

МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ МЕХАНІЧНИХ ЗБУДЖЕНЬ У ОДНОВИМІРНИХ НЕОДНОРІДНИХ ГРАНУЛЬОВАНИХ ЛАНЦЮЖКАХ: ВПЛИВ ГРАНИЧНИХ УМОВ

У роботі досліджується рівняння руху механічного збудження в одновимірному вертикальному гранульованому ланцюжку із слабкою нелінійністю. Показано, що типові граничні умови задовольняє лінійна суперпозиція точних розв'язків задачі у вигляді циліндричних функцій Беселя першого роду. Отримані розв'язки разом із встановленим мульти-хвильовим характером динаміки збуджень дозволяють здійснити адекватну параметризацію даних з вивчення переносу імпульсу у модельних гранульованих матеріалах.

Ключові слова: динамічні системи, гранульовані матеріали, герцевській контакт, нелінійний ланцюжок, транспорт енергії/імпульсу.

Вступ. Проблема розповсюдження хвиль у дискретних низько вимірних системах є традиційним об'єктом досліджень у різних розділах хвильової механіки та теорії динамічних систем. Останнім часом вона набула актуальності у зв'язку із появою штучно синтезованих об'єктів – гранульованих ланцюжків, транспортні властивості яких відносно зовнішніх збуджень є важливою задачею теорії із чисельними прикладними застосуваннями [1-7].

В роботі аналізуються аналітичні розв'язки задачі про передачу зовнішнього збудження уздовж одновимірної гранульованої ґратки, у границі, коли нелінійний (герцівський) ланцюжок моделюється неоднорідною ліанеризованою системою із силовими сталими, які залежать від положення контакту.

Точні розв'язки керуючого рівняння, яке має форму функціонально-диференціального, як показано у [8], мають форму циліндричних хвиль і описуються за допомогою функцій Беселя цілого порядку (I-го роду). В нашій роботі показано, що для довільних граничних умов (які відповідають різним типам збуджень) розв'язок керуючого рівняння не можна представити у вигляді одиначної хвилі, а можна завдати їхньою лінійною комбінацією. Отриманий результат має сприяти більш адекватній параметризації даних з динаміки механічних збуджень у гранульованих ланцюжках, які складають важливий сегмент теорії мікро-механічних систем.

1 Рівняння руху для механічних збуджень

Рівняння для функції зміщення n -ої частинки z_n , яке відповідає переносу імпульсу у вертикальному гранульованому ланцюжку, який знаходиться у гравітаційному полі, можна записати у такому вигляді

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} = \gamma \left\{ [d - (z_n - z_{n-1})]^\delta - [d - (z_{n+1} - z_n)]^\delta \right\} + g, \quad (1)$$

де m - маса окремої частинки-гранули, d - діаметр недеформованої частинки, $\gamma = \frac{E\sqrt{d}}{3m(1-v^2)}$ - силова стала, E - модуль Юнга, v - константа Пуассона [9].

Параметр нелінійності контакту δ може набувати різних значень в залежності від типу

контакту. Наприклад, у разі міжчастинкових контактів герцевського типу, він дорівнює $\delta = 3/2$.

У подальшому покладаємо, що наш ланцюжок складається із гранул з одного матеріалу та з однаковими радіусами кривизни контактів (які суттєво впливають на параметр нелінійності δ).

Додержуючись [8], введемо нову змінну φ_n , яка визначає відхилення частинок від положення рівноваги,

$$\varphi_n = z_n - \left[(n-1)d - \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \right], \quad (2)$$

де $\varepsilon_k = d - (z_{k+1} - z_k)$ - величина перекриття частинок в межах контакту за умови знаходження усіх частинок ланцюжка у стані статичної рівноваги (стані спокою). Беручи $z_n'' = 0$ у рівнянні (1), найпростіше рівноважне перекриття частинок ε_n знаходимо у такому вигляді

$$\varepsilon_n = \left(\frac{gn}{\gamma} \right)^{1/\delta}. \quad (3)$$

Підставляючи (2) та (3) у рівняння руху (1), після лінеаризації (див. [8]), отримуємо наступне рівняння

$$\frac{d^2\varphi_n}{d\tau^2} = \kappa_n \left\{ \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} \varphi_{n-1} - \left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} + 1 \right) \varphi_n + \varphi_{n+1} \right\}, \quad (4)$$

де $\tau = t\sqrt{g\delta} \left(\frac{\gamma}{g} \right)^{1/2\delta}$, $\kappa_n = n^{1-1/\delta}$. Враховуючи, що із збільшенням номера частинки

практично для всіх внутрішніх точок системи $\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} \rightarrow 1$, отримуємо замість (4)

$$\frac{d^2\varphi_n}{dT^2} = \varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}, \quad (5)$$

де $T = \tau\sqrt{\kappa_n}$.

