

О.І.Герасимов, І.С.Андріанова

**ФІЗИКА В ЗАДАЧАХ. Ч.ІV. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ.
ОПТИКА**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.І.Герасимов, І.С.Андріанова

**ФІЗИКА В ЗАДАЧАХ. Ч.ІV. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ.
ОПТИКА**

Навчальний посібник

**О д е с а
ТЕС
2015**

ББК 22.2
Г37
УДК 531

Рецензенти:

Директор інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України (м.Київ),
Віце-президент НАН України, академік НАН України
А.Г.Загородній

Академік ВШ України, член-кореспондент АПН України, заслужений діяч науки і
техніки України, зав. каф. медичної та біологічної фізики Національного медичного
університету ім. О.О. Богомольця (м. Київ),
д.ф.-м.н., проф. О.В.Чалий

Професор, доктор фіз.-мат.наук, професор Одеської Академії зв'язку, Курмашев Ш.Д.

Герасимов О.І., Андріанова І.С.

Г37 Фізика в задачах. Ч.IV. Коливання та хвилі. Оптика: Навчальний посібник

/О.І.Герасимов, І.С.Андріанова.– Одеса: 2015. – 152с.

ISBN

Навчальний посібник з розділу “ Коливання та хвилі. Оптика ” курсу загальної фізики має за мету поліпшення засвоєння змісту фізики студентами вищих навчальних закладів природничих напрямів підготовки за допомогою детального розгляду та розв'язання типових задач з окремих її підрозділів.

Акцент посібника спрямовано на роз'яснення, усвідомлення та застосування фізичних законів на шляху розв'язання конкретних задач.

Посібник може також бути корисним для студентів, магістрів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників вищих навчальних закладів із природничих та міждисциплінарних напрямків підготовки.

ББК 22.2

ISBN

© Одеський державний
екологічний університет, 2014

ЗМІСТ

Передмова	4
Розділ 1. Коливальні та хвильові процеси	5
1.1. Кінематика і динаміка коливального руху	5
1.2. Додавання коливань	13
1.3. Хвилі та їх характеристики. Пружні хвилі. Звук	16
1.4. Електромагнітні хвилі	22
Розділ 2. Оптика	47
2.1 Геометрична оптика і фотометрія	47
2.2. Хвильова оптика	50
2.3. Квантова теорія випромінювання. Фотони	57
Розділ 3. Елементи квантової механіки та атомної фізики	112
Розділ 4. Будова та властивості ядер. Радіоактивність	127
Додатки	144
Предметний покажчик	148
Іменний покажчик	149
Література	150

ПЕРЕДМОВА

Посібник продовжує видання методичних матеріалів з курсу загальної фізики “Фізика у задачах та прикладах”, який спрямовано на засвоєння змісту дисципліни шляхом детального розв’язання типових задач з окремих її розділів. Цей том посібника присвячено викладенню положень розділів «Коливання та хвилі», «Оптика» та деяких питань сучасної фізики містить досить велику кількість вправ, яких на думку авторів, достатньо для якісного практичного засвоєння цього розділу. Як і у попередніх розділах, головна увага приділяється детальній методичній проробці розв’язків типових задач.

Задачі для самостійного розгляду спираються на типові, поширюють коло питань розділу, до якого вони відносяться, та свідомо прокладають стежки безпосередньо до комплексних фахових завдань. Студент може користуватися посібником, перебуваючи на різних рівнях засвоєння матеріалів курсу, і контролювати рівень знань за допомогою тестових вправ (понятійний рівень) чи шляхом розв’язання типових задач. Посібник розраховано на студентів міждисциплінарних напрямків підготовки, тому задачі та вправи підібрані таким чином, щоб задовольнити категорії студентів, які мають різні ступені мотивації до вивчення фізики. Все вищеописане здійснюється із безумовним утриманням концептуального змісту фізики та її спрямованості на розв’язання практичних і актуальних задач вивчення навколишнього середовища та технологічних процесів.

Список літератури відсилає користувача до поглиблення отриманих знань та навичок за допомогою вивчення додаткових джерел інформації та доповнює довідкову базу посібника.

Автори висловлюють щиру подяку рецензентам за важливі дискусії та рекомендації стосовно як змістовних положень посібника, так і категорій завдань, які включено до змісту.

Розділ 1. КОЛИВАЛЬНІ ТА ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

Тема: Характеристики коливальних процесів. Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань і його розв'язки. Фізичні задачі, що приводять до рівняння гармонічних коливань: пружний маятник, фізичний та математичний маятник. Вільний коливальний контур. Згасаючі коливання, їх диференціальне рівняння та його розв'язок. Фізичні задачі, що приводять до рівняння згасаючих коливань: пружний маятник при наявності опору середовища: коливальний контур при наявності омичного опору. Вимушені коливання системи. Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язок. Електричне коло з послідовно з'єднаними опором, конденсатором, котушкою індуктивності та джерелом ЕРС, яка змінюється за гармонічним законом. Явище резонансу. Додавання когерентних коливань. Биття. Додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти.

Розповсюдження коливань у пружному середовищі. Рівняння плоскої біжучої монохроматичної хвилі. Хвильове рівняння. Звук та його характеристики. Ефект Доплера в акустиці. Стоячі хвилі. Електромагнітні хвилі та їх властивості.

Основні поняття і формули

У природі часто зустрічаються явища, яким в тій чи іншій мірі притаманна періодичність, процеси, в яких деяка система багаторазово відхиляється від положення рівноваги і знов повертається до нього. Подібні процеси об'єднуються під загальною назвою «коливання» незалежно від того, яка саме фізична величина періодично змінюється, і допускають однаковий математичний опис за допомогою диференціальних рівнянь того самого виду. Саме тому питання, які пов'язані з вивченням коливань та хвиль будь-якої фізичної природи (механічні чи електромагнітні) виділені в окремий розділ.

1.1. Кінематика і динаміка коливального руху

● **Коливаннями** називають процеси (зміни стану або руху), які повторюються у часі в тій чи іншій степені.

Розрізняють коливання:

- механічні (маятник, струни, механізм годинника, частини будівель і т. ін.);
- електромагнітні (змінний електричний струм, вектори напруженості електричного та магнітного полів електромагнітної хвилі);
- електромеханічні (мембрани телефонів)

Система, що здійснює коливання носить назву **коливальної**.

- **Вільні** коливання – коливання, які здійснюються при відсутності змінної зовнішньої дії внаслідок відхилення системи від стану рівноваги. При відсутності втрат енергії (тобто сили тертя, опору, омичного опору у коливальному контурі) вільні коливання називають **власними коливаннями** системи.

- Коливання називають **періодичними**, якщо значення фізичних величин, які характеризують коливальну систему, повторюються через рівня проміжки часу. Найменший проміжок часу, який задовольняє цій умові, має назву **періоду** T . Тобто при періодичних коливаннях залежність змінної величини S від часу задовольняє умові

$$S(t \pm T) = S(t).$$

Кількість повних коливань, що здійснюється за одиницю часу називають **частотою** коливань ν , а за 2π одиницю часу – **циклічною частотою** ω :

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (1.1.1a);$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.1.1b);$$

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.1.2)$$

- **Гармонічним** називають коливання, яке здійснюється за законом синусу або косинусу:

$$S(t) = A \sin(\omega t + \varphi_{01}), \quad (1.1.3a)$$

або
$$S(t) = A \cos(\omega t + \varphi_{02}). \quad (1.1.3b)$$

Тут $A = S_{\max} = \text{const}$ – **амплітуда** коливань, яка дорівнює максимальному значенню величини $S(t)$, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – фаза коливання; $\varphi_0 = \varphi(0)$ – початкова фаза коливань. Рівняння (1.3a) і (1.3b) рівноправні, але відрізняються значенням початкової фази.

- **Диференціальне рівняння власних гармонічних коливань:**

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega_0^2 S = 0. \quad (1.1.4)$$

Його розв'язок можна представити у стандартному вигляді (1.3a) або (1.1.3b):

$$S(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.1.5)$$

Сталі інтегрування A і φ_0 можуть бути визначені, якщо відомі початкові умови, наприклад значення функції S та її першої похідної в початковий момент часу $t=0$.

- **Гармонічний осцилятор** – коливальна система, яка здійснює періодичні коливання і використовується у якості точної або наближеної моделі в багатьох задачах класичної та квантової фізики. Прикладами гармонічного осцилятора є: **пружний, фізичний і математичний**

маятники, а також коливальний контур (при малих струмах та напругах).

- **Пружний маятник** – вантаж маси m , закріплений на абсолютно пружній пружині з жорсткістю k , який здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили $F = -kx$ (рис.1.1), де x – зміщення кульки від стану рівноваги.

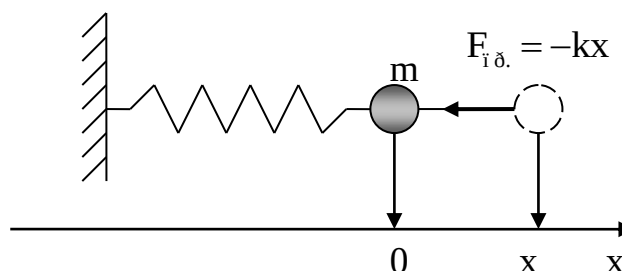


Рис.1.1

Рівняння руху такої системи (II закон Ньютона) має вигляд:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Лінійний гармонічний осцилятор здійснює коливання за законом

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.1.6)$$

з циклічною частотою власних коливань ω_0 і періодом T_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.1.7); \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.1.8)$$

Швидкість матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання за законом (1.6), дорівнює $v = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; (1.1.9)

Її прискорення: $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ (1.1.10)

Коливання швидкості випереджають за фазою коливання зміщення на $\pi/2$, коливання прискорення – на π .

Кінетична енергія системи, яка здійснює гармонічні коливання за законом (1.6): $W_e = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$. (1.1.11)

Потенціальна енергія: $W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$. (1.1.12)

Значення кінетичної та потенціальної енергії здійснюють гармонічні коливання відносно значення $kA^2/4$ з частотою $2\omega_0$.

Повна енергія: $W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$. (1.1.13)

- **Фізичний маятник** – тверде тіло довільної форми, що здійснює коливання під дією сили тяжіння відносно нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через центр мас і має назву осі маятника (рис.1.2).

Гармонічні коливання фізичного та математичного маятників здійснюються під дією квазіпружної сили, роль якої грає сила тяжіння.

Квазіпружною називають не пружну за своєю природою силу, якій притаманні ті самі властивості, що має пружна сила, тобто: 1) її величина є пропорційною лінійному або кутовому зміщенню тіла від положення рівноваги; 2) вона завжди направлена до положення рівноваги.

При відхиленні маятника від вертикалі виникає обертальний момент $M = -mgl \sin \alpha$, який повертає маятник у положення рівноваги. Рівняння руху маятника (на основі закону динаміки обертового руху) має вигляд:

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha,$$

де I – момент інерції маятника відносно осі коливань O ; l – відстань від точки підвісу O до центра мас маятника C .

При невеликих кутах відхилення ($\alpha \approx 6^\circ$) $\sin \alpha \approx \alpha$. Обертальний момент $M \approx -mgl \alpha$ грає роль квазіпружної сили, і рівняння переходить у рівняння гармонічних коливань:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \alpha = 0.$$

Його розв'язок: $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ (1.1.14)

Циклічна частота власних коливань маятника ω_0 і період T_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \quad (1.1.15); \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad (1.1.16)$$

Сталі інтегрування α_0 і φ_0 можуть бути визначені з відомих початкових умов.

● **Математичний маятник** – ідеалізована система, яка складається з маси, зосередженій в одній точці (матеріальної точки), яка підвішена на невагомій нерозтяжній нитці (рис.1.3).

З урахуванням того, що момент інерції математичного маятника визначається за формулою $I = ml^2$ формули (1.15) і (1.16) для циклічної частоти власних коливань ω_0 і періоду T_0 набувають вигляду

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.1.17); \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.1.18)$$

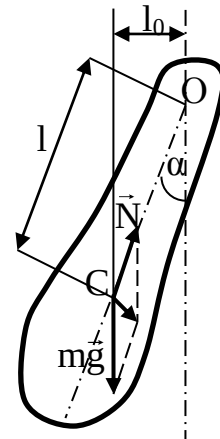


Рис.1.2

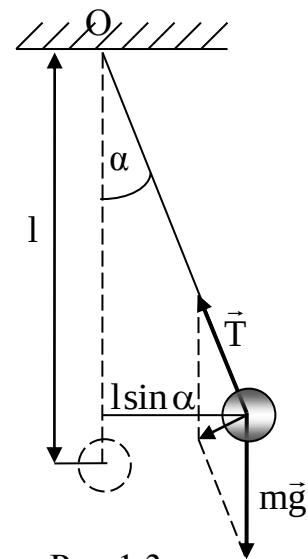


Рис.1.3.

● **Вільний коливальний контур** – електричне коло, яке складається із зарядженого конденсатора C та котушки індуктивності L (рис.1.4).

Рівняння власних коливань заряду на обкладинках конденсатора, записане на основі II правила Кірхгофа, має вигляд:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Його розв'язком є вираз

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.1.19)$$

Циклічна частота ω_0 і період T_0 власних коливань визначаються за

формулами: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \quad (1.1.20)$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (1.1.21)$$

Зрозуміло, що напруга U на обкладинках конденсатора і сила струму I у контурі також змінюються за гармонічним законом:

$$U = \frac{q_0}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.1.22)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.1.23)$$

● **Вільні згасаючі коливання** – вільні коливання із згасаючою амплітудою. Зменшення амплітуди є результатом витрат енергії внаслідок наявності в реальній фізичній системі тертя, опору середовища, омичного опору. Диференціальне рівняння згасаючих коливань:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\beta \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0. \quad (1.1.24)$$

Його розв'язок: $S = S_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.1.25)$

Тут $S_0 = A(0)$ – значення амплітуди в початковий момент часу $t = 0$;

$A(t) = S_0 e^{-\beta t}$ (1.1.25a) – значення амплітуди в момент часу t ; ω – частота коливань; φ_0 – початкова фаза коливань; β – коефіцієнт згасання.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}; \quad (1.1.26)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.1.27)$$

Згасаючі коливання не є періодичними, однак, величина S приймає нульові, максимальні та мінімальні значення через однакові проміжки часу. Тому величини ω і T називають відповідно **умовною циклічною частотою і умовним періодом**.

Час релаксації τ – проміжок часу, за який амплітуда коливань

зменшується в “ e ” разів:

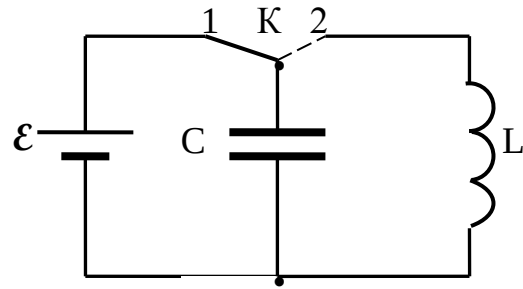
$$\frac{S_0 e^{-\beta t}}{S_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e.$$


Рис. 1.4.

Коефіцієнт згасання β – величина, обернена часу релаксації τ :

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (1.1.28)$$

Декремент згасання – відношення амплітуд в моменти часу, які відрізняються на умовний період: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{S_0 e^{-\beta t}}{S_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$.

Логарифмічний декремент згасання – натуральний логарифм відношення амплітуд в моменти часу, які відрізняються на умовний період.

$$\lambda = \ln \frac{A_1}{A_2} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (1.1.29)$$

З урахуванням співвідношення (1.1.28) отримуємо:

$$\lambda = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (1.1.29a)$$

де N_e – кількість коливань, за яку амплітуда зменшується в “e” разів.

Добротність коливальної системи – безрозмірна фізична величина Q , яка дорівнює добутку 2π на відношення енергії коливань $W(t)$ до збитку цієї енергії за умовний період коливання:

$$Q = \frac{2\pi W(t)}{W(t) - W(t+T)} = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}.$$

При малих значеннях β можна покласти $e^{-2\beta T} = 1 - 2\beta T$. Тоді, з урахуванням $T \approx T_0$, добротність коливальної системи дорівнює

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (1.1.30)$$

● **Вимушені коливання** – коливання, які виникають у будь-якій системі під впливом змінної зовнішньої дії (змінної сили, змінної ЕРС и т. ін.), яка періодично поповнює енергію коливальної системи. У випадку, коли зовнішня сила змінюється за гармонічним законом $F = F_0 \sin \omega t$, диференціальне рівняння вимушених коливань є неоднорідним:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 2\beta \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = f_0 \sin \omega t. \quad (1.1.31)$$

В установленому режимі коливань розв’язок цього рівняння має вигляд:

$$S = S_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.1.32)$$

Таким чином, частота вимушених коливань системи збігається з частотою зміни примусової сили; сталі інтегрування S_0 і φ можуть бути визначені через параметри коливальної системи за початковими умовами.

● **Резонанс** – явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти примусової сили до $\omega_{рез.}$.

Диференціальні рівняння та вирази для відповідних параметрів у випадку згасаючих та вимушених механічних (пружний маятник) та електромагнітних (коливальний контур) коливань наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1.

Вільні (згасаючі) коливання			
механічні		електромагнітні	
Диференціальне рівняння	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$ $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$	Диференціальне рівняння	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$ $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$
Маса	m	Індуктивність	L
Жорсткість	k	Обернена величина ємності	$\frac{1}{C}$
Коефіцієнт опору	r	Омічний опір	R
Зміщення	$x = x_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$	Заряд	$q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$
Власна частота пружного маятника	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Власна частота коливального контуру	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
Період власних коливань	$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$	Період власних коливань	$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$
Циклічна частота згасаючих коливань	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} =$ $= \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$	Циклічна частота згасаючих коливань	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ $= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
Коефіцієнт згасання	$\beta = \frac{r}{2m}$ r – коефіцієнт опору	Коефіцієнт згасання	$\beta = \frac{R}{2L}$ R – омичний опір
Логарифм. декремент згасання	$\lambda = \beta T = \frac{\pi r}{\sqrt{mk}}$	Логарифм. декремент згасання	$\lambda = \beta T = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$
Добротність пружного маятника	$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{r} \sqrt{mk}$	Добротність коливального контуру	$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Вимушені коливання			
механічні		електромагнітні	
Диференціальне рівняння	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x =$ $= \frac{F_0}{m} \cos \omega t;$ $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x =$ $= \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$	Диференціальне рівняння	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q =$ $= \frac{\mathcal{E}_0}{L} \sin \omega t$ $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q =$ $= \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t.$
Зміщення	$x = A \sin(\omega t + \varphi)$	Заряд	$q = q_0 \sin(\omega t + \varphi)$
Амплітуда	$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$ $= \frac{F_0}{\omega \sqrt{r^2 + \left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2}}$	Амплітуда	$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} =$ $= \frac{\mathcal{E}_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} =$ $= \frac{\mathcal{E}_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$
Початкова фаза коливань	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta \omega}$	Початкова фаза коливань	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta \omega} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$
Резонансна частота	$\omega_{\text{д\acute{a}с.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$	Резонансна частота (резонанс заряду та напруги) Резонансна частота (резонанс струму)	$\omega_{\text{д\acute{a}с.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

1.2. Додавання коливань

● **Додавання коливань** – визначення закону результуючого коливання, зокрема його амплітуди та початкової фази.

Додавання двох коливань довільних напрямків може бути зведеним до двох випадків: додавання коливань одного напрямку та додавання взаємно перпендикулярних коливань.

● **Додавання двох коливань однакової частоти та одного напрямку.**

При складанні двох однаково напрямлених гармонічних коливань $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ і $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ однакової частоти утворюється гармонічне коливання тієї ж частоти з амплітудою

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (1.2.1)$$

і початковою фазою φ_0 , яка визначається із співвідношення

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (1.2.2)$$

Окремі випадки.

1) Різниця фаз коливань дорівнює нулю або парній кількості π , тобто $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi m$, де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Тоді $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ і з формули (1.30) отримуємо $A = A_1 + A_2$, тобто амплітуда результуючого коливання дорівнює сумі амплітуд коливань, що додаються (коливання є синфазними).

2) Різниця фаз коливань дорівнює непарній кількості π , тобто $\varphi_2 - \varphi_1 = (2m + 1)\pi$, де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Тоді $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ і $A = |A_1 - A_2|$. Амплітуда результуючого коливання дорівнює різниці амплітуд коливань, що додаються (коливання у протилежних фазах).

● **Додавання двох коливань одного напрямку близьких за частотою.**

При складанні двох коливань з рівними амплітудами та близькими частотами $x_1 = A \cos \omega t$ і $x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t$ ($\Delta\omega \ll \omega$) утворюється коливання, яке можна розглядати як гармонічне коливання з частотою ω та амплітудою A_6 , що змінюється за періодичним законом:

$$x = \dot{A}_6 \cos \omega t; \quad (1.2.3a)$$

$$\dot{A}_6 = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (1.2.3б)$$

Періодичні зміни амплітуди коливання, які виникають при додаванні двох гармонічних коливань з близькими частотами, мають назву **биття**.

- Додавання двох коливань одного напрямку, що мають кратні циклічні частоти $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$

При додаванні гармонічних коливань одного напрямку і кратних частот отримують періодичне негармонічне коливання, період якого $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Його амплітуда $A(t)$ та початкова фаза $\varphi_0(t)$ можуть бути визначені методом векторних діаграм.

Відповідно будь-яке складне періодичне коливання можна представити у вигляді суми гармонічних коливань з циклічними частотами, які є кратними **основній** циклічній частоті $\omega = \frac{2\pi}{T}$, тобто розкласти в ряд Фур'є:

$$S(t) = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (1.2.4)$$

де
$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cos k\omega t dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.5)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \sin k\omega t dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.6)$$

Такий розклад називають гармонічним аналізом складного періодичного коливання. Члени ряду з циклічними частотами $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ називають відповідно першою, другою і т. ін. гармоніками. Їх сукупність утворює спектр коливань $S(t)$. Періодичні коливання мають **дискретний** (лінійчатий) спектр.

- Неперіодичні коливання можна представити як результат накладання гармонічних коливань, частоти яких приймають значення у деякому інтервалі (у загальному випадку від 0 до ∞), за допомогою інтегралів Фур'є:

$$S(t) = f(t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos k\omega t + b(\omega) \sin k\omega t] d\omega, \quad (1.2.7)$$

де
$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos k\omega \xi d\xi; \quad (1.2.8)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin k\omega \xi d\xi. \quad (1.2.9)$$

Спектр неперіодичних коливань, за звичаєм є **суцільним**.

• **Додавання взаємно перпендикулярних коливань однакової частоти.**

Рівняння руху коливань $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$; $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ задають рівняння траєкторії у параметричній формі (параметр – час t). Після виключення параметру рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi, \text{ де } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (1.2.10)$$

Це рівняння еліпса, вісі якого не приведені до осей координат. При тому рух точки обмежений значеннями координат $x = \pm A_1$; $y = \pm A_2$.

Окремі випадки.

- 1) Початкові фази коливань однакові: $\varphi_1 = \varphi_2$; $\Delta\varphi = 0$; $\cos \Delta\varphi = 1$; $\sin \Delta\varphi = 0$. Рівняння (1.33) приймає вигляд:

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (1.2.11)$$

Це рівняння прямої, яка проходить через початок координат. Кут нахилу прямої надає умова $\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1}$, тобто пряма проходить у першій та третій чверті координатної площини. Такі коливання носять назву **лінійно поляризованих** коливань.

- 2) Початкова різниця фаз дорівнює π : $\Delta\varphi = \pi$; $\cos \Delta\varphi = -1$; $\sin \Delta\varphi = 0$. Рівняння траєкторії у цьому випадку:

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (1.2.12)$$

– рівняння прямої, що проходить через початок координат у другій та четвертій чверті координатної площини ($\operatorname{tg} \alpha = -\frac{A_2}{A_1}$). Коливання є

лінійно поляризованим.

В обох випадках амплітуда результуючого коливання дорівнює

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad (1.2.13)$$

- 3) Початкова різниця фаз дорівнює $\pi/2$: $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\cos \Delta\varphi = 0$;

$\sin \Delta\varphi = 1$. Рівняння (1.33) приймає вигляд:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \quad (1.2.14)$$

– рівняння еліпса, вісі якого приведені до координатних осей. Такі коливання називають **еліптично поляризованими**. Напрямок руху точки вздовж траєкторії – за годинниковою стрілкою.

У випадку $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$ отримуємо подібне рівняння траєкторії, але рух вздовж неї відбувається проти годинникової стрілки.

При $A_1 = A_2 = A$ рівняння (1.2.14) переходить у рівняння кола (коливання циркулярно-поляризовані):

$$x^2 + y^2 = A^2. \quad (1.2.15)$$

1.3. Хвилі та їх характеристики. Пружні хвилі. Звук.

- **Хвильовий процес** або **хвиля** – процес розповсюдження коливань у будь-якому середовищі. Головна властивість усіх хвиль – перенос енергії без переносу речовини.

Розрізняють **повздовжні** та **поперечні** хвилі. У **повздовжній** хвилі напрям коливань збігається з напрямом розповсюдження хвилі. Хвиля є **поперечною**, якщо напрям коливань є перпендикулярним до напрямку розповсюдження хвилі.

Періодичність коливань у кожній точці за часом надає циклічна частота ω , періодичність коливань у просторі – **довжина хвилі λ** .

Довжина хвилі λ – відстань між двома точками, різниця фаз коливань яких дорівнює 2π . Це відстань, на яку розповсюджується коливальний процес (хвиля) за один період коливань T :

$$\lambda = vT. \quad (1.3.1)$$

Фронт хвилі – геометричне місце точок, до яких дійшов хвильовий процес. У залежності від форми поверхні фронту хвилі розрізняють плоскі, сферичні, циліндричні та більш складні хвилі.

Фазова поверхня – геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі.

У кожний момент часу фронт хвилі займає певне положення у просторі і переміщується з часом із певною швидкістю, а фазових поверхонь можна провести скільки завгодно. В однорідному середовищі напрям розповсюдження є перпендикулярним до фронту хвилі.

- **Пружні хвилі** виникають у будь-якому пружному середовищі при наявності джерела коливань.

Повздовжні пружні хвилі виникають у середовищі в будь-якому агрегатному стані; поперечні пружні хвилі – тільки в твердих тілах та на поверхні рідини.

Рівняння плоскої біжучої хвилі, що розповсюджується вздовж осі Ox , має вигляд:

$$\xi = A \sin \omega(t - \frac{x}{v} + \varphi_0) \quad (1.3.2) \quad \text{або} \quad \xi = A \cos \omega(t - \frac{x}{v} + \varphi'_0), \quad (1.3.2a)$$

де ξ – зміщення точки з координатою x у момент часу t ; v – швидкість (фазова) хвилі, φ_0 та φ'_0 – початкові фази коливань.

З використанням співвідношення $\omega = \frac{2\pi}{T}$ та формули (2.1) рівнянню (2.2) можна надати інший вигляд:

$$\xi = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \cos(\omega t - kx), \quad (1.3.2б)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, або $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$. Тут $\vec{k}$ – хвильовий вектор, $\vec{n}$ – нормаль до хвильової поверхні.

Зв'язок між різницею фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок біжучої хвилі та різницею ходу, тобто різницею Δx відстаней цих точок від джерела коливань

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x. \quad (1.3.3)$$

У випадку, коли швидкість хвилі є однаковою в усіх напрямках, а джерело – точковим, хвиля є сферичною. Амплітуда коливань при цьому навіть при відсутності поглинання зменшується з відстанню $\sim \frac{1}{r}$. Рівняння

сферичної хвилі:
$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (1.3.4)$$

Рівняння плоскої біжучої хвилі (2.2), (2.2a) є розв'язками диференціального рівняння

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad (1.3.5)$$

яке має назву **хвильового рівняння**.

У загальному випадку хвильове рівня має вигляд:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad (1.3.6)$$

За допомогою оператора Лапласа $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ хвильовому

рівнянню можна надати вигляду
$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2} \frac{d^2\xi}{dt^2}. \quad (1.3.6a)$$

Будь-яка функція, яка задовольняє рівнянню (1.3.6), описує деяку хвилю. Притому, корінь квадратний з величини, оберненої до коефіцієнту $\frac{1}{v^2}$ при похідній за часом, є фазовою швидкістю хвилі.

• Внаслідок інтерференції хвиль амплітуда досягає максимального значення при виконанні умови

$$\Delta = |x_2 - x_1| = 2m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1.3.7)$$

і мінімального значення за умовою

$$\Delta = |x_2 - x_1| = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (1.3.8)$$

• **Стоячі хвилі** – коливальний процес, який виникає при накладанні двох зустрічних хвиль однакової частоти та амплітуди.

Рівняння стоячої хвилі:

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos \omega t. \quad (1.3.9)$$

У виразі (2.15) до фази коливань не входить координата, тому його можна представити у вигляді

$$\xi = A^* \cos \omega t, \quad \text{де } A^* = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (1.3.9a)$$

є сумарною амплітудою коливань, яка залежить від координати.

Пучності стоячої хвилі – точки, де координати задовольняють умові $\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm m\pi, (m = 0, 1, 2, \dots)$ і амплітуда приймає максимальне значення $A^* = 2A$. Координати пучностей:

$$x_{\text{пучн.}} = \pm m \frac{\lambda}{2}. \quad (1.3.10)$$

В точках, які задовольняють умові $\frac{2\pi}{\lambda} x = \pm (2m + 1) \frac{\pi}{2}, (m = 0, 1, 2, \dots)$, сумарна амплітуда дорівнює нулю $A^* = 0$. Це **вузли** стоячої хвилі. Координати вузлів:

$$x_{\text{вузл.}} = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{4}. \quad (1.3.11)$$

Довжиною стоячої хвилі $l_{\text{ст.}}$ називають відстань між сусідніми вузлами або пучностями (рис.1.5). Таким чином,

$$l_{\text{ст.}} = \frac{\lambda}{2}. \quad (1.3.12)$$

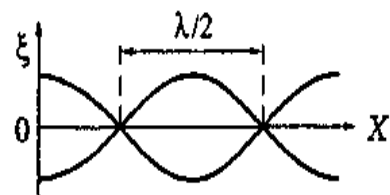


Рис. 1.5.

Стоячі хвилі практично виникають при відбитті хвилі від перепони внаслідок інтерференції біжучої та відбитої хвилі. Якщо середовище, від якого відбувається відбиття, має меншу густину, фаза коливання не змінюється і на границі утворюється пучність. При відбитті від середовища з більшою густиною фаза коливання змінюється на протилежну, і на границі утворюється вузол.

На відміну від біжучої хвилі у стоячій хвилі **не відбувається перенос енергії** коливального руху, оскільки падаюча та відбита хвилі однакової амплітуди несуть однакову енергію у протилежних напрямках.

• Фазова та групова швидкості.

У рівнянні (1.3.2) швидкість хвилі v є швидкістю розповсюдження фази хвилі – **фазовою швидкістю**. Для синусоїдальної хвилі швидкість переносу енергії дорівнює фазовій швидкості. Але синусоїдальна хвиля не несе ніякої інформації, будь-який сигнал – це негармонічна модульована хвиля. При розв’язанні деяких задач можна отримати, що фазова швидкість є більшою за швидкість світла. У цьому немає парадоксу, оскільки фазова швидкість не є швидкістю переносу енергії, яка не може біти більшою за швидкість світла.

Сигнал згідно з теоремою Фур’є можна представити у вигляді суперпозиції гармонічних хвиль з частотами у деякому інтервалі $\Delta\omega$.

Принцип суперпозиції: при розповсюдженні декількох хвиль в середовищі, властивості якого не змінюються під впливом збуджень, що утворює хвиля, кожна з них розповсюджується так, ніби інші хвилі відсутні.

Суперпозиція хвиль, які мало відрізняються за частотою, тобто задовольняють умові $\Delta\omega \ll \omega_0$, та займає в кожний момент часу обмежену область простору, носить назву **хвильового пакету** або **групи хвиль** (рис.1.6).

Швидкість, з якою пересувається центр пакету (точка з максимальним значенням амплітуди, носить назву **групової швидкості u** .

При відсутності у середовищі **дисперсії**, тобто залежності фазової швидкості від частоти, усі плоскі хвилі, що утворюють пакет, розповсюджуються з однаковою фазовою швидкістю v .

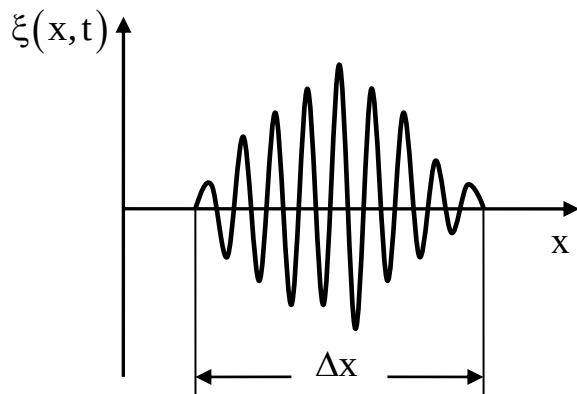


Рис. 1.6.

У дисперсійному середовищі кожна хвиля має свою швидкість, разом з рухом самого пакету відбувається рух горбів у самому пакеті, пакет

змінює свою форму, розпливається з часом. У цьому випадку групова швидкість пакету u відрізняється від фазової швидкості v , дорівнює

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (1.3.13)$$

і може бути як більшою, так і меншою за v .

● **Звукові (акустичні) хвилі** – пружні хвилі з коливаннями в діапазоні 16 Гц – 18 кГц, які сприймаються вухом людини. Коливання з частотами, меншими за 16 Гц мають назву інфразвукових, більші за 18 кГц – ультразвукових.

Повздовжні звукові хвилі пов'язані з деформаціями стиску та розтягу, тому їх швидкість залежить від пружних властивостей середовища.

$$\text{Швидкість повздовжніх хвиль у тонких стрижнях: } v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1.3.14)$$

де E – модуль Юнга, ρ – густина речовини.

$$\text{Швидкість поперечних хвиль у тонких стрижнях: } v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (1.3.15)$$

де G – модуль зсуву.

Швидкість повздовжніх v_l та поперечних хвиль v_t у твердих тілах можна визначити за формулами:

$$v_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (1.3.16)$$

де λ , μ – пружні сталі для даного матеріалу величини, які мають назву коефіцієнтів Ламе.

Швидкість звуку у газах

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad (1.3.17)$$

де $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – коефіцієнт Пуассона, M – молярна маса газу, p і ρ – тиск та густина газу, не збуреного хвилею.

Вектор густини потоку енергії S (енергія, яка переноситься крізь одиничну площадку, що є перпендикулярною до напрямку розповсюдження хвилі, за одиницю часу) дорівнює:

$$S = \frac{dW}{ds_{\perp} \cdot dt} = w \cdot v, \quad (1.3.18)$$

де w – об'ємна густина енергії поля, v – швидкість хвилі.

Об'єктивні та суб'єктивні характеристики звуку наведені в таблиці 1.2.
Таблиця 1.2.

Характеристики звукових хвиль	
Об'єктивні характеристики	Суб'єктивні характеристики
Частота звуку ν (Гц)	Висота звуку – якість звуку, що визначається суб'єктивно “на слух” і залежить від частоти звуку; зростає при зростанні частоти.
Акустичний спектр – суцільний (у деякому інтервалі присутні коливання усіх частот) або лінійчатий (присутні відокремлені одна від одної певні частоти).	Тембр звуку – визначається характером акустичного спектру та розподілом енергії між певними частотами.
Інтенсивність (сила) звуку – середня за часом енергія, яка переноситься звуковою хвилею в одиницю часу через одиничну площадку, що є перпендикулярною до напрямку розповсюдження хвилі (вектор густини потоку енергії (див. формулу (1.3.17)) визначається за допомогою амплітуди звукового тиску: $I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\nu\rho}, \quad (1.3.19)$ де ρ – густина газу. Одиниця вимірювання в СІ: Вт/м². Амплітуда звукового тиску Δp_0 і амплітуда швидкості u_0 частинок у звуковій хвилі зв'язані співвідношенням $\Delta p_0 = \nu\rho u_0 \quad (1.3.20)$ Об'єктивна оцінка гучності за виміряними значеннями інтенсивності – рівень інтенсивності звуку L: $L = \lg\left(\frac{I}{I_0}\right), \quad (1.3.21)$ де I – інтенсивність даного звуку, $I_0=10^{-12}$Вт/м² – інтенсивність звуку на порозі чутності при стандартній частоті $\nu = 1000$Гц.	Гучність звуку – пов'язана з інтенсивністю звуку; залежить від частоти та зростає за логарифмічним законом зі зростом інтенсивності. Фізіологічна характеристика звуку – рівень гучності. Обчислюється за формулою $L_N = 10\lg\left(\frac{I_N}{I_0}\right), \quad (1.3.22)$ де I_N – інтенсивність звуку частоти $\nu = 1000$Гц, рівної гучності з досліджуваним звуком. Вимірюється у фонах (фон). 1фон – гучність звуку в 1000 Гц (частота стандартного чистого тону), якщо його рівень інтенсивності дорівнює 1дБ.

Вимірюється в белах (Б) та децибелах (дБ). 1дБ=0,1Б. Рівень інтенсивності звуку у децибелах визначається формулою $L = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right), \quad (1.3.20a)$	
--	--

• **Ефект Допплера в акустиці** – зміна частоти коливань, які сприймаються приймачем, при відносному русі джерела цих коливань і приймача. Частота коливань, що сприймаються приймачем, у випадку, коли джерело звуку та приймач рухаються вздовж однієї прямої визначається за формулою:

$$v = v_0 \frac{(v \pm v_{i\delta.})}{v \mp v_{\delta\delta.}}, \quad (1.3.23)$$

де v_0 – частота коливань джерела; знак «+» у чисельнику відповідає наближенню приймача до джерела, знак «-» – його віддаленню від джерела; у знаменнику знак «+» відповідає віддаленню джерела від приймача, знак «-» – наближенню до приймача.

У загальному випадку

$$v = v_0 \frac{1 + \frac{v_{i\delta.}}{v} \cos \theta_2}{1 + \frac{v_{\delta\delta.}}{v} \cos \theta_1}, \quad (1.3.24)$$

де θ_1 та θ_2 – відповідно кути, утворені напрямом векторів швидкості джерела та приймача звуку з радіусом вектором $\vec{R}$, проведеним від приймача до джерела.

1.4. Електромагнітні хвилі та їх властивості.

• **Електромагнітна хвиля** – процес розповсюдження електромагнітних коливань у просторі.

Вектори напруженості $\vec{E}$ та $\vec{H}$ електромагнітного поля задовольняють хвильовим рівнянням:

$$\Delta \vec{E} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad \Delta \vec{H} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (1.4.1)$$

Фазова швидкість електромагнітної хвилі

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (1.4.2)$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8$ – швидкість світла у вакуумі; ϵ_0 та μ_0 –

електрична та магнітна сталі; ϵ та μ – відповідно, відносна електрична та магнітна проникність середовища.

Величину $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ називають абсолютним показником заломлення середовища. З урахуванням останнього маємо

$$v = \frac{c}{n}; \quad n = \frac{c}{v}. \quad (1.4.3)$$

Від рівнянь (1.4.1) можна перейти до рівнянь

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad (1.4.4)$$

де індекси y та z підкреслюють лише те, що вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ направлені вздовж взаємно перпендикулярних осей y та z .

Рівнянням (1.4.4) задовольняють, зокрема, плоскі монохроматичні електромагнітні хвилі (хвилі певної, строго визначеної частоти), які описують рівняння

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0) \quad \text{та} \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0), \quad (1.4.5)$$

де E_0 та H_0 – відповідно, амплітуди напруженості електричного і магнітного полів хвилі; ω – циклічна частота; $k = \frac{\omega}{v}$ – хвильове число; ϕ_0 – початкова фаза коливання в точці з координатою $x=0$.

Властивості електромагнітних хвиль:

- вектори $\vec{E}$, $\vec{H}$ і $\vec{v}$ є взаємно перпендикулярними та утворюють праву трійку векторів (рис.1.7);
- електромагнітне поле є поперечним;
- електрична та магнітна складові розповсюджуються в одному напрямі;
- вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ коливаються в однаковій фазі;
- в будь-який момент часу значення векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ пов'язані співвідношенням:

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H; \quad (1.4.6)$$

- вектор густини потоку енергії електромагнітного поля хвилі (вектор Умова - Пойнтінга):

$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]. \quad (1.4.7)$$

Інтенсивність хвилі I – середнє значення модуля потоку енергії:

$$I = \langle S \rangle. \quad (1.4.8)$$

Інтенсивність електромагнітної хвилі дорівнює

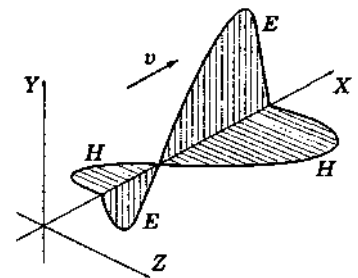


Рис.1.7.

$$I = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \frac{E_0^2}{2} = \frac{\epsilon_0}{\mu} c \sqrt{\epsilon\mu} \frac{E_0^2}{2} = \frac{\epsilon_0}{\mu} \text{cn} \frac{E_0^2}{2},$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ – швидкість світла у вакуумі; $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ – абсолютний

показник заломлення середовища, в якому розповсюджується електромагнітна хвиля.

Для хвилі, що розповсюджується у не феромагнітному середовищі (μ мало відрізняється від одиниці)

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 \text{cn} E_0^2, \quad (1.4.8)$$

Отже $I \sim E_0^2$.

Методичні вказівки.

1. Закон гармонічного коливання може бути записаний двома способами, які базуються на зв'язку між синусом і косинусом:

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2); \quad \sin \alpha = \cos(\alpha - \pi/2).$$

Тому зміщення, швидкість та прискорення того самого гармонічного коливання, яке описується формулами (1.1.6), (1.1.9), (1.1.10) можна записати у вигляді:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi'); \quad (1.1.6a)$$

$$v(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi'), \quad (1.1.9a)$$

$$a(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi') = -\omega_0^2 x, \quad (1.1.10a)$$

де $\varphi' = \varphi_0 - \pi/2$.

2. З формул для зміщення, швидкості та прискорення при гармонічному коливанні випливає, що максимальному значенню зміщення та прискорення відповідає нульова швидкість і навпаки. При тому прискорення завжди направлено протилежно зміщенню, тобто до положення рівноваги.

