$

Розв'язання

При зіткненні кулі з плитою відбувається необоротний процес переходу механічної енергії у внутрішню. Розглянемо систему

«куля-плита» безпосередньо до і після зіткнення. Повна енергія системи в початковому стані  $W_1$  дорівнює сумі внутрішньої енергії кулі  $U_1$ , внутрішньої енергії плити  $U_2$ , кінетичної енергії кулі  $W_{k1}$  та потенціальної енергії  $W_{p1}$  системи в зовнішньому гравітаційному полі Землі, тобто  $W_1 = W_{k1} + W_{p1} + U_1 + U_2$  (1).

Аналогічно, кінцева енергія системи  $W_2 = W_{p2} + U'_1 + U'_2$  (2).

Згідно закону збереження енергії, за яким  $W_1 = W_2$ , з рівнянь (1) і (2) з урахуванням того, що потенціальна енергія системи за час зіткнення не змінюється ( $W_{p1} = W_{p2}$ ), а кінетична енергія кулі після зіткнення  $W_{k2} = 0$  отримуємо:  $(U'_1 - U_1) + (U'_2 - U_2) = W_{k1}$ . (4)  
Згідно з умовою задачі  $\Delta U_2 = U'_2 - U_2 = kW_{k1}$  (4). З виразів (3) і (4) знаходимо зміну внутрішньої енергії кулі:

$$\Delta U_1 = U'_1 - U_1 = (1 - k)W_{k1} = (1 - k)\frac{mv_0^2}{2}. \quad (5)$$

Енергія, яку отримує куля, витрачається на її нагрівання від температури  $T_1$  до температури плавлення  $T_2$  і подальше плавлення:

$$\Delta U_1 = m[c(T_2 - T_1) + L]. \text{ Тоді з рівняння (5): } m[c(T_2 - T_1) + L] = (1 - k)\frac{mv_0^2}{2}.$$

$$\text{Звідки } v_0 = \sqrt{\frac{2c(T_2 - T_1) + L}{(1 - k)}}.$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 130(600 - 390) + 2,5 \cdot 10^4}{1 - 0,25}} = 326 \text{ (м/с)}$$

$$[v_0] = \left( \frac{\hat{A} \cdot \hat{E}}{\hat{e} \tilde{a} \cdot \hat{E}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\hat{e} \tilde{a} \cdot \hat{i}^2}{\tilde{n}^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hat{i}}{\tilde{n}}.$$

Відповідь:  $v_0 = 306 \text{ м/с}$ .

**Приклад 5.3.** Припустимо, що для підтримки життя умовної людини необхідно витрачати потужність у середньому 120Вт. 1) Скільки кілокалорій на день потрібно споживати людині, щоб не вмерти? 2) На яку висоту  $h$  могла б піднятися людина за рахунок енергетичного еквівалента свого мінімального повсякденного раціону калорій, якщо на роботу перетворюється 10% енергії? Маса людини дорівнює 60кг.

$P = 120 \text{ Вт}$ $t = 24 \text{ год.}$ $m = 60 \text{ кг}$ $k = 0,1$ $g = 9,8 \text{ м/с}^2$	Розв'язання
	1) За добу людина витрачає енергію, яка дорівнює $W = P \cdot t$ .
Q; h - ?	

$$t = 24 \cdot 3600 \text{ с} = 86400 \text{ с}.$$

$$W = 120 \text{ Вт} \cdot 8,64 \cdot 10^4 \text{ с} = 1,04 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

Еквівалентну кількість калорій, яку людина витрачає за добу, знаходимо за допомогою механічного еквіваленту теплоти  $I = 4,185 \text{ Дж/кал}$ :

$$Q = \frac{W}{I} = \frac{1,04 \cdot 10^7 \text{ Дж}}{4,185 \text{ Дж/кал}} = 2,48 \cdot 10^6 \text{ кал} = 2480 \text{ ккал}.$$

2) Робота людини по підйому себе на висоту  $h$  дорівнює  $A = mgh$ . Згідно умови задачі  $A = kW$ . Звідки  $h = \frac{kW}{mg}$ .

$$h = \frac{0,1 \cdot 1,04 \cdot 10^7}{60 \cdot 9,8} = 1,77 \cdot 10^3 \text{ (м)}.$$

$$[h] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{м/с}^2} = \text{м}.$$

Відповідь:  $Q=2480 \text{ ккал}$ ;  $h=1,77 \text{ км}$ .

**Приклад 5.4.** Знайти енергію  $W$  обертального руху молекул, які містяться у  $m=2 \text{ кг}$  водню при температурі  $t=27^\circ \text{C}$ .

Розв'язання

$$\begin{array}{l} m=2 \text{ кг} \\ M=2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \\ T=300 \text{ К} \\ \gamma = 2 \\ R=8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \\ \hline W_{\text{оберт.}}=? \end{array}$$

Кількість молекул, які містяться у даній масі газу дорівнює  $N = \nu N_A$ ,

(1)

де  $\nu$  - кількість речовини;  $N_A$  - постійна

Авогадро. У свою чергу,  $\nu = \frac{m}{M}$ , де  $M$  -

молярна маса. Тоді  $N = \frac{m}{M} N_A$ . (2)

Оскільки молекула водню  $\text{H}_2$  складається з двох атомів, між якими при кімнатній температурі здійснюється жорсткий зв'язок, кількість ступенів свободи для такої молекули  $i=5$  з них 2 припадає на обертальний рух:  $i_{\text{оберт.}}=2$ . Середня кінетична енергія однієї молекули (3.2)

$$\langle \epsilon_k \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (3)$$

де  $k$  - стала Больцмана;  $T$  - термодинамічна температура.

Загальна енергія обертального руху всіх молекул

$$W = N \cdot \frac{i}{2} kT, \text{ або } W = \frac{m N_A}{M} \cdot \frac{i}{2} kT.$$

Оскільки  $N_A \cdot k = R$ , де  $R$  - універсальна газова стала,  $W = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} RT$ . (4)

$$W = \frac{2 \cdot 2 \cdot 8,31 \cdot 300}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 2,49 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

$$[W] = \frac{\tilde{e} \cdot \tilde{A} / (\tilde{i} \cdot \tilde{E}) \cdot \tilde{E}}{\tilde{e} / \tilde{i}} = \tilde{A}.$$

Відповідь:  $W = 2,49 \cdot 10^5$  Дж.

**Приклад 5.5.** Знайти молярну теплоємність кисню  $C_v$ , якщо відомо, що степінь його дисоціації  $\alpha = 0,020$  (див. приклад 1.5).

$\nu = 1$ моль $\alpha = 0,020$ $i_1 = 3$ $i_2 = 5$ $R = 8,31$ Дж/(моль·К) <hr/> $C_v - ?$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Степінь дисоціації <math>\alpha</math> – відношення кількості молекул, що зазнали дисоціації до їх початкової кількості. При степені дисоціації <math>\alpha</math> з початкової кількості молів <math>\nu</math> газу утворюється <math>\nu_1 = 2\alpha\nu</math> молів атомарного кисню (оксигену) та залишається <math>\nu_2 = (1 - \alpha)\nu</math> молів молекулярного кисню.</p>
---	---

Загальна кількість молів у посудині, де знаходиться кисень, внаслідок дисоціації складає:  $\nu' = 2\alpha\nu + (1 - \alpha)\nu = (1 + \alpha)\nu$ . (1)

Молярна теплоємність може бути визначена як відношення теплоємності усього газу  $C_{\text{газ}}$  до кількості його молів  $\nu'$ :  $\tilde{N}_v = \frac{C_{\text{газ}}}{\nu'}$  (2). Теплоємність

газу  $C_{\text{газ}}$  виражаємо через молярні теплоємності одноатомного та двоатомного газів, які за формулою (5.8) дорівнюють  $C_v = \frac{i}{2}R$  (з  $i_1 = 3$  для атомарного кисню та  $i_2 = 5$  для молекулярного кисню), та кількість їх молів:  $\tilde{N}_{\text{газ}} = \frac{3}{2}R \cdot 2\alpha\nu + \frac{5}{2}R \cdot (1 - \alpha)\nu = \frac{1}{2}(5 + \alpha)R\nu$ . (3)

Підстановка виразів (1) та (3) до формули (2) дає:

$$C_v = \frac{\frac{1}{2}(5 + \alpha)R\nu}{(1 + \alpha)\nu} = \frac{(5 + \alpha)R}{2(1 + \alpha)}.$$

$$C_v = \frac{(5 + 0,02)8,31}{2(1 + 0,02)} = 20,45 \text{ Дж/(моль·К)}.$$

Відповідь:  $C_v = 20,45$  Дж/(моль·К).

**Приклад 5.6.** Вважаючи, що молярна теплоємність ідеального газу  $C_v$  при постійному об'ємі є відомою, вивести формулу для величини молярної теплоємності газу у процесі, який описує закон  $p = \frac{a}{T}$ .

Розв'язання

**I варіант.** За означенням (5.6) молярна теплоємність газу  $C$  дорівнює

$$C = \frac{Q}{\nu \Delta T},$$

де  $\Delta T$  – зміна температури газу;  $\nu$  – число молів;  $Q$  – кількість теплоти, підведеної до газу. Величину  $Q$  можна знайти з першого закону термодинаміки (5.2):  $Q = \Delta U + A$ . Тут  $\Delta U$  – зміна внутрішньої енергії газу, а  $A$  – робота, що здійснена ним.

$\Delta U$  пов'язана з ізохоричною ( $V = \text{const}$ ) теплоємністю газу співвідношенням

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T,$$

а робота може бути порахована як  $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$  де  $V_1, V_2$  – межі зміни об'єму газу при температурах  $T_1$  і  $T_2$  ( $\Delta T = T_2 - T_1$ ) відповідно.

Використовуючи рівняння стану ідеального газу  $pV = \nu RT$  і заданий в умові задачі закон залежності тиску від температури  $p = \frac{\alpha}{T}$ , робимо заміну змінних під знаком інтегралу:

$$\Delta A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\alpha}{T} \cdot \frac{2\nu R T dT}{\alpha} = 2\nu R \Delta T.$$

Остаточно отримуємо

$$Q = \nu C_V \Delta T + 2\nu R \Delta T = \nu (C_V + 2R) \Delta T.$$

Отже,

$$C = C_V + 2R.$$

**II варіант.** Розглянемо ще один варіант рішення. Нехай в указаному процесі сталася мала зміна параметрів газу: температури ( $T \Rightarrow T + \Delta T$ ) і об'єму ( $V \Rightarrow V + \Delta V$ ). У відповідності з рівнянням Менделєєва – Клапейрона:

$$\Delta V = \frac{\nu R}{\alpha} [(T + \Delta T)^2 - T^2] = \frac{\nu R}{\alpha} \Delta T (2T + \Delta T).$$

Робота газу  $A = p \Delta V$  (оскільки зміна параметрів мала, тобто  $\Delta p \ll p$ , то й перехід з одного стану в інший можна вважати ізобаричним)

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{Q}{\nu \Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta U + A}{\nu \Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\nu C_V \Delta T + \nu R \Delta T (2 + \Delta T / T)}{\nu \Delta T} = C_V + 2R.$$

**Приклад 5.7.** Вуглекислий газ масою  $m=66\text{г}$ , який має температуру  $t=7^\circ\text{C}$ , ізотермічно розширюється так, що його об'єм збільшується вдвічі. Яку роботу виконує при цьому газ?

$$m = 66 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$T = 280 \text{ К}$$

$$V_2 / V_1 = 2$$

$$M(\text{CO}_2) = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$$

A - ?

Розв'язання

Роботу, яку виконує газ, знайдемо, скориставшись формулою (5.14):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (1)$$

Оскільки під час ізотермічного процесу тиск  $p$  змінюється, виразимо тиск через об'єм газу з рівняння Менделєєва – Клапейрона (2.9):  $pV = \nu RT$ , звідки

$$p = \frac{\nu RT}{V} \quad (2)$$

Підставимо (2) у (1) і виконаємо інтегрування:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (3)$$

Зважаючи на те, що  $\nu = m/M$ , маємо

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right).$$

$$A = \frac{66 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 280}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \ln 2 = 2,41 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 2,41 \text{ кДж}.$$

$$[A] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})}{\text{кг}} \cdot \text{К} = \text{Дж}.$$

Відповідь:  $A = 2,41 \text{ кДж}$ .

**Приклад 5.8.** При ізобаричному нагріванні  $m = 6 \text{ г}$  водню з початковою температурою  $t_1 = 27^\circ \text{C}$ , його об'єм зріс у два рази ( $V_2 = 2V_1$ ). Знайти: 1) роботу  $A$  газу; 2) зміну внутрішньої енергії  $\Delta U$  газу; 3) кількість теплоти  $Q$ , яку надано газу.

Розв'язання	
$T_1 = 300 \text{ K}$	1). Робота газу при ізобаричному нагріванні (5.15):
$V_2 = 2V_1$	
$m = 6 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$	
$M = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	
$R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$	Скористаємося рівнянням Менделєєва – Клапейрона, записавши його двічі: для початкового і кінцевого станів.
$A; \Delta U; Q - ?$	
	$A = p(V_2 - V_1).$
	$PV_1 = \frac{m}{M} RT_1 \quad (1)$
	$PV_2 = \frac{m}{M} RT_2 \quad (2)$

З (2) віднімаємо (1)

$$P(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1),$$



або

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (3)$$

Різницю температур можна знайти з (2.26):

При  $P = \text{const}$   $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$ ; за умовою задачі  $\frac{V_2}{V_1} = 2$ , тому  $\frac{T_2}{T_1} = 2$ . Тобто

$$T_2 = 2T_1 = 2 \cdot (27 + 273) = 600 \text{ K}.$$

$$\text{Тоді } T_2 - T_1 = 600 \text{ K} - 300 \text{ K} = 300 \text{ K}.$$

$$\text{Робота газу } A = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 300 = 7,48 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 7,48 \text{ кДж}.$$

2). Внутрішня енергія газу визначається за формулою (2.23).

$$U = \nu \frac{i}{2} RT,$$

$$\text{Тоді зміна внутрішньої енергії } \Delta U = \nu \frac{i}{2} R \Delta T, \quad (4)$$

де  $i$  – кількість ступенів свободи; для водню  $\text{H}_2$  (двохатомна молекула)  $i=5$ .

Обчислення:

$$\Delta U = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 8,31 \cdot (600 - 300)}{2 \cdot 10^{-3}} = 18,68 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 18,68 \text{ кДж}.$$

3) Згідно з першим законом термодинаміки (5.2)

$$Q = \Delta U + A$$

$$\text{Тому } Q = 18,68 + 7,48 = 26,16 \text{ кДж}.$$

**II спосіб** обчислення теплоти  $Q$ . Надану газу при ізобарному нагріванні теплоту можна також визначити, виразивши її через молярну теплоємність газу  $C_p$  при постійному тиску:

$$Q = \nu C_p \Delta T. \quad (5)$$

$$\text{Кількість молів газу } \nu = \frac{m}{M};$$

$$\text{молярна теплоємність } C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

Підстановка відповідних виразів у формулу (5) дає:

$$Q = \frac{m}{M} \cdot \frac{i+2}{2} R \Delta T = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 8,31 \cdot (600 - 300)}{2 \cdot 10^{-3}} = 26,16 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

$$\text{Відповідь: } A=7,48 \text{ кДж; } \Delta U=18,68 \text{ кДж; } Q=26,16 \text{ кДж}.$$

**Приклад 5.8.** У циліндрі під поршнем знаходиться 1 моль азоту при температурі  $t_1 = 27^\circ \text{C}$ . Азот починає адіабатично розширюватись,

збільшивши свій об'єм у 5 разів, далі його ізотермічно стискають до початкового об'єму. Знайти 1) температуру азоту  $T_2$  наприкінці адіабатичного розширення; 2) роботу  $A_1$  при адіабатичному розширенні; 3) роботу  $A_2$  при ізотермічному стисканні та повну роботу  $A$ , яку виконав газ. Побудувати  $p$ - $V$  – діаграму процесу.

$T_1 = 300\text{K}$ $V_2 = 5V_1$ $\nu = 1$ моль $R = 8,31\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{K})$ $i=5$	Розв'язання
$T_2; A_1; A_2; A$ -?	1) Температура і об'єм газу при адіабатичному розширенні зв'язані рівнянням (5.18): $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}. \quad (1)$ Із рівняння адіабати (1) виражаємо $T_2$ :

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad (2)$$

де коефіцієнт Пуассона  $\gamma$  за формулою (5.11) дорівнює:

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1,4 \quad (\text{для 2-атомного газу } i=5).$$

Підстановка значень у формулу (2) дає

$$T_2 = 300 \cdot \left( \frac{1}{5} \right)^{1,4-1} = 300 \cdot 0,525 = 157\text{K}$$

2) Робота  $A_1$  при адіабатичному розширенні газу може бути обчислена за формулою (5.17):

$$A_1 = -\nu C_v \Delta T = -\nu \frac{i}{2} R (T_2 - T_1).$$

$$A_1 = -1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot (157 - 300) = 2970 \text{ Дж}.$$

3) Роботу  $A_2$  газу при ізотермічному поширенні надає формула (5.16):

$$A_2 = \nu R T_2 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right).$$

$$A_2 = 1 \cdot 8,31 \cdot 157 \cdot \ln \left( \frac{1}{5} \right) = -2100 \text{ Дж}.$$

Знак " – " указує на те, що при стисканні газу робота виконується зовнішніми силами.

Сумарна робота  $A = A_1 + A_2$ .

$$A = 2,97 \text{ кДж} - 2,10 \text{ кДж} = 0,87 \text{ кДж}.$$

Графік процесу зображений на рис. 5.3.

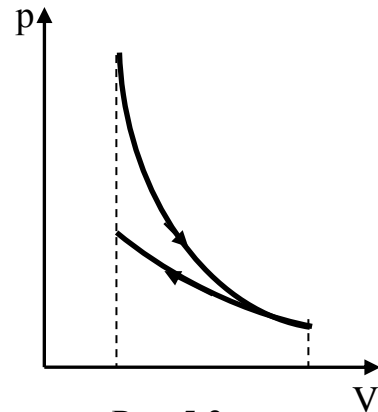
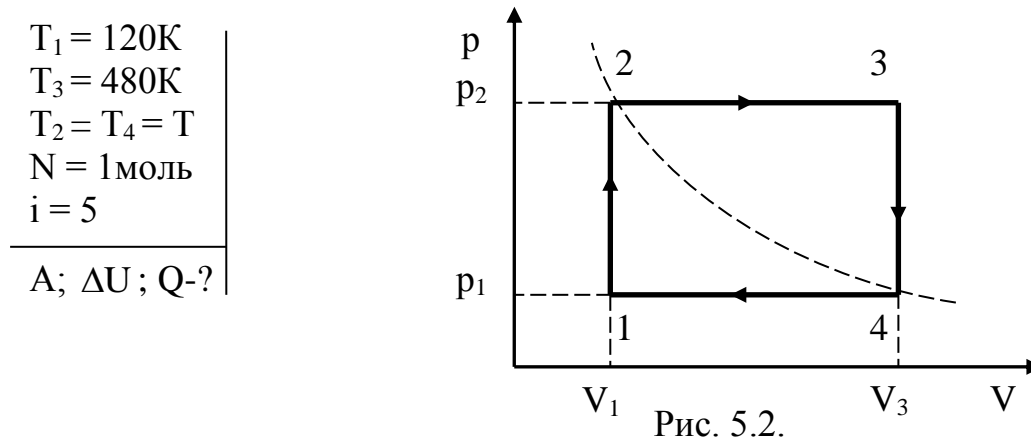


Рис.5.3.

Відповідь:  $T_2 = 157\text{K}$ ;  $A_1 = 2,97 \text{ кДж}$ ;  $A_2 = -2,10 \text{ кДж}$ ;  $A = 0,87 \text{ кДж}$ .

**Приклад 5.9.** Стан одного молю двохатомного ідеального газу змінюється за замкненим циклом, який складається з двох ізобарних та двох ізохорних процесів (рис.5.2). У стані 1 температура газу  $T_1 = 120\text{K}$ , у стані 3 температура газу  $T_3 = 480\text{K}$ . У станах 2 і 4 температура газу є однаковою. 1) Визначити роботу газу за цикл; 2) зміну внутрішньої енергії та кількість теплоти, отриманої газом за цикл.



#### Розв'язання

1) Робота газу за цикл дорівнює сумі робіт на окремих ділянках:

$$A = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1}.$$

Процеси 1 – 2 і 3 – 4 є ізохоричними. Отже, на цих ділянках об'єм газу не змінюється і, відповідно, робота дорівнює нулю. При ізобаричному поширенні (на ділянці 2 – 3) тиск є постійним і робота газу

$$A_{2-3} = \int_{2-3} p dV = p_2 \int_{V_1}^{V_3} dV = p_2 (V_3 - V_1). \quad (1)$$

Ця величина дорівнює площі прямокутника під лінією процесу.

З урахуванням рівняння Менделєєва – Клапейрона  $pV = \nu RT$  виразу (1) можна надати вигляду

$$A_{2-3} = \nu R (T_3 - T_2).$$

Аналогічно отримуємо формулу для роботи на ділянці 4 – 1.

$$A_{4-1} = p_1 (V_1 - V_3) = \nu R (T_1 - T_4).$$

Оскільки  $V_1 < V_3$ , то отримане значення роботи  $A_{4-1} < 0$ . Робота також дорівнює площі прямокутника під лінією процесу, але з від'ємним знаком. Повна робота за цикл дорівнює площі прямокутника 1–2–3–4–1 або

$$\dot{A} = \nu R (T_3 - T_2 + T_1 - T_4).$$

За умовою задачі  $T_2 = T_4 = T$ . Тоді

$$\dot{A} = \nu R (T_3 - 2T + T_1). \quad (2)$$

Температуру  $T$  виражаємо за допомогою рівняння стану ідеального газу Менделєєва – Клапейрона, записаного для станів 1, 2, 3 та 4:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1; \quad (3)$$

$$p_2 V_1 = \nu R T; \quad (4)$$

$$p_2 V_3 = \nu R T_3; \quad (5)$$

$$p_1 V_3 = \nu R T. \quad (6)$$

З рівнянь (3) і (4) отримуємо  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T}; \quad (7)$

з рівнянь (6) і (5):  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T}{T_3}. \quad (8)$

Порівняння виразів (7) і (8) знаходимо  $\frac{T_1}{T} = \frac{T}{T_3}$  або  $T = \sqrt{T_1 T_3}$ .

