МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Одеський державний екологічний університет

МЕТЕОРОЛОГІЯ, КЛІМАТОЛОГІЯ ТА ГІДРОЛОГІЯ

МІЖВІДОМЧИЙ НАУКОВИЙ ЗБІРНИК УКРАЇНИ

Заснований у 1965 р.

ВИПУСК 48

Одеса
«Екологія»
2004

УДК 546. 213

А. В. ГЛУШКОВ, д-р физ.-мат. наук,
В. Н. ХОХЛОВ, канд. геогр. наук,
Ю. Я. БУНЯКОВА,
Одесский государственный экологический университет

РЕНОРМ-ГРУППОВОЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В АТМОСФЕРЕ

В работе впервые ренорм-групповой анализ в общей формулировке применен к анализу спектра турбулентности в атмосфере и решению задач приклад ной экологии.

Постановка задачи. Методы ренормализационной группы (РГ), развитые первоначально в квантовой теории поля [1], находят применение и для описания развитой турбулентности [1, 2]. Как известно, РГ-подход является способом описания многомодовых систем с большим диапазоном характерных масштабов и сильным межмодовым взаимодействием. В соответствии с известной гипотезой Кузьмина и Паташинского, искомые системы проявляют тенденцию к локализации взаимодействия в пространстве волновых чисел (взаимодействуют моды приблизительно одинаковых масштабов) и каскадному механизму взаимодействия мод с существенно различающимися масштабами. При этом пространственно-временные свойства мод разных масштабов функционально подобны, т. е. различаются набором числовых параметров (функциональная автомодельность [2]). Именно к таким системам следует отнести развитую турбулентность. Искомая задача имеет принципиальное значение для анализа динамики распространения загрязняющих веществ и вредных примесей в атмосфере, целого ряда задач гидрологии и экологии.

Первые попытки применения РГ-подхода для вычисления показателей степенного поведения (индексов скейлинга) статистических моментов турбулентных пульсаций поля скорости основывались на известной кадановской процедуре частичного итерационного усреднения и полевой формулировке метода РГ [4]. Использование таких формулировок дает возможность определить только индексы скейлинга в инфракрасном пределе $k \to 0$, но не амплитудные коэффициенты.

В настоящей работе мы применим РГ-анализ к изучению спектра турбулентности в атмосфере и покажем наличие эффекта перенормировки и соответствующего скейлинга. Этот принципиальный результат открывает и обосновывает перспективы возможных приложений к задачам анализа динамики турбулентной атмосферы в промышленном городе и изучения пространственно-временной структуры полей загрязнения самоафинных, фрактальных и стохастических моделей [6–8].

Исходные уравнения и процедура перенормировки. Рассмотрим модель атмосферы, описываемой системой стандартных атмосферных уравнений Навье–Стокса при наличии внешней силы. Предполагаем, что последняя представляет случайный процесс типа гауссова «белого шума». Ключевые характеристики гидродинамического поля – давление p и составляющие, вектора скорости v_i в точке $1 = (\mathbf{r}_1,\ t_1)$ будем рассматривать в пространстве d измерений как компоненты $(d + 1)$-мерного вектора согласно классическому определению [4, 5]:

$$\psi_\alpha(1) = \{\psi_0(1), \psi_i(1)\} = \{p(\mathbf{r}_1, t_1), v_i(\mathbf{r}_1, t_1)\},$$
$$\alpha = 0, 1, \ldots d,\ i = 1, 2, \ldots d.$$

В формализме «удвоения полей» (см., напр., [1, 4, 5]) рассматриваемая система задается действием:

$$S[\psi, \hat\psi] = S_0[\psi, \hat\psi] + \lambda_0 S_1[\psi, \hat\psi]:$$
$$S_0[\psi, \hat\psi] = -\hat\psi_\alpha(1) L_{\alpha\beta}(12)\psi_\beta(2) + (i/2)\hat\psi_\alpha(1) D_{\alpha\beta}(12)\hat\psi_\beta(2),$$
$$S_1[\psi, \hat\psi] = -{}^{1}\!/_{2}\,\hat\psi_\alpha(1) V_{\alpha\beta\gamma}(123)\psi_\beta(2)\psi_\gamma(3). \tag{1}$$

