

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Одеський державний екологічний університет

**А. М. Польовий**

**МОДЕЛЮВАННЯ  
ГІДРОМЕТЕОРОЛОГІЧНОГО  
РЕЖИМУ ТА ПРОДУКТИВНОСТІ  
АГРОЕКОСИСТЕМ**

Затверджено  
Міністерством освіти і науки,  
молоді та спорту України  
як підручник для студентів  
вищих навчальних закладів

511390-TEMPUS-1-2010-1-SK-TEMPUS-JPCR

Одеса  
«Екологія»  
2013

УДК 63:551.509  
ББК 40.2  
П49

У підручнику викладені теоретичні й практичні питання побудови моделей динамічних процесів, які відбуваються в агроєкосистемах, моделювання радіаційного, водно-теплового і турбулентного режиму агроєкосистем. Розглядається моделювання росту та впливу гідрометеорологічного режиму на формування фотосинтетичної продуктивності сільськогосподарських культур. Особлива увага приділяється сучасним комплексним моделям формування урожайності.

Підручник призначено для студентів вузів, які навчаються за напрямом «Гідрометеорологія», студентів сільськогосподарських вузів та технікумів, він може бути також корисним для студентів і аспірантів географічних і біологічних факультетів університетів. Підручник може використовуватись як посібник для фахівців, які працюють в галузі сільськогосподарської метеорології, екології, біології, географії і сільського господарства для ознайомлення з методами моделювання динамічних процесів та вирішення конкретних задач.

Видання підготовлено в рамках проекту 511390-TEMPUS-1-2010-1-SK-TEMPUS-JPCR «Система управління для навчальних програм, пов'язаних із вивченням навколишнього середовища» та призначено для студентів і аспірантів навчальних закладів гідрометеорологічного та екологічного напрямків навчання, для науковців та фахівців, які працюють в галузі сільськогосподарської метеорології, екології, сільського господарства.

Проект фінансується за підтримки Європейської Комісії. Зміст даної публікації є предметом відповідальності автора і не відображає точку зору Європейської Комісії.

#### Рецензенти:

**Ю. С. Тучковенко**, д. г. н., професор, проректор Одеського державного екологічного університету;

**О. О. Світличний**, д. г. н., професор Одеського національного університету імені І. І. Мечникова;

**В. Я. Щербак**, д. с.-г. н., професор, завідувач кафедри польових і овочевих культур Одеського державного аграрного університету

Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України  
(лист № 1/11 — 17260 від 6.11.2012)

© Польовий А. М., 2013  
© Одеський державний екологічний університет, 2013

ISBN 978–966–8740–95–4

## ПЕРЕДМОВА

Розвиток моделювання енерго- та масобміну в системі ґрунт – рослина – атмосфера та створення кількісної теорії фотосинтезу надали новий поштовх всебічному вивченню рослинного покриву, який є фокусом агроєкологічної системи, першоджерелом харчових ресурсів людства. Продуктивність рослин і саме їхнє існування обумовлені процесами енерго- та масобміну, які в ньому відбуваються, використанням променистої енергії Сонця у складному, багатоступінчастому і комплексному процесі перетворення CO<sub>2</sub> атмосфери, води і мінеральних речовин ґрунту в різноманітні органічні сполуки зелених рослин. Хоча зелена рослина і є центральною ланкою у цих процесах, усі вони відносяться до різних наукових дисциплін, які розвиваються відносно незалежно одна від одної.

Математичні моделі, що вивчають закономірності формування гідрометеорологічного режиму у фітоценозі та його вплив на продукційний процес рослин, мають велике значення як інтегруючі. Побудова математичних моделей агроєкосистем відкриває можливості поєднати наші знання по фізіології й екології рослин, рослинництву, біофізиці, ґрунтознавству, метеорології в єдине ціле, для того, щоб вивчати функціонування посіву як цілісної системи.

У підручнику викладені теоретичні й практичні питання побудови моделей, моделювання радіаційного, водно-теплового і турбулентного режимів агроєкосистем, моделювання росту та формування урожаю сільськогосподарських культур.

Мета підручника – дати цілісне уявлення про моделювання формування гідрометеорологічного режиму рослинного покриву і впливу цього режиму на ріст і продуктивність рослин. Викладення матеріалу побудовано таким чином, щоб читач, ознайомившись зі змістом підручника, отримав повне уявлення про сутність методу моделювання, кількісний опис того чи іншого процесу, який відбувається у агроєкосистемі, а також зміг самостійно застосовувати метод моделювання для вирішення конкретних задач.

При підготовці підручника автором використовувався досвід читання лекцій на кафедрі агрометеорології та агрометеорологічних прогнозів Одеського державного екологічного університету з курсу «Моделювання водно-теплового режиму і продуктивності агроєкосистем». При написанні підручника використані результати численних досліджень з математичного моделювання продукційного процесу рослин, список яких наводиться наприкінці підручника. Порівняно з першим виданням навчального посібника «Моделювання гідрометеорологічного режиму та

продуктивності агроєкосистем» підручник доповнено трьома розділами, в яких викладаються сучасні найбільш перспективні моделі продукційного процесу рослин голландської школи ("School of de Wit") моделювання (SWAP–WOFOST моделі), американської школи моделювання (Модель CERES-Wheat), англійської школи моделювання (роботи J.H.M. Thornley).

Підручник може бути також корисний для студентів і аспірантів географічних і біологічних факультетів університетів, агрономічних факультетів сільськогосподарських інститутів і технікумів, а також фахівців, які працюють в області сільськогосподарської метеорології, агроєкології і загальної екології, біології, географії і сільського господарства.

Як і усі видані раніше мною книги цей підручник значною мірою зобов'язаний своєю появою Л.І. Польовій, її схваленню, підтримці та активній допомозі на всіх етапах підготовки підручника: від обговорення його структури і змісту до комп'ютерного набору рукопису.

Висловлюю також щире подяку О.А. Барсуковій за оформлення ілюстрацій до рукопису і О.Д. Соколенко за редагування рукопису.

## ВСТУП

Агроєкологічна система представляє собою антропогенну екосистему, в якій на відміну від природної екосистеми кругообіг речовини і енергії відбувається при обов'язковій участі людини. Сучасне землеробство, меліорація і рослинництво, поряд з агроєкологією, агрофізикою, агрохімією й агрометеорологією, представляють собою цикл наук про цю антропогенну екосистему – *агроєкосистему*. Зазвичай, участь людини в функціонуванні агроєкосистеми обов'язкова, але, з іншого боку, природні екологічні процеси, які відбуваються у ґрунтах і в посівах, визначають долю агроєкосистеми не меншою мірою, ніж технологічні впливи – обробка ґрунтів, поливи, внесення добрив та ін. Тому теоретичну основу землекористування повинен складати комплекс наукових знань про взаємодію між собою рослин, тварин і мікроорганізмів агроєкосистеми та вплив факторів навколишнього середовища на їх життєдіяльність.

Необхідність розвитку цих теоретичних уявлень визначається, крім усього іншого, вимогами системного підходу до сукупності всіх процесів, що відбуваються на сільськогосподарському полі. З огляду на провідну роль культурних рослин у формуванні агроценозу, головним розділом цього комплексу наукових знань варто вважати теорію продукційного процесу сільськогосподарських рослин.

Продукційний процес являє собою унікальне явище, у якому тісно переплітається взаємодія природних і антропогенних факторів. Дійсно, якщо в природних системах збалансованість круговороту речовин досягається за рахунок розмаїття видів, рослин і тварин, які розповсюдженні на даній території, то в агроєкосистемах, у яких посів, головним чином, формується з рослин одного біологічного виду, такий баланс в принципі недосяжний. Саме тому внесення мінеральних і органічних сполук з агроєкосистеми повинно постійно компенсуватися шляхом внесення добрив, а одночасне співіснування у природі різних видів рослин повинне бути замінено їхнім періодичним чергуванням у сівозмінах. Проте, повна гармонія в агроєкосистемі недосяжна.

Ще більш складною і до тепер залишається не вирішеною проблема вилучення з ґрунту (або нейтралізація дії) шкідливих залишкових сполук, які утворюються в результаті внесення різних ядохімікатів. Сама необхідність внесення гербіцидів і пестицидів пов'язана з порушенням екологічної рівноваги і вузькою спеціалізацією сільськогосподарських посівів, вразливих до розвитку хвороб, бур'янів та шкідників. У той же час побічні явища, які виникають внаслідок використання хімічних засобів захисту рослин, впливають на екологічний стан як самого ґрунту, так і розташованих у водозборі річок і озер.

Перехід до інтенсивних технологій вирощування сільськогосподарських культур робить цю ситуацію ще більш складною. При інтенсивному веденні сільського господарства навіть незначні порушення технології призводять або до великих непродуктивних витрат внесених у ґрунт хімічних меліорантів, або до недобору урожаю та до зниження його якості. Особливо вразливими в цьому відношенні є зрошувані території, надзвичайно чутливі до порушення водного балансу. Зміна водного балансу при зрошенні призводить не тільки до позитивних результатів, які виражаються у вигляді підвищення продуктивності полів, але і до ряду негативних наслідків: надмірного підйому ґрунтових вод, засолення і заболочування ґрунтів, вимивання з ґрунту гумусу і мінеральних речовин та ін.

Усе це призвело до того, що в землеробстві склався і постійно поглиблюється розрив між усе зростаючою інтенсивністю антропогенного тиску на агроecosистему і дуже недосконалими методами прогнозу як найближчих, так і віддалених наслідків цього тиску. Фахівець, який працює у галузі сільського господарства, в процесі вироблення рішень змушений брати до уваги все більшу кількість даних. Катастрофічно зростає також кількість варіантів цих рішень, а імовірність прийняття правильного рішення, яке приведе до успіху, наближається до нуля. Ситуацію, що склалася, можна охарактеризувати як «інформаційна криза землеробства».

Швидка зміна сортів сільськогосподарських культур, поява нових робочих органів і агротехнічних прийомів при різноманітні ґрунтово-кліматичних умов нашої країни і міжсезонній мінливості метеорологічних умов не дозволяють накопичити й узагальнити статистично репрезентативні дані, які необхідні для виявлення комплексу оптимальних (або близьких до них) агротехнічних рішень з врахуванням їхніх віддалених наслідків. Спроби побудови статистичних (регресійних) моделей, які відображають зв'язок урожаю з природними й антропогенними факторами на основі даних багатофакторних дослідів, не привели до великого успіху. Причиною цього є неможливість врахування у статистичних моделях реальної мінливості погодних умов та інших факторів урожаю, які варіюють у великих межах (вологість ґрунту, вміст у ґрунті доступних для рослин елементів живлення та ін.). Як показала практика вітчизняних і закордонних досліджень, єдиний шлях подолання сформованих протиріч пов'язаний з побудовою і використанням у практиці прийняття агротехнічних і меліоративних рішень, а також у гідрометеорологічному забезпеченні сільського господарства, динамічних імітаційних моделей агроecosистем.

З появою наприкінці 60-х років динамічних моделей почався новий етап розвитку агрономічних наук і агрометеорології – перехід від

експериментально-описового рівня до рівня виявлення кількісних закономірностей і теоретичних узагальнень. В результаті зусиль багатьох дослідників створені передумови для реалізації на ПЕОМ бази декларативних і процедурних знань у землеробстві та агрометеорології з використанням ієрархії моделей різного призначення і різного ступеня деталізації.

Поява нової комп'ютерної техніки – персональних комп'ютерів (ПК), створила надзвичайно сприятливі умови для широкого використання моделей. Можна припустити, що в найближчі роки моделі й побудовані на їхній основі інформаційно-дорадчі системи стануть доступні кожному фахівцю, який за родом своєї діяльності зустрічається з проблемою вибору одного з альтернативних рішень. Дійсно, досить адекватна модель дозволяє заздалегідь, тобто до практичної реалізації тієї або іншої дії фахівця, спрогнозувати її наслідки, які можуть проявитися в тих чи інших можливих у майбутньому ситуаціях. Таким чином, моделі стають невід'ємною складовою технології прийняття рішень при управлінні складними системами.

Звернемося до специфічних умов застосування математичних моделей у рослинництві, землеробстві й агрометеорології. При цьому розглянемо лише практичну сторону питання, а саме: специфіку використання моделей як інструмента прогнозу і управління. Особливість цих задач пов'язана з природною сезонною циклічністю сільськогосподарського виробництва, що дозволило виділити три часових рівня прийняття рішень:

- багаторічні перспективні і проектні рішення (точніше рішення, наслідки яких визначаються протягом декількох років);
- технологічна підготовка до поточного сезону вегетації (рішення, прийняті на майбутній рік);
- оперативна діагностика, прогнозування та управління ростом, розвитком рослин і формуванням урожаю.

Існування трьох взаємозалежних часових рівнів прийняття рішень є характерною рисою землеробства й меліорації і відображає той факт, що процеси в агроecosистемі носять безупинний характер, а вплив на неї здійснюється в дискретні моменти часу. При цьому до першого рівня відносяться рішення щодо меліорації земель, систем землеробства, введення сівозмін і т.д. Питання обґрунтування планових технологій на поточний сезон вегетації відносяться до другого рівня. Ці рішення, як правило, не реалізуються безпосередньо, а лише служать обґрунтуванням для розподілу на полях доз добрив, планування урожайності, визначення необхідного для своєчасного проведення всіх сільськогосподарських робіт складу машинно-тракторного парку та ін.

Реалізація всіх агротехнічних заходів здійснюється на стадії оперативного управління. Тут повинно виконуватись коректування

планових рішень з врахуванням метеорологічної обстановки, яка складається в цьому сезоні. Що нового вносять у цю традиційну схему моделі? Наприклад, на рівні проектних рішень – це можливість прогнозування віддалених наслідків меліорації земель: оцінка імовірності їхнього засолення і заболочування, підвищення рівня ґрунтових вод, інших негативних явищ. Головною ж перевагою методу моделювання є те, що, використовуючи багаторічні метеорологічні дані і орієнтуючись на ті ситуації, які найчастіше повторювалися в минулому, можна зробити розрахунок параметрів меліоративних систем, які забезпечують оптимальне використання поливної води для задоволення вимог охорони навколишнього середовища. Інша сторона питання пов'язана з обґрунтуванням таких сівозмін і таких систем землеробства, які забезпечують збереження родючості ґрунтів, запобігаючи їхній деградації.

Роль моделей на стадії технологічної підготовки вирощування сільськогосподарських культур принципово інша. Головне питання, яке при цьому виникає і вимагає «модельного» обґрунтування зводиться до оцінки та прогнозування того рівня урожаю на кожному полі, на який варто орієнтувати всю технологію. Досяжний рівень урожаю на даному полі при існуючих сортах і агротехніці визначається кліматичними і погодними умовами, їх варіабельністю, існуючою родючістю ґрунтів. Становить інтерес, насамперед, його ймовірна оцінка, яка надалі повинна уточнюватися вже в оперативному режимі, з появою нових даних про характер весняного танення снігу, про весняні запаси вологи і т.п. Для цього модель повинна бути випробувана на багаторічних погодних даних і повинні бути виявлені залежності досяжного урожаю від варіюючих факторів навколишнього середовища.

Найбільший інтерес представляє використання динамічних моделей у режимі прогнозу й оперативного управління. Користувача, насамперед, може цікавити оцінка поточного агрометеорологічного стану ґрунтів і посівів – вмісту у ґрунті доступної вологи, поживних речовин, фази розвитку рослин, накопичення біомаси та ін. Після сівби ці процеси знаходяться під впливом погодних умов. Якщо, наприклад, раз в декаду вводити у модель дані про метеорологічну обстановку, що складається протягом вегетаційного періоду, можна одержувати в результаті моделювання інформацію про необхідні для агронома параметри на всіх контрольованих полях. При цьому немає необхідності проводити аналізи ґрунтів або брати проби рослинної маси.

Другий клас задач пов'язаний з формуванням прогнозів різної завчасності. Відомо, що прогнозування погоди на який-небудь тривалий термін досить проблематичне. В той же час процеси, які відбуваються у агроєкосистемі, мають досить велику інерційність. Вологозапаси у ґрунті не можуть змінюватися миттєво, а самі рослини слабо реагують на зміни

метеорологічних факторів, якщо вони не виходять за визначені межі. Саме властивість інерційності ґрунтів і посівів дозволяє розробляти ті чи інші прогнози, незважаючи на досить сильну мінливість погодних умов.

Нарешті, динамічні моделі можуть служити ефективним допоміжним засобом при вирішенні тих чи інших агрономічних задач, особливо при їх включенні в інформаційно-дорадчі системи.

Розробка інформаційних систем *погода – урожай* і *клімат – урожай*, заснованих на динамічних моделях, безсумнівно, забезпечить поліпшення управління вирощування сільськогосподарських культур в сучасних умовах. Такого роду системи повинні вирішувати наступні задачі:

1. Оцінка ґрунтових і кліматичних ресурсів господарства.

2. Визначення найбільш раціонального розміщення культур в багаторічному розрізі.

3. Вибір сівозмін, які забезпечать підвищення якості земель.

4. Визначення економічно забезпеченої урожайності сільськогосподарських культур з врахуванням ресурсів господарства і кліматичної мінливості.

5. Оцінка ефективності нових технологічних прийомів з урахуванням природоохоронних вимог.

6. Коригування технології вирощування сільськогосподарських культур з врахуванням агрометеорологічних умов конкретного року та технічних можливостей господарства, яке включає:

– визначення термінів проведення сільськогосподарських робіт (обробка ґрунту, посів і т.д.);

– розрахунок норм і термінів внесення добрив з врахуванням природоохоронних вимог і вимог екологічної чистоти продукції;

– визначення норм і термінів поливів;

– оцінка імовірності ушкодження посівів хворобами та шкідниками;

– визначення доцільності проведення хімічних обробок посівів проти хвороб і шкідників з урахуванням природоохоронних вимог та необхідності забезпечення екологічної чистоти продукції.

7. Видача довідкової інформації.

Інформаційна база подібних систем у зв'язку із специфікою конкретної системи повинна мати свої особливості. Крім метеорологічних і агрометеорологічних даних обов'язково необхідні поправки для корегування цих даних з врахуванням місцеположення посівних площ, рельєфу місцевості. База повинна включати історію полів, характеристики посівних площ, технічних і економічних можливостей господарства, прийняті технології вирощування сільськогосподарських культур та ін. Програмний комплекс системи повинен забезпечувати інтерактивний режим роботи з нею. При цьому в діалоговому режимі користувач повинен отримувати інформацію для прийняття відповідних рішень за технологією

вирощування культури, а також про збиток у випадку невиконання або невчасного проведення тих чи інших операцій.

Очевидно, що самі рішення повинен приймати фахівець, який за родом своєї діяльності відповідає за їхні наслідки. Ніяка модель не може в цьому випадку замінити людину. У той же час, забезпечуючи можливість заздалегідь, тобто до реального виконання тих чи інших заходів безпосередньо у полі, кількісно оцінити можливі ситуації, які можуть скластися у майбутньому, модель може надати в розпорядження фахівця таку інформацію, яку іншим способом отримати неможливо.

## ЧАСТИНА I

### ТЕОРІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ, ЯКІ ВІДБУВАЮТЬСЯ У АГРОЕКОСИСТЕМІ

#### 1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МОДЕЛЮВАННЯ

##### 1.1. Основні принципи моделювання

Математична модель об'єкта представляє собою його наближений до оригіналу образ, який виражено в математичній формі, ступінь наближеності моделі до реального об'єкта може бути різною в залежності від внеску емпіричних та теоретичних уявлень, які покладено в основу моделі. Модель може бути заснована на емпіричному описі якоїсь однієї сторони процесу або на детальному теоретичному описі всіх основних взаємозв'язаних явищ та процесів, які характеризують об'єкт. Але аналіз моделі або робота з нею повинні, так чи інакше, бути корисні при наступному поверненні до самого моделюемого об'єкта або до моделюемого явища.

Традиційно існувало два види представлення даних, які можна вважати моделями в такому трактуванні.

До першого з них варто віднести представлення результатів дослідження в табличному вигляді. Оскільки в них, як правило, містяться узагальнені дані, вони дають можливість проаналізувати вплив тих або інших факторів і їхніх взаємодій, вибрати з варіантів досліду той, котрий має для дослідника найбільшу цінність. Більш того, аналіз таблиць може служити «керуванням до дії», оскільки в подібних умовах можливо очікувати появи подібних же результатів.

Другим видом узагальнення даних, більш інформативним, є моделі іншого роду, а саме, регресійні (майже завжди статичні) залежності, які визначають кількісний зв'язок досліджуваної величини (наприклад, урожайність) з факторами, які впливають на неї. Регресійні залежності, маючи властивості інтерполяції, дозволяють з визначеною точністю прогнозувати результати майбутніх дослідів не тільки в тих конкретних умовах, в яких вони ставляться, але й при варіації в деяких межах факторів навколишнього середовища.

Отже, обидва способи носять локальний характер, оскільки вони представляють собою оброблені певним чином результати конкретних експериментів. Зміна умов проведення дослідів може вплинути на отримані

при цьому висновки непередбаченим чином. Тому з моделями цього виду варто оперувати надзвичайно обережно, пам'ятаючи, що вони є ні чим іншим, як просто більш зручним для аналізу представленням емпіричного матеріалу.

Відповідно до сучасних уявлень, продуктивність агроєкосистем визначається процесами енерго- і масообміну між рослинним покривом і навколишнім середовищем. При цьому посів розглядається як центральна ланка системи ґрунт – рослина – атмосфера і моделюється як біохімічна машина, що засвоює з навколишнього середовища енергію і необхідні субстрати та продукує органічні речовини. Відповідна математична структура представляється у вигляді двох пов'язаних між собою систем рівнянь:

1) фізичної, яка описує процеси перенесення речовини й енергії в атмосферному і ґрунтовому середовищах, а також процеси перенесення води через рослини;

2) біологічної, яка описує визначальні процеси асиміляції і дисиміляції вуглекислоти, динаміку фітомаси й архітектуру фітоценозу в онтогенезі рослин.

Перша системи рівнянь задає умови роботи фотосинтезуючої системи, а друга – еволюцію стану цієї системи в ході розвитку рослин.

Подібні уявлення лежать в основі нового динамічного підходу до вирішення основної задачі агрометеорології – вивчення причинно-наслідкових зв'язків між агрометеорологічними умовами та продуктивністю агроєкосистеми.

В основу побудови динамічних моделей покладено опис механізмів явища, тобто тих теоретичних уявлень про процеси, які відбуваються у природі, що склалися за всю попередню історію природознавства. Саме тому, що теорія являє собою відфільтрований і очищений від непотрібних деталей досвід усього попереднього періоду складання моделей, динамічні моделі забезпечують якісно новий ступінь у розумінні суті описуваних процесів, дозволяють глибоко аналізувати наслідки, викликані сукупністю зовнішніх впливів на агроєкосистеми.

Перелічимо характерні риси цих моделей, які відрізняють їх від усіх тих, що існували раніше.

Імітаційні моделі продукційного процесу являють собою реалізовані на ПЕОМ динамічні балансові структури блокового типу. Пояснимо це висловлення. Насамперед, слід пам'ятати, що кінцевий урожай є результатом сукупності дуже складних і взаємозалежних процесів, які протікають у ґрунті, приземному повітрі й у самих рослинах. Оскільки ці системи є системами відкритого типу, агроєкосистеми потребують для свого нормального функціонування притоку з зовні енергії і речовини, які в свою чергу вступають у складні ланцюги перетворень і трансформацій. У

рослинах, вже починаючи з наклеювання насіння, відбуваються фізичні, біофізичні, біохімічні і фізіологічні процеси, які забезпечують формування нових генеративних органів і «продовження роду». Слід підкреслити, що усі ці процеси протікають у часі.

Отже, якщо потрібно представити у моделі адекватний природним взаємозв'язкам опис, то необхідно конструювати динамічну модель, тобто таку модель, у якій події мають часову спрямованість. При цьому слід враховувати дискретно-безперервний характер природних явищ. Так, процеси, які відбуваються у ґрунті протягом сезону вегетації, носять, як правило, безперервний у часі характер. У рослинах багато процесів також протікають безперервно. В той же час можна виділити ряд «критичних точок», у яких ця безперервність порушується, або, принаймні, змінює свій характер. Очевидно, що в період початкового проростання насіння рослини отримують енергію і «будівельний матеріал» із запасних органів насіння. Поява сходів і формування кореневої системи знаменує перехід на режим автотрофного живлення.

У стадії вегетативного росту також виділяються періоди, які різко відрізняються один від одного за інтенсивністю й спрямованістю процесів: досить указати на фази кушіння і стеблуння зернових культур. Ще більш складною є генеративна фаза, коли ріст зернових і налив зерна здійснюються частково за рахунок надходження «нових» асимілятів, а частково за рахунок реутилізації «старих». Усі ці обставини варто мати на увазі, коли обговорюється динамічний характер моделей. Очевидно також, що при переході від фази до фази змінюється також роль зовнішніх впливів на агроєкосистеми. Так, наприклад, посуха в період вегетативного росту призводить зовсім до інших наслідків, ніж посуха в період наливу зерна. Це означає, що всі зовнішні впливи – агрометеорологічні умови року, поливи, підживлення – в моделі повинні бути «прив'язані» до реальних часових інтервалів, тобто у моделі повинна здійснюватися імітація процесів життєдіяльності рослин в конкретних ґрунтово-кліматичних умовах зони вирощування.

