

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗБІРНИК МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК
ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з дисципліни “Математичне моделювання
гідроекологічних систем”

Одеса 2005

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗБІРНИК МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК
ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з дисципліни “Математичне моделювання
гідроекологічних систем”

для студентів 5 курсу екологічного факультету
Спеціальність: екологія та охорона
навколишнього середовища
Спеціалізація: гідроекологія

Затверджено”
на засіданні методичної комісії
екологічного факультету
Протокол № _____ від _____ 2005 р.

Одеса 2005

Збірник методичних вказівок до практичних робіт з дисципліни “Математичне моделювання гідроекологічних систем” для студентів 5 курсу денної форми навчання за спеціальністю “Екологія та охорона навколишнього середовища”. / Укладач: доц. Белов В.В., Одеса, ОДЕКУ, 2005 р. 21с. укр. мова.

ЗМІСТ

Передмова	5
1. Розрахунки рівноважної концентрації кисню в природних водах	5
2. Розрахунок концентрації кисню при органічному забрудненню річки.....	7
3. Рівняння нормального розмноження.....	10
4. Рівняння вибуху.....	11
5. Логістична крива.....	12
6. Квоти вилову.....	13
7. Вилов з відносною квотою.....	14
8. Диференціальне рівняння системи хижак-жертва.....	15
9. Імовірнісний підхід до розрахунків кількісних змін у екосистемах.....	17
Додатки	19
Література	21

ПЕРЕДМОВА

У збірнику розглядаються практичні роботи з дисципліни «Математичні методи моделювання гідроекосистем» для спеціальності «Гідроекологія». Методичні вказівки складені з врахуванням того, що студенти вже мають базові знання з математики, гідрохімії, гідробіології, гідроекології. Тому вказівки включають задачі, зв'язані з застосуванням цих знань для математичного моделювання, яке необхідне для написання дипломних проєктів та в практичній роботі спеціалістів.

Мета і завдання дисципліни — засвоєння типових приймів математичного моделювання для найбільш поширених задач гідроекології.

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні знати:

- оцінки головних показників гідрологічного режиму водного об'єкту для використання їх при моделюванні;
- гідрохімічних і гідробіологічних показників для формування бази вихідних даних гідроекологічної моделі;
- вибору методів розрахунків для реалізації моделей;
- оцінки результатів розрахунків якості вод і біологічної продукції.

Студенти повинні набути вміння:

- розрахувати концентрації кисню в природних водах;
- розрахунки трансформації органічного забруднення;
- розрахувати біологічну продуктивність гідроекосистем;
- визначити квоти вилову біологічної продукції;
- побудувати криви сукцесії;

Дисципліна "Математичне моделювання гідроекологічних систем" базується на дисциплінах учбового плану за напрямком "гідрометеорологія", "екологія": вища математика, лінійна алгебра, фізика, метеорологія і кліматологія, екологія, фізична гідрологія, гідроекологія, гідробіологія, гідрохімія, загальна і річкова гідравліка і інші.

Контроль поточних та залишкових знань має форму письмових робіт згідно розробленої системи модульного контролю.

1 РОЗРАХУНКИ РІВНОВАЖНОЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ КИСНЮ В ПРИРОДНИХ ВОДАХ

Кисень в воду надходить з припливом води, розчиненням атмосферного кисню, і надходженням з зелених водоростей. Надходження кисню з водоростей розглянути в дисципліні "Гідроекологія". У даному завданні розглянута методика розрахунку швидкості розчинення у воді атмосферного кисню.

Кількість кисню, розчиненого у воді, залежить від температури води і парціального тиску. При парціальному тиску кисню в атмосферному повітрі, рівному 0,21 ат, в умовах контакту води з повітрям при атмосферному тиску 760 мм рт. ст. граничний (рівноважний) зміст кисню залежить від температури води (рис.1).

Концентрація кисню $C_{ки}$ може бути виражена в мг/дм³ чи см³/дм³. Перехід між цими розмірностями виражається співвідношенням:

$$1 \text{ мг/дм}^3 = 1.429 \text{ см}^3/\text{дм}^3.$$

Для використання залежності, показаної на рис.1, у розрахункових моделях можна цю залежність апроксимувати рівнянням:

$$C_{ки} = 14,22e^{-0,0219 t} . \quad (1)$$

За рахунок зелених водоростей концентрація кисню у воді може бути вище рівноважної. Зниження концентрації кисню в порівнянні з величинами, приведеними на рис.1 свідчить про забруднення води. У річках, що використовуються для господарсько-питного водопостачання, зміст розчиненого кисню не повинний бути менш 4 мг/л. При концентрації кисню нижче 1- 1.5 мг/л гине риба.