3. При розв'язуванні задач, в яких необхідно визначити фізичні величини, які характеризують гармонічні коливання найпростіших коливальних систем (математичного, фізичного та пружного маятників) слід чітко розуміти, що період (частота) власних коливань визначається тільки параметрами системи, а амплітуда і початкова фаза залежать від того, яким способом систему вивели із стану рівноваги, тобто від початкових умов. Для визначення амплітуди і початкової фази, може бути заданим, наприклад, зміщення від положення рівноваги, швидкість у початковий момент і т. ін.

4. Якщо тіло здійснює коливання під дією квазіпружної сили або декількох пружних чи квазіпружних сил, то для визначення частоти власних гармонічних коливань достатньо отримати рівняння коливань та

привести його до вигляду, який надається формулою (1.1.4). Коефіцієнт при змінній, яка описує коливальний процес, надає вираз для ω_0^2 (див. приклад 1.7).

У деяких випадках диференціальне рівняння, яке описує механічні або електромагнітні коливання, зручно отримати за допомогою закону збереження енергії (див. приклад 1.9).

5. Якщо коливання не є малими, формули (1.1.15) – (1.1.18), які визначають циклічну частоту та період гармонічних коливань математичного або фізичного маятників не справджуються, необхідно ураховувати ангармонізм коливань. Наприклад, період коливань математичного маятника у цьому разі визначається за формулою

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \right), \text{ де } \alpha - \text{кут відхилення маятника від вертикалі.}$$

6. При додаванні коливань одного напрямку та однакової частоти, якщо їхня кількість перевищує 2 ($n > 2$), амплітуду та початкову фазу результуючого коливання можна визначити шляхом послідовного використання ($n-1$) разів формул (1.2.1) і (1.2.3). Більш слушним у цьому випадку є метод векторних діаграм (див. приклади 1.3 та 1.4).

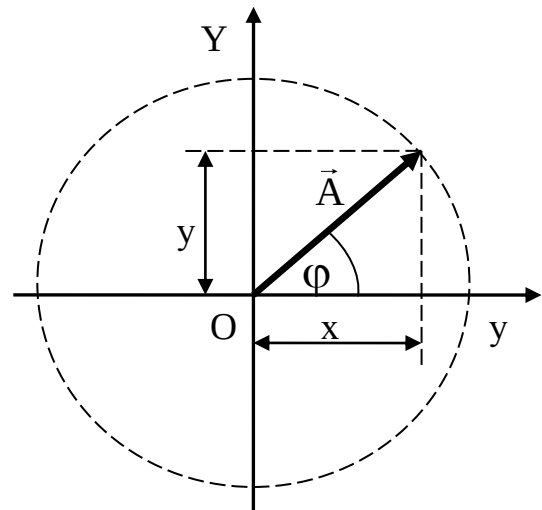


Рис. 1.8.

Суть методу полягає в тому, що гармонічне коливання представляють у вигляді вектора $\vec{A}$ на площині XOY, (рис.1.8). Модуль вектора дорівнює амплітуді коливань A , а кут з віссю OX

дорівнює $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Із часом кут φ збільшується, і вектор $\vec{A}$ рівномірно обертається навколо точки O з кутовою швидкістю ω . При цьому проекції вектора на координатні осі змінюються за гармонічним законом:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0);$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

7. Опір середовища завжди приводить до зменшення частоти коливань: циклічна частота згасаючих коливань, як це впливає з виразу (1.1.23), завжди менша за циклічну частоту власних коливань ω_0 . Але у багатьох задачах, коли коливання згасають дуже повільно, тобто виконується умова $\beta^2 \ll \omega_0^2$, впливом опору можна знехтувати і вважати $\omega \approx \omega_0$; $T \approx T_0$.

8. Внаслідок однакової структури рівнянь методи розв'язання задач на електромагнітні коливання подібні до тих, що використовуються при розгляді механічних коливань. При тому, як видно з таблиці 1.1, заряд q відповідає зміщенню x , омичний опір R – коефіцієнту опору середовища r , індуктивність L – масі m , ємність C – величині, оберненій коефіцієнту квазіупругої сили k .

Кінетичній і потенціальній енергії пружного маятника (див. формули (1.1.11), (1.1.12)) у випадку коливального контуру відповідають значення

енергії магнітного поля соленоїда $W_{i\ \text{маг.}} = \frac{LI^2}{2}$ та електричного поля

конденсатора $W_{ae.} = \frac{q^2}{2C}$. Повна енергія електромагнітних коливань

$$W = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{Lq_0^2\omega_0^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

9. Якщо у формулі $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$, яка надає зв'язок між

амплітудою струму та ЕРС при вимушених коливаннях у контурі, замінити

амплітудні значення ефективними значеннями $I_{\text{аф.}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ та $\mathcal{E}_{\text{аф.}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$, то

отримуємо закон Ома для кола змінного струму:

$$I_{\text{аф.}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{аф.}}}{Z}, \text{ де } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

10. Слід розрізняти рівень інтенсивності звуку (1.3.20а) та рівень гучності (1.3.21). Рівень інтенсивності L є об'єктивною характеристикою звуку, його значення не залежить від звукового відчуття. Рівень гучності L_N , як суб'єктивна характеристика звуку залежить не тільки від інтенсивності звуку I , але й від його частоти, оскільки вухо людини має різну чутливість до звуків різної частоти. Порівняння формул (1.3.20а) та (1.3.21) показує, що для частоти $\nu = 1000\text{Гц}$ рівень гучності L_N у фонах дорівнює рівню інтенсивності L в децибелах. Однак, для інших, особливо високих, частот $L_N \neq L$. У такому разі для розрахунку рівня гучності використовують **криві рівної гучності**, які надають залежність інтенсивності звуку від частоти при постійному рівні гучності.

Якщо в задачі, яка зв'язана з визначенням рівня гучності звуку, не надається його частота, мають на увазі, що йдеться про звук, частота якого є близькою до стандартної частоти $\nu = 1000\text{Гц}$.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом синуса. Записати рівняння коливань при наступних параметрах: $A=10\text{см}$; $T=0,3\text{с}$; $\varphi_0=0$. За який час матеріальна точка проходить першу половину амплітуди? другу половину амплітуди? Визначити середню швидкість та середнє прискорення на кожній з ділянок.

$A=0,1\text{ м}$ $T=0,3\text{ с}$ $\varphi_0=0$ $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{A}{2}$	Розв'язання.
	Закон гармонічного коливання має вигляд (див.(1.1.6)):
	$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$
	або, з урахуванням виразу (1.1.1б), який надає зв'язок між періодом та циклічною частотою
$t_1; t_2;$ $\langle v_1 \rangle; \langle v_2 \rangle;$ $\langle a_1 \rangle; \langle a_2 \rangle - ?$	$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \quad (1)$
	тобто $x(t) = 0,1\sin\frac{20\pi}{3}t. \quad (2)$

Час, витрачений на проходження першої половини амплітуди, знаходимо з умови $x(t_1) = \frac{A}{2}$ (3). Підстановка умови (3) у формулу (1) дає

$$\frac{A}{2} = A\sin\frac{2\pi}{T}t_1. \text{ Звідки дістаємо: } \frac{2\pi}{T}t_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

$$t_1 = \frac{T}{12} = \frac{0,3\text{с}}{12} = 0,025\text{с}.$$

При визначенні t_1 ми скористалися тим, що в окремому випадку, коли точка починає рухатися з положення рівноваги, зміщення та пройдений шлях співпадають. Ця умова не виконується на другій половині амплітуди. Тому час t_2 знайдемо як різницю часу t' , який витрачається на проходження відстані, рівній амплітуді коливання, та часу t_1 . За період T точка проходить шлях, рівний чотирьом амплітудам, тому $t' = \frac{T}{4}$.

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}; \quad t_2 = \frac{0,3\text{с}}{6} = 0,05\text{с}.$$

За означенням середньої швидкості $\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Звідки

$$\langle v_1 \rangle = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{A/2}{t_1} = \frac{0,05\text{і}}{0,025\text{ñ}} = 2\frac{\text{і}}{\text{ñ}}; \quad \langle v_2 \rangle = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{A/2}{t_2} = \frac{0,05\text{і}}{0,05\text{ñ}} = 1\frac{\text{і}}{\text{ñ}}.$$

За означенням середнього прискорення $\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (4), де $\Delta v = v - v_0$.

У першому випадку $\Delta t = t_1$; $v_0 = v(0) = v_{\max} = A\omega = A \frac{2\pi}{T}$;

$$v = v(t_1) = A\omega \cos \omega t_1 = A \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} = A \frac{2\pi}{T} \cos \frac{\pi}{6}.$$

Підстановка значень до формули (4) дає:

$$\langle a_1 \rangle = A \frac{2\pi}{T \cdot t_1} \left(\cos \frac{\pi}{6} - 1 \right) = \frac{0,1 \cdot 6,28}{0,3 \cdot 0,025} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = -11,2 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

У другому випадку $\Delta t = t_2$; кінцева швидкість відповідає максимальному

зміщенню і дорівнює нулю ($v = 0$); $v_0 = v(t_1) = A \frac{2\pi}{T} \cos \frac{\pi}{6}$.

$$\langle a_2 \rangle = \frac{1}{t_2} \left(0 - A \frac{2\pi}{T} \cos \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{0,1 \cdot 6,28}{0,05 \cdot 0,3} \frac{\sqrt{3}}{2} = -36,3 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $x(t) = 0,1 \sin \frac{20\pi}{3} t$; $t_1 = \frac{T}{12} = 0,025 \text{с}$; $t_2 = \frac{T}{6} = 0,05 \text{с}$; $\langle v_1 \rangle = 2 \frac{1}{\text{с}}$;

$$\langle v_2 \rangle = 1 \frac{1}{\text{с}}; \quad \langle a_1 \rangle = -11,2 \frac{1}{\text{с}^2}; \quad \langle a_2 \rangle = -36,3 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Приклад 1.2. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання за законом косинуса. Повна енергія коливання дорівнює $W = 40 \text{мкДж}$; максимальна сила, яка діє на точку $F_{\max} = 2 \text{мН}$. Записати рівняння цього коливання, якщо період $T = 1 \text{с}$. Початкова фаза $\varphi_0 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} W = 4 \cdot 10^{-5} \text{Дж} \\ F_{\max} = 2 \cdot 10^{-3} \text{Н} \\ T = 1 \text{с} \\ \varphi_0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Розв'язання.} \\ \text{Рівняння гармонічного коливання має вигляд:} \\ x = A \cos(\omega t + \varphi_0). \end{array}$$

Треба знайти циклічну частоту ω і амплітуду A .

Згідно з (1.1.16) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

$$(2)$$

За другим законом Ньютона величина максимальної сили дорівнює $F_{\max} = m a_{\max}$, де $a_{\max}$ – максимальне прискорення точки. З формули (1.10) випливає, що величина максимального прискорення точки $a_{\max} = A\omega^2$. Тоді

$$F_{\max} = m A \omega^2. \quad (3)$$

$$\text{Повна енергія точки (5.10)} \quad W = \frac{\omega^2 A^2 m}{2}. \quad (4)$$

Розв'язуючи сумісно (3) і (4), знайдемо A : $A = \frac{2W}{F_{\max}}$.

$$[A] = \frac{Дж}{Н} = \frac{Н \cdot м}{Н} = м.$$

Знаходимо числове значення амплітуди: $A = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,04$.

Записуємо рівняння (1) з урахуванням того, що $\varphi_0 = 0$: $x = 0,04 \cos 2\pi t$.

Відповідь: $x = 0,04 \cos 2\pi t$.

Приклад 1.3. На горизонтальну сталеву мембрану, яка здійснює вимушені коливання з амплітудою $x_0 = 0,1$ мм, насипаний дрібний пісок. Визначити частоту коливань мембрани, за якою піщинки почнуть підстрибувати на мембрані. Чому дорівнюватиме в момент відриву кінетична енергія піщинки масою $m = 0,2$ мг?

$x_0 = 10^{-4} \text{ м}$ $m = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$ $v = ? \quad W_k = ?$	Розв'язання. Для опису коливань мембрани скористаємося моделлю гармонічного осцилятора. Початок координат зв'яжемо зі станом стійкої рівноваги мембрани, вісь ОХ направимо вертикально вгору. Нехай в початковий момент часу мембрана починає рухатися вгору. Тоді
--	--

рівняння коливань (закон руху мембрани) має вигляд:

$$x = x_0 \sin \omega t .$$

Відповідно, швидкість і прискорення осцилятора дорівнюють:

$$v_x = x_0 \omega \cos \omega t; \quad a_x = -x_0 \omega^2 \sin \omega t .$$

Тут ω – циклічна частота коливань, яка зв'язана з частотою ν співвідношенням $\omega = 2\pi\nu$.

Вважаючи піщинку матеріальною точкою, запишемо рівняння її руху на підставі другого закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N},$$

де m – маса піщинки, N – реакція мембрани.

У проекції на вісь ОХ з урахуванням того, що до моменту відриву піщинки від мембрани їх прискорення є однаковими, отримуємо:

$$ma_x = -mg + N .$$

Таким чином, рівняння, які описують рух системи «мембрана-піщинка» мають вигляд

$$x = x_0 \sin 2\pi \nu t; \quad (1)$$

$$v_x = 2\pi \nu x_0 \cos 2\pi \nu t; \quad (2)$$

$$a_x = -4\pi^2 \nu^2 x_0 \sin 2\pi \nu t; \quad (3)$$

$$ma_x = -mg + N. \quad (4)$$

У момент відриву $t = t_1$ сила тиску піщинки на мембрану і, відповідно, реакція мембрани $N = 0$. З рівняння (4) отримуємо: $ma_x = -mg$, тобто

$$a_x = -g. \quad (5)$$

Нехай значення координати та швидкості в цей момент мають значення x_1 та v_1 . Тоді рівняння (1) – (3) з урахування співвідношення (5) приймають вигляд:

$$x_1 = x_0 \sin 2\pi v t_1; \quad (1a)$$

$$v_1 = 2\pi v x_0 \cos 2\pi v t_1; \quad (2a)$$

$$g = -4\pi^2 v^2 x_0 \sin 2\pi v t_1. \quad (3a)$$

З рівнянь (2a) і (3a), використовуючи основну тригонометричну тотожність $\sin^2 2\pi v t_1 + \cos^2 2\pi v t_1 = 1$, отримуємо:

$$\frac{v_1^2}{(2\pi v x_0)^2} + \frac{g^2}{(4\pi^2 v^2 x_0)^2} = 1.$$

Звідки
$$v_1^2 = 4\pi^2 v^2 x_0^2 - \frac{g^2}{4\pi^2 v^2}.$$

Відповідно, кінетична енергія піщинки в момент відриву дорівнює

$$W_k = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2} \left(4\pi^2 v^2 x_0^2 - \frac{g^2}{4\pi^2 v^2} \right).$$

Ураховуючи, що в будь-якій системі відліку кінетична енергія піщинки не може бути від'ємною, вираз у дужках не може приймати від'ємні значення. Звідки отримуємо співвідношення між частотою та амплітудою коливань, при виконанні якого відрив піщинки від мембрани стає можливим:

$$v \geq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_0}}.$$

Обчислення дає:
$$v \geq \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{9,8}{10^{-4}}} = 49,8 \approx 50 \text{ (Гц)}$$

$$W_k = \frac{0,2 \cdot 10^{-3}}{2} \left(4 \cdot 3,14^2 \cdot 50^2 \cdot 10^{-4} - \frac{9,8^2}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 50^2} \right) = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ (Дж)}.$$

Відповідь: $v_{\text{гр}} = 50 \text{ Гц}$; $W_k = 1,2 \text{ нДж}$.

Приклад 1.4. Записати рівняння результуючого коливання, яке отримано складанням двох однаково напрямлених коливань

$$x_1 = 0,03 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } x_2 = 0,04 \cos 2\pi t.$$

Розв'язання.

В результаті додавання цих коливань утворюється гармонічне коливання тієї ж частоти з амплітудою, яка надається формулою (1.2.1).

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Оскільки $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$ і $\cos\pi/2=0$,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{(0,03)^2 + (0,04)^2} = 0,05 \text{ м}$$

Початкова фаза результуючого коливання визначається за формулою (1.2.2):

$$\text{tg}\varphi_0 = \frac{0,03 \cdot \sin \pi/2 + 0,04 \sin 0}{0,03 \cdot \cos \pi/2 + 0,04 \cos 0} = 0,75;$$

$$\varphi_0 = \arctg 0,75 = 36^\circ = \frac{\pi}{5}.$$

Отже, $x = 0,05 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right).$

Приклад 1.5. Матеріальна точка приймає участь у трьох коливаннях, які відбуваються вздовж однієї прямої за законами $x_1 = 3 \cos t$;

$$x_2 = 2 \sin\left(t + \frac{5}{6}\pi\right); \quad x_3 = 3\sqrt{3} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (зміщення наведені у сантиметрах).}$$

Визначити амплітуду та початкову фазу результуючого коливання та записати його рівняння

Розв'язання.

$x_1 = 3 \cos t \text{ см}$	
$x_2 = 2 \sin\left(t + \frac{5}{6}\pi\right) \text{ см}$	
$x_3 = 3\sqrt{3} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ см}$	
$x(t) - ?$	

Усі коливання, в яких приймає участь точка, є гармонічними коливаннями однакової частоти. Отже, результуюче коливання також буде гармонічним коливанням тієї самої частоти. Амплітуду і фазу коливання можна визначити за формулами (1.2.1), (1.2.2). Але ці формули виведені для випадку, коли рівняння коливань, що додаються, виражені через

однакову тригонометричну функцію – синус або косинус. Тому, перш за все, необхідно переписати рівняння другого коливання, виразивши x_2 через косинус:

$$x_2 = 2 \sin\left(t + \frac{5}{6}\pi\right) = 2 \cos\left(t + \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Таким чином, коливання, які додаються, характеризуються наступними параметрами: амплітуди $A_1 = 3 \text{ см}$; $A_2 = 2 \text{ см}$; $A_3 = 3\sqrt{3} \text{ см}$;

циклічні частоти $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1 \text{ рад/с}$;

початкові фази $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$; $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$.

За допомогою формул (1.2.1), (1.2.2) можна додати спочатку два коливання з трьох (див. приклад 1.4). Далі, додавши до отриманого результату третє коливання, можна визначити амплітуду і початкову фазу результуючого коливання.

Інший, більш простий, спосіб розв'язання задачі полягає у використанні методу векторних діаграм. Довжину кожного вектора беремо рівною амплітуді відповідного коливання, а кут між вектором та віссю ОХ – початкової фази. Довжина вектора, який є результатом додавання побудованих векторів, надає амплітуду результуючого коливання А, кут його нахилу до осі ОХ – початкову фазу φ .

На рис.1.9 побудована векторна діаграма за даними задачі, звідки безпосередньо отримуємо:

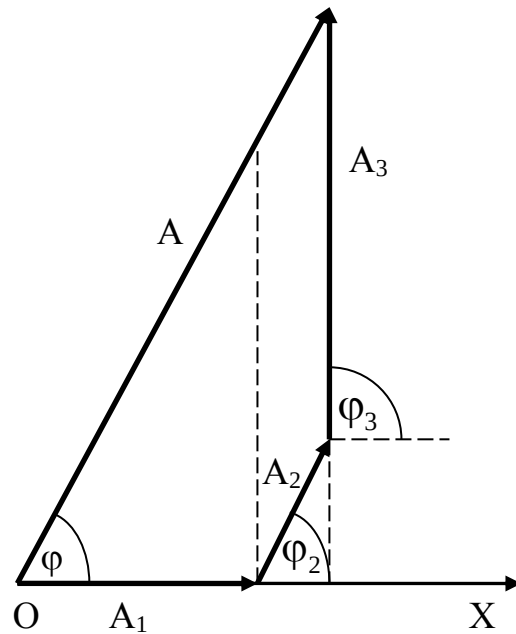


Рис.1.9.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

$$A = \frac{A_1 + A_2 \cos \varphi_2}{\cos \varphi} = \frac{3+1}{0,5} = 8(\text{см}).$$

Записуємо рівняння результуючого коливання: $x = 8 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ см.}$

Відповідь: $x = 8 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ см.}$

Приклад 1.6. Точка приймає одночасно участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, які відбуваються за законами: $x = 2 \sin \pi t$; $y = 4 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Знайти рівняння траєкторії точки та побудувати її графік.

Показати напрям руху точки. Визначити швидкість та прискорення точки в момент часу $t_1 = 1 \text{ с.}$

Розв'язання.

$x = 2 \sin \pi t$ $y = 4 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ $t_1 = 1 \text{ с}$	
$y = f(x) - ?$ $v(t_1); a(t_1) - ?$	

Циклічні частоти коливань є рівними, різниця фаз дорівнює $\frac{\pi}{2}$. У цьому випадку траєкторією точки є еліпс. Перепишемо друге рівняння, скориставшись формулами перетворення кутів, після чого виключимо з рівнянь час t .

$$y = 4 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos \pi t;$$

$$\frac{x^2}{4} = \sin^2 \pi t; \quad \frac{y^2}{16} = \cos^2 \pi t;$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad (1)$$

Рівняння (1) – канонічне рівняння еліпса з напівосями $a=2\text{см}$ і $b=4\text{см}$ (рис.1.10). Щоб визначити напрям руху, розглянемо положення точки в момент часу $t=0$: $x(0)=0$; $y(0)=1$, тобто точка знаходиться в положенні В (рис.1.7). При зростанні часу t координати y і x приймають додатні значення, що відповідає руху точки вздовж траєкторії за годинниковою стрілкою.

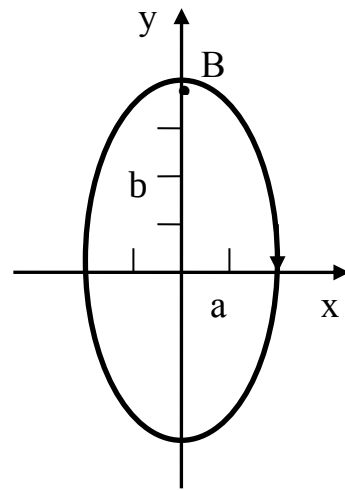


Рис.1.10.

Величину швидкості і прискорення точки виражаємо через відповідні компоненти цих векторів:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad (2) \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (3)$$

$$v_x = 2\pi \cos \pi t; \quad v_y = -4\pi \sin \pi t;$$

$$a_x = 2\pi^2 \sin \pi t; \quad a_y = -4\pi^2 \cos \pi t;$$

$$v = \sqrt{4\pi^2 \cos^2 \pi t + 16\pi^2 \sin^2 \pi t}; \quad (4)$$

$$a = \sqrt{4\pi^4 \sin^2 \pi t + 16\pi^4 \cos^2 \pi t}. \quad (5)$$

Підстановка значення $t_1 = 1\text{с}$ до формул (4) і (5) та обчислення дає:

$$v = 6,28 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad a = 39,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; рух відбувається за годинниковою стрілкою;

Приклад 1.7. Знайти логарифмічний декремент згасання λ для математичного маятника довжиною $l=1\text{м}$, якщо за час $\Delta t = 1\text{хв}$ амплітуда його коливань зменшується у два рази.

Розв'язання.

$l=1\text{м}$
$\Delta t = 60\text{с}$
$\frac{A_1}{A_2} = 2$
$\lambda - ?$

З виразу (1.1.29) $\lambda = \beta T$ випливає, що для визначення логарифмічного декременту треба знайти коефіцієнт згасання β і період коливань T . Запишемо амплітуду згасаючих коливань згідно з (1.1.25а) для двох моментів часу t_1 і t_2 :

$$A_1 = A_0 e^{-\beta t_1}; \quad A_2 = A_0 e^{-\beta t_2}.$$

Поділимо A_1 на A_2 : $\frac{A_1}{A_2} = e^{\beta(t_2 - t_1)}.$

За умовами задачі $A_1/A_2=2$ і $t_2-t_1=\Delta t$, тому $2 = e^{\beta\Delta t}$.

Логарифмуємо цей вираз: $\ln 2 = \beta\Delta t$.

$$\text{Звідки } \beta = \frac{\ln 2}{\Delta t} = \frac{0,693}{60} = 1,16 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{с}}$$

$$\text{Період коливань знайдемо за формулою (1.18) } T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}} = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{1}{9,8}} = 2\text{с}.$$

$$\text{Таким чином } \lambda = \beta T = 1,16 \cdot 10^{-2} \cdot 2 = 2,32 \cdot 10^{-2}.$$

$$\text{Відповідь: } \lambda = 2,32 \cdot 10^{-2}.$$

Приклад 1.8. Знайти циклічну частоту малих коливань тонкого стрижня маси m і довжини l відносно горизонтальної осі, що проходить через точку O (рис.1.11). Жорсткість пружини k , її масою можна знехтувати. У положенні рівноваги стрижень є вертикальним.

Розв'язання.

Малі коливання стрижня у відсутності сили тертя є власними гармонічними коливаннями. Отримаємо диференціальне рівняння коливань, обравши у якості змінної, що описує коливання, кут відхилення стрижня від положення рівноваги α .

При відхиленні стрижня від вертикалі на нього діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила пружності $F_{\text{п.д.}} = -kx = -kl\sin\alpha$. Вони утворюють обертальні моменти, які відповідно дорівнюють $M_{\text{о.в.г.}} = -mg\frac{l}{2}\sin\alpha$ (де $\frac{l}{2}$ – відстань від точки підвісу O до центра мас стрижня C) та $M_{\text{п.д.}} = -kl^2\sin\alpha$.

Записуємо рівняння руху маятника на основі закону динаміки обертового руху:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgl}{2}\sin\alpha - kl^2\sin\alpha, \quad (1)$$

де $I = \frac{1}{3}ml^2$ – момент інерції стрижня відносно осі коливань O .

При малих кутах відхилення $\sin\alpha \approx \alpha$ і рівняння (1) переходить у рівняння власних гармонічних коливань:

$$\frac{1}{3}ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{2}\alpha + kl^2\alpha = 0.$$

Після ділення на коефіцієнт

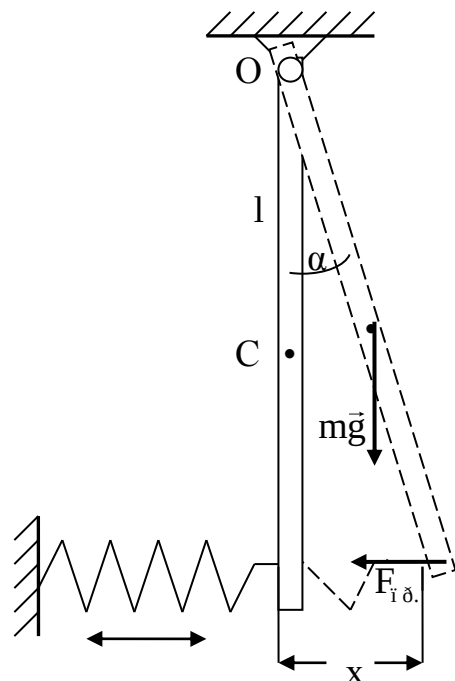


Рис. 1.11.

$\frac{1}{3}ml^2$ отримуємо:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m} \right) \alpha = 0, \quad (2)$$

де коефіцієнт при α дорівнює квадрату частоти власних гармонічних коливань ω_0^2 . Тоді $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m}}$.

Відповідь: $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m}}$.

Приклад 1.9. Тонке кільце радіуса $r=0,5\text{см}$ здійснює малі коливання відносно положення рівноваги, перекочуючись без проковзування по внутрішній поверхні напівсферичної чашки радіуса $R=5\text{см}$. Визначити період коливань.

$r = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
$R = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
$T = ?$

Розв'язання.

Для розв'язання задачі скористаємося законом збереження енергії. Знехтуємо силою тертя кочення, тоді сили, що діють в системі «кільце – гравітаційне поле Землі» є консервативними, і повна енергія кільця залишається незмінною. В довільний момент часу ця енергія складається з кінетичної енергії руху центра мас кільця по колу радіуса $(R-r)$ (див.рис.1.12); кінетичної енергії обертання кільця відносно осі, що проходить через його центр мас; потенціальної енергії кільця в гравітаційному полі Землі.

Нульовий рівень потенціальної енергії зв'яжемо з положенням центра мас кільця в положенні стійкої рівноваги. Тоді повна механічна енергія кільця дорівнює:

$$W = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mgh, \quad (1)$$

де v_c – швидкість поступального руху центра мас кільця, $I = mr^2$ (2) – момент інерції кільця відносно осі, що проходить через його центр мас, ω –

кутова швидкість обертання кільця відносно цієї осі, h – висота центра мас кільця над нульовим рівнем.

У випадку кочення без проковзування швидкість руху центра мас кільця дорівнює швидкості обертального руху точок його поверхні відносно осі,

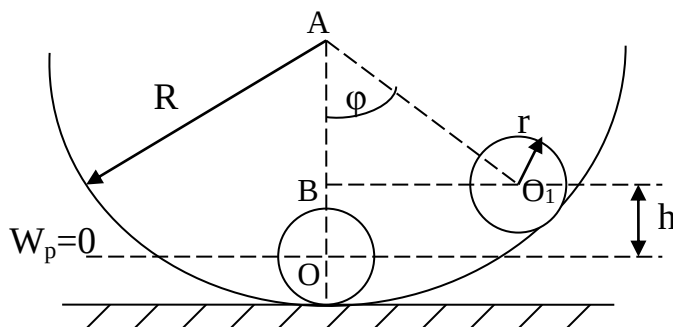


Рис.1.12.

яка проходить через центр мас. Тоді $\omega = \frac{v_c}{r}$. Швидкість руху центра мас знаходимо як похідну за часом від криволінійної координати s , тобто довжини дуги, на яку спирається кут φ :

$$v = s'_t = (R - r)\varphi'. \quad (3)$$

Значення h дорівнює (див. рис.1.12):

$$h = AO - AB = (R - r)(1 - \cos \varphi) = 2(R - r)\sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Оскільки коливання відбуваються з малою амплітудою, кут φ приймає малі значення, і можна покласти $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$. Тоді $h = \frac{(R - r)\varphi^2}{2}$ (4), а повна енергія з урахуванням виразів (2) – (4) дорівнюватиме:

$$W = m(R - r)^2 \varphi'^2 + \frac{mg(R - r)\varphi^2}{2}. \quad (5)$$

Оскільки система є консервативною повна енергія кільця зберігається, тобто похідна від неї за часом дорівнює нулю:

$$\left(m(R - r)^2 \varphi'^2 + \frac{mg(R - r)\varphi^2}{2} \right)' = 0,$$

або
$$2m(R - r)^2 \varphi''\varphi' + \frac{mg(R - r)2\varphi\varphi'}{2} = 0.$$

Тобто, диференціальне рівняння коливань кільця відносно положення рівноваги має вигляд:

$$\varphi'' + \frac{g}{2(R - r)}\varphi = 0.$$

Отримане рівняння є рівнянням гармонічних коливань, в якому коефіцієнт при φ надає квадрат циклічної частоти коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2(R - r)}}$$

Відповідно період коливань дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2(R - r)}{g}}.$$

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{2(5 - 0,5)10^{-2}}{9,8}} = 0,60.$$

Відповідь: $T = 0,60\text{с}$.

Приклад 1.10. У коливальному контурі, який складається з послідовно з'єднаних резистора опором $R=14\text{Ом}$, котушки індуктивністю $L=1\text{мГн}$ і конденсатора ємністю $C=0,4\text{мкФ}$. Знайти, на скільки процентів відрізняється частота ω вільних коливань контуру від його власної частоти ω_0 . Чому дорівнює добротність контуру?

Розв'язання.

$$\begin{array}{l} R=14\text{Ом} \\ L=1\text{мГн} \\ C=0,4\text{мкФ} \\ \hline \varepsilon_\omega; Q - ? \end{array}$$

У будь-якому реальному коливальному контурі з опором R частота вільних електромагнітних коливань ω завжди менша за власну частоту контуру ω_0 .

Частоту власних електромагнітних коливань надає

формула (див. табл. 1.1) $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. (1) Частоту вільних

коливань можна визначити за формулою $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ (2), де коефіцієнт

згасання $\beta = \frac{R}{2L}$ (3). Тобто $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ (4).

У задачі слід визначити величину $\varepsilon_\omega = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$. (5)

Проводимо розрахунок частот за формулами (1) і (4):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4 \cdot 10^{-6}}} = 5 \cdot 10^4 \text{ (рад/с);}$$

$$\omega = \sqrt{25 \cdot 10^8 - \left(\frac{14}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}\right)^2} = 4,95 \cdot 10^4 \text{ (рад/с).}$$

Перевіряємо одиницю вимірювання:

$$[\omega] = \left(\tilde{A}^{-1} \cdot \hat{O}^{-1} - \left(\hat{I} \cdot \tilde{A}^{-1} \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{\tilde{A}}{\hat{A} \cdot \tilde{n}} \cdot \frac{\hat{E} \cdot \hat{E}}{\hat{A}} - \left(\frac{\hat{A}}{\hat{A}} \cdot \frac{\tilde{A}}{\hat{A} \cdot \tilde{n}} \right)^2 \right)^{1/2} = \tilde{n}^{-1}.$$

Підстановка значень у формулу (5) дає:

$$\varepsilon_\omega = \frac{5 \cdot 10^4 - 4,95 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^4} = 0,01 = 1\%.$$

Добротність контуру Q виразимо через величини ω та ω_0 , використавши формули (1.30):

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\omega}{2\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}.$$

$$Q = \frac{4,95 \cdot 10^4}{2\sqrt{(5^2 - 4,95^2) \cdot 10^8}} = 3,5.$$

Відповідь: $\varepsilon_\omega = 1\%$; $Q = 3,5$.

Приклад 1.11. Рівняння незгасаючих коливань має вигляд $\xi = 5 \cos 100\pi t$ (см) і поширюється зі швидкістю $v = 300$ м/с. Знайти 1) довжину біжучої хвилі λ ; 2) переміщення частинок середовища за період; 3) зміщення ξ від положення рівноваги точок, які віддалені від джерела коливань на відстані $x_1 = 3$ м та $x_2 = 4,5$ м у момент часу $t_1 = 0,02$ с після початку коливань; 4) різницю фаз коливань указаних точок; 5) довжину стоячої хвилі, яка утворюється внаслідок інтерференції при відбитті хвилі від перепони. На якій відстані від перепони буде знаходитися найближча пучність стоячої хвилі?

$$\begin{array}{l} \xi = 5 \cos 100\pi t \text{ см} \\ v = 300 \text{ м/с} \\ x_1 = 3 \text{ м} \\ t_1 = 0,02 \text{ с} \\ \hline \lambda, \Delta\xi|_{\Delta t=T}; \xi_1; \xi_2 - ? \\ \Delta\varphi; l_{\text{ст.}}; x_{\text{пучн.}} - ? \end{array}$$

Розв'язання.

Довжина хвилі згідно з (1.3.1) $\lambda = vT$.

Оскільки $\omega = 100\pi$, то $T = 2\pi/\omega = 0,02$ с.

Тоді

$$\lambda = 300 \cdot 0,02 = 6 \text{ м.}$$

Переміщення частинок середовища за період, знаходимо, ураховуючи, що вони приймають участь тільки у коливальному руху.

Таке переміщення за період дорівнює нулю: $\Delta\xi|_{\Delta t=T} = 0$.

Згідно з (1.3.2a) $\xi = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$. Тому зміщення точок з координатами $x_1 = 3$ м та $x_2 = 4,5$ м у момент часу $t_1 = 0,02$ с дорівнюють:

$$\xi_1 = 5 \cos 100\pi \left(0,02 - \frac{3}{300} \right) = 5 \cos \pi = -5 \text{ (см);}$$

$$\xi_2 = 5 \cos 100\pi \left(0,02 - \frac{4,5}{300} \right) = 5 \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Різниця фаз коливань точок дорівнює

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega \left(\left(t - \frac{x_1}{v} \right) - \left(t - \frac{x_2}{v} \right) \right) = \frac{\omega(x_2 - x_1)}{v} = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda};$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{4,5 - 3}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Згідно з формулою (1.3.12) } l_{\text{н0.}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ м.}$$

Якщо перепона, від якої відбувається відбиття, має меншу густину, фаза коливання не змінюється і пучність утворюється безпосередньо на границі: $x_{\text{н0.}} = 0$.

При відбитті від середовища з більшою густиною фаза коливання змінюється на протилежну, і на границі утворюється вузол. Тоді, оскільки згідно з формулами (1.3.10) та (1.3.11) відстань між сусідніми вузлом та

пучністю дорівнює $\frac{\lambda}{4}$, найближча до перепони пучність буде знаходитися на відстані $x_{\text{і́о́ї́}} = \frac{\lambda}{4} = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ (м)}$.

Відповідь: $\lambda = 6 \text{ м}$; $\Delta \xi|_{\Delta t=T} = 0$; $\xi_1 = -5 \text{ см}$; $\xi_2 = 0$; $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$; $l_{\text{нò.}} = 3 \text{ м}$; $x_{\text{і́о́ї́}} = 0$ або $x_{\text{і́о́ї́}} = 1,5 \text{ м}$.

Приклад 1.12. Визначити інтенсивність плоскої звукової хвилі частотою $\nu = 1 \text{ кГц}$, яка відповідає гучній розмові, якщо амплітуда коливань частинок повітря складає $x_0 = 3 \text{ мм}$, а швидкість звуку в повітрі $\nu = 331 \text{ м/с}$.

$\nu = 1 \cdot 10^3 \text{ Гц}$	Розв'язання Згідно з означенням (див формулу (1.3.17)) $I = w \cdot \nu$, де w – об'ємна густина енергії поля звукової хвилі, ν – її швидкість.
$\tilde{x}_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$	
$\nu = 331 \text{ м/с}$	
$I - ?$	

Енергія коливального руху однієї частинки дорівнює $W_1 = \frac{m_1 \omega^2 x_0^2}{2}$. Енергія одиниці об'єму середовища, в якому розповсюджується хвиля, $w = nW_1$, де n – концентрація частинок. Ураховуючи, що $m_1 n = \rho$, де ρ – густина повітря, яка за нормальних умов дорівнює $1,29 \text{ кг/м}^3$, отримуємо:

$$I = \frac{\rho \omega^2 x_0^2}{2} \nu = 2\pi^2 \nu^2 \rho x_0^2 \nu$$

$$I = 2 \cdot 3,14^2 \cdot 10^6 \cdot 1,29 \cdot 9 \cdot 10^{-12} \cdot 331 = 0,076.$$

$$[I] = \frac{\hat{e} \tilde{a} \cdot \hat{i}^2 \cdot \hat{i}}{\tilde{n}^2 \cdot \hat{i}^3 \cdot \tilde{n}} = \frac{\hat{A} \hat{a}}{\hat{i}^2 \tilde{n}} = \frac{\hat{A} \hat{a}}{\hat{i}^2}.$$

Відповідь: $I = 76 \text{ мВт/м}^2$.

Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Написати рівняння $x(t)$ гармонічного коливання з амплітудою $A = 2 \text{ см}$, частотою $\nu = 0,5 \text{ Гц}$ і початковою фазою $\varphi_0 = \pi/6$. Знайти зміщення точки у момент часу $t = 0$ і побудувати графік $x(t)$ у межах двох періодів T .

1.2. Написати рівняння $x(t)$ гармонічного коливання з амплітудою $A = 2 \text{ см}$, періодом $T = 8 \text{ с}$ і початковою фазою $\varphi_0 = \pi/4$. Побудувати графік $x(t)$ у межах двох періодів T .

- 1.3. Через який час t від початку руху точка, яка здійснює гармонічні коливання за законом косинуса, відхилиться від положення рівноваги на половину амплітуди? Період коливань $T=12\text{с}$. Початкова фаза $\varphi_0=0$.
- 1.4. Через яку частку періоду швидкість точки, яка здійснює гармонічні коливання, досягне половини її максимального значення. Час відраховувати від початку руху. $\varphi_0=0$.
- 1.5. Рівняння коливання матеріальної точки масою $m=10\text{г}$ має вигляд $x = 0,05\cos\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)\text{м}$. Знайти максимальну силу $F_{\max}$, яка діє на точку.
- 1.6. Рівняння коливання матеріальної точки масою $m=10\text{г}$ має вигляд $x = 0,04\cos\frac{\pi}{2}t\text{м}$. Побудувати (у межах одного періоду) графіки залежності від часу кінетичної W_k , потенціальної W_p і повної W енергій.
- 1.7. Рівняння коливання матеріальної точки масою $m=16\text{г}$ має вигляд $x = 0,05\cos\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)\text{м}$. Знайти максимальний імпульс $p_{\max}$ цієї точки.
- 1.8. Матеріальна точка масою $m = 20\text{г}$ здійснює гармонічні коливання за законом $x = 0,1\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, м. Визначити повну енергію W цієї точки.
- 1.9. Записати рівняння гармонічних коливань матеріальної точки з періодом $T=4\text{с}$ і початковою фазою $\varphi_0=\pi/6$, якщо її повна механічна енергія $W=494\text{мкДж}$ і максимальне значення діючої на неї сили $F_{\max}=49,4\text{мН}$.
- 1.10. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання з періодом $T=2\text{с}$. Відомо, що в початковий момент часу ($t=0$) її зміщення $x_0=5\text{см}$, а швидкість $v_0=20\text{ см/с}$. Записати рівняння цих коливань.
- 1.11. Точка масою $m=16\text{г}$ здійснює гармонічне коливання з періодом $T=4\text{с}$ і с амплітудою $A=5\text{см}$. Знайти імпульс точки у момент часу t , коли її зміщення від положення рівноваги дорівнюватиме $x=2,5\text{см}$. Початкова фаза $\varphi_0=0$.
- 1.12. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання з періодом $T=2\text{мс}$ і амплітудою $A=0,2\text{ мм}$. Визначити значення середньої швидкості $\langle v \rangle$ і середнього прискорення $\langle a \rangle$ на шляху від максимального відхилення до положення рівноваги.
- 1.13. Знати жорсткість пружини, яка здійснює гармонічні коливання з амплітудою $A=2\text{см}$, якщо її максимальна кінетична енергія $W_{\max}=100\text{мДж}$.
- 1.14. Написати рівняння коливання, яке отримане в результаті додавання двох гармонічних коливань одного напрямку $x_1 = 3\cos(2\pi t)\text{см}$ і $x_2 = 4\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\text{см}$.