Підстановка знайденого значення  $T$  у формулу (2) дає:

$$\Delta A = \nu R (T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3} + T_1) = \nu R (\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2. \quad (9)$$

$$A = 1 \cdot 8,31 \cdot (\sqrt{480} - \sqrt{120})^2 = 998 \text{ (Дж)}.$$

2) Внутрішня енергія є функцією стану, тому її зміна за цикл дорівнює нулю:

$$\Delta U = U_1 - U_1 = 0.$$

3) На ділянці 1 – 2 газ нагрівається при постійному об'ємі. Тобто його внутрішня енергія змінюється тільки за рахунок отриманої кількості теплоти

$$\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} = \nu C_V (T - T_1). \quad (10)$$

На ділянці 2 – 3 процес нагрівання продовжується, зростає внутрішня енергія газу і, окрім того, газ виконує роботу. З урахуванням постійності тиску в процесі отримуємо:

$$Q_{2-3} = \Delta U_{2-3} + A_{2-3} = \nu C_p (T_3 - T). \quad (11)$$

На ділянках 3 – 4 та 4 – 1, які є аналогічними ділянкам 1 – 2 та 2 – 3, процеси йдуть зі зменшенням температури, а робота здійснюється над газом, тому для цих ділянок  $Q < 0$ .

Таким чином, кількість теплоти, отриманої газом за цикл, згідно формулам (10), (11) з урахуванням виразів для молярних теплоємностей ідеального газу

$$C_v = \frac{i}{2} R, \quad C_p = \frac{i+2}{2} R,$$

( $i = 5$  – кількість ступенів вільності молекул двоатомного газу) дорівнює

$$Q_{\text{отд}} = \frac{\nu R}{2} (i(T - T_1) + (i+2)(T_3 - T)) = \frac{\nu R}{2} (i(T_3 - T_1) + 2(T_3 - T)).$$

Обчислення при  $T = \sqrt{120 \cdot 480} = 240 \text{ К}$  дає:

$$Q_{\text{іодіі}} = \frac{1}{2} \cdot 8,31 \cdot (5(480 - 120) + 2(480 - 240)) = 9,47 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Відповідь:  $A = 998 \text{ Дж}$ ;  $\Delta U = 0$ ;  $Q_{\text{іодіі}} = 9,47 \text{ кДж}$ .

**Приклад 5.10.** Один моль ідеального одноатомного газу бере участь у термодинамічному процесі, в якому його теплоємність змінюється за законом  $C = R \left( \frac{T_0^2}{T^2} \right)$ , де  $T_0 = 300 \text{ К}$ . При якій температурі об'єм газу буде максимальним?

Розв'язання

$\begin{array}{l} \nu = 1 \text{ моль} \\ C = R \left( \frac{T_0^2}{T^2} \right) \\ V = V_{\text{max}} \\ \hline T_{V_{\text{max}}} - ? \end{array}$	<p>У термодинамічному процесі, в якому бере участь газ, кількість наданої теплоти, внутрішня енергія і робота, що здійснюється газом, змінюються відповідно за законами:</p> $Q = C \Delta T = \frac{T_0^2}{T^2} R \Delta T; \quad (1)$ $\Delta U = \frac{3}{2} R \Delta T; \quad (2)$ $A = p \Delta V = \frac{RT}{V} \Delta V, \quad (3)$
--	--

де  $\Delta T$  – зміна температури газу;  $\Delta V$  – зміна його об'єму. Коефіцієнт  $\frac{3}{2}$  у виразі для  $\Delta U$  урахує одноатомний склад газу, а формула для роботи газу записана з урахуванням того, що кількість газу  $\nu = 1$  моль.

З урахуванням виразів (1) – (3) для газу з наданими за умовою властивостями перший закон термодинаміки набуває вигляду:

$$\frac{T_0^2}{T^2} R \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T + \frac{RT}{V} \Delta V. \quad (4)$$

Поділивши обидві частини рівняння (4) на  $\Delta T$ , у випадку нескінченно малих змін температури знаходимо

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{dV}{dT} = \frac{V}{T} \left( \frac{T_0^2}{T^2} - \frac{3}{2} \right).$$

Екстремальні значення об'єму газу відповідатимуть випадку, коли  $\frac{dV}{dT} = 0$ .

Прирівнюючи праву частину останнього співвідношення нулю, знаходимо, що екстремальна температура газу дорівнює

$$T_{\text{екстр}} = \sqrt{\frac{2}{3}} T_0 \approx 245 \text{ К.}$$

Замінивши в  $\frac{dV}{dt}T_0$  на  $T_{\text{еєнѳ}}$ , переконуємося в тому, що при цій температурі, об'єм газу дійсно максимальний, оскільки при  $T < T_{\text{еєнѳ}}$   $\frac{dV}{dT} > 0$ , а при  $T > T_{\text{еєнѳ}}$   $\frac{dV}{dT} < 0$ .

**Зауваження.** На питання завдання можливо відповісти в результаті декілька спрощеного розгляду: якщо згідно з умовами задачі в процесі при деякій температурі об'єм газу досягає свого максимуму, то в цій точці  $\frac{dV}{dT} = 0$ , а отже, в її околицях процес співпадає з ізохоричним, тобто теплоємність газу співпадає з теплоємністю в ізохоричному процесі

$$R \left( \frac{T_0}{T_{\text{еєнѳ}}} \right)^2 = \frac{3}{2} R \Rightarrow T_{\text{еєнѳ}} = \sqrt{\frac{2}{3}} T_0.$$

### Задачі для самостійного розв'язування

5.1. Паровий котел містить  $40 \text{ м}^3$  води при температурі  $225^\circ\text{C}$ . Яку кількість води при  $9^\circ\text{C}$  було додано, якщо встановилась загальна температура  $200^\circ\text{C}$ ? Зміною густини води при підвищенні температури знехтувати.

5.2. Стальне свердло масою  $0,090 \text{ кг}$ , нагріте при закалюванні до  $840^\circ\text{C}$ , занурили в посуд з машинним маслом при  $20^\circ\text{C}$ . Яку кількість масла слід взяти, щоб його кінцева температура не перевищувала  $70^\circ\text{C}$ ?

5.3. Для визначення температури печі, нагрітий у ній стальний болт масою  $0,30 \text{ кг}$ , кинули у мідний посуд масою  $0,20 \text{ кг}$  з водою при температурі  $15^\circ\text{C}$ . Температура води піднялась до  $32^\circ\text{C}$ . Маса води  $1,27 \text{ кг}$ . Обчислити температуру печі.

5.4. В батарею водяного опалення вода надходить при температурі  $80^\circ\text{C}$  по трубі перерізом  $500 \text{ мм}^2$  зі швидкістю  $1,2 \text{ см/с}$ , а виходить з батареї, маючи температуру  $25^\circ\text{C}$ . Скільки тепла отримало приміщення, що обігрівається, протягом доби?

5.5. Вода надходить у радіатори водяного опалення при  $341 \text{ К}$ , а виходить з них при  $313 \text{ К}$ . До якої температури нагріється повітря в кімнаті  $6 \times 5 \times 3 (\text{і}^3)$ , якщо початкова температура повітря в кімнаті  $279 \text{ К}$ , а через радіатори пройде  $40 \text{ л}$  води? Втрати тепла через стіни, вікна і підлогу становлять  $50\%$ .

- 5.6. Наскільки нагріється при штамповці кусок сталі масою 1,5 кг від удару молота масою 400 кг, якщо швидкість молота в момент удару 7,0 м/с, а на нагрівання сталі витрачається 60% енергії молота?
- 5.7. Трамвайний вагон масою 12,5 т, маючий швидкість 28,8 км/год, гальмує та зупиняється. Наскільки нагріються його 8 чавунних гальмівних колодок, якщо маса кожної колодки 9,0 кг та на їх нагрівання витрачається 60% кінетичної енергії вагону?
- 5.8. Яку кількість алюмінію можна нагріти від 283 К до температури плавлення у плавильній печі з ККД, яка дорівнює 26%, якщо спалити 25 кг нафти?
- 5.9. Стіни квартири, що виходять на вулицю, мають загальну площу 45 м<sup>2</sup>, товщину 0,06 м, коефіцієнт теплопровідності 0,80 Вт/(м · К) (цегла звичайна). Температура всередині квартири 295 К, зовні – 268 К. Яку кількість дров необхідно спалити, щоб підтримувати указану різницю температур незмінною протягом доби? ККД печі дорівнює 40%, утрата тепла через стіни становить 3/4 усіх теплових утрат.
- 5.10. На яку відстань вистачить місткості паливного баку автомобіля «Москвич-412» (46 л), якщо швидкість руху дорівнює 85 км/год., ККД двигуна – 25%, а потужність, що розвивається, в середньому складає 35% максимальної потужності (55 кВт)?
- 5.11. Двигун реактивного літака з ККД 20% при польоті зі швидкістю 1800 км/год. розвиває силу тяги 88,2 кН. Знайти витрату керосину за одну годину польоту і потужність, що розвиває двигун.
- 5.12. Дехто бажає скинути зайву вагу за допомогою дієти. Він зменшує свій раціон таким способом, щоб необхідні йому щоденно 1000 ккал отримувати лише за рахунок жирових відкладень. Яку вагу він втратить за тиждень?
- 5.13. Повна людина для того, щоб схуднути, кожен день на протязі однієї години займається фізичними вправами, витрачаючи при цьому додаткову потужність 400 Вт. Яку вагу вона може втратити за тиждень?
- 5.14. Визначити для водню питому теплоємність при постійному об'ємі  $c_v$  і питому теплоємність  $c_p$  при постійному тиску.
- 5.15. Різниця питомих теплоємностей деякого двоатомного газу  $c_v$ - $c_p$  дорівнює 346 Дж/(кг·К). Знайти молярну масу  $M$  цього газу.
- 5.16. Визначити молярну масу  $M$  двоатомного газу, якщо його питомі теплоємності  $c_v = 649$  Дж/(кг·К) і  $c_p = 912$  Дж/(кг·К).
- 5.17. Знайти показник  $\gamma$  адіабати для кисню.
- 5.18. Визначити молярні теплоємності  $C_v$  і  $C_p$  газу, якщо відомо, що його питомі теплоємності  $c_v = 866$  Дж/(кг·К) і  $c_p = 1212$  Дж/(кг·К).
- 5.19. Знайти питому теплоємність  $c_v$  і  $c_p$ , а також коефіцієнт Пуассона  $\gamma$  для вуглекислого газу (CO<sub>2</sub>). Зв'язок між атомами вважати жорстким.
- 5.20. Густина деякого двоатомного газу при нормальних умовах дорівнює  $\rho = 0,088$  кг/м<sup>3</sup>. Визначити його питомі теплоємності  $c_v$  і  $c_p$ .

- 5.21. Коефіцієнт Пуассона для газу  $\gamma = 1,4$ , а молярна маса цього газу  $M = 24 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ . Знайти питомі теплоємності  $c_v$  і  $c_p$  газу.
- 5.22. Визначити теплоємність  $C$  двоатомного газу при постійному тиску, якщо при температурі  $t = 27^\circ\text{C}$  і тиску  $P = 750 \text{ мм рт.ст.}$  він займає об'єм  $V = 1 \text{ л}$ .
- 5.23. Визначити питомі теплоємності  $c_v$  і  $c_p$  для суміші, яка складається з 85% кисню ( $\text{O}_2$ ) і 15% озону ( $\text{O}_3$ ). Зв'язок між атомами вважати жорстким.
- 5.24. У закритому балоні об'ємом  $V = 10 \text{ л}$  міститься  $m = 12 \text{ г}$  гелію при температурі  $t = 7^\circ\text{C}$ . Після нагрівання тиск у балоні збільшився до  $P = 1 \cdot 10^5 \text{ мм рт. ст.}$  Яку кількість теплоти  $Q$  надано газу?
- 5.25. Яку кількість тепла  $Q$  треба надати  $m = 14 \text{ г}$  азоту, щоб підвищити його температуру на  $\Delta T = 20 \text{ К}$  при постійному тиску?
- 5.26. У закритій посудині об'ємом  $V = 5 \text{ л}$  міститься повітрі при нормальних умовах. Яку кількість тепла  $Q$  треба надати газу, щоб підвищити його температуру вдвічі? Повітря вважати двоатомним газом.
- 5.27. Яку масу  $m$  азоту можна нагріти від температури  $t_1 = 17^\circ\text{C}$  до температури  $t_2 = 27^\circ\text{C}$  в умовах постійного тиску, якщо надати йому кількість теплоти  $Q = 291 \text{ Дж}$ .
- 5.28. У закритій посудині міститься  $m_1 = 24 \text{ г}$  азоту і  $m_2 = 80 \text{ г}$  аргону. Знайти зміну внутрішньої енергії  $\Delta U$  суміші при нагріванні від температури  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 50^\circ\text{C}$ .
- 5.29. Кисень масою  $m = 48 \text{ г}$  який має температуру  $t = 27^\circ\text{C}$ , нагріли при постійному тиску  $P$  так, що його об'єм  $V$  збільшується вдвічі. Визначити : 1) роботу  $A$ , яку виконав газ ; 2) зміну внутрішньої енергії  $\Delta U$ ; 3) кількість теплоти  $Q$ , яку отримав газ.
- 5.30. Гелій масою  $m = 8 \text{ г}$  міститься у закритій посудині при температурі  $t = 27^\circ\text{C}$ . Яку кількість теплоти  $Q$  треба надати гелію, щоб збільшити його середньоквадратичну швидкість  $v_{\text{кв}}$  вдвічі? У скільки разів при цьому збільшиться температура газу?
- 5.31. При ізотермічному розширенні  $m = 12 \text{ г}$  кисню, який має температуру  $t = 27^\circ\text{C}$ , його об'єм збільшився вдвічі. Знайти роботу, яку виконав газ.
- 5.32.  $m = 2 \text{ кг}$  азоту стискають адіабатично, внаслідок чого його температура збільшується від  $t_1 = 17^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 147^\circ\text{C}$ . Визначити роботу  $A$ , яку виконує азот при цьому процесі.
- 5.33. При адіабатичному розширенні двох кіломолів ( $\nu = 2 \cdot 10^3 \text{ моль}$ ) двоатомний газ виконав роботу  $A = 8,31 \text{ кДж}$ . На скільки зменшилась при цьому температура  $T$  газу?
- 5.34. Внаслідок адіабатичного стиснення  $m = 1 \text{ кг}$  кисню нагрівається від  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ . Визначити збільшення внутрішньої енергії газу  $\Delta U$ .
- 5.35. Яку роботу виконує  $m = 6 \text{ кг}$  водню, поширюючись при ізобарному нагріванні від  $t_1 = 5^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 155^\circ\text{C}$ ?



- 5.36. 1 моль одноатомного ідеального газу знаходиться у закритій посудині при температурі  $t = 27^\circ\text{C}$ . Яку кількість теплоти слід надати газу, щоб його тиск збільшився в  $n = 3$  рази.
- 5.37. У теплоізолюваній посудині в початковий момент часу знаходиться одноатомний ідеальний газ і при температурі  $T_0 = 300\text{K}$  і залізо масою  $m = 0,2\text{кг}$  при температурі  $T = 500\text{K}$ . Початковий тиск газу  $p_0 = 10^5\text{Па}$ , його об'єм  $V = 1000\text{см}^3$ . Питома теплоємність заліза  $C = 450\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{K})$ . Визначити тиск газу в початковому стані.
- 5.38. При ізобаричному нагріванні газу від  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 50^\circ\text{C}$  газ виконує роботу  $A = 2,5\text{кДж}$ . Знайти кількість молекул  $N$  газу, що беруть участь у процесі.
- 5.39. Визначити роботу ізобарного поширення  $\nu = 2$  моль ідеального газу, якщо відомо, що концентрація молекул у кінцевому стані у  $q = 2$  рази менша за початкову при температурі  $T_1 = 300\text{K}$ .
- 5.40. Деякий газ поширюється від об'єму  $V_1 = 1\text{л}$  до об'єму  $V_2 = 11\text{л}$ . Тиск при цьому змінюється за законом  $p = a \cdot V$ , де  $a = 4 \cdot 10^3\text{Па}/\text{м}^3$ . Знайти роботу газу.
- 5.41. Газ розширюється від об'єму  $V_1 = 3\text{ м}^3$  до об'єму  $V_2 = 5\text{м}^3$  таким способом, що його тиск змінюється за законом  $p = a - b \cdot V$ , де  $a = 3,5 \cdot 10^4\text{Па}$  і  $b = 0,5 \cdot 10^4\text{Па}/\text{м}^3$ . Знайти роботу газу в цьому процесі.
- 5.42. У теплоізолюваному циліндрі під теплонепроникним поршнем знаходиться одноатомний ідеальний газ. Початкові параметри газу: тиск  $p_0 = 10^5\text{Па}$ ; об'єм  $V_0 = 3\text{дм}^3$ ; температура  $T_0 = 300\text{K}$ . При стисканні газу над ним виконали роботу  $A = 90\text{Дж}$ . Знайти температуру газу після стискання.
- 5.43. Наскільки збільшиться внутрішня енергія одноатомного ідеального газу в процесі ізобарного поширення, якщо газу надали при цьому кількість теплоти  $Q = 30\text{ кДж}$ ?
- 5.44. Водень масою  $m = 0,5\text{кг}$  бере участь у процесі, під час якого спочатку його тиск ізохорно зменшують у  $n = 5$  разів, а потім його об'єм ізобарно збільшують так, що початкова і кінцева температури газу в процесі співпадають. Яку роботу здійснив газ у процесі, якщо його початкова температура  $T_0 = 500\text{K}$ ?
- 5.45. Ідеальний двоатомний газ стискають до об'єму в  $n = 5$  разів меншого за початковий а) ізотермічно; б) адіабатично. 1) У якому з процесів і у скільки разів робота, що виконується при стисканні, буде більшою? 1) Внаслідок якого з процесів внутрішня енергія газу зросте та у скільки разів?

5.46. Вважаючи, що молярна теплоємність ідеального газу  $C_V$  при постійному об'ємі є відомою, вивести формулу для величини молярної теплоємності газу у процесі, який описує закон:

а)  $V = \frac{\alpha}{T}$ ; б)  $V = \alpha T^2$ ; в)  $p = \alpha V$ .

5.47. Один моль ідеального одноатомного газу приймає участь у термодинамічному процесі, в якому його теплоємність змінюється за законом  $C = R \left( \frac{T_0}{T} \right)$ , де  $T_0 = 400$  К. При якій температурі тиск газу буде мінімальним?

5.48. Один моль ідеального одноатомного газу приймає участь у термодинамічному процесі, в якому його теплоємність змінюється за законом  $C = R \left( \frac{T_0^2}{T^2} \right)$ , де  $T_0 = 300$  К. При якій температурі тиск газу буде максимальним?

5.49. Один моль газу  $N_2$ , який займав при атмосферному тиску об'єм  $V_1 = 22,4$  л, адіабатично стискається до об'єму  $V_2 = \frac{V_1}{2}$ , а потім ізотермічно поширюється до початкового об'єму. Побудувати графік процесу. Обчислити:

- 1)  $p_2$  і  $T_2$ ; б)
- 2) роботу  $A_1$  при адіабатичному стисканні;
- 3) роботу  $A_2$  при ізотермічному розширенні та повну роботу  $A$ , яку виконав газ;
- 4) кінцеву температуру  $T_3$ ; 5)  $C_V(T_3 - T_1)$ .

5.50.1 – 5.50.25. Ідеальний газ здійснює цикл  $a - b - c - d - a$ , що складається з послідовних процесів, указаних в таблиці 5.1 у відповідності з номером варіанту. Побудувати цикл у координатах  $p - V$  і визначити для одного з процесів величину, яка указана в останньому стовпчику таблиці. Дано: маса газу  $m = 1$  г,  $p_1 = 0,2$  МПа,  $p_2 = 0,1$  МПа,  $p_3 = 0,15$  МПа,  $V_1 = 1$  л,  $V_2 = 2$  л.

Для усіх ділянок циклу укажіть знак зміни внутрішньої енергії і визначте: отримує чи віддає газ тепло; чи здійснює газ роботу, чи робота здійснюється над газом.

**Примітки:** 1) символи  $d = a$  означають відсутність процесу  $d \rightarrow a$ , тобто точки  $d$  і  $a$  співпадають; 2) символи типу  $p = \text{const}$ ;  $T = \text{const}$  означають відповідні ізопроцеси; 3) запис  $Q = 0$  означає адіабатний процес.

Таблиця 5.1. Завдання до задач 5.50.1 – 5.50.25.