При зміні кисню C , мг/дм³ нижче рівноважного відбувається

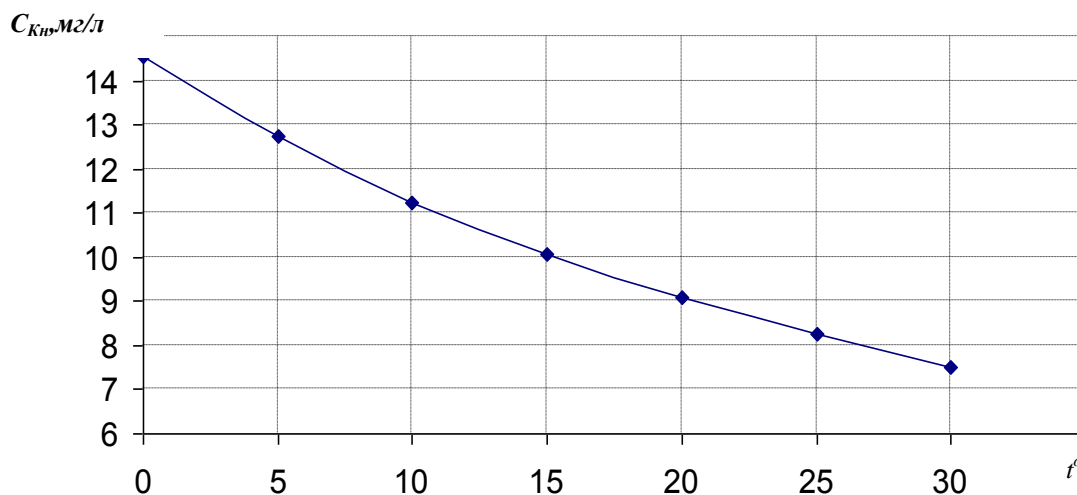


Рис. 1- Рівноважна концентрація розчиненого у воді кисню при тиску 760 мм рт.ст. і різних температурах води

розчинення атмосферного кисню у воді. Швидкість розчинення A , мг/дм³ добу можна розрахувати за рівнянням:

$$A=(C_{Kn} - C)(1 - 10^{kT}), \quad (2)$$

де k — коефіцієнт аерації, 1/добу, T — час, доба.
Коефіцієнт аерації розраховується за рівнянням:

$$k=0.0417 w h^{-1} + u^{0.5} h^{-1.5}, \quad (3)$$

де w — швидкість вітру, м/с; h — середня глибина, м; u — середня швидкість течії, м/с.

Контрольні питання

1. Від чого залежить рівноважна концентрація кисню у воді?
2. Про що свідчить зниження концентрації кисню нижче рівноважної?
3. Від чого залежить швидкість розчинення атмосферного кисню у воді?

Завдання

Визначити за наведеними вище формулами зміни концентрації кисню за рахунок аерації води в зонах водойми: мілководної — глибини до 2 м, середніх глибинах — 2-5 м, великих глибинах — 5-10 м при різних значеннях початкової концентрації. Визначити час, необхідний для досягнення рівноважної концентрації кисню у воді, при різних температурах, швидкостях вітру і течії. Побудуйте криви накопичення кисню в воді з ходом часу. Проведіть аналіз результатів розрахунку.

Для обчислень зручно використовувати комп'ютерну професійну систему математичного моделювання MatLab. Програма для обчислень Kislorod.m і вихідні дані по «умовчанню» наведені в додатку 1.

***Звітний матеріал:** графіки змін концентрації кисню при різних початкових його концентраціях, глибині водойми, температури води, швидкості течії, швидкості вітру. Аналіз результатів.*

2 РОЗРАХУНОК КОНЦЕНТРАЦІЇ КИСНЮ ПРИ ОРГАНІЧНОМУ ЗАБРУДНЕННЮ РІКИ

У випадках забруднення річкової води органічними відходами, розкладання відходів відбувається під дією бактерій, що використовують розчинений у воді кисень. Концентрацію відходів вимірюють біохімічним споживанням кисню (БСК), що являє собою кількість кисню на одиницю об'єму води, необхідної для розкладання відходів. Одиниця виміру БСК — кількість кисню в міліграмах на літр води.

Швидкість розкладання відходів пропорційна їх концентрації за умовою, що у воді присутня достатня кількість кисню для підтримки процесу. Для опису БСК використовуємо символ B , і швидкість

розкладання відходів виразимо формулою:

$$\frac{dB}{dt} = -k_1 B, \quad (4)$$

де k_1 — постійна добору кисню, що виміряються в одиницях 1/добу. При відсутності відходів концентрація кисню коливається біля рівноважного значення c_p — дивися рівняння (1) :

При наявності відходів реальна концентрація кисню c буде нижче рівноважної і зниження концентрації кисню D визначається як

$$D = c_p - c. \quad (5)$$

Перемінна D може збільшуватися згодом внаслідок окислювання відходів і зменшуватися внаслідок поглинання кисню поверхнею води:

$$\frac{dD}{dt} = k_1 B - k_2 D, \quad (6)$$

де перший член у правій частині рівняння характеризує процес окислювання відходів, а другий член — аерацію; k_2 є постійна аерації і виміряються в одиницях з розмірністю 1/добу.

Спільне рішення рівнянь (4,6) дає:

$$D = \frac{k_1}{k_2 - k_1} B(0)(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) + D(0)e^{-k_2 t}, \quad (7)$$

де $B(0)$ — концентрація БСК при $t = 0$ і $D(0)$ — початкове зниження концентрації кисню в момент часу $t = 0$.

Якщо за течією річки розташовано кілька скидань відходів виробництва, то виникає питання: яке максимальне збідніння води киснем спостерігається в річці. Наприклад, якщо концентрація кисню падає нижче 1.5 мг/л, то риби не виживають. Час t зв'язаний з відстанню x , що відрховується за течією річки, залежністю $x = vt$, де v — швидкість плину. Отже, якщо підставити величину $t = x/v$ у рівняння (7), то одержимо залежність D від відстані x . На рис. 2 показана залежність концентрації кисню від відстані.