Розглянемо тезу про балансовий характер моделей. Це означає, що у кожній із включених у модель субстанцій (вуглець, вода, азот та ін.) проводиться повний розрахунок усіх складових балансу, а перетік речовини у системі також підкоряється балансовим співвідношенням. Ніщо не зникає всередині агроєкосистеми і ніщо не з'являється знову. Так, наприклад, при розрахунку водного режиму враховується: випадання опадів або поливи, перехоплення цих опадів надземними органами рослин, можливе утворення шару вільної вологи на поверхні ґрунту, випадання роси, переміщення вологи у ґрунті з одного шару в інший при промочуванні або висушуванні, обмін із ґрунтовими водами, диференціальне поглинання води коренями рослин, її рух по ксилемі до

листя, випаровування води в міжклітинник, дифузія водяної пари через устячкові отвори і турбулентне винесення її в атмосферу.

При описуванні азотного циклу розглядається надходження азоту з насінням, опадами, внесеними добривами, розчинення гранул (у випадку внесення гранульованих добрив), мінералізація гумусу й органічних залишків минулих років, а також відмерлих частин рослин, перехід сполук азоту в недоступну для рослин форму або в розчин, перенесення нітратів у ґрунтовому профілі, їхнє винесення за межі розміщення кореневої системи, денітрифікація і несимбіотична азотфіксація, іммобілізація мінеральних форм азоту, поглинання азоту корінням і т.д.

Тим самим у моделі фіксується все, що:

- надходить на вхід системи;
- складає предмет непродуктивних витрат (вимивається у ґрунтові води або випаровується в атмосферу);
- відчужується з поля після збирання урожаю.

В результаті річного циклу в агроєкосистемі повинен бути замкнений кругообіг речовин. З огляду на динамічний характер моделі, можна стверджувати, що ці баланси повинні з визначеною точністю дотримуватися на кожному відрізьку часу в період вегетації.

Зупинимось на понятті блокового характеру моделі. Блокова структура моделі відображає скоріше особливості її реалізації на ПЕОМ, ніж суть процесів, які протікають у агроєкосистемі. Вся сукупність процесів розбивається на такі групи, в яких зв'язки всередині групи є більш тісними, ніж міжгрупові.

Так, наприклад, відомо, що водний режим ґрунту і фотосинтез рослин пов'язані між собою. Дійсно, висушування ґрунту призводить до збільшення опору устячок і до зменшення транспірації. Внаслідок зменшення транспірації температура листя починає підвищуватися, тому що при цьому велика частина прихідної сонячної радіації витрачається на нагрівання листя, а не на транспірацію. Збільшення устячкового опору призводить також до більш повільної дифузії вуглекислого газу з атмосфери у міжклітинний простір листка. Обидва ці фактора зменшують інтенсивність фотосинтезу, з іншого боку, при зменшенні фотосинтезу ріст рослин сповільнюється, більш повільно наростає біомаса листя, що, в свою чергу, впливає на водний режим.

У реальній системі усі ці й численні інші процеси відбуваються одночасно. Однак змоделювати такий рівнобіжний хід декількох процесів не представляється можливим. Ситуація виявилася б безнадійною, якби не дві обставини.

Перша з них зводиться до того, що в агроєкосистемі кожний з елементарних процесів пов'язаний із всіма іншими, однак, цей ланцюжок взаємодій може виявитися досить довгим і, як очевидно, досить врахувати

взаємодію лише сусідніх ланцюжків.

Друга обставина, яка полегшує конструювання моделей, пов'язана з тим, що різні процеси протікають зі швидкостями, які відрізняються одна від одної на два і більше порядки. До найбільш швидких процесів відносяться, наприклад, волого- і теплоперенесення, а також газоперенесення у міжлистковому просторі, дифузія CO<sub>2</sub> з атмосфери у міжклітинний простір листка та ряд інших. Ці процеси встановлюються за декілька секунд. Інша група процесів протікає в деякому «середньому» темпі, маючи постійний час порядку декількох годин. Це тепло- і вологоперенесення у ґрунті, міграція нітратів та інших іонів у ґрунтовому профілі.

Нарешті, ріст різних органів рослини, помітна зміна величини листової поверхні, висоти посіву і глибини проникнення коренів, тобто зміна архітекtonіки посіву, відбувається протягом декількох діб і відноситься до групи повільних процесів. Тому в основу описування динаміки покладено інтегрування рівнянь «середньої» групи, що проводиться протягом кожної доби при «заморожених» параметрах, які описують архітекtonіку посіву. Перерахування ж параметрів архітекtonіки посіву може здійснюватися один раз на добу.

## **1.2. Міждисциплінарність опису процесів, які відбуваються у агроєкосистемі, ієрархічність**

### ***Необхідність координації***

Основні процеси і явища, які розглядаються у системі ґрунт – рослина – атмосфера, у вигляді схеми зображені на рис. 1.1. Хоча у всіх цих процесах і явищах рослина займає центральне місце, усі вони відносяться до різних областей знань, які розвивалися відносно незалежно один від одного, наприклад, до фізіології рослин, біохімії, агроєкології, агрометеорології, метеорології, динаміки популяції, ґрунтознавства і біології ґрунтів.

Моделі сільськогосподарських культур, за допомогою яких проводяться спроби імітувати ріст посівів у природних умовах, обов'язково містять у собі важливі елементи з цих областей знань. Указані вище дисципліни взаємодіють одна з одною, тому на визначеному етапі моделювання вони повинні розглядатися спільно. Існування цих взаємозв'язків породжує проблему координації, як між науковими дисциплінами, так і всередині них – проблему, характерну для сучасного етапу розвитку математичного моделювання і науки в цілому.



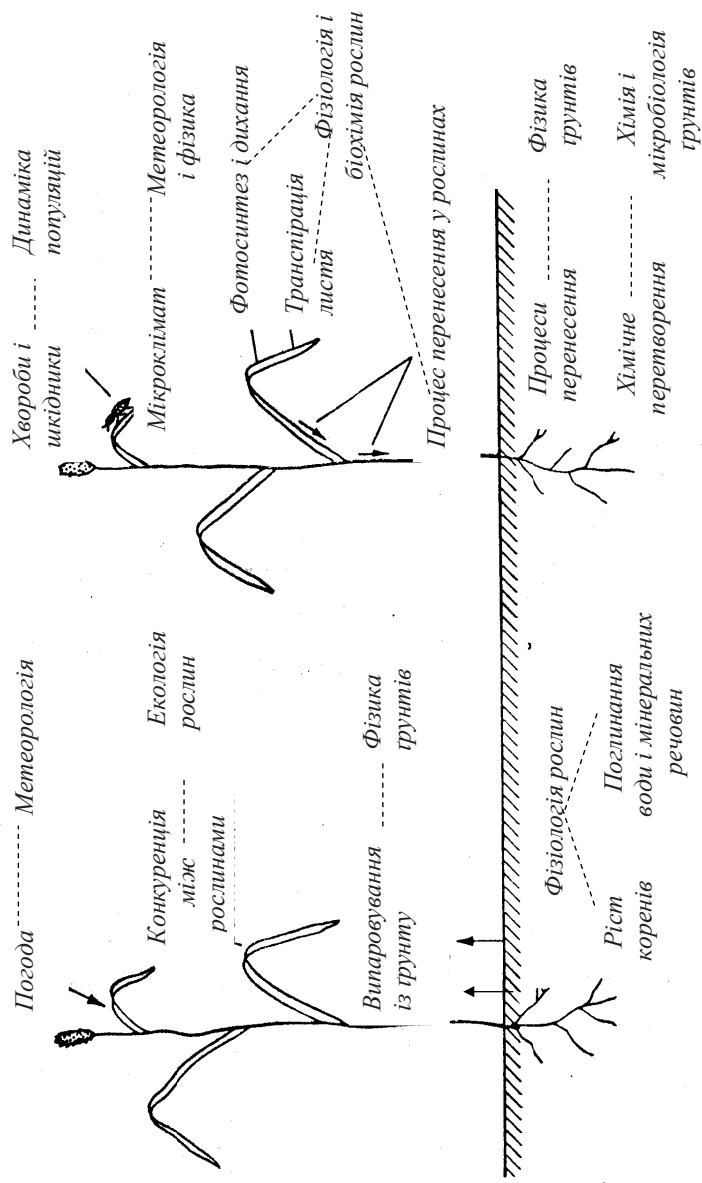


Рис. 1.1. Координація галузей знань при моделюванні росту рослин

### Зв'язок між субмоделями

Модель може бути побудована із субмоделей, які створюються в рамках різних наукових дисциплін. Кожна субмодель може описувати окремі частини системи, які звичайно з'єднуються між собою лише в декількох характерних точках. Ці зв'язки досить часто можна обірвати, не порушуючи при цьому цілісності всієї субмоделі. Такі субмоделі можна будувати і використовувати самі по собі. Єдине, що потрібно зробити в такому випадку, – це замінити впливаючою функцією той вплив, який виконувала субмодель до її вилучення.

Як приклад розглянемо модель колорадського жука, який живиться біомасою рослин, і в процесі харчування прогризає отвори у листках. Можна побудувати такі моделі рослини і жука, які будуть незалежні одна від одної; для цього модель жука варто забезпечувати варійованими порціями корму, а в листках моделі рослини потрібно зробити варійовану кількість отворів. Потім у будь-який час можна поєднати ці субмоделі, перерахувавши інтенсивність поглинання їжі колорадським жуком на швидкість збільшення кількості отворів у листках і прирівняти масу доступної жуку їжі до маси листків рослини.

Ще один приклад – модель поглинання ґрунтової вологи рослинами. У моделі формування водного режиму ґрунту враховується вплив вологи ґрунту на рослини. Цей вплив можна замінити впливаючою функцією тиску ґрунтової вологи в зоні коренів, а вплив рослини, який враховується у моделі ґрунту – впливаючою функцією поглинання води.

Оскільки субмоделі, які належать до різних дисциплін, функціонують здебільшого незалежно одна від одної, немає ніяких причин доводити їхню розробку до однакового рівня деталізації. В залежності від того, що саме становить найбільший інтерес, можна детально розробити модель комахи або модель ґрунту і лише в загальному вигляді побудувати модель рослини, або навпаки.

По відношенню одна до одної субмоделі упорядковуються паралельним або послідовним способом. Часто основні труднощі полягають у збереженні розуміння моделі, її сутності.

Коли вихід однієї субмоделі використовується як вхід в іншу субмодель, причому остання не впливає на першу, – то це найпростіша форма зв'язку між субмоделями. У цьому випадку моделі можуть працювати незалежно одна від одної: перша модель генерує дані, які використовуються як параметри чи табличні функції у другій моделі; при цьому, якщо перша модель коректна, немає необхідності повторно залучати її для роботи у другій моделі. Переваги такого зв'язку очевидні.

Результати розрахунків по макрометеорологічній моделі можуть безпосередньо використовуватися як вхід у мікрометеорологічну модель. У останньому випадку явно існує слабкий зворотний зв'язок між

мікрометеорологічною ситуацією на розглянутому полі і макрометеорологічною ситуацією, проте, можливо істотно спростити зв'язки між ними і не враховувати цієї обставини. Такі слабкі зворотні зв'язки доцільно ігнорувати особливо в тих випадках, коли не вистачає знань або немає потреби в деталях. У таких випадках простота підготовки даних і зручність роботи в цілому виглядають набагато привабливіше, чим вимоги, властиві строго фізичному підходу. На жаль, не можна запропонувати простих рецептів таких спрощень – це питання досвіду і здорового глузду.

### **Ієрархічні системи**

Невід'ємною рисою розгляду біологічних об'єктів є концепція виділення різних рівнів ієрархії досліджуваних складних систем.

Значення терміну «ієрархія» або більш повно – «організаційна ієрархія» зручніше за все пояснити на типовому для біологічного об'єкта прикладі:

<i>Рівень</i>	<i>Опис рівня</i>
$i+1$	Сукупність організмів (с.-г. культура)
$i$	Організм (рослина)
$i-1$	Органи
$i-2$	Тканини
$i-3$	Клітини
$i-4$	Органели
$i-5$	Макромолекули

Об'єкти, які належать кожному структурному рівню, можуть розглядатися і як системи, утворені з підсистем (об'єкти більш низьких рівнів), і як підсистеми, що входять до складу деякої системи (об'єкт більш високого рівня).

Для ієрархічних систем характерні три важливих особливості.

1. Кожен рівень ієрархії має свою власну мову, свою систему концепцій або принципів. Наприклад, поняття «урожайність сільськогосподарської культури» практично позбавлено сенсу на рівні клітини або органели. Поняття тиску, об'єму і температури, які визначають головні властивості рідини і газу, втрачають сенс на атомарному або молекулярному рівні.

2. На кожному рівні ієрархії відбувається узагальнення властивостей об'єктів більш низьких рівнів. Закономірності, виявлені й описані для більш низьких рівнів можуть бути включені у пояснювальну (функціональну) схему, набуваючи при цьому зв'язок з об'єктом вищого рівня. Таким чином, описування на рівні  $i$  сприяє розумінню явищ, які мають місце на рівні  $i+1$ .

3. Взаємозв'язки між рівнями несиметричні. Для нормального функціонування об'єктів вищого рівня необхідно, щоб успішно «працювали» об'єкти більш низького рівня, але не навпаки.

При побудові моделей процеси, які відносяться до нижчого рівня організації, включаються у модель, яка створюється для розуміння явищ на більш високому рівні організації. Тут знову можна використовувати субмоделі. Наприклад, для того, щоб представити листя, клітини, поведінку устячок або процеси фотосинтезу. Отже, ці субмоделі не стільки паралельно або послідовно упорядковані відносно одна одної, скільки розміщені, якщо так можна виразитися, у ієрархічних гніздах: моделі вищестоячого рівня організації містять в собі моделі більш низького рівня – подібно тому, як листок складається з власних клітинок.

Чим нижче в ієрархічному гнізді розташований рівень організації, тим більш численніші й дрібніші його елементи. Посів сільськогосподарської культури може складатися із ста тисяч рослин, у яких мільйони листків і мільярди клітинок. Цієї проблеми великих цифр можна уникнути, якщо розділити рослини на класи за розміром, листки на класи відповідно до їхнього розміщення у рослинному покриві, а клітинки в залежності від виконуваної функції.

### **1.3. Типи моделей**

#### **Емпіричні і функціональні моделі**

*Емпіричні моделі.* Головна задача емпіричних моделей – описати, запропонувати аналітичне наближення до експериментальних даних. Таке описування виявляється корисним у багатьох ситуаціях, однак, у ньому не міститься ніякої інформації більше тієї, котра була отримана в ході дослідів, тоді як функціональне моделювання пов'язане зі спробою дати пояснення описуваному об'єкту. Користуючись термінологією підрозд. 1.2, можна сказати, що розроблювач емпіричної моделі завжди залишається в межах одного єдиного рівня (скажемо, рівня  $i$ ) організаційної ієрархії, де він і будує рівняння, які зв'язують між собою параметри, властиві підсистемі тільки даного рівня. Так, зокрема, модель, задана наведеним далі рівнянням (1.1) і рис. 1.2, є емпіричною.

Розглянемо це положення на простому прикладі аналізу експериментальних матеріалів вивчення динаміки росту худоби в залежності від норми годівлі.

Математична модель являє собою набір формальних співвідношень, які відображають поведінку досліджуваної системи. Наприклад, на рис. 1.2 наведена крива росту, яка побудована на основі експерименту, в ході якого варіювалася витрата корму при відгодівлі худоби.

Експериментальні дані, які представлені на кривій, можна описати такою залежністю

$$G = G_1 \frac{F}{K+F} - G_2, \quad (1.1)$$

де  $F$  – витрата корму за одиницю часу;  
 $G$  – приріст живої маси тварини.

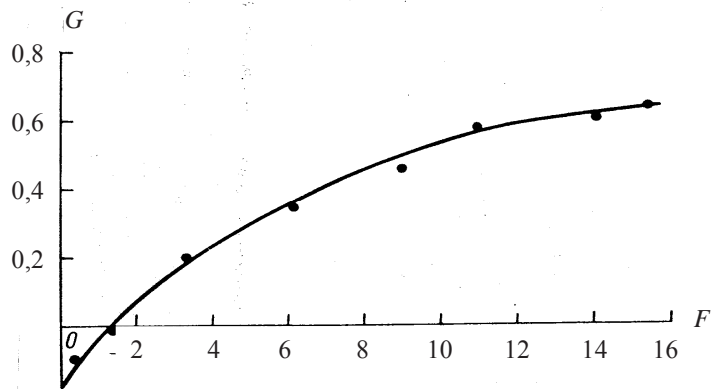


Рис. 1.2. Гіпотетичний експеримент, який демонструє вплив зміни подачі корму  $F$  за одиницю часу на темп росту тварини  $G$ :  
 • – експериментальні дані; — апроксимуюча функція (1.1)

Як  $F$ , так і  $G$  – змінні, котрі набувають різних числових значень.  $F$  розглядається як незалежна змінна, оскільки експериментатор вибирає її значення у визначених межах, тобто в тому діапазоні витрати корму, у якому вони варіюють при експерименті;  $G$  розглядається як *залежна змінна*, тому що вона не задається експериментатором, а визначається обраними значеннями  $F$ .

Величини  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $K$  називаються *параметрами*; їхні числові значення визначаються характером кривої, наведеної на рис. 1.2. Усі три параметри  $G_1$ ,  $G_2$  і  $K$  легко піддаються інтерпретації: якщо витрата корму  $F$  дорівнює нулю, то приріст живої маси  $G = -G_2$  і тварини втрачають масу; якщо ж витрати корму великі, то відношення  $F/(K+F)$  прагне до одиниці, а приріст  $G$  маси тварини – до  $(G_1 - G_2)$ . Параметр  $K$  визначає крутість нахилу кривої і дорівнює величині  $F$ , коли значення  $G$  розташовується посередині між мінімумом ( $F=0$ ) і максимумом ( $F$  дуже велике).

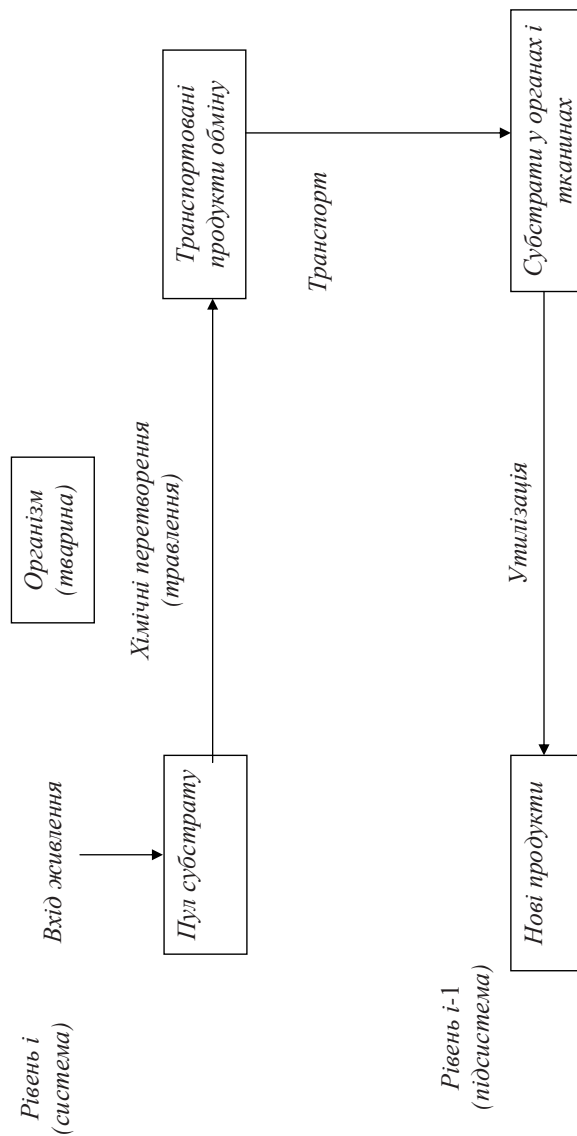


Рис. 1.3. Модель взаємодії підсистем, яка пояснює функцію відгуку на рис. 1.2

Таким чином, параметри  $G_1$ ,  $G_2$  і  $K$  визначають відповідно асимптоту, відрізок, який відтинається на осі  $G$ , і усереднене значення екстремальної реакції тварин на корм. Крива (1.1) має дві перпендикулярні одна одній асимптоти і відноситься до рівносторонніх гіпербол:

$$F \rightarrow \infty, \quad G \rightarrow (G_1 - G_2); \quad (1.2)$$

$$F \rightarrow -K, \quad G \rightarrow -\infty. \quad (1.3)$$

Прямі  $G = G_1 - G_2$ , і  $F = -K$  перпендикулярні одна одній.

Функції відгуку такого типу як на рис. 1.2 часто використовують як у біології, так і в інших галузях науки. За їхньою допомогою описують зміни режиму живлення сільськогосподарських культур в залежності від доз мінеральних добрив, відповідну реакцію процесу фотосинтезу у рослинах і їхніх листках на зміну освітленості та швидкості ферментативного процесу в залежності від концентрації субстрату.

*Функціональні моделі* – це моделі, засновані на уявленнях про способи функціонування об'єкта моделювання.

Розроблювач функціональної моделі прагне описати поведінку параметрів, властивих підсистемі рівня  $i$ , використовуючи параметри підсистеми рівня  $i-1$ . Одна з можливих моделей взаємозв'язку підсистем, яка співвідноситься з кривою росту організму тварини в цілому, представлена на рис. 1.3. Вона містить сукупності (пули). Зв'язок між пулами забезпечується за допомогою процесів, які протікають зі швидкостями, що можуть бути інтерпретовані відповідними оцінками. Таким чином, ці два суміжних рівні виявляються зв'язаними за допомогою аналітико-синтетичного процесу, який спирається на відповідні гіпотези чи допущення.

Опис поведінки підсистеми рівня  $i-1$  може бути чисто емпіричним, тобто не містити жодного елемента, який відноситься до підсистеми рівня  $i-2$ , а може бути і змішаним – емпірико-функціональним, отже, може містити в собі параметри, властиві підсистемам рівня  $i-2$  і нижче. Будь-яка функціональна модель, зрештою, йде коренями в емпіризм.

Завжди можна побудувати таку емпіричну модель, щоб вона була погоджена з масивом експериментальних даних краще, ніж функціональна. Це впливає з того факту, що емпірична модель практично вільна від обмежень, у той час як можливості функціональної моделі (навіть якщо вона містить добре регульовані параметри) обмежуються покладеними в її основу допущеннями.

### Статичні і динамічні моделі

*Статична модель* – це математична конструкція, в яку не включена змінна часу, як, наприклад, у формулі (1.1). Всі особливості поведінки системи, що мають виражену залежність від часу, при цьому ігнорують. Оскільки усе у світі швидко чи повільно, але міняється, то будь-яка статична модель – це завжди апроксимація, хоча іноді й дуже вдала. Останнє справедливо, коли система досить близька до рівноваги або коли її постійна часу настільки мала в порівнянні з постійною часу зміни середовища, що зовнішні умови можна вважати незмінними. Однак, слід відмітити, що миттєву картину можна представити статичною моделлю не у всіх випадках, особливо, коли система далека від рівноваги. При такій ситуації подібні засоби опису практично непридатні.

*Динамічна модель.* Залежність (1.1) являє собою *статичну модель*, оскільки вона не має змінної часу  $t$ . Існує багато корисних моделей такого типу. Однак, є й інша, дуже важлива категорія описів, відомих як *динамічні моделі*, які мають змінну часу  $t$  і часто використовуються для дослідження явищ у їхньому розвитку. Більшість динамічних моделей росту рослин часто включають статичні елементи, наприклад, модель поглинання світлового потоку рослинами. Однак, якщо листки рослини здатні реагувати на зміни освітленості, більш ефективною буде чисто динамічна модель.

Прикладом найпростішої динамічної моделі може служити залежність

$$M = M_0 + bt, \quad (1.4)$$

де  $M$  – маса тварини або рослини;

$t$  – час;

$M_0$  і  $b$  – параметри:  $M_0$  – значення, якого набуває  $M$  при  $t = 0$ ;

$b$  – задає нахил кривої функції росту, зображеної на рис. 1.4.

Відповідно до виразу (1.5), темп росту  $dM/dt$  є величина постійна і дорівнює в даному випадку параметру  $b$ .

Формули (1.4) і (1.5) представляють собою сильні спрощення реальних процесів, що знижує вірогідність їхніх результатів. Динамічні моделі, які мають практичну цінність, як правило, будуються на основі диференціальних рівнянь, які не піддаються прямому інтегруванню, і рішення їх не можна отримати у вигляді простих *аналітичних* виразів типу (1.4). У цьому випадку звертаються до чисельних методів, які можна реалізувати тільки за допомогою ПЕОМ і спеціального програмного забезпечення.

Як правило, динамічні моделі представляють у диференціальній формі, тобто за допомогою одного бо декількох диференціальних рівнянь першого порядку.

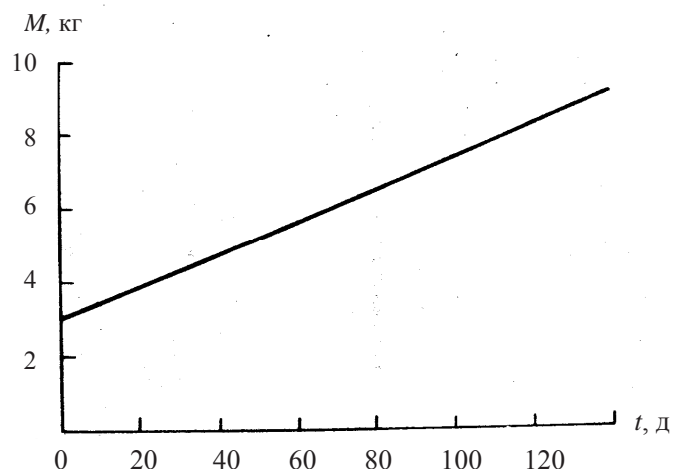


Рис. 1.4. Проста динамічна модель росту

Якщо продиференціювати обидві частини залежності (1.4) за часом  $t$ , то отримаємо

$$dM / dt = b. \quad (1.5)$$

У динамічних моделях змінна часу  $t$  може фігурувати у явному вигляді, як, наприклад, у виразі (1.4). Однак найчастіше типовою формою запису є диференціальне рівняння типу

$$dy / dt = f, \quad (1.6)$$

де  $y$  – характеристика системи (жива маса рослини або тварини);

$t$  – змінна часу;

$f$  – деяка функція  $y$ ,  $t$  і, можливо, інших параметрів.