Рівняння хвильової дифузії (5) належить до класу функціонально-диференціальних. Користуючись загальним базисом власних функцій дискретного оператора хвильової дифузії [10], у [8] було знайдено точний розв'язок (5), який описується циліндричними хвилями і має такий вигляд

$$\varphi_n = C \cdot J_{2n}(2T), \quad (6)$$

де $J_\nu(x)$ - функція Беселя 1-го роду з цілими значеннями порядку ν від аргументу x , C - стала. Як випливає із припущень, які було зроблено при отриманні рівняння (5), розв'язок (6) задовільняє рівняння (5) практично у всіх внутрішніх точках, але очевидно, за винятком границь $n \in (1, N)$.

На рис.1 наведені результати чисельних розрахунків (зображені точками), проведених за допомогою рівняння (5) для першого із двох розглянутих типів граничних умов: $\varphi_1(0)=1, \varphi_1'(0)=0$ (т.з. збудження за допомогою початкового зміщення).

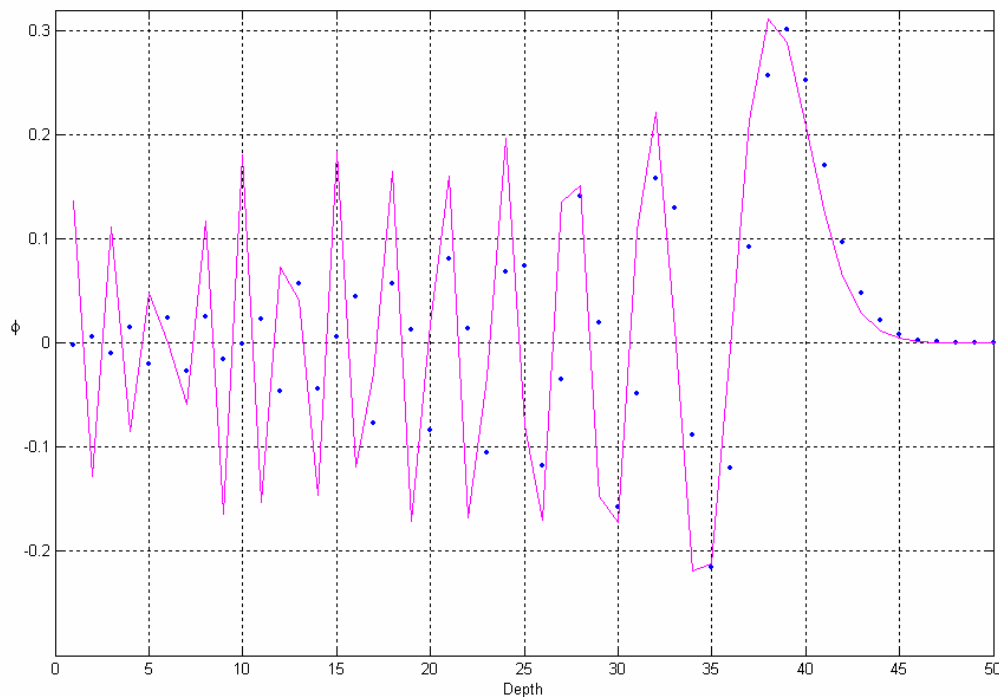


Рис.1 – Функція зміщення φ_n для одновимірного напівобмеженого ланцюжка за результатами чисельних розрахунків (зображується точками) та аналітичного розв'язку (6) (суцільна лінія) для граничних умов у вигляді: $\varphi_1(0)=1, \varphi_1'(0)=0$.

Зважаючи на те, що рівняння (5) є лінійним та задовільняє умови скейлінгу, доцільним є усунення помітних розбіжностей аналітичних та чисельних розв'язків, які спостерігаються на рис.1 на початку системи, шляхом побудови лінійної комбінації власних функцій оператора хвильової дифузії (6).