Линейная часть оператора Навье–Стокса $L_{\alpha\beta}(12)$, корреляционная функция внешних случайных сил $D_{\alpha\beta}(12)$ и коэффициент $V_{\alpha\beta\gamma}(123)$ определяются стандартными соотношениями:

$$L_{\alpha\beta}(12) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_j^{(0)} \\ \partial_i^{(0)} & (\partial_t^{(1)} - \nu_0\Delta)\delta_{ij} \end{bmatrix} \delta(1-2),$$
$$D_{ij}(12) = \delta_{ij} D(|\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2|)\delta(t_1 - t_2), \tag{2}$$
$$V_{ijk}(123) = -\left[\delta_{ij}\partial_k^{(2)} + \delta_{ik}\partial_j^{(3)}\right]\delta(1-2)\delta(1-3),$$

где ν_0 – коэффициент молекулярной вязкости; λ_0 – формальный параметр разложения, который в конечном результате следует положить равным единице. Ключевые объекты рассмотрения – усредненный линейный отклик поля скорости на внешнее воздействие, функция Грина $G_{ij}(12) = i\langle\psi_i(1)\,\hat\psi_j(2)\rangle$ и корреляционная функция $C_{ij}(12) = \langle\psi_1(1)\psi_2(2)\rangle$.

Классической теории возмущений соответствует представление характеристического функционала системы

$$\Psi[\eta, \hat\eta] = \int d[\psi] d[\hat\psi] \exp\{i(S_0[\psi, \hat\psi] + \lambda_0 S_1[\psi, \hat\psi] + \eta\psi + \hat\eta\hat\psi)\}$$

в виде разложения по степеням $\lambda_0 S_1$. Разбиение действия на невозмущенную часть и возмущение следует выполнять с учетом конечной перенормировки амплитуд полей и физических параметров с добавлением в S_1 компенсирующих контрчленов [1]. Независимость результата от выбора констант перенормировки соответствует фундаментальному требованию инвариантности по отношению к перенормировкам ряда теории возмущений.

Согласно стандартной процедуре (см. напр., [1, 2, 4, 5]), в системе (1), описывающей динамику возмущенной атмосферы, перенормировку амплитуды поля $\hat{\psi}$ и коэффициента вязкости легко свести к заменам вида:

$$\hat{\psi} \to \hat{\psi}^R = z\hat{\psi},\ \lambda_0 \to \lambda = z^{-1}\lambda_0,\ \mathrm{D} \to \mathrm{D}^{\mathrm{R}} = z^{-2}D,\ \nu_0 \to \nu \tag{3}$$

и добавлению к S_1 контрчленов вида

$$\delta S_1 = -(z_{-1} - \hat{1})\psi_i \partial_t \psi_i + (\nu_0 z^{-1} - \hat{\nu})\psi_i \Delta \psi_i\,. \tag{4}$$

Удобно выбрать параметры перенормировки таким образом, чтобы в перенормированной теории полная функция Грина

$$G_{ij}^R(\mathrm{k},\omega) = P_{ij}(\mathrm{k})[-i\omega + \nu k^2 - \Sigma^R(k^2,\omega)]^{-1},\ (\mathrm{P_{ij}}(\mathrm{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j k^{-2})$$

в точке нормировки $\omega = 0$, $k^2 = \mu^2$ совпадала со свободной функцией Грина. Такой подход известен в квантовой теории многочастичных систем и, в частности, использовался при формулировке нового метода расчета потенциалов ионизации и спектральных параметров многочастичных квантовых систем (см., напр., [9–12]. Фактически требуется выполнение условий:

$$\Sigma^R(\mu^2,0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial\omega}\Sigma^R(\mu^2,\omega)\Big|_{\omega=0} = 0\,. \tag{5}$$

