ДЕЯКІ ПИТАННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В. В. Хайдуров

ПВНЗ «Європейський університет», Черкаська філія, м.Черкаси, Україна
allif@ukr.net

У нинішній час обернені задачі теплопровідності (ОЗТ) є досить актуальними. Вони виникають у різних галузях науки та техніки. Відомо, що для розв'язання однієї ОЗТ необхідно розв'язувати велику кількість прямих задач теплопровідності (ПЗТ). Очевидно, що для розв'язання подібного класу задач потрібно досить багато обрахунків, які займають довгий час. У роботі запропоновані методи, які оптимізують кількість обчислень для отримання чисельного розв'язку даного класу задач. Тестування методів виконано на точкових обернених задачах теплопровідності.

***Ключові слова**: обернена задача теплопровідності (ОЗТ), чисельний розв'язок ОЗТ, квадратичний функціонал, обмеження у вигляді диференціальних рівнянь.*

УДК 519.63

У роботі описано досить актуальне завдання оптимізації. Потрібно знайти оптимальну температуру промислової печі, система опалення якої є на основі електричних нагрівачів.

Дослідження, яке описане у статті, присвячена обчисленню значень температур точкових нагрівачів для підтримки температури в печі. Неважко здогадатись, що кожна із задач цього дослідження є задачею оптимізації.

Задача оптимізації звучить наступним чином. У піч вбудовані точкові нагрівачі. Потрібно знайти такі температури цих нагрівачів, щоб температура на об'єкті печі була близька до наперед заданої.

Розрахунок температурного полів сформульованої задачі здійснюється з методом скінченних елементів.

Мета роботи.

Розробка та апробація модифікованого методу Ньютона, який оптимізує кількість обчислень при розв'язанні точкових задач теплопровідності.

Технічна постановка задачі оптимізації.

В піч покладено об'єкт. Піч не спроможна нагріти об'єкт до заданої температури. З метою підвищення ефективності її роботи, у неї вмонтовані точкові нагрівачі, розташування яких задається двома просторовими координатами. Потрібно знайти такі значення температур цих нагрівачів, щоб температура на об'єкті була близька до наперед заданої. Розрахувати температурне поле всередині печі, яке утвориться в результаті дії цих нагрівачів при знайдених значеннях їх температур.

Для простоти ми обмежимося геометрією задачі елементарної форми: об’єкт печі-прямокутник, який поміщено в область даної печі (див. рис1).

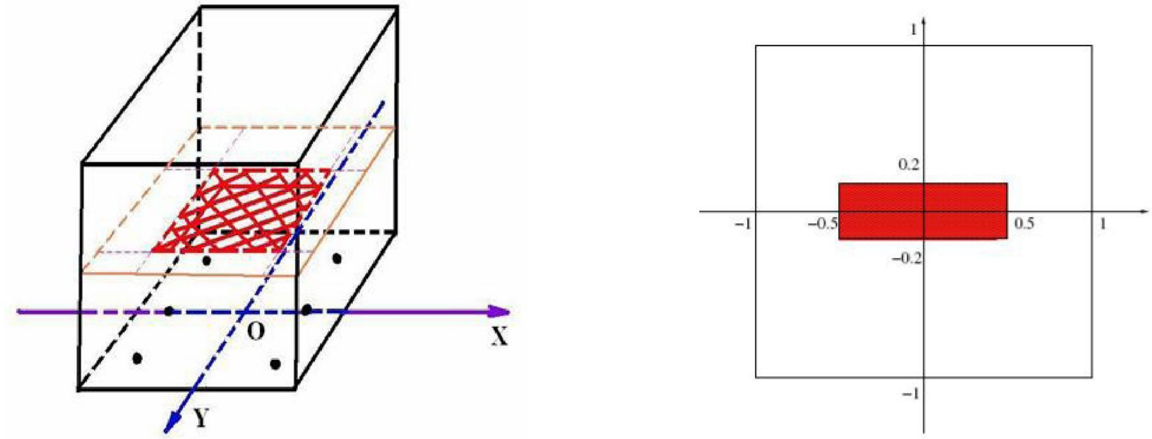

Рис.1 – Положення об’єкту всередині печі.

Рівняння в частинних похідних, яке описує розповсюдження тепла всередині печі з часом, має наступний вигляд

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \left(k \nabla T \right) \qquad (1)$$

Надалі будемо використовувати стаціонарний процес, тобто коли $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Рівняння (1) набуде вигляду (2):

$$\nabla \left(k \nabla T \right) = 0 \qquad (2)$$

Повний розв’язок стаціонарної задачі теплопровідності у заданій області містить:

1) Граничні умови: $\partial D = \partial D_D + \partial D_N$, $(x, y) \in \partial D_D : T = T(x, y)$; $(x, y) \in \partial D_N$: $\partial T / \partial n = p(x, y)$. Тут ∂D – границя області, ∂D_D – частина границі (може бути порожня), на якій задано умову Дирихле та ∂D_N - частина границі, на якій задано умову Неймана, n – нормаль до границі області.
2) Залежність параметрів задачі від координат та температури: $k = k(x, y, T)$.

Методи Ньютона.

При розв’язанні поставленої задачі, а саме при мінімізації квадратичного функціоналу, який утворюється в результаті розв’язання задачі, буде отримана система нелінійних рівнянь виду:

$$\frac{\partial J}{\partial (\alpha_i)} = 0, i = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

Система (3) буде розв’язуватись методом Ньютона та його модифікаціями, які будуть описані нижче.

Тепер задачу оптимізації можна поставити наступним чином – серед існуючих методів спуску та розроблених модифікацій до методів типу Ньютона обрати найбільш відповідні до поставленого класу задач і скоротити для них кількість викликів функції розв’язку ПЗТ.

При розв’язанні подібного класу задач, похідні функціоналу по кожному його параметру потрібно задавати численно, оскільки розв’язання подібних задач може бути отримано тільки чисельним шляхом (у вигляді таблиці значень). Перед тем, як записувати формули для методів запишемо спочатку класичний метод Ньютона для поставленої ОЗТ.

$$\begin{aligned} H^k \Delta\overline{\alpha}^k &= -R^k \\ \overline{\alpha}^{k+1} &= \overline{\alpha}^k + \Delta\overline{\alpha}^k \end{aligned}, \tag{4}$$

де $G = (H_{ij}) = \left(\partial^2 J / \partial\alpha_i \partial\alpha_j\right)$ – матриця Гессе, $\Delta\overline{\alpha} = (\Delta\alpha_1,...,\Delta\alpha_n)^T$ – вектор-стовпчик приростів параметрів, $R = (R_1,...,R_n)^T = \left(\partial J/\partial\alpha_1,...,\partial J/\partial\alpha_n\right)^T$ – вектор-стовпчик похідних цільового функціоналу.

На основі методу середніх та класичного методу Ньютона, можна записати формули для мінімізації функціоналу зі змінним кроком β (5):

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) \\ \overline{\alpha}^{(k+1)} &= \overline{\alpha}^{(k)} - 2 \cdot \left(H\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) + H\left(\overline{z}\right)\right)^{-1} J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Література

1. *Klibanov M.V.* Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem. / M.V. Klibanov, L. Beilina. – USA.: Springer, 2012. – 407p. ISBN 978-1-4419-7804-2.