Номер задачі	Газ	Параметри	Вид процесу				Знайти
			$a \rightarrow b$	$b \rightarrow c$	$c \rightarrow d$	$d \rightarrow a$	
73.1	$N_2O$	$V_a = V_1, V_b = V_2,$ $p_a = p_1, p_c = p_2$	$p = \text{const}$	$T = \text{const}$	$p = \text{const}$	$Q=0$	$A_{d \rightarrow a}$
73.2	$CO_2$	$V_a = V_1, V_b = V_2,$ $V_c = V_1, p_b = p_2$	$T = \text{const}$	$p = \text{const}$	$V = \text{const}$	$d=a$	$Q_{c \rightarrow d}$
73.3	$O_2$	$V_b = V_2, p_c = p_2,$ $p_a = p_1$	$p = \text{const}$	$V = \text{const}$	$T = \text{const}$	$d=a$	$Q_{a \rightarrow b}$
73.4	$C_2H_4$	$V_a = V_1, V_b = V_2,$ $p_a = p_1, p_c = p_2$	$p = \text{const}$	$T = \text{const}$	$p = \text{const}$	$T = \text{const}$	$Q_{c \rightarrow d}$
73.5	$H_2O$	$V_a = V_1, V_b = V_2,$ $p_a = p_1, p_c = p_2$	$p = \text{const}$	$Q=0$	$p = \text{const}$	$Q=0$	$A_{b \rightarrow c}$
73.6	$N_2$	$V_b = V_2, V_d = V_1,$ $p_a = p_1, p_d = p_2$	$T = \text{const}$	$V = \text{const}$	$T = \text{const}$	$V = \text{const}$	$Q_{b \rightarrow c}$
73.7	$NO$	$V_c = V_1, p_b = p_2,$ $p_a = p_1$	$Q=0$	$T = \text{const}$	$V = \text{const}$	$d=a$	$A_{a \rightarrow b}$
73.8	$CH_4$	$V_b = V_2, V_d = V_1,$ $p_b = p_1, p_c = p_2$	$Q=0$	$V = \text{const}$	$Q=0$	$V = \text{const}$	$Q_{b \rightarrow c}$
73.9	$He$	$V_b = V_2, p_b = p_2,$ $p_a = p_1$	$T = \text{const}$	$V = \text{const}$	$Q=0$	$d=a$	$A_{c \rightarrow d}$
73.10	$H_2$	$V_a = V_1, V_b = V_2,$ $p_b = p_2$	$T = \text{const}$	$p = \text{const}$	$Q=0$	$d=a$	$Q_{b \rightarrow c}$

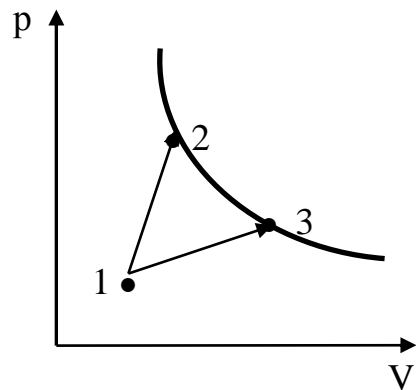
73.11	H <sub>2</sub> O	$V_a = V_1, V_b = V_2,$ $p_a = p_1$	$p =$ const	$Q=0$	$T =$ const	$d=a$	$A_{b \rightarrow c}$
73.12	C	$V_c = V_1, V_b = V_2,$ $p_b = p_2$	$Q=0$	$p =$ const	$V =$ const	$d=a$	$A_{a \rightarrow b}$
73.13	CO <sub>2</sub>	$V_a = V_1, V_b = V_2,$ $p_a = p_1$	$p =$ const	$V =$ const	$Q=0$	$d=a$	$Q_{b \rightarrow c}$
73.14	H <sub>2</sub> O	$V_a = V_1, V_b = V_2,$	$p_a = p_1,$ const	$p_c = p_2$	$p =$ const	$T =$ const	$Q_{c \rightarrow d}$
73.15	CH <sub>4</sub>	$V_b = V_2, V_d = V_1,$	$p_b = p_1,$	$p_c = p_2$ const	$T =$ const	$V =$ const	$Q_{d \rightarrow a}$
73.16	NO	$V_b = V_2, V_d = V_1,$	$p_a = p_1,$ const	$p_d = p_2$ const	$Q=0$	$V =$ const	$A_{c \rightarrow d}$
73.17	NH <sub>3</sub>	$V_b = V_2, V_d = V_1,$	$p_a = p_1,$ const	$p_c = p_2$ const	$p =$ const	$V =$ const	$Q_{c \rightarrow d}$
73.18	H <sub>2</sub>	$V_b = V_2, V_d = V_1,$	$p_b = p_1,$ const	$p_c = p_2$ const	$p =$ const	$V =$ const	$Q_{b \rightarrow c}$
73.19	Ar	$V_a = V_1, V_b = V_2,$	$p_a = p_1,$ const	$p_c = p_2$ const	$p =$ const	$Q=0$	$A_{d \rightarrow a}$
73.20	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	$V_d = V_1, V_b = V_2,$	$p_a = p_1,$ const	$p_c = p_2$	$p =$ const	$V =$ const	$Q_{d \rightarrow a}$
73.21	H <sub>2</sub> O	$V_d = V_1, V_b = V_2,$	$p_b = p_1,$	$p_c = p_2$ const	$p =$ const	$V =$ const	$A_{a \rightarrow b}$
73.22	O <sub>2</sub>	$V_a = V_1, V_b = V_2,$	$p_a = p_1,$ const	$p_c = p_3$ const	$p =$ const	$T =$ const	$Q_{b \rightarrow c}$
73.23	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	$V_a = V_1, V_b = V_2,$	$p_c = p_2,$ const	$p_a = 2p_1$ const	$Q=0$	$V =$ const	$A_{c \rightarrow d}$
73.24	NH <sub>3</sub>	$V_d = V_1, V_b = V_2,$	$p_c = p_2,$ const	$p_a = 2p_1$ const	$Q=0$	$V =$ const	$Q_{b \rightarrow c}$
73.25	Ne	$V_d = V_1, V_b = V_2,$	$p_c = p_2,$ const	$p_a = 2p_1$ const	$T =$ const	$V =$ const	$Q_{c \rightarrow d}$

## Тестові завдання.

### Вибрати вірну відповідь:

1. До внутрішньої енергії ідеального газу входить
  - 1) потенціальна енергія взаємодії молекул;
  - 2) потенціальна енергія газу в зовнішньому потенціальному полі;
  - 3) кінетична енергія руху посудини, в яку поміщений газ;
  - 4) кінетична енергія хаотичного руху молекул газу.
2. Внутрішня енергія ідеального газу залишається постійною під час процесу
  - 1) адіабатного;    2) ізотермічного;    3) ізохорного;    4) ізобарного.
3. Внутрішня енергія ідеального газу зменшується при:
  - 1) адіабатному розширенні;    3) ізохорному нагріванні;
  - 2) ізотермічному стисканні;    4) ізобарному поширенні.
4. Найменше значення внутрішньої енергії при однаковій температурі має 1 моль
  - 1) гелію (He);    4) азоту (N<sub>2</sub>);
  - 2) водяної пари (H<sub>2</sub>O);    5) кисню (O<sub>2</sub>).
  - 3) водню (H<sub>2</sub>);(Гази вважати ідеальними)
5. Найбільше значення внутрішньої енергії при однаковій температурі має 1 моль
  - 1) гелію (He);    4) азоту (N<sub>2</sub>);
  - 2) водяної пари (H<sub>2</sub>O);    5) кисню (O<sub>2</sub>);
  - 3) водню (H<sub>2</sub>);(Гази вважати ідеальними.)
6. Найменшу молярну теплоємність  $C_v$  має
  - 1) водень (H<sub>2</sub>);    4) аргон (Ar);
  - 2) кисень (O<sub>2</sub>);    5) водяна пара (H<sub>2</sub>O)ю
  - 3) діоксид карбону (CO<sub>2</sub>);
7. Молярна теплоємність одноатомного газу, виміряна при постійному об'ємі  $C_v$ , визначається за формулою
  - 1)  $C_v = \frac{3}{2}R$ ;    2)  $C_v = \frac{5}{2}R$ ;    3)  $C_v = 3R$ ;    4)  $C_v = \frac{7}{2}R$ .
8. При наданні ідеальному газу тієї самої кількості теплоти найбільше підвищення температури  $\Delta T$  досягається під час процесу
  - 1) адіабатного;    3) ізотермічного;
  - 2) ізохорного;    4) ізобарного.
9. Під час адіабатного розширення газу його температура:
  - 1) збільшується    3) зменшується
  - 2) не змінюється    4) зміна залежить від зовнішніх умов.
10. Рівняння адіабати виражає формула
  - 1)  $PV = \text{const}$ ;    2)  $PV = \frac{m}{M}RT$ ;    3)  $PV = \frac{2}{3}W_k$ ;    4)  $PV^\gamma = \text{const}$ .
11. Температура ідеального газу підвищується під час
  - 1) ізотермічного розширення;    3) адіабатного стискання;
  - 2) ізобарного стискання;    4) адіабатного розширення.
12. Найбільш повне перетворення отриманої газом теплоти в роботу відбувається при процесі
  - 1) адіабатному;    3) ізохорному;
  - 2) ізотермічному;    4) ізобарному.

13. Газ поширюється вдвічі. Робота, яку виконує газ, а) найменша; б) найбільша, якщо поширення
- 1) адіабатне; 2) ізотермічне;
  - 3) ізобарне; 4) характер процесу не вплине на величину роботи
14. При стисканні газу його об'єм зменшився удвічі. Робота, яка виконується зовнішніми силами а) найменша; б) найбільша, якщо процес стискання
- 1) ізотермічний; 3) ізобарний;
  - 2) адіабатний; 4) величина роботи не залежить від процесу.
15. Робота ідеального газу дорівнює нулю при процесі
- 1) адіабатному; 3) ізохорному;
  - 2) ізотермічному; 4) ізобарному.
16. Якщо кількість теплоти, яку отримав ідеальний газ, чисельно дорівнює зміні його внутрішньої енергії, то газ здійснив
- 1) ізотермічний процес; 4) адіабатний процес;
  - 2) ізобарний процес; 5) такий процес неможливий.
  - 3) ізохорний процес;
17. Якщо робота, яку здійснив ідеальний газ без теплообміну з оточуючими тілами, чисельно дорівнює збільшенню його внутрішньої енергії, то газ здійснив
- 1) ізотермічний процес; 4) адіабатний процес;
  - 2) ізобарний процес; 5) такий процес неможливий. 3) ізохорний процес;
18. Ідеальному газу надали 10 кДж теплоти. При цьому його внутрішня енергія збільшилась на 16 кДж. Робота, яку виконав газ, дорівнює:
- 1) 6 кДж; 4) 10 кДж;
  - 2) 26 кДж; 5) такий процес неможливий.
  - 3) – 6 кДж;
19. При ізобарному нагріванні на ту саму температуру однакових мас водню і кисню відношення роботи водню  $A_1$  до роботи кисню  $A_2$  дорівнює
- 1)  $\frac{A_1}{A_2} = 1$ ; 2)  $\frac{A_1}{A_2} = 4$ ; 3)  $\frac{A_1}{A_2} = 16$ ; 4)  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$ ; 5)  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{16}$ .
20. У скільки разів кількість теплоти, яка витрачається на нагрівання газу при постійному тиску, більша роботи, яку виконує газ внаслідок свого розширення в процесі нагріву? ( $C_p$  – молярна теплоємність газу при постійному тиску.)
- 1)  $\frac{C_p}{R}$ ; 2)  $\frac{2C_p}{R}$ ; 3)  $\frac{C_p}{2R}$ ; 4)  $\frac{R}{C_p}$ ; 5)  $\frac{2R}{C_p}$ .
21. Газ нагрівають двічі з того самого початкового стану (1) до однакової кінцевої температури (точки 2 і 3 лежать на одній ізотермі). У якому з процесів газу надали більшу кількість теплоти?
- 1) 1 – 2;
  - 2) 1 – 3;
  - 3) однаково;
  - 4) відповідь залежить від різниці тисків  $p_2 - p_3$ ;
  - 5) відповідь залежить від різниці об'ємів  $V_2 - V_3$ .



22. У деякому процесі тиск і об'єм газу змінюються за законом  $pV^3 = \text{const}$ . Якщо об'єм газу збільшиться у 2 рази, то його внутрішня енергія зменшиться у

- 1) 1,5 рази; 2) 2 рази; 3) 4 рази; 4) 6 разів; 5) 8 разів.

23. Якщо при охолодженні 3 кг речовини на 2 К виділилось 2340 Дж теплоти, то питома теплоємність речовини дорівнює

- 1) 347 Дж/кг; 2) 390 Дж/кг; 3) 293 Дж/кг; 4) 3510 Дж/кг; 5) 1560 Дж/кг.

**Установити відповідність:**

24. Газ Кількість ступенів вільності  $i$  молекули при кімнатних температурах

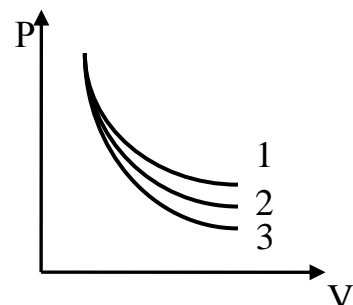
- |                      |      |
|----------------------|------|
| 1) одноатомний газ   | А) 5 |
| 2) двоатомний газ    | Б) 6 |
| 3) багатоатомний газ | В) 3 |

25. Процес Формула, за якою обчислюється робота газу в процесі:

- |                 |  |
|-----------------|--|
| 1) ізотермічний | А) $A = P(V_2 - V_1)$                              |
| 2) адіабатний   | Б) $A = 0$   |
| 3) ізохорний    | В) $A = \nu RT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$ |
| 4) ізобарний    | Г) $A = \nu C_v (T_1 - T_2)$                       |

26. На рисунку показаний хід трьох адіабат для газів з різною кількістю атомів у молекулі.

- | Кількість молекул    | Номер кривої |
|----------------------|--------------|
| 1) одноатомний газ   | А) 1         |
| 2) двоатомний газ    | Б) 2         |
| 3) багатоатомний газ | В) 3         |



27. Рівняння будь якого процесу у газі можна записати у вигляді  $PV^n = \text{const}$ .

Показник політропи  $n$  визначає характер процесу.

- | процес          | показник          |
|-----------------|-------------------|
| 1) ізобарний    | А) $n=1$          |
| 2) ізотермічний | Б) $n=0$          |
| 3) адіабатний   | В) $n=\pm \infty$ |
| 4) ізохорний    | Г) $n=C_p/C_v$    |

## РОЗДІЛ 6. ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ. ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. ЕНТРОПІЯ СИСТЕМИ

**Тема:** Другий закон термодинаміки. Теплові машини та їх ККД. Поняття ентропії у термодинаміці. Теорема Нернста. Зміна ентропії в різних процесах. Термодинамічна ймовірність стану. Поняття ентропії у статистичній фізиці.

- Перший закон термодинаміки, закон збереження і перетворення енергії, дає кількісну і, в той же час, якісну характеристику перетворення енергії. Однак, перший закон термодинаміки не указує напряму процесів і не має ніяких обмежень в цьому відношенні. Навіть ділення процесів на прямі та зворотні не є характерним для I-го начала термодинаміки, бо воно не розглядає особливих, переважних напрямів процесів у природі та техніці. Так перший закон термодинаміки не розрізняє перетворення роботи у тепло ( $A \rightarrow Q$ ) і теплоти в роботу ( $Q \rightarrow A$ ). Хоча кількісні співвідношення в обох перетвореннях відбуваються відповідно першому закону термодинаміки, між цими перетвореннями існує суттєва різниця. Перетворення роботи в тепло – перетворення енергії, яке відбувається природним шляхом. Перетворення теплоти в роботу здійснюється при виконанні певних умов. Про ці умови і говориться в другому законі термодинаміки. В цьому сенсі друге начало термодинаміки є необхідним доповненням до першого закону.

- Усі природні процеси, які відбуваються з макроскопічними тілами, свідчать про протікання їх в одному напрямку:

- теплота переходить від гарячого тіла до холодного, але ніколи не переходить самочинно в оберненому напрямі – від холодного тіла до гарячого;

- гази легко змішуються, газ завжди прагне зайняти найбільший об'єм, два компоненти легко змішуються у розчині, але ніколи не розділяються самочинно.

Тобто, самочинні процеси у реальності, що оточує нас, йдуть у напрямі переходу системи від станів менш ймовірних до більш ймовірних станів. Найбільш ймовірним станом є такий, при якому ізольована система, що представлена самій собі, знаходиться у повній рівновазі. Повна рівновага означає відсутність умов, які характеризують напрям, тобто відсутність у системі будь-якого процесу: відсутня різниця температур, тиску, концентрацій.

Отже, в ізольованій системі всі самочинні природні процеси відбуваються у напрямі досягнення системою більш ймовірних станів. Такі процеси протікають тільки в одному напрямі: система не може повернутися у початковий стан за допомогою тих самих процесів.



Таким чином, необоротний характер усіх природних процесів є самим загальним положенням другого закону термодинаміки. У них полягає найбільш загальна суть II-го закону:

1. не всі процеси, які задовольняють першому закону термодинаміки, протікають у природі самочинно. Є процеси з перетвореннями енергії ( $Q \rightarrow A$ ), які самочинно йти не можуть.
  2. Усі реальні процеси протікають у певному напрямку – напрямку досягнення рівноваги системи, як найбільш ймовірного стану.
  3. Процеси йдуть до установаження рівноваги системи, тобто моменту вирівнювання інтенсивних властивостей системи (температури, тиску, концентрацій).
- Мірою імовірності реалізації деякого макроскопічного стану системи при заданих зовнішніх умовах є **ентропія**  $S$ , яка в статистичній фізиці визначається як

$$S = k \ln \Omega, \quad (6.1)$$

де  $\Omega$  – **статистична вага (термодинамічна ймовірність)** стану, або кількість мікроскопічних станів, шляхом яких може бути реалізований даний макроскопічний стан системи;  $k$  – стала Больцмана.

Статистичну вагу і ентропію системи, яка складається з  $N$  підсистем, визначають за формулами

$$\Omega = \Omega_1 \Omega_2 \dots \Omega_3, \quad (6.2)$$

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_3 \quad (6.3)$$

Згідно одного з формулювань другого закону термодинаміки **ентропія ізольованої системи не зменшується – вона зростає при необоротному процесі і залишається незмінною у випадку оборотних процесів.**

Властивості ентропії:

- ентропія є функцією стану системи;
- ентропія замкненої системи не змінюється при оборотному процесі і зростає, якщо процес є необоротним;
- у стані рівноваги системи ентропія максимальна;
- ентропія системи – це кількісна міра невпорядкованості стану системи.

- Стосовно теплового двигуна II закон термодинаміки дає відповідь на питання, за яких умов можливо перетворення теплоти в роботу, яка частина теплоти в тепловому двигуні перетворюється в роботу і т. ін., Існує декілька еквівалентних формулювань другого закону термодинаміки:

1) **Неможливий процес, єдиним результатом якого є виконання роботи за рахунок охолодження одного тіла.** Тобто неможливе створення вічного двигуна другого роду, тобто такого періодично діючого двигуна, який би отримував теплоту від одного резервуара і повністю перетворював його на роботу (У.Томсон – М.Планк).

2) Інакше (стосовно холодильних машин):

**неможливий процес, єдиним кінцевим результатом якого був би перехід теплоти від менш нагрітого тіла до більш нагрітого (Р.Клаузіус).**

Теплова машина, у тому числі тепловий двигун (паровий, внутрішнього згорання, газова турбіна, ...) – система, в основі роботи якої лежить цикл, при здійсненні якого, робоче тіло переходить у первинний стан.

Можливі три схеми термодинамічних циклів.

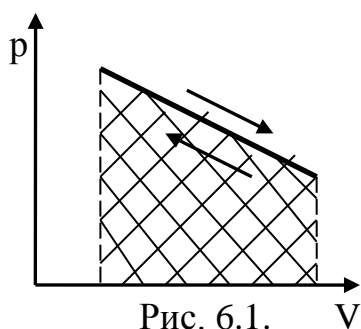


Рис. 6.1.

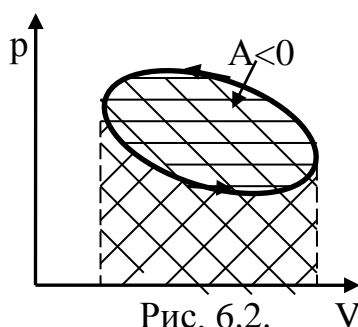


Рис. 6.2.

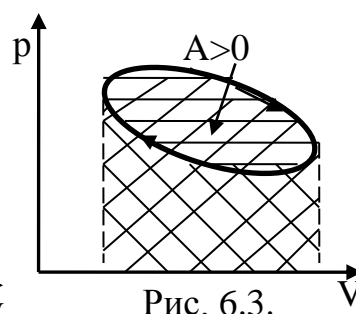


Рис. 6.3.

1. Лінія стиснення йде тим самим процесом, що й лінія розширення (рис.6.1):  $A_{\text{роз.}} = \text{площі} \text{ /// } - \text{позитивна робота розширення}$ ;  $A_{\text{ст.}} = \text{площі} \text{ \textbackslash\textbackslash\textbackslash } - \text{негативна робота стисання}$ . Повна робота за цикл дорівнює нулю.

2. Лінія стиснення йде вище лінії розширення (рис.4.2) (схема оберненого термодинамічного циклу; лежить в основі роботи холодильника):  $A_{\text{роз.}} = \text{площі} \text{ /// } - \text{позитивна робота розширення}$ ;  $A_{\text{ст.}} = \text{площі} \text{ \textbackslash\textbackslash\textbackslash } - \text{негативна робота стисання}$ . Повна робота за цикл буде від'ємною  $A = (A_{\text{роз.}} - A_{\text{ст.}}) < 0$  ( $\equiv$ ).

3. Лінія стиснення йде нижче лінії розширення (рис.4.3) (схема прямого термодинамічного циклу; лежить в основі роботи теплового двигуна):  $A_{\text{роз.}} = \text{площі} \text{ /// } - \text{позитивна робота розширення}$ ;  $A_{\text{ст.}} = \text{площі} \text{ \textbackslash\textbackslash\textbackslash } - \text{негативна робота стисання}$ . Повна робота за цикл буде додатною  $A = (A_{\text{роз.}} - A_{\text{ст.}}) > 0$  ( $\equiv$ ).

Для виконання останньої умови необхідно, щоб тому самому об'єму при розширенні відповідав більший тиск, ніж при стиснанні. Для цього необхідно робочому тілу в процесі розширення надавати теплоту ( $Q_1$ ) і відбирати теплоту ( $Q_2$ ) при стиснанні.

Отже, тепловий двигун може неперервно працювати лише при наявності двох теплових джерел: нагрівника, від якого робоче тіло отримує теплоту, і холодильника, якому робоче тіло віддає теплоту, не перетворену в роботу. В будь-якому тепловому двигуні тепло  $Q_1$  ніколи не перетворюється повністю на роботу  $A$  двигуна. Завжди  $Q_1 = Q_2 + A$ .

Термодинамічний коефіцієнт корисної дії (ККД) теплової машини

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (6.4)$$

де  $Q_1$  – теплота, яку отримало робоче тіло машини за один цикл;

$Q_2$  – теплота, яку робоче тіло віддало за цикл;

$A = Q_1 - Q_2$  – корисна робота, яку виконало робоче тіло за цикл.

У реальних теплових машинах ККД обмежений нерівністю Карно

$$\eta \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}, \quad (6.5)$$

де  $T_1$  – температура нагрівника,  $T_2$  – температура холодильника, тобто максимальна і мінімальна температури робочої речовини за цикл.

Рівність в формулі (6.2) досягається тільки в циклі Карно (оборотному циклі, який складається з двох ізотермічних і двох адіабатичних процесів (рис.6.4)).

У прямому циклі Карно

1-2 – ізотермічне поширення у контакті з нагрівником ( $T_1 = T_n$  і  $Q > 0$ );

2-3 – адіабатне поширення ( $Q = 0$ );

3-4 – ізотермічне стиснення у контакті з холодильником ( $T_2 = T_x$  і  $Q < 0$ );

4-1 – адіабатне стиснення ( $Q = 0$ ).