1.15. Знайти різницю фаз двох гармонічних коливань однакової частоти ω , амплітуди A і напрямку, якщо при їх складанні утворюється коливання з такою ж частотою і амплітудою.

1.16. Знайти траєкторію точки, яка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 3\sin \omega t$ і $y = 3\cos \omega t$. Накреслити графік.

1.17. Знайти амплітуду A і початкову фазу ϕ гармонічного коливання, отриманого від складання двох однаково напрямлених коливань $x_1 = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, см і $x_2 = 3\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, см. Записати рівняння результуючого коливання.

1.18. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 2\sin \pi t$ і $y = 3\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Визначити траєкторію результуючого коливання і зобразити її на рисунку.

1.19. Написати рівняння коливання, отриманого в результаті додавання двох однаково напрямлених гармонічних коливань з однаковим періодом $T=4$ с і однаковою амплітудою $A=5$ см. Різниця фаз цих коливань $\Delta\phi=\pi/3$.

1.20. Матеріальна точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 2\sin \pi t$ см і $y = -\cos \pi t$ см. Визначити рівняння траєкторії руху точки, побудувати графік точки і показати на ньому напрям руху точки.

1.21. Додаються два гармонічних коливання одного напрямку, рівняння яких мають вид: $x_1 = 3\cos 2\pi t$, см та $x_2 = 3\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, см. Визначити для результуючого коливання: 1) амплітуду; 2) початкову фазу. Записати рівняння результуючого коливання.

1.22. Точка приймає участь одночасно у двох гармонічних коливаннях, які відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках і описуються рівняннями: $x = 3\cos 2\omega t$, см і $y = 4\cos(2\omega t + \pi)$, см. Визначити рівняння траєкторії точки та зобразити її у відповідному масштабі.

1.23. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 4\cos 2\pi t$ і $y = 2\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Визначити траєкторію результуючого коливання і зобразити її на рисунку.

1.24. Кульку математичного маятника довжиною $l=1$ м відхилили від положення рівноваги і відпустили. Записати рівняння коливань маятника $x(t)$, вважаючи їх гармонічними. Тертям знехтувати. $x_0=1$ см.

1.25. Величина максимального відхилення математичного маятника від положення рівноваги $x_{\max}=2,5$ см, а швидкість, з якою він проходить

положення рівноваги, $v_{\max} = 7,85 \text{ см/с}$. Знайти період коливань T і записати рівняння коливань, вважаючи їх гармонічними.

1.26. Знати жорсткість пружини, яка здійснює гармонічні коливання з амплітудою $A=2 \text{ см}$, якщо її максимальна кінетична енергія $W_{\max}=100 \text{ мДж}$.

1.27. Дві однакові пружини скріплені послідовно і здійснюють вертикальні гармонічні коливання з періодом $T_1=2 \text{ с}$. Чому дорівнюватиме період коливань T_2 цих пружин, якщо їх з'єднати паралельно?

1.28. Амплітуда згасаючих коливань маятника за час $t=2 \text{ хв}$. зменшилась у два рази. Визначити коефіцієнт згасання δ .

1.29. Амплітуда згасаючих коливань математичного маятника за час $t=1 \text{ хв}$. зменшилась у три рази. Визначити у скільки разів вона зменшиться за 4 хвилини.

1.30. У скільки разів зменшиться амплітуда коливань математичного маятника за один період, якщо його логарифмічний декремент згасання $\delta=0,2$?

1.31. Початкова амплітуда згасаючих коливань маятника A_0 дорівнює 3 см . Через $t_1 = 10 \text{ с}$ $A_1= 1 \text{ см}$. Визначити, через який проміжок часу амплітуда коливань дорівнюватиме $A_2=0,3 \text{ см}$.

1.32. Записати рівняння згасаючих гармонічних коливань, які відбуваються за законом синуса з періодом $T=2 \text{ с}$ і логарифмічним декрементом згасання $\delta=0,2$. Зміщення точки через $t=0,5 \text{ с}$ від початку руху $x=5 \text{ см}$. Початкова фаза $\varphi_0=0$. Побудувати графік у межах двох періодів.

1.33. Амплітуда коливань математичного маятника довжиною $l=1 \text{ м}$ за час $t=1 \text{ хв}$ зменшилась у 2 рази. Знайти логарифмічний декремент згасання δ .

1.34. У скільки разів зменшиться амплітуда коливань математичного маятника за один період, якщо його логарифмічний декремент згасання $\delta=0,2$?

1.35. Амплітуда згасаючих коливань математичного маятника за час $t_1=1 \text{ хв}$ зменшилась вдвічі. У скільки разів зменшиться амплітуда коливань за час $t_2=2 \text{ хв}$?

1.36. Математичний маятник довжиною $l=25 \text{ см}$ здійснює згасаючі гармонічні коливання з логарифмічним декрементом згасання $\delta=0,5$. За який час t повна енергія маятника зменшиться у 10 разів?

1.37. Логарифмічний декремент згасання коливань маятника $\delta=0,02$. Визначити у скільки разів зменшиться амплітуда цих коливань після $N=100$ повних коливань маятника.

1.38. Амплітуда коливань математичного маятника довжиною $l=0,5 \text{ м}$ за час $t=2 \text{ хв}$ зменшилась у 3 рази. Знайти логарифмічний декремент згасання δ .

1.39. Коливальний контур складається з котушки індуктивністю $L=30 \text{ мкГн}$ і конденсатора з площею пластини $S=100 \text{ см}^2$, відстань між якими $d=0,1 \text{ мм}$. Чому дорівнює діелектрична проникність ϵ середовища між пластинами, якщо контур налаштовано на довжину хвилі $\lambda=750 \text{ м}$?

- 1.40. Коливальний контур радіоприймача складається з котушки індуктивністю $L=1,2\text{ мГн}$ і конденсатора, ємність якого може змінюватись від $C_1=8,9\text{ пФ}$ до $C_2=90\text{ пФ}$. У якому діапазоні може приймати радіостанції цей приймач?
- 1.41. Різниця потенціалів на обкладинках конденсатора у коливальному контурі змінюється за законом $U=50\cos 10^4\pi t$ В. Ємність конденсатора $C=0,1\text{ мкФ}$. Знайти: період T коливань у контурі; індуктивність L контуру; довжину хвилі λ , на яку налаштовано контур.
- 1.42. Знайти зміщення від положення рівноваги точки, яка віддалена від джерела коливань на відстань $l=\lambda/12$ для моменту часу $t=T/6$. Амплітуда коливань $A=10$ см.
- 1.43. Знайти довжину хвилі λ , якщо зміщення точки, що відстоїть від джерела коливань на відстані $l=4$ см у момент часу $t=T/6$ дорівнює половині амплітуди.
- 1.44. Коливальний процес поширюється вздовж прямої лінії зі швидкістю $V=40\text{ м/с}$. Частота коливань $\nu=5$ Гц. Визначити (у радіанах і градусах) різницю фаз коливань між джерелом і точкою, яка віддалена від джерела на відстань $l=3$ м.
- 1.45. Якою буде різниця фаз $\Delta\phi$ двох точок, які розташовані на промені поширення коливань на відстані від джерела коливань $l_1=10$ м і $l_2=16$ м відповідно. Частота коливань $\nu=25$ Гц, швидкість поширення коливань $v=300\text{ м/с}$.
- 1.46. Знайти різницю фаз $\Delta\phi$ коливань двох точок, розташованих на лінії поширення коливань, якщо відстань між ними дорівнює $\Delta l=1,5$ м, а довжина хвилі $\lambda=1$ м.
- 1.47. Дві точки знаходяться на відстані $\Delta x=50\text{ см}$ одна від одної на прямій, вздовж якої поширюється хвиля зі швидкістю $v=50$ м/с. Період T коливань дорівнює $0,05$ с. Визначити різницю фаз коливань $\Delta\phi$.
- 1.48. Визначити швидкість поширення хвилі в пружному середовищі, якщо різниця фаз $\Delta\phi$ коливань двох точок середовища, які знаходяться на відстані $\Delta\tilde{r}=10\text{ см}$, дорівнює $\pi/3$. Частота коливань $\nu=25$ Гц.
- 1.49. Хвиля розповсюджується в пружному середовищі зі швидкістю $v=100\text{ м/с}$. Найменша відстань Δx між точками середовища, фази коливань яких є протилежними, дорівнює 1 м . Визначити частоту ν коливань.
- 1.50. Пружна хвиля розповсюджується вздовж прямої зі швидкістю $v=20\text{ м/с}$. Знайти зміщення від положення рівноваги точки, яка віддалена від джерела коливань на відстань $x=45\text{ м}$ для моменту часу $t=4\text{ с}$ після початку коливань. Амплітуда коливань $A=10$ см.

Тестові завдання

1. Викликати гармонічні коливання здатні сили:
 1. тяжіння та пружності
 2. тертя та пружності
 3. пружності та опору
 4. тяжіння та опору
2. Циклічна частота точки, яка здійснює гармонічні коливання з періодом $T=2$ с дорівнює:
 1. 3,14 рад/с
 2. 2 рад/с
 3. 6,28 рад/с
 4. 0,5 рад/с
3. Закон, за яким відбуваються коливання точки має вид: $x = 2 \sin 5t$ (см). Максимальне значення швидкості точки дорівнює
 1. 2 см/с.
 2. 10 см/с.
 3. 20 см/с.
 4. 50 см/с.
4. Закон, за яким відбуваються коливання точки має вид: $x = 2 \sin 5t$ (см). Максимальне значення прискорення точки дорівнює:
 1. 2 см/с²
 2. 10 см/с²
 3. 20 см/с²
 4. 50 см/с²
5. Енергія коливального руху, якщо амплітуду коливання збільшити в 2 рази, а частоту зменшити у 2 рази
 1. зменшиться у 2 рази
 2. збільшиться у 2 рази
 3. збільшиться у 4 рази
 4. не зміниться
6. Енергія коливального руху, якщо амплітуду коливання зменшити в 2 рази, а частоту збільшити у 4 рази:
 1. зменшиться у 2 рази;
 2. збільшиться у 8 разів;
 3. збільшиться у 4 рази
 4. не зміниться.
7. Правильно описує вільні (згасаючі) гармонічні коливання рівняння:
 1. $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$
 2. $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$
 3. $m\ddot{x} + kx = 0$
 4. серед наведених немає потрібного рівняння

8. Правильно описує вимушені гармонічні коливання рівняння:
1. $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$
 2. $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$
 3. $m\ddot{x} + kx = 0$
 4. серед наведених немає рівняння вимушених коливань
9. Як змінюється резонансна амплітуда вимушених коливань, якщо при інших рівних умовах збільшити коефіцієнт загасання β ?
1. зменшується
 2. не змінюється
 3. збільшується
 4. величина β впливає тільки на резонансну частоту
10. Якщо при інших рівних умовах зменшити коефіцієнт загасання β , резонансна частота вимушених коливань
1. не змінюється
 2. збільшується.
 3. зменшується
 4. від β залежить тільки резонансна амплітуда
11. Додаються два взаємно перпендикулярних коливання з амплітудами 3 см та 4 см і різницею фаз $\Delta\phi = \pi$. Максимальне відхилення від рівноваги точки, що приймає участь у коливаннях, дорівнює:
1. 4 см
 2. 7 см
 3. 12 см
 4. 5 см.
12. Точка приймає участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти, однакової амплітуди з різницею фаз $\Delta\phi = \pm \pi$. Траєкторія точки:
1. еліпс
 2. пряма
 3. коло
 4. одна з фігур Ліссажу
13. Точка приймає участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях однакової частоти, однакової амплітуди з різницею фаз $\Delta\phi = \pm \pi/2$. Траєкторія точки:
1. еліпс
 2. пряма
 3. коло
 4. одна з фігур Ліссажу
14. Додаються два взаємно перпендикулярних коливання з різницею фаз $\Delta\phi = \pi$. Траєкторія точки, що приймає участь у коливаннях, це
1. коло
 2. еліпс
 3. пряма, що проходить через першу та третю чверті системи координат
 4. пряма, що проходить через другу та четверту чверті системи координат.

15. Додаються два коливання одного напрямку та періоду. Амплітуда результуючого коливання дорівнюватиме $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ при різниці фаз

1. $\Delta\varphi = 0$ 2. $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ 3. $\Delta\varphi = \pi$ 4. $\Delta\varphi = 2\pi$

16. Якщо ємність конденсатора у коливальному контурі (без опору) зменшиться у два рази, а індуктивність збільшиться у два рази, його резонансна частота:

1. зменшується у 2 рази
2. збільшується у 2 рази
3. не змінюється.
4. зменшується у 4 рази

17. Період коливань коливального контуру, у якому індуктивність зменшили у чотири рази (опір не враховувати),

1. зменшився у 2 рази
2. зменшився у 4 рази
3. збільшився у 2 рази
4. збільшився у 4 рази

18. Період коливань коливального контуру, у якому електроємність збільшили у чотири рази (опір не враховувати),

1. зменшився у 2 рази
2. зменшився у 4 рази
3. збільшився у 2 рази
4. збільшився у 4 рази

19. Дві хвилі від когерентних джерел надходять у деяку точку простору з різницею ходу 25 см і збуджують коливання з однаковими амплітудами $A_1 = A_2 = A$. Довжина хвилі 0,1 м. Амплітуда результуючого коливання у даній точці дорівнює

1. $2A$ 2. A 3. 0 4. $A/2$

20. Дві хвилі від когерентних джерел надходять у деяку точку простору з різницею ходу 45 см і збуджують коливання з однаковими амплітудами $A_1 = A_2 = A$. Довжина хвилі 0,1 м. Амплітуда результуючого коливання у даній точці дорівнює

1. $2A$ 2. 0 3. A 4. $A/2$

21. Дві хвилі від когерентних джерел надходять у деяку точку простору з різницею ходу 30 см і збуджують коливання з однаковими амплітудами $A_1 = A_2 = A$. Довжина хвилі 0,1 м. Амплітуда результуючого коливання у даній точці дорівнює

1. $2A$ 2. 0 3. A 4. $A/2$

22. Безпосередньо не пов'язана з іншими характеристиками хвилі

1. частота
2. фазова швидкість
3. довжина хвилі
4. амплітуда.

Розділ 2. ОПТИКА

Тема: Елементи геометричної оптики. Закони геометричної оптики.

Оптичний діапазон електромагнітних хвиль. Часова і просторова когерентність. Інтерференція світла. Когерентні хвилі. Застосування інтерференції та засоби спостереження.

Дифракція Френеля та Фраунгофера. Дифракційна решітка. Поляризація світла. Закон Малюса, закон Брюстера, подвійне променезаломлення. Оптичні анізотропні середовища.

Дисперсія світла. Нормальна і аномальна дисперсія. Розсіяння та поглинання світла. Розсіяння Релея та Мі.

Теплове випромінювання. Закони Віна і Стефана-Больцмана. Нелінійні явища в оптиці. Фотоелектричний ефект. Ефект Комптона.

Основні поняття та формули

2.1 Геометрична оптика і фотометрія.

• Фотометрія

Потік енергії випромінювання Φ_e визначається енергією, що переноситься через дану площину за одиницю часу,

$$\Phi_e = \frac{dW}{dt}, \quad (2.1.1)$$

де dW – енергія, що переноситься за час dt .

Світловий потік – потік енергії, який оцінюється за зоровим сприйманням. Для інтервалу довжин хвиль $d\lambda$

$$d\Phi = V(\lambda)d\Phi_e, \quad (2.1.2)$$

де $V(\lambda)$ – функція видимості, $d\Phi_e$ – потік енергії випромінювання.

Сила світла I – світловий потік, що припадає на одиничний тілесний кут,

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \quad (2.1.3)$$

Для ізотропного джерела
$$I = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{\Phi}{4\pi}. \quad (2.1.4)$$

Тілесний кут пов'язаний з плоским кутом 2θ розхилу конуса:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta). \quad (2.1.5)$$

Освітленість

$$E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS}, \quad (2.1.6)$$

де $d\Phi_{\text{пад}}$ – світловий потік, що падає на поверхню dS .

Для точкового ізотропного джерела

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha, \quad (2.1.7)$$

де r – відстань від джерела до поверхні, на яку падає світло, α – кут між нормаллю до поверхні і напрямом на джерело (кут падіння).

Характеристики протяжних джерел.

Світність

$$R = \frac{d\Phi_{\text{випр}}}{dS}, \quad (2.1.8)$$

де $d\Phi_{\text{випр}}$ – потік, що випромінюється елементом dS поверхні в один бік.

Якщо світність поверхні зумовлена її освітленістю, то

$$R = \rho E, \quad (2.1.9)$$

де ρ – коефіцієнт відбиття.

Яскравість B у заданому напрямі – світловий потік, що випромінюється з одиниці видимої поверхні в межах одиничного тілесного кута в заданому напрямі, або сила світла, віднесена до одиниці видимої поверхні джерела випромінювання,

$$B = \frac{d\Phi}{d\Omega \cdot dS \cdot \cos \theta} = \frac{I}{dS \cdot \cos \theta}, \quad (2.1.10)$$

де θ – кут між нормаллю до поверхні та напрямом випромінювання; $dS \cos \theta$ – видима в даному напрямі поверхня випромінювача.

В окремому випадку (закон Ламберта) яскравість є однаковою за всіма напрямками $B = \text{const}$. Звідки умова виконання закону Ламберта: сила світла елементарної площадки в будь-якому напрямі

$$I = I_0 \cos \theta, \quad (2.1.11)$$

де I_0 – сила світла в напрямі нормалі до поверхні.

Світність ламбертових (косинусних) випромінювачів

$$R = \pi B. \quad (2.1.12)$$

Геометрична оптика

- Закон заломлення світла

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (2.1.13)$$

де i – кут падіння; r – кут заломлення; n_{21} – відносний показник заломлення середовища 2 відносно середовища 1; n_1 , n_2 – абсолютні показники заломлення.

Абсолютний показник заломлення (показник заломлення середовища відносно вакууму

$$n = \frac{c}{v}, \quad (2.1.14)$$

де c – швидкість світла в вакуумі; v – швидкість світла в даному середовищі.

$$\text{Відносний показник заломлення } n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (2.1.15)$$

де v_1 і v_2 – швидкості світла у першому та другому середовищі відповідно.

Оберненість променів

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}; \quad n_{21} = \frac{1}{n_{12}}. \quad (2.1.16)$$

Граничний кут повного відбиття

$$\sin i_{\text{гр}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (n_2 < n_1). \quad (2.1.17)$$

Оптична сила тонкої лінзи в середовищі з показником заломлення n_0

$$D = (n - n_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.1.18)$$

де n – показник заломлення матеріалу лінзи; R_1 , R_2 – радіуси кривизни поверхонь лінзи.

$$\text{Формула тонкої лінзи} \quad D = \frac{1}{F} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}, \quad (2.1.19)$$

де a_1 , a_2 – відстані предмета та зображення від оптичного центра лінзи.

Значення відрізків у формулі – алгебраїчні. Відрізки, які відраховуються від центра лінзи вздовж променя, вважаються додатними, а проти променя – від’ємними.

Оптична сила D двох тонких лінз з оптичними силами D_1 і D_2 , складених разом

$$D = D_1 + D_2. \quad (2.1.20)$$

Для сферичного дзеркала оптична сила D визначається формулою

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R} = \frac{1}{F} = D, \quad (2.1.21)$$

де a_1 , a_2 – відстані предмета та зображення, які відраховуються від вершини дзеркала; R – радіус кривизни дзеркала; F – його фокусна відстань. Правило знаків для дзеркал таке саме, як і для лінз.

Якщо F виражене у метрах, то D буде виражене у діоптріях (дптр):
1 дптр = 1 м⁻¹.

Поперечне лінійне збільшення у дзеркалах та лінзах

$$k = \frac{y_2}{y_1} = \pm \left| \frac{a_2}{a_1} \right|, \quad (2.1.22)$$

де знак „+” відповідає прямому зображенню, „-” – оберненому.

$$\text{Збільшення лупи} \quad k = \frac{L}{F}, \quad (2.1.23)$$

де L – відстань найкращого бачення ($L=25\text{см}$); F – фокусна відстань лупи.

2.2. Хвильова оптика

Інтерференція світла.

• **Інтерференція** – перерозподіл інтенсивності світла у просторі (поява максимумів та мінімумів інтенсивності) при накладанні когерентних хвиль.

Когерентні хвилі – хвилі однакової частоти, однакової поляризації (напрямку коливань), зсув фаз між якими залишається незмінним у часі.

Для отримання когерентних хвиль від звичайних джерел світла, які є некогерентними внаслідок застосовують

Умови максимуму і мінімуму при інтерференції визначаються різницею фаз $\delta\phi$ хвиль, які збуджують коливання у даній точці простору, або їх оптичною різницею ходу Δ .

• Оптична різниця ходу двох світлових хвиль – різниця їх оптичних довжин шляхів

$$\Delta = L_1 - L_2. \quad (2.2.1)$$

Оптична довжина шляху світлової хвилі – добуток її геометричної довжини шляху s в середовищі на абсолютний показник заломлення середовища n :

$$L = ns. \quad (2.2.2)$$

Зв'язок між різницею фаз і оптичною різницею ходу

$$\delta\phi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}, \quad (2.2.3)$$

де λ – довжина світлової хвилі.

У разі відбивання світла від оптично більш густого середовища фаза коливання змінюється стрибкоподібно на π , відповідна зміна оптичної різниці ходу складає $\frac{\lambda}{2}$.

• Умови інтерференційних максимумів та мінімумів, виражені через різницю фаз:

$$\delta\phi = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{– умова максимуму.} \quad (2.2.4)$$

$$\delta\phi = \pm (2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{– умова мінімуму.} \quad (2.2.5)$$

Ті самі умови, виражені через оптичну різницю ходу мають вигляд:
умова максимумів

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2.6)$$

умова мінімумів

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.2.7)$$

Відстань Δx між двома інтерференційними смугами на екрані, паралельному двом когерентним джерелам світла

$$\Delta x = \frac{L}{d} \lambda, \quad (2.2.8)$$

де L – відстань від екрану до джерел світла, які знаходяться на відстані d один від одного (при цьому $L \gg d$).

• Оптична різниця ходу світлових хвиль, відбитих від тонкої пластинки (плівки), яка розташована в повітрі (приклад 2.6, рис.2.6), дорівнює

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (2.2.9)$$

або
$$\Delta = 2dncosr \pm \frac{\lambda_0}{2}, \quad (2.2.10)$$

де d – товщина пластинки, n – її показник заломлення, i – кут падіння, r – кут заломлення світла в пластинці.

Відповідно, умови максимуму та мінімуму при спостереженні інтерференції в тонких плівках у відбитому світлі мають вигляд:

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \begin{cases} \pm(2m-1)\frac{\lambda_0}{2} & - \text{max;} \\ = \pm m\lambda_0 & - \text{min;} \end{cases} \quad (m=1,2,3,...), \quad (2.2.11)$$

де m – порядок максимуму або мінімуму.

При спостереженні інтерференції в тонких плівках у світлі, який пройшов через плівку, відсутня додаткова різниця ходу $\frac{\lambda_0}{2}$, яка ураховує зміну фази коливань при відбитті одного з променів від плівки ($n_{\text{пл.}} > n_{\text{пов.}}$). Тому в цьому випадку

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \begin{cases} \pm m\lambda_0 & - \text{max;} \\ \pm(2m-1)\frac{\lambda_0}{2} & - \text{min;} \end{cases} \quad (m=1,2,3,...) \quad (2.2.12)$$

• При інтерференції відбитих хвиль у тонкому повітряному зазорі між плоскою скляною пластиною і притиснутої до неї плоско-опуклої лінзи (приклад 2.9, рис.2.9) спостерігаються кільця Ньютона – концентричні темні та світлі кільця, центри яких співпадають з точкою О дотику лінзи та пластини. Різниця ходу хвиль, відбитих від верхньої та нижньої поверхні зазору, дорівнює

$$\Delta = \frac{nr^2}{R} + \frac{\lambda}{2}, \quad (2.2.13)$$

де r – відстань від точки спостереження до осі оптичної системи.

Радіуси світлих $r_{m_{\text{max}}}$ і темних $r_{m_{\text{min}}}$ кілець Ньютона у відбитому світлі

$$r_{m_{\max}} = \sqrt{\frac{(2m-1)R\lambda}{2}}, \quad (m=1, 2, 3, \dots); \quad (2.2.14)$$

$$r_{m_{\min}} = \sqrt{mR\lambda}, \quad (m=1, 2, 3, \dots), \quad (2.2.15)$$

де m – номер кільця, R – радіус кривизни лінзи, λ – довжина світлової хвилі у речовині прошарку.

При спостереженні кілець у світлі, що пройшло через систему, положення світлих і темних кілець протилежне їх положенню у відбитому світлі:

$$r_{m_{\max}} = \sqrt{mR\lambda}, \quad (m=1, 2, 3, \dots); \quad (2.2.16)$$

$$r_{m_{\min}} = \sqrt{\frac{(2m-1)R\lambda}{2}}, \quad (m=1, 2, 3, \dots). \quad (2.2.17)$$

Дифракція світла.

- **Дифракція** – огинання хвилями перепон, порівняних за розміром з довжиною хвилі, тобто попадання хвиль в область геометричної тіні. Явище дифракції є характерним для будь-яких хвильових процесів, і пояснюється за допомогою принципу Гюйгенса - Френеля.

- **Принцип Гюйгенса-Френеля.** Згідно цьому принципу кожна точку фронту хвилі можна розглядати як самостійне джерело вторинних напівсферичних когерентних хвиль. Картина, що спостерігається на екрані, є результатом інтерференції цих вторинних хвиль.

Розрахунок картини від симетричного фронту хвилі спрощується застосуванням методу зон Френеля.

- **Метод зон Френеля** полягає у заміні дії первинного джерела дією вторинних джерел, які утворюються шляхом розбивання фронту хвилі на окремі ділянки (зони Френеля). Зони Френеля будують таким способом, щоб різниця ходу хвиль, які приходять від відповідних ділянок сусідніх зон у точку, де відбувається розрахунок інтенсивності світла, становила $\frac{\lambda}{2}$. Тоді хвилі збуджують у точці коливання у протилежних фазах і ослаблюють одна одну.

- При дифракції Фраунгофера (дифракції у паралельних променях) на щілині у разі нормального падіння світла:

умова максимумів інтенсивності світла

$$a \sin \varphi = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.2.18)$$

де a – ширина щілини, φ – кут дифракції.

Умова мінімумів інтенсивності світла

$$a \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.2.19)$$

• **Дифракційна ґратка** – система паралельних щілин рівної ширини, які лежать в одній площині і розділені рівними за шириною непрозорими проміжками.

Відстані між відповідними точками сусідніх щілин – **стала або період дифракційної ґратки d** :

$$d = a + b, \quad (2.2.20)$$

де a – ширина непрозорої ділянки, b – ширина щілини.

Інакше,
$$d = \frac{1}{n}, \quad (2.2.21)$$

де n – кількість щілин на одиницю довжини ґратки.

При дифракції Фраунгофера на дифракційній ґратці у разі нормального падіння світла:

положення головних максимумів інтенсивності

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (2.2.22)$$

де d – період ґратки, m – порядок головного максимуму.

Положення головних мінімумів інтенсивності

$$a \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.2.23)$$

де a – ширина щілини.

Найвищий порядок головного максимуму, що спостерігається, у разі нормального падіння світла

$$m_{\max} = E\left(\frac{d}{\lambda}\right) \quad (2.2.24)$$

де функція $E\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ дорівнює цілій частині числа $\left(\frac{d}{\lambda}\right)$.

Кутова та лінійна дисперсія дифракційних ґраток відповідно

$$D_{\varphi} = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi} \quad (2.2.25)$$

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta \lambda} \approx F D_{\varphi}, \quad (2.2.26)$$

де $\delta \varphi$ – кутова відстань; δl – лінійна відстань між спектральними лініями, які відрізняються довжиною хвилі на $\delta \lambda$; F – фокусна відстань лінзи, що проектує спектр на екран.

Роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \frac{\lambda}{d \lambda} = m N, \quad (2.2.27)$$

де $\lambda, \lambda + d\lambda$ – довжини хвиль двох спектральних ліній, що розрізняються у спектрі.

Формула Вульфа – Бреггів для дифракції рентгенівських променів на кристалах

$$2d \sin \theta = \pm m \lambda, \quad (2.2.28)$$

де θ – кут ковзання променів, що падають на кристал; d – відстань між атомними площинами кристалів.

- **Поляризація світла.**

Поляризоване світло – світло, в якому напрями коливань векторів $\vec{E}$ (світловий вектор) та $\vec{H}$ виділені або упорядковані тим чи іншим чином.

Основні види поляризованого світла:

- **лінійно (плоско) поляризоване** – світло, в якому вектор $\vec{E}$ (і вектор $\vec{H}$) коливається тільки в одному напрямі;
- **еліптично поляризоване** світло – кінець вектора $\vec{E}$ (і вектора $\vec{H}$) описує еліпс;
- **циркульно поляризоване** світло (поляризоване по колу) – кінець вектора $\vec{E}$ (і вектора $\vec{H}$) описує коло.

Світло з усіма можливими рівно ймовірними напрями коливань світлового вектора, які неперервно та хаотично змінюють один одного, має назву **природного** (неполяризованого) світла. Якщо внаслідок зовнішнього впливу з'являється переважний напрям коливань вектора $\vec{E}$, світло частково поляризоване.

Степінь поляризації світла

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (2.2.29)$$

Площина поляризації – це площина, яка проходить через напрям коливань світлового вектора $\vec{E}$ та напрям розповсюдження хвилі (промінь).

Способи отримання поляризованого світла:

- поляризація при відбитті та заломленні світла;
- подвійне променезаломлення у природних анізотропних кристалах або за допомогою штучної анізотропії.
- **Закон Брюстера** : якщо кут падіння світлового променя на межу поділу двох середовищ дорівнює поляризаційному куту i_B (куту Брюстера), який визначається співвідношенням

$$\operatorname{tg} i_A = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.2.30)$$

то відбитий промінь є повністю лінійно поляризованим.

Тут n_{21} – відносний показник заломлення; n_2 , n_1 – абсолютні показники заломлення середовищ на межі поділу.

Відбитий промінь повністю поляризований у площині, перпендикулярній до площини падіння, заломлений – поляризований максимально, але неповністю у площині падіння.

При падінні під кутом Брюстера відбитий та заломлений проміні – взаємно перпендикулярні.

- **Подвійне променезаломлення** – розділення падаючого променя світла всередині анізотропних кристалів на два променя – **звичайний (o)** і **незвичайний (e)**, які розповсюджуються, взагалі, з різними швидкостями (рис.2.1). Швидкість розповсюдження звичайного променя i , відповідно, показник заломлення n_o не залежить від напрямку розповсюдження в кристалі, тобто хвиля поводить себе в кристалі як в ізотропному середовищі (виконується звичайний закон заломлення променів). Швидкість і показник заломлення n_e незвичайного променя залежать від напрямку розповсюдження.

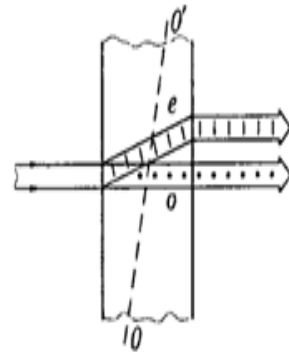


Рис.2.1

Напрямок, вздовж якого звичайний і незвичайний промінь не розділяються на два, розповсюджуючись з однаковою швидкістю – **оптична вісь кристала**. Будь-яка площина, яка проходить через оптичну вісь – **головний переріз** або **головна площина** кристала.

Звичайна і незвичайна хвилі (промені) – лінійно поляризовані: звичайний – у напрямі, перпендикулярному до головної площини кристала, незвичайний – у головній площині (див. рис.2.1).

- Пристрій, за допомогою якого можна отримати поляризоване світло (за звичаєм – лінійно-поляризоване), має назву **поляризатора**. Той самий пристрій, використаний для аналізу поляризації світла, називають **аналізатором**.

Площина поляризатора або **аналізатора** – площина, в якій прилад пропускає коливання вектора $\vec{E}$.

- **Закон Малюса** визначає інтенсивність поляризованого світла, яке вийшло з приладу, за допомогою якого отримують поляризоване світло.

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (2.2.31)$$

де I та I_0 – відповідно, інтенсивність плоскополяризованого світла, що пройшло через поляризатор, та падаючого плоскополяризованого світла; α – кут між площиною поляризації падаючого світла і площиною пропускання поляризатора.

У випадку проходження природного світла крізь систему «поляризатор – аналізатор» (рис. 2.2)

$$I_0 = \frac{1}{2} I_{\text{пад.}}.$$

Відповідно,

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{прир.}} \cos^2 \alpha, \quad (2.2.32)$$

де $I_{\text{прир.}}$ – інтенсивність природного світла, що падає на поляризатор; α – кут між площинами поляризатора і аналізатора.

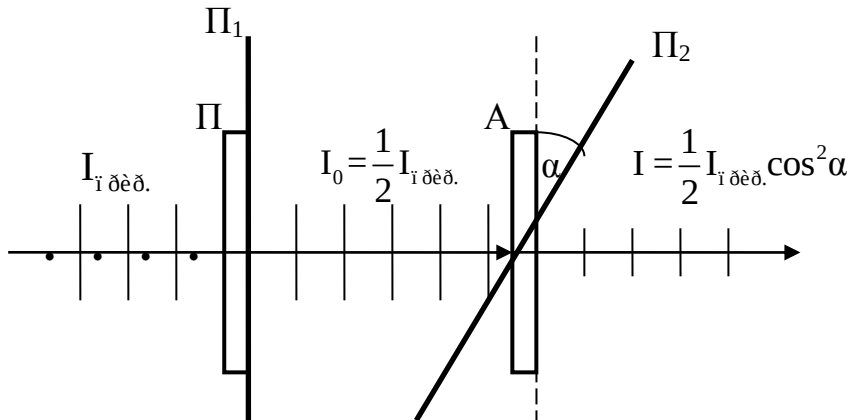


Рис.2.2.

Якщо у кожному з приладів утрати інтенсивності складають k долів від одиниці, то інтенсивність світла, яке пройшло крізь поляризатор та аналізатор обчислюється за формулою:

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{прир.}} (1 - k)^2 \cos^2 \alpha. \quad (2.2.33)$$

- Зовнішні впливи, під дією яких може виникати штучна анізотропія, та величини, які впливають на ступінь анізотропії представлені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1.

Дія, яка приводить до виникнення анізотропії	Середовище, в якому спостерігається ефект	Напрямок оптичної осі	Міра анізотропії – різниця показників заломлення звичайного n_o та незвичайного n_e променів
Поздовжня деформація (стиску або розтягу)	кристали кубічної системи, скло, смоли та інші аморфні тіла	напрямок деформації	$(n_o - n_e) = k\sigma$; k – константа фото пружності; σ – механічне напруження.
Електричне поле (ефект Керра)	рідини, аморфні тіла, газ	напрямок електричного поля	$(n_o - n_e) = \lambda_0 B E^2$; B – стала Керра, E – напруженість зовнішнього

			електричного поля
Магнітне поле (ефект Коттона – Мутона)	рідини, скло, колоїди	напрям магнітного поля	$(n_o - n_e) = C\lambda_0 H^2$, С – стала Коттона – Мутона; H – напруженість зовнішнього магнітного поля

• Кут φ повороту площини поляризації оптично активними речовинами:

а) у твердих тілах $\varphi = \alpha l$, (2.2.34)

де α – стала обертання; l – довжина шляху, який пройшло світло в оптично активній речовині;

б) у розчинах $\varphi = [\alpha]cl$, (2.2.35)

де $[\alpha]$ – питома стала обертання; c – концентрація оптично активної речовини у розчині.

2.3. Квантова теорія випромінювання. Фотони.

• **Теплове випромінювання** – випромінювання тілами електромагнітних хвиль за рахунок внутрішньої енергії.

Характеристики та закони теплового випромінювання.

Випромінювальна здатність тіла $R(T)$ – кількість енергії, що випромінюється при заданій температурі з одиниці поверхні тіла по всім напрямкам за одиницю часу в усьому інтервалі частот:

$$R = \frac{dW}{dt \cdot ds}. \quad (2.3.1)$$

$$[R_e] = \left[\frac{\hat{A}\delta}{i^2} \right].$$

Спектральна випромінювальна здатність тіла $r(\lambda, T)$ або $r(\nu, T)$ – відношення кількості енергії, що випромінюється при заданій температурі з одиниці поверхні тіла за одиницю часу в інтервалі довжин хвиль $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ або інтервалі частот $(\nu, \nu + d\nu)$, до цього інтервалу:

$$r(\lambda, T) = \frac{dW_\lambda}{dt \cdot ds \cdot d\lambda}; \quad r(\nu, T) = \frac{dW_\nu}{dt \cdot ds \cdot d\nu} \quad (2.3.2)$$

$$[r(\lambda, T)] = \left[\frac{Вт}{м^3} \right]; \quad [r(\nu, T)] = \left[\frac{Дж}{м^2} \right].$$

Повна випромінювальна здатність R_e пов'язана із спектральною випромінювальною здатністю r_λ співвідношенням

$$R(T) = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda. \quad (2.3.3)$$

Поглинальна здатність тіла $a(T)$ показує, яку долю падаючого випромінювання поглинає тіло при заданій температурі.

Спектральна поглинальна здатність тіла $a(\lambda, T)$ або $a(\nu, T)$ – показує, яку частину падаючого випромінювання в інтервалі довжин хвиль $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ або інтервалі частот $(\nu, \nu + d\nu)$ тіло поглинає при заданій температурі.

Абсолютно чорне тіло – тіло, яке здатне повністю поглинати падаюче на нього випромінювання всіх довжин хвиль при будь-якій температурі, тобто для абсолютно чорного тіла $a(T) = a(\lambda, T) = a(\nu, T) \equiv 1$.

Сірим називають тіло, спектральна поглинальна здатність якого не залежить від довжини хвилі (частоти), але < 1 .

Закон Стефана – Больцмана для абсолютно чорного тіла

$$R_e = \sigma T^4, \quad (2.3.4)$$

де R_e – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла; σ – стала Стефана – Больцмана, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$; T – температура за термодинамічною шкалою температур.

Якщо тіло не абсолютно чорне, а сіре, то

$$R = a \sigma T^4 \quad (2.3.5)$$

де a – поглинальна здатність сірого тіла; завжди < 1 .

Для абсолютно чорного тіла справедливі перший та другий закони Віна.

Закон зміщення Віна (перший закон Віна)

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (2.3.6)$$

де $\lambda_{\max}$ – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання, тобто яка відповідає максимуму спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла; b – стала закону зміщення Віна, $b = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Максимальна спектральна випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла зростає пропорційно п'ятому ступеню температури (**другий закон Віна**):

$$r_{\lambda_{\max}} = C T^5, \quad (2.3.7)$$

де $C = 1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^5)$.

• **Характеристики фотона.**

$$\text{Енергія фотона } \varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad \text{або} \quad \varepsilon = \hbar\omega, \quad (2.3.8)$$

де h – стала Планка, $h=6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; ν – частота фотона; ω – циклічна частота; λ – довжина хвилі фотона; c – швидкість світла в вакуумі.

$$\text{Вектор імпульсу фотона } \vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad (2.3.9)$$

де $\vec{k}$ – хвильовий вектор, величина якого дорівнює: $k = 2\pi/\lambda$.
Звідки величина імпульсу фотона

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}, \quad (2.3.10)$$

де λ – довжина хвилі фотона; c – швидкість світла в вакуумі.

$$\text{Маса фотона} \quad m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}. \quad (2.3.11)$$

Тиск світла у разі нормального падіння на поверхню з коефіцієнтом відбиття ρ дорівнює

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho), \quad (2.3.12)$$

де E_e – енергетична освітленість поверхні, c – швидкість світла у вакуумі, w – об'ємна густина енергії випромінювання.

Енергетична освітленість поверхні – енергія, що падає на одиницю поверхні за одиницю часу, дорівнює

$$E_e = nh\nu, \quad (2.3.13)$$

де n – кількість фотонів, які щосекунди падають на одиницю площі поверхні.

• **Фотоефект** – електричні явища, які спостерігаються при поглинанні електромагнітного випромінювання (світла) речовиною.

Зовнішній фотоефект – випускання електронів з поверхні речовини під дією електромагнітного випромінювання.

Закони зовнішнього фотоефекту.

- Фотострум насичення (кількість випромінюваних електронів) є прямо пропорційним світловому потоку при незмінному спектральному складі світла (закон Столетова).
- Максимальна кінетична енергія фотоелектронів лінійно залежить від частоти світла, що падає на фотокатод, і не залежить від його інтенсивності (закон Ейнштейна).

- Для кожної речовини існує гранична частота ν_0 (довжина хвилі λ_0), яка має назву червоної границі фотоефекту. Це найменша частота (найбільша довжина хвилі) при якій спостерігається фотоефект.

Формула Ейнштейна для фотоефекту

$$h\nu = A + T_{\max} = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}, \quad (2.3.14)$$

де $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ – енергія фотона, що падає на поверхню металу; A – робота виходу електрона з металу; $T_{\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Червона межа фотоефекту

$$\nu_0 = \frac{A}{h}, \quad \text{або} \quad \lambda_0 = \frac{hc}{A}, \quad (2.3.15)$$

де ν_0 – мінімальна частота світла, при якій ще можливий фотоефект; λ_0 – максимальна довжина хвилі, при якій ще можливий фотоефект; h – стала Планка; c – швидкість світла в вакуумі.

- **Ефект Комптона** – зміна довжини хвилі у бік більших значень при пружному розсіюванні короткохвильового електромагнітного випромінювання (рентгенівських або γ -квантів) на вільних або слабко зв'язаних електронах речовини.

Комптонівське зміщення дорівнює:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta), \quad (2.3.16)$$

або

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2.3.16a)$$

де λ, λ' – довжини падаючої та розсіяної хвиль випромінювання; λ_c – комптонівська довжина хвилі, θ – кут розсіювання.

Комптонівська довжина хвилі (стала)

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \quad (\lambda_c = 2,436 \text{ пм}), \quad (2.3.17)$$

де m_e – маса спокою електрона, h – стала Планка, c – швидкість світла у вакуумі.

Закономірності комптонівського розсіювання.