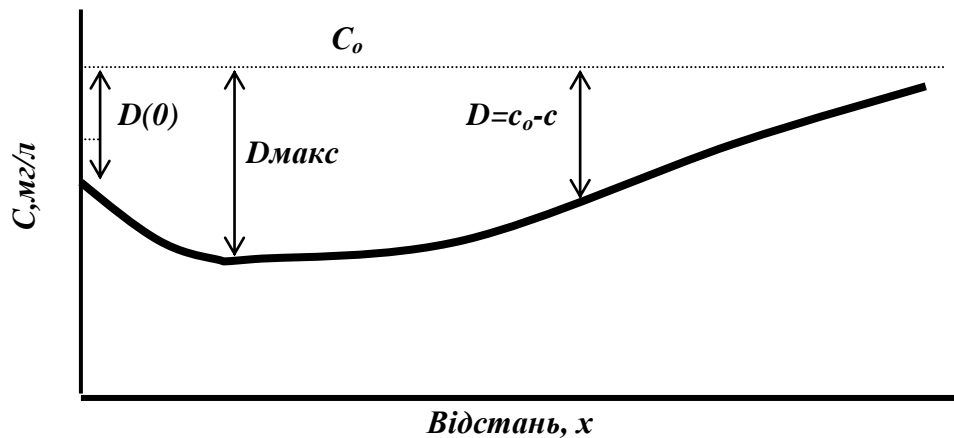


Рис. 2 - Залежність концентрації розчиненого кисню c от відстані x .

Максимальну нестачу кисню $D_{\text{макс}}$ можна визначити, дорівнюючи похідну величини D , заданої рівнянням (7), нулю:

$$D_{\text{макс}} = B(0) \frac{k_1}{k_2} \left[\frac{k_2}{k_1} \left(1 - \frac{D(0)(k_2 - k_1)}{B(0)k_1} \right) \right]^{k_1/(k_1 - k_2)}, \quad (8)$$

де $B(0)$ — біохімічна потреба кисню в потоці при $x=0$ і $D(0)$ — початкове зниження концентрації кисню, обумовлене наявністю джерел забруднення у верхньої течії ріки. Якщо необхідно, щоб величина $D_{\text{макс}}$ була нижче якоїсь певної величини, а $D(0)$, k_1 і k_2 фіксовані, то максимальна величина біохімічної потреби кисню, що відповідає максимально припустимому скиданню відходів у місці ріки $x = 0$, визначається за формулою (8), розв'язаної щодо значення $B(0)$.

Контрольні питання

1. Умови від яких залежить швидкість розкладання органічних речовин у воді.
2. Які значення здобуває концентрація кисню у воді при відсутності в ній органічних речовин?
3. Чому при органічних забрудненнях найменша концентрація кисню у воді спостерігається нижче створу, у якому зроблений скид?
4. Як можна обчислити відстань від створу скидання до створу з найменшою концентрацією кисню?

Завдання

Визначите за наведеними вище формулами зміни концентрації кисню по довжині ріки. Оцініте здатності ріки до самоочищення в залежності від температури води, глибини ріки, швидкості течії, початкових значень БСК. Проведіть аналіз результатів розрахунку. Побудуйте криві розподілу концентрації кисню по довжині річки.

Програма для обчислень у системі математичного моделювання MatLab `ZagrjznenieReki.m` і вихідні дані по «умовчанням» приведені в додатку 2.

Звітний матеріал: графіки змін дефіциту кисню при різних початкових концентраціях БСК, об'ємах органічних скидів, швидкості течії. Аналіз результатів.

3 РІВНЯННЯ НОРМАЛЬНОГО РОЗМНОЖЕННЯ

Припустимо, що величина біологічної популяції (наприклад, кількість бактерій, планктону, риб) дорівнює x і що швидкість приросту пропорційна їх наявній кількості.

Якщо їжі для популяції досить багато, то диференціальне рівняння нормального розмноження записується:

$$dx/dt = kx, \quad (9)$$

Явне рішення цього рівняння:

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)} \quad \text{чи} \quad k(t-t_0) = \ln(x/x_0). \quad (10)$$

Рішення рівняння нормального розмноження експоненціально ростуть при $t \rightarrow \infty$ і експоненціально убивають при $t \rightarrow -\infty$. Ні нескінченні, ні нульові значення x при кінцевих t не досягаються.

Приклади застосування рівнянь (9,10).

1. Для подвоєння кількості населення, відповідно до рівняння нормального розмноження, потрібно завжди той саме час, незалежний від його початкової кількості — період подвоєння населення Землі зараз близько 40 років.

2. Те ж диференціальне рівняння з негативним k описує радіоактивний розпад. Для зменшення кількості радіоактивної речовини вдвічі потрібен час $T = k^{-1} \ln 2$, незалежно від початкової кількості речовини. Цей час називається періодом напіврозпаду. Період напіврозпаду відомого ізотопу радію-226 — 1620 років, а розповсюдженого ізотопу урану-238 — $4,5 \cdot 10^9$ років.