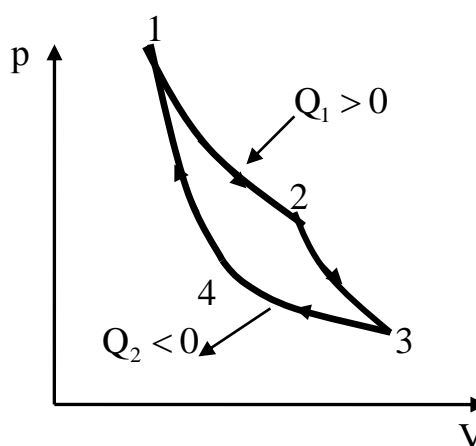


Рис. 6.4.

Для циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.6)$$

При виконанні оберненого циклу (рис.6.2) теплова машина працює як холодильник: за рахунок роботи  $A'$ , яка здійснюється над робочим тілом, тепло передається від тіла з меншою температурою (холодильна камера) до більш нагрітого тіла (навколишнє середовище). Ефективність роботи холодильника характеризує холодильний коефіцієнт:

$$\eta_x = \frac{Q'_2}{|Q'_1 - Q'_2|} = \frac{Q'_2}{A'}. \quad (6.7)$$

$Q'_2$  – кількість теплоти, відібраної від холодильника;  $Q'_1$  – кількість теплоти, переданої нагрівнику.

• В термодинаміці ентропія була введена на основі формулювання другого закону у вигляді нерівності (Р.Клаузіус)

$$dS \leq \frac{\delta Q}{T}, \quad (6.8)$$

де  $dS$  – зміна ентропії в елементарному процесі,  $\delta Q$  ( $dQ$ ) – елементарна кількість тепла, отриманого системою при температурі  $T$ .

Знак « $=$ » у формулі (6.8) є справедливим для рівноважних (оборотних) процесів, знак « $<$ » – для необоротних процесів.

Із співвідношення (6.8) можуть бути отримані формули

$$Q = \int_1^2 T dS; \quad (6.9)$$

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{C dT}{T}, \quad (6.10)$$

де врахований зв'язок  $\delta Q$  з теплоємністю  $C$  системи ( $\delta Q = C dT$ ).

Формули (6.9) і (6.10) дозволяють розрахувати теплообмін і зміну ентропії в різних процесах, у тому числі в тих, що відбуваються в теплових машинах.

● Розрахунок значення ентропії, що відповідає певному стану системи потребує визначення початку відліку, який задається **третім принципом термодинаміки** (тепловою теоремою В.Нернста): **при наближенні абсолютної температури до нуля ентропія системи прямує до нуля.**

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (6.11)$$

Наслідки з теореми:

1. При наближенні до абсолютного нуля теплоємності  $C_v$  і  $C_p$  прямують до нуля:

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_v = \lim_{T \rightarrow 0} C_p = \lim_{T \rightarrow 0} (C_p - C_v) = 0 \quad (6.12)$$

2. Недосяжність абсолютного нуля.

З виразу  $\lim_{T \rightarrow 0} (C_p - C_v) = 0$  випливає, що  $\lim_{T \rightarrow 0} \gamma = \lim_{T \rightarrow 0} \left( \frac{C_p}{C_v} \right) = 0$ , і

ізотерма  $T=0$  співпадає з адіабатою  $S=0$ . Тобто з наближенням до абсолютного нуля ефект адіабатичного охолодження дедалі зменшується, поки зовсім не зникає. Отже можна лише наблизитися до абсолютного нуля, який є недосяжним.

● Ентропія є однією з фундаментальних величин у фізиці. Як впливає із статистичної механіки, ентропія пов'язана з розподілом ймовірностей мікроскопічних станів системи (див. формулу (6.1)). Введення ентропії як характеристики стану термодинамічної системи обумовлено тим, що при термодинамічному підході до опису фізичної системи доводиться відмовитися від повної інформації про її мікроскопічний стан, що характеризується великим числом параметрів, і перейти до неповного (з точки зору класичної динаміки) макроскопічного опису за допомогою малого числа параметрів. Отже, ентропія тісним чином тісно пов'язана з таким поняттям, як інформація.

Найзагальніші положення теорії інформації:

- Інформацію вимірюють числом двійкових знаків (біт), за допомогою яких цей об'єм інформації можна записати (передати).

Повне число різних повідомлень (текстів), які можна записати за допомогою послідовності  $N$  двійкових знаків дорівнює  $2^N$ . Якщо припустити, що усі ці повідомлення (тексти) є рівно імовірними, то ймовірність появи цього тексту при випадковій генерації послідовності  $N$  двійкових знаків дорівнює  $P_N = 2^{-N}$ . Виходячи з цього, кількість інформації, що міститься в цьому повідомленні з  $N$  двійкових знаків, можна записати через величину імовірності випадкової появи цього повідомлення у вигляді

$$I = -\frac{\log P_N}{N}. \quad (6.13)$$

Проте, таке визначення кількості інформації не є цілком точним, оскільки не всяка послідовність двійкових знаків містить певну "смислову" інформацію. Так, наприклад, текстова інформація складається з послідовності букв алфавіту і розділових знаків, загальне число яких не більше ніж  $10^2$ . Отже, досить мати шість-сім двійкових знаків, щоб єдиним способом зіставити кожному символу їх певну комбінацію. Проте ймовірність появи в тексті різних символів є різною. Якщо розглядати текст як послідовність  $n$  символів, то кількість інформації, яку він несе, згідно з визначенням Шенона, дається наступним виразом:

$$I = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i, \quad (6.14)$$

де  $p_i$  – імовірність появи в тексті символу з номером  $i$ . Зауважимо, що поява у формулі (6.14) натурального логарифма означає, що тут у якості одиниці виміру інформації використовується вже не "біт", а "нат". Неважко зрозуміти, що об'єм інформації в одиницях "нат" відрізняється від того ж об'єму в одиницях "біт" множителем  $\ln 2$ :

$$I_{\text{нат}} = I_{\text{біт}} \ln 2. \quad (6.15)$$

- У теорії інформації вводиться також поняття інформаційної ентропії, яка надає міру невизначеності того чи іншого повідомлення. Пояснимо це на наступному прикладі. Уявимо собі, що ми отримали цілком певне повідомлення (текст), що складається з  $N$  символів. Ентропія цього повідомлення дорівнює нулю, оскільки воно відповідає єдиному тексту. Якщо при передачі повідомлення відбувається спотворення інформації (наприклад, відбувається втрата або перестановка декількох знаків), то ентропія повідомлення зростає. Це рівносильне тому, що випадковим чином переставити або замінити деяке число знаків цього повідомлення. При цьому певна кількість інформації залишається, оскільки сталася втрата тільки декількох знаків. У граничному випадку, якщо випадковим чином замінити або переставити усі  $N$  символів тексту, то станеться повна втрата інформації і ентропія такого повідомлення буде дорівнювати

$$S = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i. \quad (6.16)$$

Таким чином можна зробити висновок, що існує деякий закон збереження суми інформації і ентропії, який виражається співвідношенням

$$S + I = \text{const}. \quad (6.17)$$

Завдяки цьому, в розглянутих вище двох граничних випадках виходить, що формальна кількість інформації  $I$  (формула (6.14)) і кількість ентропії  $S$  (формула (6.16)) визначаються одним і тим же виразом. Проте, в першому випадку (6.14) – це один єдиний текст, відповідний певній кількості інформації, тоді як в другому випадку (6.16) – кількість інформації дорівнює нулю, а ентропія  $S$  має максимальне значення, яке визначається числом різних текстів, які можна записати за допомогою  $N$  символів.

### Методичні вказівки.

Задачі по даній темі можна поділити на три групи.

- Задачі на розрахунок ККД теплових машин (термодинамічних циклів), зокрема циклу Карно, з використанням формул (6.4) – (6.7), (5.2), (5.16), (5.26).
- Задачі на розрахунок теплоти  $Q$  або зміни ентропії  $\Delta S$  в процесах з використанням формул (6.9), (6.10), а також (5.2), (5.16), (5.26) – (5.29).

При розв'язуванні задач на розрахунок зміни ентропії використовуються найважливіші властивості ентропії: 1) ентропія є функцією стану; 2) ентропія є адитивною величиною, тобто ентропія складної системи дорівнює сумі ентропії її частин.

При розрахунку зміни ентропії за формулою (6.10) слід пам'ятати, що в ній  $dQ$  – кількість теплоти, отриманої тілом. Якщо тіло віддає тепло, величину  $dQ$  слід брати зі знаком «–».

Якщо перехід тіла з початкового стану у кінцевий здійснюється декількома процесами, що здійснюються послідовно, то повна зміна ентропії дорівнює алгебраїчній сумі змін ентропії у кожному процесі.

Співвідношення (6.10) виражає зміну ентропії тільки в оборотному процесі. У випадку необоротного процесу для розрахунку ентропії можна скористатися тим, що ентропія є функцією стану: її зміна визначається тільки початковим і кінцевим станами системи і не залежить від процесу, за допомогою якого здійснився перехід між ними. Тому достатньо розглянути процес, який би переводив систему в той самий кінцевий стан, але був оборотним, і визначити в ньому зміну ентропії.

- Задачі на розрахунок зміни ентропії  $\Delta S$  або термодинамічної ймовірності  $\Omega$  з використанням формул (6.2), (6.3).

**Приклад 6.1.** Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Температура нагрівника  $T_1=400$  К, холодильника  $T_2=300$  К. За кожен цикл машина отримує від нагрівника кількість теплоти  $Q_1=2,1$  кДж. Визначити 1) коефіцієнт корисної дії машини  $\eta$  і корисну роботу  $A$ , яку виконує машина за один цикл. 2) Яким буде холодильний коефіцієнт цієї машини, якщо вона буде здійснювати той самий цикл у зворотному напрямку?

Розв'язання

$T_1=400$ К	
$T_2=300$ К	
$Q_1=2,1$ кДж.	
$\eta, A - ?$	

1) Коефіцієнт корисної дії можна визначити або за формулою (6.4)

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \quad (1)$$

або (для циклу Карно) за формулою (6.6)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (2)$$

Спочатку за формулою (2) знайдемо коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{400 - 300}{400} = 0,25 = 25\%.$$

Потім за формулою (1) знайдемо роботу  $A$ .

$$A = \eta Q_1 = 0,25 \cdot 2,1 \cdot 10^3 = 525 \text{ Дж.}$$

2) У зворотному циклі робоче тіло буде відбирати у холодильника кількість теплоти  $Q_2$  і віддавати нагрівнику кількість теплоти  $Q_1$ . Робота, яку виконує робоче тіло в зворотному циклі буде від'ємною:  $A' = -A$ .

Холодильний коефіцієнт (6.7) запишемо у виді  $\eta_x = \frac{|Q_2|}{|A|}$  (3), де  $Q_2$

виразимо через  $Q_1$  та  $A$ :  $|Q_2| = Q_1 - |A|$ .

Тоді з урахуванням виразу (1) для ККД теплової машини отримуємо:

$$\eta_x = \frac{Q_1 - |A|}{|A|} = \frac{1}{\eta} - 1.$$

Обчислення дає:  $\eta_x = \frac{1}{0,25} - 1 = 3$ .

Відповідь:  $\eta=25\%$ ;  $A=525$  Дж ;  $\eta_x = 3$ .

**Приклад 6.2.** Холодильник Карно призначений для охолодження газоподібного гелію до температури  $T_2 = 4$  К. Яку роботу необхідно виконати, щоб відібрати  $Q'_2=1$  Дж тепла у гелію, який має таку

температуру. Температура гарячого резервуару є кімнатною і дорівнює  $T_1=300\text{ K}$ . Яка кількість теплоти передається при цьому повітрю?

$\begin{array}{l} T_1 = 300\text{ K} \\ T_2 = 4\text{ K} \\ Q'_2 = 1\text{ Дж} \\ \hline A', Q'_1 - ? \end{array}$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Для визначення виконаної роботи скористаємось виразом для холодильного коефіцієнту (6.7):</p> $\eta_x = \frac{Q'_2}{ Q'_1 - Q_2 } = \frac{Q'_2}{A'}$ <p>Для холодильника Карно</p> $\eta_x = \frac{Q'_2}{A'} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (1)$
--	---

З формули (1) виражаємо  $A'$ :

$$A' = \frac{T_1 - T_2}{T_2} \cdot Q'_2 = \left( \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \cdot Q'_2$$

Підстановка значень в останню формулу дає

$$A' = \left( \frac{300}{4} - 1 \right) \cdot 1 = 74\text{ Дж.}$$

Кількість теплоти, яка віддана оточуючому повітрю, дорівнює сумі тепла, відібраного від холодильника, і виконаної роботи.

$$Q'_1 = Q'_2 + A'.$$

$$Q'_1 = 1 + 74 = 75\text{ Дж.}$$

Відповідь:  $A' = 74\text{ Дж.}; Q'_1 = 75\text{ Дж.}$

**Приклад 6.3.** Робоча речовина теплової машини здійснює цикл, у межах якого абсолютна температура змінюється в  $n=2$  разів, а сам цикл у координатах  $T$ - $S$  має вигляд, показаний на рис.6.5. Знайти ККД циклу.

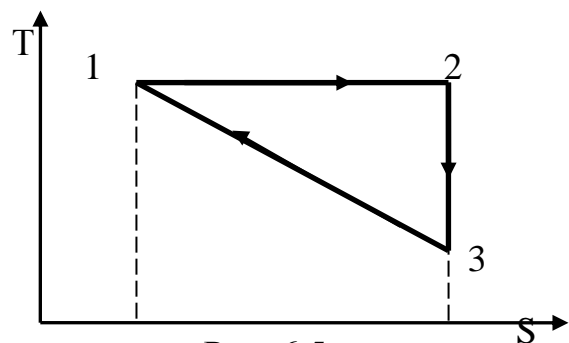


Рис. 6.5.

$\begin{array}{l} \frac{T_1}{T_2} = n \\ n=2 \\ \hline \eta - ? \end{array}$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>За означенням (формула (6.4)), <math>\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}</math>. Використаємо формулу (6.9), а</p>
--	---

саме  $Q = \int_1^2 TdS$ . Урахуємо, що на діаграмі інтеграл чисельно дорівнює площині криволінійної трапеції під графіком процесу. Інтегрування



розіб'ємо на три ділянки 1–2, 2–3 та 3–1. На ділянці 1–2  $dS > 0$ ;  $\dot{Q}_1 = \text{const}$  (машина отримує теплоту). Тоді

$$Q_1 = Q_{1-2} = T_1 \int dS = T_1 \Delta S_{1-2} > 0.$$

На ділянці 2–3 (адіабатний процес, теплообміну немає)  $dS=0$ . На ділянці 3–1  $dS < 0$  (машина віддає теплоту холодильнику). Тоді

$$Q_2 = Q_{3-1} = \int T dS = \frac{T_1 + T_2}{2} \Delta S_{3-1} < 0.$$

Ураховуючи, що  $T_2 = nT_1$ , тобто

$$\frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{T_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2} = \frac{T_1 (n+1)}{2n},$$

і  $\Delta S_{1-2} = -\Delta S_{3-1}$ , отримуємо:

$$\eta = \frac{T_1 \Delta S - \frac{T_1 (n+1)}{2n} \Delta S}{T_1 \Delta S} = \frac{n-1}{2n}.$$

Наприклад, при  $n = 2$  маємо  $\eta = 0,25$ .

**Приклад 6.4.**  $m=10\text{г}$  водню ізобарично нагрівають від  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 327^\circ\text{C}$ . Знайти зміну ентропії газу  $\Delta S$  у цьому процесі.

Розв'язання	
$m=0,010\text{кг}$ $t_1 = 27^\circ\text{C}$ $t_2 = 327^\circ\text{C}$ $i=5$ $R=8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ <hr/> $\Delta S - ?$	Згідно з (6.10) зміна ентропії визначається формулою
	$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (1)$
	де $S_2$ і $S_1$ – значення ентропії відповідно у кінцевому і у початковому станах; $\delta Q$ – кількість теплоти, яку отримує газ у
	елементарному процесі; $T$ – термодинамічна температура, при якій відбувалась теплопередача.
	При ізобаричному процесі

$$\delta Q = C_p v dT, \quad (2)$$

де  $C_p$  – молярна теплоємність водню при ізобаричному нагріванні;  $\gamma$  – кількість речовини;  $dT$  – збільшення температури.

У свою чергу

$$C_p = \frac{i+2}{2} R, \quad (3)$$

де  $i$  – ступені свободи молекул (для водню  $\text{H}_2$   $i=5$ );  $R$  – газова стала.  $R=8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .

$$\nu = \frac{m}{M}, \quad (4)$$

де  $m$  – маса газу;  $M$  – молярна маса газу. Для водню  $M = 2 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Підставимо (2), (3), (4) у (1) і виконаємо інтегрування:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{dT}{T} = \frac{(i+2)R \cdot m}{2M} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{(i+2)R \cdot m}{2M} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Виразимо температури  $T_1$  і  $T_2$  у кельвінах (K):

$$T_1 = 27^\circ \text{C} + 273 = 300 \text{ K}; \quad T_2 = 327 + 273 = 600 \text{ K}.$$

Обчислення.

$$\Delta S = \frac{(5+2) \cdot 8,31 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \ln \frac{600}{300} = 100 \text{ Дж/К}.$$

Відповідь:  $\Delta S = 100$  Дж/К.

**Приклад 6.5.** Кусок льоду масою  $m = 200\text{г}$ , взятий при температурі  $t_1 = -10^\circ \text{C}$ , був нагрітий до температури  $t = 0^\circ \text{C}$  і розплавлений. Визначити зміну ентропії льоду.

Розв'язання	
$m = 0,2\text{кг}$	Ентропія є адитивною функцією, тому її зміна дорівнює сумі двох доданків, які надають зміну ентропії $\Delta S'$ при нагріванні льоду і зміну ентропії $\Delta S''$ при перетворенні льоду в воду. Зміна ентропії визначається загальною формулою (6.10)
$T_1 = 263\text{K}$	
$T_2 = 273\text{K}$	
$c = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$	
$L = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$	
$\Delta S - ?$	$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (1)$

Витрати тепла на нагрівання тіла при нескінченно малій зміні його температури дорівнюють

$$dQ = mc \cdot dT, \quad (2)$$

де  $m$  – маса тіла,  $c$  – його питома теплоємність.

Підстановка виразу (2) в (1) дозволяє отримати формулу для обчислення ентропії при нагріванні льоду

$$\Delta S' = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) = mc \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right).$$

(3)

При плавленні льоду його температура залишається постійною, тому

$$\Delta S'' = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T},$$

де  $Q$  – кількість теплоти, переданої льоду в процесі плавлення. Згідно з формулою (5.28)

$$Q = Lm,$$

де  $L$  – питома теплота плавлення.

Тоді 
$$\Delta S'' = \frac{Lm}{T_2}. \quad (4)$$

З урахуванням формул (3) і (4) знаходимо  $\Delta S$ :

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = m \left( c \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{L}{T_2} \right) \quad (5)$$

Підставляємо в формулу (5) чисельні значення фізичних величин і отримуємо:

$$\Delta S = 0,2 \left( 2,1 \cdot 10^3 \ln \frac{273}{263} + \frac{3,35 \cdot 10^5}{273} \right) = 262 \text{ Дж/К}.$$

**Приклад 6.6.** а) Деяка кількість води при початковій температурі  $t_n = 0^\circ\text{C}$  підігрівається джерелом з температурою  $t_k = 80^\circ\text{C}$ . Як змінюється ентропія всієї системи, коли вода нагрівається до температури нагрівника? Виразити відповідь через теплоємність води  $C$  у припущенні, що теплоємність не залежить від температури.

б) Як змінюється ентропія всієї системи, якщо використовуються два джерела для нагріву води: один з температурою від  $0^\circ$  до  $40^\circ\text{C}$ , другий – з температурою від  $40^\circ$  до  $80^\circ\text{C}$ .

$T_n = 273\text{K}$	
$T_k = 353\text{K}$	
$T_1 = 313\text{K}$	
$C_B = C$	
$\Delta S - ?$	

Розв'язання

а) Зміна ентропії води може бути визначена у припущенні оборотності процесу нагрівання за формулою (6.10). З урахуванням незалежності теплоємності води від температури можна записати

$$\Delta S_B = C \int_{T_i}^{T_e} \frac{dT}{T} = C \ln \left( \frac{T_e}{T_i} \right).$$

Зміну ентропії джерела при фіксованій температурі  $T_2$  знаходимо за формулою

$$\Delta S_{\text{äæ}} = -\frac{\Delta Q}{T_e} = -C \frac{T_e - T_i}{T_e},$$

де  $\Delta Q = C(T_e - T_i)$  – загальна кількість теплоти, яка передається від джерела воді. Тоді загальна зміна ентропії системи дорівнює

$$\Delta S = \Delta S_B + \Delta S_{\text{äæ}} = C \left( \ln \left( \frac{T_e}{T_i} \right) - \frac{T_e - T_i}{T_e} \right).$$

$$\Delta S = C \left( \ln \left( \frac{353}{273} \right) - \frac{80}{353} \right) = 0,030C.$$

б) Другому випадку, коли нагрівання відбувається в два етапи, зміна ентропії води залишається тією самою, що в попередньому випадку:

$$\Delta S_B = C \ln \left( \frac{T_1}{T_i} \right) + C \ln \left( \frac{T_{\hat{e}}}{T_1} \right) = C \ln \left( \frac{T_{\hat{e}}}{T_i} \right)$$

Зміна ентропії джерел складається з двох доданків:

$$\Delta S_{\text{äæ}} = \Delta S_{1\text{äæ}} + \Delta S_{2\text{äæ}} = -\tilde{N} \left( \frac{\dot{Q}_1 - \dot{Q}_i}{T_1} + \frac{\dot{Q}_{\hat{e}} - \dot{Q}_1}{T_{\hat{e}}} \right).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Delta S &= \tilde{N} \left( \ln \left( \frac{T_{\hat{e}}}{T_i} \right) - \left( \frac{\dot{Q}_1 - \dot{Q}_i}{T_1} + \frac{\dot{Q}_{\hat{e}} - \dot{Q}_1}{T_{\hat{e}}} \right) \right) \\ \Delta S &= C \left( \ln \left( \frac{353}{273} \right) - \left( \frac{40}{313} + \frac{40}{353} \right) \right) = 0,016C. \end{aligned}$$

Тобто зміна ентропії при нагріванні в два етапи є меншою.