- Величина комптонівського зміщення $\Delta\lambda$ не залежить від довжини хвилі падаючого випромінювання та від природи речовини, на якій відбувається розсіювання, та визначається тільки кутом розсіювання.
- Інтенсивність незміщеної компоненти збільшується зі збільшенням порядкового номеру речовини, на якій відбувається розсіювання.

- Інтенсивність зміщеної компоненти збільшується зі збільшенням кута розсіювання. Відповідно зменшується інтенсивність незміщеної компоненти.

При комптонівському розсіянні енергія та імпульс електрону описуються формулами релятивістської динаміки.

Релятивістська маса та релятивістський імпульс частинки

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.3.18)$$

де m_0 – маса покоя частинки; $\vec{v}$ – її швидкість; c – швидкість світла в вакуумі.

Енергія релятивістської частинки:

а) власна енергія (енергія спокою)

$$E_0 = m_0 c^2; \quad (2.3.19)$$

б) кінетична енергія T

$$T = c^2(m - m_0) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right); \quad (2.3.20)$$

в) повна енергія, взаємозв'язок між енергією та масою релятивістської частинки:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.3.21)$$

Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4; \quad p^2 c^2 = T(T + 2m_0 c^2). \quad (2.3.22)$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}.$$

Методичні вказівки.

1. Основою розрахунків освітленості є закон освітленості (2.1.7), який є справедливим тільки для точкових джерел світла, оскільки тільки до таких джерел застосовується поняття сили світла. Освітленість, яка створюється системою точкових джерел розраховується за принципом суперпозиції, тобто шляхом додавання освітленості від кожного джерела.

Постійність світлового потоку при заломленні та відбиванні світла можна використовувати для визначення освітленості у випадках, коли на поверхню падають промені не безпосередньо від точкового джерела, а після заломлення у лінзі. За освітленістю E лінзи (дзеркала) та її

площиною S і площиною S' світлової плями на екрані можна визначити освітленість екрану за співвідношенням

$$\Phi = ES = E'S'.$$

2. Протяжні джерела світла характеризує яскравість B , означення якої надає формула (2.1.10). Для обчислення освітленості, яка створюється протяжним джерелом, необхідно:

- розбити його поверхню на елементарні ділянки dS ;
- обчислити силу світла dI кожної ділянки за формулою $dI = BdS_n = B \cos \theta dS$, де θ – кут між нормаллю до елемента поверхні та даним напрямом;
- розрахувати за формулою (2.1.7) освітленість dE , створену елементом dS ;
- про інтегрувати отриманий вираз вздовж усієї поверхні джерела.

У випадку, коли всі елементи джерела мають однакову яскравість, розрахунок суттєво спрощується. Якщо розміри джерела не дуже великі, його можна вважати точковим і застосувати до нього закон освітленості від точкового джерела, де сила світла розраховується за формулою

$$I = B \int dS_n = BS_n.$$

3. При розв'язуванні задач, у яких необхідно визначити хід світлових променів при наявності однієї або кількох заломлюючих площин (наприклад, призмах), перш за все необхідно зробити схематичний рисунок, урахувуючи, яке з середовищ вздовж ходу променя має меншу оптичну густину. Задачу розв'язують за допомогою закону заломлення, застосовуючи його по черзі до кожного випадку переходу променя з одного середовища в друге. Далі складають додаткові рівняння, використовуючи геометричні співвідношення, які впливають з умови задачі, і розв'язують отриману систему рівнянь відносно шуканої величини.

Якщо, за умовою, промінь падає на границю розподілу середовищ з боку середовища з більшою оптичною густиною ($n_1 > n_2$), то обчислення може дати значення синусу кута заломлення, яке перевищує одиницю. Це означає, що спостерігається явище повного внутрішнього відбиття, тобто промінь, не заломлюючись на межі двох середовищ, повністю відбивається від неї.

4. При розв'язуванні задач на явище інтерференції у більшості випадків необхідно визначити фізичні величини, які характеризують інтерференційну картину, що виникла внаслідок накладання двох (або більшої кількості) монохроматичних когерентних хвиль. Незалежні джерела світла не є когерентними.

Отже, задачі на інтерференцію світла в залежності від способу отримання когерентних хвиль можна поділити на дві групи.

- До першої групи задач відносяться задачі, в яких інтерференційна картина виникає внаслідок накладання двох когерентних хвиль, отриманих шляхом ділення світлової хвилі, що випромінюється одним джерелом, за допомогою деякої оптичної системи (щілини Юнга, біпризми Френеля, дзеркала Ллойда і т. ін.). Цю оптичну систему при розв'язанні задач, за звичаєм, замінюють іншою, еквівалентною, системою, вважаючи, що хвилі випромінюються двома когерентними джерелами. Розрахунок інтерференційної картини виконується за допомогою формул (2.2.6)-(2.2.8) з попереднім визначенням положення уявних джерел, якщо воно є невідомим.

- В задачах другої групи розглядається інтерференція світла у тонких плоских або клиноподібних плівках (окремим випадком інтерференції в клиноподібній повітряній плівці є кільця Ньютона). Розв'язання цих задач можливо з використанням формули (2.2.9) – (2.2.12), але при їх використанні слід мати на увазі наступне:

- формули (2.2.9) – (2.2.11) для оптичної різниці ходу променів, відбитих від передньої та задньої поверхонь плівки, отримані у випадку, коли плівка з обох боків оточена однаковим середовищем. При цьому один з променів відбивається від середовища з меншою оптичною густиною, другий – від середовища з більшою оптичною густиною, що приводить до стрибкоподібної зміни фази коливання на протилежну (на π) і відповідної зміни оптичної різниці ходу променів Δ на $\pm \frac{\lambda}{2}$.

- якщо плівка з обох боків оточена різними середовищами, то вплив на різницю ходу залежить від співвідношення між значеннями показників заломлення середовищ n_1 і n_2 та плівки n :

- а) $n > n_1$; $n > n_2$ - тільки промінь, відбитий від середовища з більшою оптичною густиною (плівки) втрачає $\frac{\lambda}{2}$;

- б) $n < n_1$; $n < n_2$ - тільки промінь, відбитий від середовища з більшою оптичною густиною (другого середовища) втрачає $\frac{\lambda}{2}$;

- в) $n_1 < n < n_2$ - обидва промені втрачають $\frac{\lambda}{2}$;

- г) $n_1 > n > n_2$ - жодний з променів не втрачає $\frac{\lambda}{2}$.

Зрозуміло, що у випадках а) та б) формули (2.2.9) – (2.2.11) залишаються справедливими. У випадку в) втрата кожним з відбитих променів півхвилі ніяк не вплине на їх різницю ходу. Тому у випадках в) та г) у формулах (2.2.9), (2.2.10) $\frac{\lambda}{2}$ слід відкинути, і, відповідно, умови максимуму і мінімуму при інтерференції будуть визначатися формулами (2.2.12).

- Проведений аналіз стосується також кілець Ньютона, формули (2.2.13) – (2.2.15) для яких виведені у припущенні, що скляна пластинка та притиснута до неї лінза, зазор між якими виграє роль тонкої плівки, мають однаковий показник заломлення. Якщо показники заломлення лінзи та пластинки є різними, а повітряний зазор заповнений деяким середовищем з показником заломлення n , то у випадках а) і б) формули (2.2.13) – (2.2.15) залишаються справедливими; у випадках в) та г) у формулах (2.2.13), (2.2.14) слід відкинути $\lambda/2$. В останньому випадку темні та світлі кільця міняються місцями, розрахунок інтерференційної картини можна проводити за формулами (2.2.16).

5. Дифракційні задачі є задачами про розподіл інтенсивності світла на екрані в залежності від форми та розмірів неоднорідності, що спричинила дифракцію. У загальному випадку такі задачі є досить складними.

У курсі загальної фізики розглядаються лише задачі, розв'язання яких спрощується внаслідок симетрії, наприклад, дифракція від круглого отвору або диску, від узької щілини, від дифракційної ґратки. В останніх двох випадках розглядають дифракцію у паралельних променях при їх нормальному падінні на вузьку щілину або плоску прозору дифракційну ґратку. Основні рівняння при розв'язанні таких задач складають на основі умов максимуму та мінімуму на відповідних об'єктах (див. формули (2.2.18)–(2.2.19), (2.2.22)–(2.2.23)). Якщо дифракційна картина проєцирується на екран, яких знаходиться на відносно великій відстані від щілини або дифракційної ґратки, то синуси кутів з достатньою ступенем точності можна замінити їх тангенсами. Оскільки на лінзу падають паралельні промені, то дифракційна картина спостерігається на екрані, який розміщують у фокальній площині лінзи.

6. Задачі, в яких розглядається поляризація світла можна поділити на три групи.

- Задачі, в яких розглядається поляризація світла при відбитті та заломленні на границі двох діелектриків, розв'язуються за допомогою формул Френеля, окремим випадком яких є закон Брюстера (2.2.30). При використанні закону слід звернути увагу на те, що в формулі, яка виражає закон Брюстера, n – відносний показник заломлення середовищ, на межі яких відбувається відбиття світла.

- Головною площиною поляризатора називають площину, в якій відбуваються коливання світлового вектора у плоскополяризованому промені, який виходить із приладу. Аналогічним способом надається означення головної площини аналізатора, котрий є таким самим приладом, що поляризатор, але використовується для аналізу поляризації світла.

Отже, при розв'язанні задач з використанням закону Малюса, слід пам'ятати, що кут α між головними площинами поляризатора та аналізатора в законі Малюса є одночасно кутом між площинами, в яких коливаються світлові вектори двох плоскополяризованих променів: того, що падає на аналізатор, та такого, що виходить з нього.

• При розв'язуванні задач, зв'язаних з впливом штучної анізотропії на проходження світла крізь систему «поляризатор – аналізатор» використовується формула (2.2.3), яка надає зв'язок між оптичною різницею ходу та різницею фаз звичайного та незвичайного променів:

$$\delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}.$$

Мірою оптичної різниці ходу є різниця показників заломлення звичайного та незвичайного променів ($n_o - n_e$) (див. таблицю 2.1). Отже,

$$\Delta = (n_o - n_e)l,$$

де l – товщина шару речовини, у якій створена штучна анізотропія.

Наприклад, різниця фаз звичайного і незвичайного променів, на виході з комірки Керра, дорівнює

$$\delta\varphi = \frac{2\pi(n_o - n_e)l}{\lambda_0} = 2\pi l B E^2,$$

де l – довжина кювети з рідиною, B – стала Керра, E – напруженість зовнішнього електричного поля прикладеного до комірки.

6. У фізичній літературі у відношенні величин, які характеризують **теплове випромінювання** не існує єдиної термінології. Випромінювальну здатність тіла $R(T)$ інакше називають енергетичною світністю, а спектральну випромінювальну здатність $r_{\lambda T}$ – спектральною щільністю енергетичної світності тіла. Слід розуміти, що мова йде про ті самі величини.

• Закони Стефана - Больцмана та Віна (формули (2.3.4), (2.3.6), (2.3.7)) справедливі лише для абсолютно чорних тіл. Для нечорних тіл випромінювальну здатність обчислюють за формулою

$$R = a'_T \sigma T^4,$$

де a'_T – коефіцієнт випромінювання, що показує, яку долю складає випромінювальна здатність даного тіла R від випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла R_e , взятого при тій самій температурі. Він залежить від природи та температури тіла.

Іноді, посилаючись на закон Кірхгофа для теплового випромінювання цей коефіцієнт замінюють спектральною поглинальною здатністю тіла $a_{\lambda T}$, яка визначає долю поглинутої енергії відносно енергії, що падає на поверхню тіла за той самий проміжок часу в тому самому

інтервалі довжин хвиль (частот). При цьому не указують, про яке саме тіло йде мова. Необхідно пам'ятати, що така заміна є правомірною тільки у випадку сірих тіл, для яких спектральна поглинальна здатність $a_{\lambda T}$ є однаковою для всіх довжин хвиль λ , дійсно, $a_{\lambda T} = a_T$.

7. Задачі квантової оптики – задачі про взаємодію фотонів з окремими електронами (фотоефект, ефект Комптона) або з речовиною (тиск світла). При цій взаємодії виконуються закони збереження енергії та імпульсу. Закон збереження імпульсу, застосований до взаємодії фотонів з речовиною, приводить до формули (2.3.12) для тиску світла; закон збереження енергії, застосований для взаємодії фотона з електроном у металі, є рівнянням Ейнштейна для фотоефекту (2.3.14); сумісне застосування обох законів збереження для опису взаємодії рентгенівських фотонів або γ -квантів з вільним або слабо зв'язаним з атомом електроном приводить до формули Комптона (2.3.16).

- При обчисленні швидкості електрона його можна вважати класичною частинкою, якщо кінетична енергія електрона T набагато менша за енергію спокою електрона $W_0 = m_0 c^2 = 0,511 \text{ Мев}$. Якщо нерівність $T \ll W_0$ не виконується, електрон необхідно вважати релятивістською частинкою і застосовувати до нього формули (2.3.18)-(2.3.22).

- Розрахунок тиску світла за формулою (2.3.12) дає вірний результат лише у випадку нормального падіння світла на поверхню тіла, для якого й була отримана формула). Замість енергетичної освітленості поверхні E_e часто застосовують інтенсивність світла I (густину потоку випромінювання). У випадку нормального падіння ці величини, дійсно співпадають, але така заміна є неправомірною при похилому падінні променів на поверхню.

Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1. Півсфера радіусу $R=2\text{м}$ освітлюється двома однаковими лампами, які підвішені на висоті $2R$ над поверхнею землі симетрично відносно півсфери. Відстані між лампами також дорівнює $2R$. Визначити освітленість півсфери в точках, які знаходяться на мінімальній відстані від одного з джерел, якщо повний світловий потік кожної лампи дорівнює $\Phi=1200 \text{ лм}$.

$R=2\text{м}$
$h=2R$
$\Phi=1200 \text{ лм}$
$E=?$

Розв'язання.

Точка В (рис. 2.3), яка має мінімальну відстань від одного з джерел S_1 , знаходиться на лінії S_1O , що з'єднує джерело з центром півсфери. Промені від цього джерела падають на поверхню сфери перпендикулярно.

За формулою (2.1.7) освітленість в точці В дорівнює

$$E = \frac{I}{r_1^2} + \frac{I}{r_2^2} \cos \alpha,$$

де I – сила світла джерел; r_1 і r_2 – відстані джерел від точки В; α – кут падіння променів від джерела S_2 .

З урахуванням формули

$I = \frac{\Phi}{4\pi}$, що надає зв'язок між силою

світла та світловим потоком Φ у випадку ізотропного джерела, яким можна вважати лампу,

$$E = \frac{\Phi}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \cos \alpha \right). \quad (1)$$

Перевіряємо одиницю вимірювання

$$[E] = \left[\frac{\Phi}{r^2} \right] = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} = \text{лк}.$$

Визначаємо r_1 , r_2 та $\cos \alpha$.

З прямокутного трикутника ΔS_1OA за теоремою Піфагора

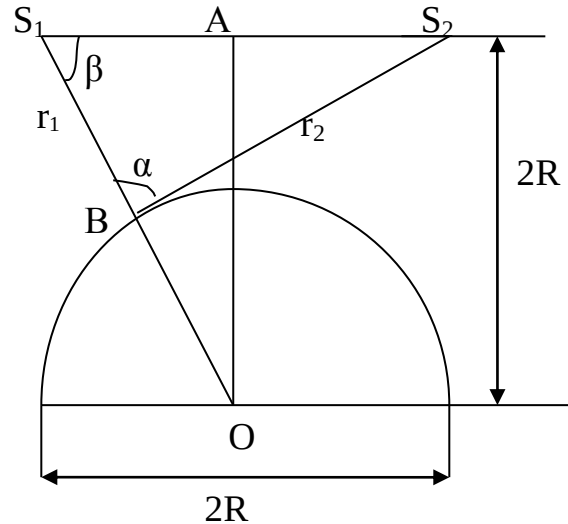


Рис. 2.3.

$$(S_1O)^2 = (2R)^2 + R^2 = 5R^2;$$

$$r_1 = S_1O - R = R\sqrt{5} - R = 1,24R;$$

$$\cos \beta = \frac{S_1A}{S_1O} = \frac{R}{R\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

З ΔS_1BS_2 за теоремою косинусів

$$r_2^2 = r_1^2 + 4R^2 - 4r_1R \cos \beta = 3,32R^2.$$

$$S_1S_2^2 = 4R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha,$$

звідки

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 4R^2}{2r_1r_2} = 0,188.$$

Підставляємо значення в формулу (1) і отримуємо освітленість E

$$E = \frac{\Phi}{4 \cdot 3,14} \left(\frac{1}{1,54 \cdot R^2} + \frac{0,188}{3,32 \cdot R^2} \right) = 0,056 \frac{\Phi}{R^2} = 0,056 \cdot \frac{1200}{4} = 16,8 \text{ лк}.$$

Відповідь: $E = 16,8$ лк.

Приклад 2.2 Промінь світла падає на плоско паралельну пластинку з скла, показник заломлення якого $n=1,73$, під кутом $i=30^\circ$. Визначити товщину пластинки h , якщо зміщення променя при виході з пластинки становить $d=20$ мм.

Розв'язання.

Хід променя показаний на рис. 2.4. Виразимо $h = AD$ з прямокутного трикутника ADC :

$$h = AC \cdot \cos r;$$

де r – кут заломлення променя світла. За законом заломлення світла (2.1.13) $\frac{\sin i}{\sin r} = n$.

Звідки $\sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sin 60^\circ}{1,73} = 0,5$;
 $r = \arcsin 0,5 = 30^\circ$. Відстань AC знаходимо з $\triangle ABC$: $AC = \frac{d}{\sin(i - r)}$.

Тоді $h = \frac{d \cos r}{\sin(i - r)}$.

Рис. 2.4.

$$h = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 30^\circ}{\sin(60^\circ - 30^\circ)} = 3,46 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Відповідь: $h = 3,46 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$

Приклад 2.3. Визначити радіус кривизни R вгнутого сферичного дзеркала, якщо зображення предмета, який знаходиться перед ним на відстані $a_1 = -20 \text{ см}$, збільшене у 5 разів і пряме ($k=5$).

Розв'язання.

Пряме зображення, отримане за допомогою дзеркала, є уявним. Відповідний хід променів зображений на рис. 2.5.

За формулою сферичного дзеркала (2.1.21)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R}, \quad (1)$$

де, відповідно правилу вибору знаків, a_1 – від'ємне, a_2 – додатне.

Лінійне збільшення у дзеркалі за формулою (6.21) з урахуванням знаків a_1 і a_2 дорівнює

$$k = \frac{a_2}{|a_1|} = -\frac{a_2}{a_1} > 0.$$

Звідки

$$a_2 = -ka_1. \quad (2)$$

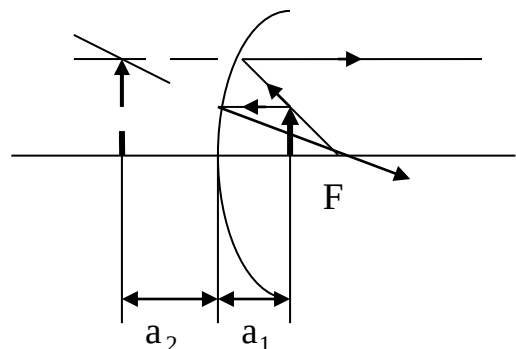


Рис.2.5.

З формул (1) і (2) отримуємо $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{ka_1} = \frac{2}{R}$,

$$R = \frac{2ka_1}{k-1}.$$

$$R = \frac{-2 \cdot 5 \cdot 0,2\text{м}}{5-1} = -0,5\text{м}.$$

Відповідь: $R = -0,5\text{м}$.

Примітка. У випадку отримання дійсного оберненого зображення з таким самим за величиною збільшенням $k=-5$, $a_2 < 0$, тобто $a_2 = ka_1$ і за

формулою (3)
$$R = \frac{2 \cdot (-5) \cdot (-0,2)\text{і}}{(-5)-1} = -0,33\text{м}.$$

Приклад 2.4. Відстань між двома когерентними джерелами монохроматичного світла S_1 і S_2 у повітрі $d=0,15\text{мм}$. Визначити положення максимумів першого та другого порядку на екрані, відстань від джерел до якого дорівнює $l = 3,0\text{м}$. Довжина хвилі $\lambda = 0,6\text{мкм}$.

$$d = 1,5 \cdot 10^{-4}\text{м}$$

$$l = 3,0\text{м}$$

$$\lambda = 6,0 \cdot 10^{-7}\text{м}$$

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = 2$$

$$x_{\max 1}; x_{\max 2} - ?$$

Розв'язання

Для визначення координат максимумів або мінімумів необхідно знайти різницю ходу Δ хвиль, які випромінюються джерелами. Оскільки промені йдуть у повітрі ($n_{\text{пов}}=1$), оптична різниця ходу дорівнює геометричній. Опустимо на екран перпендикуляри S_1A , S_2B , а також з'єднаємо точки S_1 і S_2 з точкою C екрана, яка знаходиться від центру екрана на відстані $OC=x$ (рис.2.6). З трикутників S_1AC та S_2BC за теоремою Піфагора отримуємо:

$$L_1^2 = S_1C^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2;$$

$$L_2^2 = S_2C^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2.$$

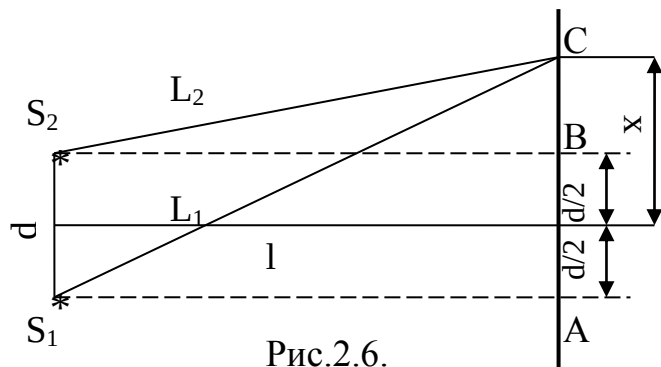


Рис.2.6.

Різниця останніх виразів дає:

$$L_1^2 - L_2^2 = (L_1 - L_2)(L_1 + L_2) = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2\right) = 2xd. \quad (1)$$

Оскільки $n(L_1 - L_2) = \Delta$ є оптичною різницею ходу променів, а суму $L_1 + L_2$ наближено можна замінити на $2l$, бо d та x при спостереженні інтерференції світла є завжди малими порівняно l , з виразу (1) отримуємо:

$$\Delta = \frac{xd}{l} n. \quad (2)$$

За умовою (2.1.5) координати максимумів повинні задовольняти умові:

$$\frac{x_{\max} d}{l} n = \pm m \lambda_0, \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots).$$

Звідки $x_{\max} = \pm m \frac{l \lambda_0}{d n}, \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots).$

Розрахунок дає $x_{\max 1} = \pm 1 \cdot \frac{3 \cdot 6,0 \cdot 10^{-7}}{1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 1} = 1,2 \cdot 10^{-2} (\text{м}); \quad x_{\max 2} = \pm 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$

Відповідь: $x_{\max 1} = 1,2 \text{ см}; \quad x_{\max 2} = 2,4 \text{ см}.$

Приклад 2.5. У інтерферометрі, схема якого дана на рис.2.4, трубки 1 та 2 заповнені повітрям. Коли повітря в трубці 2 замінили аміаком, інтерференційна картина, яка спостерігалась на екрані E, змістилася уверх на 17 полос. Довжина хвилі світла, яке освітлює вузьку щілину S, дорівнює $\lambda = 0,589 \text{ мкм}$. Довжина трубок 1 та 2 $l = 10 \text{ см}$. Показник заломлення повітря $n = 1,00029$. Визначити показник заломлення аміаку.

$\lambda = 5,89 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ $l = 0,1 \text{ м}$ $n = 1,00029$ $\Delta m = 17$ $n_1 - ?$
--

Розв'язання.

Інтерференційна картина, що спостерігається на екрані у випадку, коли трубки 1 та 2 заповнені повітрям, аналогічна картині, яка отримується при інтерференції світла від двох щілин (рис.2.7).

Якщо повітря в трубці 2 замінити аміаком, то оптична різниця ходу Δ променів 1 та 2 зміниться на величину $(n_1 l - nl)$ та інтерференційна картина на екрані зміститься. Її зміщенню на одну полосу відповідає зміна числа m (порядку максимуму або мінімуму) на одиницю, а різниці ходу Δ – на λ . Відповідно, при зміщенні картини на Δm полос, Δ змінюється на $\Delta m \cdot \lambda$, тобто $(n_1 l - nl) = \Delta m \lambda$.

Звідки $n_1 = n + \frac{\Delta m \lambda}{l}.$

$n_1 = 1,00029 + \frac{17 \cdot 5,89 \cdot 10^{-7}}{0,1} = 1,00039.$

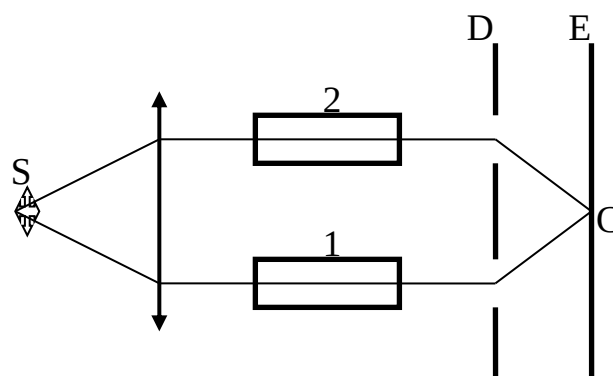


Рис.2.7.

Приклад 2.6. На плівку товщиною $d=367\text{нм}$ падає під кутом i паралельний пучок білого світла. Показник заломлення плівки $n=1,40$ (дисперсією, тобто зміною n в залежності від λ знехтувати). Який колір буде мати плівка у відбитому світлі, якщо i дорівнює: а) 30° ; б) 60° ?

$d = 3,67 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ $n = 1,40$ $i_1 = 30^\circ$ $i_2 = 60^\circ$	$\lambda_{\max 1}; \lambda_{\max 2} - ?$
--	--

Розв'язання.

Розглянемо оптичну різницю ходу когерентних хвиль 1 і 2, відбитих від нижньої та верхньої поверхонь плівки, за рахунок накладання яких виникає інтерференційна картина (рис.2.8).

Оптична довжина шляху першої хвилі дорівнює

$$L_1 = n(AB + BC) = 2 \frac{dn}{\cos r}, \quad (1)$$

другої хвилі –

$$L_2 = \left(DC \pm \frac{\lambda_0}{2} \right) = 2d \operatorname{tg} r \sin i \pm \frac{\lambda_0}{2} \quad (2),$$

де доданок $\frac{\lambda_0}{2}$ ураховує зміну фази коливання на протилежну при відбитті другої хвилі від плівки, яка є середовищем з більшою оптичною густиною.

Ураховуючи, що $n = \frac{\sin i}{\sin r}$, а також

вирази (1) і (2) для оптичної різниці ходу отримуємо:

$$\Delta = L_1 - L_2 = \frac{2d}{\cos r} (n - \sin r \sin i) \mp \frac{\lambda_0}{2} = \frac{2dn}{\cos r} (1 - \sin^2 r) \mp \frac{\lambda_0}{2} = 2dn \cos r \mp \frac{\lambda_0}{2},$$

або

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \mp \frac{\lambda_0}{2}.$$

Тоді умова інтерференційного максимуму у відбитому від плівки світлі

має вигляд: $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \mp \frac{\lambda_0}{2} = \pm m\lambda_0$,

або

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad (m=0,1,2,3,\dots)$$

З останнього співвідношення знаходимо вираз для довжин хвиль, для яких виконується умова максимуму, тобто визначаємо колір плівки при спостереженні інтерференції у відбитому світлі:

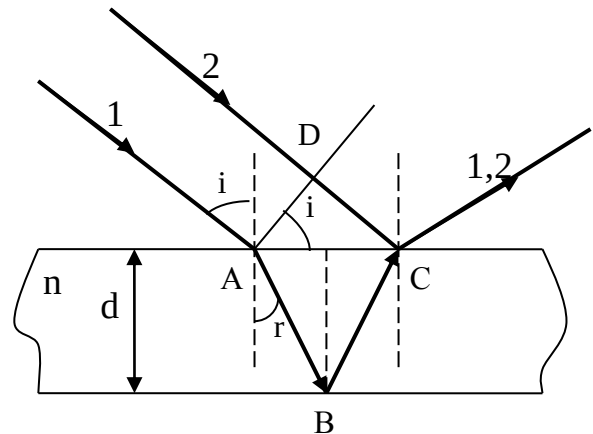


Рис.2.8.

$$\lambda_{\max} = \frac{4d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{2m+1}.$$

$$\lambda_{\max 1} = \frac{4 \cdot 3,67 \cdot 10^{-7} \sqrt{1,40^2 - 0,5^2}}{2m+1} = \frac{19,20 \cdot 10^{-7}}{2m+1}.$$

Обираємо значення порядку максимуму m , яке відповідає діапазону довжин хвиль видимого світла: $m=1$ і проводимо обчислення.

$$\lambda_{\max 1} = \frac{19,20 \cdot 10^{-7}}{3} = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

$$\lambda_{\max 2} = \frac{4 \cdot 3,67 \cdot 10^{-7} \sqrt{1,40^2 - 0,866^2}}{3} = \frac{16,15 \cdot 10^{-7}}{3} = 5,38 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Відповідь: 1) $\lambda_{\max 1} = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ - червоне світло;

2) $\lambda_{\max 2} = 5,38 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ - зелене світло.

Приклад 2.7. Для зменшення втрат світла при відбитті від скла на поверхню об'єктива ($n_2=1,7$) нанесена тонка прозора плівка ($n_1=1,3$). При якій найменшій товщині плівки станеться максимальне ослаблення відбитого світла, довжина хвилі якого приходить на середню частину видимого спектру ($\lambda=560 \text{ нм}$)? Промені падають нормально до поверхні об'єктива.

Розв'язання.

$n_1 = 1,3$	
$n_2 = 1,7$	
$\lambda = 5,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$	
$d_{\min} = ?$	

В даному випадку потрібно розглядати інтерференцію променів, відбитих від верхньої та нижньої поверхонь тонкої плівки, тобто від поверхні плівки та поверхні скла.

Оскільки обидва промені відбиваються від середовища з більшою оптичною густиною ($n_1 > n_{\text{повітря}}$ та $n_2 > n_1$) і, таким чином, обидва втрачають $\frac{\lambda}{2}$, то їх оптична різниця ходу у випадку нормального падіння дорівнює $\Delta = 2dn_1$. Інтерференційний мінімум світла спостерігається при виконанні умови $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$. Тобто

$$2dn_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (m=0,1,2,3,\dots). \text{ Звідки } d = \frac{(2m+1)\lambda}{4 \cdot n_1}.$$

Мінімальній товщині плівки відповідає значення $m=0$. Тоді

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n_1}.$$

$$d_{\min} = \frac{5,6 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 1,3} \approx 1,08 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,108 \text{ мкм}$$

Приклад 2.8. Між двома плоско паралельними прозорими пластинками поклали дуже тонкий дрiт. Дрiт паралельний лiнii дотику пластинок i знаходиться на вiдстанi $a=20\text{см}$ вiд неї. При спостереженнi у вiдбитому свiтлi ($\lambda_0=750\text{нм}$) на верхнiй пластинцi спостерiгаються iнтерференцiйнi смуги. Променi свiтла падають перпендикулярно до поверхнi пластинок. Визначити дiаметр D перерiзу дроту, якщо на вiдстанi $L=1\text{м}$ спостерiгається $\Delta m=10$ свiтлих смуг.

$a=0,20\text{м}$
 $\lambda_0 = 7,50 \cdot 10^{-7}\text{ м}$
 $L=0,01\text{м}$
 $\Delta m=10$

 $D=?$

Розв'язання.
 Між пластинками завдяки дроту утворюється повітряний клин (рис.2.9). Тоді дiаметр дроту $D = a \cdot \text{tg} \alpha$ (1), де α – кут при основі клину.

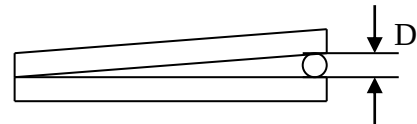


Рис. 2.9.

Визначимо α .

Інтерференційні смуги спостерігаються при малих кутах клина, тому вiдбиті вiд верхньої та нижньої поверхонь клина промені 1 і 2 практично паралельні. Різниця ходів цих променів може бути обчислена за формулою

(2.1.9):
$$\Delta = 2d_m n \cos r \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

За умовою інтерференційних максимумів $2d_m n \cos r + \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0$, (2)

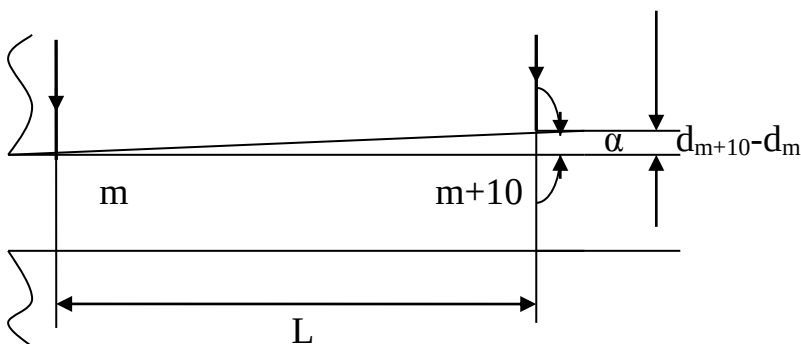


Рис. 2.9а.

де d_m – товщина клину в місці, де спостерігається свiтла смуга з номером m ; n – показник заломлення клину (для повітря $n=1$); r – кут заломлення, який за умовою дорiвнює нулю, вiдповiдно $\cos r = 1$; $\frac{\lambda_0}{2}$ – додаткова рiзниця

ходи, яка виникає при вiдбиттi другого променя вiд поверхнi нижньої пластинки (середовища з бiльшим показником заломлення).

Смугі з номером m вiдповiдає товщина повітряного клина d_m , а смугі з номером $m+10$ – товщина d_{m+10} . За умовою десять смуг мiстяться на вiдстанi L . Тоді шуканий кут α (див. рис. 2.9а) дорiвнює

$$\alpha = \frac{d_{m+10} - d_m}{L}, \quad (3)$$

де внаслідок малої величини кута клину $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$.

Знаходимо d_m і d_{m+10} з формули (2) і підставляємо їх до формули (3). Отримуємо

$$\alpha = \frac{\frac{m+10}{2n}\lambda_0 - \frac{m}{2n}\lambda_0}{L} = \frac{5\lambda_0}{L} \quad (4)$$

і за формулою (1) $D = \frac{5\lambda_0}{L} a$.

$$D = \frac{5 \cdot 7,5 \cdot 10^{-7}}{0,01} \cdot 0,2 \text{ м} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Відповідь: $D = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.

Примітка. Значення кута α за формулою (4) визначається у радіанах.

Правило переводу з радіан у градуси має вид $\alpha_{\text{град}} = \frac{180}{\pi} \alpha_{\text{рад}}$.

Приклад 2.9. На пристрої для спостереження кілець Ньютона у відбитому світлі був виміряний радіус третього темного кільця ($m=3$). Коли простір між плоско паралельною пластинкою та лінзою заповнили рідиною, той самий радіус стало мати кільце з номером, більшим на одиницю. Визначити показник заломлення n рідини.

$n = 1$ $n' = n$ $m = 3$ $m' = m + 1$ $r_m = r_{m'}$ $n = ?$	Розв'язання. Розглянемо механізм утворення кілець Ньютона у відбитому світлі (рис.2.10). Промінь, який приходить у точку В, частково відбивається, а частково проходить у повітряний (або заповнений рідиною) клин (практично вертикально внаслідок малої кривизни лінзи), відбиваючись в точці С від пластини. Промені, відбиті у точках В і С є когерентними і при накладанні дають інтерференційну картину. Оскільки в точці С промінь відбивається від середовища з більшою оптичною густиною, він втрачає півхвилю, і оптична різниця ходу двох променів дорівнює
---	---

$$\Delta = 2dn + \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

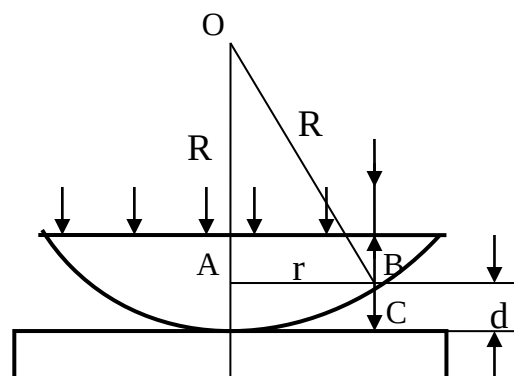


Рис.2.10.

де d – товщина зазору, n – показник заломлення речовини, яка заповнює простір між лінзою та пластиною.

Значення d виражаємо з прямокутного трикутника OAB через радіус кривизни лінзи R та відстань r від осі оптичної системи до точки спостереження інтерференційної картини:

$$r^2 = R^2 - (R - d)^2 = (2R - d)d = 2Rd,$$

де d – дуже мала величина. Тоді

$$d = \frac{r^2}{2R}, \quad (2)$$

і вираз (1) приймає вигляд:

$$\Delta = n \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (3)$$

При освітленні лінзи монохроматичним світлом у відбитому та прохідному світлі буде спостерігатися чергування темних та світлих кілець. У центрі картини у відбитому світлі буде темне коло, у прохідному – світле.

Радіуси темних кілець знайдемо з умови (2.1.6) мінімуму інтенсивності для різниці ходу: $\Delta = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2}$,

або, з урахуванням виразу (3):

$$n \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Звідки радіус m -го темного кільця дорівнює:

$$r_m = \sqrt{m \frac{\lambda_0}{n} R} \quad (m=1,2,\dots).$$

Відповідно радіуси світлих кілець

$$r_{m,\text{н.а.}} = \sqrt{(2m-1) \frac{\lambda_0}{2n} R} \quad (m=1,2,\dots).$$

$$\text{За умовою задачі } r_m = \sqrt{m\lambda_0 R} \text{ та } r_{m'} = r_{m+1} = \sqrt{(m+1) \frac{\lambda_0}{n} R}.$$

Оскільки $r_m = r_{m'}$, то

$$\sqrt{m\lambda_0 R} = \sqrt{(m+1) \frac{\lambda_0}{n} R}.$$

Звідки виражаємо показник заломлення рідини n :

$$n = \frac{m+1}{m} = \frac{4}{3} = 1,33.$$

Відповідь: $n=1,33$.

Приклад 2.10. На діафрагму с круглим отвором, радіус якого $r=2\text{ мкм}$, нормально падає світло з довжиною хвилі $\lambda=500\text{ нм}$. На екрані, що знаходиться за діафрагмою на відстані $b=0,6\text{ м}$ від неї, спостерігають дифракційну картину. Скільки зон Френеля укладається в отворі діафрагми? Світлим або темним буде центр дифракційної картини?

$$\begin{array}{l} r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ \lambda = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ b = 0,6 \text{ м} \\ \hline m_{\text{max}} - ? \end{array}$$

Розв'язання.
Згадаємо принцип побудови зон Френеля (рис.2.11). Проведемо із точки С дугу АЕВ радіусу АС. Рішення задачі

зводиться до відповіді на питання про те, скільки разів $\frac{\lambda}{2}$ укладається у відрітку ОЕ, тобто кількість зон Френеля m дорівнює: $m = \frac{OE}{\lambda/2}$.

Звідки

$$OE = m \frac{\lambda}{2}. \quad (1)$$

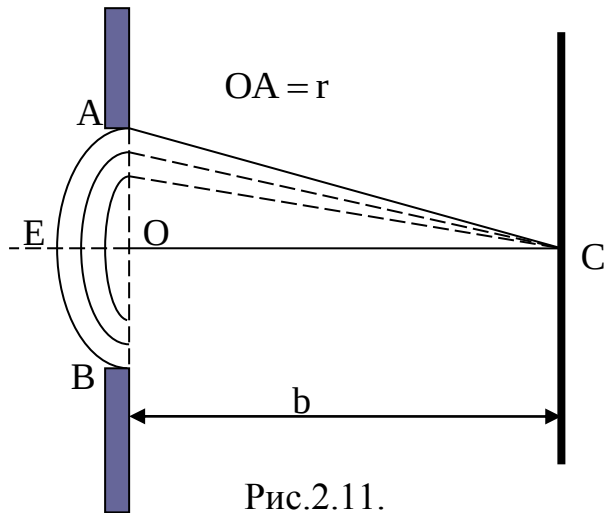
Для визначення m скористаємося теоремою Піфагора. З трикутника АОС отримуємо: $AC^2 = AO^2 + CO^2$, де $AC = CE = CO + OE = b + m \frac{\lambda}{2}$; $AO = r$; $CO = b$.

Отже, $\left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 = r^2 + b^2$. Звідки, $mb\lambda + \left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2 = r^2$. Оскільки доданком $\left(m \frac{\lambda}{2}\right)^2$ можна знехтувати порівняно з іншими членами, остаточно отримуємо:

$$m = \frac{r^2}{b\lambda}.$$

$$m = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{1,6 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 5.$$

Відповідь: Кількість зон Френеля, яка укладається у отворі діафрагми при розбитті відкритої частини фронту хвилі з заданої точки, дорівнює п'яти. $m=5$ – непарне, тому центр дифракційної картини буде світлим.



Приклад 2.11. Дифракційну ґратку розміщено на відстані $l=0,3\text{ м}$ від екрану, на якому спостерігають дифракційну картину. Відстань між максимумами нульового та четвертого порядків на екрані дорівнює $\Delta x = 0,066\text{ м}$. Ґратка має 100 штрихів на 1 мм. Чому дорівнює довжина хвилі λ досліджуваного джерела? Максимум якого найбільшого порядку може спостерігатися за допомогою цієї ґратки? Укажіть загальну кількість

Розв'язання.