Ренорм-групповой анализ и выводы. Как обычно [4, 5], функцию $D(\mathbf{k})$ можно представить в виде:

$$D(\mathbf{k}) = D_0(k^2)^{-d/2+2-\varepsilon}.$$

При $\varepsilon = 2$ размерность параметра D_0 совпадает с размерностью скорости диссипации энергии в теории Колмогорова. При $\varepsilon = 0$ имеет место логарифмическая расходимость оператора собственной энергии. В этой ситуации фактический параметр разложения в ряд теории возмущений пропорционален ε и процедура ε-разложения в теории турбулентности сводится к аналитическому продолжению по ε от логарифмической теории (ε= 0) к колмогоровской ($\varepsilon = 2$). И тот, и другой случаи являются, на самом деле, модельными. Истинно реальной ситуации (скажем, флуктуациям ключевых характеристик гидродинамического поля в реальной атмосфере или в стандартных гидро- и гидроэкологических системах), как показывает анализ, будут соответствовать значения $\varepsilon=\varepsilon_{real}$ в интервале [2, 1; 2, 5] (для различных систем соответствующие значения даны в [6–8]). Следует также иметь ввиду, что в реальной возмущенной атмосфере процессы переноса импульса осуществляются как молекулярным, так и турбулентным вихревым движением (тривиальная ограниченность известной модели факела). Эффективную вязкость $\tilde{\nu}$ легко определить соотношением:

$$G_{ij}^{-1}(\mathrm{k},\omega)=[-i\omega+\tilde{\nu}(k^2,\omega)k^2]\delta_{ij}\,. \tag{6}$$

Естественно в силу инвариантности по отношению к перенормировкам ренормированные функции Грина (для 2 различных точек нормировки μ и μ_1) связаны соотношением типа [4, 5]:

$$z^{-1}(\mu^2)G^R(\mathrm{k},\omega;\mu^2)=z^{-1}(\mu_1^2)G^R(\mathrm{k},\omega;\mu_1^2)$$

или

$$\begin{gathered}z(\nu,\lambda,D;\mu^2)[-i\omega+\tilde{\nu}(k^2,\omega,\nu,\lambda,D;\mu^2)k^2]=\\=z(\nu_1,\lambda_1,D_1;\mu_1^2)[-i\omega+\tilde{\nu}(k^2,\omega,\nu_1,\lambda_1,D_1;\mu_1^2)k^2].\end{gathered} \tag{7}$$

На самом деле, далее нас интересует статическая эффективная вязкость:

$$\tilde{\nu}(k^2,\nu,\lambda,D;\mu^2)=\tilde{\nu}(k^2,\omega,\nu,\lambda,D;\mu^2)\big|_{\omega=0}\,,$$

которая описывает, скажем, в теории Эдвардса временную зависимость функции отклика и корреляций скорости. Условие нормировки (5), условие изменения нормировки при переходе от одной точки нормировки к другой:

$$Z(\nu,\lambda,D;\mu^2\big|\nu_1,\lambda_1,D_1;\mu_1^2)=z(\nu_1,\lambda_1,D_1;\mu_1^2)z^{-1}(\nu,\lambda,D;\mu^2)\,. \tag{8}$$

и соображения размерности приводят в нашем случае к стандартному результату: нормированная на 1 величина Z является функцией только безразмерного параметра $h=\lambda^2 D\nu^{-3}(\mu^2)^{-\varepsilon}$, отношения μ_1^2/μ^2 и удовлетворяет групповому правилу композиции [4, 5]:

$$\mathrm{Z}\left(\frac{\mu_1^2}{\mu^2},h_1\right)=\mathrm{Z}\left(\frac{\mu_1^2}{\mu_1^2},h_2\right)\mathrm{Z}^{-1}\left(\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2},h_2\right).$$

Функция $\tilde{h}$ (аналог инвариантного заряда в квантовой теории поля и или топологический заряд векторного солитона [1]) удовлетворяет уравнению:

$$\left\{-x\frac{\partial}{\partial x}+\beta(h)\frac{\partial}{\partial h}\right\}\tilde{h}(x,h)=0, \beta(h)=\left.\frac{\partial\tilde{h}(x,h)}{\partial x}\right|_{x=1}. \qquad (9)$$