4 РІВНЯННЯ ВИБУХУ

Припустимо тепер, що швидкість приросту пропорційна не чисельності популяції, а кількості пар:

$$dx/dt = kx^2 . \quad (11)$$

У цьому випадку при великих x приріст йде набагато швидше нормального, а при малих — набагато повільніше. Така ситуація зустрічається у фізико-хімічних задачах, де швидкість реакції пропорційна концентраціям обох реагентів. Для деяких видів живих організмів, популяції яких нечисленні, важко знайти собі пари, і їхнє розмноження підкоряється рівнянню (11) при малих значеннях x .

Рішення рівняння (11):

$$x = 1/(C-kt) \quad \text{при } kt < C \quad (12)$$

Інтегральні криві рішення — гіперболи, що мають вертикальну асимптоту. Отже, якщо приріст популяції пропорційний числу пар, то чисельність стає нескінченно великою за кінцевий час. Фізично цей висновок відповідає вибуховому характеру процесу.

Контрольні питання до розділів 3,4

1. Приведіть приклади використання рівнянь (10) при оцінці біомаси планктону, бентосу.
2. У чому полягає відмінність швидкості розмноження відповідно до рівнянь (10) і (12) при малій і великій чисельності популяції?

Завдання

Визначите, як правильно підібрати постійну інтегрування C . Складіть програму обчислень за рівняннями (10), (12) у системах MatLab чи Excel. Побудуйте сполучені графіки рішень рівнянь (9), (11) при $k=0,1$. Дайте аналіз поведінки кривих при малої і великої чисельності популяцій.

Звітний матеріал: графіки змін чисельності популяції для випадків нормально та вибухового розмноження. Дайте аналіз результатів.

5 ЛОГІСТИЧНА КРИВА

Рівняння звичайного розмноження $dx/dt=kx$ придатне для розрахунку, лише поки чисельність популяції не велика. З її збільшенням конкуренція через їжу приводить до зменшення швидкості приросту. Таке зменшення можна врахувати, замінивши коефіцієнт k лінійною функцією від x :

$$k = a - bx.$$

Коефіцієнти a і b можна перетворити в одиницю вибором масштабів t і x . Ми одержуємо, так назване, логістичне рівняння:

$$dx/dt=(1-x) x. \quad (13)$$

$$\text{Його рішення: } t=\ln(x/1-x) \text{ чи } x=e^t/(1+e^t). \quad (14)$$

Рівняння (13) описує векторне поле фазової швидкості (мал. 1, А), а його рішення (14) — інтегральні криві (мал. 1, Б).

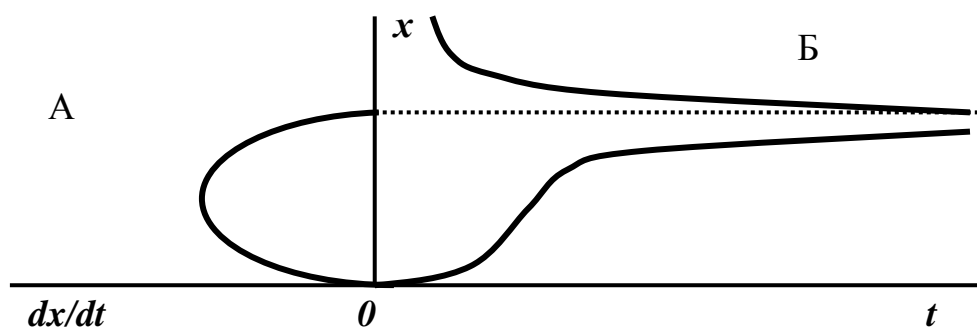


Рис. 3 - Фазова швидкість (А) і інтегральні криві рівнянь (13,14)

Проведемо якісну оцінку рішень на рис. 3:

- 1) процес розмноження має два положення рівноваги — асимптоти рішення: $x=0$ і $x=1$;
- 2) між точками $x=0$ і $x=1$ крива спрямована від 0 до 1, а при $x > 1$ — до асимптоти в точку 1.

Положення рівноваги 0 хитливо — раз популяція, що з'явилася, починає рости, а положення рівноваги 1 стійко - менша чисельність росте, а велика - убуває.

Яким би ні був початковий стан $x > 0$, з часом процес виходить до стійкого стану рівноваги $x=1$.

При малих значеннях x логістична крива практично збігається з експонентною — конкуренція мало впливає на ріст. Однак у міру збільшення x ріст стає експонентним і поблизу $x=1/2$ експонентна крива

різко іде нагору від логістичної; надалі логістичний ріст описує насичення системи — становлення в ній рівноважного режиму ($x \rightarrow 1$).

Контрольні питання

1. Як враховується в диференціальних рівняннях нормального розмноження конкуренція за їжу?
2. Що буде відбуватися з популяцією, якщо її чисельність більше чим забезпеченість їжею? А менше?
3. Чому при певних значеннях чисельності популяції швидкість її росту найбільша?
4. Поясніть фізичний зміст кривої сукцесії.

Завдання

Визначте оптимальну продукцію риби у ставку, якщо продукція планктону — 10^8 ккал в рік а по трофічних ланцюгах риби можуть одержати $1/10$ ккал планктону. Один грам ваги риби приблизно відповідає одній кілокалорії.

Звітний матеріал: графіки змін швидкості росту продукції риби и розподіл продукції у часі. Аналіз результатів.

6 КВОТИ ВИЛОВУ

Дотепер розглядали популяцію, що розвивається за своїми внутрішніми законами. Припустимо тепер, що виловлюється з постійною швидкістю частина популяції.