$l=0,3\text{ м}$ $\Delta x = 0,066\text{ м}$ $n = 100\text{ мм}^{-1}$ $m = 4$ $\lambda; m_{\max} - ?$	Умова дифракційного максимуму (2.2.22): $d \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda.$ Звідки $\lambda = \frac{d \cdot \sin \varphi}{m}; \quad d = \frac{1}{n}; \quad \sin \varphi \approx \Delta x / l.$ $\lambda = \frac{\Delta x}{mnl}.$
---	---

$$\lambda = \frac{0,066}{4 \cdot 10^5 \cdot 0,3} = 5,5 \cdot 10^{-7} (\text{м}).$$

Для визначення найбільшого порядку максимуму слід урахувати, що найбільше значення, яке може приймати $\sin \varphi$ дорівнює одиниці. Тоді (див. формулу (2.2.24))

$$m_{\max} = E\left(\frac{d}{\lambda}\right) = E\left(\frac{1}{n\lambda}\right),$$

де функція $E\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ дорівнює цілій частині числа $\left(\frac{d}{\lambda}\right)$ або $\left(\frac{1}{n\lambda}\right)$.

$$m_{\max} = E\left(\frac{1}{10^5 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7}}\right) = E(18,2) = 18.$$

Усього на екрані з урахуванням нульового максимуму та симетрії дифракційної картини буде спостерігатися $2m_{\max} + 1 = 2 \cdot 18 + 1 = 37$ максимумів.

Відповідь: $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $m_{\max} = 18$; загальна кількість максимумів – 37.

Приклад 2.12. Період дифракційної ґратки $d = 2,5 \text{ мкм}$. Яку найменшою кількість штрихів повинна мати ґратка, щоб розділити компоненти дублету жовтої лінії натрію, довжини хвиль яких $\lambda_1 = 589,0 \text{ нм}$ і $\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$? Визначити найменшу довжину L робочої частини ґратки.

$d = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ $\lambda_1 = 5,890 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ $\lambda_2 = 5,896 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ $N_{\min}; L - ?$	Розв'язання. За формулою (2.2.27) роздільна здатність дифракційної ґратки R $R = \frac{\lambda}{d\lambda} = mN.$
--	--

(1)

Мінімальному значенню кількості штрихів $N_{\min}$ відповідає мінімальне значення $R_{\min}$ і максимальне значення порядку спектра $m_{\max}$, який можна спостерігати за допомогою цієї ґратки, тобто

$$N_{\min} = \frac{R}{m_{\max}}. \quad (2)$$

Мінімальна роздільна здатність, яка є необхідною для розділення компонент дублету, за формулою (1) дорівнює

$$R_{\min} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (3)$$

Число $m_{\max}$ виражаємо з умови максимуму для дифракційної ґратки (2.2.22), поклавши в ній $\sin\varphi = 1$ і $\lambda = \lambda_2$ (вибір у якості λ більшого з двох значень гарантує, що обидві компоненти дуплету з номером $m_{\max}$ будуть спостерігатися). Оскільки m – завжди ціле, за формулою (2.2.24), отримуємо

$$m_{\max} = E\left(\frac{d}{\lambda}\right) = E\left(\frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{5,896 \cdot 10^{-7}}\right) = E(4,24) = 4. \quad (4)$$

Підставляємо (3) і (4) в формулу (2) і знаходимо $N_{\min}$.

$$N_{\min} = \frac{\lambda_1}{m_{\max}(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{5,890 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 6 \cdot 10^{-10}} = 2,5 \cdot 10^2.$$

Мінімальна довжина L робочої частини ґратки дорівнює

$$L = d \cdot N_{\min} = 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 \cdot 10^2 = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Відповідь: $L = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

Приклад 2.13. Відомо, що при падінні на поверхню кристала кам'яної солі (відстань між атомними площинами $d = 0,281 \text{ нм}$) пучка паралельних рентгенівських променів під кутом ковзання $\theta = 22^\circ$ спостерігається дифракційний максимум першого порядку. Якщо кристал кам'яної солі замінити іншим кристалом, то максимум першого порядку спостерігається при куті ковзання $\theta_1 = 19^\circ$. Якою є міжплощинна відстань d_1 нового кристала?

$d = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ $\theta = 22^\circ$ $\theta_1 = 19^\circ$ $d_1 = ?$	Розв'язання. Формула Вульфа – Бреггів (2.2.28) для дифракції рентгенівських променів на кристалах $2d \sin\theta = \pm m\lambda, \quad (1)$ де θ – кут ковзання променів, що падають на кристал; d – відстань між атомними площинами кристалів.
---	---

При $m=1$ маємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} 2d \sin\theta = \lambda; \\ 2d_1 \sin\theta_1 = \lambda. \end{cases}$$

Звідки $\frac{d_1 \sin \theta_1}{d \sin \theta} = 1; \quad d_1 = d \frac{\sin \theta}{\sin \theta_1}.$

$$d_1 = 2,8 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\sin 22^\circ}{\sin 19^\circ} \approx 3,2 \cdot 10^{-10} (\text{м}).$$

Відповідь: $d_1 = 0,32 \text{ нм}.$

Приклад 2.14. При переході променя світла з речовини у повітря граничний кут повного внутрішнього відбиття оказався рівним 42° . Під яким кутом повинен падати промінь на поверхню речовини з повітря, щоб відбите світло було повністю поляризованим?

$\frac{i_{\text{ад.}} = 42^\circ}{i_A - ?}$	Розв'язання. Згідно закону Брюстера (2.2.29) кут падіння i_A (кут Брюстера), при якому відбите світло є повністю поляризованим, визначається за умовою
---	---

$$\text{tg } i_A = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1)$$

де n_{21} – відносний показник заломлення; n_1 – показник заломлення повітря, n_2 – показник заломлення середовища (рис.2.12а).

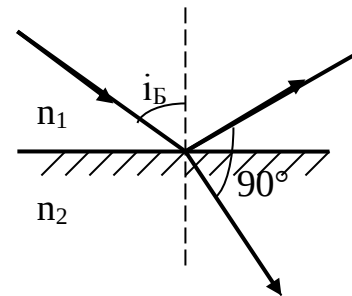


Рис. 2.12а.

Для визначення відносного показника заломлення скористаємося тим, що в умові задачі заданий граничний кут повного внутрішнього відбиття при падінні світла із середовища на межу поділу «середовище – повітря» (рис.2.12б), для якого виконується співвідношення:

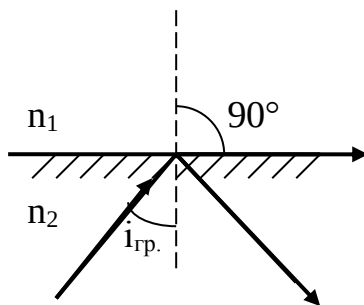


Рис. 2.12б.

$$(n_2 > n_1) \quad \text{Sin } i_{\text{ад.}} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2)$$

З співвідношень (1) и (2) отримуємо

$$\text{tg } i_A = \frac{1}{\text{Sin } i_{\text{ад.}}}.$$

$$i_A = \arctg\left(\frac{1}{\text{Sin } i_A}\right) = \arctg\left(\frac{1}{\text{Sin } 42^\circ}\right) = \arctg\left(\frac{1}{0,6691}\right) = 56^\circ 12'$$

Відповідь: $i_A = 56^\circ 12'.$

Приклад 2.15. У скільки разів η послаблюється світло, яке проходить через два ніколі, площини яких утворюють кут $\alpha=45^\circ$, якщо в кожному з них втрачається $k=10\%$ падаючого на нього світлового потоку?

$\alpha = 45^\circ$ $k=10\%$ $\frac{I_{\text{нєд.}}}{I} - ?$	Розв'язання. Природне світло інтенсивності $I_{\text{прир.}}$ при попаданні на першу призму Ніколя (поляризатор) внаслідок явища подвійного заломлення поділяється на два промені – звичайний і незвичайний. Обидва промені мають однакову інтенсивність $\frac{1}{2} I_{\text{нєд.}}$ і лінійно поляризовані, але в різних площинах. Звичайний промінь внаслідок повного внутрішнього відбиття на межі двох частин ніколя відбивається на внутрішню поверхню призми і поглинається нею. Незвичайний промінь проходить крізь призму, а його інтенсивність зменшується за рахунок втрат енергії в призмі.
---	--

Таким чином, інтенсивність світла, яке пройшло через поляризатор

$$I_0 = \frac{1}{2} I_{\text{нєд.}} (1 - k), \quad (1)$$

де k – відносна втрата інтенсивності природного світла, яке пройшло крізь поляризатор.

Далі поляризований промінь інтенсивності I_0 попадає на аналізатор (другий ніколь) і також поділяється на звичайний і незвичайний промені. Звичайний промінь повністю поглинається призмою, а інтенсивність незвичайного променя I визначається законом Малюса (2.2.31). Без урахування втрат енергії в другій призмі

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (2)$$

де α – кут між площинами поляризатора і аналізатора, тобто площинами, в яких прибори пропускають коливання світлового вектора.

З виразів (1) і (2), з урахуванням втрат інтенсивності в другій призмі, отримуємо

$$I = I_0 (1 - k) \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I_{\text{нєд.}} (1 - k)^2 \cos^2 \alpha. \quad (3)$$

Звідки

$$\frac{I_{\text{нєд.}}}{I} = \frac{2}{(1 - k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Підставляємо значення та обчислюємо результат:

$$\frac{I_{\text{нєд.}}}{I} = \frac{2}{(1 - 0,1)^2 \cos^2 45^\circ} = 4,94.$$

Відповідь: $\frac{I_{\text{нєд.}}}{I} = 4,94.$

Приклад 2.16. Між паралельними ніколями поміщений скляний брусок з квадратним перерізом S (рис.2.13). Приймавши константу фотопружності для скла $k=6 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$, визначити величину мінімальної механічної напруги σ , яка виникає усередині бруска під дією сили F . Довжина хвилі поляризованого світла $\lambda=430 \text{ нм}$, товщина бруска $d=50 \text{ мм}$.

$k=6 \times 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$ $\lambda = 4,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ $d = 0,05 \text{ м}$ $\sigma - ?$

Розв'язання.

Експериментально встановлено, що різниця показників заломлення звичайного і незвичайного промінів $n_o - n_e$ є пропорційною напрузі, яка виникає у матеріалі (при виконанні закону Гука):

$$n_o - n_e = k \frac{F}{S} = k\sigma.$$

Різниця ходу звичайного і незвичайного промінів

$$\Delta = (n_o - n_e)d.$$

Тоді $\Delta = k\sigma d$.

Якщо навантаження F є таким, що на екрані буде спостерігатися затемнення, то

$$\Delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2}, \quad m=0,1,2,\dots$$

Порівнюючи обидва значення

$$\Delta, \text{ отримуємо: } (2m+1) \frac{\lambda}{2} = k\sigma d.$$

Звідки
$$\sigma = \frac{(2m+1)\lambda}{2kd}.$$

Для $m=0$
$$\sigma = \frac{\lambda}{2kd}.$$

$$\sigma = \frac{4,3 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 7,2 \cdot 10^4 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right)$$

.

Відповідь: $\sigma = 72 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$

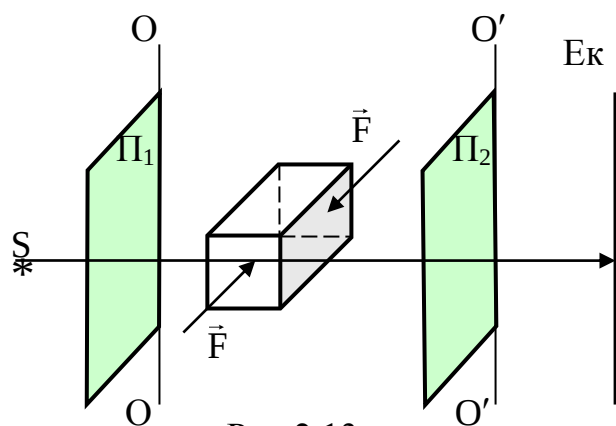


Рис.2.13.

Приклад 2.17. Визначити довжину хвилі λ_{max} , яка відповідає максимуму спектральної випромінювальної здатності волоска лампи розжарювання, площа поверхні якої $S=2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$. Потужність, яка споживається лампою, $P=50 \text{ Вт}$. Вважати волосок лампи сірим тілом, поглинальна здатність якого $a = 0,3$. Внаслідок теплопровідності іншим тілам передається частка $\eta = 0,2$ від енергії, яка споживається лампою.

$S = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ $P = 50 \text{ Вт}$ $a = 0,3$ $\eta = 0,2$ $\lambda_{\text{max}}, -?$	Розв'язання. За законом Віна (2.3.6) $\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}, \text{ де } b = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (1)$
---	---

Визначимо температуру волоска лампи. На розжарювання волоска витрачається доля $(1-\eta)$ потужності P , яку споживає лампа. Отже

$$P_{\text{кор.}} = (1 - \eta)P.$$

Відповідно випромінювальна здатність лампи

$$R'_e = \frac{(1 - \eta)P}{S}. \quad (2)$$

Оскільки лампа є сірим тілом її випромінювальна здатність за формулою (2.3.5) дорівнює

$$R' = a \sigma T^4. \quad (3)$$

За формулами (2) і (3)

$$\frac{(1 - \eta)P}{S} = a \sigma T^4.$$

Звідки

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1 - \eta)P}{\sigma a S}},$$

і

$$\lambda_{\text{max}} = b \sqrt[4]{\frac{\sigma a S}{(1 - \eta)P}}.$$

Перевіряємо одиниці вимірювання:

$$[\lambda] = \text{м} \cdot \text{К} \left(\text{м}^2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4} \text{Вт}^{-1} \right)^{1/4} = \text{м}.$$

Після підстановки значень знаходимо

$$\lambda_{\text{max}} = 2,89 \cdot 10^{-3} \sqrt[4]{\frac{0,3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}{0,8 \cdot 50}} = 8,78 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Відповідь: $\lambda_{\text{max}} = 8,78 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$

Приклад 2.18. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом з максимумом спектральної випромінювальної здатності при $\lambda_{\text{max}} = 550 \text{ нм}$, визначити температуру T і випромінювальну здатність R_e Сонця; потік енергії Φ , що випромінюється Сонцем та масу Δm , яку втрачає Сонце щосекунди. (Радіус Сонця $r = 6,9599 \cdot 10^8 \text{ м}$)

$\lambda_{\text{max}} = 5,50 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ $r = 6,9599 \cdot 10^8 \text{ м}$ $T; R_e; \Phi; \Delta m - ?$	Розв'язання Абсолютну температуру Сонця визначаємо за законом зміщення Віна (перший закон Віна) $\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T},$
--	---

де $\lambda_{\max}$ – довжина хвилі, яка відповідає максимуму спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла; b – стала закону зміщення Віна, $b = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}} = \frac{2,89 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \hat{\text{Е}}}{5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}} = 5,27 \cdot 10^3 \hat{\text{Е}}.$$

Випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла знаходимо за законом Стефана – Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4,$$

де σ – стала Стефана – Больцмана, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$; T – температура за термодинамічною шкалою температур.

$$R_e = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (5,27)^4 \cdot 10^{12} = 4,37 \cdot 10^7 \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

Випромінювальна здатність тіла $R_e(T)$ – кількість енергії, що випромінюється при заданій температурі з одиниці поверхні тіла за одиницю часу в усьому інтервалі частот:

$$R_e = \frac{dW}{dt \cdot ds}.$$

Звідки потік енергії, що випромінюється Сонцем з його поверхні $S = 4\pi r^2$, дорівнює

$$\Phi = \frac{dW}{dt} = R_e S = 4\pi r^2 R_e.$$

$$\Phi = 4,37 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 6,96^2 \cdot 10^{16} = 2,66 \cdot 10^{26} \text{ (Вт)}$$

Масу Δm , яку щосекунди втрачає Сонце, знаходимо за формулою теорії відносності, яка надає зв'язок маси тіла з енергією:

$$E = mc^2, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} - \text{швидкість світла у вакуумі}.$$

Звідки

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot c^2} = \frac{\Phi}{c^2}.$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{2,66 \cdot 10^{26}}{9 \cdot 10^{16}} = 2,96 \cdot 10^9 \text{ (кг/с)}$$

$$\left[\frac{\Delta m}{\Delta t} \right] = \frac{\hat{A} \cdot \tilde{n}^2}{\hat{i}^2} = \frac{\hat{e} \tilde{a} \cdot \hat{i}^2 \cdot \tilde{n}^2}{\tilde{n}^3 \cdot \hat{i}^2} = \frac{\hat{e} \tilde{a}}{\tilde{n}}$$

Відповідь:

$$T = 5,27 \cdot 10^3 \hat{\text{Е}}; \quad R_e = 4,37 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2; \quad \Phi = 2,66 \cdot 10^{26} \text{ Вт};$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2,96 \cdot 10^9 \text{ кг/с}.$$

Приклад 2.19 На поверхню літію падає монохроматичне світло ($\lambda=0,310\text{мкм}$). Для припинення фотоефекту треба прикласти гальмівну напругу $U_r=1,7\text{В}$. Визначити роботу виходу електрона з металу та „червону межу” фотоефекту.

$\lambda = 3,10 \cdot 10^{-7} \text{ м}$	Розв’язання. Записуємо рівняння Ейнштейна для фотоефекту (2.3.13) з урахуванням зв’язку між частотою фотона ν і довжиною хвилі λ .
$U_r=1,7\text{В}$	
$A; \lambda_0$ -?	

$$h \frac{c}{\lambda} = A + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

де c – швидкість світла.

Оскільки навіть найбільш швидкі електрони затримуються електричним полем після проходження в ньому відстані, яка відповідає різниці потенціалів U_r , то їх кінетична енергія безпосередньо після виходу з металу пов’язана з величиною U_r співвідношенням

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_r,$$

Тоді $h \frac{c}{\lambda} = A + eU_r$, звідки $A = h \frac{c}{\lambda} - eU_r$.

Перевіряємо одиницю вимірювання: $[A] = \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}} = \text{Дж}$

Обчислення дає: $A = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{3,1 \cdot 10^{-7}} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,7 = 3,70 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,3 \text{ еВ}$.

За формулою (2.3.14) знаходимо червону межу фотоефекту: $\lambda_0 = \frac{hc}{A}$.

Перевіряємо одиницю вимірювання: $[\lambda] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{Дж}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \text{м}$.

Обчислення: $\lambda_0 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3,70 \cdot 10^{-19}} = 5,38 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,538 \text{ мкм}$.

Відповідь: $\lambda_0 = 0,538 \text{ мкм}$.

Приклад 2.20. На поверхню цинку падають γ -промені з довжиною хвилі $\lambda=2 \cdot 10^{-12} \text{ м}$. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, які вириваються з поверхні цинку.

$\lambda=2 \cdot 10^{-12} \text{ м}$	Розв’язання. Порівняємо енергію γ -квантів з роботою виходу електронів з цинку, яка дорівнює $A=4,7\text{еВ}=6,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Енергія фотона γ -променів
$A=6,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$	
$v_{\max}$ -?	

$$\varepsilon = h \frac{c}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-12}} = 9,94 \cdot 10^{-14} \text{ Дж.}$$

З урахуванням співвідношення $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ отримуємо: $\varepsilon = 0,622 \text{ MeV} \gg A$, тобто роботою виходу можна знехтувати порівняно з енергією фотона і вважати, що максимальна кінетична енергія електрона дорівнює енергії γ -кванта: $T = \varepsilon = 0,62 \text{ MeV}$.

У даному випадку кінетична енергія електрона більша за його власну енергію (енергію спокою) $E_0 = m_0 c^2 = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ Дж} = 8,20 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,51 \text{ MeV}$. Тому для обчислення швидкості електрона слід використати релятивістську формулу кінетичної енергії (6.65).

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right), \text{ де } \beta = v/c.$$

Звідки після відповідних перетворень отримуємо $\beta = \frac{\sqrt{(2E_0 + T)T}}{E_0 + T}$.

$$\beta = \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,51 + 0,62) \cdot 0,62}}{0,51 + 0,62} = 0,89,$$

звідки $v = c\beta = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,89 \text{ м/с} = 2,67 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Відповідь: $v = 2,67 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Приклад 2.21. Визначити імпульс p та кінетичну енергію T електрона, що рухається зі швидкістю $0,9c$ (c – швидкість світла у вакуумі).

$v = 0,9c$ $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ $T = ?$

Розв'язання

Оскільки електрон рухається зі швидкістю, близькою до швидкості світла у вакуумі величину його імпульсу визначаємо за формулою релятивістської динаміки (2.3.17):

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

де $v/c = \beta = 0,9$ (за умовою задачі).

Таким чином, $p = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1 - 0,81}} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.

У релятивістському випадку кінетична енергія частинки визначається як різниця між повною енергією E та енергією спокою E_0 , тому

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

$$T = 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-0,9^2}} - 1 \right) \text{Å} = 1,06 \cdot 10^{-13} \text{Å} = 0,66 \text{Å}.$$

Відповідь: $p = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{кг} \cdot \text{м/с}$; $T = 0,66 \text{Å}$.

Приклад 2.22. Внаслідок ефекту Комптона фотон з енергією $\varepsilon_1 = 1,85 \text{Мев}$ при зіткненні з електроном був розсіяний на кут $\theta = 90^\circ$. Визначити енергію ε_2 розсіяного фотона.

$\varepsilon_1 = 1,85 \text{Мев}$ $\theta = 90^\circ$ $\varepsilon_2 = ?$	Розв'язання Для визначення енергії розсіяного фотона скористаємося формулою Комптона ((2.3.16a) та (2.3.17): $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (1)$
---	---

де λ_2, λ_1 – довжини падаючої та розсіяної хвиль випромінювання. Виразимо довжини хвиль λ_2 і λ_1 через енергії ε_1 і ε_2 відповідних фотонів, скориставшись формулою $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$. Одночасно помножимо чисельник і знаменник правої частини формули (1) на швидкість світла c :

$$\frac{hc}{E_2} - \frac{hc}{E_1} = 2 \frac{hc}{m_0 c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Скорочуємо на hc і виражаємо з отриманої формули шукану енергію:

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 m_0 c^2}{m_0 c^2 + \varepsilon_1 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\varepsilon_1 E_0}{E_0 + \varepsilon_1 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

де $E_0 = m_0 c^2 = 0,51 \text{Мев}$ – енергія спокою електрона в мегаелектрон-вольтах.

Обчислення, яке проводимо в мегаелектрон-вольтах, дає:

$$\varepsilon_2 = \frac{1,85 \cdot 0,51}{0,51 + 1,85 \cdot 2 \sin^2 \frac{90^\circ}{2}} \text{Мев} = 0,4 \text{Мев}.$$

Відповідь: $E_2 = 0,4 \text{Мев}$.

Приклад 2.23. Використовуючи закони збереження енергії та імпульсу отримати формулу, яка пов'язує втрати енергії фотона $\Delta\varepsilon$ (кінетичну енергію електрона віддачі) з кутом розсіяння θ при ефекті Комптона. Вирахувати $\Delta\varepsilon$ при $\theta = 60^\circ$ та $\lambda = 1,66 \cdot 10^{-12} \text{м}$.

$\theta = 60^\circ$ $\lambda = 1,66 \cdot 10^{-12} \text{м}$ $\Delta\varepsilon = ?$	Розв'язання Розглянемо процес комптонівського розсіювання рентгенівського фотону на електроні (рис.2.14).
--	---

Згідно з законом збереження енергії

$$m_0 c^2 + h\nu = mc^2 + h\nu', \quad (1)$$

де ν і ν' – частота, що відповідає рентгенівському фотону до та після розсіювання; m_0 – маса спокою електрона (вважаємо, що до зіткнення з фотоном кінетична енергія та імпульс електрона були малі та ними

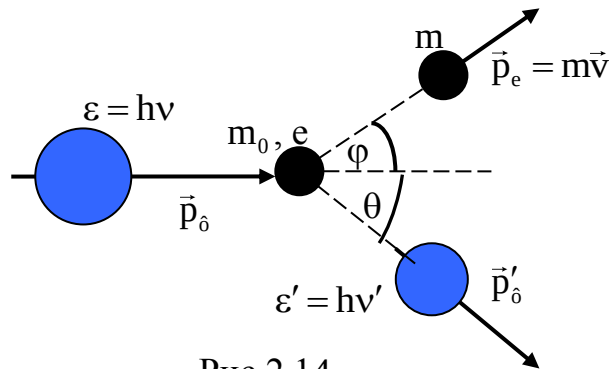


Рис.2.14.

можна знехтувати); m – маса електрона, що рухається зі швидкістю v .

За законом збереження імпульсу з використанням теореми косинусів (див. рис.2.14) отримуємо: $p_e^2 = p_\delta^2 + p_\delta'^2 - 2p_\delta p_\delta' \cos \theta$, або, з урахуванням

виразів для імпульсів фотонів $p_\delta = \frac{h\nu}{c}$ та $p_\delta' = \frac{h\nu'}{c}$:

$$m^2 v^2 = \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c} \right)^2 - 2 \frac{h^2}{c^2} \nu \nu' \cos \theta. \quad (2)$$

Перепишемо рівняння у вигляді: $mc^2 = h\nu - h\nu' + m_0 c^2$; (1a)

$$m^2 v^2 c^2 = h^2 \nu^2 + h^2 \nu'^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos \theta. \quad (2a)$$

Після піднесення рівняння (1) до квадрату та віднімання виразу від рівняння (2) маємо:

$$m^2 c^2 (c^2 - v^2) = m_0^2 c^4 - 2h^2 \nu \nu' + 2hm_0 c^2 (v - v') + 2h^2 \nu \nu' \cos \theta. \quad (3)$$

З формули $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ маємо: $m^2 c^2 (c^2 - v^2) = m_0^2 c^4$.

Тоді вираз (3) приймає вигляд:

$$h^2 \nu \nu' (1 - \cos \theta) = m_0 c^2 (h\nu - h\nu'),$$

або $\epsilon \epsilon' (1 - \cos \theta) = m_0 c^2 (\epsilon - \epsilon')$, звідки виражаємо ϵ' та знаходимо $\Delta \epsilon = \epsilon - \epsilon'$:

$$\Delta \epsilon = \frac{\epsilon^2 (1 - \cos \theta)}{\epsilon (1 - \cos \theta) + m_0 c^2} = \frac{\epsilon^2 (1 - \cos \theta) / m_0 c^2}{\epsilon (1 - \cos \theta) / m_0 c^2 + 1}.$$

Енергію фотона виражаємо через довжину хвилі: $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$. З урахуванням

виразу для комптонівській довжині хвилі $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ ($\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м)

остаточно отримуємо: $\Delta\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_c(1 - \cos\theta)}{\lambda_c(1 - \cos\theta) + \lambda}$.

$$[\Delta\varepsilon] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{с}} = \text{Дж}.$$

Обчислення дає:

$$\Delta\varepsilon = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,66 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{2,43 \cdot 10^{-12}(1 - 0,5)}{2,43 \cdot 10^{-12}(1 - 0,5) + 1,66 \cdot 10^{-12}} = 5,06 \cdot 10^{-14} \text{ Дж}$$

Відповідь: $\varepsilon = 5,06 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,32 \text{ еВ}$.

Приклад 2.24. Визначити імпульс електрона віддачі при комптонівському розсіюванні рентгенівських промінів, енергія яких $E = 0,7 \text{ Мев}$, якщо довжина хвилі зміщеної лінії на $0,2\lambda$ більша за довжину хвилі незміщеної компоненти.

$E = 0,7 \text{ Мев}$
$\Delta\lambda = 0,2\lambda$
$p_e = ?$

Розв'язання
За законом збереження імпульсу

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + \vec{p}_e,$$

де $\vec{p}_\phi$ та $\vec{p}'_\phi$ – імпульси фотону до та після розсіювання, $\vec{p}_e$ – імпульс електрона віддачі.

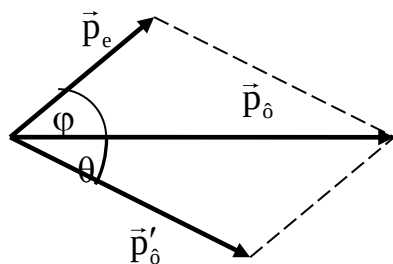


Рис.2.15

Використовуючи теорему косинусів (рис.2.15), отримуємо:

$$p_e^2 = p_\phi^2 + p'^2_\phi - 2p_\phi p'_\phi \cos\theta \quad (1).$$

Виражаємо імпульси фотонів через їх енергію з урахуванням того, що після розсіювання довжина хвилі $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 1,2\lambda$:

$$p_\phi = \frac{h}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{c}; \quad (2) \quad p'_\phi = \frac{h}{\lambda'} = \frac{h}{1,2\lambda} = \frac{1}{1,2} \cdot \frac{\varepsilon}{c}. \quad (3)$$

Вираз для $\cos\theta$ отримуємо з формули (2.3.16)

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta),$$

де $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$, а $\Delta\lambda$, згідно з умовою задачі, дорівнює $\Delta\lambda = 0,2\lambda = 0,2 \frac{hc}{\varepsilon}$.

$$\cos\theta = 1 - \frac{0,2\lambda}{\lambda_c} = 1 - \frac{0,2m_0 c^2}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Підстановка виразів (2) – (4) до формули (1) дає:

$$p_e = \frac{\varepsilon}{c} \left(\frac{0,04}{1,2^2} + \frac{m_0 c^2}{3\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{c} \left(0,028 + \frac{m_0 c^2}{3\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$p_e = \frac{0,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}{3 \cdot 10^8} \left(0,028 + \frac{0,511}{3 \cdot 0,7} \right) = 1,94 \cdot 10^{-22} \left(\frac{\hat{e} \cdot \hat{i}}{\hat{n}} \right).$$

Приклад 2.25. Тиск монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda=0,6$ мкм на чорну поверхню дорівнює 10^{-7} Н/м². Скільки фотонів падає щосекунди на 1 м² поверхні?

$\begin{array}{l} \lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ p = 10^{-7} \text{ Н/м}^2 \\ \hline n = ? \end{array}$	Розв'язання. Тиск світла у разі нормального падіння на поверхню з коефіцієнтом відбиття ρ згідно формули (2.3.12) дорівнює
---	--

$$p = \frac{E_e}{c} (1 + \rho),$$

де E_e – енергетична освітленість поверхні, c – швидкість світла у вакуумі.

Енергетична освітленість поверхні – енергія, що падає на одиницю поверхні за одиницю часу, виражається через кількість фотонів n , які щосекунди падають на одиницю площі поверхні, та енергію окремого фотона $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$:

$$E_e = \frac{nhc}{\lambda},$$

де $h=6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Поверхня чорна, тому коефіцієнт відбиття приймаємо рівним нулю: $\rho=0$.

Отже, $p = \frac{nh}{\lambda}$. Звідси $n = \frac{p\lambda}{h}$.

$$n = \frac{10^{-7} \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 9,05 \cdot 10^{19}.$$

Перевіряємо одиницю вимірювання: $[n] = \frac{\hat{I} / \hat{l}^2 \cdot \hat{t}}{\hat{A} \hat{e} \cdot \hat{n}} = \frac{\hat{A} \hat{e} \cdot \hat{t}^{-2}}{\hat{A} \hat{e} \cdot \hat{n}} = \hat{n}^{-1} \cdot \hat{t}^{-2}.$

Відповідь: $n = 9,05 \cdot 10^{19} \hat{n}^{-1} \cdot \hat{t}^{-2}.$

Задачі для самостійного розв'язування

2.1. Прожектор випромінює пучок світла у вигляді конуса, кут розхилу якого $2\theta = 30^\circ$. Світловий потік Φ прожектора розподілений усередині конуса рівномірно і становить 80 клм. Визначити силу світла I прожектора.

2.2. Визначити середню силу світла $\langle I \rangle$ лампи потужністю $N = 120$ Вт, якщо її світлова ефективність $\eta=15$ лм/Вт.

- 2.3. Освітленість E_1 поверхні землі при кутовій висоті Сонця над горизонтом $\varphi_1=45^\circ$ дорівнює 80 лк. Визначити освітленість E_2 при кутовій висоті $\varphi_2=30^\circ$.
- 2.4. Лампа, сила світла якої $I=200$ кд, знаходиться на відстані $r=1,0$ м від екрану. На якій відстані позаду лампи слід поставити паралельно екрану дзеркало, щоб освітленість в центрі екрана збільшилась на $\Delta E = 50$ лк?
- 2.5. Над центром круглого стола радіуса $R=0,8$ м висить лампа. На якій висоті h слід підвесити лампу, щоб освітленість краю стола була максимальною?
- 2.6. В центрі квадратної кімнати площею $S=16\text{м}^2$ висить лампа. На якій висоті h від підлоги слід підвесити лампу, щоб освітленість в кутах кімнати була максимальною?
- 2.7. При фотографуванні предмет освітлюють лампою, яка знаходиться від нього на відстані $r_1= 1,5$ м. У скільки разів необхідно збільшити час експозиції, щоб отримати таке саме зображення, якщо лампу відсунути від предмета на відстань $r_2= 2,25$ м?
- 2.8. Над поверхнею розплавленої платини знаходиться непрозорий екран з круглим отвором радіусом $r= 4,0$ мм. Сила світла I , яке проходить через отвір в перпендикулярному до поверхні платини напрямку, складає 30кд. Визначити яскравість B відкритої поверхні платини.
- 2.9. Електроосвітлювальна лампа силою світла $I = 150\text{кд}$ знаходиться у матовому плафоні діаметром $d=10$ см, який поглинає $\eta=10\%$ світлового потоку, що випромінює лампа. Визначити світність R і яскравість B світильника.
- 2.10. У кінотеатрі на екран розміром 7×5 м з об'єктива кінопроектора падає світловий потік $\Phi = 3500$ лм. Коефіцієнт відбиття екрана $\rho=0,9$. Визначити освітленість E , світність R та яскравість B кіноекрана, якщо для нього виконується закон Ламберта.
- 2.11. Визначити кут падіння променя з повітря на поверхню води, якщо кут між заломленим та відбитим променями дорівнює 90° .
- 2.12. Визначити кут заломлення променя при переході з повітря у етиловий спирт, якщо кут між відбитим та заломленим променями 120° .
- 2.13. У дно водоймища глибиною $1,5$ м вбита паля, котра виступає з води на 30 см. Знайти довжину тіні від палі на дні водоймища при куті падіння сонячних променів 45° .
- 2.14. Водолаз визначив, що кут заломлення променя у воді дорівнює 32° . Під яким кутом до поверхні води падають промені світла?
- 2.15. На дні струмка лежить камінець. Хлопець хоче потрапити в нього палкою. Прицілившись, хлопець тримає палку у повітрі під кутом 45° . На якій відстані від камінця застромиться палка у дно струмка, якщо його глибина 32 см?

2.16. Граничний кут падіння при переході променя із скипидару в повітря дорівнює $41^\circ 50'$. Чому дорівнює швидкість розповсюдження світла в скипидарі?

2.17. Прямокутна скляна пластинка завтовшки 4,0 см має показник заломлення $n=1,6$. На її поверхню падає промінь світла під кутом $i=50^\circ$. Визначити зміщення променя після виходу з пластинки у повітря.

2.18. На дні посудини, заповненій водою до висоти $h=20$ см, знаходиться точкове джерело світла. Визначити найменший радіус дерев'яного кола, який слід помістити над джерелом на поверхні води, щоб світло не виходило з води. Показник заломлення води $n=1,33$.

2.19. На скляну пластинку з показником заломлення $n=1,6$ падає промінь світла. Визначити кут падіння променя, якщо кут α між відбитим та заломленим променями дорівнює 90° .

2.20. Пучок монохроматичного світла падає під кутом $i=45^\circ$ на бічну поверхню скляної призми, кут заломлення якої $\alpha=28^\circ$. Після заломлення та відбиття від другої грані, яка покрита шаром срібла, промінь повернувся назад у попередньому напрямку. Визначити показник заломлення матеріалу призми.

2.21. Визначити збільшення, яке утворюється вгнутих сферичним дзеркалом з радіусом кривизни $R=64$ см, якщо предмет знаходиться на відстані $a_1=-16$ см від дзеркала. Надати рисунок.

2.22. Коли предмет знаходиться на відстані $a_1=-2,0$ м від вгнутого сферичного дзеркала, його дійсне зображення знаходиться на відстані $a_2=0,5$ м від дзеркала. Де і яким буде зображення цього предмета, якщо його відсунути від дзеркала ще на 1 м? Надати рисунок.

2.23. Збиральну лінзу, виготовлену з скла ($n=1,6$), що має фокусну відстань у повітрі $F_n=12$ см, занурили у воду ($n_v=1,33$). Чому буде дорівнювати нове значення F_v її фокусної відстані?

2.24. Плоско-опукла лінза з радіусом кривизни $R=40$ см і показником заломлення $n=1,5$ дає зображення предмета збільшене вдвічі ($k=2$). Визначити відстані a_1 та a_2 предмета і зображення від лінзи. Надати рисунок.

2.25. Визначити радіуси кривизни поверхні лупи, які необхідні для того, щоб вона давала для нормального ока збільшення $k=5$. Показник заломлення скла, з якого зроблена лупа, $n=1,5$.

2.26. Предмет знаходиться на відстані $a_1=-40$ см від лінзи. При цьому відстань до уявного зображення предмета становить $a_2=-1,2$ м. До лінзи приклали іншу лінзу з оптичною силою $D=2,0$ дптр. Де і яким буде нове зображення предмета?

2.27. На мильну плівку ($n=1,33$) падає біле світло під кутом $\alpha=45^\circ$. При якій найменшій товщині плівки відбиті промені будуть мати жовтий колір ($\lambda=600$ нм)?

- 2.28. У деяку точку простору приходять когерентні промені з геометричною різницею ходу $1,2 \text{ мкм}$, довжина хвилі яких у вакуумі 600 нм . Визначити, що відбудеться в цій точці внаслідок інтерференції у повітрі; у воді; у склі з показником переломлення $1,5$.
- 2.29. Визначити відстань між когерентними джерелами білого світла, якщо на екрані відстань між червоною та фіолетовою смугами першого інтерференційного спектра дорівнює $5,6 \text{ мм}$. Відстань від джерел світла до екрану $2,6 \text{ м}$.
- 2.30. Яку найменшу товщину повинна мати пластинка, зроблена із матеріалу з показником переломлення $1,54$, щоб при її освітленні променями з довжиною хвилі $\lambda = 750 \text{ нм}$, перпендикулярними до поверхні пластинки, вона у відбитому світлі здавалась червоною?
- 2.31. Тонка плівка товщиною $0,50 \text{ мкм}$ освітлюється світлом з довжиною хвилі 590 нм . Якою буде здаватися ця плівка у світлі, яке проходить крізь неї, якщо показник заломлення речовини плівки $1,48$, а промені направлені перпендикулярно до поверхні плівки? Що буде трапитися з окраскою плівки, якщо її нахилити відносно променів?
- 2.32. Два когерентних джерела світла, відстань між якими $d = 0,30 \text{ мм}$, знаходяться на відстані $L = 2,5 \text{ м}$ від екрана, де спостерігається інтерференційна картина. Чому дорівнює довжина хвилі світла, якщо на відстані $\Delta x = 5,0 \text{ см}$ вміщується $10,5$ інтерференційних смуг?
- 2.33. При спостереженні інтерференції світла від двох уявних джерел монохроматичного світла з довжиною хвилі $\lambda = 520 \text{ нм}$ на екрані довжиною $\Delta x = 4,0 \text{ см}$ спостерігалось $8,5$ інтерференційних смуг. Визначити відстань L від джерел світла до екрана, якщо відстань між джерелами становить $d = 0,30 \text{ мм}$.
- 2.34. В досліді з інтерферометром Майкельсона для зміщення інтерференційної картини на $\Delta m = 500$ смуг дзеркало переміщують на відстань $\Delta l = 0,161 \text{ мм}$. Визначити довжину хвилі світла.
- 2.35. На тонкий скляний клин падає у напрямку нормалі до його поверхні монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 500 \text{ нм}$. Визначити кут між поверхнями клина, якщо відстань між сусідніми інтерференційними мінімумами $b = 3 \text{ мм}$. Показник заломлення скла $n = 1,6$.
- 2.36. Для визначення товщини волосу його поклали на скляну пластинку та зверху накрили іншою пластинкою. Відстань від волоса до лінії дотику пластинок, якій він паралельний, дорівнює 20 см . При освітленні пластинок червоним світлом ($\lambda = 750 \text{ нм}$) на відстані $1,0 \text{ см}$ зміщується 8 смуг. Визначити товщину волоса.
- 2.37. Визначити радіус кривизни лінзи, яка лежить на плоскій пластинці, якщо радіус четвертого світлого кільця Ньютона, що спостерігається у відбитому світлі, дорівнює $4,5 \text{ мм}$. Система освітлюється світлом з довжиною хвилі 520 нм , падаючим паралельно головній оптичній осі лінзи.

- 2.38. При освітленні кварцового клина з кутом $\alpha = 5,0''$ монохроматичними променями з $\lambda = 600\text{нм}$, перпендикулярними до його поверхні, спостерігаються інтерференційні смуги. Визначити ширину цих смуг.
- 2.39. На поверхню лінзи, показник заломлення якої $n_c = 1,6$, нанесли прозору плівку. Показник заломлення плівки $n_{пл} = 1,3$. Якою має бути найменша товщина d цієї плівки для максимального ослаблення відбитого світла у середній частині видимого спектра ($\lambda = 500\text{нм}$)?
- 2.40. Відстань Δr_{9-10} між десятим і дев'ятим темними кільцями Ньютона у відбитому світлі дорівнює $0,39\text{мм}$. Визначити відстань Δr_{2-1} між другим та першим темними кільцями.
- 2.41. Установка для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом, що падає по нормалі до поверхні пластинки. Спостереження проводять у відбитому світлі. Визначити довжину хвилі світла, якщо діаметр другого світлого кільця Ньютона $d_2 = 5\text{мм}$, а радіус кривизни лінзи $R = 6,4\text{м}$.
- 2.42. Установку для спостереження кілець Ньютона занурили у воду. Установка освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 640\text{нм}$, що падає нормально до поверхні пластинки. Діаметр другого світлого кільця у відбитому світлі $d_2 = 4,3\text{мм}$. Визначити радіус кривизни R лінзи. Показник заломлення води $n_v = 1,33$.
- 2.43. На пластину з щілиною, ширина якої $a = 0,05\text{мм}$, падає нормально монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 0,65\text{мкм}$. Визначити кут відхилу променів, який відповідає другому дифракційному максимуму.
- 2.44. На щілину, ширина якої $a = 20\text{мкм}$, падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла ($\lambda = 0,6\text{мкм}$). Знайти ширину зображення щілини на екрані, який віддалений від неї на відстань $l = 0,5\text{м}$. Шириною зображення вважати відстань між першими дифракційними мінімумами, які знаходяться по обидва боки від головного максимуму освітленості.
- 2.45. Визначити, постійну дифракційної ґратки, якщо при її освітленні світлом з довжиною хвилі 656нм максимум другого порядку спостерігається під кутом 15° .
- 2.46. Який найбільший порядок спектру можливо бачити за допомогою дифракційної ґратки, яка має 500 штрихів на 1мм , при освітленні її світлом з довжиною хвилі 720нм ?
- 2.47. Визначити довжину хвилі, падаючої на дифракційну ґратку, на кожний міліметр якої нанесено 400 штрихів. Дифракційна ґратка розташована на відстані 25см від екрану. При вимірюванні на екрані виявилось, що відстань між максимумами третього порядку, які спостерігаються по різні боки від нульового дорівнює $37,4\text{см}$.
- 2.48. На дифракційну ґратку, яка має $n = 250$ штрихів на один міліметр, падає нормально монохроматичне світло, довжина хвилі якого $\lambda = 700\text{нм}$.