Для отримання залежності, яка характеризує поведінку системи в часі, вираз (1.6) необхідно проінтегрувати.

Це може бути виконано або аналітично, і тоді на виході отримують алгебраїчний вираз типу (1.4), або (частіше) чисельними методами, і тоді всі обчислювальні процедури перекладають на ПЕОМ.

Може статися так, що в якийсь момент часу швидкість зміни стану системи стає рівною нулю, так що  $dy/dt = 0$  і тоді  $f = 0$ .

Рівняння  $f = 0$  представляє собою статичну модель.

### Детерміністичні і стохастичні моделі

Головна особливість *детерміністичної моделі* полягає в тому, що будь-який прогноз (жива маса рослини або тварини, урожайність культури, кількість опадів) вона формує у вигляді числа, а не у вигляді розподілу ймовірностей. Це в ряді випадків прийнятне, однак, коли доводиться мати справу з величинами, значення яких прогнозувати важко (кількість опадів), такий підхід виявляється не зовсім задовільним.

*Стохастична модель* відрізняється тим, що в ній неодмінно присутні одна або декілька випадкових змінних, заданих відповідними законами розподілу. Це дає можливість оцінювати не тільки середнє значення прогнозованого параметра, але і його дисперсію.

Чим більше невизначеність у поведінці системи, тим ефективніше виявляється стохастична модель. Такі процеси, як народжуваність, міграція, смертність, радіоактивний розпад, хімічне перетворення, мають виражений випадковий характер і знаходять детермінізм, тільки коли в силу вступають закони великих чисел. Стохастичні моделі знаходять застосування при вирішенні проблем епідеміології, динаміки популяцій, біологічного контролю і т.д.

Цьому типу формалізації властиві швидко зростаюча складність і, крім того, при практичному застосуванні стохастичних моделей доводиться переборювати значні технічні труднощі. Звичайно виявляється доцільним попередньо сформулювати і спробувати вирішити проблему, користуючись детерміністичним підходом. Якщо при цьому результати будуть задовільними, то витратити зусилля на розробку складної стохастичної моделі недоцільно.

## 1.4. Агрокосистема як об'єкт моделювання

Агрокосистеми представляють собою надзвичайно складні природні комплекси, що перебувають під безпосереднім контролем людини. Тому, перш ніж ставити завдання моделювання, варто добре розібратися в тому, які природні процеси необхідно описувати в моделі і яким чином включати в неї зовнішні впливи.

### 1.4.1. Ґрунт

Головними характеристиками ґрунту є механічний склад і структура, вміст у ньому повітря, води і біотичних компонентів. Під механічним (гранулометричним) складом ґрунту розуміється вміст у ньому елементарних часток, об'єднаних у фракції: гравій (частки з діаметром

більше 1 мм), пісок (частки з діаметром від 0,05 до 1 мм), частки пилу (0,002–0,05 мм) і мулу або глини (менше 0,002 мм).

Завдяки зв'язності при зволоженні глинисті ґрунти важко піддаються обробці, а при пересиханні окремі частки злипаються з утворенням брил. Загальний поровий простір у глинах іноді виявляється більшим, ніж у пісках. Однак, оскільки значна частина цього порового простору представлена мініатюрними порами, швидкість проникнення води і повітря крізь глину значно менша, ніж крізь пісок.

Мікроскопічні дослідження останніх років показали величезну розмаїтість способів сполучення часток піску, глини і мулу, які обумовлені активністю мікроорганізмів і рослин. Сукупності мікроагрегатів, які складаються з глинистих пластин, утворюють макроагрегати і крупиці. У непорушеному ґрунті можна виділити агрегат більшого розміру, названий *педом*.

Кращою є така ґрунтова структура, яка сприяє росту рослин, має губчасту або грудкувату структуру. У ній містяться пори, крізь які дифундує необхідний для дихання коренів кисень, а вода вільно надходить до кореневої системи рослин. Приблизно 50 % об'єму ґрунту зайнято твердою речовиною (мінерали, рослини, органічні залишки), а інші 50 % представлені поровим простором, заповненим частково повітрям, частково водою. Оскільки корені рослин і мікроорганізми, які живуть у ґрунті, і багатоклітинні в процесі дихання споживають кисень і виділяють вуглекислий газ, аерація ґрунту так само необхідна, як і постачання рослин водою.

Оптимальні умови зволоження для рослин спостерігаються при вологості ґрунтів, яка відповідає найменшій вологомісткості (НВ) або трохи нижче. При вологості в'янення, що відповідає сисній силі ґрунту, близько 15 атм, рослини починають відчувати нестачу вологи і зрештою гинуть. При перезволоженні, тобто при вологості від НВ до повної вологомісткості (ПВ) порушується аерація ґрунтів, розвиваються кореневі гнилі, пригнічується несимбіотична азотфіксація, а бактерії-амоніфікатори починають працювати як денітрофікатори, що призводить до втрати азоту.

На біологічну активність ґрунтів, певний вплив мають представники мікрофлори, які живуть у них (бактерії, актиноміцети, гриби, водорості), і фауни (найпростіші, нематоди, комахи, земляні хробаки). Завдяки їхній життєдіяльності відновлюється ґрунтова родючість: відбувається мінералізація відмерлих залишків рослин і утворюється гумус. Усі ці процеси знаходяться під впливом фізичних факторів, найважливішими з яких є співвідношення вода – повітря і температура. Температурний режим, на відміну від водного, має явно виражений сезонний і добовий хід (для водного режиму характерним є лише добовий режим випаровування).

Амплітуда добових коливань температури загасає зі збільшенням глибини і на відстані 50 см від поверхні ґрунту добовий хід температури практично відсутній. Сезонні коливання температури досягають глибини 2 м, а в деяких регіонах і більше. Температурний максимум і температурний мінімум на поверхні ґрунту спостерігаються майже одночасно з максимумом і мінімумом температури повітря і настають відповідно о 14–15-й годині і на сході Сонця. Зі збільшенням глибини одночасно із зменшенням амплітуди добових коливань відбувається їхній зсув по фазі – час досягнення мінімуму і максимуму зміщується на більш пізні години.

Усі біологічні процеси в агроєкосистемах мають температурний оптимум, який неоднаковий для різних процесів, він знаходиться приблизно в діапазоні 20...30 °С. При зниженні температури нижче 0 °С або її підвищенні (вище 40...50 °С) біологічні процеси «завмирають». Таким чином, задача моделювання температурного режиму ґрунту є не менш важливою, ніж задача моделювання динаміки ґрунтової вологи. До інших процесів, які мають вирішальний вплив на продукційний процес відносяться: трансформація мінеральних і органічних форм азоту, перенесення нітратів у ґрунтового профілі, кругообіг фосфору і калію, а також газовий режим ґрунтів, включаючи дифузію кисню і вуглекислого газу.

Відзначимо, що трансформація органічної речовини здійснюється досить повільно. Наприклад, протягом одного сезону вегетації зміни вмісту гумусу у ґрунті практично не відбувається. Фосфор, навіть внесений в ґрунт у вигляді добрив, також мало рухливий. Включення фосфорних сполук у продукційний процес відбувається, головним чином, через його біологічний кругообіг, з поверненням в доступну для рослин форму після мінералізації орґанофосфатів. Азот є найбільш рухливим елементом, який найчастіше лімітує урожай.

#### **1.4.2. Рослина**

Зелені рослини, як первинний виробник всієї органічної речовини, відіграють найважливішу роль у біосфері Землі в цілому за рахунок використання вуглекислого газу повітря і мінеральних речовин ґрунту вони синтезують вуглеводи, білки, рослинні жири та інші органічні сполуки, які потім споживаються травоядними тваринами.

Складні трофічні ланцюги замикають кругообіг речовин, повертаючи первинні мінеральні компоненти у атмосферу, ґрунт і водойми. Оскільки вищі рослини ведуть нерухомий спосіб життя, первинні мінеральні елементи повинні транспортуватися до їх асимілюючих органів тим чи іншим способом. Головну роль тут відіграють процеси турбулентного

перемішування в атмосфері, які доставляють рослинам CO<sub>2</sub>, перенесення вологи у ґрунті, що постачає в корені рослин азот, фосфор та інші елементи і сонячна радіація, яка є невичерпним (поки) джерелом енергії для біосинтезу.

Нормальна життєдіяльність рослин може підтримуватися тільки завдяки існуванню двох потоків: вуглекислого газу зверху, води і мінеральних речовин знизу. Випаровування листками води, крім функцій «насоса», що змушує воду разом з розчиненими в ній речовинами рухатися до коренів, грає й іншу важливу роль. Завдяки витратам тепла на транспірацію запобігається перегрів листя, що утримує їхню температуру в межах, які забезпечують нормальне протікання всіх біологічних процесів.

Таким чином, при моделюванні продукційного процесу необхідно описати фотосинтез у зелених органах рослини, поглинання мінеральних речовин коренями, «зустрічний» транспорт води, вуглеводів і мінеральних елементів, біосинтез амінокислот, білків і високомолекулярних вуглеводів, ріст різних органів рослини і розвиток, що розуміється як зміна окремих етапів онтогенезу або як зміна фенофаз.

Фотосинтез є первинною ланкою у цьому ланцюжку: із двоокису вуглецю і води під дією сонячного світла у хлоропластах в присутності хлорофілу, який виконує роль каталізатора, утворюються сахари



Процес фотосинтезу розподіляється на дві основні фази. У першій з них (фотохімічній) вода під дією світла розщеплюється на водень і кисень, а в другій (біохімічній) CO<sub>2</sub> сполучається з воднем. При моделюванні фотосинтезу головним завданням є опис дифузії CO<sub>2</sub> у внутрішні порожнини листка і його переходу в розчин, поглинання листками сонячної радіації і її фотосинтетично активної частини (ФАР), власне синтезу сахарів у процесі карбоксилювання. Враховується також залежність цих процесів від внутрішніх факторів стану рослин: оводненості її тканин, їхньої температури, концентрації хлоропластів у листках, стеблах і колосках.

Дифузія газоподібного CO<sub>2</sub> у міжклітинниках відбувається в основному через устячкові отвори, на ступінь відкритості яких впливає прихідна радіація і водний потенціал листка. Тим самим забезпечується зв'язок інтенсивності фотосинтезу з водним режимом. На температуру листя також впливають радіаційний і водний режими. Цим, зокрема, пояснюється полуденна депресія фотосинтезу. При інтенсивній транспірації відбувається часткове зневоднювання тканин, устячка закриваються, підвищується температура листя, інтенсивність фотосинтезу знижується.

Специфіку поглинання мінеральних елементів коренями рослини розглянемо на прикладі азоту. Фізіологічні функції кореня знаходяться в тісному зв'язку з його анатомічною будівлею (рис. 1.5), в якій розрізняють дві морфологічно різні зони – кору і центральний циліндр (стелу). Кора, обмежена зовні епідермісом, складається з трьох шарів паренхімних клітинок. Центральний циліндр, містить у собі поперемінні елементи флоєми і ксилеми, також оточені клітинами паренхіми. Поперемінність флоєми і ксилеми створює найбільший контакт провідних тканин із клітинами кори і сприяє більш ефективному здійсненню фізіологічної функції кореня, спрямованої на поглинання і транспорт мінерального азоту.

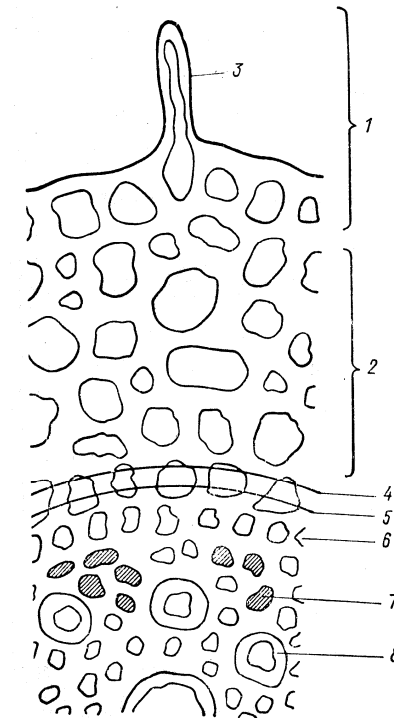


Рис. 1.5. Схема будови кореня:

Кора: 1 – ризодерма; 2 – екто-, мезодерма; 3 – кореневий волосок;  
4 – ендодерма; 5 – пояс Каспарі; центральний циліндр;  
6 – перицикл; 7 – флоєма; 8 – ксилема

Для кори характерна наявність розвинутих міжклітинників, які сприяють кращому кисневому постачанню і транспорту води, а також присутність у клітинах вакуолей, які займають 80–90 % об'єму клітин. У вакуолях розміщуються запасні фонди азоту, які необхідні для розвитку самого кореня.

Найбільш ймовірним шляхом транспорту багатьох іонів із кореня в стелу (в тому числі й нітратів) прийнято вважати симпласт, тобто спеціальні тяжі-трубочки, які пронизують паренхіму клітин кори як у радіальному, так і подовжньому напрямках. По цих тяжах-трубочках іони можуть мігрувати без витрати енергії безпосередньо до тканин центрального циліндра.

Центральний циліндр являє собою складний комплекс тканин, які містять провідні елементи, активні меристемні тканини і паренхіму. Тканини центрального циліндра щільно прилягають одна до одної, в наслідок чого провідна система кореня відокремлена від кори.

У клітинах центрального циліндра, завдяки активним процесам метаболізму, що йдуть з витратою енергії, іони «накачуються» у ксилему. При цьому концентрація нітратів у ксилемі виявляється більшою, ніж у ендодермі, а зворотний потік нітратів виключається. Зовнішній шар центрального циліндра (перицикл) відіграє роль своєрідного колектора, який збирає речовини з ендодерми і направляє їх до судин ксилеми.

Таким чином, у процесі поглинання нітратів кореннями поперемінно йдуть етапи пасивної дифузії по симпласту і активного транспорту за допомогою переносників.

Поглинання іонів амонію також являє собою багатофазний процес, однак, цей процес в цілому носить пасивний характер, спрямований на градієнт електрохімічного потенціалу.

Подальша доля азоту у рослині тісно пов'язана з вуглецевим метаболізмом. Асиміляція азоту в корені відбувається при наявності сахарози, яка надходить по флоемі з листя. При цьому частина нітратів у коренях відновлюється до нітритів, а потім і до амонію, а інша частина надходить у надземні органи. Синтез первинних амінокислот також відбувається у корені, для цього використовується енергія, яка виділяється при гліколізі. Відновлення нітратів у фотосинтезуючих органах проходить за допомогою використання проміжних продуктів фотосинтезу.

В спрощеному вигляді подальша взаємодія вуглець–азот відбувається за наступною схемою. У комфортних умовах, тобто при високих рівнях фотосинтезу й азотного живлення, ріст і розвиток рослин відбувається за генетично зафіксованою програмою. Первинні продукти фотосинтезу і поглинений коренями азот відразу ж включаються в метаболізм, завдяки чому йде збалансована «побудова» усіх основних органів рослини – листя, коренів, стебел і згодом генеративних органів.

Дефіцит азоту означає одночасно відносний надлишок вуглеводів. При цьому сахароза досить легко надходить у корені, а поглинений коренями азот відразу ж «перехоплюється» реакційними центрами. Це призводить до того, що більш інтенсивно починає розвиватися коренева система та обмежується формування надземних органів. Відношення верхки – корені (*shoot – root*) при цьому збільшується. Виявляється, що, незважаючи на дефіцит азоту, його невелика частина все-таки транспортується у листя, так що їхня біомаса також збільшується, хоча й повільніше ніж у комфортних умовах. Рослини як би «розшивають» вузьке місце, оскільки переважний ріст коренів в умовах азотного голодування збільшує їхню поглинальну поверхню. При цьому незатребувана частина сахарів відправляється в запас, який утворюється в листках у вигляді крохмалю.

Навпаки, при зменшенні фотосинтезу, яке може бути викликано, наприклад, укусами або uszkodженням листя комахами, або просто внесенням надлишкових доз азотних добрив, відносний вміст азоту у рослині виявляється підвищеним. У цьому випадку вже азот легко транспортується у листки, а первинні асиміляти, які утворюються в процесі фотосинтезу, відразу ж вступають з ними у біохімічну реакцію, що призводить до переважного росту надземних органів. Відношення *shoot – root* зменшується. Надлишок мінерального азоту також надходить при цьому в запас і відкладається в основному у вакуолях.

Цікаво відзначити, що запасання вуглеводів у вигляді крохмалю або азоту у вакуолях відбувається досить легко, а «добування» цих речовин із запасу потребує витрат енергії та здійснюється зі значно меншою швидкістю. Описаним вище способом здійснюється адаптація рослин до умов вирощування – дефіциту або надлишку азоту.

Сумарний приріст сухої біомаси розраховується у вуглецевих одиницях як різниця між фотосинтезом і диханням. Розрахунок фотодихання здійснюється безпосередньо у моделі фотосинтезу.

Темнове дихання складається з декількох статей витрат вуглеводів на транспорт, на біосинтез і на відновлення біологічних структур, які являються метастабільними сполученнями та піддаються розпаду. Відповідно до описаної схеми відбувається розподіл біомаси між надземною частиною рослин і коренями. Однак цим не вичерпується процес росту і розвитку. Рослини в процесі онтогенезу проходять ряд стадій розвитку, кожна з якої відповідальна за формування тих чи інших специфічних органів і вносить визначений вклад у формування урожаю.

Найбільш розповсюдженими шкалами біологічного часу є шкала етапів органогенезу і шкала, яка пов'язана з проходженням фенологічних фаз. Фенологічні фази легко визначаються візуально і за терміном їх настання в різних умовах вирощування найрізноманітніших культур



накопичено величезний статистичний матеріал.

В останній час загальне визнання набуває так названий децимальний (десятковий) код розвитку зернових культур. Відповідно до цього коду виділяються десять основних періодів, які поділяються на більш дрібні градації:

- проростання насіння (01–09);
- формування сходів (11–13...);
- кущіння (21–23...);
- стеблуння (31–39),
- формування колосу (40–49),
- колосіння (50–59),
- цвітіння (61–69),
- розвиток молочної стиглості (71–77),
- розвиток воскової стиглості (81–87),
- розвиток повної стиглості (91–92).

При цьому перша цифра коду означає номер відповідної фенофази, в той час як друга уточнює стан рослин усередині кожного міжфазного періоду. Так, на стадії сходів код 11 відповідає розгортанню першого справжнього листка і появі другого, код 12 – розгортанню другого листка і т.д. На стадії кущіння 21 означає появу першого бокового пагона, 22 – поява другого пагона і т.д.

На швидкість розвитку рослин впливають наступні фактори: температура, вологість ґрунту, а, точніше, пов'язаний з нею водний потенціал рослини, тривалість дня і умови азотного живлення. При цьому температура є основним фактором: при її підвищенні в досить широких межах розвиток прискорюється, однак, при значно високих її значеннях відбувається уповільнення розвитку (настає перегрів рослин). Аналогічним образом діє на рослини і водний стрес. Швидкість проходження фенофаз збільшується при зниженні вологості ґрунту від величини НВ до вологості в'янення, а при тривалому перезволоженні розвиток сповільнюється.

Вплив тривалості дня істотно впливає лише при переході рослин до цвітіння. Рослини північного походження є, як правило, довгоденні і для переходу до цвітіння їм потрібна певна кількість днів з кількістю годин сонячного сяйва, що перевищує деяку межу (14–16 год). Навпаки, південні рослини або сорти південної селекції належать в основному до групи короткоденних рослин. Вони можуть залишитися в стадії вегетативного росту і взагалі не перейти до цвітіння у тому випадку, коли період їхнього розвитку не співпадає з періодом короткого світлового дня. Врахування співвідношення день – ніч дуже важливо, як і при інтродукції рослин, тобто при перенесенні, наприклад, у північні широти рослин південного походження, так і навпаки. При вирощуванні культур і сортів у місцях їхнього походження фотоперіодична реакція рослин, відповідальна за

перехід на генеративний шлях розвитку, здійснюється автоматично і, як правило, не лімітує швидкості розвитку.

Своєрідним, хоча і не до кінця з'ясованим, є вплив азоту. Азотний дефіцит приводить до прискорення розвитку в першій половині вегетації (до цвітіння), але сповільнює розвиток на завершальних фазах. Тому рослини, вирощені на різних фонах азотного живлення, дозрівають практично одночасно.

### 1.4.3. Атмосфера

Наземні рослини живуть одночасно в двох середовищах – у ґрунті й у приземному повітрі. Тому процеси, які відбуваються у приземному шарі атмосфери так само важливі для їхньої життєдіяльності, як і процеси, що протікають у ґрунті. В природних умовах рослини, отримуючи з повітря необхідний для свого життя вуглекислий газ і енергію Сонця, одночасно відчувають «тиск» великої кількості тепла, що надходить до посіву. Адаптуючись до цих умов, рослини значну частину сонячної енергії, яка знаходить, витрачають на випаровування води з листя – транспірацію, утримуючи тим самим температуру своїх тканин у сприятливих для життя межах. Цей процес цілком прийнятний і навіть необхідний, оскільки видалення води з ґрунту змушує її пересуватися до коренів, для підживлення їх мінеральними речовинами. Однак запаси вологи у ґрунті не безмежні. Інтенсивна транспірація при обмеженій кількості опадів, зрештою, призводить до посух і втрат урожаю. Таким чином, без описування процесів енерго- і масоперенесення у приземному шарі атмосфери неможливо уявити собі модель, яка претендує на свою адекватність.

Сонячна радіація, що надходить до посіву залежить від географічної широти місця, астрономічного часу і режиму хмарності. Добова тривалість освітлення земної поверхні змінюється протягом року. При цьому для описування процесів фотосинтезу і фотоперіодизму важливим є час від фактичного сходу до фактичного заходу Сонця, а, наприклад, період від заходу до настання сутінок – несуттєвий. У середніх широтах зсування вегетаційного періоду на 1–2 тижні не призводить до істотної зміни фотоперіодичного режиму.

Навіть при безхмарному небі частина сонячної радіації, перш ніж дійти до поверхні Землі поглинається озоновим шаром і газоподібними компонентами атмосфери –  $O_3$ ,  $O_2$ ,  $H_2O$ ,  $CO_2$ , а також аерозолями.

Сумарна короткохвильова або інтегральна радіація, що надходить на горизонтальну ділянку одиничної площі  $Q$ , складається з потоків прямої радіації  $S' = S \sin h_0$  і розсіяної атмосферної променистої енергії або дифузійної радіації  $D$

$$Q = S \sin h_0 + D, \quad (1.9)$$

де  $h_0$  – кутова висота Сонця над горизонтом, вимірювана в радіанах.

Відношення  $D/Q$  також залежить від  $h_0$ . При малих висотах Сонця практично вся радіація є розсіяною, а її частка у загальному потоці зменшується з ростом  $h_0$  приблизно до 13 %. При наявності суцільної хмарності потік радіації зменшується. Уся радіація стає при цьому дифузійною.

Формування радіаційного поля у посіві залежить від його щільності й інших геометричних характеристик і характеризується коефіцієнтами відбиття (альbedo), пропускання і поглинання. Для розрахунку теплового режиму необхідно враховувати всю прихідну радіацію, а для визначення інтенсивності фотосинтезу – лише її частину, так названу фотосинтетично-активну радіацію (ФАР).

*Фотосинтетично-активною радіацією* вважається випромінювання з довжинами хвиль, які знаходяться в діапазоні 380–710 нм, що складає частку, приблизно рівну 50 % від усієї прямої радіації і 60 % – від розсіяної. У посівах, які сформувалися, з листовим індексом 4–5 і більше радіаційне поле швидко загасає з віддаленням від їхньої верхньої межі. Листки, розташовані у середніх і нижніх ярусах, починають відчувати нестачу ФАР, що призводить до зниження сумарного фотосинтезу і зменшення урожаю. Тому розгляд питання про зв'язок радіаційного режиму, архітеконики посіву і фотосинтезу є важливим для моделювання продуктивності агроecosистем.

Масообмін у посівах пов'язаний в основному з видаленням пари води і тепла, а також підживленням рослин вуглекислим газом. Ці процеси відбуваються під контролем процесу турбулентного перемішування повітря, яке знаходиться у міжлистовому просторі. Повітряні маси, що переміщуються над посівом, зустрічаючи на своєму шляху перешкоду у вигляді розподілених фітоелементів (листя, стебла, колосся), втрачають свою кінетичну енергію, яка переходить в енергію вихрових (турбулентних) рухів і потім розсіюється у вигляді тепла. Утворенні в результаті цього вихри різного масштабу, «чіпляючись» один за одного, переносять у посіві всі пасивні домішки – пари води, вуглекислий газ, кисень і тепло.