Можна припустити, що коли вода послідовно контактує з  $N$  джерелами при температурах  $T_n = T_i + \frac{n}{N}(T_{\hat{e}} - T_i)$  зміна ентропії дорівнює нулю. Дійсно, зміна ентропії води залишається тією самою незалежно від кількості джерел тепла  $N$ . Зміна ентропії джерел дорівнюватиме

$$\Delta S_{\text{äæ}} = -C \sum_{n=1}^N \frac{T_n - T_{n-1}}{T_n} = -C \sum_{n=1}^N \frac{(T_{\hat{e}} - T_i) / N}{T_i + n/N(T_{\hat{e}} - T_i)}.$$

При  $N \rightarrow \infty$  сума переходить в інтеграл

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta S_{\text{äæ}} = -C \int_0^{T_{\hat{e}} - T_i} \frac{dx}{T_i + x} = -C \ln \frac{T_{\hat{e}}}{T_i} = -\Delta S_{\hat{A}},$$

і сумарна зміна ентропії в розглянутому оборотному процесі  $\Delta S = 0$ . На практиці будь-яка спроба нагріти деяку кількість води обов'язково супроводжується необоротними процесами і приводить до зросту загальної ентропії. Зокрема, у розглянутому прикладі вважалось, що джерела вже знаходяться при необхідній температурі і не розглядалась зміна ентропії, яка пов'язана з доведенням температури джерел до потрібної.

**Приклад 6.7.** Порівняйте зменшення ентропії мозку в процесі читання книги зі збільшенням ентропії за рахунок опромінення від електричної лампочки, при якій відбувається читання.

### Розв'язання.

Зміна ентропії при отриманні інформації в кількості  $\Delta I$  (вимірюється в бітах) визначається за формулою

$$\Delta S = -\frac{k}{\log_2 e} \Delta I,$$

де  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – стала Больцмана.

У книзі, як правило, використовується біля  $2^5$  різних знаків. Для ідентифікації одного знаку необхідно приблизно 5 біт. Якщо книга, наприклад, містить 250 сторінок по 40 рядків і 60 знаків у рядку, то інформація містить  $\Delta I = 5 \cdot 60 \cdot 40 \cdot 250 = 3 \cdot 10^6$  біт. Тоді

$$\Delta S_{\text{інф.}} \approx -\frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,44} \cdot 3 \cdot 10^6 \approx 2,9 \cdot 10^{-17} \text{ Дж/К.}$$

З іншого боку, електрична лампочка потужністю  $P_{\text{л}} = 100$  Вт при температурі повітря в кімнаті  $T = 300$  К приводить до зміни ентропії

$$\Delta S_{\text{електр.}} = \frac{P_{\text{л}} \cdot t}{T} = \frac{100 \cdot t}{300} \approx 0,3 \cdot t,$$

де  $t$  – час читання (в секундах).

Таким чином,

$$\frac{\Delta S_{\text{інф.}}}{\Delta S_{\text{електр.}}} \approx \frac{2,9 \cdot 10^{-17}}{0,3 \cdot 3,6 \cdot 10^3 t} \approx \frac{2,7 \cdot 10^{-20}}{t},$$

де  $t$  – час (у годинах).

### Задачі для самостійного розв'язування

6.1. Газ здійснює цикл Карно. Абсолютна температура нагрівача в  $n=4$  рази вище за абсолютну температуру холодильника. Яку долю теплоти, що отримується за один цикл від нагрівника, газ віддає холодильнику?

6.2. Газ здійснює цикл Карно. Абсолютна температура нагрівника в  $n=3$  рази вище за абсолютну температуру холодильника. Нагрівник передає газу кількість тепла  $Q_1 = 42$  кДж. Яку роботу виконав газ за цикл?

6.3. Ідеальна теплова машин працює по циклу Карно. Температура холодильника  $T_2 = 290$  К. У скільки разів збільшитися ККД циклу, якщо температуру нагрівника підвищити з  $T_1 = 400$  К до  $T'_1 = 600$  К?

6.4. Ідеальна теплова машина, що працює по циклу Карно, здійснює за один цикл роботу  $A = 2,94$  кДж і віддає за один цикл холодильнику кількість тепла  $Q_2 = 13,4$  кДж. Знайти ККД циклу.

6.5. Газ, що здійснює цикл Карно  $2/3$  теплота  $Q_1$ , отримана від нагрівника, віддає холодильнику. Температура холодильника  $T_2 = 280$  К. Визначити температуру нагрівника.

- 6.6. Знайти ККД теплової машини, що здійснює цикл Карно, якщо робота за цикл рівна  $A=10$  Дж, а робота на ділянці ізометричного стискування  $A'=5$  Дж.
- 6.7. Ідеальна тепла машина, що працює за циклом Карно, за цикл отримує від нагрівника кількість теплоти  $Q_1 = 2,512$  кДж. Температура нагрівника  $T_1 = 400$  К, температура холодильника  $T_2 = 300$  К. Знайти роботу, що здійснюється машиною за один цикл, і кількість теплоти  $Q_2$ , що віддається за один цикл холодильнику.
- 6.8. Ідеальна тепла машина, що працює за циклом Карно, здійснює за один цикл роботу  $A=73,5$  кДж. Температура нагрівника  $t_1=100^\circ\text{C}$ , температура холодильника  $t_2=0^\circ\text{C}$ . Знайти ККД циклу, кількість теплоти  $Q_1$ , що отримується за один цикл від нагрівника, і кількість теплоти  $Q_2$ , що віддається за один цикл холодильнику.
- 6.9. У якому випадку ККД циклу Карно підвищитися більше: при збільшенні температури нагрівника на  $\Delta T$  або при зменшенні температури холодильника на таку ж величину?
- 6.10. Теплову машину, що працює за циклом Карно з ККД  $\eta=20\%$ , використовують при тих самих температурах нагрівника і холодильника як холодильну машину. Знайти її холодильний коефіцієнт  $k$ .
- 6.11. Ідеальна тепла машина працює за циклом Карно. За один цикл газ виконує роботу  $A = 10$  кДж і віддає холодильнику кількість тепла  $Q_2=42$  кДж. Знайти коефіцієнт корисної дії  $\eta$  машини.
- 6.12. Теплова машина здійснює цикл Карно. Температура нагрівника  $t_1=117^\circ\text{C}$ . Відомо, що 75 % кількості теплоти  $Q_1$ , отриманої від нагрівника за один цикл, робоче тіло віддає холодильнику. Визначити температуру  $t_2$  холодильника.
- 6.13. Теплова машина Карно, коефіцієнт корисної дії якої  $\eta=25\%$ , працює у зворотному напрямку, тобто працює як холодильник. За кожний цикл над робочим тілом машини здійснюється робота  $A = 10$  кДж. Визначити кількість теплоти  $Q_2$ , яку машина може перенести за один цикл від холодильника до нагрівника.
- 6.14. Знайти зміну ентропії  $S_2 - S_1$  при перетворенні  $m = 1$  кг льоду, взятого при температурі  $t = -10^\circ\text{C}$ , у пару.
- 6.15. Визначити зміну ентропії  $S_2 - S_1$  для  $m = 10$  г азоту при ізотермічному розширенні від  $V_1 = 5$  л до  $V_2 = 10$  л.
- 6.16. Вуглекислий газ ( $\text{CO}_2$ ) масою  $m = 22$  г нагрівають від  $t_1 = 7^\circ\text{C}$  до  $t_2=507^\circ\text{C}$ . Визначити приріст ентропії  $\Delta S$ , якщо процес нагрівання відбувається : 1) при постійному об'ємі ; 2) при постійному тиску .

### Тестові завдання.

Вибрати вірну відповідь:

1. В окремій ізольованій системі самочинно відбуваються зміни, які...
  - 1) приводять систему в найбільш імовірний стан – стан рівноваги;
  - 2) є будь-якими;
  - 3) приводять систему в менш імовірний стан.
2. Прямим циклом називають цикл,...
  - 1) у якого повна робота за цикл є від'ємною ( $A < 0$ );
  - 2) у якого лінія розширення лежить нижче лінії стискання;
  - 3) у якого повна робота за цикл є додатною ( $A > 0$ ).
3. Для будь-яких циклів теплових машин вірним є рівняння:
  - 1)  $Q_1 = Q_2 + A$ ;
  - 2)  $Q_1 = A$ ;
  - 3)  $Q_1 = \Delta U + A$ .
4. При зниженні температури холодильника ККД теплової машини
  - 1) зменшується;
  - 2) збільшується;
  - 3) не змінюється;
  - 4) температура холодильника не впливає на ККД.
5. За другим законом термодинаміки зміна ентропії замкненої системи тіл визначається співвідношенням
  - 1)  $\Delta S = 0$ ;
  - 2)  $\Delta S \geq 0$ ;
  - 3)  $\Delta S < 0$ ;
  - 4)  $\Delta S > 0$ .
6. Із наведених нижче процесів оборотними є
  - 1) поширення газу в вакуум;
  - 2) коливання маятника при дії сили тертя;
  - 3) теплообмін між двома тілами з різною температурою;
  - 4) квазістатичний теплообмін між тілами.
7. Газ виконує цикл Карно. Абсолютна температура  $T_1$  нагрівника в 4 рази вища за абсолютну температуру  $T_2$  холодильника. ККД цього циклу дорівнює:
  - 1) 25%;
  - 2) 50%;
  - 3) 74%;
  - 4) немає вірної відповіді.
8. Ентропія залишається постійною при
  - 1) адіабатному розширенні газу;
  - 2) ізотермічному стисканні газу;
  - 3) ізохорному нагріванні газу;
  - 4) ізобарному нагріванні газу.
9. Коефіцієнт корисної дії теплової машини, яка працює за циклом Карно, можна збільшити:
  - 1) і знижуючи температуру холодильника, і підвищуючи температуру нагрівника;
  - 2) за рахунок підвищення температури холодильника;
  - 3) тільки за рахунок зниження температури холодильника;
  - 4) тільки за рахунок підвищення температури нагрівника.
10. Мірою неупорядкованості системи молекул є її
  - 1) ентропія;
  - 2) густина;
  - 3) тиск;
  - 4) теплоємність.
11. Ентропія зростає при
  - 1) конденсації пари;
  - 2) адіабатному розширенні газу;
  - 3) плавленні льоду;
  - 4) замерзанні води.

12. При передачі повідомлення (тексту) що складається з 100 двійкових знаків сталися спотворення, так що значення 10 знаків стали невизначеними. Ентропія  $S$  і кількість інформації  $I$  для отриманого тексту дорівнюють ( $\ln 2 = 0.6931$ ):

- 1)  $S=10$ ,  $I=100$  бит;
- 2)  $S = 6,931$ ,  $I = 90$  бит;
- 3)  $S = 6,238$ ,  $I = 62,379$  бит.

13. У квазістатичному ізотермічному процесі ( $T=\text{const}$ ) об'єм ідеального газу змінився на величину  $V = V_2 - V_1 > 0$ . Як змінилася внутрішня енергія?

- 1) Не змінилась;
- 2) Збільшилась на величину  $NT \cdot \ln(V_2/V_1)$ ;
- 3) Зменшилась на величину  $NT \cdot \ln(V_2/V_1)$ .

14. У квазістатичному ізотермічному процесі ( $T=\text{const}$ ) об'єм ідеального газу змінився на величину  $V = V_2 - V_1 > 0$ . Як між собою співвідносяться робота, вироблена газом  $W$ , і кількість теплоти  $Q$ , отримана від термостата?

- 1)  $W > Q$ ;
- 2)  $W < Q$ ;
- 3)  $W = Q$ .

15. Як змінюється в циклі Карно ентропія ідеального газу?

- 1) Збільшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі;
- 2) Не змінюється;
- 3) Зменшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі.

16. Як змінюється в циклі Карно внутрішня енергія ідеального газу?

- 1) Збільшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі;
- 2) Не змінюється;
- 3) Зменшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі.

17. Як змінюється в процесі циклу Карно з ідеальним газом ентропія термостата-нагрівача?

- 1) Збільшується на величину, пропорційну теплу, отриманому від термостата;
- 2) Не змінюється;
- 3) Зменшується на величину, пропорційну теплу, отриманому від термостата.

18. Як змінюється в процесі циклу Карно з ідеальним газом ентропія термостата-холодильника?

- 1) Збільшується на величину, пропорційну теплу, переданому термостату;
- 2) Не змінюється;
- 3) Зменшується на величину, пропорційну теплу, переданому термостату.

19. Як змінюється в процесі циклу Карно з ідеальним газом сума ентропії термостата-нагрівача і термостата-холодильника?

- 1) Збільшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі;
- 2) Не змінюється;
- 3) Зменшується на величину, пропорційну виконаній газом механічній роботі.



## РОЗДІЛ 7. РЕАЛЬНІ ГАЗИ. РІВНЯННЯ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

**Тема:** Рівняння Ван-дер-Ваальса. Ізотерми Ван-дер-Ваальса та ізотерми реального газу. Критичний стан та критичні параметри реального газу.

### Основні поняття і формули.

● **Рівняння Ван-дер-Ваальса.** Рівняння стану ідеального газу Менделєєва – Клапейрона є вірним лише при достатньо малому тиску газу. При великих тисках необхідно урахувати взаємне притягання молекул і об'єм, який є недосяжним для руху молекул. Одним з рівнянь, які описує поведінку реального газу, є рівняння Ван-дер-Ваальса

$$\left(P + v^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - vb) = vRT, \quad (7.1)$$

де  $v = \frac{m}{M}$  – кількість газу,  $P$  – тиск,  $V$  – об'єм,  $T$  – абсолютна температура,  $a$  – стала, яка ураховує взаємодію між молекулами,  $b$  – стала, що ураховує власний об'єм молекул та сили відштовхування між ними. Постійні  $a$  і  $b$  залежать від природи газу

Додатковий тиск, обумовлений силами притягання між молекулами

$$p_i = v^2 \frac{a}{V^2}, \quad (7.2)$$

називають внутрішнім тиском газу.

Для одного молю газу ( $v=1$  моль) рівняння Ван-дер-Ваальса має вид:

$$\left(P + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT, \quad (7.3)$$

де  $V_0$  – об'єм моля;

Рівняння Ван-дер-Ваальса можна застосовувати для газів при будь-якому тиску (при невеликих тисках воно переходить у рівняння Менделєєва – Клапейрона), а також для термодинамічної системи, яка складається з газу та рідини.

На рис. 7.1 показана ізотерма Ван-дер-Ваальса (7.1) (пунктир) та істинна (дослідна) ізотерма для системи рідина – газ. Область зліва від об'єму  $V_1$

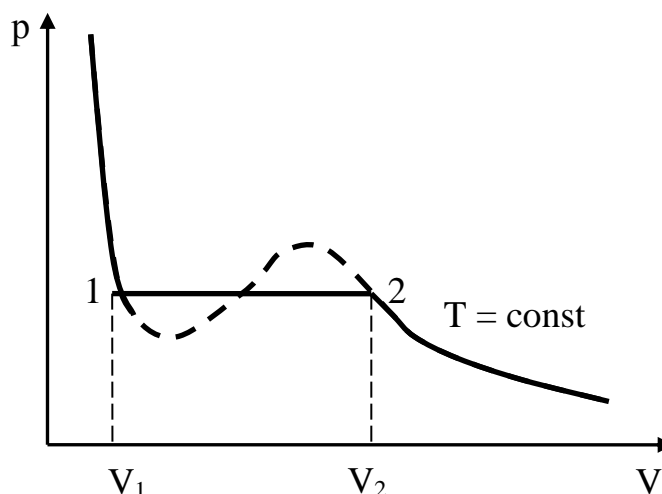


Рис. 7.1.

відповідає рідкому стану, справа від об'єму  $V_2$  – газоподібному стану, область 1–2 між значеннями об'ємів  $V_1$  та  $V_2$  – стану «рідина – газ».

При збільшенні значення температури горизонтальна ділянка ізотерм скорочується, тобто зменшується різниця між об'ємами рідкої та газоподібної фази. Стан речовини, при якому горизонтальна ділянка стягується в точку К, називають **критичним**. Точку К називають **критичною** точкою, а параметри речовини, що відповідають критичному стану – **критичними** параметрами. Значення критичних параметрів можна отримати з рівняння Ван-дер-Ваальса (7.1):

$$p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad T_k = \frac{8a}{27Rb}; \quad V_k = 3vb. \quad (7.4)$$

Постійні  $a$  і  $b$  зв'язані з критичними параметрами співвідношеннями

$$a = \frac{27T_k^2 R^2}{64P_k}; \quad b = \frac{T_k R}{8P_k}. \quad (7.5)$$

• Внутрішня енергія реального газу складається з суми кінетичної та потенціальної енергії і надається формулою

$$U = \nu C_v \cdot T - \nu^2 \cdot \frac{a}{V}, \quad (7.6)$$

де перший доданок характеризує енергію хаотичного теплового руху молекул, а другий – потенціальну енергію їх взаємодії. У формулі (7.6)  $C_v$  – молярна теплоємність газу при постійному об'ємі.

### Методичні вказівки.

• За звичаєм в умові задачі оговорюють ті випадки, коли газ слід розглядати як реальний. У протилежному випадку слід з'ясувати це питання, щоб з двох рівнянь – Менделєєва – Клапейрона і Ван-дер-Ваальса – обрати необхідне. При цьому газ слід вважати реальним перш за все у тих випадках, коли він сильно стиснутий порівняно з газом при нормальних умовах.

Якщо за умовою задачі неможливо відразу зробити висновок ідеальним чи реальним слід вважати газ, необхідно знайти його молярний об'єм  $V_0$  і порівняти його з молярним об'ємом, який займає будь-який газ при нормальних умовах, а саме  $V_{0\text{н.д.}} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ . Якщо при цьому з'ясується, що  $V_0 \geq V_{0\text{н.д.}}$ , газ можна без великої погрішності вважати ідеальним. Якщо  $V_0 \ll V_{0\text{н.д.}}$ , тобто густина даного газу значно перевищує її значення при нормальних умовах, газ слід вважати реальним.

У інших випадках  $V_0 < V_{0\text{н.д.}}$  слід припустити, що даний газ є реальним, і визначити поправки на тиск  $\frac{a}{V_0^2}$  і об'єм  $b$ , які входять до рівняння (7.3), а далі порівняти їх з величинами  $p$  і  $V_0$  (якщо вони відомі за

умовою). Відкидаючи ці поправки у випадку їх порівняно невеликих значень або зберігаючи, ми тим самим обираємо рівняння, за яким розв'язується задача.

### Приклади розв'язання задач

**Приклад 7.1.** Гелій масою  $m = 10\text{г}$  займає об'єм  $V = 100\text{ см}^3$  при тиску  $p = 10^8\text{ Па}$ . Знайти температуру газу, розглядаючи його як а) ідеальний; б) реальний.

$m = 10^{-2}\text{ кг}$ $V = 10^{-4}\text{ м}^3$ $p = 10^8\text{ Па}$ $R = 8,31\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ $M = 4 \cdot 10^{-3}\text{ кг}/\text{моль}$ $a = 3,43 \cdot 10^{-3}\text{ Н}/(\text{м}^4 \cdot \text{моль}^2)$ $b = 2,34 \cdot 10^{-5}\text{ м}^3/\text{моль}$	<p>Розв'язання</p> <p>а) Виражаємо температуру ідеального газу з рівняння Менделєєва-Клапейрона:</p> $T = \frac{MpV}{mR}.$ <p>Підставляючи значення відповідних величин, знаходимо</p> $T = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^8 \cdot 10^{-4}}{10^{-2} \cdot 8,31}\text{ К} = 482\text{ К}.$
<p><math>T; T' - ?</math></p>	

б) Розв'язок рівняння Ван-дер-Ваальса (7.1) відносно температури дає:

$$T = \frac{M}{mR} \left( p + \frac{am^2}{M^2V^2} \right) \left( V - \frac{m}{M}b \right).$$

Значення сталих Ван-дер-Ваальса  $a$  і  $b$  для гелію дістаємо з таблиці.

Після підстановки значень та обчислення, отримуємо:

$$T' = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{10^{-2} \cdot 8,31} \left( 10^8 + \frac{3,43 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}}{16 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-8}} \right) \left( 10^{-4} - \frac{10^{-2} \cdot 2,34 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-3}} \right) \text{ К} = 204\text{ К}.$$

Відповідь:  $T = 482\text{ К}; T' = 204\text{ К}$ .

Порівняння результатів, отриманих у двох випадках показує, що у випадку високого тиску, при якому знаходиться газ, його неможна вважати ідеальним.

**Приклад 7.2.** Визначити тиск  $m = 320\text{г}$  кисню, який знаходиться при температурі  $t = 17^\circ\text{C}$  у посудині, об'єм якої дорівнює 1)  $V = 0,5\text{ м}^3$ ; 2)  $V = 0,5\text{ л}$ .

$m = 0,32\text{ кг}$ $M = 32 \cdot 10^{-3}\text{ кг}/\text{моль}$ $R = 8,31\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ $a = 0,130\text{ Н}/(\text{м}^4 \cdot \text{моль}^2)$ $b = 3,1 \cdot 10^{-5}\text{ м}^3/\text{моль}$ 1) $V = 0,5\text{ м}^3$ 2) $V = 0,5 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3$	<p>Розв'язання</p> <p>Перш за все необхідно визначити, яким слід вважати газ за даними умовами – реальним чи ідеальним. Для відповіді знайдемо молярний об'єм газу <math>V_0</math> і порівняєм знайдені значення з молярним об'ємом газу за нормальних умов <math>V_{\text{норм}} = 22,4 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3/\text{моль}</math>.</p> $V_0 = \frac{V}{\nu} = \frac{VM}{m}.$
<p><math>p - ?</math></p>	

З урахуванням молярної маси кисню  $M=32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль отримуємо:

$$1) \quad V_0 = \frac{0,5 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{0,32} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} = 0,05 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}};$$

$$2) \quad V_0 = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{0,32} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Порівняння отриманих значень  $V_0$  з  $V_{0\text{норм.}}$  показує, що в першому випадку  $V_0 > V_{0\text{норм.}}$ , газ достатньо розріджений і його можна вважати ідеальним. Записуємо рівняння стану ідеального газу для одного моля  $pV_0 = RT$ ,

виражаємо тиск:  $p = \frac{RT}{V_0}$  (2) і проводимо обчислення

$$p = \frac{8,31 \cdot 290}{0,05} \text{ Па} = 4,8 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

У другому випадку  $V_0 \ll V_{0\text{норм.}}$ , газ слід вважати реальним, а його тиск знаходити з рівняння Ван-дер-Ваальса (7.3):

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}.$$

Знаходимо значення сталих Ван-дер-Ваальса  $a$  і  $b$  для кисню з таблиці:  $a=0,130 \text{ Н/(м}^4 \cdot \text{моль}^2)$ ;  $b = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ . Обчислення за формулою (2) дає

$$p = \left[ \frac{8,31 \cdot 290}{5 \cdot 10^{-5} - 3,1 \cdot 10^{-5}} - \frac{0,130}{(5 \cdot 10^{-5})^2} \right] \text{ Па} = 7,4 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Примітка: в останньому випадку обчислення тиску за формулою (1) приводить до невірному результату  $p = 4,8 \cdot 10^7 \text{ Па}$ .