Скільки максимумів можна спостерігати за допомогою цієї ґратки? Визначити кут дифракції, який відповідає останньому максимуму.

2.49. На дифракційну ґратку падає нормально паралельний пучок променів білого світла. Спектри третього і четвертого порядку частково накладаються. На яку довжину хвилі в спектрі третього порядку накладається фіолетова границя ($\lambda=400\text{нм}$) спектру четвертого порядку?

2.50. При освітленні дифракційної ґратки світлом $\lambda = 627\text{нм}$ відстань на екрані між центральним і першим максимумами склала $b = 39,6\text{см}$. Визначити період ґратки, якщо відомо, що відстань екрана від ґратки дорівнює $l = 120\text{см}$.

2.51. На дифракційну ґратку, яка має $n = 100$ штрихів на один міліметр, падає нормально монохроматичне світло. Труба спектрометра наведена на максимум третього порядку. Щоб навести трубу на другий максимум того самого порядку, її треба повернути на кут $\Delta\varphi = 16^\circ$. Визначити довжину світлової хвилі.

2.52. Визначити кутову дисперсію D_φ дифракційної ґратки для довжини хвилі $\lambda = 650\text{нм}$, якщо кут дифракції $\varphi = 15^\circ$.

2.53. Чи можливо за допомогою дифракційної ґратки з періодом $d=0,02\text{м}$ розділити у спектрі другого порядку дублет натрію $\lambda_1=589\text{нм}$ та $\lambda_2=589,6\text{нм}$? Ширина ґратки $l=20\text{м}$.

2.54. Яку найменшу роздільну здатність R повинна мати дифракційна ґратка, щоб розділити дві спектральні лінії калію ($\lambda_1=578\text{нм}$ і $\lambda_2=580\text{нм}$)? Чому має дорівнювати мінімальна кількість N штрихів у дифракційній ґратці, щоб лінії розділялись у спектрі другого порядку?

2.55. Період дифракційної ґратки $d = 4\text{мкм}$. Яка найменша різниця довжин хвиль $\delta\lambda$ двох ліній, що розділяються у жовтій частині ($\lambda=600\text{нм}$) в спектрі другого порядку? Довжина робочої частини ґратки $l = 2\text{см}$.

2.56. На поверхню кристалу KCl , віддаль між атомними площинами якого $d = 0,293\text{нм}$, падає рентгенівське випромінювання. Дифракційний максимум другого порядку спостерігається, якщо кут падіння $i=75^\circ 40'$. Обчислити довжину хвилі рентгенівського випромінювання.

2.57. Промінь світла відбивається від дна скляної посудини, заповненої водою. При якому куті падіння променя на поверхню води відбите світло є максимально поляризованим? ($n_{\text{в}}=1,33$, $n_{\text{ск}}=1,57$).

2.58. Чому дорівнює граничний кут повного внутрішнього відбиття та кут повної поляризації для випадку переходу променя із скла з показником заломлення $1,7$ у воду?

2.59. Визначити граничний кут при переході променя з рідини у повітря, якщо кут повної поляризації для цього випадку дорівнює $36^\circ 19'$.

2.60. Маємо кришталю, для якого граничний кут дорівнює $44^\circ 12'$. Визначити кут падіння променя всередині кришталю, при якому відбитий промінь буде повністю поляризованим.

- 2.61. Кут повної поляризації світла у разі його відбивання від деякої рідини становить $i_B = 50^\circ$. Визначити швидкість світла в рідині.
- 2.62. Кут повної поляризації світла i_B у разі його відбивання на межі повітря – рідина становить 55° . Визначити кут повного внутрішнього відбиття $i_{гр}$ променя на межі рідини з повітрям.
- 2.63. Кут між головними площинами поляризатора і аналізатора $\alpha_1 = 45^\circ$. У скільки разів зміниться інтенсивність світла при проходженні крізь систему, якщо кут зменшити до $\alpha_2 = 30^\circ$?
- 2.64. Два ніколі розташовані так, що кут між їхніми головними площинами дорівнює 60° . На ніколь – поляризатор падає природне світло. У скільки разів зменшиться інтенсивність світла, яке вийшло з ніколя – аналізатора? При проходженні кожного з ніколей утрати на відбиття та поглинання світла дорівнюють 10%.
- 2.65. У скільки разів η послаблюється світло, що проходить через два ніколі, площини яких утворюють кут $\alpha = 30^\circ$, якщо в кожному з них втрачається $k = 15\%$ падаючого на нього світлового потоку?
- 2.66. Інтенсивність природного світла яке проходить крізь поляризатор і аналізатор зменшується в 6 разів. Визначити кут α між площинами пропускання поляризатора і аналізатора.
- 2.67. Кут максимальної поляризації світла i_B при відбитті світла від кристала кам'яної солі дорівнює 57° . Визначити кут заломлення світла n .
- 2.68. У кювету цукрометру налито 5%-й розчин цукру, який повертає площину поляризації на кут $\varphi = 4,5^\circ$. Визначити концентрацію c_1 розчину цукру, який повертає площину поляризації на кут $\varphi_1 = 12^\circ$.
- 2.69. При проходженні світла крізь трубку довжиною $l_1 = 15\text{ см}$, яка містить 10%-й розчин цукру, площина поляризації світла повернулася на кут $\varphi_1 = 12,9^\circ$. В іншому розчині цукру, який налитий в трубку довжиною $l_1 = 10\text{ см}$, площина поляризації світла повернулася на кут $\varphi_2 = 10,3^\circ$. Визначити концентрацію c_2 другого розчину.
- 2.70. Між схрещеними ніколями розміщено кварцову пластинку товщини $d = 3,3\text{ мм}$. Визначити сталу обертання кварцу α для використаного монохроматичного світла, якщо поле зору стало максимально освітленим.
- 2.71. З віконця плавильної печі, площа поверхні якого $S = 9\text{ см}^2$, випускається випромінювання потужністю $P = 30\text{ Вт}$. Визначити температуру печі T , розглядаючи віконце як абсолютно чорне тіло.
- 2.72. Поглинальна здатність вугілля при температурі $T = 600\text{ К}$ дорівнює $a = 0,8$. Визначити 1) випромінювальну здатність R вугілля при цій температурі; 2) енергію, що випромінюється з поверхні вугілля площиною $S = 6\text{ см}^2$ за час $t = 15\text{ хв}$.
- 2.73. Температура вольфрамової спіралі лампи розжарювання $T = 2400\text{ К}$. Потужність, яку споживає лампа $P = 25\text{ Вт}$. Поглинальна здатність вольфраму, який можна вважати сірим тілом, становить $a = 0,3$. Визначити площу S поверхні спіралі. Втратами енергії знехтувати.

- 2.74. Муфельна піч споживає потужність $P = 1$ кВт. Температура її внутрішньої поверхні при відчиненому отворі площиною $S = 30$ см² становить $T = 1,2$ кК. Визначити, яка частина потужності розсіюється стінками, якщо отвір випромінює як абсолютно чорне тіло.
- 2.75. Максимум спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла припадає на довжину хвилі $\lambda_{\max} = 700$ нм. Площина випромінюючої поверхні тіла $S = 6$ см². Визначити потужність випромінювання.
- 2.76. Вважаючи Сонце абсолютно чорним тілом з максимумом спектральної випромінювальної здатності при $\lambda_{\max} = 550$ нм, визначити температуру T і випромінювальну здатність R_e Сонця; потік енергії Φ , що випромінюється Сонцем та масу Δm , яку втрачає Сонце щосекунди. (Радіус Сонця $r = 6,9599 \cdot 10^8$ м.
- 2.77. Температура абсолютно чорного джерела теплового випромінювання $T_1 = 2500$ К. Визначити температуру другого джерела, якщо відомо, що довжина хвилі, яка відповідає максимуму його спектральної випромінювальної здатності на $\Delta\lambda = 0,6$ мкм більша, ніж у першого джерела.
- 2.78. При нагріванні абсолютно чорного тіла довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної випромінювальної здатності, змінилася з $\lambda_{\max 1} = 650$ нм до $\lambda_{\max 2} = 550$ нм. У скільки разів при цьому зросла випромінювальна здатність (енергетична світність) R тіла? Як змінилась при цьому спектральна випромінювальна здатність $r_{\lambda_{\max}}$?
- 2.79. Нагріта куля радіусом $r = 8$ см випускає випромінювання потужністю $P = 1$ кВт. Визначити температуру кулі T , розглядаючи її як сіре тіло, поглинальна здатність якого $a = 0,2$.
- 2.80. Температура верхніх шарів зірки Сиріус $T = 10$ кК. Визначити потік енергії Φ , який випромінюється з поверхні площею $S = 1$ км² зірки. На яку довжину хвилі $\lambda_{\max}$ припадає максимум спектральної випромінювальної здатності?
- 2.81. Червона межа фотоефекту для калію складає $\lambda_0 = 0,62$ мкм. Визначити 1) величину гальмівного потенціалу U_r при дії на калій випромінювання з довжиною хвилі $3,1 \cdot 10^{-7}$ м; 2) роботу виходу електронів з калію.
- 2.82. Чому дорівнює довжина хвилі ультрафіолетового випромінювання, що падає на поверхню цинку, якщо швидкість фотоелектронів складає $v = 1300$ км/с? Червона межа фотоефекту для цинку $\lambda_0 = 310$ нм.
- 2.83. На платинову пластинку падає ультрафіолетове випромінювання, яке викликає фотоефект. Для припинення фотоефекту потрібно прикласти гальмівний потенціал $U_{r1} = 3,7$ В. Якщо платинову пластинку замінити пластинкою з іншого металу, гальмівний потенціал необхідно збільшити до $U_{r2} = 5,8$ В. Визначити роботу виходу електронів з цієї пластинки.
- 2.84. Ультрафіолетове випромінювання з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,30$ мкм при падінні на катод фотоелементу викликає потік електронів із швидкістю

$v_1=10^6$ м/с. Яку довжину хвилі λ_2 повинно мати випромінювання, щоб максимальна кінетична енергія електронів $T_{\max}$ дорівнювала $4 \cdot 10^{-19}$ Дж?

2.85. Яка доля енергії фотона при фотоелектрі витрачається на роботу, якщо червона межа фотоелектру $\lambda_0=367$ нм, а максимальна кінетична енергія фотоелектронів $T_{\max}=2$ еВ.

2.86. На поверхню метала падають монохроматичні промені з довжиною хвилі $\lambda = 160$ нм. Червона межа фотоелектру $\lambda_0= 200$ нм. Яка доля енергії фотона витрачається на надання електрону максимальної кінетичної енергії?

2.87. Робота виходу електронів з кадмію $A= 4,08$ еВ. Яку довжину хвилі має випромінювання, яке падає на кадмій, якщо при фотоелектрі максимальна швидкість фотоелектронів становить $v_{\max}= 6,8 \cdot 10^5$ м/с?

2.88. На поверхню вольфраму падають монохроматичні промені з довжиною хвилі $\lambda=210$ нм. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів $v_{\max}$, якщо поверхневий скачок потенціалу ΔU для вольфраму становить $4,56$ В.

2.89. Фотони з енергією $\varepsilon=2,9$ еВ виривають з поверхні метала, робота виходу якого $A=2,4$ еВ, електрони. Який максимальний імпульс $p_{\max}$ надається поверхні металу при вилітанні окремого електрону?

2.90. Червона межа фотоелектру для літію складає $\lambda_0= 520$ нм. Визначити 1) величину гальмівного потенціалу U_r при дії на калій випромінювання з довжиною хвилі 250 нм; 2) роботу виходу електронів з літію.

2.91. Визначити довжину хвилі фотону, ефективна маса якого дорівнює масі спокою електрона.

2.92. Визначити довжину хвилі фотону, імпульс якого дорівнює імпульсу електрона, який пройшов різницю потенціалів $U = 9,8$ В.

2.93. Знайти та порівняти енергію червоного фотона ($\lambda = 0,63$ мкм) з енергією γ -кванта з довжиною хвилі $\lambda = 10^{-12}$ м.

2.94. З якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб його імпульс дорівнював імпульсу фотона з довжиною хвилі $0,55$ мкм?

2.95. Знайти енергію та імпульс фотона з довжиною хвилі $0,55$ нм.

2.96. Визначити енергію та імпульс фотона з довжиною хвилі $2 \cdot 10^{-10}$ м.

2.97. Фотон з енергією $0,25$ МеВ розсіявся на вільному електроні. Енергія розсіяного фотона $0,22$ МеВ. Визначити кут розсіяння.

2.98. Фотон ($\lambda=0,05 \text{ \AA}$) розсіявся на вільному електроні під кутом 90° . Яку долю своєї енергії фотон передав електрону?

2.99. Якою була довжина хвилі λ_0 рентгенівського випромінювання, якщо при комптонівському розсіюванні цього випромінювання графітом під кутом $\theta = 50^\circ$ довжина хвилі розсіяного випромінювання склала $\lambda=25,0$ пм?

2.100. При ефекті Комптона фотон з енергією $\varepsilon_1 = 0,51$ МеВ був розсіяний на кут $\theta = 140^\circ$. Визначити енергію ε_2 розсіяного фотона.

- 2.101. Фотон з імпульсом $p_1 = 1,06 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ внаслідок ефекту Комптона був розсіяним на кут $\theta = 90^\circ$. Визначити імпульс розсіяного фотона.
- 2.102. На плоске дзеркало нормально падає випромінювання від CO_2 -лазера (з довжиною хвилі $10,6 \text{ нм}$), яке тисне на поверхню з силою $0,1 \text{ нН}$. Визначити кількість фотонів N , що падають щосекунди на дзеркало.
- 2.103. Монохроматичний пучок світла ($\lambda = 450 \text{ нм}$) падає по нормалі до поверхні і спричиняє тиск $P = 4,5 \text{ мкПа}$. Яка кількість фотонів попадає в одиницю часу на одиницю площі цієї поверхні? Коефіцієнт відбиття світла $\rho = 0,2$.
- 2.104. Потік монохроматичного випромінювання ($\lambda = 400 \text{ нм}$) падає по нормалі на плоску дзеркальну поверхню і тисне на неї з силою $F = 10^{-8} \text{ Н}$. Визначити кількість фотонів, які щосекунди падають на цю поверхню.
- 2.105. Потік монохроматичного випромінювання ($\lambda = 600 \text{ нм}$) падає по нормалі на плоску чорну поверхню і тисне на неї з силою $F = 10^{-8} \text{ Н}$. Визначити кількість фотонів, які щосекунди падають на цю поверхню.
- 2.106. Середня довжина хвилі випромінювання лампи розжарювання з вольфрамовою ниткою складає $\lambda = 1,2 \text{ мкм}$. Визначити кількість фотонів, які щосекунди випромінює лампа, потужність якої $P = 100 \text{ Вт}$.

Тестові завдання

- Відстань між предметом і поверхнею плоского дзеркала дорівнює 1 м . Якщо дзеркало відсунути від предмета ще на 1 м , відстань між предметом і його зображенням дорівнюватиме:
 - 2 м
 - 3 м
 - 4 м
 - 6 м
- Явище внутрішнього відбиття при падінні променя світла під кутом падіння i на границю двох прозорих діелектриків з показниками заломлення n_1 та n_2 спостерігається при виконанні умов:
 - $n_2 > n_1$, кут падіння i має довільне значення
 - $n_2 > n_1$, $i < i_0$
 - $n_2 < n_1$, $i < i_0$
 - $n_2 < n_1$, $i > i_0$

(i_0 - граничний кут повного внутрішнього відбиття)
- При переході світла з одного середовища в інше не змінюються
 - довжина хвилі, період коливань
 - швидкість поширення, частота
 - частота, довжина хвилі
 - частота, період коливань
- При переході монохроматичного променя світла з повітря в прозорий діелектрик з показником заломлення n , довжина хвилі
 - збільшується в n разів
 - зменшується в n разів
 - не змінюється.
 - збільшується в $\sqrt{n}$ разів

5. При відбиванні світла від середовища з меншою оптичною густиною ($n_1 < n_2$) фаза коливання
1. змінюється на π
 2. змінюється на $\pi/2$
 3. не змінюється
 4. змінюється на $\pi/4$
6. При відбиванні світла від середовища з більшою оптичною густиною ($n_1 < n_2$) оптична довжина шляху променя
1. змінюється на $\lambda/2$
 2. змінюється на λ
 3. не змінюється
 4. змінюється на $\lambda/4$
7. Який закон геометричної оптики порушується при інтерференції?
1. закон прямолінійного розповсюдження світла;
 2. закон незалежності світлових променів (принцип суперпозиції)
 3. закон відбиття
 4. закон заломлення
8. Світлові хвилі когерентні, якщо у них
1. співпадають амплітуди
 2. співпадають частоти
 3. постійний зсув фаз
 4. співпадають частоти і зсув фаз є постійним
9. Часова когерентність
1. визначається радіусом когерентності
 2. пов'язана зі ступеню монохроматичності хвилі
 3. пов'язана з довжиною хвилі світла
 4. залежить від кутового розміру джерела світла
10. Просторова когерентність
1. визначається радіусом когерентності
 2. пов'язана зі ступеню монохроматичності хвилі
 3. пов'язана з довжиною хвилі світла
 4. залежить від кутового розміру джерела світла
11. Два джерела світла обов'язково когерентні, якщо
1. обидва точкові
 2. є оптичними зображеннями одного джерела
 3. мають однакові частоти коливань
 4. випромінюють хвилі одного напрямку
12. Дві когерентні світлові хвилі однакової амплітуди збуджують у деякій точці простору коливання світлового вектору з різницею фаз, яка дорівнює $\delta\phi = 4\pi$. Інтенсивність світла у цій точці дорівнюватиме:
1. $I = I_1 + I_2$
 2. $I = 4I_1$
 3. $I = 0$
 4. $I = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$
13. Дві когерентні світлові хвилі однакової амплітуди збуджують у деякій точці простору коливання світлового вектору з різницею фаз, яка дорівнює $\delta\phi = 5\pi$. Інтенсивність світла у цій точці дорівнюватиме:
1. $I = I_1 + I_2$
 2. $I = 4I_1$
 3. $I = 0$
 4. $I = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$

14. Що буде спостерігатися у деякій точці простору, якщо оптична різниця ходу когерентних променів, які дають інтерференційну картину в цій точці, дорівнюватиме $\frac{3\lambda}{2}$?

1. максимум інтенсивності
2. мінімум інтенсивності
3. інтенсивності променів додаються
4. інтенсивності променів віднімаються

15. При спостереженні інтерференційної картини від двох джерел світла відстань d між ними збільшили удвічі. Як це відобразиться на ширині інтерференційної смуги (відстані між двома сусідніми максимумами)?

1. збільшиться у 2 рази
2. не зміниться
3. збільшиться у 4 рази
4. зменшиться у 2 рази

16. При спостереженні інтерференційної картини від двох джерел світла відстань l до екрану збільшили удвічі. Ширина інтерференційної смуги (відстані між двома сусідніми максимумами) при цьому

1. збільшиться у 2 рази
2. не зміниться
3. збільшиться у 4 рази
4. зменшиться у 2 рази

17. Інтерференційна картина спостерігається у білому світлі. У який колір буде окрашений центральний максимум?

1. білий колір
2. червоний колір
3. зелений колір
4. фіолетовий колір

18. У досліді Юнга колір точкових джерел світла при незмінних інших умовах змінили з зеленого на червоний. Відстань між сусідніми інтерференційними смугами на екрані

1. не змінилася
2. зменшилися
3. збільшилися
4. відстань не залежить від довжини хвилі

19. Тонка паралельна пластинка освітлюється паралельним пучком білого світла. Ані для жодної довжини хвилі не виконується умова максимуму. У який колір буде окрашена плівка?

1. білий колір
2. темна
3. червоний колір
4. фіолетовий колір

20. Установка для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом. Повітряний простір між лінзою і скляною пластинкою заповнили водою (показник заломлення $n=1,33$). При цьому радіуси кілець Ньютона

1. не змінилися
2. збільшилися в 1,33 рази
3. зменшилися в $\sqrt{1,33}$ рази
4. зменшилися в 1,33 рази

21. Мильний пузир має зелений колір (540нм) в околі найближчої до спостерігача точці. Якщо показник заломлення мильної води $n=1,35$, то мінімальна товщина пузиря дорівнює

1. 0,1мкм 2. 0,25мкм 3. 0,5мкм 4. 1мкм

22. Якщо на шляху світлового променя помістити скляну пластинку товщиною 1см з показником заломлення 1,5, оптична довжина шляху променя збільшиться на

1. 0,5мм 2. 1мм 3. 5мм 4. 10мм

23. До явищ, в яких проявляється хвильова природа світла, належить

1. явище фотоефекту
2. ефект Комптона
3. явище дифракції
4. явище інтерференції

24. Який закон геометричної оптики, який порушується при дифракції світла?

1. закон прямолінійного розповсюдження світла
2. закон незалежності світлових променів (принцип суперпозиції)
3. закон відбиття
4. закон заломлення світла

25. Вірними є положення (указати всі можливі варіанти):

1. дифракція – це огинання хвилями перепон та проникнення світла в область геометричної тіні
2. дифракційна картина є результатом інтерференції хвиль від окремих ділянок відкритої частини фронту хвилі
3. метод зон Френеля суперечить прямолінійному розповсюдженню світла в однорідному середовищі
4. метод зон Френеля не суперечить прямолінійному розповсюдженню світла в однорідному середовищі

26. На світу СД - диск має райдужне забарвлення. Яке фізичне явище і чому лежить в основі цього?

1. інтерференція світла
2. відбиття світла
3. дифракція світла
- 4 дисперсія світла

27. Хвилі, що прийшли у деяку точку простору від відповідних точок сусідніх зон Френеля мають різницю ходу

1. $\Delta = \lambda$
2. $\Delta = \lambda/4$
3. $\Delta = \lambda/2$
4. $\Delta = 0$

28. Метод зон Френеля

1. підтверджує прямолінійність розповсюдження світла в однорідному середовищі
2. суперечить прямолінійному розповсюдженню світла в однорідному середовищі
3. дозволяє оцінити амплітуду коливань в будь-якій точці дифракційної картини
4. дозволяє оцінити амплітуду коливань в центрі дифракційної картини

29. Якщо на шляху сферичного фронту хвилі поставити екран з отвором, який залишає відкритою тільки одну центральну зону Френеля, амплітуда коливань в центрі екрана дорівнюватиме A_1 . Амплітуда коливань A при повністю відкритому фронті хвилі дорівнює:

1. $A = A_1$
2. $A = A_1/2$
3. $A = 2A_1$
4. $A = A_1/4$

30. Отвір залишає відкритими дві зони Френеля, амплітуди коливань яких в центрі екрана дорівнюють A_1 і A_2 . Амплітуда коливань в центрі екрана дорівнює:

1. $A = 2A_1$
2. $A = 2A_2$
3. $A = A_1 + A_2$
4. $A = 0$

31. Отвір залишає відкритими три зони Френеля, амплітуди коливань яких в центрі екрана дорівнюють A_1 , A_2 і A_3 . Амплітуда коливань в центрі екрана дорівнює:

1. $A = A_1 + A_2 + A_3$
2. $A = A_1 + A_3$
3. $A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2}$
4. $A = 0$

32. В центрі дифракційної картини буде спостерігатися світла пляма при дифракції Френеля на круглому отворі, якщо він залишає відкритими

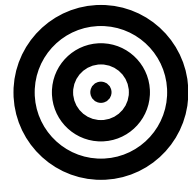
1. дві зони Френеля
2. чотири зони Френеля
3. шість зон Френеля
4. три зони Френеля

33. Непрозорий диск закриває 4 зони Френеля. Максимум в центрі екрану визначається половиною ... зони

1. другої
2. третьої
3. четвертої
4. п'ятої

34. Зображена на рисунку дифракційна картина може спостерігатися:

1. тільки за маленьким круглим екраном
2. тільки за маленьким круглим отвором
3. і за маленьким круглим екраном, і за маленьким круглим отвором
4. розмір отвору не впливає на картину, що спостерігається на екрані



35. На щілину нормально падає світло. Умову мінімуму при дифракції на щілині надає формула

1. $a \sin \varphi = \pm m \lambda$
2. $d \sin \varphi = \pm m \lambda$
3. $a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$
4. $d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$

(a – ширина щілини; d – постійна (період) ґратки)

36. На щілину нормально падає світло. Максимумам на екрані відповідає співвідношення

1. $a \sin \varphi = \pm m \lambda$
2. $d \sin \varphi = \pm m \lambda$
3. $a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$
4. $d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$

(a – ширина щілини; d – постійна (період) ґратки)

37. При нормальному падінні світла на дифракційну ґратку положення головних мінімумів на екрані надає формула

1. $a \sin \varphi = \pm m \lambda$
2. $d \sin \varphi = \pm m \lambda$
3. $a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$
4. $d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$

38. Умову спостереження головних максимумів при нормальному падінні світла на дифракційну ґратку надає формула

1. $a \sin \varphi = \pm m \lambda$
2. $d \sin \varphi = \pm m \lambda$
3. $a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$
4. $d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$

39. Масштаб дифракційної картини, отриманої за допомогою ґратки, при перекритті кожної другої щілини

1. не зміниться
2. збільшиться
3. зменшиться
4. не зміниться або збільшиться

40. На дифракційну ґратку падає нормально біле світло. В дифракційній картині, яка спостерігається, в спектрі одного порядку найбільш віддалені від центру смуги

1. червоного кольору
2. жовтого кольору
3. фіолетового кольору
4. блакитного кольору

41. На дифракційну ґратку падає нормально біле світло. В дифракційній картині, яка спостерігається, ближче до центру розташовані смуги

1. червоного кольору
2. зеленого кольору
3. фіолетового кольору
4. жовтого кольору

42. Дифракційна ґратка освітлюється білим світлом. Колір центрального максимуму при цьому

1. червоний
2. жовтий
3. фіолетовий
4. білий

43. Як зміниться дифракційна картина, що спостерігається на екрані, якщо щілину замінити дифракційною ґраткою? (Указати всі можливі варіанти).

1. зміниться умова головних мінімумів
2. зміниться умова головних максимумів
3. з'являться додаткові максимуми та мінімуми
4. інтенсивність головних максимумів збільшиться

44. Відношення роздільних здатностей дифракційної ґратки для спектрів третього та першого порядків дорівнює

1. $R_3/R_1 = 3$
2. $R_3/R_1 = 1$
3. $R_3/R_1 = 1/3$
4. $R_3/R_1 = 6$

45. За допомогою рентгеноструктурного аналізу можна визначити

1. міжплощинні відстані
2. кут ковзання
3. довжину хвилі випромінювання
4. порядок спектру

46. За допомогою рентгенівської спектроскопії можна визначити

1. міжплощинні відстані
2. кут ковзання
3. довжину хвилі випромінювання
4. порядок спектру

47. Поляризація світла доводить, що світло – це

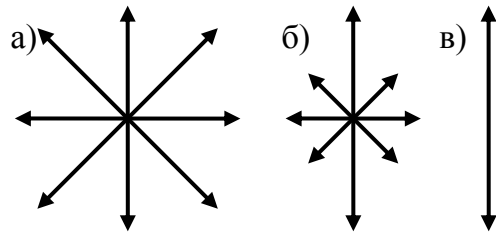
1. повздовжня хвиля
2. поперечна хвиля
3. потік заряджених частинок
4. потік нейтральних частинок

48. Поляризація можлива для хвиль

1. повздовжніх
2. поперечних
3. пружних
4. на поверхні рідини

49. Установити співвідношення між напрямом коливань вектора $\vec{E}$, який показаний на рисунку, та ступеню поляризації світла

1. лінійно поляризоване світло
2. частково поляризоване світло
3. природне світло



50. Ступінь поляризації P плоско поляризованого світла дорівнює

1. $P = 0$
2. $P = 0,5$
3. $P = 1,0$
4. $P = \infty$

51. Ступінь поляризації P природного світла дорівнює

1. $P = 0$
2. $P = 0,5$
3. $P = 1,0$
4. $P = \infty$

52. Максимально поляризованим при падінні на межу поділу двох діелектриків під кутом Брюстера є промінь (промені)

1. падаючий
2. відбитий
3. заломлений
4. відбитий та заломлений

53. Повністю поляризованим при падінні на межу поділу двох діелектриків під кутом Брюстера є промінь (промені)

1. падаючий
2. відбитий
3. заломлений
4. відбитий та заломлений

54. Кут повної поляризації (кут Брюстера) у випадку падіння променів на межу поділу двох середовищ буде найбільшим, якщо промені падають

1. з повітря на воду
2. з повітря на скло
3. з води на скло
4. зі скла на воду

Абсолютні показники заломлення дорівнюють: для повітря – 1; для води – 1,33; для скла – 1,5.

55. Промінь падає на межу поділу двох діелектриків під кутом Брюстера. Якщо i_A – кут падіння; i'_A – кут відбиття; r – кут заломлення, вірним є співвідношення:

1. $i_A + i'_A = 90^\circ$
2. $r + i_A = 90^\circ$
3. $i_A + i'_A = 180^\circ$
4. $i_A + i'_A + r = 90^\circ$

56. Явище подвійного променезаломлення виникає у кристалі, якщо він є

1. однорідним
2. ізотропним
3. анізотропним
4. прозорим

57. Промінь природного світла інтенсивністю I_0 проходить крізь поляризатор і аналізатор, осі яких є паралельними. Інтенсивність I світла, яке вийшло з аналізатора, дорівнюватиме

1. $I = I_0$
2. $I = 0,5I_0$
3. $I = 0$
4. $I = 2I_0$ (утратами на відбиття та поглинання знехтувати)

58. Промінь природного світла інтенсивністю I_0 проходить схрещені поляризатор і аналізатор. Інтенсивність I світла, яке вийшло з аналізатора, дорівнюватиме

1. $I = I_0$
2. $I = 0,5I_0$
3. $I = 0$
4. $I = 2I_0$ (утратами на відбиття та поглинання знехтувати)

59. Поляризатор і аналізатор розташовано під кутом $\alpha=45^\circ$. На поляризатор падає промінь природного світла інтенсивністю I_0 . Після проходження крізь систему інтенсивність дорівнюватиме:

1. $I=I_0$
2. $I=1/2I_0$
3. $I=1/4I_0$
4. $I=1/8I_0$ (утратами на відбиття та поглинання знехтувати)

60. Поляризатор і аналізатор розташовано під кутом $\alpha=60^\circ$ ($\cos 60^\circ = 1/2$). На поляризатор падає промінь природного світла інтенсивністю I_0 . Після проходження крізь систему інтенсивність дорівнюватиме:

1. $I=I_0$
2. $I=1/2I_0$
3. $I=1/4I_0$
4. $I=1/8I_0$

(утратами на відбиття та поглинання знехтувати)

61. Основною властивістю оптично активних речовин є

1. відбиття
2. заломлення
3. поворот площини поляризації
4. подвійного променезаломлення

62. Між схрещеними поляризаторами розташовано оптично активну речовину. На який кут ця речовина повернула площу поляризації світла, якщо картина на виході не змінилася?

1. 45°
2. 60°
3. 90°
4. 180°

63. Між схрещеними поляризаторами розташовано оптично активну речовину. На який кут повинна ця речовина повернути площу поляризації, щоб інтенсивність світла на виході збільшилась до максимальної?

1. 45°
2. 180°
3. 60°
4. 90°

64. Між паралельними поляризатором та аналізатором розташовано оптично активну речовину. На який кут повинна ця речовина повернути площу поляризації, щоб система не пропускала світло?

1. 45°
2. 90°
3. 180°
4. 60°

65. Максимальна інтенсивність світла, що пройшов крізь два поляризатора спостерігається, якщо кут між площинами поляризаторів дорівнює

1. 0°
2. 30°
3. 45°
4. 90°

66. Оптично ізотропні речовини стають анізотропними під дією

1. стиску або розтягу
2. електричного поля
3. гравітаційного поля
4. магнітного поля

67. Для отримання анізотропії використовують поляризацію діелектрика в

1. пристрої на основі ефекту Керра
2. пристрої на основі ефекту Коттона – Мутона
3. поляризаторі та аналізаторі
4. поляризаторі

68. Інтенсивність світла в залежності від шляху в речовині:
1. зменшується за експоненціальним законом
 2. прямо пропорційно зростає
 3. обернено пропорційно зменшується
 4. не змінюється.
69. Найбільший коефіцієнт заломлення для скла має
1. промінь зеленого світла
 2. промінь червоного світла
 3. промінь жовтого світла
 4. промінь фіолетового світла
70. Квантову структуру світла підтверджують явища
1. інтерференції і поляризації
 2. фотоефекту і ефекту Комптона;
 3. дифракції і поляризації
 4. дисперсії і інтерференції
71. При зменшенні температури абсолютно чорного тіла у два рази випромінювальна здатність R_e (інтегральна енергетична світність) його теплового випромінювання
1. зменшується у 2 рази
 2. збільшується у 4 рази
 3. збільшується у 8 разів
 4. зменшується у 16 разів
72. При зростанні температури тіла у два рази, інтегральна енергетична світність теплового випромінювання збільшується
1. у 2 рази.
 2. у 4 рази;
 3. у 16 разів
 4. у 8 разів
73. При зростанні температури абсолютно чорного тіла у два рази, випромінювальна здатність R_e збільшується
1. у 16 разів
 2. у 8 разів
 3. у 4 рази
 4. у 2 рази
74. У спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла максимум випромінюваної енергії змістився з червоної ($\lambda_1=780$ нм) до фіолетової ($\lambda_2=390$ нм) границі видимого спектра. Термодинамічна температура тіла
1. зменшилась удвічі
 2. збільшилась удвічі
 3. не змінилась
 4. збільшилась у 4 рази
75. Випромінювальна здатність R_e (енергетична світність) абсолютно чорного тіла залежить від:
1. температури
 2. площини випромінюючої поверхні
 3. часу випромінювання.
 4. довжини хвилі

76. При температурі T максимум спектральної випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла відповідає довжині хвилі λ_{m1} . При зростанні температури у 2 рази, довжина хвилі, що відповідає максимуму:

1. зменшиться у 2 рази
2. збільшиться у 2 рази
3. збільшиться у 4 рази
4. не зміниться

77. Найнижчу температуру мають зірки, колір яких

1. червоний
2. жовтий
3. оранжевий
4. блакитний.

78. Найвищу температуру мають зірки, колір яких

1. блакитний
2. червоний
3. оранжевий
4. жовтий

79. Струм насичення при зовнішньому фотоефекті залежить від:

1. довжини хвилі освітлювальних променів
2. частоти освітлювальних променів
3. інтенсивності освітлювальних променів.
4. усіх указаних величин

80. Робота виходу електронів з вольфраму, срібла, натрію і калію дорівнює відповідно 4,5 еВ; 4,7 еВ; 2,3 еВ; 2,0 еВ. При однаковій частоті світла найбільше значення максимальної кінетичної енергії будуть мати фотоелектрони, що вилетіли з

1. вольфраму
2. срібла
3. натрію
4. калію

81. Робота виходу електронів із літію, натрію, калію і цезію дорівнює відповідно 2,4еВ; 2,3еВ; 2,0еВ і 1,9еВ. Частота хвилі, що відповідає „червоній межі” фотоефекту має найменше значення для

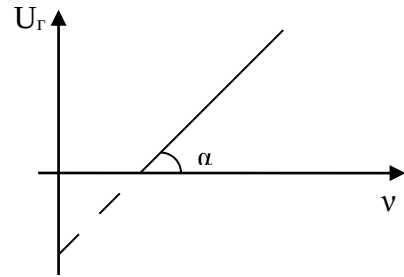
1. літію
2. натрію
3. калію
4. цезію

82. Червона границя зовнішнього фотоефекту залежить від

1. частоти світла
2. природи речовини
3. довжини хвилі променів
4. інтенсивності освітлювальних променів

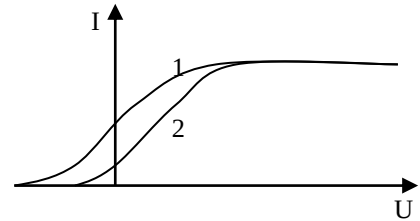
83. На рисунку приведена залежність гальмівної напруги від частоти світла, що отримана для деякого металу при дослідженні фотоелектру. При аналогічних дослідженнях на іншому металі нахил прямої:

1. зменшиться
2. збільшиться
3. нахил прямої не залежить від природи металу)
4. збільшиться або зменшиться (в залежності від природи металу)



84. На рисунку представлені дві вольт-амперні характеристики фотоелементу, які отримані при освітленні його світлом різної частоти. Меншій частоті хвилі відповідає

1. крива 1
2. крива 2
3. хід кривих не залежить від частоти променів
4. хід кривих не залежить від довжини хвилі променів



85. Кінетична енергія фотоелектронів при зовнішньому фотоелектрі на деякій речовині залежить від

1. частоти освітлювальних променів
2. величини світлового потоку
3. роботи виходу електрона
4. природи речовини, для якої спостерігається фотоелектр

86. Найменшу масу має квант світла:

1. фіолетового кольору ($\lambda=0,35\text{мкм}$)
2. зеленого кольору ($\lambda=0,5\text{мкм}$)
3. червоного кольору ($\lambda=0,7\text{мкм}$)
4. жовтого кольору ($\lambda=0,6\text{мкм}$)

87. Енергія кванта фіолетового світла ($\lambda=0,35\text{ мкм}$) порівняно з енергією кванта червоного світла ($\lambda=0,7\text{ мкм}$):

1. вдвічі менша
2. вдвічі більша
3. така сама
4. більша у 4 рази

88. Найбільшу масу має квант світла

1. фіолетового кольору ($\lambda=0,35\text{мкм}$)
2. зеленого кольору ($\lambda=0,5\text{мкм}$)
3. червоного кольору ($\lambda=0,7\text{мкм}$).
4. жовтого кольору ($\lambda=0,6\text{мкм}$)

89. При комптонівському розсіюванні рентгенівських променів зміна довжини хвилі $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ залежить від

1. кута розсіювання
2. довжини хвилі
3. атомного номеру речовини, на який відбувається розсіювання
4. маси атому речовини, на який відбувається розсіювання

90. Зміну довжини хвилі при комптонівському розсіюванні рентгенівських променів на речовині є результатом

1. електромагнітної взаємодії
2. гравітаційної взаємодії
3. непружної взаємодії рентгенівського кванту з валентним електроном
4. пружної взаємодії рентгенівського кванту з валентним електроном

91. При комптонівському розсіюванні рентгенівських променів інтенсивність зміщеної компоненти (λ) порівняно з незміщеною компонентою (λ_0) зі збільшенням атомного номера розсіювача

1. збільшується
2. зменшується
3. не змінюється
4. не залежить від атомного номера

92. При комптонівському розсіюванні рентгенівських променів інтенсивність зміщеної компоненти (λ) порівняно з незміщеною компонентою (λ_0) зі збільшенням кута розсіювання

1. збільшується
2. зменшується
3. не змінюється
4. не залежить від кута розсіювання

93. Світло з деякою об'ємною густиною енергії падає на поверхні з різними коефіцієнтами відбиття ρ_1 і ρ_2 , причому $\rho_2 > \rho_1$. Меншим є тиск світла

1. на першу поверхню
2. на другу поверхню
3. тиск однаковий
4. значення коефіцієнту не вплине на тиск

94. При ефекті Комптона кінетична енергія електронів віддачі буде найбільшою при куті розсіяння рентгенівських фотонів, який дорівнює

1. $\varphi = \frac{\pi}{2}$
2. $\varphi = 0$
3. $\varphi = \frac{\pi}{4}$
4. $\varphi = \pi$

95. При ефекті Комптона зміна довжини хвилі $\Delta\lambda$ буде найбільшою при куті розсіювання рентгенівських квантів

1. $\varphi = \frac{\pi}{2}$
2. $\varphi = 0$
3. $\varphi = \frac{\pi}{4}$
4. $\varphi = \pi$

96. При однаковій інтенсивності світла більшого тиску з боку світла зазнає:

1. сіра поверхня
2. чорна поверхня
3. дзеркальна поверхня
4. тиск однаковий

Розділ 3. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ

Тема: Корпускулярно-хвильовий дуалізм. Хвилі де-Бройля. Ймовірнісна інтерпретація квантових явищ. Співвідношення невизначеностей.

Квантовий стан. Хвильова функція. Принцип суперпозиції. Рівняння Шредінгера.

Одновимірні задачі. Частинка в нескінченній потенціальній ямі. Проходження частинки крізь потенціальний бар'єр. Гармонічний осцилятор.

Атом водню. Спектри. Принцип Паулі. Електронні оболонки.

Основні поняття і формули

Корпускулярно-хвильовий дуалізм. Хвилі де Бройля. Співвідношення невизначеностей.

• **Гіпотеза де Бройля:** будь-якій частинці речовини масою m , яка рухається зі швидкістю v , можна зіставити хвильовий процес, для якого енергія і імпульс збігаються з тими значеннями енергії та імпульсу частинки, які визначаються за теорією відносності. Тобто, рухомій частинці відповідає певна частота та довжина хвилі.

Зв'язок довжини хвилі де Бройля λ частинки з її імпульсом p визначається формулою де Бройля:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (3.1)$$

де p – імпульс фотона; m – маса частинки; v – її швидкість; h – стала Планка; $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

• Своєрідність властивостей мікрочастинок проявляється в тому, що не для всіх змінних при вимірюваннях можна отримати точні значення. Існують пари величин, які не можуть одночасно бути виміряними точно.

Найбільш важливими є два співвідношення невизначеностей.