Використання замість (6) лінійної комбінації функцій базису у вигляді

$$\varphi_n(T) = x_0 \cdot [J_{2n-2}(2T) + J_{2n}(2T)], \quad (7)$$

де $x_0 = \varphi_1(0)$ - амплітуда початкового збудження для випадку, коли імпульс входить у ланцюжок з боку першої частинки (верхньої границі ланцюжка), дозволяє отримати відмінне співпадання даних чисельних розрахунків із аналітичним розв'язком.

Відзначимо, що розв'язок (7) є точним та на відміну від (6) задовільняє рівняння (5) у будь-якій внутрішній точці ланцюжка, у тому числі і у його границях (див. рис.2).

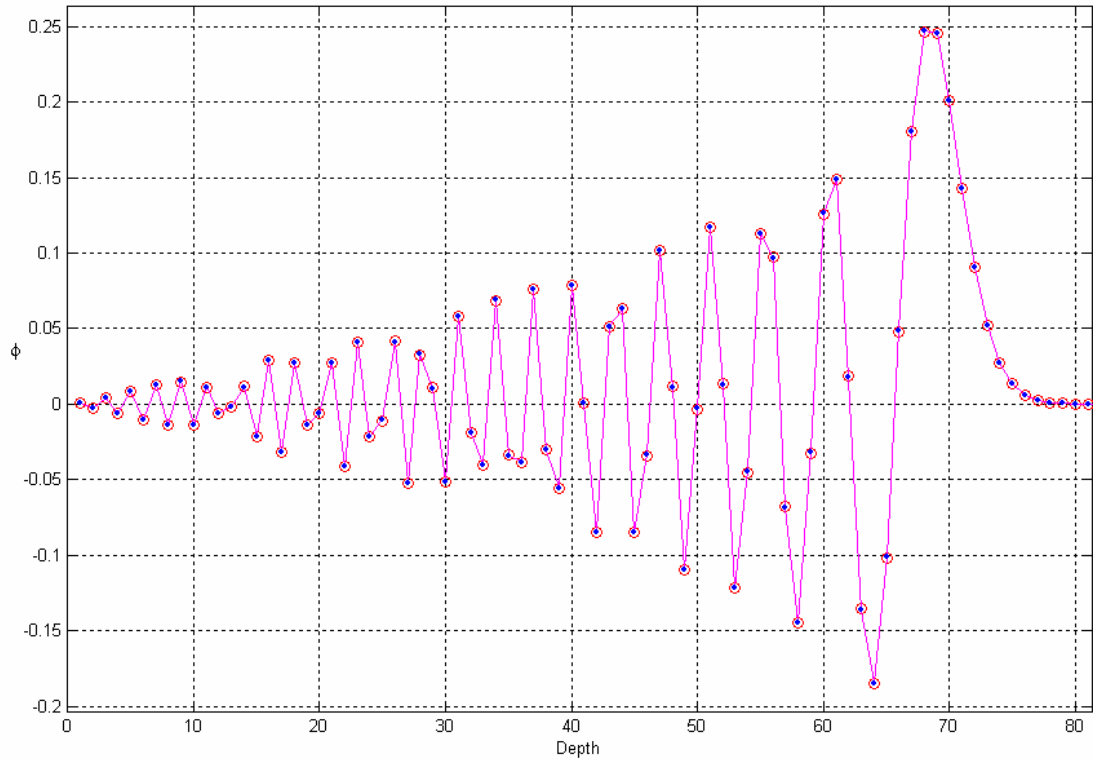


Рис.2 – Функція зміщення φ_n для одновимірного напівобмеженого ланцюжка за результатами чисельних розрахунків (суцільна лінія) та аналітичного розв'язку (7) (точки), для граничних умов у вигляді: $\varphi_1(0) = x_0$, $\varphi_1'(0) = 0$.