Диференціальне рівняння вилову:

$$dx/dt = (1 - x) x - c. \quad (15)$$

Величина c характеризує швидкість вилову і називається квотою. Вид інтегральних і фазових кривих з урахуванням швидкості вилову c показані на рис. 4. При не занадто великій швидкості вилову ($0 < c < 1/4$) існують два положення рівноваги x_1 і x_2 . Нижнє положення рівноваги x_1 хитливо. Якщо за якимись причинами, наприклад, неприпустимий вилов риби чи її хвороби, чисельність популяції опуститься нижче x_1 , то надалі вся популяція за якийсь час вимре.

Верхнє положення рівноваги x_2 є стійкі — це стаціонарний режим, на який виходить популяція при постійному вилові c . Якщо $c > 1/4$, то рівноваги немає і вся популяція буде виловлена за кінцевий час.

7 ВИЛОВ З ВІДНОСНОЮ КВОТОЮ

Можна організувати вилов так, щоб стійко одержувати улов зі швидкістю $\frac{1}{4}$ за одиницю часу. Більшого одержати не можна, тому що $\frac{1}{4}$ — це найбільша швидкість розмноження популяції.

Замість абсолютної швидкості вилову використовуємо відносну — швидкість у залежності від частки наявної популяції:

$$dx/dt = (1-x)x - px. \quad (16)$$

Вид фазової й інтегральної кривих при $p < 1$ показані на рис. 3.

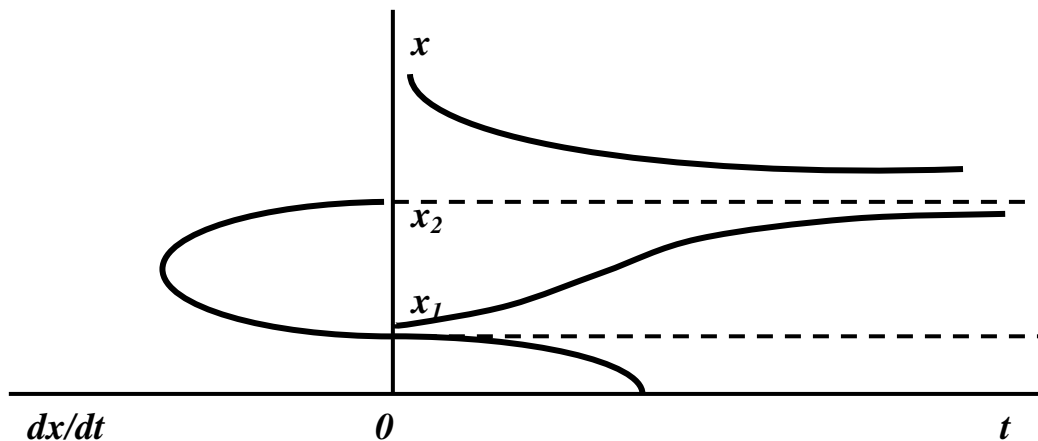


Рис. 4 - Фазова швидкість і інтегральні криві рівняння (15)

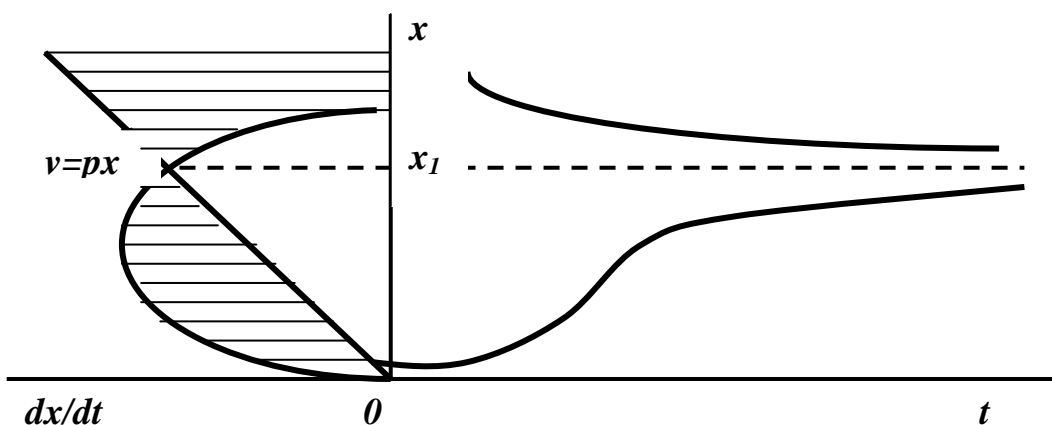


Рис. 5 - Фазова швидкість і інтегральні криві рівняння (16)

Нижче, хитке положення рівноваги тепер у точки $x = 0$, друге положення рівноваги x_1 є стійким при будь-якому $0 < p < 1$.

Після деякого періоду встановлення популяція виходить на стаціонарний режим $x = x_1$. Абсолютна швидкість вилову встановлюється

при цьому рівної $c=px_1$. Це — ордината точки перетинання графіків функцій $v=(1-x)x$ і $v=px$. При малих відносних виловах (малих p) стала швидкість вилову також мала; при $p \rightarrow 1$ вона теж прагне до нуля (перелов). Найбільше значення абсолютної швидкості c дорівнює найбільшій ординаті графіка функції $v=(1-x)x$. Воно досягається, коли пряма $v=px$ проходить через вершину параболи (при $p=1/2$), і дорівнює $c=1/4$.