Завдяки турбулентному обміну швидкість видалення пари води з міжлистового простору, перенесення  $CO_2$  і тепла виявляється на кілька порядків вище, ніж у випадку, якби ці процеси протікали у спокійній атмосфері. Швидкість вітру, як і коефіцієнт турбулентного обміну, всередині посіву, загасає з висотою і наближається до нуля поблизу земної поверхні (тобто на рівні шорсткості). Завдяки цьому масообмін верхніх

ярусів листків і колосся протікає значно більш інтенсивно, ніж середніх, а тим більше, нижніх ярусів. Це узгоджується зі швидкістю фотосинтезу, що також має великий рівень у верхніх частинах посіву. Таким чином, одним із завдань моделювання є описування процесів турбулентного перенесення у посіві.

Закриваються рівняння моделі умовами теплового балансу. Дійсно, прихідна до посіву енергія у вигляді її короткохвильової (інтегральної) і довгохвильової (теплової) складових не зникає. Лише невеликий її відсоток витрачається на фотосинтез. Основні ж витратні статті такі:

- витрата енергії на транспірацію;
- турбулентне перенесення тепла від посіву або до посіву;
- нагрівання листя та інших фітоелементів;
- нагрівання верхнього шару ґрунту.

Крім того, відповідно до закону Стефана-Больцмана тепла енергія частково розсіюється посівом у навколишній простір.

Саме, виходячи з умов теплового балансу, можна розрахувати інтенсивність транспірації або утворення роси на листках, швидкість випаровування перехоплених опадів, температуру листя і поверхні ґрунту. При цьому, як правило, у денні години температура ґрунту при інтенсивній транспірації виявляється на 3...5 °C вище температури повітря. В умовах посухи ця різниця може досягати 7...10 °C і навіть 12 °C.

У нічні години, навпаки, листя й інші фітоелементи, а також верхній шар ґрунту виявляються більш холодними, ніж навколишнє повітря. Це може приводити до випадання роси, а у весняний і осінній періоди – до радіаційних заморозків. Збільшення вмісту  $CO_2$  в атмосфері, спричинене інтенсивним спалюванням продуктів переробки нафти і кам'яного вугілля, зміщує рівновагу у бік більш високих температур. Ця обставина може послужити основою для прогнозування впливу на динаміку агроecosистем антропогенних змін клімату, очікуваних у майбутньому.

## 2. ОСНОВНІ МЕТОДИ ДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

### 2.1. Змінні, параметри і константи моделі

При моделюванні функціонування процесів у агроєкосистемі в динамічних моделях, зазвичай, значення змінних є функціями часу. Можлива наступна класифікація: змінні стану, змінні швидкості, допоміжні і керуючі змінні.

*Змінні стану.* Ці величини визначають або допомагають визначити стан системи в будь-який заданий момент часу. Типовими прикладами таких величин можуть бути маса сухої речовини  $M$  і площа листової поверхні  $L$  рослини. При конструюванні моделі в число змінних стану краще включати тільки ті кількісні характеристики або властивості системи, які, по-перше, піддаються вимірюванню і, по-друге, становлять особливий інтерес для дослідника.

Загальноприйнятим є також термін «фазові змінні».

Нехай система визначена за допомогою  $q$  змінних стану  $X_1, X_2, \dots, X_q$ , які розглядаються як незалежні. Це означає, що жодна з них, наприклад,  $X_1$  не може бути чисельно визначена через значення інших ( $X_2, X_3, \dots, X_q$ ). Нехай далі площа поверхні листя  $L$  і маса сухої речовини  $M$  рослини зв'язані співвідношенням

$$L = kM, \quad (2.1)$$

де  $k$  – постійний коефіцієнт.

Тоді, як незалежна змінної стану може виступати тільки яка-небудь одна з названих характеристик. Числові значення змінних  $X_1, X_2, \dots, X_q$  визначають єдиним чином стан системи в момент  $t$ .

Проблема динамічного детермінованого моделювання складається з побудови диференціальних рівнянь, за допомогою яких можна було б прогнозувати значення всіх змінних стану в будь-який заздалегідь заданий момент часу.

*Змінна швидкості* – це характеристика, яка задає процес, що протікає в системі на даний момент. Розмірність змінної швидкості це – відношення тієї чи іншої величини до одиниці часу, отже, така характеристика не може бути виміряна миттєво (як змінна стану), а для цього потрібен інтервал  $\Delta t$ .

Кожний процес у системі протікає з деякою швидкістю, і це є саме та швидкість, з якою змінюються в часі числові значення кожної з відповідних змінних стану  $X_1, X_2, \dots, X_q$ . Прикладами можуть бути інтенсивність фотосинтезу, інтенсивність дихання, швидкість засвоєння поживних речовин, швидкість переміщення асимілятів, швидкість розпаду білка, темпи росту. Ці процеси можна кваліфікувати, як перетворення

(хімічні перетворення в біології) або як переміщення.

Коли визначені змінні стану, а також інші параметри і константи системи, то змінні швидкості можуть бути визначені розрахунковими методами. Часто найбільш істотні модельні припущення відносяться до виду залежності змінних швидкості від змінних стану. В загальному вигляді ця залежність має такий вигляд

$$\text{швидкість процесу} = \text{функції стану системи}$$

і як простий приклад можна навести співвідношення (1.6).

*Допоміжні змінні.* У більшості динамічних моделей бажано мати ряд додаткових змінних (окрім змінних стану, що самі по собі цілком визначають систему), які сприяють більш глибокому розумінню об'єкта і в окремих випадках результатів спостережень, що спрощують зіставлення. Якщо площа поверхні листя і маса сухої речовини рослини є незалежні змінні стану, то, користуючись співвідношенням

$$F_L = L / M \quad (2.2)$$

можна розрахувати індекс поверхні листя  $F_L$ .

Такі характеристики одержали назву *допоміжних змінних*, оскільки вони (хоча теж є функціями часу) вводяться лише для зручності дослідника, який розроблює модель. Інший приклад може бути запозичений з моделі розподілу, де  $M_r$  і  $M_s$  відповідно показники маси сухої речовини в корені і пагоні, які виступають як незалежні змінні моделі системи «корінь – пагін». При цьому майже завжди буває бажано знати, яка загальна чиста маса сухої речовини рослини

$$M_{ad} = M_r + M_s, \quad (2.3)$$

де  $M_{ad}$  – допоміжна змінна.

Іноді в ролі допоміжних змінних виступають характеристики, які мають розмірність швидкості. Питомий або відносний темп росту  $R_M$  може бути заданий у вигляді

$$R_M = \frac{1}{M} \frac{dM}{dt}, \quad (2.4)$$

де  $t$  – час.

Величина  $R_M$  часто використовується у біологічних дослідженнях. Її значення є відносно змінювання величини  $M$ , яке відбувається за одиницю часу.

*Керуючі змінні* – це вхідна інформація моделі, значення якої змінюється в часі незалежно від поводження досліджуваної системи. Ріст

рослин, тварин і багатьох інших організмів – результат впливу з боку навколишнього середовища, вплив якого на визначених стадіях може розглядатися як константа. Однак, прийнято вважати, що навколишнє середовище згодом зазнає змін. Величини, які його характеризують можуть мати характер змінної стану (властивості, наприклад, температура і вологість) або змінної швидкості (процеси, наприклад, засвоєння поживних речовин, випадання атмосферних опадів, сонячна радіація і вітер) з розмірністю «величина за одиницю часу». Символічно можна записати

$$E = E(t), \quad (2.5)$$

що демонструє функціональну залежність навколишнього середовища  $E$  від часу  $t$ .

Звичайно вважають, що навколишнє середовище знаходиться за межами моделі і що, маючи сильний вплив на ріст організму, воно саме від цього росту практично не залежить.

*Параметри і константи* – це незалежні від часу кількісні показники і коефіцієнти, які включаються у математичні моделі.

Під константою звичайно розуміють числову величину, яка має надійно і точно обчислене значення, що залишається незмінним при варіюванні умов експерименту, а також у тих випадках, коли модель використовується для перевірки різних гіпотез або для опису різних компонентів організму. До числа типових констант можна віднести відносну молекулярну масу глюкози, густину води, кількість секунд у добі та ін.

Термін «параметр» звичайно відноситься до характеристик, числові значення яких відрізняються меншою визначеністю ніж у констант, проте, залишаються незмінними протягом одного прогону моделі. Типовими прикладами є постійна Михаеліса-Ментен у кінетиці ферментів, ефективність фотосинтезу, дихальний коефіцієнт, резистентність органа при виведенні сахарів і т.д. Значення параметрів часто піддаються впливу умов експерименту, специфіці способу вирощування організму, генотипу та інших факторів. Частина параметрів (іноді всіх) можуть бути приблизно визначені при дослідженні найближчого нижнього рівня організаційної ієрархії, тобто рівня, у рамках якого приймалися допущення відносно конструйованої моделі. Іноді в модель доводиться включати маловивчені параметри. В цьому випадку для уточнення їхніх значень бажано зіставляти результати моделювання з експериментальними даними, домагаючись при цьому потрібної якості погодженості. Для позначення безлічі параметрів і констант використовують символ  $P$

$$P = \text{параметри} + \text{константи.}$$

## 2.2. Диференціальні рівняння

Нехай  $q$  змінні стану  $X_1, X_2, \dots, X_q$  визначають систему в момент часу  $t$ . Як правило, динамічна детермінована модель складається з диференціальних рівнянь першого порядку, які описують поведінку змінних стану в часі, і кількість рівнянь дорівнює кількості змінних стану

$$\begin{aligned} dX_1/dt &= f_1(X_1, X_2, \dots, X_q; P; E); \\ dX_2/dt &= f_2(X_1, X_2, \dots, X_q; P; E); \\ &\dots\dots\dots \\ dX_q/dt &= f_q(X_1, X_2, \dots, X_q; P; E), \end{aligned} \quad (2.6)$$

де  $f_1, \dots, f_q$  позначають функції змінних стану  $X_1, X_2, \dots, X_q$  і навколишнього середовища  $E$ .

Запис у вигляді  $f_i(X_1, X_2, \dots, X_q; P; E)$  зовсім не означає, що на практиці функція  $f_1$  (так само як і інші функції  $f_2, f_3, \dots, f_q$ ) повинна містити всі змінні стану, параметри і характеристики навколишнього середовища. Наприклад, розглянемо модель росту листка, яка, крім площі поверхні і маси сирової тканини, включає як змінні стану, вміст сахарози  $S_u$  і крохмалю  $S_c$ . Диференціальне рівняння для вмісту сахарози можна записати у вигляді

$$\frac{dS_u}{dt} = \Phi_L + kS_c - \frac{S_u - C}{r}, \quad (2.7)$$

де  $k, C$  і  $r$  – параметри;

$\Phi_L$  – інтенсивність фотосинтезу в листку.

Величина  $\Phi_L$  визначається освітленістю навколишнього середовища, і в залежності від моделі може бути або константою, або керуючою змінною. Другий член означає перетворення крохмалю в сахарозу, останній – виведення сахарози із листка.

Звичайно кожне з диференціальних рівнянь містить тільки декілька змінних стану, параметрів і характеристик навколишнього середовища. Якщо особливий інтерес представляє реакція росту листка на зміни температури, то в рівняння (2.7) можна ввести параметр розпаду крохмалю і представити його залежним від температури.

Кожна функція  $f_i$  у правій частині рівнянь (2.6) взагалі містить кілька членів, кожен з яких є процесом, який протікає зі своєю швидкістю. Це ілюструється рівнянням (2.7), де фігурують три процеси: фотосинтез, розпад і переміщення. Зауважимо ще раз, що миттєва швидкість кожного з процесів завжди може бути обчислена за значеннями змінних стану,

параметрів і характеристик навколишнього середовища.

Оскільки система визначається  $q$  змінними стану  $X_1, X_2, \dots, X_q$ , іноді виявляється корисно скористатися поняттям  $q$ -мірного простору, названого *простором системи*, а стан системи визначати як розміщення точки у цьому просторі. Рівняння (2.6) означає швидкість такої точки при її переміщенні (при цьому точка описує в просторі системи визначену траєкторію). Такі геометричні образи можуть бути корисні при розробці ідей біфуркації (альтернативних шляхів у розвитку) і катастрофи (швидкого переходу від одного типу траєкторії до іншого).

#### Часова залежність у явному вигляді

У системі рівнянь (2.6) змінна  $t$  у правій частині ніде не фігурує в явному вигляді, можливо, вона присутня у керуючій функції  $E$  (так позначені всі показники, які характеризують навколишнє середовище). Якщо виключити останнє, то наявність  $t$  у правій частині рівнянь, які задають модель, є часто результатом штучного заходу, що може призвести до нових труднощів, і тому його впливу по можливості потрібно уникати.

Власне кажучи, система не може «знати», який в даний момент час: вона визначена тільки своїми змінними стану, хоча одна змінна або декілька іноді можуть виконувати функції внутрішнього часу.

Використання змінної часу в такому вигляді іноді накладає на динаміку системи такі зовнішні обмеження, які можуть виявитися неприйнятними. У ряді випадків виходом з такого становища є введення додаткових змінних стану.

Наприклад, рівняння росту Гомпертца може бути записане у вигляді

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 M e^{-Dt}, \quad M = M_0 \quad \text{при } t = 0, \quad (2.8)$$

де  $M$  – змінна стану (позначає масу) з початковим значенням  $M_0$ ;  $\mu_0$  і  $D$  – параметри.

Це рівняння можна замінити двома змінними стану:

$$dM/dt = \mu M, \quad M = M_0 \quad \text{при } t = 0$$

і

$$d\mu/dt = -D\mu, \quad \mu = \mu_0 \quad \text{при } t = 0.$$

Формулювання завдання в такому вигляді могло б привести до більш глибокого розуміння природи системи. Таким чином, рівняння, що у загальному вигляді записується як

$$dX/dt = g(X, t, P, E), \quad (2.9)$$

де  $g$  – функція, яка містить  $t$  у явному вигляді, доцільно при можливості замінити рівнянням типу (2.6).

#### Функція пам'яті

Рівняння (2.6) можна представити більш спрощено

$$dX/dt = f(X). \quad (2.10)$$

Іноді потрібно, щоб поточне значення  $dX/dt$  залежало від значення, яке мала змінна  $X$  якийсь час  $\tau$  тому назад:  $X(t-\tau)$ . При цьому наведене вище рівняння набуває вигляду

$$dX/dt = f[X(t), X(t-\tau)] \quad (2.11)$$

і має назву дискретного запізнювання (лага). Можливо, більш близьким до реальності, але набагато більш складним, є використання розподіленого лага, який можна записати так

$$dX/dt = f(X, Y), \quad (2.12)$$

де  $Y = \int_0^{\infty} \omega(\tau) X(t-\tau) d\tau$ , а  $\omega(\tau)$  – нормалізована вагова функція.

Для дискретного лага  $\omega(\tau)$  є дуже гострим викидом одиничної площі, яка відповідає єдиному значенню  $\tau$ .

Моделі з запізнюваними змінними завжди можна привести до форми без запізнювання – треба лише розширити безліч змінних стану. Потрібно мати на увазі, що при цьому для опису дискретного запізнювання може знадобитися нескінченна кількість звичайних диференціальних рівнянь.

Пурист («пурист» у даному контексті – людина, яка з перебільшеною заповзятістю піклується за чистоту методу) може справедливо стверджувати, що використання змінних із запізнюванням означає неадекватну постановку задачі і відповідно необхідність в її заміні. Прагматично ж настроєний розроблювач моделі, можливо, зволіє обійти складності, які з цього витікають, і погодитися на використання запізнюваних змінних. При цьому підтримкою йому буде той факт, що при необхідності він може застосувати альтернативний підхід.

### 2.3. Чисельне інтегрування

Якщо задані значення параметрів  $P$ , характеристик навколишнього середовища  $E$  і початкові умови  $X_i(t=0)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , то реалізація моделі зводиться до інтегрування рівнянь (2.6) з такою побудовою таблиць прогнозованих значень:

	Змінні стану
	$X_1, X_2, \dots, X_q$
0	
1	
Час 2	
3	
4	
...	

Диференціальні рівняння (2.6) дуже рідко можуть бути розв'язані аналітично; майже завжди приходиться скористатися для цього чисельними методами. Розглянемо найбільш прості методи чисельного інтегрування.

Для наочності спростимо рівняння (2.6) до рівня функції з одною змінною стану  $X$ , при цьому параметри  $P$  і характеристики навколишнього середовища  $E$  в явному вигляді більше не фігурують

$$dx/dt = f(x, t), \quad (2.13)$$

де  $f$  – функція від  $x$  і  $t$ .

Чисельні методи, які будуть тут розглянуті, тією ж мірою можуть бути застосовані і для випадку  $q$  змінних стану.

Задача інтегрування може бути символічно представлена так:

$$x(t) \xrightarrow[\text{рівняння (2.13)}]{\text{застосування}} x(t + \Delta t)$$

Це означає, що при заданому значенні  $x$  у момент часу  $t$ , користуючись функцією  $f$  із рівняння (2.13), потрібно обчислити значення  $x$  на момент  $(t+\Delta t)$ , де  $\Delta t$  означає елементарне збільшення змінної часу  $t$ . Цю процедуру можна потім застосувати ітеративно, починаючи з  $x$  в момент часу  $t = 0$  і до будь-якого значення часу  $t$ .

#### Метод Ейлера

Цей найпростіший метод може бути виведений із визначення похідної  $dx/dt$ . За визначенням

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right]. \quad (2.14)$$

Підставимо рівняння (2.14) у рівняння (2.13) і отримаємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right] = f[x(t), t]. \quad (2.15)$$

Отже, при малих значеннях  $\Delta t$  правомірна апроксимація

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx f[x(t), t]. \quad (2.16)$$

Видозмінювання цього рівняння дає формулу Ейлера

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f[x(t), t]. \quad (2.17)$$

Значення  $x$  при ітеративному використанні рівняння (2.17) можуть бути визначені в момент часу  $t = 0; \Delta t; 2\Delta t; 3\Delta t$  і т.д.

Метод Ейлера є лінійним, тобто методом першого порядку (похибка має порядок  $\Delta t^2$ ). Це можна продемонструвати, розклавши вираз  $x(t+\Delta t)$  у ряд Тейлора

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2!} (\Delta t)^2 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{3!} (\Delta t)^3 \frac{d^3x}{dt^3} + \dots + \text{члени вищих порядків}. \quad (2.18)$$

Порівнюючи рівняння (2.17) і (2.18) і з огляду на те, що  $dx/dt=f(x, t)$ , легко побачити, що помилка апроксимації має такий вигляд

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \text{члени більш високих порядків}.$$

Для прямої лінії друга похідна, а також похідні більш високих порядків дорівнюють нулю, і метод Ейлера дає точний результат. Відзначимо, що поділ навіпіл інтервалу  $\Delta t$  знижує похибку на чверть.

Незважаючи на наявність багатьох інших більш розроблених прийомів, цей метод найбільш розповсюджений на практиці. Це пояснюється його незвичайною простотою, можливістю контролю на кожному етапі обчислення.

Перш ніж перейти до методів другого і більш високих порядків, покажемо, як можуть виникнути нестійкі коливання, які приводять до збоїв обчислювальної програми ПЕОМ.

Припустимо, що рівняння (2.13) задається у вигляді

$$dx/dt = -kx \quad (2.19)$$

і при аналітичному інтегруванні має розв'язок

$$x = x(t=0)e^{kt}. \quad (2.20)$$

У цьому точному розв'язку  $x$  асимптотично прагне до 0. Тепер отримаємо розв'язок рівняння (2.19), використовуючи формулу (2.17) – метод Ейлера. При  $x(t=0) = 1$ ,  $\Delta t = 1$  і  $k = 1/2$  отримаємо

$t$	0	1	2	3	4	...
$x$	1	1/2	1/4	1/8	1/16	...

Однак, припустимо, що  $k = 3$ , тоді застосування формули (2.17) дає

$t$	0	1	2	3	4	...
$x$	1	-2	4	-8	16	...

Для цього прикладу легко показати, що при:

- $k \Delta t < 1$  має місце асимптотична сталість;
- $1 < k \Delta t < 2$  мають місце коливання зі загасаючою амплітудою;
- $2 < k \Delta t$  мають місце коливання зі зростаючою амплітудою.

Чим менше  $\Delta t$ , тим більше сталість чисельного рішення і менше помилка усікання  $\varepsilon$ , хоча час обчислень зростає і зростає ймовірність різного роду побічних помилок в силу того факту, що пам'ять комп'ютера може зберігати значення, які мають обмежену кількість десяткових знаків. Значення  $\Delta t$  повинне вибиратися за умови компромісу між двома цими суперечливими критеріями.

Взагалі, щоб зменшити помилку усікання, більш доцільно застосовувати метод вищого порядку, а не зменшувати величину  $\Delta t$ . Однак, деякі задачі не можуть бути легко вирішені і за допомогою цих методів, оскільки потребують обчислення похідних тільки в межах розглянутого часового інтервалу.

### Методи другого порядку: формула трапецій

Метод Ейлера (2.17) можна розглядати як розкладання у ряд Тейлора, який складається з перших двох членів (2.18). При розрахунку  $x(t+\Delta t)$  на практиці звичайно не використовують похідних більш високих порядків, за винятком тих окремих випадків, коли це вдається зробити зовсім просто.

Власне кажучи, методи вищих порядків спираються на значення перших похідних у окремі моменти часу в межах інтервалу інтегрування і на оцінки похідних вищих порядків, які відповідають спостережуваним змінам цих значень, що спостерігаються.

Розглянемо другу похідну у виразі (2.18), за визначенням

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\dot{x}(t + \Delta t) - \dot{x}(t)}{\Delta t} \right], \quad (2.21)$$

де  $\dot{x} \equiv dx/dt$ .

Звідси для невеликих значень  $\Delta t$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{\dot{x}(t + \Delta t) - \dot{x}(t)}{\Delta t}. \quad (2.22)$$

Оскільки  $dx/dt = f(x, t)$ , залежність (2.22) можна представити у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{f[x(t + \Delta t), t + \Delta t] - f(x, t)}{\Delta t}. \quad (2.23)$$

З формули (2.17) виходить

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x, t) = x_1. \quad (2.24)$$

Підставляємо  $x_1$  замість  $x(t+\Delta t)$  у формулу (2.23) і отримуємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx \frac{f(x_1, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}. \quad (2.25)$$

Розкладання в ряд Тейлора для  $x(t+\Delta t)$  надається у виразі (2.18), а саме

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \text{похідні вищих порядків}. \quad (2.26)$$

Заміняємо в (2.18)  $dx/dt$  і  $d^2x/dt^2$  відповідно до виразів (2.13) і (2.25) і одержуємо

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t f(x, t) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left[ \frac{f(x_1, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \right] +$$

+ похідні вищих порядків. (2.27)

Після виключення членів вищих порядків і приведення подібних членів одержуємо добре відому формулу трапецій, а саме

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{2} \Delta t [f(x_1, t + \Delta t) + f(x, t)]. \quad (2.28)$$

Формула трапецій є прикладом чисельного методу, який поєднує в собі елементи прогнозу і корекції: метод Ейлера використовується для оцінки значення  $x_1 = x(t + \Delta t)$ , а залежність (2.28) дозволяє поліпшити (скорегувати) отриману оцінку. Це – метод другого порядку, а помилка при цьому має третій порядок і визначається таким виразом

$$\varepsilon = \frac{1}{16} (\Delta t)^3 \frac{d^3 x}{dt^3} + \text{похідні вищих порядків,}$$

отже точність формули трапецій вища, ніж у методі Ейлера.

Існує ряд інших методів другого порядку, в яких помилка може бути менше, ніж у формулі трапецій, однак остання має перед ними переваги завдяки своїй простоті.

Розроблювач динамічних моделей досить часто зустрічається із ситуацією, коли більш кращим виявляється скористатися методом Ейлера, а не формулою трапецій або яким-небудь іншим методом вищого порядку, в зв'язку з тим, що всі інші методи, без винятку, для оцінки першої похідної у рівнянні (2.13), потребують багатокрокової процедури. Такий вибір продиктований тим, що рівняння (2.13) містять характеристики навколишнього середовища (позначені через  $E$ ), такі як температура, рівень сонячної радіації, концентрація вуглекислого газу. Ці дані недоступні безперервному вимірюванню, і тому дослідник може оперувати тільки їхніми середніми (за деякий відрізок часу) значеннями. Наприклад, середня температура може бути в один день 18 °С, а на наступний 20 °С. Ця мінливість навколишнього середовища обумовлює розривний характер перших похідних у рівнянні (2.13).

Може показатися незрозумілим, як обчислювати в цьому випадку перші похідні – всередині або на кінцях часового інтервалу. Практично

підхід більшості розроблювачів моделей полягає у вимірюванні значень кожної характеристики навколишнього середовища в прив'язці до певного інтервалу часу (або всіх характеристик – в прив'язці до загального часового інтервалу), який потім використовують для інтегрування за методом Ейлера.

#### **Методи вищих порядків**

Існує багато методів вищих порядків, зокрема правило Сімпсона, методи Рунге-Кутта, метод Мілна. Усі вони передбачають обчислення перших похідних в декількох точках часового інтервалу, що призводить до труднощів, які обговорювалися вище. Однак, ці методи задовільні для математично коректних задач і для задач, у яких керуючі перемінні задані як безупинні функції. Як приклад часто застосовуваного методу з фіксованим кроком розглянемо класичний метод Рунге-Кутта четвертого порядку, який формалізується у вигляді

$$x + \Delta x = x + \frac{1}{6} (\Delta x_1 + 2\Delta x_2 + 2\Delta x_3 + \Delta x_4), \quad (2.29)$$

де  $\Delta x_1 = \Delta t f(x, t)$ ;

$$\Delta x_2 = \Delta t f\left(x + \frac{1}{2} \Delta x_1, t + \frac{1}{2} \Delta t\right);$$

$$\Delta x_3 = \Delta t f\left(x + \frac{1}{2} \Delta x_2, t + \frac{1}{2} \Delta t\right);$$

$$\Delta x_4 = \Delta t f(x + \Delta x_3, t + \Delta t).$$

Помилка  $\varepsilon$  при цьому має порядок  $(\Delta t)^5$ .