Розглянемо тепер поведінку функції зміщення у випадку збудження, яке відповідає граничним умовам у вигляді: $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1'(0) = v_0$ (т.з. динамічне збудження). Вибираючи функцію $\varphi_n(T)$ у вигляді лінійного перетворення

$$\varphi_n(T) = v_0 \cdot \int_0^T [J_{2n-2}(2T) + J_{2n}(2T)] dT, \quad (8)$$

де $v_0 = \varphi_1'(0)$ - амплітуда початкового збудження, у випадку коли імпульс входить у ланцюжок зверху ланцюжка, та виконуючи чисельні розрахунки, результати яких наведені на рис.3, отримуємо повне співпадання даних чисельних розрахунків із аналітичним розв'язком.

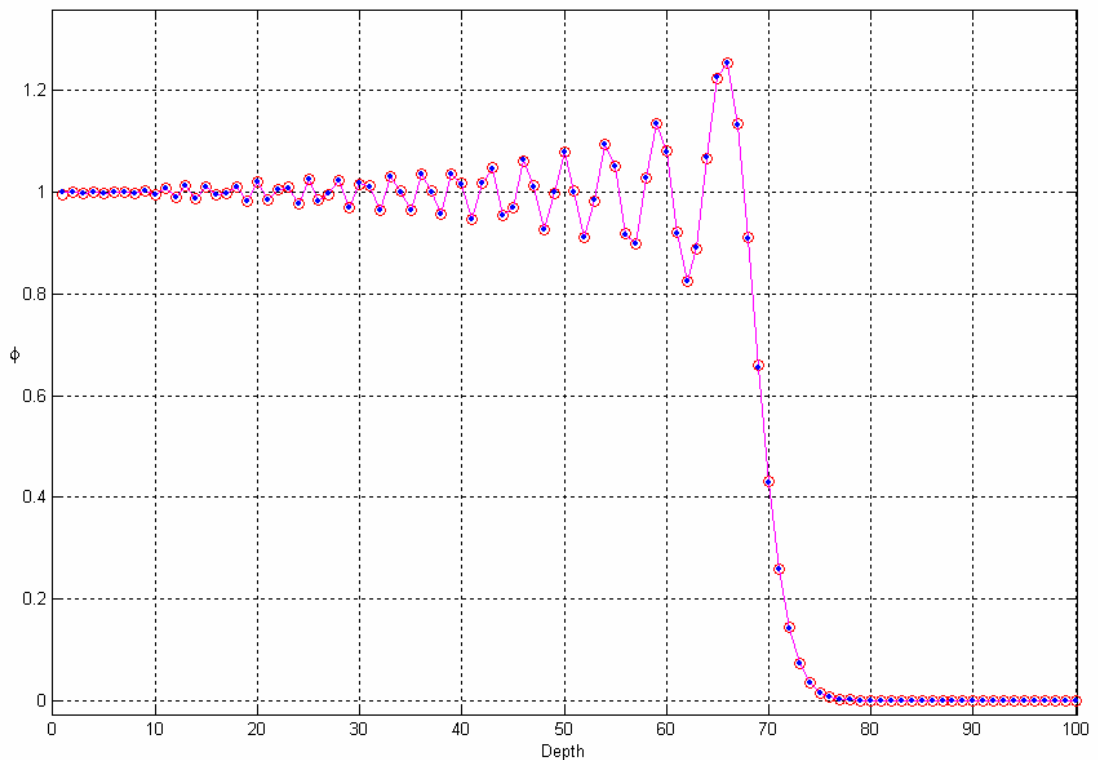


Рис.3 – Функція зміщення φ_n для одновимірного напівобмеженого ланцюжка за результатами чисельних розрахунків (суцільна лінія) та аналітичного розв’язку (8) (точки) для граничних умов у вигляді: $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1'(0) = v_0$.

Коментуючи дані, наведені на рис.2-3, зауважимо, що перенесення імпульсу у ланцюжку не може описуватись у однохвильовому наближенні, а має спиратися на мульти-хвильовий базис.

Розглянемо тепер випадок багаторазового відбиття сигналу від границь системи, в ході якого відбувається накладення відбитих та падаючих хвиль. Нижченаведені суперпозиції розв’язків, які даються співвідношеннями (7) або (8), дозволяють точно відтворити хід функції зміщення при відбитті сигналу від границь ланцюжка (див. рис.4) :

$$\varphi_n(T) = x_0 \cdot \sum_{k=1}^K \text{sign}(v) [J_{v-1}(2T) + J_{v+1}(2T)], \quad (9)$$

$$\varphi_n(T) = v_0 \cdot \sum_{k=1}^K \text{sign}(v) \int_0^T [J_{v-1}(2T) + J_{v+1}(2T)] dT, \quad (10)$$

де $v = \text{sign}(\sin \frac{\pi k}{2}) \cdot (2n - 1) + \text{sign}(\cos \frac{\pi k}{2}) \cdot (k - \text{mod}(k, 2))(2N - 1)$; $\text{sign}(f)$ - знак функції f ; $\text{mod}(k, 2)$ - залишок від цілочисельного ділення на 2; K - кратність проходження сигналом ланцюжка.