Виберемо $p=1/2$, (тобто призначимо відносну квоту так, щоб популяція складала половину не виловленою). При цьому досягається максимально можлива стаціонарна швидкість відловлювання $c=1/4$, причому система залишається стійкою — повертається до сталого стану при малих відхиленнях початкової популяції від сталої.

Контрольні питання до розділів 6, 7

1. Чому квоти вилову встановлюються так, щоб вони не перевищували $1/4$ чисельності популяції?
2. У чому полягає розходження між абсолютною і відносною квотою?

Завдання

1. За даними завдання розділу 5 визначите абсолютні і відносні квоти вилову. Побудуйте криві чисельності популяції для випадків абсолютних і відносних квот вилову, прийнявши що вага 1 риби дорівнює 1 кг.
2. У Дністровському лимані в шістдесяті роки минулого віку вилов риби був приблизно 800 тонн у рік, у 2005 — 150 тонн. Визначите час відновлення продуктивності водойми для випадків повної заборони на вилов і дозволу на вилов у кількості обумовленою відносною квотою.

8 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯНЯ СИСТЕМИ ХИЖАК-ЖЕРТВА

Найпростіша модель, що описує боротьбу двох видів хижака і жертви — полягає в наступному. Розглянемо ставок, у якому живуть риби двох видів, скажемо, карасі і щуки. Якби щук не було, карасі розмножувалися б зі швидкістю $dx/dt=kx$, пропорційної їхній кількості x . Припустимо, що число зустрічей карасів із щуками пропорційно як числу карасів x , так числу щук y ; тоді для швидкості зміни числа карасів одержимо рівняння:

$$dx/dt = kx - axy. \quad (17)$$

Що стосується щук, то без карасів вони вимирають: $dy/dt = -ly$, у присутності ж карасів починають розмножуватися зі швидкістю, пропорційної числу з'їдених карасів:

$$dy/dt = -ly + bxy. \quad (18)$$

Рівняння (17,18) утворюють систему диференціальних рівнянь моделі системи хижак — жертва. Вона називається моделлю Лотка - Вольтера за ім'ям автора.

Якщо початкове чисельність щук менше c_0 , то числа карасів і щук зростають поки щуки що розмножилися не почнуть з'їдати більше карасів, ніж їхній приріст, потім численність карасів почне убувати, а число щук буде зростати, поки недостача їжі не приведе щук до вимирання; потім численність щук зменшиться настільки, що карасі знову почнуть розмножуватися; розмноження карасів, що почалося, приведе до того, що згодом і щуки почнуть розмножуватися. Таким чином, будуть відбуватися коливання чисельності карасів і щук поблизу рівноважного числа тих і інших.

Розглянемо деякі висновки з наших обчислень. Для системи Лотка — Вольтера.

- 1) Існує (і єдино при $x > 0, y > 0$) положення рівноваги (x_0, y_0) .
- 2) Кількості карасів і щук при нерівноважних початкових умовах міняються згодом періодично.

Контрольні питання

1. Чому в екологічних системах відбуваються коливання чисельності популяції хижака і жертви?
2. Чи існує рівновага чисельності хижака і жертви?

Завдання

В системі MatLab мається програма для рішення системи рівнянь Лотка – Вольтера за назвою Lotka.m. Для її виклику можна використовувати команду LotkaDemo. Ідучи за вказівками програми, можна побудувати графіки чисельності популяцій на фазовій площині і її коливання в часі. Побудуйте ці криві. Дайте аналіз коливань чисельності хижака і жертви в часі.

Звітний матеріал: диференціальні і інтегральні графіки змін чисельності популяцій хижака і жертви. Дайте аналіз результатів.

9 ІМОВІРНІСНИЙ ПІДХІД ДО РОЗРАХУНКІВ КІЛЬКІСНИХ ЗМІН У ЕКОСИСТЕМАХ

У розділах 3-8 методичних вказівок розглянуті рішення задач чисельності популяцій на основі детермінованих методів. Для ряду практичних додатків такі методи виправдані і, тому, часто використовуються на практиці.

Для екологічних задач детерміновані рішення не завжди достатні — вони обмежені початковими і граничними умовами диференціальних рівнянь. Наприклад, у схемі хижак-жертва ігноруються зміни зовнішніх умов і наявність у водоймах інших організмів або забруднень. Головне — детерміновані методи не дозволяють вирішувати задачі пристосування й адаптації організмів і популяцій до умов середовища де вони живуть. Наприклад, представимо, що в схемі карасі — щуки в результаті мінливості з'явився карась, що одержав пристосування які дозволяють йому уникати зустрічі з щуками. Щуки, природно, знищать популяцію непристосованих карасів, потомство ж пристосованого карася порушить рішення системи рівнянь хижак — жертва.

Зустріч з іншими організмами, наприклад, хвороботворними бактеріями чи іншими хижаками в природних умовах імовірна. Погодні умови також мають імовірнісний характер. Мінливість організмів являється імовірнісною.