## **2.4. «Жорсткі» рівняння, вибір методу чисельного інтегрування**

### **«Жорсткі» рівняння**

Константа  $k$  у формулі (2.19) відома як стала швидкості і має розмірність  $(\text{час})^{-1}$ , отже  $1/k$  має розмірність часу. Величина  $1/k$  часто фігурує за назвою «стала часу» і визначає час релаксації. Зокрема, у рівнянні (2.20) величина  $x$  на часовому інтервалі  $1/k$  зменшується в  $e$  раз.

З «жорсткими» рівняннями при моделюванні доводиться зустрічатися у тих випадках, коли сталі швидкості або сталі часу в диференціальних рівняннях істотно відрізняються одне від одного. Розв'язки таких рівнянь містять експоненти, які дуже відрізняються за параметрами.



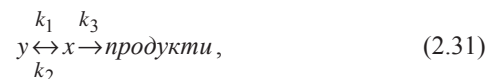
У багатьох біологічних моделях зустрічаються як процеси, що протікають протягом секунд або навіть набагато швидше, так і процеси, які тривають кілька днів. Інтервал інтегрування, який придатний для повільних процесів, може послужити причиною посилення нестабільних коливань зі зростаючою амплітудою при вирішенні для швидких процесів. І, навпаки, короткий інтервал, який забезпечує стабільне інтегрування при швидких процесах, може виявитися недостатнім для того, щоб охопити цікавий для нас період часу в повільних процесах.

Модель рослини або тварини може в загальному вигляді описувати конверсію між малими молекулами (мілісекунди і менше), макромолекулами (хвилини), формування нових тканин (години і дні) і утворення нових органів (дні і тижні). Тому, справді, важко обмежити діапазон значень сталих часу в моделі без відкидання істотних з погляду фізіології компонентів.

Хімічна реакція



описується рівнянням (2.19). Припустимо, що (2.30) замінено схемою



де  $k_1$ ,  $k_2$  і  $k_3$  – сталі швидкості.

Схема (2.31) відображає процес у системі з двома змінними стану ( $x$  і  $y$ ), який описується диференціальними рівняннями:

$$dx/dt = -(k_2 + k_3) + k_1 y; \quad (2.32)$$

$$dy/dt = -k_1 y + k_2 x. \quad (2.33)$$

Розглянемо випадок, коли  $k_3 = 1$ , а  $k_1 = k_2 = 1000$ . При цьому зміни величин  $x$  і  $y$  збалансовані з поправкою на те, що  $x$  повільно перетворюється на інші продукти.

Розв'язання в прив'язці до визначених початкових значень показані на рис. 2.1. Відзначимо, що та частина розв'язок, яка представляє інтерес, звичайно, залежить від більш повільних процесів.

Відомо три способи, за допомогою яких можна спробувати вирішити проблему «жорстких» диференціальних рівнянь.

1. Пули, які пов'язані швидкими процесами обміну, можуть бути об'єднані. Якщо у прикладі, наведеному вище, вирази (2.30) і (2.31)

розглядати як еквівалентні, то

$$z(t=0) = x(t=0) + y(t=0); \quad k = \left( \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right) k_3. \quad (2.34)$$

2. В ряді випадків можна знехтувати впливом сталих швидкості на розв'язання рівнянь. Наприклад, у тільки що розглянутій задачі «повільні» розв'язки практично не змінюються, коли коефіцієнти  $k_1$  і  $k_2$  набувають значень 100, 1000 або 10000.

3. У тих задачах, де обмінні потоки становлять більший інтерес, ніж абсолютні розміри пулів, можна, збільшуючи останні в 10 і 100 разів (при збереженні – у випадку виникнення реакцій – початкових концентрацій і активного біохімічного об'єму), у стільки ж разів знизити значення швидкостей швидких змін.

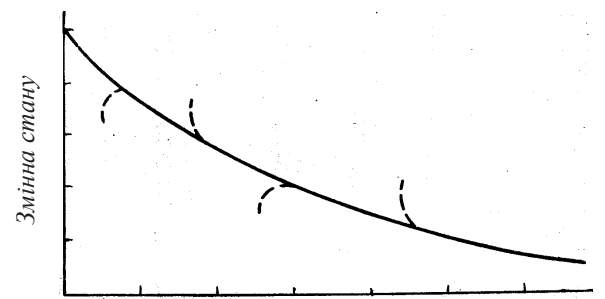


Рис. 2.1. Проблема «жорстких» диференціальних рівнянь у виразі (2.31):

— повільне розкладання, параметра  $k_3$ ;  
 ---- швидкі процеси параметрів  $k_1$  і  $k_2$

Крім того, в останні роки розпочато ряд спроб, справитися з «жорсткими» рівняннями за допомогою чисто алгоритмічних методів, які вже знайшли відображення у програмному забезпеченні ПЕОМ, зокрема в рамках мов імітаційного моделювання. Так, у мові CSMP реалізований метод інтегрування зі змінним кроком одержав назву STIFF (жорсткий).

Таким чином, розуміння особливостей «жорстких» рівнянь, а також ситуацій, які стимулювали їхнє використання, дозволить розроблячу моделей краще справитися з виникаючими перед ним обчислювальними проблемами. Відомо, що апарат «жорстких» рівнянь ефективний лише у тих випадках, коли у функціях керування відсутні височастотні складові.

### Вибір методу

При виборі методу чисельного інтегрування розроблювач моделі повинний бути зацікавлений в одержанні задовільної точності вирішення без надлишкових витрат машинного (ПЕОМ) часу.

Існуючі методи дуже помітно відрізняються, один від одного за складністю і відповідно вимагають різного часу обчислень.

Було виконане порівняння п'яти методів чисельного інтегрування з фіксованим кроком при прогоні програми CSMP на ПЕОМ ICL4-72. Інтегрування проводилось на 100 тактів часу. Отримані результати наведені у табл. 2.1. Зміна помилок, які досягаються при виборі кроку інтегрування, наведені на рис. 2.2.

Можна помітити, що для даної задачі і даної машини для всіх методів, крім методу Ейлера, похибки округлення починають домінувати при  $\Delta t < 0,01$ . Краще співвідношення «похибка/час обчислень» отримано при використанні методу високого порядку при найбільшому кроці інтегрування.

Імовірність написати формально вірну програму інтегрування, яка, будучи виконана, дасть на виході абсурдні результати – більша, ніж прийнято думати. Тому важливо в міру можливостей намагатися перевірити сталість вирішення в залежності від методу і від кроку інтегрування. У більшості випадків це не занадто обтяжливо.

Метод Ейлера часто недооцінюють, але прогони будь-якої моделі варто починати, застосовуючи саме цей метод, причому при різних кроках інтегрування, що дозволяє перевірити всю модель.

Таблиця 2.1. Час обчислень (дорівнює  $\approx 2$  с) і % помилки різних методів в залежності від часу інтегрування  $\Delta t$ , реалізованого в CSMP при довжині кодових слів 32 біта

Крок інтегрування $\Delta t$	Методи інтегрування									
	метод Ейлера		метод 2-го порядку		формула трапецій		правило Сімпсона		метод 4-го порядку Рунге-Кутта з фіксованим кроком	
	Час	Помилка	час	помилка	час	Помилка	час	Помилка	Час	Помилка
0,1	1	-99	1	-32	1	-14	2	-11	2	-0,028
0,01	3	-39	3	-0,6	4	-0,33	5	-0,29	7	-0,17
0,001	17	-6	19	-1,6	29	-1,6	43	-1,6	58	-1,6
0,0001	161	-15	177	-15	288	-15	414	-14,9	566	-14,9

Примітка: Похідна  $-dx/dt = x$ ,  $x(t=0) = 1$ ; інтегрування – до  $t = 100$ ;  
% помилки =  $100[x(t=100) - \exp 100] / \exp 100$

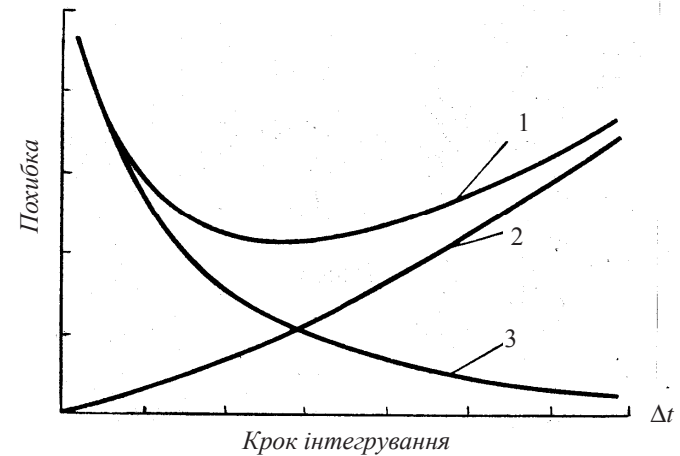


Рис. 2.2. Похибки зрізання й округлення при чисельному інтегруванні за допомогою ПЕОМ:  
1 – сумарна похибка; 2 – похибка зрізання; 3 – похибка округлення

Якщо, наприклад, буде звичайним прийняти  $\Delta t = 1$ , то досить обмежитися перевіркою у діапазоні  $\Delta t = (0,005 \div 1)$ . Мета полягає в тому, щоб знайти межі мінімуму сумарної помилки, тобто знайти компроміс між її складовими – помилками усікання й округлення (див. табл. 2.1 і рис. 2.2).

Деякі проблеми, пов'язані з використанням методів високих порядків, уже згадувалися вище. Зокрема, відзначалося, що у випадках, коли характеристики навколишнього середовища представлені розривними функціями, єдиним придатним може виявитися метод Ейлера. Це, втім, буває і на краще, оскільки останній приводить до помилкових результатів рідше, ніж методи високих порядків.

Методи високих порядків можуть кожен по-своєму виявляти нестійкість, хоча це звичайно пов'язано з вибором кроку  $\Delta t$  і піддається контролю шляхом варіювання його значень. Якщо характер задачі й обчислювальні можливості дослідника дозволяють зробити це без особливих труднощів, то бажано випробувати кілька обчислювальних методів при декількох значеннях часових інтервалів і проаналізувати збіг отриманих результатів.

## 2.5. Підгонка моделі

Процедура підгонки моделі звичайно пов'язана з таким коректуванням значень параметрів  $P$  у рівняннях (2.6) і початкових умов  $[X_i(t=0), i=1, 2, \dots, q]$ , щоб наближала модель до описуваної нею реальної системи при збереженні обраної структури і базових рівнянь. Деякі пуристи схильні оголосити анафему цьому процесу, названому настройкою або калібруванням моделі. Їм здається, що параметри повинні уточнюватися в результаті незалежних досліджень, навіть якщо останні виконуються на рівні гіпотез. Така точка зору може звести нанівець емпіричну сутність і практичну націленість, властиву багатьом моделям.

Підгонка являє собою важливий етап у ході розробки моделі й іноді надає корисну інформацію. У цьому розділі розглядаються прості процедури підгонки, які, незважаючи на властиві їм недоліки, довели свою практичну цінність.

### Процедура підгонки моделі

*Експериментальні дані.* Розглянемо випадок, коли єдина характеристика реальної системи вимірюється  $m$  раз у моменти часу

$$t_1, t_2, \dots, t_m$$

і при цьому фіксуються його значення

$$y_1, y_2, \dots, y_m.$$

Далі через  $y_i$  позначається значення величини  $y$ , вимірюваної в момент  $t_i$ ,

$$i=1, 2, \dots, m.$$

*Прогнозовані дані.* Величина  $X_i, i=1, 2, \dots, q$  – це змінна стану моделі, і вона (модель) у кожен момент часу  $t_i$  прогнозує значення

$$X_i(t_i; P; E), \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (2.35)$$

Щоб показати залежність  $X_i$  від часу  $t$ , параметрів і початкових умов  $P$ , а також від навколишнього середовища  $E$ , у виразі (2.35) збережена система позначень, прийнята у рівняннях (2.6). Перемінну стану у виразі (2.35) можна зіставити безпосередньо з експериментально вимірюваною величиною  $y$  або при необхідності через допоміжну змінну, відповідну  $y$ .

Прогнозовані величини для моментів  $t_i$  часу  $t, i=1, 2, \dots, m$  позначаються через  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ . У моделі, яка розглядається, ці величини  $Y$  залежать від параметрів і початкових умов  $P$ , а також від навколишнього середовища  $E$ . Щоб спростити ситуацію, припустимо, що реалізується одне єдине значення  $E$ . Якби в розрахунок бралось два значення  $E_1$  і  $E_2$ , то в експерименті варто було б отримувати дві множини вимірюваних

величин  $y_i, t=1, 2, \dots, m$ , а при моделюванні – дві множини прогнозованих величин  $Y_i, i=1, 2, \dots, m$ .

Оскільки модель детермінована, прогноз надається числом, а не відповідним розподілом ймовірностей.

*Обчислення неув'язок.* Неув'язки  $r_i$  обчислюють за допомогою однієї з наступних формул:

$$r_i = y_i - Y_i; \quad r_i = \ln(y_i / Y_i) \quad (2.36)$$

або за допомогою якого-небудь іншого відповідного прийому. Потім можна обчислити суму квадратів неув'язок  $R$  за формулою

$$R = \sum_{i=1}^m g_i r_i^2, \quad (2.37)$$

скориставшись при необхідності ваговими коефіцієнтами  $g_i$ .

Сума квадратів неув'язок  $R$  використовується як міра наближення моделі до її прототипу і залежить від значень параметрів, тому можна написати

$$R \equiv R(P). \quad (2.38)$$

Розглянемо найпростіший випадок, коли модель має всього один параметр  $P$ . Найкраще наближення отримуємо при підбиранні значення  $P$ , яке забезпечує мінімум показника  $R$ , тобто при якому

$$\frac{dR}{dP} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{d^2R}{dP^2} > 0.$$

На рис. 2.3 наведені ситуації, коли  $R$  чуттєвий і нечуттєвий до змін  $P$ . На кривій  $S$  значення  $R$  швидко змінюються з ростом параметра  $P$ , отже, величина останнього критична для даної моделі. На кривій  $J$  значення  $R$  слабо реагують на зміни параметра  $P$ . Якщо  $P$  можна визначити експериментально або шляхом обчислень, то зможемо обмежитися наближеним значенням. Підгонка моделі не дозволяє підвищити точність визначення значень. На кривій  $S$  значення  $d^2R/dP^2$  набагато більше, і це сприяє більш точному визначенню  $P$ , а отже, і кращому наближенню моделі до прототипу.

Бажано, щоб показник  $R$  був у міру чуттєвий до всіх параметрів моделі, а якщо серед них є такі, до яких  $R$  зовсім не чуттєвий, то це означає, що існують аспекти, за яких модель може бути спрощена.

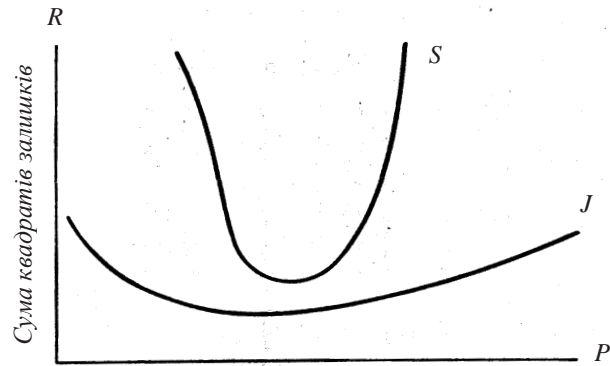


Рис. 2.3. Чутливість параметрів моделі:  
S – чутливі; J – нечутливі параметри

Якщо не враховувати помилки зрізання й округлення (які завжди існують, але, як правило, незначні), то можна сказати, що прогнозовані величини  $Y_i, i=1, 2, \dots, m$  обчислюються практично без похибок. Однак, при цьому залишається таке джерело похибок, як експериментальні дані  $y_i, i=1, 2, \dots, m$ , і точність їхнього вимірювання обмежує знизу ту величину показника  $R$ , яку вдається досягти шляхом підбирання параметрів.

Суму квадратів неув'язок  $R$  можна розбити на дві складові

$$R = R_l + R_e, \quad (2.39)$$

де  $R_l$  – відображає неадекватність моделі прототипові;

$R_e$  – помилка в експериментальних даних.

Очікуване значення  $R_e$  визначається як

$$R_e = (m - n)\sigma^2, \quad (2.40)$$

де  $m$  – кількість вимірів;

$n$  – кількість параметрів множини  $P$ ;

$\sigma^2$  – дисперсія помилки.

Параметри  $P$  впливають тільки на складову  $R_l$ , але якщо дуже велика складова  $R_e$  (постійний член у функціях, зображених кривими на рис. 2.3), то чутливість показника  $R$  до зміни значень параметрів істотно зменшується.

Якщо забезпечена відтворюваність даних  $y_1, y_2, \dots, y_m$  при повторюванні дослідів, то можна оцінити складову  $R_e$  повної похибки. З іншого боку, верхня межа  $R_e$  (і, отже,  $\sigma^2$ ) визначається мінімальним значенням показника  $R$ , який досягається при підбиранні параметрів  $P$ .

Припустимо, що замість однієї множини даних  $Y_i, i = 1, 2, \dots, m$  ми маємо дві множини, наприклад, маса сухої речовини рослини і площа поверхні листя

$$M_i, i=1, 2, \dots, m \quad \text{і} \quad L_i, i=1, 2, \dots, m. \quad (2.41)$$

Тоді, використовуючи рівняння (2.36) і (2.37), можна обчислити дві суми квадратів неув'язок: одна, яка відповідає даним маси сухої речовини  $R_M$ , а інша – даним площі поверхні листя  $R_L$ . Щоб перейти до процедури безпосередньої підгонки параметрів, необхідно об'єднати  $R_M$  і  $R_L$ . Це можна зробити, використовуючи вираз

$$R = \frac{R_M}{\sigma_M^2} + \frac{R_L}{\sigma_L^2}, \quad (2.42)$$

де  $\sigma_M^2$  і  $\sigma_L^2$  – відповідні дисперсії похибок.

Підбирання параметрів у цьому випадку має на меті мінімізацію сумарного показника  $R$ .

Коли дисперсії похибок невідомі, то, очевидно, вираз (2.42) застосувати неможливо, хоча і за цих умов якість об'єднання  $R_M$  і  $R_L$  необхідно. Якщо для обчислення неув'язок  $r_i$ , використовується другий член із виразу (2.36), то  $R_M$  і  $R_L$  виявляються незалежними від розмірності  $M$  і  $L$ , так само як і від будь-яких масштабуючих факторів. І якщо при цьому допустити, що  $M$  і  $L$  мають однаковий коефіцієнт варіації, а це часто не суперечить фактам, то сумарний показник неув'язок потрібно обчислювати за формулою

$$R = R_M + R_L \quad (2.43)$$

і підгонку параметрів робити за умови мінімізації лівої частини цього рівняння.

Якість підгонки можна оцінити за допомогою  $F$ -тесту шляхом порівняння складової  $R_l$ , обумовленої неповною адекватністю моделі її прообразу, і складової  $R_e$ , обумовленої похибками експерименту. Оцінка члена  $R_e$  можлива, якщо забезпечена відтворюваність даних і якщо мова йде не про ситуацію, в якій можлива лише якісна і суб'єктивна оцінка адекватності моделі.

### Довірчі інтервали для підібраних параметрів

Залежність суми квадратів неув'язок  $R$  (або якої-небудь іншої міри близькості моделі до прототипу) від параметрів  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  може бути виражена так

$$R = R(P_1, P_2, \dots, P_n). \quad (2.44)$$

Для визначення мінімуму функції  $R(P)$  звичайно застосовуються обчислювальні методи, особливості яких найчастіше сформульовані в специфічних термінах. Так, функція  $R$ , мінімум якої потрібно відшукати, відома як цільова функція. Безліч частинних похідних першого порядку від  $R$  по  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , а саме  $dR/dP_1, dR/dP_2, \dots, dR/dP_n$ , називають *вектором градієнта*. У точці мінімуму

$$\frac{dR}{dP_1} = \frac{dR}{dP_2} = \dots = \frac{dR}{dP_n} = 0. \quad (2.45)$$

Матриця частинних похідних другого порядку від цільової функції називається матрицею Гессе. Елементи її мають вигляд

$$H_{ij} = \frac{d^2 R}{dP_i dP_j}. \quad (2.46)$$

У точці мінімуму  $R$  усі характеристичні числа матриці Гессе повинні бути позитивними. По суті, це означає, що всі другі похідні за параметрами позитивні і при русі в будь-якому напрямку від точки, обумовленої рівняннями  $dR/dP_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , значення  $R$  зростає.

Нехай матриця  $G$  з елементами  $G_{ij}$  є зворотна до  $H$ . Символічно це виражається простою формулою

$$G = H^{-1}, \quad (2.47)$$

хоча в дійсності, щоб одержати зворотну матрицю, звичайно потрібно виконати досить складну обчислювальну процедуру. Число ступенів свободи прийнято позначати через  $\nu$  і при  $m$  експериментальних даних і  $n$  параметрах його визначають як

$$\nu = m - n, \quad (2.48)$$

якщо використовуються дві множини даних, як у рівняннях (2.41), то  $\nu$  визначається як

$$\nu = m_M - m_L - n. \quad (2.49)$$

Щоб отримати незміщену оцінку дисперсії параметра  $P_i$  використовують формулу

$$V(P_i) = \frac{R}{\nu} G_{ij}, \quad (2.50)$$

а для отримання незміщеної оцінки коваріації параметрів  $P_i$  і  $P_j$  використовують таку формулу

$$C(P_i, P_j) = \frac{R}{\nu} G_{ij}. \quad (2.51)$$

Якщо  $P_i^*$  є справжнє значення параметра  $P_i$ , то  $100(1-\beta)$ -процентним довірчим інтервалом для  $P_i^*$  називають величину

$$P_i \pm [V(P_i)]^{1/2} t_{\beta\nu}, \quad (2.52)$$

де  $t_{\beta\nu}$  –  $100\beta$ -процентний квантиль  $t$ -розподілу з  $\nu$  ступенями свободи.

Таким чином, вище розглянуті технічні прийоми створення динамічних моделей, включаючи весь цей процес – від визначення змінних моделей до підгонки моделей та їх перевірки.

### 3. ТЕХНОЛОГІЯ КОНСТРУЮВАННЯ МОДЕЛЕЙ

#### 3.1. Поняття про компартментний підхід до моделювання

При математичному моделюванні в системі ґрунт – рослина – атмосфера будемо розглядати посів, який приймається однорідним і ізотропним у горизонтальній площині, а площа поля – досить велика для того, щоб можна було зневажити ефектом краю поля. У цьому випадку всі перетоки енергії і речовини здійснюються тільки у вертикальному напрямку. Більш того, можна також нехувати ефектом неоднорідності ґрунту, вважаючи, що описувані процеси можуть бути віднесені до будь-якої частини поля або до поля в цілому. Зрозуміло, однорідних і ізотропних полів і посівів у природі не існує, а прийнята ідеалізація – це та данина, яку треба платити за строгість математичних побудов. Неоднорідність моделюємої системи виявляється при цьому тільки у вертикальному напрямку: у кожний момент часу існує деякий розподіл фітоелементів по висоті посіву і по глибині ґрунтового профілю.

Виділимо деяку ділянку поля одиничної площі. За умовами, усі такі ділянки еквівалентні. Проведемо верхню межу досліджуваної системи паралельно поверхні ґрунту на висоті  $H$ , приблизно рівній потроєній висоті посіву  $h$ . На деякій глибині  $R$  за межами шару розміщення кореневої системи проведемо нижню грань. Утворений в такий спосіб паралелепіпед і будемо розглядати як об'єкт моделювання (рис. 3.1). Оскільки через бокові грані обмін енергією і речовиною не відбувається, то у виділений об'єм проникає зверху сонячна радіація і вуглекислий газ, а через верхню грань видаляються, наприклад, пари води. Точно так само означені обмінні процеси відбуваються на нижній грані. При цьому все, що надходить у систему, відноситься до її вхідних впливів, а все що з неї видаляється – або до втрат (вимивання нітратів), або до відчужуваного кінцевого продукту (зібраний урожай).

Позначимо спрямовану вгору вертикальну координату через  $x$ , помістивши її початок (точку 0) на поверхні ґрунту. Час позначимо через  $t$ . У такому випадку всі змінні моделі будуть залежати від двох аргументів  $x$  і  $t$ . В кожен момент часу у системі існує вертикальний розподіл характеристик рослинного покриву, а також різних субстанцій – води у ґрунті, іонів амонію і нітратів у ґрунтовому профілі, температури ґрунту і т.д. У надземній частині системи також існує вертикальний розподіл різних параметрів – поля радіації у посіві, температури і вологості повітря, температури листя, концентрації вуглецю і азоту у фітоелементах (рис.3.2). Під дією сил різної природи ці величини змінюються.