Відповідь: 1)  $p = 4,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$ ; 2)  $p = 7,4 \cdot 10^7 \text{ Па}$ .

**Приклад 7.3.** Знайти внутрішню енергію 1 моля кисню при нормальних умовах, розглядаючи його як реальний газ, і порівняти її з внутрішньою енергією ідеального газу при таких самих умовах.

Розв'язання

$i = 5$ $T = 273 \text{ К}$ $a = 0,136^3 \text{ Н/(м}^4 \cdot \text{моль}^2)$ $V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ <hr/> $U'_\mu, U_\mu - ?$	
--	--

Внутрішня енергія реального газу складається з суми кінетичної енергії молекул і потенціальної енергії їх взаємодії. Для визначення останньої скористаємося тим, що робота проти сил притягання молекул дорівнює приросту

енергії взаємодії:  $dA = dW_p$ . Сили притягання в рівнянні стану реального газу урахував внутрішній тиск (7.2), який для  $\nu = 1$  моль дорівнює  $p_i = a/V_0^2$ . Відповідно робота проти сил взаємодії може бути представлена у вигляді

$$dA = p_i dV_0 = \frac{a}{V_0^2} dV_0. \quad (1)$$

Інтегрування виразу (1) дає:

$$W_p = -\frac{a}{V_0} + \text{Const}. \quad (2)$$

Внутрішня енергія реального газу залежить як від об'єму, так і від температури, тобто вираз для внутрішньої енергії повинно мати вигляд:

$$U = f(T) - \frac{a}{V_0}. \quad (3)$$

Цей вираз при прямуванні об'єму газу до нескінченності повинен переходити у вираз для внутрішньої енергії ідеального газу, тобто

$$f(T) = C_v T = \frac{i}{2} RT.$$

Тоді внутрішня енергія молю реального газу дорівнюватиме:

$$U_\mu = C_v T - \frac{a}{V_0} = \frac{i}{2} RT - \frac{a}{V_0}. \quad (4)$$

Підстановка заданих в умові задачі значень у формулу (4) дає

$$U'_\mu = 5/2 \cdot 8,31 \cdot 273 - \frac{0,136}{2,24 \cdot 10^{-2}} = 5666 \text{ Дж/моль}.$$

Для ідеального газу

$$U_\mu = 5/2 \cdot 8,31 \cdot 273 = 5672 \text{ Дж/моль}.$$

Відповідь:  $U'_\mu = 5666 \text{ Дж/моль}$ ;  $U_\mu = 5672 \text{ Дж/моль}$ . Отже, взаємодія молекул приводить до зменшення потенціальної енергії реального газу.

### Задачі для самостійного розв'язування

7.1. Знайти постійні  $a$  і  $b$  в рівнянні Ван-дер-Ваальса для вуглекислого газу ( $\text{CO}_2$ ).

7.2. Азот масою  $m = 840 \text{ г}$  міститься у балоні об'ємом  $V = 10 \text{ л}$  при температурі  $t = -73^\circ \text{C}$ . Знайти тиск  $P$  газу на стінки балону, вважаючи газ реальним.

7.3. Знайти густину водяної пари в критичному стані.

7.4. У балоні об'ємом  $V=8 \text{ л}$  знаходиться  $m=0,3 \text{ кг}$  кисню. Знайти, яку частину  $\eta$  об'єму посудини займає власний об'єм молекул газу. Постійна Ван-дер-Ваальса для кисню  $b=3,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$ , молярна маса  $M=32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

7.5. На яку величину зріс би тиск води на стінки посудини, якби зникли сили притягання між її молекулами? Постійна Ван-дер-Ваальса для води

$a=0,554 \text{ Н} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ , густина  $\rho=1000 \text{ кг/м}^3$ , молярна маса  $M=18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

7.6. У посудині об'ємом  $V=10 \text{ л}$  знаходиться  $m=0,25 \text{ кг}$  азоту при температурі  $T=300 \text{ К}$ . Яку частину тиску газу складає тиск, обумовлений силами взаємодії молекул? Постійні Ван-дер-Ваальса для азоту:  $a=0,137 \text{ Н} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ ,  $b=3,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ ; молярна маса  $M=28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

7.7. При якій температурі  $\nu=1$  кмоль аргону займатиме об'єм  $V=0,1 \text{ м}^3$ , якщо його тиск рівний  $p=30 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ? Постійні Ван-дер-Ваальса для аргону:  $a=0,132 \text{ Н} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ ,  $b=3,22 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ .

7.8. Один кіломоляр кисню займає об'єм  $V=0,056 \text{ м}^3$  при тиску  $p=92 \text{ Па}$ . Знайти температуру газу. Постійні Ван-дер-Ваальса для кисню:  $a=0,137 \text{ Н} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ ,  $b=3,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ .

7.9. Визначити тиск, який створює  $\nu=1$  моль кисню, якщо він займає об'єм  $V=0,5 \text{ л}$  при температурі  $T=300 \text{ К}$ . Порівняти отриманий результат з тиском, обчисленим за рівнянням Менделєєва, - Клапейрона. Для кисню постійні Ван-дер-Ваальса:  $a=0,137 \text{ Н} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ ,  $b=3,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ .

7.10. У посудині об'ємом  $V=0,3 \text{ л}$  знаходиться  $\nu=1$  моль вуглекислого газу  $\text{CO}_2$  при температурі  $T=300 \text{ К}$ . Визначити тиск газу: 1) за рівнянням Менделєєва - Клапейрона; 2) за рівнянням Ван-дер-Ваальса. Для вуглекислого газу постійні Ван-дер-Ваальса дорівнюють:  $a=0,367 \text{ Н} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ ,  $b=4,28 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ .

7.11. Для водню сили взаємодії між молекулами незначні, переважну роль грають власні розміри молекул. Написати рівняння стану такого газу. Знайти, відносну похибку, яка буде допущена при розрахунку кількості молів водню  $\nu$ , що знаходяться в деякому об'ємі при температурі  $T=273 \text{ К}$  і тиску  $P=28 \text{ МПа}$ , якщо не враховувати власний об'єм молекул. Для водню постійні Ван-дер-Ваальса  $b=2,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ .

7.12. Тиск кисню  $P=7 \text{ МПа}$ , його густина  $\rho=100 \text{ кг/м}^3$ . Знайти температуру кисню. Постійні Ван-дер-Ваальса для кисню:  $a=0,137 \text{ Н} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ ,  $b=3,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ ; молярна маса  $M=0,032 \text{ кг/моль}$ .

7.13. Внутрішню порожнину товстостінного сталевого балону наполовину заповнили водою при кімнатній температурі. Після цього балон герметично закупорили і нагріли до температури  $T=650 \text{ К}$ . Визначити тиск  $P$  водяної пари в балоні при цій температурі. Для води постійні Ван-дер-Ваальса:  $a=0,554 \text{ Н} \cdot \text{м}^6 / \text{моль}^2$ ,  $b=3,04 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$ ; густина  $\rho=1000 \text{ кг/м}^3$ , молярна маса  $M=18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ .

## РОЗДІЛ 8. ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ. ТЕРМОДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИНИ ТА ПАРИ

**Тема:** Фазові переходи. Рівняння Клапейрона - Клаузіуса. Поверхневий натяг. Властивості пари.

### Основні поняття і формули.

● **Фазові переходи.** Фазою в термодинаміці називають сукупність однорідних за своїми властивостями частин системи, яка знаходиться у фізично різних станах. Відповідно перехід речовини з одного стану (фази) в другу носить назву фазового переходу.

Розрізняють фазові переходи першого та другого роду.

▪ Фазові переходи I роду (плавлення, кристалізація і т.ін.) супроводжуються поглинанням або виділенням певної кількості теплоти, яку називають теплою фазового переходу. Вони характеризуються постійністю температури, зміною ентропії та об'єму.

На рис. 8.1 показана діаграма станів речовини. На фазовій діаграмі крива 0–Тр ( де Тр – потрійна точка) відповідає фазовому переходу з твердого стану в газоподібний – сублімації, крива Тр – К (де К – критична точка) – переходу з рідкого стану в газоподібний – випаровуванню, необмежена крива уверх від точки Тр – переходу із твердої фази в рідку – плавленню.

Кожній точка кривих на діаграмі станів відповідає рівновазі двох станів речовини, відповідно криві носять назву **кривих фазової рівноваги**. Виключення становить лише точка Тр, в якій в рівновазі знаходяться три фази. Вона носить назву **потрійної точки**.

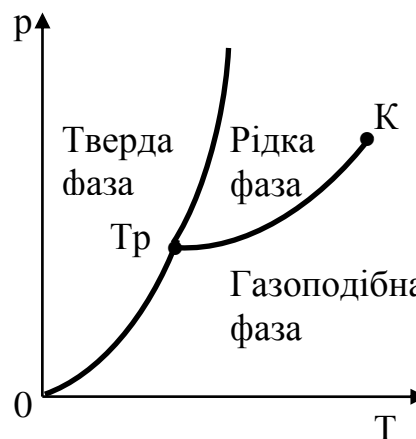
Усі розглянуті переходи відносяться до фазових переходів першого роду. Температура Т, при якій відбувається фазовий перехід першого роду, залежить від зовнішнього тиску Р.

Параметри р і Т зв'язані рівнянням Клапейрона – Клаузіуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(v_2^{\text{ред}} - v_1^{\text{ред}})}, \quad (8.1)$$

де q – питома теплота фазового переходу;  $v_1^{\text{ред}}$  і  $v_2^{\text{ред}}$  – питомі об'єми речовини в початковому і кінцевому стані,  $v^{\text{ред}} = \frac{V}{m}$  (m – маса речовини).

Із рівняння (8.1) витікає, що знак похідної залежить від зростання чи зменшення питомого об'єму речовини при фазовому переході. Так,



зокрема, для води, об'єм рідкої фази менше об'єму твердої фази, внаслідок чого при збільшенні тиску температура плавлення льоду знижується.

Оскільки в процесі фазового переходу температура залишається постійною, то зміна ентропії при фазовому переході може бути визначена через питому теплоту фазового переходу за формулою

$$\Delta S = \frac{qm}{T}. \quad (8.2)$$

З урахуванням останнього виразу рівнянню Клапейрона - Клаузіуса (8.1) можна надати вигляду

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{(V_2 - V_1)}. \quad (8.3)$$

▪ Фазові переходи II роду, які не супроводжуються поглинанням або виділенням теплоти та зміною об'єму, зв'язані зі зміною симетрії системи: вище точки переходу система, за звичаєм, має вищу симетрію, ніж нижче точки переходу. Прикладами фазових переходів II роду є: перехід феромагнетиків (заліза, нікелю) при певному тиску і температурі у парамагнітний стан, перехід металів та деяких сплавів у надпровідний стан, зміна симетрії кристалів і т. ін.)

Розглянемо далі основні принципи теорії структурних фазових переходів другого роду (ФП- 2), запропонованих Ландау.

Для математичного опису ФП- 2 використовується величина  $\eta$ , яка визначає міру відхилення розташування атомів в менш симетричній фазі від їх розташування в більш симетричній фазі. Останній відповідає  $\eta = 0$ , а в менш симетричній фазі  $\eta \neq 0$  і може бути як більше, так і менше нуля. Для переходів, пов'язаних з впорядкуванням, під  $\eta$  можна розуміти міру впорядкування; при переходах, пов'язаних із зміщенням атомів, величину зміщення. Величина  $\eta$  дістала назву "параметр порядку фазового переходу".

Розглядаючи термодинамічний потенціал кристала при заданих відхиленнях від симетричного стану (тобто при заданих  $\delta, \tilde{O}$ ), ми можемо представити його як функцію тиску, температури і параметра порядку. Відмітимо, що у функції  $\hat{O}(\delta, \tilde{O}, \eta)$  змінна  $\eta$  не рівноправна з  $\delta, \tilde{O}$ . Останні можуть бути задані довільно, а  $\eta$  необхідно визначити з умови мінімуму  $\Phi$  при заданих  $\delta, \tilde{O}$ . Безперервність зміни стану при ФП-2 математично виражається в тому, що поблизу від точки переходу  $\eta$  набуває скільки завгодно малих значень. Ця обставина дозволяє розкласти функцію  $\hat{O}(\delta, \tilde{O}, \eta)$  в околі точки ФП в ряд по степеням параметра порядку :

$$\hat{O}(\delta, \tilde{O}, \eta) = \hat{O}_0 + \alpha\eta + \tilde{A}\eta^2 + \hat{A}\eta^3 + \tilde{N}\eta^4 + \dots, \quad (8.4)$$

де коефіцієнти  $\alpha, \tilde{A}, \hat{A}, \tilde{N}$  є функціями  $p$  і  $T$ ! Вираження (8.4) не очевидне, оскільки точка ФП- 2 є особливою точкою функції  $\hat{O}(\delta, \tilde{O}, \eta)$ , а коефіцієнти



також можуть мати особливості як функції тиску і температури. Ландау припустив, що наявність особливості не позначається на використаних в (8.4) членах розкладання. Прийнято також, що, якщо стани з  $\eta = 0$  і  $\eta \neq 0$  відрізняються своєю симетрією, то коефіцієнт  $\alpha \equiv 0$ , а коефіцієнт  $\hat{A}(\delta, \hat{O})$  повинен перетворюватися на нуль в самій точці переходу, в симетричній фазі  $A > 0$ , в несиметричній  $A < 0$ , що відповідає стійкому стану системи (тобто мінімуму  $\Phi$ ) при  $\eta = 0$  і  $\eta \neq 0$ , відповідно. Крім того, щоб і в самій точці ФП функція  $\Phi$  відповідала мінімуму, необхідно, щоб коефіцієнт  $\hat{A} \equiv 0$ , а  $\tilde{N}(\delta, \hat{O}) > 0$ .

Можливі два випадки. Якщо  $\hat{A} \equiv 0$  через властивості симетрії, то для температури переходу  $\hat{O}_0$  залишається одна умова  $\hat{A}(\delta, \hat{O}) = 0$ , воно визначає взаємозв'язок  $p$  і  $T$  і на діаграмі  $p$ – $T$  існуватиме лінія точок фазового переходу другого роду. Якщо  $\hat{A} \neq 0$ , то точки переходу визначатимуться двома рівняннями  $\hat{A}(\delta, \hat{O}) = 0$  і  $\hat{A}(\delta, \hat{O}) = 0$ . В цьому випадку на діаграмі  $p$ – $T$  ми отримаємо ізольовані точки ФП- 2.

Очевидно, що лінія точок переходів на діаграмі  $p$  – $T$  відповідає ФП- 2, тому вважається, що  $\hat{A}(\delta, \hat{O}) \equiv 0$  і вираз (8.5) можна записати у виді

$$\hat{O}(\delta, \hat{O}, \eta) = \hat{O}_0(\delta, \hat{O}) + \hat{A}(\delta, \hat{O})\eta^2 + \tilde{N}(\delta, \hat{O})\eta^4 + \dots \quad (8.5)$$

Далі було запропоновано вважати, що коефіцієнт  $\tilde{N} > 0$  і постійна величина, а коефіцієнт  $A$  при постійному тиску поблизу точки  $T_0$  можна записати так:

$$\hat{A}(\hat{O}) = a(\hat{O} - \hat{O}_0), \quad (8.6)$$

де  $a$  - константа.

Запишемо умови мінімуму функції  $\hat{O}(\eta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{O}}{\partial \eta} &= 2\eta(\hat{O} + 2\tilde{N}\eta^2) = 0; \\ \frac{\partial^2 \hat{O}}{\partial \eta^2} &= 2(\hat{O} + 6\tilde{N}\eta^2) > 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Умови (8.7) записані для постійного значення тиску і фіксованої температури. Вони вірні по обидві сторони від температури ФП-2 рівній  $T_0$ . З (8.7) видно, що знаки коефіцієнтів  $A$  і  $C$  вибрані вірно: у фазі, де  $\eta = 0$ ,  $\hat{A} > 0$  (див. другу нерівність з (8.7)). У фазі, де  $\hat{A} < 0$  значення  $\eta = 0$  відповідає максимуму функції  $\hat{O}(\eta)$ . Таким чином, у фазі, де  $\eta \neq 0$ , умова  $\hat{A} + 2\tilde{N}\eta^2 = 0$  (див. першу рівність (8.7)) витікає, що  $\eta^2 = -\frac{\hat{A}}{2\tilde{N}}$ . Це і є температурна залежність параметра порядку, яку можна записати таким чином:

$$\eta^2 = \frac{\hat{a}}{2\tilde{N}}(\hat{O}_0 - \hat{O}). \quad (8.8)$$

З (8.8) витікає, що величина  $\eta$  у міру охолодження від значення  $\eta = 0$  при  $T_0$  плавно зростає, змінюючись згідно закону  $\eta = f\{(\hat{O}_0 - \hat{O})^{1/2}\}$ . Відмітимо також ще одну важливу обставину: в низько симетричній фазі функція  $\hat{O}(\eta)$  має два мінімуми, що відповідають значенням  $\eta < 0$  і  $\eta > 0$ .

Вираз (8.8) можна використовувати у якості критерію для пошуку параметра порядку ФП- 2 при дослідженні фазових переходів в конкретних кристалах. Тепер ми можемо визначити теплові властивості кристала поблизу температури ФП-2.

Визначимо температурну залежність ентропії кристала. Підставимо (8.8) в (8.5) і знайдемо диференціал отриманого виразу по  $T$ . В результаті маємо

$$S = -\frac{\partial \hat{O}}{\partial \hat{O}} = S_0 + \frac{a^2}{2C}(T - T_0) . \quad (8.9)$$

З (8.9) витікає, що, при нагріві кристала, який знаходиться в низько симетричній фазі, його ентропія  $S$  зростає і в точці переходу  $T_0$  безперервно переходить в ентропію симетричної фази  $S_0$ . Таким чином, ентропія кристала, як залежний параметр системи, при ФП-2 плавно, без стрибків, переходить у ентропію симетричної фази.

Визначимо теплоємність кристала при  $p = \text{const}$ .

$$C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p . \quad (8.10)$$

Підставимо (8.9) в (8.10) і після диференціювання отримаємо, що поблизу температури ФП-2 теплоємність має наступний вигляд:

$$\tilde{N}_p = C_{p_0} + \frac{a^2 T_0}{2C} , \quad (8.11)$$

де  $C_{p_0}$  – теплоємність у симетричній фазі. Оскільки  $\tilde{N} > 0$ , то  $\tilde{N}_p > C_{p_0}$ , тобто теплоємність зростає стрибком при переході в симетричну фазу. Разом з  $\tilde{N}_p$  мають місце стрибки і інших фізичних властивостей кристалу:  $C_v$ , коефіцієнтів теплового розширення, стисливості і т. ін.

Отже, можна зробити висновок, що при ФП-2 залежні параметри системи  $(V, S)$  стрибків не зазнають, а фізичні властивості, у тому числі симетрія кристала, зазнають аномальних змін (стрибки).

Л.Д. Ландау встановив правила, яким повинні відповідати зміни симетрії при ФП-2.

1. Оскільки термодинамічний потенціал  $\Phi$  кристала не повинен залежати від вибору системи координат, то він буде інваріантним по відношенню до будь-якого перетворення системи координат, тобто по відношенню до тих елементів симетрії, сукупність яких утворює групу симетрії кристала в цій фазі. Наслідком цього і є розкладання  $\Phi$  тільки по

парних степенях  $\eta$ . Мінімуму  $\Phi$  в симетричній фазі, де  $\eta=0$ , відповідають значення  $\hat{A} > 0$ , в точці ПФ-2  $A=0$ , а  $\hat{A} < 0$  відповідають максимуму  $\Phi$  в цій точці. У низько симетричній фазі функція  $\Phi$  має два мінімуми, що відповідають  $\eta > 0$  і  $\eta < 0$  при значеннях  $\hat{A} < 0$ . Таким чином, за фазовий перехід відповідає зміні знаку  $A$  при  $\tilde{N} > 0$ .

2. В інтервалі температур, де  $\hat{A} > 0$ , кристал має вищу симетрію, що відповідає початковій фазі, яка характеризується групою симетрії  $G_0$ , що зберігається і в самій точці ПФ-2. По іншу сторону точки переходу  $T_0$ , де  $\hat{A} < 0$ , симетрія знижується, і група симетрії нової фази  $G$  є підгрупою початкової фази  $G_0$ .

3. Зміна симетрії при ПФ-2 відповідає одному з представлень початкової фази  $G_0$ , що не приводяться, причому, при переході від  $G_0$  до  $G$  число елементів симетрії  $N$  (порядок групи) зменшується в два рази.

4. Параметр порядку  $\eta$  має бути пов'язаний з операціями симетрії так, щоб його зміни при ПФ-2 автоматично призводили до відповідних змін числа елементів симетрії. При ПФ-2 зникають ті елементи симетрії в  $G_0$ , які не сумісні з групою симетрії  $\eta$ .

Термодинамічна теорія ФП-2, розроблена Л.Д. Ландау, згодом успішно застосовувалася для опису ФП-1, близьких до ФП-2. Для опису цього в розкладанні термодинамічного потенціалу  $\Phi$  в ряд по параметру порядку враховуються члени більш високого порядку. Розглянемо простий приклад, коли

$$\hat{O}(\delta, \delta, \eta) = \hat{O}_0 + \hat{A}\eta^2 + \hat{A}\eta^4 + \tilde{N}\eta^6 + \dots \quad (8.12)$$

У разі ПФ-1 в точці переходу  $\hat{O}_0$  повинні виконуватися дві умови: мінімуму  $\Phi$  і рівності термодинамічних потенціалів початкової і кінцевої фаз. Запишемо ці умови

$$\frac{\partial \hat{O}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{і} \quad \hat{O}(\hat{O}_0, \eta_0) = \hat{O}(\hat{O}_0, 0). \quad (8.13)$$

З (8.12) і (8.13) витікає:

$$\begin{aligned} 2\hat{A}_0\eta_0 + 4\hat{A}\eta_0^3 + 6\tilde{N}\eta_0^5 &= 0; \\ \hat{A}_0\eta_0^2 + \hat{A}\eta_0^4 + \tilde{N}\eta_0^6 &= 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

Нехай  $\hat{A} = \hat{a}(\hat{O} - \Theta)$ , де  $\Theta$  – температура, при якій  $A=0$ . Знайдемо  $\eta_0$  і  $\hat{O}_0$ . З (8.14) витікає, що

$$\eta_0^2 = -\frac{\hat{A}}{2\tilde{N}}, \quad (8.15)$$

$$\hat{O}_0 = \frac{1}{4} \frac{\hat{A}^2}{\hat{a}\tilde{N}} + \Theta. \quad (8.16)$$

Якщо покласти  $\hat{A} < 0$ , а  $\tilde{N} > 0$ , в точці переходу ми набудемо дійсних значень  $\eta_0$  – стрибка параметра порядку, що є ознакою ФП-1.