Розглянемо особливості застосування імовірнісних методів. У системах хімічних розчинів іони взаємодіють за допомогою складно організованих електричних і гравітаційних полів. З урахуванням цього швидкість комбінації і рекомбінації іонів у молекули буде визначатися концентрацією розчину — відстанню між сусідніми іонами, чи радіусом взаємодії r . Приблизно таку ж схему можна представити для більш складних систем — живих організмів, їхніх популяцій і співтовариств. Наприклад, швидкість відтворення риб залежить від наявності в них органів, через які вони одержують інформацію про їжу, хижаків, полових партнерів і власну швидкість руху у воді. Тому, в залежності від радіуса дії органів почуттів і швидкості власного руху залежать імовірності виживання і продовження роду.

Представимо, що в деякій точці знаходиться система, виживання якої залежить від власних властивостей і характеристик навколишнього середовища. Нехай навколо цієї системи розподілений за нормальним законом будь-який компонент середовища з концентрацією A . Імовірність взаємодії можна представити розподілом випадкового вектора у двовимірному просторі. Для цієї мети використаємо відомий в математиці розподіл Релея:

$$f(r) = \frac{r}{s^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2s^2}\right), \quad (19)$$

де $f(r)$ - щільність імовірності; s - радіальне середнє квадратичне відхилення вихідного двовимірного нормального розподілу; r - радіальне відхилення.

Припустимо, що швидкість взаємодії пропорційна щільності імовірності $dA/dt = k_1 f(r)$, а радіальне відхилення $r = k_2 A$ — концентрації чи різниці потенціалів. Тоді ліва частина (19) виражає "приступність" даного компонента інакше - швидкість його надходження. Ця швидкість залежить від концентрації в середовищі компонента (A) і можливостями використання їх системою:

$$\frac{dA}{dt} = k_1 k_2 \frac{A}{s^2} \exp\left(-\frac{k_2 A^2}{2s^2}\right). \quad (20)$$

Рішення рівняння (20) на фазовій і інтегральній площині наведені на рис. 6. Поводження цієї кривої, а відповідно і фізичні закономірності процесів, відповідають логістичної кривої (14). Помітно, що на відміну від рішення (14), крива на фазовій площині не перетинає вісь ординат. Це означає імовірність, часто дуже малу, мінливості організмів для пристосування до зовнішнього середовища.

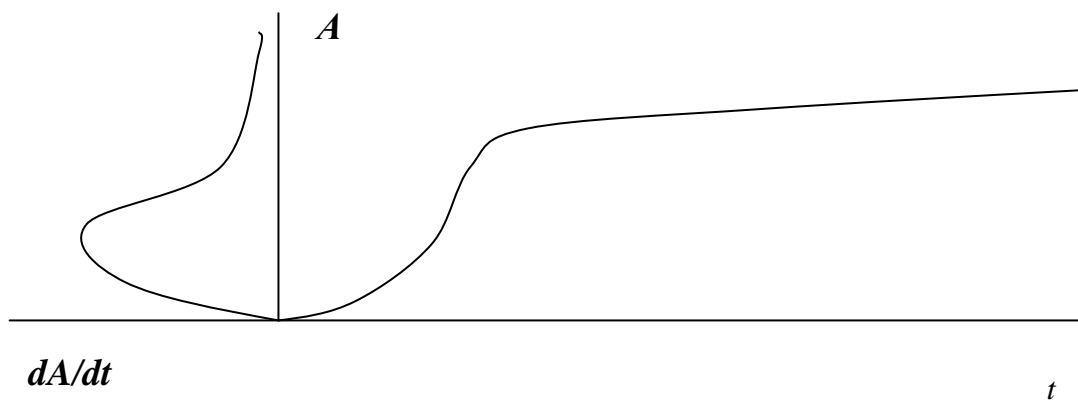


Рис. 6 - Рішення рівняння (20) на фазовій і інтегральній поверхнях

Крім того, рівняння (20) у порівнянні з (14) виявляється більш зручним для екологічних розрахунків шляхом введення в рівняння (20) додаткових коефіцієнтів. Приклад використання коефіцієнтів наведений у програмі для системи MatLab у додатку 3. Ці коефіцієнти можуть враховувати вилов частини популяції, токсичні впливи на організми, їхню

спадкоємну і неспадкоємну мінливість.

Контрольні питання

1. Вкажіть недоліки детермінованих методів для моделювання процесів кількісних змін у екосистемах.
2. У чому полягає зміст поняття радіального відхилення для живих систем?

Завдання

Визначите зміст коефіцієнтів приведених у додатку 3. Побудуйте фазові й інтегральні криві розвитку популяцій живих організмів при різних значеннях коефіцієнтів. Визначите критичні значення чисельності популяцій і дайте їхній аналіз.

ДОДАТОК 1

Примітки. При запуску системи MatLab відкриваються кілька вікон. Найбільш важливі з них:

1. Вікно команд.
2. Редактор програмних файлів.
3. Вікно графічного виводу результатів.

Кожне вікно стає активним, якщо по ньому «клацнути» лівою кнопкою миші.

Для обчислень зайдіть у вікно команд і відкрийте файл Kislrod.m . При цьому відкриється вікно редактора з зазначеною програмою. З цього вікна запустите програму, результатом якої будуть:

1. Результати обчислень у вікні команд.
2. Сполучені графіки зміни концентрації кисню в часі.

У вікні редактора можна змінювати вихідні дані для розрахунку. Тим самим визначати вплив різних умов на концентрацію кисню.