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга для координат та імпульсів:

$$|\Delta x| \cdot |\Delta p_x| \geq \hbar, \quad (3.2)$$

де Δx – невизначеність координати x_i ; Δp_x – невизначеність відповідної їй проекції імпульсу.

Співвідношення невизначеностей для енергії та часу:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (3.3)$$

де ΔE – невизначеність енергії квантового стану; Δt – час життя системи у цьому стані.

• Стан мікрочастинки характеризує комплексна функція координат і часу $\Psi(\vec{r}, t)$, яка має назву хвильової функції (Ψ -функції). Фізичний зміст хвильової функції:

Квадрат модуля хвильової функції $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ для будь-якої точки простору, помножений на елементарний об'єм dV , який включає цю точку, визначає ймовірність знаходження частинки в межах цього об'єму:

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \Psi^* dV, \quad (3.4)$$

де $|\Psi|^2$ має зміст густини ймовірності; Ψ^* – функція, комплексно спряжена з Ψ .

Властивості хвильової функції (випливають з її фізичного змісту):

- однозначна
- неперервна
- плавна (похідна не має розривів)
- кінцева
- задовольняє умові нормування: $\int_V |\Psi|^2 dV = 1.$ (3.5)

• Основне рівняння нерелятивістської квантової механіки для хвильової функції – **рівняння Шредінгера**.

У випадку **стаціонарних станів**, тобто станів, у яких усі фізичні параметри, що спостерігаються, не змінюються з часом, хвильову функцію можна представити у вигляді:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3.6)$$

де частота ω є незмінною, а функція $\psi(\vec{r})$ не залежить від часу. $\psi(\vec{r})$ може бути визначена з рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0, \quad (3.7)$$

де Δ – оператор Лапласа ($\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2}$), m – маса частинки, E – її енергія, $U(\vec{r})$ – функція, яка у випадку стаціонарних станів має зміст потенціальної енергії частинки.

Енергія частинки E входить у рівняння у якості параметру. У теорії диференціальних рівнянь доведено, що рівняння типу (3.7) має розв'язки, які задовольняють вище зазначеним стандартним умовам лише при видраних значеннях параметру E . Ці вибрані значення E називають **власними значеннями енергії**, а розв'язки (значення хвильової функції), що ним відповідають – власними хвильовими функціями. Сукупність власних значень утворює **спектр величини** (у даному випадку – енергії). Якщо сукупність утворює дискретну послідовність, **спектр** називають

дискретним, якщо – неперервну послідовність, спектр – **неперервний** або **суцільний**.

Таким чином, з основних положень квантової механіки випливає квантування (дискретність) енергії.

Атом водню. Спектри. Електронні оболонки.

● Основною властивістю квантових систем є те, що вони мають дискретну структуру енергетичного спектру. У спектрі найменший рівень зветься основним, а всі інші збудженими.

При переході квантової системи з одного стаціонарного стану в інший випромінюється (поглинається) квант енергії, яка дорівнює різниці енергій відповідних стаціонарних станів:

$$h\nu = E_n - E_k, \quad (3.8)$$

(E_n та E_k - енергії стаціонарних станів атому до та після випромінювання (поглинання)).

Спектри випромінювання атомів хімічних елементів, що знаходяться у газоподібному стані (гази, пари металів), мають лінійчатий характер. Найбільш простий і досліджений спектр має атом водню. Довжини хвиль його спектральних ліній можуть бути обчислені за формулою Бальмера – Ритца (узагальненою формулою Бальмера):

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right). \quad (3.9)$$

Константа $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ має назву сталої Ридберга; λ – довжина хвилі спектральної лінії; n – номер енергетичного рівня атома, на який переходить електрон при випромінюванні; k – номер рівня, з якого відбувається перехід.

Серія ліній утворюється при переходах електронів на енергетичний рівень із фіксованим значенням n з усіх вищих рівнів ($k > n$). Перша лінія кожної серії відповідає мінімальному значенню n та має максимальну довжину хвилі. Границі кожної серії відповідає $n = \infty$.

Серіальна формула для довжин хвиль ліній спектру воднеподібних іонів

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (3.10)$$

де Z – номер елемента в періодичній таблиці елементів Менделєєва.

Повна енергія електрона в атомі водню або воднеподібному атомі (атомі із зарядовим числом Z , внаслідок іонізації якого, в електронній оболонці залишився тільки один електрон):

$$E_n = -\frac{Z^2 m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.11)$$

З формули випливає, що електрон у атомі може мати тільки ті дискретні значення енергії, що визначаються квантовим числом n , яке називають головним квантовим числом.

Випромінюваний квант енергії дорівнює

$$h\nu = E_n - E_k = \frac{Z^2 m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad n > k. \quad (3.12)$$

k та n – номери орбіт (тобто квантових рівнів енергії), між якими відбувається перехід електрона.

$\nu = \frac{c}{\lambda}$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі). Тому для атома водню ($Z=1$) або воднеподібного атома ($Z>1$) можна записати:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2 m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right). \quad (3.13)$$

З порівняння формули (7.8) при $Z=1$ із формулою (7.5) випливає, що останній вираз є аналогічним узагальненій формулі Бальмера, а стала Рідберга дорівнює

$$R = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c}. \quad (3.14)$$

Енергія кванту, що випромінюється атомом водню при переході електрону з однієї орбіти на другу, можна представити у виді

$$\epsilon = E_i \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (3.15)$$

де $E_i = 13,6$ еВ – енергія іонізації атома водню.

● Частоти характеристичного рентгенівського випромінювання визначаються законом Мозлі:

$$\sqrt{\nu} = a(Z - b), \quad (3.16)$$

де

$$a = \sqrt{Rc \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)}, \quad (3.17)$$

b – стала екранування, яка сильно залежить від серії (числа n) і слабо – від лінії даної серії (числа k); Z – порядковий номер елемента (заряд ядра в одиницях елементарного заряду); R – стала Рідберга.

Відповідно довжина хвилі характеристичного рентгенівського випромінювання може бути визначена за формулою Мозлі:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - b)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right). \quad (3.18)$$

Короткохвильова границя $\lambda_{\min}$ суцільного рентгенівського спектру (гальмівне випромінювання) визначається формулою

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}, \quad (3.19)$$

де e – заряд електрона; U – різниця потенціалів, яка прикладена до трубки.

• Розглянемо фізичні властивості квантових систем. Квантовий стан характеризується дискретними значеннями таких основних фізичних величин, як енергія, момент імпульсу і т. ін.

Квантовий стан електрона в атомі залежить від відстані до ядра r і характеризується чотирма квантовими числами :

n – головне квантове число, визначає енергію E_n електрона в атомі, $n=1,2,3,\dots$;

l – орбітальне квантове число, визначає механічний орбітальний момент імпульсу електрона L :

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}. \quad (3.20)$$

При заданому головному квантовому числі n приймає значення: $l = 0, 1, \dots, n-1$;

m_l – магнітне квантове число, визначає проекцію моменту імпульсу на фізично виділений напрямок:

$$L_z = \hbar m_l. \quad (3.21)$$

При заданому квантовому числі l приймає значення: $m_l = -l, -l+1, \dots, -1, 0, +1, \dots, l-1, l$.

m_s – магнітне спінове квантове число, визначає проекцію спінового моменту імпульсу електрона на фізично виділений напрямок:

$$L_{sz} = \hbar m_s. \quad (3.22)$$

Для електрона (а також протона і нейтрона) спінове квантове число $s = \frac{1}{2}$, а m_s може приймати значення: $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

Розподіл електронів в атомі за стаціонарними станами відбувається згідно з принципом Паулі, за яким в атомі не може бути двох електронів, які знаходяться у двох однакових стаціонарних станах, що визначаються однаковим набором чотирьох квантових чисел: n, l, m_l, m_s .

Методичні вказівки.

1. У багатьох задачах даної теми розглядаються спектри атомів гідрогену та гідрогеноподібних іонів (тобто іонів, які мають тільки один електрон: $\text{He}^+, \text{Li}^{++}$ і т. ін.). Для того, щоб визначити довжину хвилі, частоту або енергію поглинутих або випромінених атомами квантів енергії за формулами (3.10) – (3.15) необхідно, перш за все, за умовою задачі визначити числа n та k , які входять до цих формул. Так для гідрогену числу $n=1$ відповідає ультрафіолетова серія (серія Лаймана), $n=2$ – видима

серія (серія Бальмера), $n=3$ – перша інфрачервона серія (серія Пашена), $n=4$ – друга інфрачервона серія (серія Брекета), $n=5$ – третя інфрачервона серія (серія Пфунда). Число k можна представити у вигляді $k = n + N$, де N – номер спектральної лінії в серії, взятий у порядку зменшення довжини хвилі. Наприклад, для третьої лінії в серії Бальмера $n=2$, $k = 2+3 = 5$.

2. При обчисленні частоти характеристичних рентгенівських променів за законом Мозлі слід мати на увазі, що спектральні серії позначають так само, як електронні шари, перехід електронів на кожний з яких викликає дане випромінювання. Наприклад L-серія обумовлена переходом електронів на L-шар. При тому серіям (електронним шарам) K, L, M, N у формулі (3.17) відповідають квантові числа n , які дорівнюють 1, 2, 3, 4. Число k , як і при визначенні спектру атома водню, визначається за формулою $k = n + N$, де N – номер спектральної лінії в даній серії. Лінії серії записують у порядку зменшення довжин хвиль за допомогою індексів $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Наприклад, друга лінія L-серії записується у вигляді L_{α} ; у цьому випадку $n = 2$, $k = 2+2 = 4$.

Стала екранування $b = 1$ для лінії K_{α} і $b > 1$ для інших ліній цієї серії. При наближених розрахунках величину b вважають однаковою для всіх ліній серії. $b \approx 1$ для серії K і $b \approx 7,5$ для серії L.

3. При розв'язуванні задач про хвильові властивості частинок необхідно розрізняти випадки класичних і релятивістських частинок. (див. методичні вказівки до розділу 2, а також формули (2.3.18)- (2.3.22). Притому, у всіх випадках руху електронів в атомах релятивістськими ефектами можна знехтувати, оскільки кінетична енергія електрона у цьому випадку не перевищує декількох електрон-вольт.

За допомогою співвідношень невизначеностей (3.2) можна розв'язувати задачі двох типів:

а) визначення найменшого значення однієї з двох невизначеностей $\Delta x, \Delta p_x$ при заданому значенні другої. У цьому випадку у формулі (3.2) користуються знаком рівності;

б) визначення найменшого значення самих величин, а саме, лінійних розмірів області L , в якій знаходиться частинка або найменшого значення її імпульсу p (або зв'язаного з ним значення кінетичної енергії).

У цьому випадку вважають, що шукана величина не може бути меншою за найменшу невизначеність при її вимірюванні, тобто у якості мінімальних значень величини використовують їх мінімальну невизначеність: $L_{\min} \approx \Delta x_{\min}$, а $p_{\min} \approx \Delta p_{\min}$.

У правій частині формул (3.1), (3.2), які надають співвідношення невизначеностей, в залежності від уявного експерименту, на аналізі якого записане співвідношення, замість $\hbar$ може використовуватись h або $\hbar/2$, що не впливає на порядок величин, які визначаються за допомогою цих формул.

4. Визначення хвильової функції мікрочастинок пов'язано з розв'язанням рівняння Шредінгера для стаціонарних станів (3.7), яке залежить від функції $U(x, y, z)$. Для уникнення математичних труднощів, які виникають при розв'язуванні рівняння у загальному випадку, в курсі загальної фізики, за звичаєм розглядають одновимірні задачі, коли $U = U(x)$ та стрибкоподібно змінюється на границях обмеженої області простору, в якій знаходиться частинка.

Розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами, до яких відноситься рівняння Шредінгера, містять сталі, для визначення яких використовують властивості хвильової функції – її неперервність та плавність (неперервність її першої похідної). Крім того, хвильова функція повинна задовольняти умові нормування (3.5), яке для

одновимірного випадку має вигляд:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 3.1. Визначити енергію фотона, який випромінюється при переході електрона в атомі гідрогену з третього енергетичного рівня на перший.

Розв'язання.

$k = 3$		Енергія фотона, який випромінюється при переході електрона в атомі гідрогену з одного енергетичного рівня на інший визначається різницею енергій стаціонарних станів електрона до (E_k) та після переходу (E_n) :
$n = 1$		
$E - ?$		

$$h\nu = E_k - E_n \quad (1)$$

За борівською моделлю, ядро атома нерухоме, тому повна енергія електрона є сумою кінетичної енергії обертання електрона T і потенціальної U енергії взаємодії електрона з ядром

$$E = T + U,$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}; \quad U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n};$$

Тоді
$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}. \quad (2)$$

Визначимо значення E на довільному енергетичному рівні. Для цього в рівняння (2) підставимо вираз для значення радіуса електронної орбіти r_n

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2},$$

де r_n – радіус n -ї орбіти, m_e – маса електрона, e – заряд електрона, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала, n – порядковий номер орбіти, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Одержуємо

$$E = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \quad (3)$$

Тоді енергія випроміненого фотона

$$E = E_{ek} - E_{en} = -\frac{1}{k^2} \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} + \frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} = -\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (4)$$

Із формул (1) та (4) випливає, що енергії повної іонізації атома гідрогену відповідає вираз

$$E_0 = hv = -\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1^2} \right) = \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \quad (5)$$

$$\text{Тоді} \quad E = E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (6)$$

де $E_0 = 2,18 \cdot 10^{-18}$ Дж = 13,6 еВ – енергія повної іонізації атома гідрогену

Підставив числові значення, дістанемо

$$E = 2,18 \cdot 10^{-18} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1,94 \cdot 10^{-18} \text{ (Дж)}$$

Відповідь: $E = 1,94 \cdot 10^{-18}$ Дж = 12,12 еВ.

Приклад 3.2. Визначити частоту світла, яке випромінюється атомом гідрогену, при переході електрона на енергетичний рівень з головним квантовим числом $n=2$, якщо радіус орбіти електрона після переходу змінився у 9 разів.

Розв'язання.

$\left. \begin{array}{l} n=2 \\ \frac{r_n}{r_k} = \frac{1}{9} \\ v - ? \end{array} \right $	Частота фотона, що випромінюється атомом гідрогену при переході з однієї орбіти на іншу, дорівнює $v = R_1 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (1)$
---	---

де $R_1 = R_c = 3,29 \cdot 10^{15}$ Гц – стала Рідберга, n – номер орбіти, на яку переходить електрон, k – номер орбіти, з якої переходить електрон.

Боровські радіуси орбіт визначаються за формулою

$$r_n = n^2 \frac{h^2\epsilon_0}{\pi m_e e^2} \quad (2)$$

звідки випливає, що радіуси орбіт електрона в атомі гідрогену пропорційні n^2 . Тоді

$$\frac{n^2}{k^2} = \frac{r_n}{r_k} = \frac{1}{9}$$

З урахуванням (1) одержуємо

$$\nu = \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{n^2}{k^2} \right).$$

Підставив числові значення, дістанемо

$$\nu = 3,29 \cdot 10^{15} \tilde{n}^{-1} \left(1 - \frac{1}{9} \right) \frac{1}{4} = 0,73 \cdot 10^{15} (\tilde{n}^{-1})$$

Відповідь: $\nu = 0,73 \cdot 10^{15}$ Гц.

Приклад 3.3. Визначити мінімальну частоту фотону, який може бути поглиняним атомом гідрогену, що знаходиться в основному стані.

Розв'язання.

Поглинаючи фотон, атом гідрогену переходить з основного стану з енергією E_1 у збуджений стан з енергією E_n . Згідно другому постулату Бора, енергія поглиненого фотона дорівнює

$$h\nu = E_n - E_1$$

Частота фотону буде мінімальною, якщо атом перейде в перше збуджений стан з енергією E_2 , тобто

$$h\nu_{\min} = E_2 - E_1.$$

Енергія атома водню

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8h^2 \epsilon_0^2}$$

Звідки, за Бором,

$$\nu_{\min} = -\frac{me^4}{8h^3 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

підставляючи числові значення, отримаємо:

$$\nu_{\min} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,6)^4 (10^{-19})^4}{8(6,6)^3 (10^{-34})^3 (6,85)^2 (10^{-12})^2} = 2,45 \cdot 10^{15}$$

$$[\nu] = \frac{\tilde{A} \tilde{e}^4 \cdot \tilde{h}^2}{\tilde{A} \tilde{e}^3 \cdot \tilde{n}^2 \cdot \tilde{O}^2} = \frac{\tilde{e} \tilde{h}^2}{\tilde{n}^2 \cdot \tilde{n} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{E} \tilde{e}} = \frac{1}{\tilde{n}}.$$

Відповідь: $\nu_{\min} = 2,45 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$.

Приклад 3.4. Визначити потенціал іонізації атома гідрогену.

Розв'язання.

Потенціал іонізації U_i атома визначається рівнянням

$$eU_i = A_i \quad (1)$$

де A_i – робота видалення електрона з орбіти під номером i на нескінченність. Для атома гідрогену, який знаходиться в основному стані

($k=1$). На підставі закону збереження енергії, дискретні значення якої визначаються формулою

$$E = E_n = -\frac{m}{2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 h} \right)^2 \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

ця робота дорівнює

$$A_i = E_\infty - E_1 = \frac{m}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 h} \right)^2 \quad (2)$$

Із (1) та (2) випливає

$$U_1 = \frac{m}{2} \frac{e^3}{(4\pi\epsilon_0 h)^2}$$

$$U_i = \frac{1,6735 \cdot 10^{-27}}{2} \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^3}{(4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12})^2} \cdot \frac{1}{(1,05 \cdot 10^{-34})^2} = 13,6(\text{Å})$$

Відповідь: $U_i = 13,6 \text{ Å}$.

Приклад 3.5. Визначити борівський радіус другої орбіти атома гідрогену та швидкість електрона на цій орбіті.

$n = 2$	Розв'язання.
$r_2, v_2 - ?$	Згідно борівській теорії електрон обертається навколо нерухомого ядра і радіус електронної орбіти та швидкість електрона на цій орбіті пов'язані співвідношенням

$$m_e v_n r_n = \frac{nh}{2\pi}, \quad (1)$$

де r_n – радіус n -ї орбіти, v_n – швидкість електрона на цій орбіті, m_e – маса електрона, $m_e v_n r_n$ – момент імпульсу електрона на цій орбіті, n – головне квантове число, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Сила взаємодії між електричними зарядами ядра і електрона надає електрону доцентрового прискорення. За другим законом Ньютона

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}. \quad (2)$$

Сумісно розв'язав рівняння (1) і (2) відносно r_n , отримаємо

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}, \quad (3)$$

Підставив числові значення, дістанемо

$$r_2 = 2^2 \cdot \frac{8,85 \cdot 10^{-12} (6,63 \cdot 10^{-34})^2}{3,14 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})} = 2,13 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Перевіряємо одиницю вимірювання:

$$[r] = \frac{(\hbar \cdot \tilde{n})^2 \cdot \hat{O} \cdot \hat{i}^{-1}}{\hbar \cdot \hat{E} \cdot \tilde{e}^2} = \frac{\hbar^2 \cdot \tilde{n}^2 \cdot \hat{E} \cdot \hat{i}}{\hbar \cdot \hat{E} \cdot \tilde{e}^2 \cdot \hat{A} \cdot \hat{i}} = \frac{\hbar \cdot \tilde{n}^2}{\hat{e} \cdot \hat{i}} = 1.$$

Із рівняння (1) одержуємо вираз для швидкості електрона на n-ій орбіті

$$v_n = \frac{nh}{2\pi m_e r_n} = \frac{e^2}{2nh\epsilon_0}. \quad (4)$$

Перевіряємо одиницю вимірювання

$$[v] = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{Ф} \cdot \text{м}^{-1}} = \frac{\text{Кл}^2}{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{Кл} \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Зробивши обчислення, отримуємо значення швидкості електрона на другій

орбіті:
$$v_2 = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 1,09 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

Відповідь: $v_2 = 1,09 \text{ Мм/с}$

Приклад 3.6. Знайти довжину хвилі де Бройля електрона, який має кінетичну енергію $T = 5 \text{ MeV}$.

$T = 5 \text{ MeV}$	Розв'язання Довжина хвилі де Бройля частинки з імпульсом p надається формулою (3.1):
$E_0 = 0,51 \text{ MeV}$	
$p; \lambda - ?$	

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Таким чином, для розв'язання задачі треба знайти зв'язок між релятивістським імпульсом (бо кінетична енергія електрона за умовою задачі більше, ніж енергія спокою, яка дорівнює $0,51 \text{ MeV}$) електрона та його кінетичною енергією.

Релятивістський імпульс пов'язаний з повною енергією частинки E формулою:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}, \text{ звідси } p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2E_0)},$$

де було враховано, що $E - E_0 = T$ та $E + E_0 = T + 2E_0$.

Для чисельних розрахунків енергію треба виразити у джоулях:

$$E_k = 5 \text{ MeV} = 5 \cdot 10^6 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 8,00 \cdot 10^{-13} \text{ Дж};$$

$$E_0 = 0,51 \text{ MeV} = 0,82 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Тоді отримуємо для імпульсу

$$p = \frac{\sqrt{8,00 \cdot 10^{-13} (8,00 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 0,82 \cdot 10^{-13})}}{3 \cdot 10^8} = 2,93 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м/с},$$

а для довжини хвилі де Бройля
$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{2,93 \cdot 10^{-21}} = 2,26 \cdot 10^{-13}$$

Відповідь: $p = 2,93 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м/с}; \lambda = 22,6 \text{ пм}.$

Приклад 3.7. Кінетична енергія електрона 1,02MeB. У скільки разів зміниться довжина хвилі де Бройля, якщо кінетична енергія електрона зменшується удвічі.

$\begin{array}{l} T_1=1,02\text{MeB} \\ \frac{\dot{O}_1}{T_2}=2 \\ \hline \lambda_2/\lambda_1 - ? \end{array}$	Розв'язання $\lambda = \frac{h}{p}; \quad p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T+2E_0)}; \quad E_0 = m_0 c^2 = 0,511\text{MeB};$ $p_1 = \frac{1}{c} \sqrt{T_1(T_1+2E_0)}; \quad p_2 = \frac{1}{c} \sqrt{T_2(T_2+2E_0)};$
--	--

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1(T_1+2E_0)}{T_2(T_2+2E_0)}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{T_1+2E_0}{T_2+2E_0}} = \sqrt{2 \cdot \frac{2(T_1+2E_0)}{(T_1+4E_0)}} = 2 \sqrt{\frac{T_1+2E_0}{T_1+4E_0}}.$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2 \sqrt{\frac{1,02+2 \cdot 0,51}{1,02+4 \cdot 0,51}} = 2 \cdot 0,816 = 1,63 (\text{рази})$$

Відповідь: збільшується у 1,63 рази.

Приклад 3.8. Чи можна говорити про траєкторію руху електронів у електронно-променевої трубі, якщо електрони рухаються зі швидкістю, визначеною з точністю до 0,01%?

Розв'язання.

Знайдемо невизначеність швидкості за умовою задачі:

$$\Delta v_x = v_x \cdot 0,0001 = 10^6 (\text{і} / \text{ñ}).$$

Обчислимо невизначеність координати, використовуючи співвідношення невизначеностей Гайзенберга:

$$\Delta x \cdot m \Delta v_x = h.$$

Звідки
$$\Delta x = \frac{h}{m \Delta v_x}$$

$$\Delta x = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} 10^6} = 7,28 \cdot 10^{-8} (\text{і}).$$

$$[\Delta x] = \frac{\text{Å} \cdot \text{ñ} \cdot \text{ñ}}{\text{ê} \cdot \text{î}}.$$

Відповідь: Отримане значення невизначеності координати електрона $\Delta x = 7,28 \cdot 10^{-8} (\text{і})$ свідчить про те, що поняття траєкторії можна застосовувати до руху електрона в електронно-променевій трубі.

Приклад 3.9. Чому дорівнює розмір ядра, оцінений за співвідношенням невизначеностей, якщо прийняти, що енергія нуклона у ядрі порядку 8MeV?

Розв'язання

Співвідношення невизначеностей для координати та імпульсу має вигляд: $\Delta x \Delta p \geq \hbar$. Припустимо, що нуклон у ядрі знаходиться в області з невизначеністю $\Delta x = R/2$, тоді $R \geq 2\hbar/\Delta p$.

Фізично розумна невизначеність імпульсу не повинна перевищувати значення самого імпульсу. Імпульс пов'язаний з кінетичною енергією співвідношенням: $p = \sqrt{2mE_{\text{кін}}}$. Таким чином

$$R_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mE_{\text{єзї}}}}$$

$$R_{\min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13}}} = 3,2 \cdot 10^{-15} \text{ (м)}$$

Відповідь: $R_{\min} = 3 \cdot 10^{-15} \text{ м}$.

Приклад 3.10. Знайдіть відношення невизначеностей швидкості електрона та протона, якщо їх координати визначені з точністю до 10^{-10} м .

Розв'язання

За співвідношенням невизначеностей $\Delta p \Delta x \geq \hbar$. (1)

Виразуємо невизначеність імпульсу Δp через невизначеність швидкостей частинок:

$$\Delta p = m \Delta v. \quad (2)$$

З (1) і (2) маємо:

$$m \Delta v \Delta x \geq \hbar.$$

Таким чином, шукане відношення дорівнює:

$$\frac{\Delta v_e}{\Delta v_\alpha} = \frac{m_\alpha}{m_e} = \frac{1,6710^{-27} \text{ êã}}{9,1110^{-31} \text{ êã}} = 1,8310^3 = 1830.$$

Приклад 3.10. Визначити власну функцію вільної частинки, що рухається вздовж осі x .

Розв'язання

Вільна частинка має потенціальну енергію $U(x)$, яка дорівнює нулю. Її повна енергія E співпадає з кінетичною. Рівняння Шредінгера (3.7) для вільної частинки має вигляд:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0, \quad (1)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2).$$

Рівняння має розв'язки при будь-яких значеннях k^2 и E , тобто енергетичний спектр частинки є неперервним.

Розв'язок рівняння (1) має вигляд:

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha),$$

$$\text{або, у комплексному вигляді } \psi(x) = A e^{ikx}. \quad (3)$$

Повна хвильова функція $\Psi(x, t)$ містить множник $e^{-i\omega t}$ (4), який залежить від часу (див. (3.5)).

$$\text{Тоді} \quad \Psi(x, t) = A e^{-i\omega t + ikx},$$

$$\text{або, з урахуванням співвідношень } \omega = \frac{E}{\hbar}, \quad E = \frac{p^2}{2m} \text{ та виразу (2),}$$

$$\Psi(x, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)}. \quad (4)$$

Таким чином, вільна квантова частинка описується плоскою монохроматичною хвилею де Бройля. Цьому відповідає незалежна від часу густина ймовірності знаходження мікрочастинки $|\Psi(x, t)|^2 = A^2$, яка є однаковою для всіх точок простору.

Приклад 3.12. Хвильова функція, яка описує рух електрона в основному стані атома гідрогену, має вигляд: $\psi(r) = A e^{-r/a_0}$, де A – постійна, a_0 – перший борівський радіус. Знайти для основного стану атома гідрогену найбільш імовірну відстань електрона від ядра.

Розв'язання

Імовірність знаходження частинки в межах об'єму dV визначається за формулою (3.4), яка у випадку стаціонарного стану приймає вигляд:

$$dP = |\psi|^2 dV.$$

Для сферичного шару радіуса r товщиною dr маємо $dv = 4\pi r^2 dr$.

$$dP = |\psi|^2 4\pi r^2 dr.$$

Звідки

$$\frac{dP}{dr} = |\psi|^2 4\pi r^2 = A^2 e^{-2r/a_0} 4\pi r^2. \quad (1)$$

Досліджуємо функцію (1) на екстремум:

$$2r e^{-2r/a_0} - \frac{2r^2}{a_0} e^{-2r/a_0} = 0; \quad \left(r - \frac{1}{a_0} r^2 \right) e^{-2r/a_0} = 0;$$

$$r e^{-r/a_0} \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) = 0. \quad (2)$$

Корені рівняння (2) $r = 0$ та $r = \infty$ відповідають мінімуму досліджуваної функції.

$$\text{З умови } 1 - \frac{r}{a_0} = 0 \text{ отримуємо: } r_{\max} = a_0$$

Відповідь: найбільш імовірною відстанню електрона від ядра в основному стані атома гідрогену є радіус першої борівської орбіти.

Приклад 3.13. Визначити енергію фотона, яка відповідає K_α -лінії характеристичного рентгенівського випромінювання срібла.

Розв'язання

K – серія характеристичного рентгенівського випромінювання збуджується при вибиванні електронів з ближньої до ядра K – оболонки атома, що створює можливість переходу на неї електронів з інших оболонок. При переході електрона з L – оболонки на K – оболонку випромінюється K_α -лінія спектра характеристичного рентгенівського випромінювання. Згідно закону Мозлі ((3.16) – (3.18), частота ν , що відповідає K_α - лінії, дорівнює

$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right).$$

Тоді енергія фотону, який був випромінений, визначається виразом

$$\epsilon = h\nu = \frac{3}{4}hR(Z - \sigma)^2.$$

$$\epsilon = \frac{3}{4}6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3,3 \cdot 10^{15} (47 - 1)^2 = 3,45 \cdot 10^{-15} \text{ Дж} = 21,6 \text{ еВ}$$

Задачі для самостійного розв'язування

- 3.1. Порівняти довжини хвиль фотона та електрона з однаковими імпульсами $p = 5 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$.
- 3.2. Розрахувати довжину хвилі де Бройля для теплових ($T=300\text{K}$) нейтронів?
- 3.3. Кінетична енергія електрона дорівнює $0,6 \text{ MeV}$. Знайти довжину хвиль де Бройля для нього.
- 3.4. Розрахувати найбільш імовірну довжину хвилі де Бройля молекул азоту, які знаходяться у повітрі при кімнатній температурі.
- 3.5. Яким буде відношення довжин де Бройля протона та електрона при 1) однакових імпульсах, 1) однакових енергіях, 3) однакових швидкостях?
- 3.6. Визначити довжину хвилі де Бройля електрона та нейтрона з енергіями $0,5 \text{ MeV}$; 10 MeV .
- 3.7. Визначити швидкість протона з довжиною хвилі де Бройля 2 пм .
- 3.8. Визначити довжини хвиль де Бройля α -частинки і протону, які прискорені різницею потенціалів 10 кВ .

- 3.9. Заряджена частинка прискорена потенціалом 200 В і має довжину хвилі 2,02 нм. Знайти масу цієї частинки, якщо відомо, що її заряд дорівнює заряду електрона.
- 3.10. Знайти довжину хвилі де Бройля протона, що рухається зі швидкістю $v = 10^8$ см/с.
- 3.11. Електронний пучок прискорюється потенціалом $U = 1$ кеВ. Звісно, що невизначеність швидкості утворює 0,1% від її значення. Знайти невизначеність координати електрона.
- 3.12. Якщо при переході з якогось збудженого стану ядро випромінює квант з шириною, що дорівнює 0,10 пм, яким буде час випромінювання кванта?
- 3.13. Якщо прийняти, що енергія нуклона у ядрі порядку 8 МеВ, то чому дорівнює розмір ядра, оцінений за співвідношенням невизначеностей?
- 3.14. Ширина сліду електрона, отриманого за допомогою камери Вільсона на фотопластинці, дорівнює $\Delta x = 1$ мкм. Знайти відношення невизначеності імпульсу до його значення, якщо кінетична енергія електрона дорівнює 1,5 кеВ.
- 3.15. Використовуючи співвідношення невизначеностей, доведіть, що для рухомої частинки, невизначеність координати якої дорівнює довжині хвилі де Бройля, невизначеність швидкості за порядком величини дорівнює величині самої швидкості частинки.
- 3.16. Паралельний пучок електронів, які мають швидкість $v = 10^6$ м/с, проходить через щілину шириною $b = 0,1$ мм. Знайти ширину Δx центрального дифракційного максимуму, що спостерігається на екрані, віддаленому від щілини на відстань $L = 10$ см. Порівняти Δx з шириною щілини b .
- 3.17. Середній час життя атома у збудженому стані становить $\Delta t \approx 10^{-3}$ с. При переході атома у нормальний стан випромінюється фотон, середня довжина якого 600 нм. Оцінити ширину $\Delta \lambda$ спектральної лінії, якщо не відбувається її ширення за рахунок інших процесів.
- 3.18. Середній час життя Δt атома у збудженому стані дорівнює 10^{-8} с. При переході до нормального стану випромінюється фотон, середня довжина хвилі якого дорівнює 400 нм. Оцінити відносну ширину $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ випромінюваної спектральної лінії, якщо не відбувається ширення лінії за рахунок інших процесів.
- 3.19. Виходячи з того, що радіус атома має величину порядку 0,1 нм, оцінити швидкість руху електрона v в атомі гідрогену.
- 3.20. Оцінити з допомогою співвідношення невизначеностей мінімальну кінетичну енергію електрона, який рухається всередині сфери радіусом 0,05 нм.

- 3.21. Визначити довжину хвилі, яка випромінюється при переході електрона в атомі гідрогену з третього енергетичного рівня на основний. До якої області спектру відноситься це випромінювання?
- 3.22. Атом гідрогену, який знаходиться в основному стані, поглинає квант випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 102,6 \text{ нм}$. У якому збудженому стані буде знаходитися атом? Розрахувати енергію електрона в цьому стані.
- 3.23. Визначити максимальну частоту фотону ν_{max} серії Бальмера у спектрі випромінювання атомарного гідрогену.
- 3.24. Визначити частоту випромінювання атома гідрогену при переході електрона з третьої орбіти на другу.
- 3.25. Знайти найбільшу та найменшу довжини хвиль в ультрафіолетовій серії гідрогену (серії Лаймана)
- 3.26. В однозарядному іоні гелію електрон перейшов з третього енергетичного рівня на другий. Визначити довжину хвилі випромінювання, яке випускається іоном.
- 3.27. В однозарядному іоні літію електрон перейшов з третього енергетичного рівня на другий. Визначити довжину хвилі, яка випускається при цьому іоном літію.
- 3.28. Записати спектроскопічні позначення станів атому гідрогену, в яких може знаходитися електрон з головним квантовим числом $n = 4$.
- 3.29. Скільки електронів в атомі можуть мати однакові квантові числа:
а) n, l, m_l, m_s ; б) n, l, m_l ; в) n, l ; г) n ?
- 3.30. Яка кількість електронів в атомі утворює замкнену оболонку з квантовим числом $n = 1, 2, 3, 4, 5$?

Тестові завдання

- Смугасті спектри належать речовині у стані
1. газу 2. твердого тіла 3. рідини 4. у будь-якому стані
- Суцільні спектри належать речовині у стані
1. твердого тіла 2. газу 3. рідини 4. газу та рідини
- Енергію електрона в атомі визначає квантове число:
1. головне (n) 2. орбітальне (l) 3. магнітне (m) 4. спінове (s)
- Момент імпульсу електрона в атомі визначає квантове число
1. головне (n) 2. орбітальне (l) 3. магнітне (m) 4. спінове (s)
- Проекцію моменту імпульсу електрона в атомі на фізично виділений напрям визначає квантове число:
1. головне (n) 2. орбітальне (l) 3. магнітне (m) 4. спінове (s)
- Власний момент імпульсу електрона визначає квантове число
1. головне (n) 2. орбітальне (l) 3. магнітне (m) 4. спінове (s)
- Проекцію спіну електрона на фізично виділений напрям визначає квантове число
1. n 2. l 3. m_s 4. m

Розділ 4. БУДОВА ТА ВЛАСТИВОСТІ ЯДЕР. РАДІОАКТИВНІСТЬ

Тема: Атомне ядро. Розмір, склад та заряд атомного ядра. Дефект маси, енергія зв'язку. Спін та магнітний момент ядра. Ядерні сили. Моделі ядра. Різновиди іонізуючих випромінювань. Радіоактивність. Уявлення про радіоекологію. Ядерні реакції. Ядерна енергетика.

Основні поняття і формули

- Атомне ядро складається з протонів та нейтронів, їх загальна кількість визначається масовим числом A . Зарядове число Z – це кількість протонів.

Традиційна форма запису ядра A_ZX дозволяє визначити:

- 1) склад ядра (Z протонів та $N = A - Z$ нейтронів);
- 2) масу ядра ($m_{\text{я}} = A \cdot m_n$, оскільки $m_p \approx m_n$);
- 3) заряд ядра ($q_{\text{я}} = Z \cdot e$);
- 4) розмір ядра. Якщо уявляти ядро приблизно у вигляді кульки, то її радіус $R_{\text{я}} = R_0 \cdot A^{1/3}$, де $R_0 = 1,23 \cdot 10^{-15} \text{ м}$;
- 5) енергію зв'язку та деякі інші властивості ядра.

- Внаслідок взаємодії нуклонів у ядрі маса ядра менша, ніж маса нуклонів, що входять до його складу. Різниця цих мас, яку називають дефектом маси, дорівнює:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}. \quad (4.1)$$

У таблицях задані маси атомів, а не ядер, тому при розрахунку дефекту маси з табличних даних слід відняти масу електронів: $m_{\text{я}} = m_{\text{а}} - Zm_e$. Таким чином дефект маси можна обчислити за формулою

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_{\text{а}} = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{\text{а}} \quad (4.2)$$

$$m_{\text{H}} = 1.00728 \text{ а.о.м.}; \quad m_n = 1.00867 \text{ а.о.м.}$$

Тоді в атомних одиницях маси (а.о.м.) дефект маси дорівнюватиме

$$\Delta m = (Z \cdot 1.00783 + (A - Z) \cdot 1.00867 - m_{\text{а}}) \text{ а.о.м.} \quad (4.3)$$

$$1 \text{ а.о.м.} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

Дефекту маси відповідає енергія зв'язку ядра:

$$A_{\text{св}} = (Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}})c^2. \quad (4.4)$$

У позасистемних одиницях енергії мегаелектрон-вольтах ($1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$):

$$A_{\text{св}} = 931,5 \Delta m \text{ MeV.}$$

- Відомо десь біля 1700 різних ядер, з них стабільними є приблизно 300, інші – радіоактивні. Під радіоактивністю розуміють спонтанне (самочинне) перетворення ізотопів хімічних елементів, зумовлене розпадом їх атомних ядер.

• **Основний закон радіоактивного розпаду** дозволяє визначити кількість ядер N радіоактивного елемента, яка залишилась к будь-якому моменту часу t , якщо їх початкова кількість в момент часу $t = 0$ дорівнювала N_0 :

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (4.5)$$

де λ – стала розпаду, яка надає ймовірність розпаду ядра за одиницю часу.

Період піврозпаду $T_{1/2}$ (тобто час, за який розпадається половина початкової кількості ядер) пов'язаний зі сталою розпаду співвідношенням:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}. \quad (4.6)$$

З урахуванням цього закону радіоактивного розпаду можна надати вигляду:

$$N = N_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T_{1/2}}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. \quad (4.7)$$

Якщо радіоізоотоп A_1 з постійною розпаду λ_1 перетворюється в радіоізоотоп A_2 з постійною розпаду λ_2 , то кількість ядер ізоотопу A_2 змінюється з часом за законом

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \quad (4.8)$$

де $N_1(0)$ – кількість ядер радіоізоотопу A_1 в момент $t=0$.

Важливою характеристикою радіоактивного розпаду є **активність** A – кількість ядер, що розпадаються за одиницю часу:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (4.9)$$

Кількість радіоактивних ядер N , яка міститься у масі m , можна визначити за формулою

$$N = mN_A/M,$$

де N_A – число Авогадро; M – молярна маса, яку легко оцінити для кожного ядра через масове число : $M = A_r \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Тоді

$$A = \frac{m \cdot \ln 2 \cdot N_A}{M \cdot T_{1/2}}. \quad (4.10)$$

У Міжнародній системі одиниць (СІ) активність вимірюється у бекерелях. $1\text{Бк} = 1$ розп./с. Позасистемною одиницею активності є кюрі: $1\text{Ки} = 3,7 \cdot 10^{10}\text{Бк}$.

Питома активність радіоактивного препарату визначається кількістю актів розпаду за одну секунду на одиницю маси чи об'єму радіоактивної речовини:

$a = A/m$, вимірюється у Бк/кг;

$q = A/V$, вимірюється у Бк/м³.

Активність одиниці маси є характеристикою нестабільних ядер:

$$a = \frac{\ln 2 \cdot N_A}{M \cdot T_{1/2}}. \quad (4.11)$$

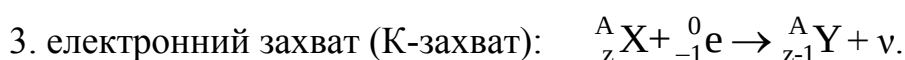
• Найчастіше відбуваються такі види радіоактивного розпаду:
 α -розпад, 3 види β -розпаду.

Розпад може супроводжуватися γ -випромінюванням.

Схема (закон зміщення) при α -розпаді:



Схеми β -розпаду:



• При проходженні радіоактивного випромінювання крізь речовину густина його потоку зменшується. **Закон ослаблення** моноенергетичного γ -випромінювання або β -частинок має вигляд:

$$j = j_0 e^{-\mu x} \quad (4.13)$$

де j_0 – густина потоку частинок, які падають на поверхню речовини, j – густина потоку частинок на глибині x , μ – **лінійний коефіцієнт ослаблення**. Інтенсивність γ -випромінювання I після проходження шару речовини завтовшки x визначається за формулою

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (4.14)$$

де I_0 – інтенсивність γ -випромінювання, яке падає на поверхню речовини.

• Джерелами іонізуючих частинок є ядерні реакції.

Ядерна реакція – процес, який відбувається при зіткненні ядра або елементарної частинки з іншим ядром, внаслідок якого змінюється нуклонний склад первісного ядра, а серед продуктів реакції з'являються також інші частинки.

При ядерних реакціях дуже суттєву роль вирають закони збереження енергії, імпульсу, моменту імпульсу, електричного заряду і т.ін.

З закону збереження енергії можна визначити енергетичний вихід реакції Q .

Енергетичний вихід ядерної реакції Q (або тепловий ефект реакції) – різниця енергій спокою початкових і кінцевих частинок, які приймають участь у реакції:

$$Q = c^2 \Delta m = c^2 (\sum m - \sum m'), \quad (4.15)$$

де m та m' – суми мас спокою частинок відповідно до та після реакції.

При пружному розсіянні $Q = 0$.

Методичні вказівки.