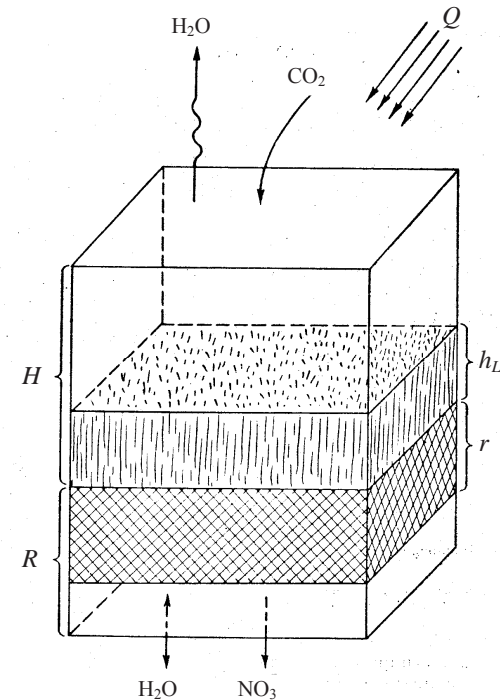


Рис. 3.1. Посів як об'єкт моделювання:  
 $h_L$  – висота посіву;  $r$  – глибина проникнення коренів

Основним завданням є опис цих змін, тобто процесів вертикального енерго- і масообміну в системі, фізико-хімічних перетворень і біологічних трансформацій компонентів системи, а також фізіологічних процесів у рослинах, які призводять до їхнього росту, розвитку і формування кінцевого продукту – урожаю.

Подальша деталізація опису розглянутого підходу пов'язана з необхідністю введення поняття *компартментних моделей*. Компартмент (від французького *compartement* – відсік, купе) є елементарним функціональним елементом моделі. Він характеризується мінімальним об'ємом і поточним складом відповідної субстанції. Оскільки розглядаються тільки вертикальні потоки, виділення компартментів у системі пов'язано з її вертикальною стратифікацією.

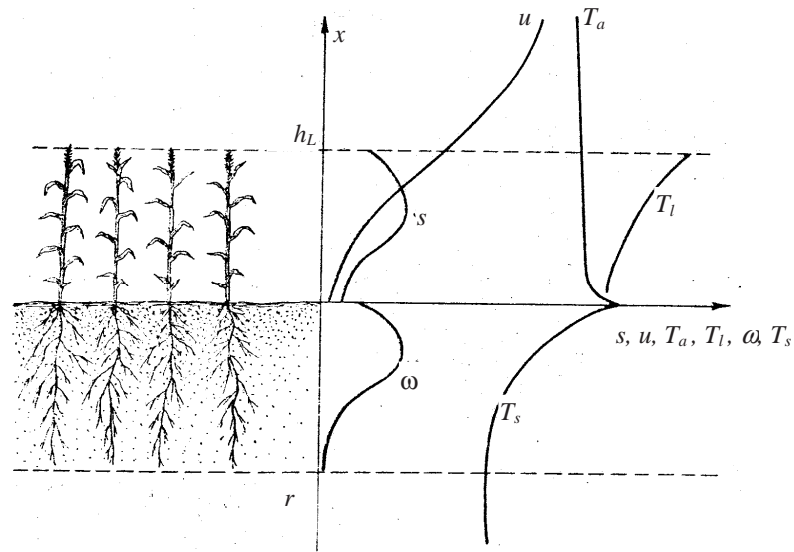


Рис. 3.2. Розподіл фітоелементів і параметрів фітосередовища:  
 $s$  – об’ємна щільність листової поверхні;  $\omega$  – об’ємна щільність поглинаючої поверхні коренів;  $u$  – швидкість вітру;  
 $T_a, T_l, T_s$  – температура повітря, листя і ґрунту відповідно

Розділимо ґрунтовий профіль на деяку кількість шарів малої товщини  $\Delta x$  так, щоб кожен шар можна було приблизно вважати однорідним. Перенумеруємо ці шари зверху вниз і розглянемо шар з номером  $i$  (рис. 3.3). Баланс кожного компонента моделі в  $i$ -му компартменті складається з трьох складових:

- обмін з розташованим нижче компартментом,
- обмін з розташованим вище компартментом,
- перетворення енергії або речовини всередині компартмента в іншу форму.

Так, зміни вологозапасів у компартменті за один часовий крок моделі  $\Delta W_i$ , визначаються виразом

$$\Delta W_i = V_{i+1} - V_i - f_i, \quad (3.1)$$

де  $V_{i+1}$  – потік вологи з розташованого нижче шару ґрунту;  
 $V_i$  – потік вологи в сусідній шар, розташований вище даного;  
 $f_i$  – поглинання води коренями, розташованими у даному шарі.

Для нітратів аналогічне співвідношення, крім членів, які характеризують процеси перенесення і поглинання коренями, буде включати доданки, які описують прихід нітратів внаслідок нітрифікації (зі знаком плюс) і їхнє зменшення за рахунок денітрифікації (зі знаком мінус). Зрозуміло, окремі складові (наприклад, перетікання води між шарами) можуть змінювати знак або перетворюватись в нуль. Зі сказаного випливає, що поняття компартмента, зберігаючи геометричне трактування, набуває функціонального сенсу: у тому самому шарі ґрунту повинні бути виділені компартменти для води, теплоємності, різних форм вуглецю й азоту та ін.

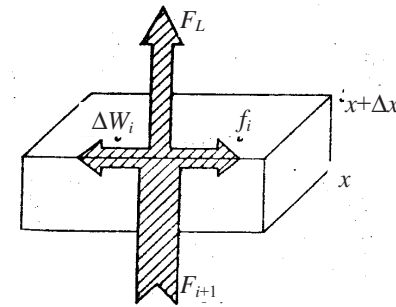


Рис. 3.3. Поняття про компартмент

Максимальна ємність компартмента (або «бункера») часто не є величиною постійною. Для води максимальна ємність дійсно визначається вільним поровим простором ґрунту. А для солей ця величина визначається насичувальною концентрацією і залежить від вологовмісту. Об’єм пор, який може зайняти ґрунтове повітря, також визначається вологістю ґрунту, а для теплоємності явне значення верхньої межі взагалі відсутнє. На рис. 3.4 наведена повна компартментна схема для вологоперенесення у системі ґрунт – рослина – атмосфера, а на рис. 3.5 наведено зв’язок ідентичних, тобто геометрично-сполучених компартментів для води, тепла й азоту. З розглянутого виходить, що повну компартментну схему агроєкосистеми навряд чи можна зобразити на одному рисунку і представляти її потрібно, очевидно, лише поблочно.

У посіві компартменти виділяються аналогічно тому, як це зроблено для ґрунту. Посів по всій своїй висоті розбивається на деяку кількість розрахункових шарів або ярусів. Відзначимо, що ці шари необов’язково пов’язувати з морфогенетичними ярусами листків. Кожен такий ярус у даний момент часу може характеризуватися листовим індексом  $L_i$ , сухою біомасою  $B_i$ , вмістом асимілятів  $A_i$  і т.д. При цьому загальний листовий

індекс посіву  $L$  утворюється як сума листкових індексів окремих ярусів

$$L = \sum_{i=1}^{NL} L_i, \quad (3.2)$$

де через  $NL$  позначено кількість ярусів (надземних компартментів).

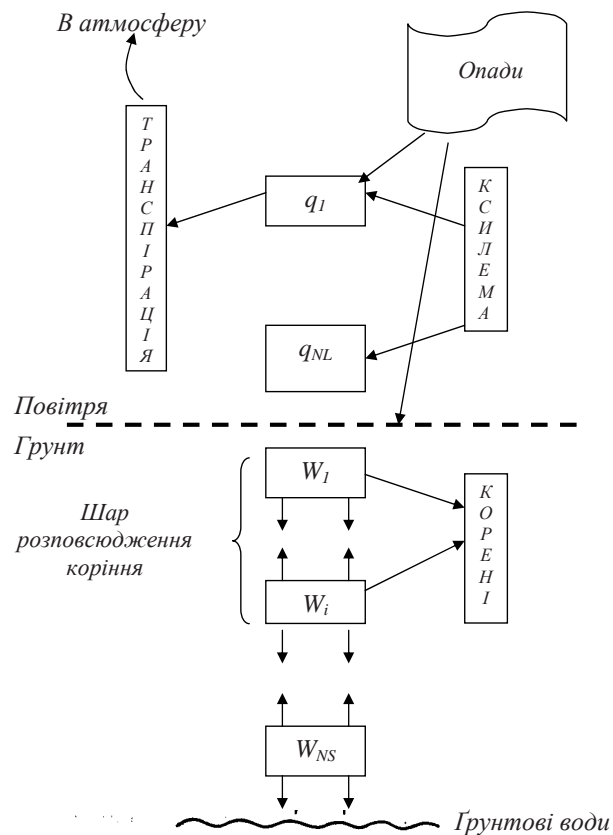


Рис. 3.4. Компартментна схема вологоперенесення у системі ґрунт – рослина – атмосфера:  
 $W_i$  – вологовміст у  $i$ -му компартменті ґрунту;  
 $q_i$  – вологість повітря у міжклітиннику;  
 $NS$  – кількість шарів ґрунту;  $NL$  – кількість ярусів посіву

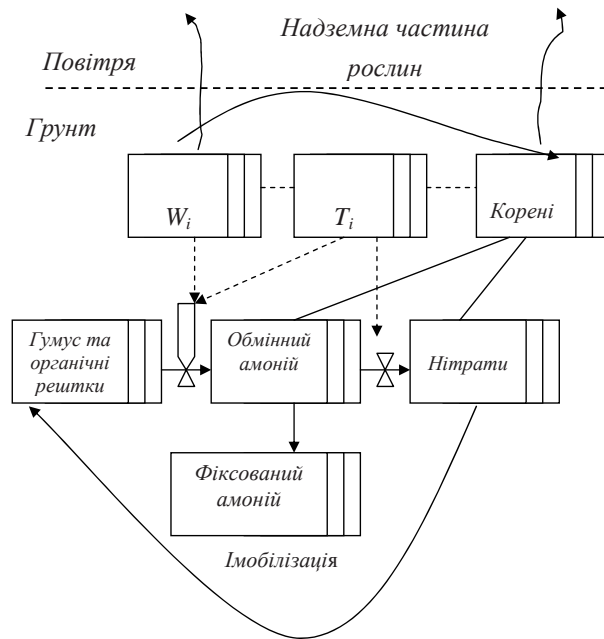


Рис. 3.5. Компартментна схема динаміки азоту у ґрунті

Процеси газообміну і транспірації у кожному із ярусів, накопичення в них асимілятів і структурної біомаси, а також перетік між ними рухливих метаболітів і повинні бути описані в моделі. Відзначимо, що кількість розрахункових шарів у ґрунті і ярусів у посіві та їхні вертикальні розміри залежать як від типу ґрунту і сільськогосподарської культури, так і від суті розв'язуваної задачі. Так, очевидно, що зі збільшенням кількості компартментів точність розрахунків повинна збільшуватися. Однак, це призводить до збільшення розмірності моделі і часу розрахунку. Тому доцільно обмежити просторове дроблення системи (по вертикалі) такою величиною, яка була б прийнятною з погляду точності, але дозволяла б робити розрахунок сезону вегетації за час, який не перевищує декількох хвилин.

У більшості існуючих моделей кількість розрахункових шарів ґрунту змінюється від одного до п'ятдесяти, а кількість ярусів у посіві – від одного до десяти. Прикладні моделі можуть мати мінімальну кількість компартментів – один у ґрунті і один у посіві.



Наведене вище трактування означає просторову дискретизацію неперервної системи. Це, очевидно, пов'язано з тим, що модель реалізується на цифрових машинах, які є обчислювачами дискретної дії. Не менш важливим є питання часової дискретизації, тобто питання вибору кроку розрахунку моделі за часом. Ситуація тут аналогічна. Дроблення часового кроку збільшує точність, але подовжує час прогону моделі. В існуючих динамічних моделях величина часового кроку змінюється від хвилин (іноді, частки хвилин) до доби. Добовий крок мають прості прикладні моделі. У базових моделях багато процесів повинні розраховуватися з кроком в одну годину або декілька хвилин. Величина часового кроку тісно пов'язана з кроком просторової дискретизації. Крім того, вона може бути перемінною протягом одного прогону моделі.

### 3.2. Техніка моделювання

Вертикальна неоднорідність ґрунтового покриву і посіву в цілому призводить до ідеї виділення досить тонких шарів – компартментів, ємностей або бункерів. У поєднанні з вимогою врахування збереження речовини й енергії в системі, це означає, що в моделі повинне описуватися накопичення (або витрачання) тієї чи іншої субстанції. Це може відбуватися лише внаслідок обміну із сусідніми ємностями або за рахунок перетікання в компартмент, функціонально відмінний від даного але розташований геометрично у тому ж місці. Наприклад, волога у деякому шарі ґрунту перетікає у сусідні (або із сусідніх), поглинається розташованими в цьому ж шарі коренями, амонійний азот переходить у нітратний і т.д. Таке уявлення про процеси, які протікають у системі, призводить до поняття «рівнів» тієї чи іншої субстанції, тобто кількості речовини у даному об'ємі або концентрації цієї речовини. Так можна говорити про вологозапаси у деякому шарі ґрунту або про вологість цього шару, про вміст мінерального азоту або вуглеводів у деякому ярусі листків, про листовий індекс

Введене Дж. Форрестером поняття рівнів як основних динамічних перемінних приводить нас до поняття стану компартментної моделі як сукупності усіх рівнів. Задання поточного стану системи означає не що інше, як задання чисельного значення всіх рівнів на даний момент часу. Іншим не менш важливим є поняття «темпів» – швидкостей обміну речовини між окремими компартментами. Темпи можуть залежати як від змінних рівнів, так і від інших змінних моделі, які називаються *допоміжними*. Допоміжні змінні, поряд з рівнями, керують перетіканням речовин з одного компартмента в інший і тим самим визначають всю динаміку досліджуваної системи.

Відповідно до введеної Дж. Форрестером символікою рівні на рисунках позначаються у вигляді прямокутників, а темпи – у вигляді вентилів (рис. 3.6 а). Матеріальні зв'язки (потоки) показані суцільними лініями, а керуючі – пунктирними. Як приклад на рис. 3.6 б зображена взаємодія двох компартментів, швидкість обміну між якими залежить від їхніх рівнів. Зовнішні джерела і стоки позначаються на таких діаграмах замкнутими випукло-ввігнутими лініями, а зовнішні керуючі змінні – великими стрілками (див. рис. 3.6 а). Користуючись цією символікою, можна зображати блок-схеми моделей будь-яких екологічних систем або їхніх частин, що досить часто використовується у моделюванні.

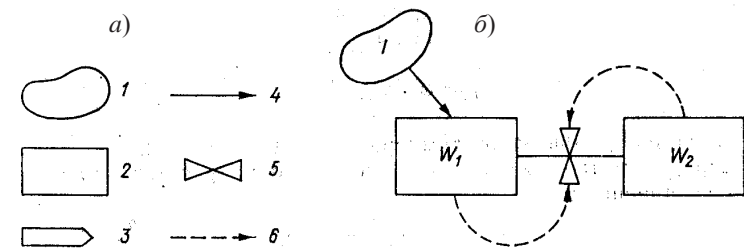


Рис. 3.6. Позначення Дж. Форрестера (а) і найпростіша схема двокомпаратментної моделі (б):

- 1 – джерело і стоки; 2 – ємності (бункери);
- 3 – керуючі змінні; 4 – потоки речовини;
- 5 – керуючі вентилі; 6 – інформаційні зв'язки

Для прикладу на рис. 3.7 наводиться побудована з використанням символіки Форрестера функціональна схема двокомпаратментної прикладної моделі формування урожаю зернових культур А.М. Польового. Умовні позначення наводяться у табл. 3.1.

Оскільки час у моделі також змінюється дискретно з кроком, наприклад, рівним одній годині або добі, то для опису динаміки системи потрібно записати сукупність моделюємих процесів у вигляді рівняння, яке зв'язує стан моделі в два суміжних моменти часу  $t_k$  і  $t_{k+1}$ , де  $k$  – номер кроку моделювання. Тоді, задавши в момент часу  $t_0$  початковий стан моделі, можна знайти за рівнянням зв'язку стан у момент  $t_1$ , а по ньому – у момент  $t_2$  і т.д. Тим самим можна послідовно, крок за кроком розрахувати всю еволюцію системи.

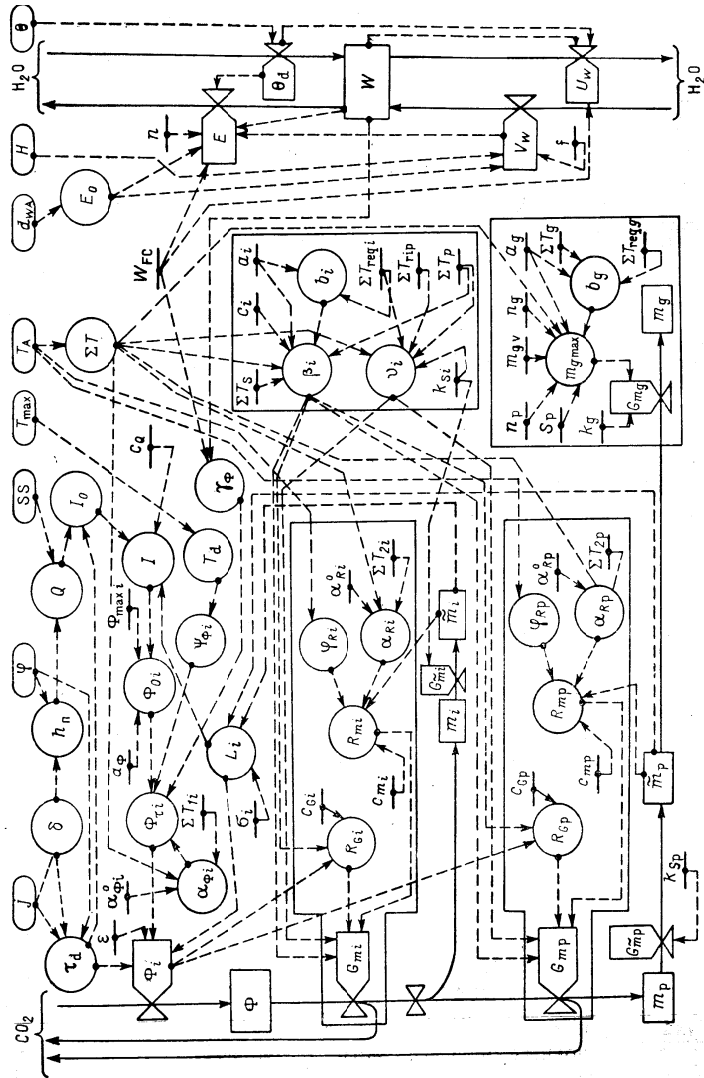


Рис. 3.7. Функціональна схема прикладної моделі формування урожаю зернових культур А.М. Польового

Таблиця 3.1. Умовні позначення, прийняті у двокомпаратній прикладній моделі формування урожаю зернових культур А.М. Польового, яка наведена на рис. 3.7

Позначення	Величина
$\alpha^0_{\phi i}$	Початковий нахил світлової кривої фотосинтезу.
$c_i$	Коефіцієнт співвідношення різних органів у рослині на час дозрівання.
$c_m$	Коефіцієнт, який характеризує витрати на дихання підтримки життєдіяльних структур органів рослин.
$c_G$	Коефіцієнт, який характеризує витрати на дихання, пов'язаний з переміщенням речовин, фотосинтезом і створенням нових структурних одиниць.
$E_o$	Випаровуваність посівів.
$E$	Сумарне випаровування посівів.
$G_m$	Швидкість росту $i$ -х вегетативних органів.
$G_{mp}$	Швидкість росту репродуктивних органів.
$G_{mg}$	Швидкість наростання маси зерна.
$H$	Рівень ґрунтових вод.
$I$	Інтенсивність фотосинтетично-активної радіації на верхній межі посіву.
$I_o$	Інтенсивність фотосинтетично-активної радіації всередині посіву.
$k_g$	Константа Міхаеліса-Ментен.
$k_{si}$	Параметр, що характеризує критичну величину зменшення живої біомаси листя, при якій починається її відмирання.
$L_i$	Площа поверхні фотосинтезуючих органів.
$m_i$	Загальна суха біомаса окремих органів.
$i$	Органи: $l$ – листя, $s$ – стебла, $r$ – корені, $p$ – колосся. $g$ – зерно.
$\tilde{m}_i$	Функціонуюча біомаса $i$ -го вегетативного (репродуктивного) органа.
$m_g$	Суха біомаса зерна.
$m_{g_{max}}$	Максимально можлива в реальних умовах суха біомаса зерна.
$Q_o$	Інтенсивність сумарної сонячної радіації над верхньою межею рослинного покриву.
$R_{gi}$	Витрати на дихання підтримки рослин.
$R_{mi}$	Витрати на дихання росту рослин.
$SS$	Середня за декаду кількість годин сонячного сяйва.
$T_A$	Температура повітря.
$T_d$	Температура повітря за світлий час доби.
$T_{max}$	Максимальна температура повітря.

Продовження табл. 3.1

Позначення	Величина
$U_w$	Інфільтрація.
$V$	Розрахункова величина підживлення у зону аерації із ґрунтових вод.
$W$	Запаси продуктивної вологи у метровому шарі ґрунту.
$W_{FC}$	Найменша вологосмість у метровому шарі ґрунту.
$\alpha_{\phi_i}$	Онтогенетична крива фотосинтезу.
$\alpha_{\phi}^0$	Початкове значення онтогенетичної кривої фотосинтезу.
$\alpha_R$	Онтогенетична крива дихання.
$\alpha_R^0$	Початкове значення онтогенетичної кривої дихання.
$\beta_i$	Ростова функція вегетативного періоду.
$\gamma_{\phi}$	Функція впливу вологості ґрунту на інтенсивність фотосинтезу
$\delta$	Схил Сонця.
$\Theta$	Кількість опадів.
$\sigma_i$	Питома поверхнева площа листя.
$\tau_{\phi}$	Тривалість світлої частини доби.
$\Phi$	Денний фотосинтез посіву на одиницю площі.
$\Phi_o^j$	Інтенсивність фотосинтезу при оптимальних умовах тепло- і вологозабезпеченості в реальних умовах освітленості.
$\Phi_{max}$	Інтенсивність фотосинтезу при світловому насиченні і нормальній концентрації $CO_2$ .
$\Phi_{\tau}$	Інтенсивність фотосинтезу в реальних умовах середовища.
$\varphi$	Широта пункту, для якого ведеться розрахунок.
$\varphi_R$	Температурна крива дихання.
$\vartheta_i$	Ростова функція репродуктивного періоду.
$\Psi_{\phi}$	Температурна крива фотосинтезу.
$\sum t$	Сума ефективних температур.
$\sum t_{li}$	Сума ефективних температур, при накопиченні яких починається період максимальної інтенсивності фотосинтезу.
$\sum t_{rip.}$	Сума ефективних температур за період від відновлення вегетації до дозрівання.
$\sum t_{reqi}$	Суми температур, що дорівнюють половині всієї суми, необхідної для завершення росту кожного органу.
$\sum t_p$	Сума температур, з якої починається ріст репродуктивних органів.
$\sum t_{2i}$	Сума температур, при якій спостерігається максимальна інтенсивність дихання.

Нехай модель складається з декількох блоків. Станом кожного блоку є сукупність рівнів даної субстанції у кожному з компартментів, тобто в кожному із виділених шарів ґрунту або ярусів листків. Так, що поточна вологість ґрунту визначається набором значень вологості у всіх розрахункових шарах. Таке задання профілю вологості у моделі цілком відповідає методу її експериментального визначення у тих випадках, коли ґрунтовий розріз представляється складеним із декількох шарів, наприклад, 0–10, 10–20, ..., 90–100 см. Правда, у моделі (як власне кажучи, і в експерименті) товщина шару може бути перемінною. Цей набір величин (або вектор) для блоку з номером  $i$  в момент часу  $t_k$  будемо позначати як  $x^i(t_k)$ . При наявності  $m$  блоків моделі необхідно виразити залежність стану блоку  $i$  у наступний момент часу  $t_{k+1}$  як функцію від стану всіх блоків у поточний момент  $t_k$  і зовнішніх впливів, прикладених до системи за час кроку.

Інакше кажучи, необхідно виразити темпи приросту рівнів за часовий крок моделі

$$x^i(k+1) - x^i(k) = v^i(k) \quad (3.3)$$

через змінні рівнів, допоміжні змінні і зовнішні впливи:

$$v^i(k) = f_i[x^1(k), \dots, x^i(k), \dots, x^m(k), A_1(k), \dots, A_l(k), u(k)], \quad (3.4)$$

де  $u(k)$  – сукупність зовнішніх впливів;

$A_i(k)$  – допоміжні змінні.

В свою чергу допоміжні змінні також повинні залежати від змінних рівнів  $x^i(k)$ , темпів  $v^i(k)$  або зовнішніх впливів  $u(k)$ . Додавання цих залежностей до рівнянь (3.3) і (3.4) призводить до замкнутої системи, вирішення якої може бути отримане крок за кроком.

Конкретний вигляд залежностей темпів перетікання речовини між ємностями від величин, які впливають на них, знаходиться виходячи з законів кінетики. Найбільш простим серед залежностей такого роду є аналог закону Ома: перетік між сусідніми компартментами за кожен момент часу  $v_{ij}$  дорівнює різниці рівнів, поділений на опір або помножений на провідність

$$v_{ij} = \frac{x_i - x_j}{R_{ij}} = g_{ij}(x_i - x_j). \quad (3.5)$$

У агроєкосистемах, щоправда, самі провідності часто непостійні і є

функціями інших величин. Наприклад, поглинання води коренями визначається як різниця водних потенціалів кореня  $P_r$  і ґрунту  $p_s$ , помножена на поглинальну поверхню коренів у шарі ґрунту  $\omega$  і на питому провідність кореня  $\xi$

$$f = \omega \xi (p_s - P_r), \quad (3.6)$$

де величина  $\xi$  залежить від температури даного шару.