%Розрахунок розчинення атмосферного кисню в воді

%function rr=Kislrod()

c=2; % концентрація %кисню в початковий момент, мг/л

t=0; % температура води в початковий момент

w=3; % швидкість вітру, м/с

u=0.5; %швидкість течії,%м/с

hm=2; hs=5; hmax=10; %глибина водойми, м

Tcvt=[0:50],

km=0.0417*w/hm+(u^5)/(hm^1.5), %коефіцієнт атмосферної циркуляції

ks=0.0417*w/hs+(u^5)/(hs^1.5),

```

kmax=0.0417*w/hmax+(u^0.5)/(hmax^1.5),
cr=14.22*exp(-0.0219*t), %рівноважна концентрація% кисню
Am=(cr-c)*(1-10.^(-km*Tcyt)), %атмосферна% аерація% води
As=(cr-c)*(1-10.^(-ks*Tcyt)),
Amax=(cr-c)*(1-10.^(-kmax*Tcyt)),
Cm=c+Am, %концентрація% кисню через Tдоб
Cs=c+As, Cmax=c+Amax, plot(Tcyt,Cm,Tcyt,Cs,Tcyt,Cmax),
title('Зміна концентрації кисню за рахунок аерації на глибинах до 2 м, 2-5 м
и 5-10 м')
xlabel('доба') ylabel('C кисню мг/л')

```

ДОДАТОК 2

Обчислення споживання кисню на розкладання органічних забруднень.
У вікні редактора можна змінювати вихідні дані для розрахунку. Тим самим визначати вплив різних умов на концентрацію кисню.

ZagrjznenieReki.m

```

c=8; % концентрація кисню при x=0, мг/л
T=20; %T емпература води
w=3; %швидкість вітру
h=2; %глибина ріки, м
v=0.2; %швидкість течії, м/с
B0=10, %концентрація БСК при t=0
t=[0:10]; % час, доба
x=t*v; %відстань від началу створу
k1=0.5, %коеф добору кисню БСК, 1/доба
k2=0.0417*w/h+(v^0.5)/(h^1.5), %коеф атмосферної аерації 1/доба
cr=14.22*exp(-0.0219*T), %рівноважна концентрація кисню
D0=cr-c, % початкове зниження концентрації кисню при t=0
V=B0*exp(-k1*t); %БСК
CX=-(1/(k1-k2))*((B0*k1+D0*k1-D0*k2)*exp(-k2*t)-B0*k1*exp(-k1*t))+cr;
%конц кисню
DK=(k1/(k2-k1))*B0*(exp(-k1*t)-exp(-k2*t))+D0*exp(-k2*t); %дефіцит кисню
plot(x,V,x,CX,x,cr), title('Концентрація кисню і БСК по довжині ріки')
xlabel('Довжина ріки, км') ylabel('C кисню мг/л')

```

ДОДАТОК 3

```

%обчислення диференціального і інтегрального розподілу Релея
%dx/dt=((k1*k2*x)/(s^2))*exp(-0.5*(k2*x)/(s^2))-c-b*k2*x
% у першому другому рядку завдання вхідних даних і інтервалу

```

```

інтегрування
intrv=2; % інтервал розрахунку
x=[1:intrv:20]; % шкала по x
k1=3; k2=1, s=2.5; a=0; b=0; c=0; ss=s^2;
ex=exp(-0.5*((k2*x).^2)/ss),
rd=k1*k2.*(x./ss).*ex, %диф розподіл
i=length(x), % кількість точок розрахунку
pp=ss./(k1*k2.*x)./ex,
int=cumsum(pp.*intrv),
plot(rd,x), grid %диф графік
plot(int,x), grid % інтегр графік

```

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учеб. Пособие для вузов. — М.: Наука, 1984. — 272 с.
2. Богобожий В.В., Курбанов К.Р., Палій П.Б., Шмандій В.М. Принципи моделювання та прогнозування в екології: Підручник. — Київ: Центр навчальної літератури, 2004. — 216 с.
3. Каталог річок і водойм України: Навчально-довідковий посібник.— Одеса: Астропринт, 2003.— 392 с.
4. Романенко В.Д., Оксуюк О.П., и др. Экологическая оценка воздействия гидротехнического строительства на водные объекты. — К.: Наук. Думка, 1990.— 256 с.

ДОДАТКОВА

1. Пэнгл Р. Методы системного анализа окружающей среды/ Пер. с англ. — М.: Мир, 1979. — 215 с.
2. Математическое моделирование / Под ред. Дж. Эндрюса и Р. Мак-Лоуна — М.: Мир, 1979. — 280 с.

ЗБІРНИК МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК
ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з дисципліни “Математичне моделювання
гідроекологічних систем”

Укладач: доц. Белов В.В.

Підп. до друку
Умовн. друк. арк.

Формат
Тираж

Папір
Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул.Львівська, 15

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗБІРНИК МЕТОДИЧНИХ ВКАЗІВОК
ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з дисципліни “Математичне моделювання
гідроекологічних систем”

для студентів 5 курсу екологічного факультету
Спеціальність: екологія та охорона
навколишнього середовища
Спеціалізація: гідроекологія

“Затверджено”
на засіданні методичної комісії
природоохоронного факультету
Протокол № ____ від _____ 2006 р.
Голова комісії _____

“Затверджено”
на засіданні кафедри гідроекології
та водних досліджень
протокол № 11 від 16 червня 2006 р.
Зав. кафедрою _____

Одеса 2006