Для интересующего нас класса задач проблема сводится к определению оператора собственной энергии в низшем приближении ренормированной теории возмущений. Стандартное определение дает:

$$\Sigma_{ij}^{R}(k,\omega)=\Sigma_{ij}(k,\omega)+i\omega(z^{-1}-1)\delta_{ij}-k^{2}(\nu_{0}z^{-1}-\nu)\delta_{ij}. \qquad (10)$$

Как обычно, первый член по определению дается выражением:

$$\Sigma_{ij}^{R}(\mathrm{k},\omega)=\lambda^{2}V_{imn}(\mathrm{k})\int\frac{d\,\mathrm{q}}{(2\pi)^{d}}\frac{d\Omega}{2\pi}G_{mm'}(\mathrm{q},\Omega)C_{nn'}(\mathrm{k}-\mathrm{q},\omega-\Omega)V_{m'n'j}(\mathrm{q}). \qquad (11)$$

Второй и третий члены учитывают тривиально вклад контрчленов (4). Для вычисления Σ можно воспользоваться соотношением (см., напр., [1, 4, 5, 11]: $\Sigma_{ij}(k^2, \omega) = (d-1)^{-1}P_{ij}(\mathbf{k})\delta_{ij} + \Sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, а связь константы перенормировки с оператором Σ имеет стандартный вид [1]: $z^{-1} = 1+ i\partial\Sigma(\mu^2, \omega)/\partial\omega|_{\omega=0}$. С учетом этого для эффективной вязкости в низшем порядке вычисления Σ по теории возмущений легко получить известное выражение [4, 5] с тем принципиальным отличием, что в дальнейшем вместо идеального $\varepsilon = 2$ мы будем брать реальное значение $\varepsilon_{\text{real}}$; при этом крайне существенна корректная реализация аналитического продолжения ε от $\varepsilon = 0$ к $\varepsilon = \varepsilon_{\text{real}}$ [6–8]:

$$\tilde{\nu}=\nu[1+A_{d}h(x^{-\varepsilon}-1)/\varepsilon],\; z^{-1}=1+B_{d}h,\; x=k^{2}/\mu^{2}, \qquad (12)$$

где

$$A_{d}=\frac{1}{8}\frac{d-1}{d+2}\frac{s_{d}}{(2\pi)^{d}},\; B_{d}=\frac{1}{8}\left\{\frac{d-1}{2}\left[\psi\left(\frac{d}{4}+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{d}{4}\right)\right]+\frac{2}{d}\right\}\frac{s_{d}}{(2\pi)^{d}},$$

$s_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь поверхности d-мерной сферы единично го радиуса, $\psi(x)=d\,\mathbf{ln}\,\Gamma(x)/dx$. РГ-функция: $\beta(h) = h(-\varepsilon + 3A_dh) \times$ $\times (1 + B_dh)$. Неявное решение (9):

$$\frac{\varepsilon/3A_{d}-\tilde{h}}{\tilde{h}}\left(\frac{1/B_{d}+\tilde{h}}{\varepsilon/3A_{d}-\tilde{h}}\right)^{\varepsilon B_{d}/(\varepsilon B_{d}+3A_{d})}=Cx^{\varepsilon}. \qquad (13)$$

Проведенный нами анализ, на наш взгляд, имеет принципиальное значение. Он фундаментально обосновывает и открывает перспективы анализа, прогноза эволюции атмосферной циркуляции, в том числе определения пространственно-временной структуры полей концентрации загрязняющих веществ в атмосфере, с использованием фундаментальных соотношений скейлинга, самоафинных, мультифрактальных моделей в конкретной численной реализации.