При вибраних знаках коефіцієнтів  $\dot{O}_0 > \Theta$ . При  $\dot{O}_0 = \Theta$  коефіцієнт  $A=0$ , тобто втрачає стійкість симетрична фаза, в якій  $A > 0$ . Температура  $\dot{O}_0$ , як зазначалося вище, відповідає умові рівності термодинамічних потенціалів початкової і кінцевої фаз. Співвідношення (8.16) вказує на наявність температурного гістерезису фазового переходу, що також характерно для ФП-1.

### • Властивості рідини.

Коефіцієнт поверхневого натягу рідини

$$\sigma = \frac{F}{l} \quad (8.17)$$

або 
$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}, \quad (8.17a)$$

де  $F$  – сила поверхневого натягу, яка діє на контур довжиною  $l$ , що обмежує поверхню рідини;  $\Delta E$  – енергія, яку треба затратити для збільшення площі поверхні на величину  $\Delta S$  (зміна вільної енергії поверхневого шару рідини).

Формула Лапласа для додаткового тиску, викликаного кривиною поверхні рідини

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (8.18)$$

де  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси кривини двох взаємно перпендикулярних перерізів поверхні рідини. Радіус вважається додатним, якщо меніск опуклий, і від'ємним, якщо меніск угнутий.

Висота підняття рідини у капілярі

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{r \rho g}, \quad (8.19)$$

де  $r$  – радіус капіляра;  $\rho$  – густина рідини;  $\theta$  – крайовий кут. При повному змочуванні  $\theta = 0$ , при повному незмочуванні  $\theta = 180^\circ$ .

Тиск насиченої пари над вгнутою сферичною поверхнею рідини – менший, а над опуклою – більший, ніж над плоскою поверхнею, на величину, яка дорівнює

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{\rho_i}{\rho_\delta}, \quad (8.20)$$

де  $r$  – радіус сфери,  $\rho_\pi$  – густина насиченої пари при даній температурі;  $\rho_\delta$  – густина рідини.

## Методичні вказівки.

- При розрахунку сил поверхневого натягу слід ураховувати, що ці сили діють вздовж будь-якого контуру, який лежить на поверхні рідини. При цьому сила поверхневого натягу, яка прикладена до кожного елементу цього контуру, є перпендикулярною до нього і направлена по дотичній до поверхні.

Якщо у якості такого контуру обрати границю дотику вільної поверхні рідини з твердим тілом, то відповідна сила поверхневого натягу буде силою, з якою поверхневий шар рідини діє на тверде тіло. Повну силу можна обчислити за формулою (8.17) лише за умовою, що сили поверхневого натягу, прикладені до усіх елементів контуру, є паралельними між собою.

Яким би тонким не був шар рідини (наприклад, у мильній бульбашці) він завжди має дві поверхні – зовнішню і внутрішню, вздовж кожної з яких діє сила поверхневого натягу.

- При розрахунку надлишкового поверхневого тиску, який надає формула (8.18) слід пам'ятати, що значення  $\Delta p$  визначається кривизною поверхні у даній точці. Тому у випадку поверхні змінної кривизни поверхневий тиск буде різним у різних точках тієї самої рідини, які лежать поблизу її поверхні. Наприклад, поверхня краплі, яка висить на змочуваному нею твердому тілі, має кривизну, яка є додатною знизу і від'ємною зверху.

У найпростіших випадках сферичних поверхонь (маленька краплина, повітряна бульбашка всередині рідини) доцільно викривлену поверхню рідини розглядати як пружну плівку, що стискає рідину або газ, які охоплює.

У всіх задачах на розрахунок висоту підйому рідини у капілярах, якщо неможливо безпосередньо провести обчислення за формулою (8.20), слід виходити з умови статичної рівноваги стовпа рідини: різниця тисків, що діють на стовп знизу і зверху повинна дорівнювати гідростатичному тиску стовпа рідини на його основу, який дорівнює  $\rho gh$ .

- Парою називають газ, який знаходиться нижче критичної температури. В залежності від густини пара підпорядковується рівнянню стану ідеального чи реального газу, при цьому критерій є таким самим, як для будь-якого газу.

Важлива особливість пари полягає в тому, що при ізотермічному стисканні її густина і тиск зростають лише до того, поки пара не стає насиченою. При подальшому зменшенні об'єму починається конденсація пари, тобто перетворення у рідину. При цьому густина і тиск маси пари, що залишається, не змінюються і дорівнюють густині і тиску насиченої пари при даній температурі (надаються в таблицях).

Таким чином, при обчисленні тиску і густини пари за будь-яким рівнянням стану реальними є лише ті їхні значення, які не перевищують

значень для насиченої пари при заданій температурі. У протилежному випадку слід вважати пару при даних умовах насиченою і за значення  $p$  та  $r$  приймати табличні значення.

У випадку, коли насичена пара знаходиться над плоскою поверхнею рідини, її тиск визначається тільки температурою. Над викривленою поверхнею рідини тиск насиченої пари залежить також від кривизни поверхні. Ця залежність є дуже слабкою, її ураховують лише в явищі конденсації при наявності в парі краплинок мікроскопічних розмірів, тобто дуже великої кривизни.

### Приклади розв'язання задач

**Приклад 8.1.** Дві краплини ртуті радіусом  $r=1$  мм кожна, зливаються в одну. Скільки теплоти  $Q$  при цьому виділяється?

$r_1 = r_2 = r = 1 \cdot 10^{-3}$ м	Розв'язання
$\sigma = 0,5$ Н/м	
$Q - ?$	Кількість теплоти $Q$ дорівнює енергії $\Delta E$ , яка звільнюється тому, що зменшилася площа поверхні. Цю енергію можна знайти з формули (8.17):

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \quad (1)$$

де  $\sigma$  - коефіцієнт поверхневого натягу ртуті;  $\Delta S$  - площа, на яку зменшилась поверхня однієї краплі порівняно з площею поверхні двох попередніх.

$$\Delta S = 4\pi r^2 \cdot 2 - 4\pi R^2, \quad (2)$$

де  $r$  – радіус маленької краплі;  $R$  – радіус великої краплі.

Радіус великої краплі можна знайти з тих міркувань, що об'єм великої краплі повинен дорівнювати двом об'ємам малої краплі.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 2; \text{ звідки } R = \sqrt[3]{2}r.$$

Підставимо у (2):

$$\Delta S = 4\pi r^2 (2 - \sqrt[3]{4}).$$

Тоді

$$Q = \Delta E = \sigma \cdot 4\pi r^2 (2 - \sqrt[3]{4}).$$

Перевіримо одиницю вимірювання:

$$[Q] = [\sigma][r^2] = \frac{\overset{I}{\underset{i}{J}} \cdot \overset{I}{\underset{i}{m}}^2}{\underset{i}{m}} = \overset{I}{\underset{i}{J}} \cdot \underset{i}{m} = \text{Дж}.$$

Коефіцієнт поверхневого натягу для ртуті знаходимо з таблиць:  $\sigma = 0,5$  Н/м.

Обчислення:

$$Q = 0,5 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot (1 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (2 - \sqrt[3]{4}) = 2,57 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 2,57 \text{ мкДж}.$$

Відповідь:  $Q = 2,57$  мкДж.

**Приклад 8.2.** Дві посудини об'ємом  $V=10\text{л}$  кожна наповнені сухим повітрям при тиску  $p_0=1\text{ атм}$  і температурі  $t_0=0^\circ\text{C}$ . У першу ввели  $m_1=3\text{г}$  води, у другу –  $m_2=10\text{г}$  і нагріли посудини до  $t=90^\circ\text{C}$ . Визначити тиск вологого повітря у кожній посудині при цій температурі.

$V_1=V_2=V=10^{-2}\text{м}^3$ $p_0=1,013\cdot 10^5\text{ Па}$ $T_0=273\text{К}$ $T=363\text{К}$ $m_1=3\cdot 10^{-3}\text{ кг}$ $m_2=10^{-2}\text{ кг}$ $M=18\cdot 10^{-3}\text{ кг/моль}$ $R=8,31\text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Вода, що введена в посудину, випаровується, і тиск в посудині згідно закону Дальтона стає рівним сумі парціальних тисків повітря і пари води.</p> <p>Парціальний тиск повітря в обох посудинах є однаковим, і може бути визначеним за законом Шарля, оскільки незмінна маса повітря нагрівається в постійному об'ємі (тепловим поширенням посудини нехтуємо):</p> $p = p_0 \cdot \frac{T}{T_0} = 1,013 \cdot 10^5 \cdot \frac{363}{273} \text{ Па} = 1,347 \cdot 10^5 \text{ Па}.$
$p_1; p_2 - ?$	

При визначенні парціального тиску пари води слід пам'ятати, що при наявності відкритої поверхні води, він не може перевищувати тиск насиченої пари при даній температурі. Тобто перш за все необхідно визначити, випаровування якої маси  $m_{\text{н.п.}}$  води відповідає насиченню пари у заданому об'ємі.

З таблиці знаходимо тиск насиченої пари  $p_{\text{н.п.}}=70,1\text{кПа}$  при температурі  $t=90^\circ\text{C}$  і за рівнянням Менделєєва – Клапейрона визначимо  $m_{\text{н.п.}}$ :

$$m_{\text{і.і.}} = \frac{M}{RT} pV = \frac{18 \cdot 10^{-3} \cdot 70,1 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{8,31 \cdot 363} = 4,18 \cdot 10^{-3} (\text{кг}).$$

Отже, у першій посудині вода випаровується повністю, а тиск пари  $p_{\text{п1}}$  за рівнянням Менделєєва – Клапейрона дорівнює

$$\delta_{\text{і1}} = \frac{m_1}{M} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 363}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2}} = 0,503 \cdot 10^5 (\text{Па}).$$

Повний тиск вологого повітря у першій посудині дорівнює

$$p_1 = p + \delta_{\text{і1}} = 1,347 \cdot 10^5 \text{ Па} + 0,503 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1,850 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

У другій посудині випаровується тільки  $4,18\text{г}$  води з  $10\text{г}$ , і тиск вологого повітря дорівнює

$$p_2 = p + \delta_{\text{і.і.}} = 1,347 \cdot 10^5 \text{ Па} + 0,701 \cdot 10^5 \text{ Па} = 2,048 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Відповідь:  $p_1 = 1,850 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ;  $p_2 = 2,048 \cdot 10^5 \text{ Па}$ .

**Приклад 8.3.** Що відбудеться з краплею води радіусу  $r$ , що попала у перенасичену пару, температура якої  $t = 90^\circ\text{C}$  і тиск  $p = 80\text{кПа}$ . Розглянути два випадки: 1)  $r = 0,5 \cdot 10^{-8}\text{м}$ ; 2)  $r = 5 \cdot 10^{-8}\text{м}$ .

$t = 90^\circ\text{C}$ $p = 80\text{кПа}$ $R = 8,31\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ $M = 18 \cdot 10^{-3}\text{кг}/\text{моль}$ $\rho_{\delta} = 1 \cdot 10^3\text{кг}/\text{м}^3$ 1) $r = 0,5 \cdot 10^{-8}\text{м}$ 2) $r = 2 \cdot 10^{-8}\text{м}$ $\sigma = 0,073\text{Н}/\text{м}$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>З таблиці залежності насиченої пари від температури знаходимо тиск насиченої пари при температурі <math>t = 90^\circ\text{C}</math>: <math>p_{\text{н.п.}} = 70,1\text{кПа}</math>, тобто пар, про який йде мова в умові задачі, дійсно є пересиченим. Його стан є нестійким. При контакті пари зі своєю рідиною починеться конденсація, яка припиниться тільки, коли маса пари зменшиться настільки, що він перестане бути пересиченим.</p>
$p'_{\text{і.і.}} - ?$	

Але знайдене з таблиці значення відповідає тиску насиченої пари над плоскою поверхнею рідини. Над опуклою поверхнею (біля краплі) тиск насиченої пари збільшується на величину (див. (8.20))  $\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{\rho_{\text{і.}}}{\rho_{\delta}}$  (2), де  $\sigma$  - коефіцієнт поверхневого

натягу рідини,  $r$  – радіус краплі,  $\rho_{\text{і.}}$  і  $\rho_{\delta}$  – відповідно густини пари і рідини.

В залежності від величини радіусу краплі можливі два випадки:

а)  $p'_{\text{і.і.}} = p_{\text{і.і.}} + \Delta p > p$ , де  $p$  – дійсний тиск пари. У цьому випадку пар, який буде пересиченим відносно рідини з плоскою поверхнею, є ненасиченим відносно краплі, і вона випаровується.

б)  $p'_{\text{і.і.}} = p_{\text{і.і.}} + \Delta p < p$ . У цьому разі пара є пересиченою і відносно рідини з плоскою поверхнею, і відносно краплі. Крапля зростає за рахунок конденсації пари, яка триває, доки її тиск не знизиться до значення  $p'_{\text{і.і.}}$ .

Для розрахунку  $\Delta p$  слід визначити густину пари  $\rho_{\text{п.}}$ . Робимо це за законом Менделєєва-Клапейрона, оскільки при тиску, під яким знаходиться пара, її можна вважати ідеальним газом.

$$\rho_{\text{і.}} = \frac{pM}{RT} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 363} \text{кг}/\text{м}^3 = 0,477 \text{кг}/\text{м}^3.$$

За формулою  $p'_{\text{і.і.}} = p_{\text{і.і.}} + \frac{2\sigma}{r} \cdot \frac{\rho_{\text{і.}}}{\rho_{\delta}}$  розраховуємо істинний тиск насиченої пари біля кожної з краплинок.

$$1) p'_{\text{і.і.}} = \left( 70,1 \cdot 10^3 + \frac{2 \cdot 0,073 \cdot 0,477}{0,5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3} \right) \text{Па} = 84,0 \cdot 10^3 \text{Па} = 84\text{кПа}.$$



Отримане значення  $p'_{i.i.}$  більше за тиск пари  $p=80\text{кПа}$ . Таким чином, має місце перший випадок і крапля випаровується.

$$2) p'_{i.i.} = \left( 70,1 \cdot 10^3 + \frac{2 \cdot 0,073 \cdot 0,477}{2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3} \right) \text{Па} = 73,6 \cdot 10^3 \text{Па} = 73,6 \text{кПа}.$$

Значення  $p'_{i.i.}$  менше заданого тиску пересиченої пари, що відповідає другому випадку. Пересичена пара конденсується, поки не стане насичуючою, а крапля зростає у розмірі.

Можна уявити пару, яка містить велику кількість різних за розміром краплин рідини. Може статися, що по відношенню до великих крапель пара буде пересиченою (тобто її тиск буде більшим, ніж у стані рівноваги при тій самій температурі), а відносно маленьких – ненасиченою. У цьому разі виникне потік пари від поверхні маленьких крапель до великих, тобто рідина, яка випаровується з поверхні малих крапель, буде конденсуватися на поверхні великих, і вони будуть зростати за рахунок малих. Таким чином, стан системи, в якій на одній висоті одночасно є й плоска поверхня, і окремі краплі не є рівноважним, бо при рівновазі тиск насиченої пари на одній висоті повинен бути однаковим.

**Приклад 8.4.** Знайти зріст температури плавлення льоду поблизу  $t = 0^\circ\text{C}$  при збільшенні тиску на  $\Delta p = 1\text{атм}$ , якщо питомий об'єм льоду на  $\Delta V' = 9,1 \cdot 10^{-5} \text{м}^3/\text{кг}$  більший за питомий об'єм води.

$T=273\text{К}$	Розв'язання Згідно рівнянню Клапейрона – Клаузіуса (8.1)
$\Delta p = 1 \cdot 10^5 \text{Па}$	
$\Delta V' = 9,1 \cdot 10^{-5} \text{м}^3/\text{кг}$	
$q = 3,35 \cdot 10^5 \text{Дж/кг}$	
$\Delta T = ?$	Звідки $\Delta T = -\Delta p \frac{T \Delta V'}{q}$ , де $q$ – питома

теплота фазового переходу, яку знаходимо з таблиці: питома теплота плавлення льоду  $q = 3,35 \cdot 10^5 \text{Дж/кг}$ .

$$\text{Обчислення дає: } \Delta T = -\frac{1 \cdot 10^5 \cdot 273 \cdot 9,1 \cdot 10^{-5}}{3,35 \cdot 10^5} = -7,5 \cdot 10^{-3} \text{К}.$$

$$[\Delta \hat{O}] = \frac{\hat{I} \cdot \hat{E} \cdot \hat{i}^3 \cdot \hat{e} \hat{a}^{-1}}{\hat{A} \hat{e} \cdot \hat{e} \hat{a}^{-1}} = \frac{\hat{I} \cdot \hat{i}^{-2} \cdot \hat{i}^3 \cdot \hat{E}}{\hat{I} \cdot \hat{i}} = \hat{E}$$

Відповідь: температура плавлення льоду зменшиться на 7,5 мК.

**Приклад 8.5.** Знайти рівноважне значення параметра порядку для системи, що має наступний вигляд розкладання в ряд вільної енергії по параметру порядку

$$F(p, T, \varphi) = F_0(p, T) + A\varphi^2 - C\varphi^3 + B\varphi^4$$

Враховуючи, що  $A = a(T - T^*)$  і  $a, C$  і  $B$  – позитивні константи. Показати, що в такій системі має місце фазовий перехід I роду; визначити температуру фазового переходу.

Розв'язання

Умова мінімуму термодинамічного потенціалу по змінній  $\varphi$  ( $\partial F / \partial \varphi = 0$ )

дає

$$2A\varphi - 3C\varphi^2 + 4B\varphi^3 = 0.$$

Відповідний вираз має 3 розв'язки:

$$\varphi_{\pm} = \frac{3C}{8B} \left[ 1 \pm \left[ 1 - \frac{32AB}{9C^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right];$$

$$\varphi = 0.$$

Звернемо увагу, що розв'язок зі знаком мінус перед квадратним коренем не відповідає умові мінімуму термодинамічного потенціалу, оскільки в цьому випадку друга похідна від  $F$  виявляється негативною, в чому можна переконатися підстановкою цього кореня у вираз

$$\partial^2 F / \partial \varphi^2 = 2a(T - T^*) - 6C\varphi + 12B\varphi^2$$

Рішення  $\varphi = 0$  відповідає симетричній фазі, а  $\varphi \neq 0$  - несиметричній фазі.

Існування відмінного від нуля коефіцієнта при  $\varphi^3$  допускає можливість рівності термодинамічних потенціалів обох фаз при деякій температурі  $T_c$ , тобто

$$a(T_c - T^*)\varphi_c^2 - C\varphi_c^3 + B\varphi_c^4 = 0, \quad (1)$$

де значення  $\varphi_c = \varphi + T = T_c$  (2) визначається формулою:

$$\varphi_c = \frac{3C}{8B} \left[ 1 + \left[ 1 - 32aB \frac{T_c - T^*}{9C^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3)$$

Оскільки  $\varphi_c \neq 0$ , то замість (1) маємо

$$a(T_c - T^*) - C\varphi_c + B\varphi_c^2 = 0. \quad (4)$$

Порівнюючи рівняння (1) і (4) при  $\varphi = \varphi_c$ , маємо

$$2a(T_c - T^*) = C\varphi_c$$

Звідси, підставляючи вираження (2) для  $\varphi_c$ , отримуємо рівняння для визначення температури фазового переходу

$$\left[16aB \frac{T_c - T^*}{3C^2} - 1\right]^2 = 1 - 32aB \frac{T_c - T^*}{9C^2}$$

Вирішуючи це рівняння, отримуємо

$$T_c = T^* + \frac{C^2}{4aB}. \quad (5)$$

Таким чином, температура фазового переходу I роду виявляється вище  $T^*$ .

Відповідь:  $T_c = T^* + \frac{C^2}{4aB}.$

**Приклад 8.6.** Вичислити теплоту фазового переходу для системи, в якій залежність термодинамічного потенціалу  $F$  від параметра порядку  $\phi$  має вигляд  $F(p, T, \phi) = F_0 + a(T - T^*)\phi^2 - C\phi^3 + B\phi^4$ .

Розв'язання

Теплота  $Q$  фазового переходу визначається зміною ентропії системи  $S$  при переході:

$$Q = T_c \Delta S. \quad (1)$$

У симетричній фазі ентропія системи  $S = -\partial F / \partial T$  дорівнює

$$S_{\text{с\textsubscript{им}}\text{ет}} = S_0 = -\partial F_0 / \partial T. \quad (2)$$

У несиметричній фазі аналогічно маємо:

$$S_{\text{н\textsubscript{ес}}\text{им}} = -\partial F_0 / \partial T - a\phi^2 \quad (3)$$

Для зміни ентропії  $\Delta S$  на основі (2) і (3) отримуємо

$$\Delta S = S_{\text{с\textsubscript{им}}\text{ет}} - S_{\text{н\textsubscript{ес}}\text{им}} = a\phi^2$$

Далі з урахуванням (1) маємо

$$Q = T_c \cdot a\phi^2. \quad (4)$$

Для остаточного визначення  $Q$  в (4) необхідно підставити значення  $\phi$  в точці фазового переходу  $\phi|_{t=t_c}$ . Для цього можна скористатися формулою

(4) попереднього завдання. В результаті знаходимо

$$Q = \frac{T_c a C^2}{4B^2} = \left[ T^* + \frac{C^2}{4aB} \right] \frac{a C^2}{4B^2}.$$

**Приклад 8.7.** Показати, що в моделі, прийнятій в завданнях 1 і 2, симетрична фаза абсолютно нестійка при температурах  $T < T^*$ . Знайти температуру  $T^{**}$ , при якій втрачає стійкість несиметрична фаза.

Розв'язання

Симетрична фаза стає нестійкою при таких температурах, коли друга похідна від термодинамічного потенціалу  $F$  по параметру порядку  $\phi$  негативна. Гранична температура  $T$  виникнення нестійкості відповідає

рівності нулю другої похідної. Оскільки в симетричній фазі  $\varphi = 0$ , то температура  $T$ , що відповідає втраті стійкості, визначається рівністю  $\partial^2 F / \partial \varphi^2 = 2a(T - T^*) = 0$ .