Швидкість теплообміну лист – повітря визначається аналогічним співвідношенням

$$S = \rho_a C_p D_T L (T_a - T_l) \quad (3.7)$$

де  $\rho_a$  – густина повітря;

$C_p$  – теплоємність повітря при постійному тиску;

$L$  – листовий індекс ярусу листків;

$T_a$  і  $T_l$  – температура відповідно повітря і листків у  $i$ -му ярусі;

$D_T$  – провідність прилисткового шару повітря.

Величина  $D_T$  у свою чергу залежить від швидкості вітру на висоті ярусу. Провідність устячок, яка впливає на дифузію водяної пари з міжклітинника і  $\text{CO}_2$  з атмосфери в листок визначається водним потенціалом листка і поглиненою листком радіацією. Наявність численних подібних взаємозв'язків створює цілісність і погодженість процесів, що протікають у посіві, приземному повітрі та у самій рослині. Їхній опис є дуже важливим для моделювання продукційного процесу.

Перейдемо до опису деяких понять, які виконують головну роль при моделюванні динамічних систем. Повний набір рівнів кожного блоку називається його станом, оскільки цей набір цілком характеризує числові значення усіх змінних блоку в даний момент часу.

Упорядкована певним чином сукупність станів усіх блоків утворює *вектор стану моделі* в цілому. Якщо модель містить  $m$  блоків, то цей вектор в момент часу  $t_k$  має вигляд

$$x(k) = \begin{pmatrix} x^1(k) \\ x^2(k) \\ \vdots \\ x^m(k) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Зокрема, на момент початку розрахунку, тобто при  $t = t_0$ , значення всіх складових вектора  $x(0)$  становлять початковий стан моделі. Він повинен бути заданий перед початком прогону моделі.

Крім початкового стану в модель входить інша група невідомих заздалегідь величин – її параметрів. Так, залежність інтенсивності фотосинтезу від поглиненої ФАР найпростіше визначається двома параметрами – нахилом світлової кривої і рівнем її насичення. Ці параметри є характеристиками культури і, крім того, змінюються в залежності від фази розвитку. Водоутримувальна здатність ґрунту, тобто залежність потенціалу ґрунтової води  $p_s$  від вологості  $w_s$ , характеризується трьома параметрами: вологістю насичення, потенціалом насичення і показником ступеня у залежності  $p_s(w_s)$ .

Числові значення цих величин варіюють для різних ґрунтів і, зокрема, визначаються типом ґрунту, його гранулометричним складом, вмістом гумусу і деяких інших властивостей. Тому для виконання конкретного розрахунку потрібно, крім початкового стану моделі, задати значення сукупності (або вектора) усіх параметрів, які характеризують даний конкретний ґрунт, дану конкретну культуру та її сорт. Ясно, що тільки в тих випадках, коли при розробці моделі залишається можливість варіації цих параметрів, модель можна вважати універсальною, придатною для дослідження продуктивності посівів різних культур, які вирощуються на різних ґрунтах.

Нарешті, для виконання процесу моделювання необхідно ввести у модель характеристики зовнішніх впливів – погоду й агротехніку. Погодні умови можуть бути задані одним із трьох способів – своїми фактичними реалізаціями минулих років, детермінованими або ймовірнісними сценаріями. Найбільш реалістичними даними є фактичні дані погоди, оскільки вони відображають як специфіку клімату даної місцевості, так і варіабельність погодних умов, зміну, наприклад, посушливих сезонів і сезонів, сприятливих для урожаю, внутрішньо-сезонну мінливість метеорологічних умов.

Однак для вирішення деяких задач таких даних недостатньо. Потреба в розробці сценаріїв погоди виникає, зокрема, у тому випадку, коли потрібно досліджувати вплив майбутніх змін клімату, підвищення концентрації  $\text{CO}_2$  в атмосфері і пов'язаного з ним можливого потепління – на продуктивність агроєкосистем. У даному випадку при побудові сценарію погоди необхідно використовувати як існуючі досить стійкі кореляційні зв'язки між окремими метеорологічними параметрами, так і теоретичні уявлення про тенденції глобального досить повільного тренда погоди.

Розглянемо питання про задання агротехніки у моделі. Такі її параметри, як, наприклад, терміни сівби і норми висіву задаються при моделюванні безпосередньо. Складніше вирішується питання з повторюваними в процесі вегетації впливами – поливами, підживленнями. Для введення таких впливів у модель необхідно включити спеціальні

програми, які розшифровують заданні режими, і подають на вхід моделі відповідні впливи, на визначеному часовому кроці розрахунку. Так чи інакше, формування конкретної агротехніки пов'язано з заданням набору констант.

Таким чином, для здійснення прогону моделі необхідно задати наступні масиви даних:

- вектор параметрів моделі, який характеризує даний ґрунт, культуру та її сорт;
- вектор початкового стану;
- набір метеорологічних елементів, які визначають реалізацію погодних умов;
- набір констант, які визначають агротехніку вирощування культури.

Крім того, зрозуміло, повинні бути задані дата початку розрахунку й умови його закінчення.

### 3.3. Перевірка й оцінювання моделей

#### *Загальні підходи*

Перевірка й оцінювання моделей – неперервний процес, який має бути присутній на всіх стадіях моделювання з моменту розробки і до закінчення експлуатації моделі. Будь-який інший підхід, очевидно, буде неефективний. Більшість положень, які розглядаються у даному розділі, відносяться, головним чином, до динамічних детермінованих моделей функціонального або напівфункціонального типу. Однак, слід підкреслити, що в основі багатьох емпіричних моделей також лежать певні біологічні допущення, які вимагають чітких формулювань і підлягають врахуванню на всіх стадіях моделювання. В зв'язку з цим корисно згадати попередження П. де Фріза, який, відзначаючи непогодженість використовуваних різними авторами термінів, підкреслив важливість точного визначення понять, які фігурують під час обговорення розглядаємих питань. Сказане повною мірою відноситься до процедур, які у багатьох публікаціях визначаються термінами «валідація» і «верифікація», тоді як, значення відповідних процесів більш точно розкривається словами «перевірка» й «оцінювання».

Термін «перевірка» використовується тут для позначення контролю методологічної коректності, а саме, що включені в модель формальні співвідношення правильно відображають обрану концепцію, що вони не мають внутрішніх протиріч і невідповідностей у розмірності, що передбачені математичні перетворення не містять помилок, програми складені правильно і досягають поставленої мети та ін.

Перевірка моделей є об'єктивний процес, результати якого можуть

бути як позитивними, так і негативними.

Оцінювання моделей, навпроти, до кількості цілком об'єктивних процесів віднести не можна, тому і визначити їх важко. Можна лише сказати, що оцінювання моделі стосується таких аспектів, як відповідність (поставлених цілей), правдоподібність, адекватність (прообразу), елегантність, економічність, простота, корисність. Рідко яка модель поєднує в собі всі ці якості, до того ж різні фахівці звичайно приписують одній і тій самій якості різну значимість. Остаточна оцінка моделі може бути отримана лише після того, як виконана перевірка і є впевненість у методологічній коректності прийнятої формалізації.

Якщо виходити з припущення, що мета моделювання вже сформульована, то процес моделювання можна розбити на наступні чотири етапи:

- 1) розробка структури моделі, формування допущень стосовно сутності моделюємих процесів, які відбуваються в агроєкосистемі;
- 2) математичне представлення положень, висунутих у пункті 1;
- 3) вирішення задач, сформульованих у пункті 2, звичайно з залученням програмно-обчислювальних засобів;
- 4) аналіз і інтерпретація прогнозів, виданих моделлю, з урахуванням пункту 1; підгонка прогнозів до експериментальних даних, якщо такі існують.

Перевірку й оцінювання варто виконувати на кожному з перерахованих етапів, причому перехід до наступного кроку допустимо тільки в тому випадку, якщо результати контролю можна вважати задовільними. Етапи часто перекриваються і бувають взаємозалежні. Розроблювачу іноді приходиться повертатися до першооснов і переглядати те, що колись здавалося йому очевидним. Так, закономірності, покладені в основу математичного опису досліджуваного процесу, можуть привести розроблювача до нових і несподіваних висновків у фундаментальній біологічній науці.

#### *Оцінювання структури моделі*

Математична модель здатна лише формалізувати уявлення розроблювача про сутність процесів, які відбуваються у агроєкосистемі. Тому вона завжди є спрощенням дійсності.

Професійний рівень розроблювача моделі багато в чому визначається його умінням приводити у відповідність прийняті допущення й обрані способи апроксимації. Небажаним ефектом подібних устремлень може виявитися звуження «кругозору» моделі. При всьому цьому варто подбати, щоб покладені в основу моделі припущення були фізично та біологічно обґрунтовані. Варто також пам'ятати, що об'єктивних методів оцінки правдоподібності допущень не існує – усе засновано на догадках. В

ідеальному випадку така догадка спирається на глибоке знання предмета, однак, найчастіше на особистий досвід, професійну майстерність і наукову позицію конкретного дослідника.

Оскільки роль допущень при моделюванні настільки велика, розроблювач мусить самим ретельним образом вивчити фізичну та біологічну суть проблеми. Іноді математики і статистики намагаються зайнятися моделюванням, не дуже глибоко вдаючись у предмет. Це рідко призводить до бажаних результатів. Залучений для консультацій біолог звичайно не може до кінця зрозуміти, що стоїть за математичними конструкціями моделі, а математик не вникає в біологічні деталі. Результати такої роботи, як правило, позбавлені практичної цінності, і плани зацікавлених сторін не призводять до успіху.

Структуру моделі перевірити не можна, її можна тільки оцінити (виключення складає перевірка на логічну несумісність). При оцінці необхідно вирішити, чи є обраний спосіб формалізації найбільш удалим як з погляду відповідності поточному рівню знань, так і з позицій строгої орієнтації на поставлену мету. Практичне виконання цієї процедури лежить, скоріше, у площині інтуїції, а не методики, яка претендує на об'єктивність.

#### *Аналіз і перевірка запису математичних залежностей*

Дуже важливо зберегти точність при математичному представленні фізичних і біологічних концепцій. Це вимагає, з одного боку, математичної ерудиції, з іншого боку, – чіткого розуміння формалізуємих біологічних ідей. Щоб уникнути помилки або у, крайньому випадку, швидко її знайти, варто керуватися деякими простими правилами. Коли ж мова йде про модель, реалізовану за допомогою ПЕОМ, варто виходити з припущення, що помилки неминучі і в обчислювальний процес повинні бути включені операції, які полегшують їхнє виявлення.

Перший крок – вибір символів. Важливість його впливає з того простого розуміння, що формули незрівнянно легше читати, розуміти і контролювати, коли включені в них аналогічні величини позначені аналогічними символами, а аналогічним символам приписана та сама розмірність. Наприклад, величини, які характеризують швидкість протікання різних процесів (обернено пропорційні часу), можна позначити через  $k_1, k_2, \dots, k_n$  компоненти загальної маси сухої речовини у моделі рослини через  $M_l, M_s$  і  $M_r$  відповідно для листків, стебел і коріння.

Якщо в спеціальній літературі вже існує традиція позначати означені величини відповідними символами і якщо немає серйозних підстав діяти інакше, то прийняту символіку доцільно зберегти й у рівняннях моделі.

Використання у математичному аналізі (або наукових публікаціях) термінології машинних мов, ймовірно, не виправдано. Набагато більш

зручно в цьому випадку користуватися позначеннями, які сформувалися за багато століть, на базі латинського і грецького алфавітів, маніпулюючи при необхідності прописними і малими літерами, над- і підрядковими індексами. Проте, комп'ютерна термінологія при всій її нинішній недосконалості одержує усе більше поширення.

Другий крок – контроль розмірності. Кожен член рівняння повинен мати ті ж одиниці виміру, що і всі інші. З цією метою звичайно складають таблицю позначень, де кожному символу, крім словесного визначення, приписується розмірність. У деяких випадках корисно також ввести поняття розмірності для групи символів, використовуваних у рівнянні спільно.

Єдина система одиниць (переважно SI) – найкраща база для узгодження розмірностей всіх елементів моделі (навіть якщо деякі одиниці виміру не є традиційними). Таке узгодження виключає необхідність для різних коефіцієнтів перерахування (грамів у кілограми, кубічних метрів у літри та ін.), маніпуляції з якими легко призводять до помилок.

Третій крок – перевірка математичної коректності та повноти. Кількість використовуваних залежностей має бути достатнім для опису проблеми, але не надлишковим. Наприклад, динамічну модель із трьома перемінними стану можна побудувати за допомогою трьох рівнянь у скінченних різницях або трьох диференціальних рівнянь першого порядку. Для постановки простої статичної задачі з п'ятьма перемінними потрібно п'ять рівнянь, хоча це і не завжди справедливо для схеми лінійного програмування.

Четвертий крок – перевірка біологічного розуміння і повноти на рівні системи в цілому. В моделях рослин і тварин звичайно передбачено врахування вмісту в тканинах вуглецю C і азоту N. Тоді можна записати

$$\begin{aligned} d(\text{загальна кількість N або C у системі})/dt = \\ = \text{надходження елемента} - \text{витрати елемента.} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Внутрішній перерозподіл, наприклад перенесення елемента з пула  $i$  у пул  $j$ , фіксується у моделі двічі: зі знаком «плюс» для пула  $j$  і зі знаком «мінус» для пула  $i$ . При наступному підсумовуванні рівнянь усі перенесені всередині системи кількості хімічного елемента взаємно знищуються. Зокрема, як би не будувалася модель рослин, ряд вхідних у неї залежностей повинні зводитися до такого

$$\begin{aligned} \text{інтенсивність дійсного фотосинтезу} = \\ = \text{темп росту} + \text{інтенсивність дихання,} \end{aligned} \quad (3.10)$$

де всі змінні виражені в тих самих одиницях.

### **Розв'язання рівнянь, які входять у модель**

Цей процес звичайно виконується за допомогою ПЕОМ з використанням універсальних алгоритмічних мов типу БЕЙСІК, ПАСКАЛЬ, АЛГОЛ або ФОРТРАН або проблемно-орієнтованих мов, таких як CSMP або LP400.

Головний принцип, якого потрібно дотримуватись: помилки неминучі, тому у програмах необхідно передбачати процедури їхнього виявлення і виправлення. У будь-якому посібнику з програмування можна зустріти рекомендацію: складати чіткі самодокументовані модульні програми. До цієї рекомендації необхідно відноситися з усією серйозністю, оскільки успіх найчастіше приходить до того, чий програми завжди зрозумілі будь-кому і можуть бути без труднощів ним використані. Доречні також і інші загальновідомі правила: точно визначати використані у програмі символи, досить часто давати необхідні пояснення та ін.

Там, де це можливо, у програму доцільно включати перевірку логічної несуперечності моделі, аналогічну розглянутій вище – рівняння (3.9) і (3.10). Такий контроль сприяє виявленню помилок у програмі й у математичному представленні моделі. Під час перших прогонів програми має сенс виводити на друк всі проміжні результати обчислень. Якщо при цьому паралельно робити розрахунки на калькуляторі (користуючись вхідними залежностями, а не їх програмною версією), то шляхом зіставлення також можна виявити ряд помилок.

Корисно, крім того, вжити заходів, які виключають можливість виникнення помилок інтегрування, пов'язаних з некоректним вибором чисельного методу або з призначенням занадто великого кроку інтегрування. Варто прагнути до того, щоб результати прогонів програми були в розумних межах стійкі до варіацій як методів, так і кроків інтегрування.

### **Прогнози та оцінювання чутливості моделі**

Якщо модель ретельно перевірена і всі математичні, обчислювальні і методичні помилки усунуті, то отримувані прогнози адекватно відображають усю сукупність допущень (фізичних, біологічних, в тому числі, емпіричних), покладених у її основу. Тепер модель може бути використана з метою, для досягнення якої вона призначена.

Звичайно в першу чергу перевіряють функціонування моделі на «якісному» рівні. Якщо воно виявляється задовільним і якщо доступні необхідні початкові (вхідні) дані (ця умова часта не виконується), то можна переходити до процедури підгонки, виконуваної за методикою, яка викладена у підрозділі 2.5.

Такий процес оцінювання параметрів шляхом узгодження їх з

масивом дослідних даних іноді називають *калібруванням моделі*.

Розглянемо модель з єдиним регульованим параметром  $P$ , який узгоджений з даними експерименту шляхом мінімізації суми квадратів відхилень  $R$  з  $\nu$  степенями свободи (див. підрозд. 2.5). Дисперсія  $V(P)$  при цьому визначається як

$$V(P) = \frac{R}{\nu} \frac{1}{d^2 R / dP^2}. \quad (3.11)$$

Для порівняння впливу різних параметрів на результати моделювання необхідна безрозмірна величина, тобто величина, яка не залежить від абсолютного значення параметра. Цим вимогам відповідає коефіцієнт варіації

$$CV(P) = \frac{[V(P)]^{1/2}}{P}. \quad (3.12)$$

Повертаючись до рис. 2.3, відзначимо, що крива  $S$  має велике значення  $CV(P)$ , а крива  $J$  – мале.

Якщо модель містить кілька регульованих параметрів, то для обчислення дисперсії кожного з них варто скористатися рівнянням (2.50). Вираз (3.12) у цьому випадку набуде такого вигляду

$$CV(P_i) = \frac{[V(P_i)]^{1/2}}{P_i}. \quad (3.13)$$

Коефіцієнти варіації (3.13) можна використовувати для ранжирування параметрів, оскільки мале значення  $CV(P_i)$  свідчить про те, що параметр значно впливає при підгонці моделі до дослідних даних, і навпаки. Підгонка до різних масивів може дати різні результати. Дослідження, проведені з моделями дикоростучих і культурних рослин, у процесі яких була використана досить значна вибірка даних (експеримент із регульованими характеристиками зовнішнього середовища), показали, що коефіцієнт варіації для статистично значимих параметрів лежить у діапазоні від 0,05 до 0,2. Якщо значення  $CV(P_i)$  перевищує 0,2, то це може означати, що частина моделі, до якої відноситься параметр  $P_i$ , вимагає критичного перегляду.

Аналіз чутливості з ранжировкою параметрів допомагає відшукати шляхи спрощення моделі. Один з таких шляхів полягає у повному виключенні з моделі параметра, який має дуже велике значення коефіцієнта варіації. Однак, можливі ситуації, коли навіть при незначному впливі параметра на результати розрахунків, є вагомими фізичні або біологічні доводи на користь його збереження у моделі. Оскільки

результати аналізу залежать як від конкретних експериментальних даних, так і від обраного методу оцінки неув'язок, інтерпретувати їх слід з відомою обережністю.

Тепер розглянемо модель, яка прогнозує (серед всього іншого) значення величини  $Y$  у деякий заданий момент часу. Символ  $Y$  може позначати урожайність культури або продуктивність тваринництва. Передбачається, що модель перевірена й оцінена, у тому числі зроблена підгонка її параметрів до даних експерименту.

Одна частина цих параметрів відноситься до біології об'єкта, інша – до навколишнього середовища, причому ряд параметрів з останньої групи піддається керуванню (кількість внесених добрив і т.д.). Мету тваринницьких або рослинницьких програм, а також пріоритети при плануванні можна сформулювати більш об'єктивно, якщо параметри  $P_i$  проранжировані відповідно до їхнього відносного внеску в зміну вихідного показника  $Y$ . За критерій чутливості  $Y$  до параметра  $P_i$  зручно вибрати безрозмірну величину  $S(Y, P_i)$ , таку, що

$$S(Y, P_i) = \frac{dY}{dP_i} \frac{P_i}{Y} \approx \frac{\delta Y}{Y} \frac{P_i}{\delta P_i}, \quad (3.14)$$

де  $\delta P_i$  – малий приріст параметра;

$\delta Y$  – приріст показника  $Y$  внаслідок зміни  $P_i$ .

Для обчислення  $S(Y, P_i)$  звичайно буває достатнім збільшення  $P_i$  на 5 % ( $\delta P_i/P_i = 0,05$ ). Якщо  $S(Y, P_i) = 1$ , то це означає, що дана відносна зміна числового значення параметра  $P_i$  призводить до точно такої ж відносної зміни числового значення показника  $Y$ . Параметри, для яких  $S(Y, P_i) > 1$  сильно впливають на вихідний показник, і навпаки.

## ЧАСТИНА II

### МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОМЕТЕОРОЛОГІЧНОГО РЕЖИМУ АГРОЕКОСИСТЕМ

#### 4. МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛО – ТА ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННЯ У ҐРУНТІ

При математичному моделюванні повинна розглядатись сукупність процесів, які протікають у ґрунті, (фізичних процесів тепло- і вологоперенесення у ґрунті, хімічних і біохімічних процесів). Вони складають основну групу, динамічні властивості якої повинні ретельно відтворюватися при моделюванні. Маючи інерційні (буферні) властивості, ґрунт здатний запасати тепло, вологу й елементи живлення, що дозволяє рослинам «пережити» короточасні стресові впливи, довести процес дозрівання до кінця.

Саме той факт, що у ґрунтах відбуваються численні вертикальні міграції речовини, а також їх перетворення у кожному ґрунтовому шарі дозволило І. Ріхтерові розглядати ґрунт як реактор. Цей термін, мабуть, найбільш удадо визначає принцип модельної будови, істотно спрощуючи реальну ситуацію, але спонукаючи розглядати сукупність процесів у ґрунті на динамічній балансовій основі.

##### 4.1. Загальні принципи моделювання

При моделюванні будемо розглядати лише вертикальні міграції всіх ґрунтових складових і, отже, лише вертикальне перенесення тепла і вологи. Зробимо деталізацію поняття компартментів, яке введене вище. Маючи дуже складну внутрішню структуру, ґрунт складається з мікро- і макроагрегатів, пронизаних численними порами. При моделюванні ця структура не розглядається. Розглядаємо ґрунт як деяке «суцільне тіло», або, точніше, як пористе середовище, властивості якого змінюються по глибині пофілю. Тому всі змінні, про які піде мова нижче – температура, вологість, вміст нітратів або амонію – розглядаються як осереднені в деяких об'ємах величини, висота яких досить мала в порівнянні з загальною глибиною моделюемого шару.

Цілком природно, що реальні вертикальні профілі температури і вологості у ґрунті безперервні. Вони подібні до кривих, які зображені на



рис. 4.1. Моделювання динаміки таких неперервних залежностей на цифровій машині неможливо. Вони повинні розглядатися як такі, що мають дискретний характер.

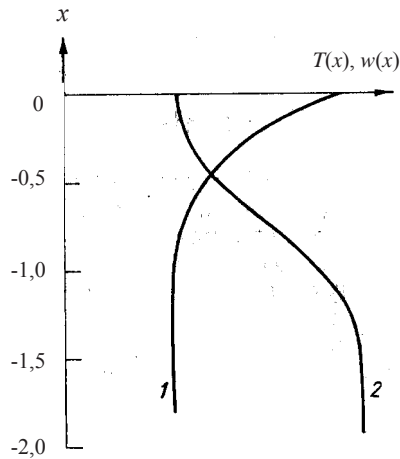


Рис. 4.1. Вертикальні профілі температури (1) і вологості (2) ґрунту

Виділимо для цього по глибині ґрунту деяку кількість, так званих вузлів, і будемо вважати, що відтворення динаміки величин, які ми розглядаємо, з тією чи іншою точністю необхідно виконати саме у вузлах розрахункової схеми (рис. 4.2). Якщо при цьому у ґрунті виділено  $NS$  вузлів то замість неперервної функції  $T(x)$  або  $w(x)$  ми маємо набір величин-значень у вузлах температури:  $T_0^*, T_1^*, T_2^*, \dots, T_{NS}^*$

і вологості ґрунту:  $w_0^*, w_1^*, w_2^*, \dots, w_{NS}^*$ .

Той факт, що неперервна функція замінена її кінцевим набором, позначений зірочкою, яку надалі будемо опускати. При цьому межі ґрунту – повітря відповідає нульовий вузол, а вузол з номером  $NS$  розміщений на нижній межі розрахункового шару ґрунту. Усього, таким чином, отримано  $NS + 1$  значення функції, вважаючи її значення у нульовому й в останньому вузлах.

Проведемо тепер горизонтальні площини через середини відстаней між сусідніми вузлами. В результаті одержимо  $NS + 1$  шар перемінної товщини: верхній шар буде мати товщину, рівну  $x_1/2$ , товщина другого зверху шару дорівнює половині відстані між вузлами  $x_1$  і  $x_2$  плюс половина відстані між вузлами  $x_2$  і  $x_3$  і т.д. Останній шар має товщину  $(x_{NS} - x_{NS-1})/2$ .

Ці шари і будемо ототожнювати з ґрунтовими компартментами. При цьому будемо вважати, що значення досліджуваної функції всередині кожного компартмента постійно і дорівнює тій величині, яку ця функція приймає у відповідному вузлі. Наприклад, вологість у всьому верхньому компартменті дорівнює  $w_0$ , у наступному –  $w_1$ , і т.д. На рис. 4.2 заштрихований прямокутник відповідає вологості ґрунту у четвертому зверху компартменті, тобто у компартменті, відповідному третьому вузлу. Таким чином, неперервна функція ординати (температура або вологість ґрунту) замінюється її ступінчастим (кусково-сталім) аналогом. Очевидно, що помилка, пов'язана з такою заміною, буде тим менше, чим тонше виділені у ґрунті шари-компартменти, а при досить великій кількості шарів її можна зробити як завгодно малою. Очевидно, також, що розташування вузлів варто вибрати нерівномірне – більш густе у верхній частині ґрунтового профілю і більш розріджене на глибині. Це пов'язано з тим, що найбільш динамічні процеси відбуваються у верхніх шарах ґрунту, а з глибиною ці зміни загасають.