Важно также подчеркнуть, что такой принципиально новый подход к решению задач моделирования количественных параметров, динамики циркуляции воздуха, скажем, в пределах промышленного города и ее изменений под влиянием факторов антропогенной деятельности легко стыкуется с формализмом функций памяти и эволюционных уравнений (типа Фоккера–Планка, уравнений вида [7] и т. д.). Действительно, для пропагатора динамической характеристики A атмосферной системы

$$C(t) = \langle A(t)\, A(0)\rangle = \langle A(0)\, A(-t)\rangle = \langle A(0)e^{-iLt}\, A(0)\rangle \qquad (14)$$

можно записать динамическое уравнение в z-представлении (см., напр., [7])

$$C(z) = \frac{\mathrm{i}\beta^{-1}}{z - \Omega + \mathrm{i}\Sigma(z)}\chi\,, \qquad (15)$$

с обычным дисперсионным соотношением в знаменателе: $D(z) = \Sigma(z) + i\Omega$, где $\Sigma(z)$ определяется выражением типа (10). Стандартное преобразование Лапласа, примененное к уравнению движения для $C(t)$, дает:

$$\left[\partial_t + \mathrm{i}\Omega\right]C(t) + \int_0^i d\tau\Gamma(t-\tau)C(\tau) = 0,\ t > 0\,. \qquad (16)$$

Поиск конкретных адекватных выражений для функции памяти Г и других величин применительно к конкретным задачам прикладной экологии, мезометеорологии и, в частности к задачам моделирования структуры полей концентраций загрязняющих веществ воздушного бассейна промышленного города, их пространственно-временной эволюции, естественно требует выполнения стандартных процедур калибровки и фиттинга. Как показывает предварительный анализ динамики загрязнения воздушного бассейна города Одессы и т. д., изложенный метод открывает принципиально новую возможность адекватного и эффективного решения искомых задач.

Литература

1. *Боголюбов Н.Н.. Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. – М.: Наука, 1984.

2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.Д.* Физическая кинетика. – М., 1980.

3. *Монгин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. – М., 1967.

4. *Forster D., Nelson D.R., Stephen M.J.* Correaltion functions and hydrodynamical fluctuations. – N-Y.:Plenum., 1987.

5. *Теодорович Э.В.* К вычислению универсальных констант при описании турбулентности методом ренормгруппы // Известия АН СССР: Серия «Механика жидкостей и газов». – 1987. – № 4. – С. 29.

6. *Mandel'brot D.* Fractal Geometry of nature. – N.-Y.: Plenum, 1985.

7. *Лобода Н.С.* Формализм функций памяти и мультифрактальный подход в задачах моделирования годового стока рек и его изменения под влиянием факторов антропогенной деятельности // Метеорологія, кліматологія та гідрологія. – 2002. – № 45. – С. 140–146.

8. *Glushkov A.V., Balan A.K., Balanyuk E.P.* New method of multi-factor system and multifractal modelling in tasks of calculation of hydrological and ecological systems / Ecology of Siberia, the Far East and the Arctic. – 2003. – Vol. 3. – P. 71–76.

9. *Glushkov A.V., Ivanov L.N., Ivanova E.P.* Radiation decay of Atomic States. Generalized Energy Approach // Autoionization Phenomena in Atoms. – M.: Moscow University, 1986. – P. 58–160.

10. *Глушков А.В.* Универсальный квазичастичный функционал плотности в релятивистской теории // Опт. Спектр. – 1989. – Т. 36. – С. 31–39.

11. *Глушков А.В.* Новый подход к расчету потенциалов ионизации молекул на основе метода функций Грина // Журн. физ. хим. – 1992. – Т. 68. – С. 1259–1272.

12. *Glushkov A.V., Ivanov L.N.* Radiation Decay of Atomic States: ato mic residue and gauge noninvariant contributions // Phys. Lett. A. – 1992. – Vol. 170. – P. 33–37.

13. *Бунякова Ю.Я.* Статистические оценки среднемесячных концентраций загрязняющих веществ воздушного бассейна г. Одессы // Метеорологія, кліматологія та гідрологія. – 2002. – № 45. – С. 231–234.

A. V. Glushkov, V. N. Khokhlov, Yu. Ya. Bunyakova

RENORM-GROUP APPROACH TO SPECTRUM OF TURBULENCE IN ATMOSPHERE

At first it is carried out a renorm-group analysis of the turbulence spectrum in the atmosphere with orientation the industrial city circulation and applied environment problem

Поступила 26.02.2004