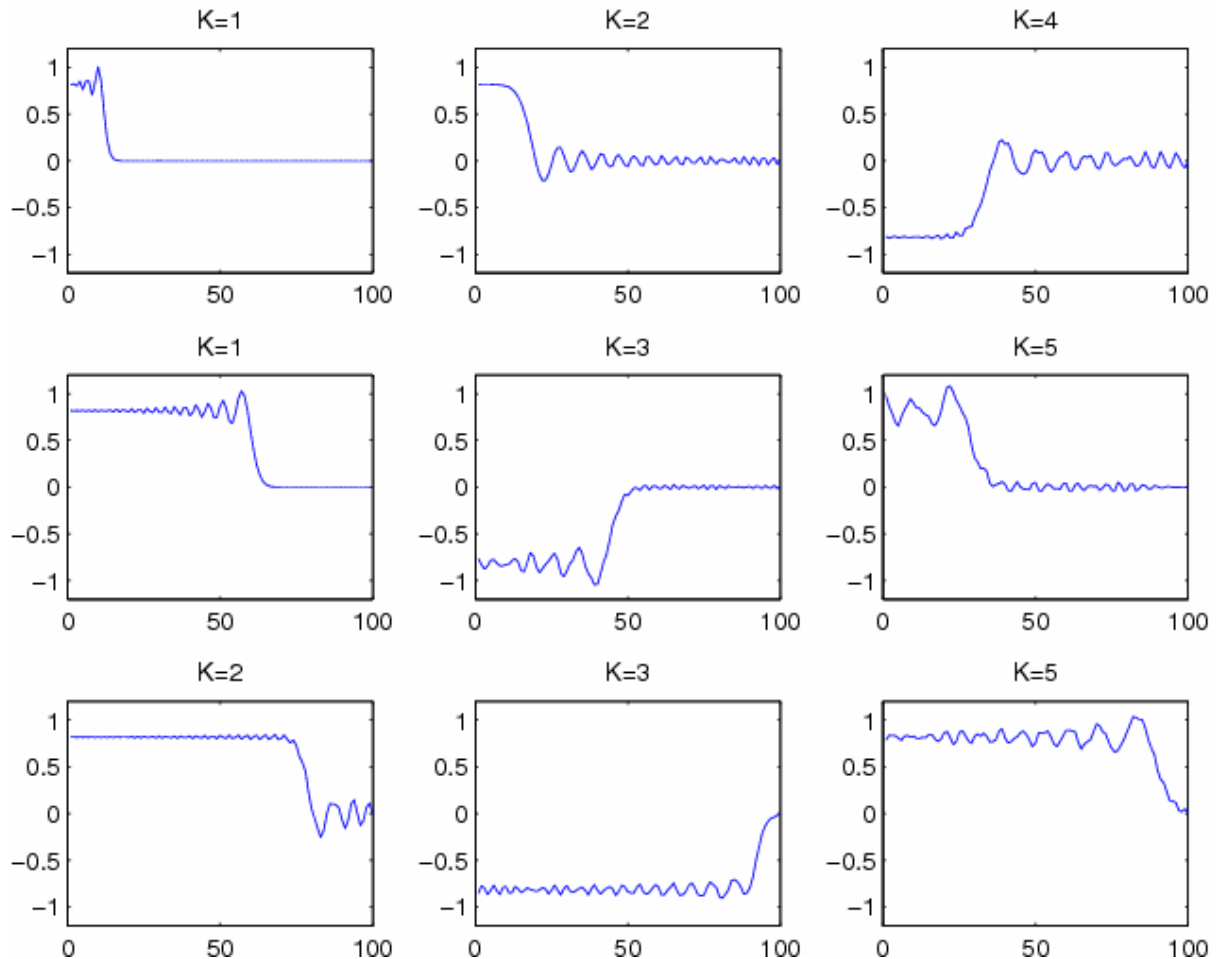


Рис.4 – Поведінка функції зміщення φ_n у випадку багаторазового відбиття імпульсу від границь ланцюжка ($N = 100$), збудженого динамічно ($\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1'(0) = v_0$) за результатами чисельних розрахунків та аналітичного розв'язку (10) (які повністю співпадають).