1. При розв'язуванні задач на явище радіоактивності слід розрізняти два випадки:

- відбувається розпад ізольованої речовини. Тоді використовується закон радіоактивного розпаду у формі, яка надається формулою (4.5).

За цією формулою кількість ядер ΔN , які розпались за проміжок часу Δt , дорівнює

$$\Delta N = N_0(1 - e^{-\lambda \Delta t}) \quad (4.16)$$

Якщо за умовою задачі час розпаду Δt набагато менший за період напіврозпаду $T_{1/2}$ ($\Delta t \ll T_{1/2}$) тобто кількість ядер можна вважати практично незмінною та рівною N_0 , формула (4.16) може бути записана у вигляді

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t. \quad (4.17)$$

- розпадається дочірня речовина, яка існує в суміші з іншою радіоактивною речовиною (материнською), продуктом розпаду якої вона є. У цьому випадку закон зміни дочірньої речовини надає формула (4.8).

У випадку, коли період напіврозпаду материнської речовини T_1 є набагато більшим за період напіврозпаду T_2 дочірньої речовини, за деякий проміжок часу устанавлюється радіоактивна рівновага між цими речовинами. Активність дочірньої речовини дорівнює кількості її ядер, утворених внаслідок розпаду ядер материнської речовини, тобто $A_2 = A_1$. Звідки, з огляду на співвідношення (4.9) та (4.6) отримуємо:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (4.18)$$

2. Закон збереження енергії для ядерних реакцій необхідно записувати в релятивістській формі:

$$\sum mc^2 + \sum T = \sum m'c^2 + \sum T' \quad (4.19)$$

де $\sum mc^2$ – сума власних енергій частинок, які вступають в реакцію, $\sum T$ – сума їх кінетичних енергій, $\sum m'c^2$, $\sum T'$ – сума відповідних величин для продуктів реакції.

При використанні закону збереження повної енергії слід пам'ятати, що ядерні реакції можуть йти як з виділенням, так і з поглинанням енергії. Отже, енергетичний вихід ядерної реакції Q може бути як додатним, так і від'ємним. У першому випадку ($Q > 0$, екзотермічна реакція), реакція може йти при будь-яких значеннях кінетичної енергії частинок, що вступають у реакцію. У другому випадку ($Q < 0$) реакція є ендотермічною, тобто існує мінімальна кінетична енергія, починаючи з якої реакція стає можливою (**поріг реакції**).

• Порогова енергія реакції дорівнює сумі енергії, яка поглинається під час реакції та кінетичної енергії проміжного ядра, яке утворюється після поглинання ядром-мішенню частинок, які налітають на нього. Якщо перед зіткненням ядро-мішень знаходилось у спокої, порогова енергія може бути визначена за формулою:

$$E_{\text{порог}} = |Q| \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right), \quad (4.20)$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. Визначити, яка енергія в MeV відповідає дефекту маси $\Delta m = 1 \text{ а.о.м.}$

Розв'язання

Енергія зв'язку пов'язана з дефектом маси формулою $E_{\text{зв}} = \Delta m \cdot c^2$. По-перше, виразимо усі величини у системі одиниць СІ:

$1 \text{ а.о.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, тоді

$$\begin{aligned} E_{\text{зв}} &= 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot (2,998 \cdot 10^8)^2 \text{ м}^2/\text{с}^2 = 1,49 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = \\ &= 1,492 \cdot 10^{-10} / (1,602 \cdot 10^{-19}) \text{ еВ} = 9,315 \cdot 10^8 \text{ еВ} = 931,5 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Таким чином, якщо дефект маси виражати в а.о.м., то енергію зв'язку легко отримати в MeV, якщо помножити Δm (а.о.м.) на 931,5!

Приклад 4.2. Обчислити енергію зв'язку ядра ${}^4_2\text{He}$.

Розв'язання

Енергія зв'язку атомного ядра визначається формулою

$$E_{\text{я}} = \Delta m c^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_a] c^2.$$

Якщо маси виразити в а.о.м., а енергію зв'язку в MeV, то ця формула прийме вигляд

$$E_{\text{я}} = 931 [Zm_p + (A - Z)m_n - m_y] \text{ а.е.}$$

Підставляючи значення мас у цю формулу, отримаємо

$$E_{\text{я}} = 931 [2 \cdot 1,00757 + (4 - 2)1,00893 - 4,0028] = 28,1 \text{ а.е.}$$

Приклад 4.3. Записати дефект маси та енергію зв'язку ядра у зручному для розрахунків вигляді.

Розв'язання

За означенням дефект маси дорівнює різниці між масою нуклонів, що входять до складу ядра, та масою ядра:

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}}.$$

У таблицях часто приводяться маси атомів (m_a), які виражені в атомних одиницях маси. Щоб знайти масу ядра, від неї треба відняти масу електронів, тобто $m_{\text{я}} = m_a - Zm_e$. Тоді дефект маси можна виразити у вигляді: $\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_a$.

Якщо всі маси виразити в а.о.м., то, користуючись тим, що 1а.о.м. відповідає 931MeB (дивись попередню задачу), а також тим, що $m_p = 1,00728 \text{ а.о.м.}$; $m_n = 1,00867 \text{ а.о.м.}$; $m_e = 0,00055 \text{ а.о.м.}$; $m_p + m_e = 1,00783 \text{ а.о.м.}$, для дефекту маси та енергії зв'язку можна записати зручні для розрахунків формули:

$$\Delta m = (Z \cdot 1,00783 + (A - Z) \cdot 1,00867 - m_a) \text{ а.о.м.};$$

$$E_{\text{зв}} = \Delta m \cdot 931 \text{ MeV}.$$

Для розрахунку в останні формули треба підставити тільки зарядове та масове числа ядра і масу атома в а.о.м.

Приклад 4.4. Визначити дефект маси та через нього енергію зв'язку ядра ${}^7_3\text{Li}$.

Розв'язання

Дефект маси ядра – це різниця між сумою мас нуклонів та масою ядра, тобто $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_a$.

У таблицях задані маси атомів, а не ядер, тому із табличних даних треба відняти масу електронів: $m_a = m_{\text{атом}} - Zm_e$.

Таким чином

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_a = Zm_H + (A - Z)m_n - m_a =$$

$$= (3 \cdot 1,00783 + 4 \cdot 1,00867 - 7,01601) \text{ а.о.м.} = 0,04216 \text{ а.о.м.}$$

При цьому було враховано, що $m_p = 1,00728 \text{ а.о.м.}$ та $m_e = 0,00055 \text{ а.о.м.}$

Енергію зв'язку розраховуємо за формулою, отриманою у попередній задачі:

$$E = c^2 \Delta m = 0,0421 \cdot 931 \text{ MeV} = 39,2 \text{ MeV}.$$

Приклад 4.5. Радіоактивний натрій ${}^{24}_{11}\text{Na}$ розпадається, випускаючи β^- -частинки. Період піврозпаду дорівнює 14,8 години. Вирахувати кількість ядер, що розпалися за 10 годин у 1мг даного радіоактивного препарату.

Розв'язання

Кількість радіоактивних ядер зменшується з часом за законом

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

де N_0 – кількість радіоактивних ядер на початок відліку ($t=0$). N – кількість ядер радіоактивного елемента, яка залишилась на моменту часу t з моменту початку відліку, λ – постійна радіоактивного розпаду. Тоді кількість ядер, що розпалися дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) \quad (1)$$

Оскільки $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, то $e^{-\lambda t} = e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = 2^{-\frac{t}{T}}$.

$$\text{Тоді, (1) має вигляд } \Delta N = N_0(1 - 2^{-\frac{t}{T}}). \quad (2)$$

Початкову кількість ядер N_0 легко вирахувати за формулою

$$N_0 = \frac{mN_A}{A}, \quad (3)$$

де N_A – число Авогадро.

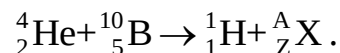
Після того, як ми підставимо (3) у (2) остаточно отримаємо

$$\Delta N = \frac{mN_A}{A}(1 - 2^{-\frac{t}{T}}) = \frac{10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{26}}{24}(1 - 2^{-\frac{10}{14,8}}) = 9,3 \cdot 10^{18}.$$

Приклад 4.6. Внаслідок зіткнення α -частинки з ядром бора $^{10}_5\text{B}$ відбулась ядерна реакція, внаслідок якої утворились два нових ядра. Одним з них є ядро гідрогену. Визначити друге ядро та енергетичний ефект реакції.

Розв'язання

Невідоме ядро позначимо символом ^A_ZX . Тоді ядерна реакція може бути представлена у вигляді



За законом збереження електричного та баріонного зарядів можна визначити невідоме ядро: $Z=6$, $A=13$. За таблицею Менделєєва знаходимо, що це ізоотп $^{13}_6\text{C}$.

Енергетичний вихід Q реакції

$$Q = 931(m_{\text{He}} + m_{\text{B}} - m_{\text{H}} - m_{\text{C}}).$$

$$Q = 931(4,00260 + 10,01294 - 1,00783 - 13,00335)\text{MeV} = 4,06\text{MeV}.$$

Приклад 4.7. Визначити початкову активність A_0 радіоактивного препарату магнію $^{27}_{12}\text{Mg}$ масою $m=0,2\text{мкг}$, а також його активність A через 6 годин.

$$m = 0,2\text{мкг} = 2 \cdot 10^{-8}\text{кг}$$

$$T_{1/2} = 10 \text{ хв.} = 600\text{с}$$

$$T = 6\text{год.} = 2,16 \cdot 10^4\text{с}$$

$$A_0 = ? \quad A = ?$$

Розв'язання

Активність A ізоотпу характеризує швидкість розпаду: $A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$.

Для початкової активності $t = 0$, тобто $A_0 = \lambda N_0$.

$$\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}.$$

Кількість радіоактивних ядер: $N = mN_A/M$, де N_A – число Авогадро, M – молярна маса.

Таким чином отримуємо, що початкова активність препарату

$$\text{дорівнює } A_0 = \frac{m \cdot \ln 2 \cdot N_A}{MT_{1/2}};$$

його активність через час t становить $A = \frac{m \cdot \ln 2 \cdot N_A}{MT_{1/2}} \exp\left(\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right)$.

В таблицях знаходимо період піврозпаду та молярну масу. $M = 27 \cdot 10^3 \text{ кг/моль}$; $T_{1/2} = 10 \text{ хв.} = 600 \text{ с}$; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

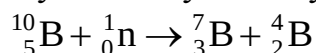
$$A_0 = \frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot 0,693 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3} \cdot 600} = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ Бк.}$$

$$A = \frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot 0,693 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3} \cdot 600} \exp(-0,693 \cdot 2,16 \cdot 10^4 / 600) = 81,3 \text{ Бк.}$$

Приклад 4.8. Трубка лічильника, призначена для рахунку повільних нейтронів, покрита з внутрішнього боку сполукою, яка містить ізотоп $^{10}_5\text{B}$. Визначити в МеВ енергію, яка виділяється при реакції, що відбувається внаслідок удару нейтрона о внутрішню поверхню трубки та супроводжується випусканням α - частинки.

Розв'язання

Ядерна реакція, що відбувається у даному випадку має вигляд:



Для підрахунку виділеної енергії для початку визначимо дефект маси реакції за формулою

$$\Delta m = [m(^{10}_5\text{B}) + m(^1_0\text{n})] - [m(^7_3\text{Li}) + m(^4_2\text{He})] \quad (1)$$

Оскільки кількість електронів до та після реакції зберігається, то замість значень мас ядер користуємося у формулі (1) значеннями мас нейтральних атомів:

$$m(^{10}_5\text{B}) = 10,01618 \text{ а.о.м.} \quad m(^7_3\text{Li}) = 7,01822 \text{ а.о.м.}$$

$$m(^1_0\text{n}) = 1,00893 \text{ а.о.м.} \quad m(^4_2\text{He}) = 4,0039 \text{ а.о.м.}$$

Тоді за формулою (1) отримуємо $\Delta m = 0,00299 \text{ а.о.м.}$

Енергію, виділену при даній реакції, знаходимо із співвідношення

$$\Delta E = 931 \Delta m = 931 \cdot 0,00299 = 2,78 \text{ Мев.}$$

Приклад 4.9. Визначити, яка частина енергії втрачається при прямому пружному зіткненні нейтрона з атомом графіту у блоці уповільнювача.

Розв'язання

Нехай при прямому зіткненні нейтрона з атомом вуглецю, який знаходиться у спокої, відбувається зміна його швидкості від значення V_0 до V_1 , а атом вуглецю набуває швидкість, яка дорівнює V . Тоді, на підставі законів збереження енергії та імпульсу можна записати рівняння:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$mv_0 = Mv + mv_1,$$

де m – маса нейтрона, M – маса атома вуглецю.

Розділивши перше та друге рівняння на m , отримаємо

$$v_0^2 - v_1^2 = \frac{M}{m}v^2 \quad (1)$$

$$v_0 - v_1 = \frac{M}{m}v \quad (2)$$

Ділення рівняння (1) на рівняння (2) дає:

$$v_0 + v_1 = v \quad (3)$$

Сумісним розв'язанням рівнянь (2) та (3) визначимо швидкість нейтрона після зіткнення та його кінетичну енергію після зіткнення

$$v_1 = -v_0 \frac{M - m}{M + m}.$$

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^2 \frac{mv_0^2}{2} = \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^2 E_0,$$

де $E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ – кінетична енергія нейтрона до зіткнення.

Різниця енергій до та після зіткнення

$$\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{4mM}{(M + m)^2} E_0,$$

а шукана величина відносної втрати енергії нейтроном при прямому пружному зіткненні дорівнює

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{4mM}{(M + m)^2} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 12}{(12 + 1)^2} = 0,284.$$

Задачі для самостійного розв'язування

4.1. Вказати склад ядра європію ^{152}Eu та оцінити його радіус.

4.2. Вказати склад ядра тербію ^{152}Tb та оцінити його радіус.

4.3. Вказати склад ядра америцію ^{243}Am та оцінити його радіус.

4.4. Вказати склад ядра берклію ^{247}Bk та оцінити його радіус.

4.5. Вказати склад ядра плутонію ^{239}Pu та оцінити його радіус.

4.6. Два ядра з однаковими масовими числами називають дзеркальними одне до одного, якщо кількість протонів в одному з них дорівнює кількості нейтронів у іншому. Вказати ядра, дзеркальні до ядер ^4He , ^8Li , ^{15}O , ^{27}Al , ^{53}Fe .

4.7. Два ядра з однаковими масовими числами називають дзеркальними одне до одного, якщо кількість протонів в одному з них дорівнює кількості

нейтронів у іншому. Вказати ядра, дзеркальні до ядер ${}^7\text{Be}$, ${}^{10}\text{Ne}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{52}\text{Fe}$, ${}^{54}\text{Co}$.

4.8. Знайти кількість протонів та нейтронів, що складають ядра трьох ізотопів бора з масовими числами 9, 10, 11. Записати ці ядра.

4.9. Знайти кількість протонів та нейтронів, що складають ядра чотирьох ізотопів кисню з масовими числами 16, 17, 18 та 20. Записати ці ядра.

4.10. Знайти кількість протонів та нейтронів в ядрах ізотопів урану ${}^{233}\text{U}$, ${}^{234}\text{U}$, ${}^{235}\text{U}$, ${}^{238}\text{U}$.

4.11. Визначити дефект маси та енергію зв'язку ядер дейтерію та тритію.

4.12. Питомі енергії зв'язку ядер ${}^6\text{Li}$ та ${}^7\text{Li}$ дорівнюють відповідно 5,33 МеВ/нуклон і 5,60 МеВ/нуклон. Визначити маси вказаних нуклідів та відповідні атомні маси. Яке з вказаних ядер є більш стабільним?

4.13. Обчислити енергію зв'язку $E_{\text{зв}}$ та дефект маси Δm ядра ${}^4_2\text{He}$.

4.14. Визначити енергію зв'язку $E_{\text{зв}}/A$, яка приходить на один нуклон для ядра ${}^{11}_5\text{B}$, ${}^{235}_{92}\text{U}$.

4.15. Визначити енергію зв'язку $E_{\text{зв}}/A$, яка приходить на один нуклон для ядра ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{238}_{92}\text{U}$.

4.16-4.40. Які ізопои виникають у ланцюжку радіоактивних ядер, що приведені у таблиці:

Номер задачі	Материнське ядро	Послідовність розпаду
4.16	${}^{232}\text{Th}$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
4.17	${}^{220}\text{Rn}$	$\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$
4.18	${}^{237}\text{Np}$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
4.19	${}^{238}\text{U}$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
4.20	${}^{226}\text{Ra}$	$\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
4.21	${}^{235}\text{U}$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
4.22	${}^{227}\text{Ac}$	$\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
4.23	${}^{215}\text{Po}$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
4.24	${}^{217}\text{At}$	$\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta$
4.25	${}^{228}\text{Ac}$	$\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
4.26	${}^{229}\text{Th}$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
4.27	${}^{234}\text{Pa}$	$\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
4.28	${}^{234}\text{Th}$	$\beta \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
4.29	${}^{214}\text{Bi}$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
4.30	${}^{210}\text{Ti}$	$\beta \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
4.31	${}^{233}\text{Pa}$	$\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
4.32	${}^{216}\text{Po}$	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
4.33	${}^{228}\text{Ra}$	$\beta \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
4.34	${}^{219}\text{Rn}$	$\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$

4.35	^{214}Po	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$
4.36	^{223}Fr	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
4.37	^{219}At	$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
4.38	^{223}Ra	$\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
4.39	^{231}Th	$\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
4.40	^{231}Pa	$\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$

4.41. Визначити, який % початкової кількості ядер $^{14}_6\text{C}$ розпадається за 100 років. Період його піврозпаду дорівнює 5730 років. Продукт розпаду – стабільний.

4.42. Скільки атомів з 1 млн. атомів полонію ($^{210}_{84}\text{Po}$) розпадаються за добу?

4.18. Визначити, який % початкової кількості ядер ^{238}U розпадається за 1000 років і сталу радіоактивного розпаду. Період його піврозпаду дорівнює $4.5 \cdot 10^9$ років.

4.43. Визначити, який % початкової кількості ядер ^{239}U розпадається за 2 хвилини і сталу радіоактивного розпаду. Період його піврозпаду дорівнює 23.54 хвилин. Продукт розпаду – стабільний.

4.44. Визначити, який % початкової кількості ядер ^{239}Pu розпадається за 200 років і сталу радіоактивного розпаду. Період його піврозпаду дорівнює 24390 років. Продукт розпаду – стабільний.

4.45. Активність деякого радіоактивного ізотопу дорівнює 100Бк. Знайти його активність через час, який дорівнює половині від його періоду піврозпаду.

4.46. Визначити вік стародавніх дерев'яних предметів, якщо питома активність а нукліда ^{14}C в них становить 60% питомої активності цього самого нукліда в свіже зрубаних деревах. Період його піврозпаду дорівнює 5730 років.

4.47. Знайти масу радону ($^{222}_{86}\text{Rn}$), активність якого дорівнює 1 кюрі.

4.48. Знайти сталу розпаду радону, якщо відомо, що кількість атомів радону зменшується за добу на 18.2%.

4.49. Деякий радіоактивний препарат має сталу розпаду $\lambda = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Через який час відбудеться розпад 75% початкової кількості ядер?

4.50. Знайти період піврозпаду радіоактивного ізотопу, якщо його активність за 10 суток зменшилась на 24% у порівнянні з первинною.

4.51. Визначити, яка доля радіоактивного ізотопу $^{225}_{89}\text{Ac}$ розпадеться упродовж 6 діб.

4.52. Визначити кількість ядер радіоактивного препарату йоду $^{131}_{53}\text{I}$ масою $m = 0,5$ мкг, які розпалися упродовж 1 хв.

4.53. Визначити активність радіоактивного препарату $^{90}_{38}\text{Sr}$ масою $m = 1$ мкг.

- 4.54. Знайти середню тривалість життя атомів радіоактивного ізотопу кобальту $^{60}_{27}\text{Co}$.
- 4.55. Визначити масу ізотопу $^{131}_{53}\text{I}$, активність якого дорівнює 37ГБк.
- 4.56. З кожного мільйону атомів деякого радіоактивного ізотопу кожену секунду розпадається 200 атомів. Визначити період піврозпаду цього ізотопу.
- 4.57. Лічильник α -частинок, установлений поблизу радіоактивного ізотопу при першому вимірюванні за одну хвилину зареєстрував 1406 частинок, а через 4год. тільки 400 частинок за хвилину. Визначити період піврозпаду цього ізотопу.
- 4.58. Яка ймовірність того, що даний атом ізотопу радіоактивного йоду $^{131}_{53}\text{I}$ розпадеться впродовж першої секунди?
- 4.59. Яка частка первинної кількості радіоактивного ізотопу розпадеться протягом часу, який дорівнює середній тривалості життя атомів цього ізотопу?
- 4.60. Знайти масу урану ^{238}U , який має таку саму активність, що стронцій ^{90}Sr масою 1мг.
- 4.61. На скільки відсотків знизиться активність ізотопу іридію ^{192}Ir за 30діб?
- 4.62.** За добу активність ізотопу зменшилась від 118 ГКи до 7,4 ГКи. Визначити період піврозпаду цього ізотопу.
- 4.63.** Активність препарату за деякий проміжок часу зменшилась у 250 разів. Скільком періодам піврозпаду дорівнює цей проміжок часу?
- 4.64. Яка кількість радіоактивного препарату ізотопу радію $^{226}_{88}\text{Ra}$ має активність 1 кюрі?
- 4.65. Щоб оцінити вік старовинної тканини, знайденої в одній з єгипетських пірамід, була визначена концентрація в ній атомів радіоактивного вуглецю ^{14}C . Вона з'явилась відповідною 9,2розпадам за хвилину на 1г вуглецю. Концентрація ^{14}C у живих рослинах відповідає 14,0розпадам за хвилину на 1 г вуглецю. Оцінити вік тканини.
- 4.66. Визначити початкову активність радіоактивного препарату магнію ^{27}Mg масою $m = 0,2$ мкг, а також його активність через 6 год.
- 4.67. Маємо пучок нейтронів з кінетичною енергією 0,025 еВ. Яка частка нейтронів розпадається на довжині пучка 2м?
- 4.68. До крові людини ввели малу кількість розчину, який містить ізотоп ^{24}Na активністю $A = 2,1 \cdot 10^3$ Бк. Активність 1см³ крові, взятої через 5год, дорівнює 0,28 Бк. Знайти об'єм крові в організмі людини.
- 4.69. Визначити масу свинцю, який виникнув з 1 кг ^{238}U за час, який дорівнює віку Землі ($2,5 \cdot 10^9$ років).

4.70. Знайти імовірність розпаду радіоактивного ядра за час $t = 1/\lambda$, де λ його постійна розпаду.

4.71. За який проміжок часу з 10^7 атомів ^{90}Sr розпадається один атом?

4.72. Визначити постійну розпаду радіоактивного нукліду, активність якого зменшується у 1,07 разів за 100 діб.

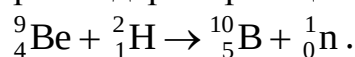
4.73. Визначити вік старовинних дерев'яних предметів, у яких питома активність (активність одиниці маси) радіоактивного вуглецю ^{14}C у 2 рази менша за питому активність цього нукліду у тільки що зрублених дерев.

4.74. Препарат містить 1,4мкг радіоактивного ізотопу ^{24}Na . Яку активність буде мати препарат за добу?

4.75. Знайти поріг ядерної реакції $^7_3\text{Li}(p,n)$.

4.76. Якщо бомбардувати бор тепловими нейтронами, йде реакція $^{10}_5\text{B}(n,\alpha)$. Знайти енергію, яка виділяється при реакції.

4.77. Обчислити енергію ядерної реакції:



4.78. Знайти найменше значення енергії γ -кванта, якої вистачить для здійснення реакції $^{24}_{12}\text{Mg}(\gamma,n)$. Знайти також довжину його хвилі.

4.79. Під час вибуху водневої бомби відбувається ядерна реакція утворення гелію із дейтерію та тритію. 1) Написати ядерну реакцію; 2) знайти енергію, яка виділяється.

4.80-4.104. Визначити товщину захисного шару, який дозволяє знизити інтенсивність вузького пучка γ - випромінювання до допустимого рівня інтенсивності радіоактивного випромінювання $I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$. Інтенсивність неослабленого пучка I_0 , енергія γ - квантів та речовина захисту приведені у таблиці:

Номер задачі	Інтенсивність $I = 1\text{мкДж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^2$	Енергія γ - квантів, MeV	Речовина захисту
4.80	1000	7,0	Свинець
4.81	100	6,0	Чавун
4.82	50	6,0	Бетон
4.83	10	7,0	Вода
4.84	10000	1,4	Свинець
4.85	300	3,0	Бетон
4.86	3000	1,0	Чавун
4.87	100	6,0	Свинець
4.88	50	3,0	Вода
4.89	70	8,8	Чавун
4.90	100	0,5	Вода
4.91	500	5,6	Свинець

4.92	2500	2,0	Чавун
4.93	50	3,6	Чавун
4.94	700	5,0	Свинець
4.95	100	1,7	Бетон
4.96	250	3,0	Свинець
4.97	5000	4,0	Свинець
4.98	500	2,2	Чавун
4.99	500	1,0	Вода
4.100	500	0,5	Чавун
4.101	70	1,0	Бетон
4.102	300	2,2	Свинець
4.103	50	0,7	Чавун
4.104.	20	0,5	Бетон

Тестові завдання

- До складу ядра атома входять елементарні частинки
 - електрони і протони
 - позитрони і електрони
 - нейтрони і протони
 - нейтрони і електрони
- До складу ядра входять елементарні частинки:
 - електрони
 - протони
 - позитрони
 - нейтрино
- Ізобарами називають атоми, ядра яких мають
 - однакові кількості нуклонів
 - однакові кількості протонів
 - однакові кількості нейтронів
 - однаковий час життя
- З наведених ядер ${}^7_3\text{Li}$, ${}^7_4\text{Be}$, ${}^{13}_7\text{N}$, ${}^6_3\text{Li}$ є ізобарами
 - ${}^7_3\text{Li}$ і ${}^6_3\text{Li}$
 - ${}^6_3\text{Li}$ і ${}^7_4\text{Be}$
 - ${}^7_4\text{Be}$ і ${}^7_3\text{Li}$
 - ${}^7_3\text{Li}$ і ${}^{13}_7\text{N}$
- Ізотонами називають атоми, ядра яких мають:
 - однакові кількості нуклонів
 - однакові кількості протонів
 - однакові кількості нейтронів
 - однаковий час життя
- З наведених ядер ${}^7_3\text{Li}$, ${}^7_4\text{Be}$, ${}^{13}_7\text{N}$, ${}^6_3\text{Li}$ ізотонами є
 - ${}^7_3\text{Li}$ і ${}^6_3\text{Li}$
 - ${}^6_3\text{Li}$ і ${}^7_4\text{Be}$
 - ${}^7_4\text{Be}$ і ${}^7_3\text{Li}$
 - ${}^7_3\text{Li}$ і ${}^{13}_7\text{N}$
- Ізотопами називають атоми, ядра яких мають:
 - однакові кількості нуклонів
 - однакові кількості протонів
 - однакові кількості нейтронів
 - однаковий час життя
- З наведених ядер ${}^7_3\text{Li}$, ${}^7_4\text{Be}$, ${}^{13}_7\text{N}$, ${}^6_3\text{Li}$ є ізотопами
 - ${}^7_3\text{Li}$ і ${}^6_3\text{Li}$
 - ${}^6_3\text{Li}$ і ${}^7_4\text{Be}$
 - ${}^7_4\text{Be}$ і ${}^7_3\text{Li}$
 - ${}^7_3\text{Li}$ і ${}^{13}_7\text{N}$
- Ізомерами називають атоми, ядра яких мають
 - однакові кількості нуклонів
 - однакові кількості протонів

3. однакові кількості нейтронів 4. однаковий час життя
10. Реакцію ділення важких ядер найбільш слушно описує
 1. модель ядерних оболонок 2. краплинна модель ядра
 3. оптична модель ядра 4. усі названі моделі
11. Існування найбільш стійких (магічних) ядер найбільш слушно описує
 1. модель ядерних оболонок 2. краплинна модель ядра
 3. оптична модель ядра 4. усі названі моделі
12. У магнітному полі відхиляється від напрямку поширення потік
 1. нейтронів 2. β -променів 3. γ -променів 4. нейтрино
13. У магнітному полі не відхиляються від напрямку поширення:
 1. α -промені 2. γ -промені 3. β^+ -промені 4. β^- -промені
14. У магнітному полі відхиляється від напрямку поширення
 1. α -випромінювання 2. потік нейтронів
 3. γ -випромінювання 4. потік нейтрино

Установити відповідність:

15. Вид ланцюгової реакції Значення коефіцієнту розмноження нейтронів
1. Вибухова ланцюгова реакція А. $k = 1$
 2. Керована ланцюгова реакція Б. $k > 1$
 3. Згасаюча ланцюгова реакція В. $k < 1$
16. До складу атома урану $^{239}_{92}\text{U}$ входить
 частинки їх кількість
 1. електронів А. 239
 2. нейтронів Б. 92
 3. протонів В. 92
 4. сумарна кількість нуклонів Г. 147
26. До складу атома урану $^{235}_{92}\text{U}$ входить
 частинки їх кількість
 1. електронів А. 235
 2. нейтронів Б. 92
 3. протонів В. 143
 4. сумарна кількість нуклонів Г. 92
27. До складу атома алюмінію $^{27}_{13}\text{Al}$ входить
 частинки їх кількість
 1. електронів А. 14
 2. нейтронів Б. 13
 3. протонів В. 27
 4. сумарна кількість нуклонів Г. 13

Додатки

Фундаментальні фізичні константи:

Гравітаційна стала	$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$
Швидкість світла в вакуумі	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Магнітна стала	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Електрична стала	$\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Стала Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Маса спокою електрону	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Маса спокою протону	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Маса спокою нейтрону	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Елементарний заряд	$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Атомна одиниця маси	$1 \text{ а.о.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Стала Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Універсальна газова стала	$R = 8,31441 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Стала Больцмана	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\lambda_c = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ м}$

Назви, символи та атомні маси деяких хімічних елементів

№ п/п	Назва	Символ	Атомна маса	№ п/п	Назва	Символ	Атомна маса
1	Водень	H	1,0079	56	Барій	Ba	137,33
2	Гелій	He	4,00260	57	Лантан	La	138,9055
3	Літій	Li	6,90041	58	Церій	Se	140,12
4	Берилій	Be	9,01218	59	Празеодим	Pr	140,9077
5	Бор	B	10,81	60	Неодим	Nd	144,24
6	Вуглець	C	12,011	61	Прометій	Pn	[145]
7	Азот	N	14,0067	62	Самарій	Sn	150,4
8	Кисень	O	15,9994	63	Європій	Eo	151,96
9	Фтор	F	18,9984	64	Гадоліній	Gd	157,25
10	Неон	Ne	20,179	65	Тербій	Tb	158,9254
11	Натрій	Na	22,98977	66	Диспрозій	Dy	162,50
12	Магній	Mg	24,305	67	Гольмій	Ho	164,9304
13	Алюміній	Al	26,98154	68	Ербій	Er	167,26
14	Кремній	Si	28,0855	69	Тулій	Tm	168,9342
15	Фосфор	P	30,97376	70	Ітербій	Yb	173,04
16	Сера	S	32,06	71	Лютецій	Lu	174,967
17	Хлор	Cl	35,453	72	Гафній	Hf	178,49
18	Аргон	Ar	39,948	73	Тантал	Ta	180,947

19	Калій	K	39,0983	74	Вольфрам	W	183,85
20	Кальцій	Ca	40,08	75	Реній	Re	186,21
21	Скандій	Sc	44,9559	76	Осмій	Os	190,2
22	Титан	Ti	47,90	77	Іридій	Ir	192,22
23	Ванадій	V	50,9415	78	Платина	Pt	195,08
24	Хром	Cr	51,996	79	Золото	Au	196,97
25	Марганець	Mn	54,9380	80	Ртуть	Hg	200,59
26	Залізо	Fe	55,847	81	Талій	Tl	204,38
27	Кобальт	Co	58,9332	82	Свинець	Pb	207,2
28	Нікель	Ni	58,71	83	Вісмут	Bi	208,98
29	Мідь	Cu	63,546	84	Полоній	Po	[209]
30	Цинк	Zn	65,38	85	Астат	At	[210]
31	Галій	Ga	69,735	86	Радон	Rn	[222]
32	Германій	Ge	72,59	87	Францій	Fr	[223]
33	Миш'як	As	74,9216	88	Радій	Ra	226,03
34	Селен	Se	78,96	89	Актиній	Ac	[227]
35	Бром	Br	79,904	90	Торій	Th	232,04
36	Криптон	Kr	83,80	91	Протактиній	Pa	[231]
37	Рубідій	Rb	85,467	92	Уран	U	238,03
38	Стронцій	Sr	87,62	93	Нептуній	Np	[237]
39	Ітрій	Y	88,9059	94	Плутоній	Pu	[244]
40	Цирконій	Zr	91,22	95	Америцій	Am	[247]
41	Ніобій	Nb	92,9064	96	Кюрій	Cm	[247]
42	Молібден	Mo	96,94	97	Берклій	Bk	[247]
43	Технецій	Tc	98,9062	98	Каліфорній	Cf	[251]
44	Рутеній	Ru	101,07	99	Ейнштейній	Es	[252]
45	Родій	Rh	102,9055	100	Фермій	Fm	[257]
46	Паладій	Pd	106,4	101	Менделеві	Md	[258]
47	Срібло	Ag	107,868	102	Нобелій	No	[259]
48	Кадмій	Cd	112,401	103	Лоуренсій	Lr	[260]
49	Індій	In	114,82	104	Дубній	Db	[261]
50	Олово	Sn	118,69	105	Джоліотій	Jl	[262]
51	Сурма	Sb	122,75	106	Резерфордій	Rf	[263]
52	Телур	Te	127,60	107	Борій	Bh	[262]
53	Йод	I	125,9045	108	Ганій	Hn	[265]
54	Ксенон	Xe	131,30	109	Майтнерій	Mt	[266]
55	Цезій	Cs	132,9054	110	Унуннілій	Uun	

Показники заломлення n

Гази	n	Рідини	n	Тверді тіла	n
Азот	1,00030	Бензол	1,50	Алмаз	2,42
Повітря	1,00029	Вода	1,33	Кварц плавлений	1,46
Кисень	1,00027	Гліцерин	1,47	Скло (звичайне)	1,50
		Сірковуглець	1,63		

Примітка. Показники заломлення залежать також від довжини хвилі світла, тому наведені значення n слід розглядати як умовні.

Робота виходу електронів з металу

Метал	A. eB	Метал	A. eB	Метал	A. eB
Алюміній	3,74	Калій	2,15	Нікель	4,84
Барій	2,29	Кобальт	4,25	Платина	5,29
Вісмут	4,62	Літій	2,39	Срібло	4,28
Вольфрам	4,50	Мідь	4,47	Титан	3,92
Залізо	4,36	Молибден	4,27	Цезій	1,89
Золото	4,58	Натрій	2,27	Цинк	3,74

Атомна маса $m_{\text{ат}}$ деяких нуклідів

Нуклід	$m_{\text{ат}}$	Нуклід	$m_{\text{ат}}$
Водень (^1H)	1,007825	Титан (^{50}Ti)	49,944736
Дейтерій (^2H)	2,014108	Титан (^{51}Ti)	50,949858
Тритій (^3H)	3,016028	Ванадій (^{52}V)	51,944800
Гелій (^3He)	3,016045	Марганець (^{55}Mn)	54,930249
Гелій (^4He)	4,002596	Кобальт (^{58}Co)	57,935776
Літій (^6Li)	6,015110	Стронцій (^{90}Sr)	89,907711
Літій (^7Li)	7,016046	Полоній (^{210}Po)	209,982760
Берилій (^7Be)	7,016925	Радон (^{226}Rn)	222,017422
Бор (^{11}B)	11,009304	Радій (^{226}Ra)	226,025279
Вуглець (^{14}C)	14,003217	Торій (^{232}Th)	232,038112
Силіцій (^{31}Si)	30,975350	Уран (^{238}U)	238,050637
Фосфор (^{31}P)	30,973762	Уран (^{239}U)	239,054149
Кальцій (^{44}Ca)	43,95549	Плутоній (^{239}Pu)	239,052037

Період піврозпаду $T_{1/2}$ деяких радіоактивних нуклідів

Нуклід	$T_{1/2}$	Нуклід	$T_{1/2}$
Вуглець (^{14}C)	5 730 років	Радій (^{226}Ra)	1 620 років
Кобальт (^{58}Co)	71 доба	Торій (^{232}Th)	$1,41 \cdot 10^{10}$ років
Стронцій (^{90}Sr)	28 років	Уран (^{238}U)	$4,5 \cdot 10^9$ років
Полоній (^{210}Po)	140 діб	Уран (^{239}U)	23,54 хвилини
Радон (^{226}Rn)	3,82 доби	Плутоній (^{239}Pu)	24 390 років

Масові коефіцієнти ослаблення (рентгенівське випромінювання, вузький пучок)

λ , пм	Масовий коефіцієнт ослаблення μ/ρ , $\text{см}^3/\text{г}$				
	Повітря	Вода	Алюміній	Мідь	Свинець
10		0,16	0,16	0,36	3,8
20		0,18	0,28	1,5	4,9
30		0,29	0,47	4,3	14
40		0,44	1,1	9,8	31
50	0,48	0,66	2,0	19	54
60	0,75	1,0	3,4	32	90
70	1,3	1,5	5,1	48	139
80	1,6	2,1	7,4	70	
90	2,1	2,8	11	98	
100	2,6	3,8	15	131	
150	8,7	12	46	49	
200	21	28	102	108	
250	39	51	194	198	

Предметний покажчик

- Активність 130
Аналізатор 55
Биття 13
Вектор Умова-Пойнтінга 23
Випромінювання теплове 57
Вузол 18
Граничний кут 49
Густина потоку енергії 20
Декремент 10
– логарифмічний 10,11
Дефект маси 129
Дисперсія 19
– дифракційної ґратки
– лінійна 53
Декремент 10
Дифракційна ґратка 53
Дифракція 52
– Фраунгофера 52
Добротність 10,11
Енергія зв'язку 112
Енергетичний вихід реакції 131
Ефект Допплера 22
– Керра 56
– Комптона 60
– Коттона-Мутона 57
Закон Брюстера 54
– Віна 58
– заломлення світла 48
– Ейнштейна 59
– Комптона 60
– Малюса 55
– Мозлі 115
– ослаблення випромінювання 131
– радіоактивного розпаду 130
– Столетова 59
Звука висота 21
– гучність 21
– інтенсивність 21
– тембр 21
Принцип Гюйгенса-Френеля 52
Принцип суперпозиції 19
Здатність випромінювальна 57
– спектральна 57
– поглинальна 58
Зони Френеля 52
Інтенсивність 23
Інтерференція 50
Кільця Ньютона 51
Коефіцієнт згасання 10,11
Коливання 5
– вільні 6,9,11
– вимушені 10,12
– власні 6
– гармонічні 6
– електромагнітні 5
– механічні 5
– періодичні 6
Коливання
– амплітуда 6
– період 6
– фаза 6
– частота 6
– циклічна 6
Контур коливальний 9
Маятник математичний 8
– пружний 7
– фізичний 7
Оптична різниця ходу 50
Оптична сила
– лінзи 49
– сферичного дзеркала 49
Освітленість 47
Період дифракційної ґратки 53
– піврозпаду
Подвійне променезаломлення 55
Показник заломлення
– абсолютний 48
– відносний 48
Поляризатор 55
Поріг ядерної реакції 132
Потік
– енергії 47
– світловий 47

Резонанс 10	Формула Бальмера 114
Рівняння коливань	– Вульфа-Бреггів 53
– – вільних (згасаючих) 9	– де Бройля 112
– – вимушених 10	Фотоефект зовнішній 59
– – власних 6	Функція хвильова 113
– електромагнітної хвилі 23	
– хвильове 17	Хвиля 16
– Шредінгера 113	– звукова 20
	– електромагнітна 22
Світло поляризоване 54	– пружна 16
– – еліптично 54	– стояча 18
– – лінійно 54	
– – циркульно 54	Швидкість звуку 20
– – частково 54	– хвилі групова 19
– природне 54	– – фазова 18
Світність 48	– світла
Сила квазіупруга 7	
– світла 47	Ядерна реакція 131
Співвідношення невизначеностей 112	Яскравість 48

Іменний покажчик

Бальмер 114	Коттон 57
Брегг 53	Малюс 55
Брюстер 54	Мозлі 115
Больцман 58	Мутон 57
Він 58	Ньютон 51
Вульф 53	Планк 59
Гейзенберг 112	Пойнтінг 23
Гюйгенс 52	Стефан 58
Де Бройль 112	Столетов 59
Доплер 22	Умов 23
Ейнштейн 59	Френель 52
Керр 56	Фур'є 14
Комптон 60	Шредінгер 113

Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. т.3.– К.: Техніка, 1999. – 518с.
2. Савельєв І.В. Курс фізики. т.2. – М.: Наука, 1989. – 480с.
3. Трофимова Т.И. Курс фізики – М.: Наука, 1985. – 432с.
4. Детлаф А., Яворський Б.Н. Курс фізики. – М.: ВШ, 1989. – 608с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс фізики. Оптика – М.: Физматлит, 1980. – 751с.
7. Гаркуша І.П., Горбачук І.Т та ін. Загальний курс фізики. Збірник задач. – К.: Техніка, 2003. – 558с.
8. Герасимов О.І та ін. Конспект лекцій з загальної фізики. – Одеса: ТЕС, 2004. – 200с.
9. Чертов А.Г., Вороб'єв А.А. Задачник по фізице. – М.: ВШ, 1981. – 512с.
10. Новиков С.М. Сборник заданий по общей фізице. – М.: Оникс, 2007. – 512с.
11. Контрольні завдання-тести з курсу загальної фізики (під ред. О.І.Герасимова). – К.: ІЗМН, 1997. – 44с.

Навчальне видання

ГЕРАСИМОВ ОЛЕГ ІВАНОВИЧ,
Андріанова Ірина Сергіївна

ФІЗИКА В ЗАДАЧАХ. Ч.ІV. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ. ОПТИКА

Навчальний посібник

Підп. до друку Формат 60х84/16 Папір офс.
Умовн. друк. арк. Тираж Зам. №
Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул.Львівська, 15