Звідси випливає, що втрата стійкості симетричної фази відбувається при  $T = T^*$ . Для визначення температури  $T^{**}$ , при якій втрачає стійкість несиметрична фаза, слід так само досліджувати вираження для  $\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$  при

$\varphi \neq 0$ . Проте результат можна отримати і простіше, якщо використати отримане в прикладі 7.2. явне вираження для рівноважного значення параметра порядку  $\bar{\varphi}$  в несиметричній фазі. Оскільки  $\bar{\varphi}$  дійсне, то підкорінний вираз, що входить у формулу має бути додатним. Звідси негайно отримуємо

$$1 - 32(T - T^*)aV/9C^2 \geq 0. \quad (1)$$

Граничне значення температури, що задовольняє співвідношенню, є  $T^{**} = T^* + 9C^2/32aV$ .

### Задачі для самостійного розв'язування

8.1. Чому дорівнює додатковий тиск  $\Delta P$  у середині мильної бульки діаметром  $d = 1 \text{ см}$ ? Коефіцієнт поверхневого натягу мильного розчину вважати рівним  $\alpha = 40 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$ .

8.2. Визначити тиск  $P$  у середині бульбашки повітря, яка утворилася у воді на глибині  $h = 2 \text{ м}$ . Діаметр бульбашки  $d = 4 \text{ мм}$ . Атмосферний тиск  $P_0$  вважати нормальним.

8.3. Яку роботу  $A$  треба виконати, щоб видути мильну бульку діаметром  $d = 5 \text{ см}$ .

8.4. Дві краплини води з однаковими радіусами  $r = 0,5 \text{ мм}$  злились в одну велику. Визначити кількість енергії  $W$ , яка при цьому виділилась.

8.5. Краплину ртуті радіусом  $r = 4 \text{ мм}$  розбили на дві однакові. Яка робота при цьому виконана?

8.6. Скільки краплин води  $N$  міститься у  $V = 1 \text{ см}^3$  води, якщо вона витікає з отвору трубки внутрішнім діаметром  $d = 1,8 \text{ мм}$ ? Вважати діаметр шийки краплі рівним внутрішньому діаметру трубки.

8.7. При оплавленні вертикально розташованого свинцевого дроту з нижчого кінця утворилось і послідовно відірвалось  $N = 10$  краплин. На скільки зменшилась при цьому довжина  $l$  дроту? Коефіцієнт поверхневого натягу розплавленого свинцю  $\alpha = 0,47 \text{ Н/м}$ .

8.8. На яку висоту  $h$  підніметься спирт у капілярі, внутрішній радіус якого  $r = 0,2 \text{ см}$ . Змочування вважати повним.

8.9. Визначити внутрішній радіус капіляра  $r$ , якщо при зануренні у бензол рідина піднімається у ньому на висоту  $h = 14\text{мм}$ . Змочування вважати повним.

8.10. Визначити масу  $m$  спирту у капілярі, внутрішній радіус якого  $r=0,5\text{мм}$ . Змочування при зануренні капіляра у спирт вважати повним .

8.11. Знайти різницю рівнів  $\Delta h$  води у двох сполучених капілярах з внутрішніми радіусами  $r_1=1\text{мм}$  і  $r_2=2\text{мм}$ .

8.12. Визначити тиск насиченої пари поблизу поверхні краплі радіусу  $r=1\cdot 10^{-7}\text{м}$  при температурі  $95^\circ\text{C}$ .

8.13. Герметична посудина заповнена сухим повітрям при атмосферному тиску  $p=1.01\cdot 10^5\text{Па}$  і температурі  $t_0=0^\circ\text{C}$ . В посудину вводять деяку масу води. Визначити тиск, який установиться всередині посудини. Розглянути два варіанти початкових умов. а) об'єм посудини  $V=20\text{л}$ , маса води  $m=19\text{г}$ ; б)  $V=30\text{л}$ ,  $m=15\text{г}$ .

8.14. Знайти питомий об'єм насиченої водяної пари при нормальному тиску, якщо відомо, що зменшення тиску на  $\Delta p=3,2\text{кПа}$  приводить до зменшення температури кипіння води на  $\Delta T=0,9\text{К}$ .

8.15. Визначити тиск насиченої водяної пари при температурі  $t=101,2^\circ\text{C}$ , вважаючи його ідеальним газом.

8.16. Пружність насиченої ртутної пари при температурах  $t_1=100^\circ\text{C}$  і  $t_2=120^\circ\text{C}$  дорівнює відповідно  $p_1=0,28\text{ мм рт.ст.}$  і  $p_2=0,76\text{ мм рт.ст.}$ . Знайти середнє значення питомої теплоти випаровування ртуті в цьому інтервалі температур.

## Тестові завдання

### Вибрати вірну відповідь:

1. Рівняння стану реального газу носить назву

- 1) рівняння Менделєєва – Клапейрона;
- 2) рівняння Клапейрона-Клаузіуса;
- 3) основного рівняння МКТ;
- 4) рівняння Ван-дер-Ваальса.

2. Речовину з газоподібного стану в рідкий за рахунок стискання без охолодження можливо перевести, якщо температура газу  $T$

- 1) вище критичної температури  $T_k$ ;
- 2) дорівнює критичній температурі  $T_k$ ;
- 3) нижче критичної температури  $T_k$ ;
- 4) співвідношення температур  $T$  і  $T_k$  не впливає на результат.

3. Крива фазової рівноваги „тверде тіло – рідина ” закінчується:

- 1) у критичній точці;    2) на нескінченності;
- 3) у потрійній точці;    4) у початку координат.

4. Крива фазової рівноваги „рідина – пара ” закінчується:  
1) у критичній точці; 2) на нескінченності;  
3) у потрійній точці; 4) у початку координат.
5. Крива фазової рівноваги „тверде тіло – пара ” закінчується  
1) у критичній точці; 2) на нескінченності;  
3) у потрійній точці; 4) не має кінцевої точки.
6. Коефіцієнт поверхневого натягу рідини зі зростанням температури  
1) зростає; 2) зменшується;  
3) не змінюється; 4) результат не є однозначним.
7. Теплота виділяється при  
1) пароутворенні; 2) кипінні;  
3) твердінні розплавлених металів; 3) плавленні;
8. З поглинанням теплоти відбувається процес  
1) плавлення твердих тіл; 2) конденсації пари у рідину;  
3) твердіння розплаву; 4) кожний з процесів.
9. З виділенням теплоти відбувається процес:  
1) плавлення твердих тіл; 2) конденсація пари у рідину;  
3) сублімація; 4) пароутворення.
10. Значення коефіцієнту в'язкості рідини зі зростанням температури  
1) збільшується;  
2) зменшується;  
3) не змінюється;  
4) зміна залежить від роду рідини.
11. Тиск насиченої пари при зростанні температури  
1) збільшується;  
2) не змінюється;  
3) зменшується;  
4) характер поведінки залежить від природи речовини.
12. Залежність рівноважного тиску від температури двохфазної системи надає  
1) рівняння Клапейрона – Менделєєва;  
2) рівняння Клапейрона – Клаузіуса;  
3) основне рівняння МКТ;  
4) закон збереження енергії
13. Тиск насиченої пари буде найменшим біля  
1) плоскої поверхні;  
2) опуклої поверхні;  
3) вгнутої поверхні;  
4) тиск буде однаковим.

13. Чим відрізняється теорія Ландау від теорії середнього поля?

- 1) Тим, що в теорії Ландау враховуються просторові кореляції параметра порядку.
- 2) Теорія Ландау тотожна теорії середнього поля.
- 3) Тим, що в теорії Ландау не враховуються просторові кореляції параметра порядку.

14. За яких умов в теорії Ландау фазових переходів 2-го роду можна нехтувати флуктуаціями параметра порядку?

- 1) Якщо модуль  $(T - T_0) < \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ).
- 2) Якщо розмірність простору більше 4.
- 3) Якщо розмірність простору менше 4.

15. За яких умов в теорії Ландау фазових переходів 2-го роду можна нехтувати флуктуаціями параметра порядку?

- 1) Якщо модуль  $(T - T_0) > \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ).
- 2) Якщо модуль  $(T - T_0) < \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ).
- 3) Якщо розмірність простору менше 4.

16. Який вигляд повинна мати функція розподілу Гіббса в теорії Ландау фазових переходів 2-го роду?

- 1) Комбінацію одночасткових функцій розподілу.
- 2) Суми одночасткових функцій розподілу.
- 3) Однорідній функції параметра порядку.

17. Що є теорія фазових переходів Гинзбурга-Ландау-Вильсона?

- 1) Окремий випадок теорії Ландау
- 2) Узагальнення теорії Ландау з урахуванням міжчасткових кореляцій.
- 3) Теорію, що зв'язує наближення середнього поля з теорією Ландау.

18. Як пов'язані між собою критичні показники в теорії фазових переходів 2-го роду?

- 1) Є незалежними величинами, що характеризують критичну поведінку термодинамічних коефіцієнтів, пов'язаних з другими похідними різних термодинамічних потенціалів.
- 2) Пов'язані між собою і можуть бути виражені через будь-які два.
- 3) Можуть бути розбиті на дві групи незалежних критичних індексів.

19. Яка умова є одним з критеріїв застосовності теорії Ландау?

- 1) Умова крихти флуктуації параметра порядку по відношенню до його рівноважного значення.
- 2) Умова крихти середнього значення параметра порядку в порівнянні з його термодинамічними флуктуаціями.
- 3) Умова зразкової рівності середнього значення параметра порядку і його флуктуацій

20. Які міри параметра порядку містить розкладання Ландау вільної енергії для критичної точки пара-рідина?

- 1) Тільки парні міри параметра порядку.
- 2) Тільки непарні міри параметра порядку.
- 3) Парні і непарні міри параметра порядку.

## Додатки

### Фундаментальні фізичні константи:

Гравітаційна стала	$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$
Швидкість світла в вакуумі	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Магнітна стала	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Електрична стала	$\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Стала Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Маса спокою електрону	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Маса спокою протону	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Маса спокою нейтрону	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Елементарний заряд	$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Атомна одиниця маси	$1 \text{ а.о.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Стала Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Стала Фарадея	$F = 96,48456 \cdot 10^3 \text{ Кл/моль}$
Молярна газова стала	$R = 8,31441 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$
Молярний об'єм ідеального газу при нормальних умовах	$V_0 = 22,41383 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Стала Больцмана	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$

### Параметри газів (за нормальних умов)

Температурний коефіцієнт тиску  $\beta$ ,  $\text{К}^{-1}$ ; питома теплоємність  $c_p$   $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ; відношення теплоємностей  $\gamma = C_p/C_v$ ; теплопровідність  $\lambda$ ,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ; в'язкість  $\eta$ ,  $\text{мкПа} \cdot \text{с}$

Газ	$\beta, 10^{-3}$	$c_p$	$\gamma$	$\lambda$	$\eta$
Азот	3,674	$1,0 \cdot 10^3$	1,40	0,0239	16,7
Водень	3,662	$1,43 \cdot 10^4$	1,40	0,169	8,4
Вуглекислий газ	3,726	848	1,30	0,0147	14,0
Гелій	3,660	5240	1,66	0,143	18,9
Кисень	3,674	913	1,40	0,0245	19,2
Повітря сухе*	3,674	1011	1,40	0,0241	17,5

\* Склад повітря за об'ємом, %: 78,03  $\text{N}_2$ ; 20,99  $\text{O}_2$ ; 0,933  $\text{Ar}$ ; 0,03  $\text{CO}_2$ ; 0,01  $\text{H}_2$ ; 0,0018  $\text{He}$  та ін.



**Тиск і густина насиченої водяної пари при різних температурах**  
Тиск  $p$ , гПа; густина  $\rho_0$ , г/м<sup>3</sup>

t, °C	$\rho$	$\rho_0$	t, °C	$\rho$	$\rho_0$	t, °C	$\rho$	$\rho_0$
0	6,11	4,84	18	20,64	15,4	36	59,41	
1	6,57	5,22	19	21,97	16,3	37	62,76	
2	7,05	5,60	20	23,65	17,3	38	66,25	
3	7,59	5,98	21	24,87	18,3	39	69,91	
4	8,13	6,40	22	26,44	19,4	40	73,75	
5	8,72	6,48	23	28,93	20,6	45	95,83	
6	9,35	7,3	24	29,84	21,8	50	123,32	
7	10,01	7,8	25	31,68	23,0	55	157,32	
8	10,73	8,3	26	33,61	24,4	60	199,18	
9	11,48	8,8	27	35,65	25,8	65	249,98	
10	12,28	9,4	28	37,80	27,2	70	311,57	
11	13,12	10,0	29	40,05	28,7	75	385,43	
12	14,03	10,7	30	42,42	30,8	80	473,43	

**Густина води  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>, при різних температурах**

t, °C	$\rho$	t, °C	$\rho$	t, °C	$\rho$
0	999,87	12	999,52	24	997,32
1	999,93	13	999,40	25	997,07
2	999,97	14	999,27	26	996,81
3	999,99	15	999,13	27	996,54
4	1000,00	16	998,97	28	996,26
5	999,99	17	998,80	29	995,97
6	999,97	18	998,62	30	995,67
7	999,93	19	998,43	31	995,37
8	999,88	20	998,23	32	995,05
9	999,81	21	998,02	33	994,72
10	999,73	22	997,80	34	994,40
11	999,63	23	997,57	35	994,06

**Діаметри  $d$  атомів і молекул, нм**

Речовина	$d$	Речовина	$d$
Азот	0,31	Гелій	0,19
Аргон	0,29	Кисень	0,29
Водень	0,23	Оксид вуглецю	0,32
Водяна пара	0,26	Хлор	0,37
Вуглекислий газ	0,33		

### Густина деяких речовин

Речовина	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>	Речовина	$\rho \cdot 10^{-3}$ , кг/м <sup>3</sup>
Тверді речовини(при 293 К)			
Алмаз	3,5	Ніхром	8,3
Алюміній	2,7	Олово	7,3
Вольфрам	19,3	Парафин	9,0
Германій	5,32	Платина	21,5
Графіт	2,1	Куховарська сіль	2,1
Залізо, сталь	7,8	Корка	0,24
Золото	19,3	Свинець	11,4
Іридій	22,4	Срібло	10,5
Цегла	1,8	Слюда	2,8
Константан	8,9	Скло	2,5
Латунь	8,5	Вугілля кам'яне	1,4
Лід (0 °С)	0,9	Уран	18,7
Манганін	8,5	Фарфор	2,3
Мідь	8,9	Цинк	7,1
Нікелін	8,8	Чавун	7,4
Нікель	8,9	Ебоніт	1,2
Рідини (при 293 К)			
Анілін	1,02	Масло мінеральне	0,92
Бензин	0,70	Масло олівкове	0,92
Бензол	0,9	Нафта	0,8-0,9
Вода при 277 К	1,0	Ртуть при 0 °С	13,6
Вода при 373 К	0,958	Скипідар	0,87
Гліцерин	1,2	Спирт етиловий	0,79
Гас	0,80	Ефір сірний	0,71
Гази (при нормальних умовах)			
Азот	1,25	Кисень	1,43
Аміак	0,77	Криптон	3,74
Аргон	1,78	Ксенон	5,85
Ацетілен	1,17	Метан	0,72
Повітря	1,29	Неон	0,90
Водень	0,09	СО <sub>2</sub>	1,98
Гелій	0,18	Хлор	3,21

### Питома теплоємність деяких речовин

Речовина	$c, \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	Речовина	$c, \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
Тверді речовини			
Алюміній	880	Парафін	3200
Бетон	880	Песок	970
Дерево	2700	Платина	125
Залізо, сталь	460	Свинець	130
Золото	125	Сіра	712
Цегла	750	Срібло	250
Латунь	380	Скло	840
Лід ( $0^\circ \text{C}$ )	2090	Цемент	800
Мідь	380	Цинк	400
Нафталін	1300	Чавун	550
Олово	250		
Рідини			
Вода	4187	Масло трансформаторне	2093
Гліцерин	2430	Ртуть	125
Залізо	830	Спирт етиловий	2430
Гас	2140	Ефір сірний	2330
Масло машинне	2100		
Гази (при постійному тиску)			
Азот	1000	Повітря ( $M = 0,029 \text{ кг/моль}$ )	1000
Аміак	2100	Гелій	5200
Водень	14300	Кисень	920
Водяна пара	2200	$\text{CO}_2$	830

### Критичні значення температури і тиску

Речовина	$T_k, \text{К}$	$p_k, \text{МПа}$	Речовина	$T_k, \text{К}$	$p_k, \text{МПа}$
Азот	126	3,4	Вуглекислий газ	304	7,4
Аргон	151	4,87	Гелій	5,2	0,23
Водень	33	1,28	Кисень	154,78	5,01
Водяна пара	647	21,8	Хлор	417	7,71

### Поправки Ван-дер-Ваальса

Речовина	$a, \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2}$	$b, 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$	Речовина	$a, \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^3}{\text{моль}^2}$	$b, 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Азот (N <sub>2</sub> )	0,136	3,9	Водяна пара (H <sub>2</sub> O)	0,554	3,0
Аргон (Ar)	0,132	3,2	Діоксид вуглецю (CO <sub>2</sub> )	0,367	4,3
Водень (H <sub>2</sub> )	0,024	2,7	Кисень	0,137	3,2

### Тиск і густина насиченої водяної пари при різних температурах

Тиск  $p$ , гПа; густина  $\rho_0$ , г/м<sup>3</sup>

t, °C	$\rho$	$\rho_0$	t, °C	$\rho$	$\rho_0$	t, °C	$\rho$	$\rho_0$
0	6,11	4,84	18	20,64	15,4	36	59,41	
1	6,57	5,22	19	21,97	16,3	37	62,76	
2	7,05	5,60	20	23,65	17,3	38	66,25	
3	7,59	5,98	21	24,87	18,3	39	69,91	
4	8,13	6,40	22	26,44	19,4	40	73,75	
5	8,72	6,48	23	28,93	20,6	45	95,83	
6	9,35	7,3	24	29,84	21,8	50	123,32	
7	10,01	7,8	25	31,68	23,0	55	157,32	
8	10,73	8,3	26	33,61	24,4	60	199,18	
9	11,48	8,8	27	35,65	25,8	65	249,98	
10	12,28	9,4	28	37,80	27,2	70	311,57	
11	13,12	10,0	29	40,05	28,7	75	385,43	
12	14,03	10,7	30	42,42	30,8	80	473,43	
13	14,97	11,4	31	44,93	32,1	85	578,08	
14	15,99	12,1	32	47,54	33,9	90	701,00	
15	17,05	12,8	33	50,30	35,7	95	845,13	
16	18,17	13,6	34	53,20	37,6	100	1013,25	
17	19,37	14,5	35	56,24	39,6			

### Температура кипіння і питома теплота пароутворення

Речовина	T, К	T, °C	r, МДж/кг
Аміак	239,6	-33,4	1,37
Ацетон	329,2	56,2	0,52
Бензин	423	150	0,3
Вода	373	100	2,26
Повітря	81	-192	0,21
Залізо	3323	3050	0,058
Ртуть	630	357	0,258
Скипідар	433	160	0,294
Спирт етиловий	351	78	0,857
Фреон-12	243,2	-29,8	1,68
Ефир сірний	308	35	0,352

## Предметний покажчик

- Ефективний
  - діаметр 59
  - переріз 59
- Закон
  - Авогадро 22
  - Бойля – Маріотта 21
  - Гей-Люссака 21
  - Дальтона 23
  - Фіка 61
  - Фур'є 62
  - Шарля 21
- Коефіцієнт
  - внутрішнього тертя 61
  - дифузії 61
  - Пуассона 77
  - теплопровідності 62
- Моль 7
- Нерівність Клаузіуса 107
- Параметри
  - критичні 122
  - термодинамічні 15
- Процес
  - адіабатний 21
  - ізобарний 21
  - ізотермічний 21
  - ізохорний 21
  - коловий (цикл) 17
  - необоротний 17
  - оборотний 17
  - політропний 79
  - релаксації 16
  - рівноважний 16
- Рівняння
  - Ван-дер-Ваальса 121
  - дифузії 61
  - Клапейрона – Клаузіуса 127
  - Майєра 77
  - Менделєєва – Клапейрона 22
  - МКТ ідеальних газів 40
  - Ньютона 61
  - теплопровідності 62
- Стан системи
  - нерівноважний 15
  - рівноважний 15
  - стаціонарний 16
- Термодинамічна система 22
  - адіабатична 15
  - замкнена 15
  - ізольована 15
  - відкрита 15
- Теплоємність
  - молярна 76
  - системи 76
  - питома 76
- Точка
  - потрійна 122
  - критична 122
- Формула барометрична 44
- Функція розподілу
  - густини ймовірності 41
  - молекул по швидкостям 42
  - у потенціальному полі 44
- Цикл Карно 107
- Шкала температур
  - абсолютна (Кельвіна) 19
  - Реомюра 20
  - термодинамічна 19
  - Фаренгейта 20
  - Цельсія 19

## Іменний покажчик

- |                    |               |
|--------------------|---------------|
| Авогадро 8         | Майєр 76      |
| Бойль 21           | Максвелл 42   |
| Больцман 23, 44    | Маріотт 21    |
| Ван-дер-Ваальс 121 | Менделєєва 22 |
| Гей-Люссак 21      | Нернст 108    |
| Дальтон 23         | Планк 105     |
| Карно 107          | Пуассон 77    |
| Клапейрона 22      | Томсон 105    |
| Клаузіус 106       | Шарль 21      |

## Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. т.1.– К.: Техніка, 1999. – 536с.
2. Савельєв І.В. Курс фізики. т.1. – М.: Наука, 1989. – 352с.
3. Трофимова Т.И. Курс фізики – М.: Наука, 1985. – 432с.
4. Детлаф А., Яворський Б.Н. Курс фізики. – М.: ВШ, 1989. – 608с.
5. Сивухин Д.В. Общій курс фізики.т.2. – М.: Наука, 1974. – 520с.
6. Герасимов О.І.(та інш.) Конспект лекцій із загальної фізики. – Одеса: ТЕС, 2004. – 200с.
7. Чертов А.Г., Вороб'єв А.А. Задачник по фізице. – М.: ВШ, 1981. – 512с.
8. Новиков С.М. Сборник заданий по общей фізице. – М.: Оникс, 2007. – 512с.
9. Контрольні завдання-тести з курсу загальної фізики (під ред. О.І.Герасимова). – К.: ІЗМН, 1997. – 44с.