Висновки. У роботі розглянуті розв'язки функціонально-диференціального рівняння, яке описує розповсюдження початкового імпульсного збурення у 1D вертикальному гранульованому ланцюжку.

У термінах, знайдених у [8] точних розв'язків керуючого рівняння у вигляді циліндричних функцій запропоновані апроксимації функції зсуву, які задовільняють рівняння руху у всіх точках ланцюжка, у тому числі на його границях. На підставі проведеного дослідження зроблено висновок про мульти-хвильовий характер переносу імпульсу вздовж неоднорідного ланцюжка.

Отримані результати мають сприяти більш адекватній параметризації експериментальних даних з вивчення розповсюдження імпульсу у гранульованих матеріалах [5].

Список литературы

1. *Bhatnagar P.L.* Nonlinear waves in one dimensional dispersive systems.-Oxford: Clarendon, 1979.-250p.
2. *Jackson E.A.* Perspectives of nonlinear dynamics.-Cambridge, 1990.-350p.
3. *Nesterenko V.* Dynamics of Heterogeneous materials.-New York: Springer, 2001.-350p.
4. *Coste C., Falcon E., Fauve S.* Stationary states in vertical cradle excited from the bottom //Phys. Rev. E-1997.-Vol.56.- P.6104.
5. *Sen S., Hong J., Bang J., Avalos E., Doney R.* Soliton-like waves in low-dimensional granular systems //Phys. Rep.-2008.-N462, P.21-66.
6. *E.Somfai, J-N.Roux, T.Snoeijer, M.van Hecke, W.van Saarloos.* Dispersive waves in 1D granular chain //Phys. Rev. E-2005.-Vol.72.-P.021301.
7. *Герасимов О.І., Вандевалле Н., Співак А.Я., Худинцев М.М., Люме Г., Дорболло С., Клименков О.А.* Стационарні стани у 1D системі непружних частинок //Укр.фіз.журн. - 2008.- Т.53, № 11. – С.1129-1137.
8. *Герасимов О.І.* Щодо двох точних розв'язків задачі про транспорт імпульсу в неоднорідному гранульованому ланцюжку //Доповіді НАН України. - 2012 (прийнято до друку).
9. *Landau L.D.* Theory of elasticity, 3rd ed.- Heinemann: Butterworth, 1986.-200p.
10. *Pinney E.* Ordinary Difference-differential equations.-Berkley and Los Angeles: University of California Press, 1955.-500p.

Моделирование распространения механических возмущений в одномерных неоднородных гранулированных цепочках: влияние граничных условий.

Герасимов О.І., Співак А.Я.

В работе исследуется уравнение движения механического возмущения в 1D вертикальной гранулированной цепочке со слабо-нелинейными контактными взаимодействиями. Показано, что произвольным граничным условиям удовлетворяет линейная суперпозиция цилиндрических функций Бесселя первого рода. Полученные решения, которые, как было показано ранее, доставляют точное решение задачи для внутренних точек системы, способствуют параметризации экспериментальных данных по изучению распространения импульса в низкоразмерных гранулированных материалах.

Ключевые слова: динамические системы, гранулированные материалы, герцевский контакт, нелинейная цепочка, транспорт энергии/импульса.

Modeling of impulse propagation in 1D inhomogeneous granular lattices: the influence of boundary conditions.

Gerasyimov O., Spivak A.

We perform the linearized equations governing the impulse propagation along a 1D weakly nonlinear inhomogeneous granular chain of identical beads. It has been shown that the rigorous solution which satisfy considered problem in every point (including boundaries) can be choose in form of linear combination of former basis which consist on Bessel function an integer order and valid in the internal points only. Obtained results thought to be useful practically for the more adequate parameterization of impulse transport in low-dimensional granular chains.

Key words: dynamic systems, granular materials, Hertzian contact, nonlinear chain, energy/impulse transport.