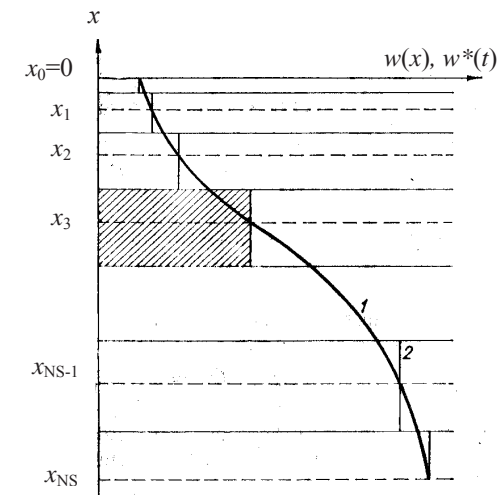


Рис. 4.2. Перехід від неперервного опису до компартментної схеми: 1 – профіль вологості ґрунту; 2 – його дискретний аналог

При описі динаміки ґрунтових процесів будемо вважати, що обмін даної субстанції (тепло- або вологообмін) здійснюється на межі виділених шарів, причому збільшення або зменшення тепло- або вологовмісту відбувається відразу ж у всьому компартменті. Будемо вважати за крок

моделі тільки ті обмінні процеси, які відбуваються між сусідніми шарами. Це означає, що часовий крок моделі має бути обраний досить малим: дійсно, за великий проміжок часу волога з верхнього шару, наприклад, після опадів може проникнути у всі інші шари, в тому числі й у нижній.

В силу ступінчатого характеру перетворених функцій вологозапаси кожного шару дорівнюють вологості ґрунту в цьому шарі  $w_i$ , помноженій на його товщину  $h_i$ . Таким чином, вологозапаси  $i$ -го шару  $W_i$  дорівнюють

$$W_i = h_i w_i, \quad (4.1)$$

а сумарні вологозапаси усього розрахункового шару ґрунту визначаються як

$$W_s = \sum_{i=0}^{NS} W_i = \sum_{i=0}^{NS} h_i w_i. \quad (4.2)$$

Так само можна розрахувати теплоємність  $i$ -го шару ґрунту

$$Q_i = h_i c_i T_i \quad (4.3)$$

і сумарну теплоємність

$$Q_s = \sum_{i=0}^{NS} Q_i = \sum_{i=0}^{NS} h_i c_i T_i, \quad (4.4)$$

де  $c_i$  – теплоємність шару з номером  $i$ .

На верхній межі розрахункового шару, тобто при  $x=x_0=0$  відбувається обмін теплом і водяною парою між ґрунтом і приземним повітрям. Умови тепло- і вологообміну тут обчислюються на підставі фізичних міркувань, які будуть розглянуті нижче. Вибір цієї межі визначається очевидними міркуваннями і не вимагає коментарів. Що ж стосується нижньої межі розрахункового шару  $x_{NS}$  (і розташування останнього вузла), то її місце розташування не настільки очевидно. Ясно, принаймні, що вона повинна розміщатися нижче шару, де розміщена коренева система. Інша вимога зводиться до того, щоб значення моделюємої величини чи її потоку на нижній межі було відоме, в противному випадку виникає невизначеність у розрахунку.

Для моделювання вологоперенесення найбільш яким представляється випадок неглибокого залягання ґрунтових вод (на глибині 1–3 м). Нижню межу варто помістити при цьому саме на рівні ґрунтових вод, оскільки тут точно відомо гранична умова: тиск ґрунтової вологи дорівнює нулю. При більш глибокому заляганні ґрунтових вод виникає деяка невизначеність, як у заданні нижньої граничної умови, так і в

розташуванні самої цієї границі. У той же час часто можна вважати, що на глибині приблизно 2–3 м вологість ґрунту за сезон вегетації міняється незначно, якщо потік вологи через границю близький до нуля.

Оскільки, частіше за все, розглядається динаміка ґрунтової вологи у верхніх шарах 100–150 см, єдина вимога, якій повинна задовольняти нижня гранична умова, зводиться до наступного: неточність її задання не повинно вносити істотної погрішності у розрахунки профілю вологості верхніх шарів ґрунту.

Дуже близька картина складається і при розрахунку теплового поля. Відомо, що добові коливання температури ґрунту загасають уже на глибині 40–60 см, у той час як сезонні зміни можуть поширюватися на значно більшу глибину. У всякому разі, у більшості регіонів нашої країни температуру ґрунту можна вважати постійною на глибині 4 м.

Однак, це не означає, що нижню границю у всіх випадках слід поміщати на цій глибині. Можна з достатньою точністю вважати, що вже на відстані 1,5–2 м від поверхні ґрунту добовий хід температури відсутній, а зміна температури всередині сезону не має міжсезонної мінливості і слідує середньому кліматичному ходу. Це означає, що нижню граничну умову температури на цій глибині можна вважати постійною всередині кожної доби, а її зміну за сезон вегетації задавати у вигляді залежності від номера доби відповідно до осереднених за ряд років кліматичних даних.

## 4.2. Теплоперенесення у ґрунті

Теплота як форма енергії і температура як її кількісна характеристика відіграють велику роль у житті рослин. Температурний режим безпосередньо впливає на розвиток рослин, оскільки темпи розвитку залежать від поглиненого посівом тепла. У той же час з температурним режимом пов'язані внутріґрунтове випаровування і транспірація, а температурний градієнт безпосередньо впливає на рух води у ґрунті. Крім того, від температури ґрунту, як і від її вологості, залежить інтенсивність азотних трансформацій. З іншого боку, на перенесення тепла у ґрунті впливає водний режим так, що аналіз динаміки водного і теплового режимів варто проводити спільно. Зупинимося більш докладно на теплофізичних характеристиках ґрунтів.

### Теплофізичні характеристики ґрунтів

Інтенсивність нагрівання будь-якого тіла при підведенні тепла визначається його теплоємністю, яка характеризує кількість теплової енергії, що має бути передана тілу для підвищення його температури на

1 °С або на 1°К. Питому теплоємність можна визначати як теплоємність одиниці об'єму або одиниці маси і виражати відповідно в кал/(см<sup>3</sup>·К) або кал/(г·К). З погляду теплових властивостей можна уявити собі, що ґрунт складається з двох основних компонентів-ґрунтового скелета і води, яка знаходиться у рідкій фазі, оскільки теплоємність газового компонента незначна. В зв'язку з цим питома теплоємність вологого ґрунту  $c$  знаходиться як середньозважена величина.

$$c = c(w) = c_s \rho_s + c_w w, \quad (4.5)$$

де  $c_s$  – питома теплоємність ґрунтового скелета;

$\rho_s$  – щільність ґрунту;

$c_w = 1$  – теплоємність води;

$w$  – вологість ґрунту.

Таким чином, теплоємність ґрунту лінійно залежить від її вологості. Характерний вигляд залежності  $c(w)$  представлений на рис. 4.3, з якого виходить, що при підвищенні вологості ґрунту її теплоємність може змінюватися в кілька разів – від величини, рівної приблизно 0,2 – 0,25 до 0,8 – 0,9 кал/(см<sup>3</sup>·К). Це означає, що для нагрівання вологого ґрунту на визначену кількість градусів знадобиться набагато більше енергії, ніж для нагрівання на цю же величину сухого ґрунту.

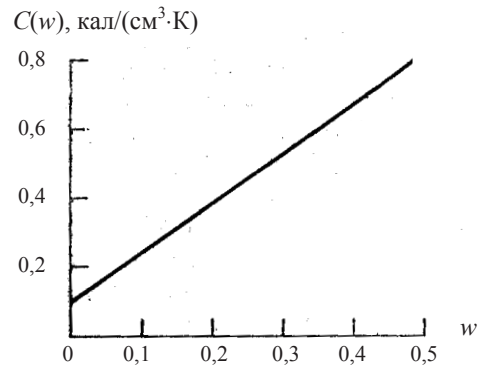


Рис. 4.3. Залежність теплоємності ґрунту від вологості

Значення вхідних у формулу (4.5) коефіцієнтів для деяких компонентів, які входять до складу ґрунту наведені у табл. 4.1.

Другою важливою в тепловому відношенні характеристикою ґрунтів є їх теплопровідність. Теплопровідність характеризує швидкість передачі

тепла, будучи аналогом провідності у законі Ома. При наявності температурного градієнта вздовж деякого тіла тепло поширюється від його більш гарячого кінця до більш холодного тим швидше, чим більше його теплопровідність. Питому теплопровідність варто розраховувати як швидкість передачі тепла (наприклад, кал/с), віднесену до градієнта температури і до одиниці довжини, тобто варто вимірювати, наприклад, у кал/(см·К·с).

Таблиця 4.1. Питома теплоємність різних компонентів ґрунту

Компоненти ґрунту	Питома теплоємність, кал/(см <sup>3</sup> ·К)
Кварц, глина	0,48
Органічна речовина	0,60
Вода	1,00
Лід	0,45
Повітря	0,0003

Теплопровідність ґрунту також залежить від її вологості, однак, вигляд цієї залежності в порівнянні з теплоємністю виявляється більш складною. При цьому супіщані ґрунти характеризуються більш різким збільшенням теплопровідності при збільшенні вологості, ніж суглинисті. Крім того, ця залежність нелінійна і має вигляд S-подібної кривої з насиченням (рис. 4.4). Сама ж величина теплопровідності при зміні вологості ґрунту від нуля до повного насичення змінюється на декілька порядків.

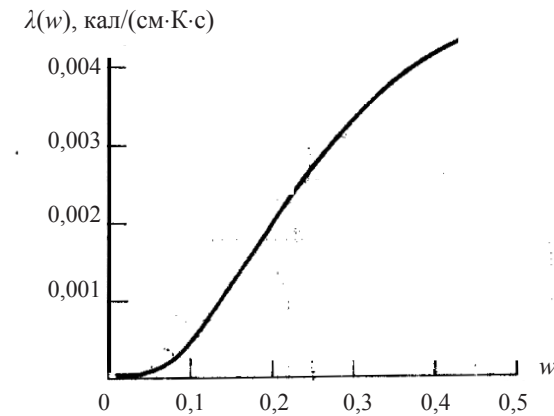


Рис. 4.4. Залежність теплопровідності ґрунту від вологості

Зв'язок теплопровідності і вологості ґрунту встановлено у роботі Д.А. Куртєнера і А.Ф. Чудновського:

$$\lambda(w) = c(w)[\lambda_1(w - \lambda_4)^2 + \lambda_2\rho_s + \lambda_3], \quad (4.6)$$

де  $\lambda(w)$  – теплопровідність ґрунту.

Значення коефіцієнтів наведені у табл. 4.2. Ці співвідношення і використовуються при моделюванні температурного режиму ґрунтів.

Таблиця 4.2. Коефіцієнти, які визначають залежність теплопровідності ґрунту від його вологості

Тип ґрунту	$\lambda_1 \cdot 10^4$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
Чорнозем звичайний	-130	3,1	1,21	0,20
Темно-каштановий	-170	2,2	1,90	0,18
Сірозем	-62	2,7	0,20	0,18
Південний чорнозем	-104	2,4	0,68	0,20
Дерново-глеєвий	-200	3,1	1,40	0,20

#### 4.2.2. Теплообмін ґрунтових компартментів

Розглянемо деякий компартмент за номером  $j$ . Очевидно, що з погляду теплообміну всі компартменти, крім першого, який граничить з приґрунтовим повітрям, і останнього, рівноправні, оскільки у кожного існує два «сусіди». Позначимо площу поперечного розрізу кожного з компартментів через  $F$ . Висота  $j$ -го компартменту, як уже говорилося, дорівнює  $h_j$  (рис. 4.5), а його об'єм дорівнює

$$V_j = h_j F. \quad (4.7)$$

Об'ємна теплоємність компартменту обчислюється як добуток його питомої теплоємності  $c_j$  на об'єм, тобто

$$C_j = c_j h_j F. \quad (4.8)$$

Отже, при зміні температури компартменту на  $\Delta T$  градусів приріст теплової енергії, яка міститься в ньому, визначається як

$$\Delta Q_j = c_j h_j F \Delta T, \quad (4.9)$$

тобто зміна кількості тепла пропорційна теплоємності одиниці об'єму  $c_j$ , зміні температури і самому цьому об'єму  $V_j = h_j F$ .

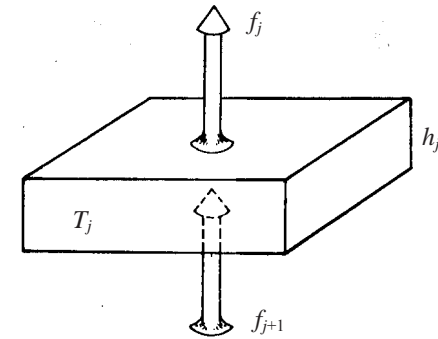


Рис. 4.5. Теплообмін  $j$ -го компартмента

Розглянемо, як змінюється температура компартмента за часовий крок моделі. Виберемо за часовий крок досить малий проміжок часу  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ , де  $k$  – номер кроку. Оскільки ми вважаємо, що внутрішні джерела тепла в компартменті відсутні, а теплообмін через його бокову поверхню дорівнює нулю, то баланс тепла компартмента визначається різницею потоків, які надходять на його верхню і нижню грані. Якщо ця різниця позитивна, то температура компартмента збільшується, у протилежному випадку вона зменшується.

Таким чином, якщо величини потоку тепла за одиницю часу зверху і знизу позначити відповідно через  $f_j$  і  $f_{j+1}$  (рис. 4.5), то

$$\Delta Q_j = c_j h_j [T_j(t_{k+1}) - T_j(t_k)] = (f_{j+1} - f_j) \Delta t. \quad (4.10)$$

Кожен із двох потоків визначається, в свою чергу, різницею температур двох компартментів. Потік  $f_{j+1}$  позитивний, якщо компартмент із номером  $j+1$  має більшу температуру, ніж  $j$ -й і негативний у зворотному випадку. Те ж саме справедливо і для потоку  $f_j$  із заміною  $j$  на  $j-1$ , тобто потік  $f_j$  є позитивним чи негативним в залежності від знака різниці  $T_j$  і  $T_{j-1}$ .

Величину теплопровідності ґрунту варто співвіднести з поверхнею контакту двох сусідніх компартментів, а «довжину» шляху теплообміну вважати рівною півсумі їхньої товщини (тобто відстані між вузлами). Тому

$$f_j = \frac{2F}{h_{j-1} + h_j} \lambda_{j-1,j} [T_j(t_k) - T_{j-1}(t_k)], \quad (4.11)$$

$$f_{j+1} = \frac{2F}{h_j + h_{j+1}} \lambda_{j,j+1} [T_{j+1}(t_k) - T_j(t_k)]. \quad (4.12)$$

Таким чином, теплоперенесення у ґрунті здійснюється як би по ланцюжку від одного компартмента до іншого (рис. 4.6). Одержуючи тепло із приходом сонячної радіації або віддаючи його в атмосферу, нульовий компартмент або нагрівається, або проохолоджується. Перетікання тепла у кожному «каналі» регулюються вентилями і якщо, наприклад, у якийсь момент часу  $T_0 - T_1 > 0$ , тепло передається з нульового компартмента в перший, причому тим більш інтенсивно, чим більше різниця  $T_0 - T_1$ .

Аналогічно здійснюється теплообмін між всіма іншими компартментами, крім останнього, щодо якого нам відомо, що його температура за кожен добу приймає цілком визначене значення. Оскільки перенесення тепла здійснюється з кінцевою швидкістю, то при нагріванні, наприклад, верхнього шару ґрунту нагрівання нижче розташованих шарів відбувається з запізнюванням, яке тим більше, чим глибше розташований відповідний компартмент.

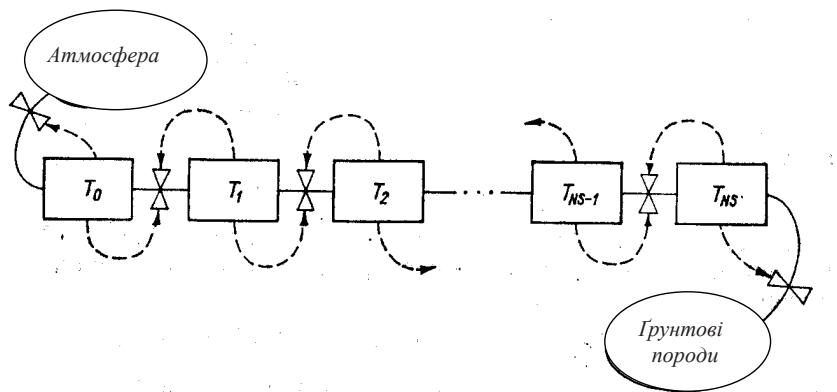


Рис. 4.6. Компартментна схема теплоперенесення у ґрунті

При періодичному нагріванні й охолодженні поверхні ґрунту нижче розташовані шари не встигають «відслідковувати» цю температуру, Тому

амплітуда добових коливань температури, зменшується з глибиною, а самі ці коливання запізнюються по фазі.

Розглянемо найпростіший випадок, коли теплоємність і теплопровідність ґрунту не залежать від глибини залягання шару

$$c_1 = c_2 = \dots = c_{NS} = c; \quad \lambda_{1,2} = \dots = \lambda_{NS-1,NS} = \lambda,$$

а всі шари мають постійну товщину  $h_1 = h_2 = \dots = h_{NS} = h$ .

Тоді, підставляючи формули для потоків (4.11) і (4.12) у рівняння теплового балансу і скорочуючи на загальний множник  $F$  отримаємо

$$T_j(t_{k+1}) - T_j(t_k) = \frac{\lambda \Delta t}{c h^2} [T_{j-1}(t_k) - 2T_j(t_k) + T_{j+1}(t_k)]. \quad (4.13)$$

Це рівняння справедливе для  $j = 1, 2, \dots, NS - 1$ .

Для того щоб отримати повну систему рівнянь, необхідно задати граничні умови, тобто закон, якому підкоряються температура поверхні ґрунту  $T_0(t_k)$  і температура у нижньому вузлі  $T_{NS}(t_k)$ . Нехай,  $T_{NS}(t_k)$  набуває постійного значення, а температура поверхні ґрунту змінюється в часі за заданим законом, наприклад, періодичним

$$T_0(t_k) = B \sin(\omega t_k + \varphi). \quad (4.14)$$

Тоді загальна система рівнянь теплоперенесення набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} T_1(t_{k+1}) &= A_T B \sin(\omega t_k + \varphi) + (1 - 2A_T)T_1(t_k) + A_T T_2(t_k), \\ T_2(t_{k+1}) &= A_T T_1(t_k) + (1 - 2A_T)T_2(t_k) + A_T T_3(t_k), \\ &\dots \dots \dots \\ T_{NS-2}(t_{k+1}) &= A_T T_{NS-3}(t_k) + (1 - 2A_T)T_{NS-2}(t_k) + A_T T_{NS-1}(t_k), \\ T_{NS-1}(t_{k+1}) &= A_T T_{NS-2}(t_k) + (1 - 2A_T)T_{NS-1}(t_k) + A_T T_{NS}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Тут введено позначення безрозмірної величини

$$A_T = \frac{\lambda \Delta t}{c h^2}. \quad (4.16)$$

В результаті отримано систему  $(NS - 1)$ -го рівняння для такої ж кількості змінних, які можуть обчислюватися крок за кроком.

Дійсно, задавши початковий розподіл температури усіх компартментів, тобто  $T_1(t_0), T_2(t_0), \dots, T_{NS-1}(t_0)$  і підставляючи їх у праву частину системи рівнянь (4.15), знаходимо ті ж величини на момент часу  $t_1$ , потім, підставляючи у ці ж рівняння визначені величини, розрахуємо значення температури компартментів на момент  $t_2$  і т.д.

Хоча ця процедура здійснюється надзвичайно просто, слід мати на увазі, що для забезпечення стійкості отриманого рішення варто вибирати крок інтегрування за часом  $\Delta t$  надзвичайно малий.

Отримаємо на закінчення стале розв'язання рівнянь теплоперенесення для того простого випадку, коли температура верхнього і нижнього компартментів постійна. До цього режиму сходиться розв'язання з часом, коли перехідні процеси загасають. Замінімо в (4.15) періодичну функцію на постійну величину  $T_0$  і приймаючи температуру незмінною, тобто  $T_j(t_{k+1})=T_j(t_k)$  для  $j = 1, 2, \dots, NS-1$ , і відкидаючи загальний множник  $A_T$  отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} 2T_1 - T_2 &= T_0, \\ -T_1 + 2T_2 - T_3 &= 0, \\ -T_2 + 2T_3 - T_4 &= 0, \\ \dots & \\ -T_{NS-3} + 2T_{NS-2} + T_{NS-1} &= 0, \\ -T_{NS-2} + 2T_{NS-1} &= T_{NS}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Неважко перевірити, що розв'язання цієї системи рівнянь має такий вигляд

$$T_j = \frac{NS-j}{NS} T_0 + \frac{j}{NS} T_{NS}, \quad (4.18)$$

тобто температура з ростом номера компартмента змінюється за законом арифметичної прогресії, збільшуючись або зменшуючись на постійну величину  $(T_{NS} - T_0)/NS$ .

#### 4.2.3. Добовий і сезонний хід температури

Температура ґрунту має характерну добову і сезонну варіабельність. Протягом кожної доби температура поверхні ґрунту досягає мінімуму приблизно на момент сходу Сонця. При відсутності роси і сухої поверхні ґрунту температура її верхніх шарів починає збільшуватися відразу ж після сходу Сонця і досягає максимуму приблизно о 14-й годині, після чого знову зменшується. При високій вологості ґрунту і при наявності роси підвищення температури у ранкові години сповільнюється, тому що значна частка прихідної сонячної енергії витрачається на випаровування.

Максимальне значення температури поверхні ґрунту, залежить як від її вологості, так і від щільності травостою. Досить густий рослинний покрив (при листовому індексі 4–5) екранує ґрунт від прихідної радіації, а посів витрачає велику частину прихідної радіації на транспірацію. Тим самим ґрунт охороняється від перегріву, що сприятливо позначається на життєдіяльності ґрунтової біоти. Приклад добового ходу температури ґрунту на його поверхні і на глибинах 10 і 20 см наведено на рис. 4.7.

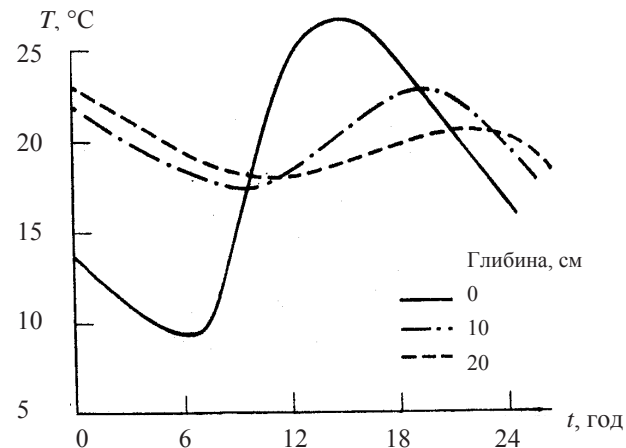


Рис. 4.7. Добовий хід температури ґрунту

Завдяки тому, що коливання температури у добовому ході запізнюються при збільшенні глибини, існують моменти часу, коли максимум профілю температури знаходиться у ґрунті на деякій глибині. Верхні шари ґрунту починають охолоджуватися, в той час як температура більш глибоких шарів продовжує рости. Профілі температури в літній день о 2, 6, 10, 14, 18 і 22-й годині наведені на рис. 4.8.

З даних рис. 4.8 видно, що вже на глибині 40–50 см амплітуда коливань температури не перевищує 2–3 °C. Температура ґрунту на глибині 100–150 см не змінюється протягом доби, але має явно виражений сезонний хід. У середніх широтах Північної півкулі мінімум температури на цій глибині досягається приблизно наприкінці березня, а максимум – у третій декаді серпня кожного року. З точністю до  $\pm 1^\circ\text{C}$  можна прийняти, що на цій глибині температура протягом усього сезону вегетації має стандартний хід, який відповідає середнім багаторічним (кліматичним) даним. Характерні профілі температури для травня – серпня зображені на рис. 4.9.

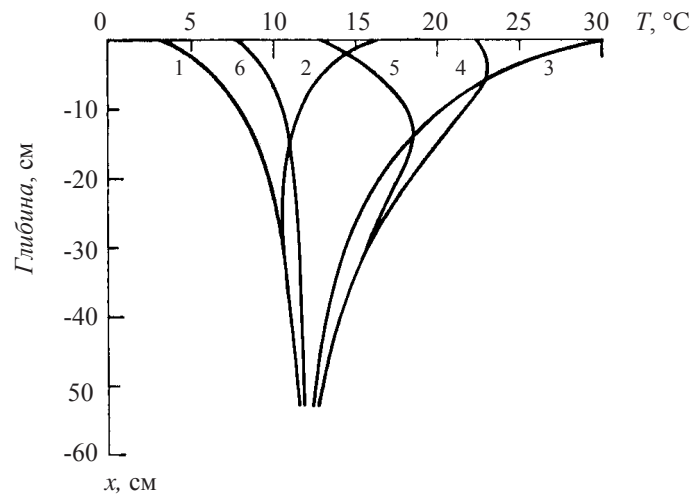


Рис. 4.8. Добовий хід вертикального профілю температури ґрунту:  
1 – 6 год; 2 – 10 год; 3 – 14 год; 4 – 18 год; 5 – 22 год; 6 – 2 год

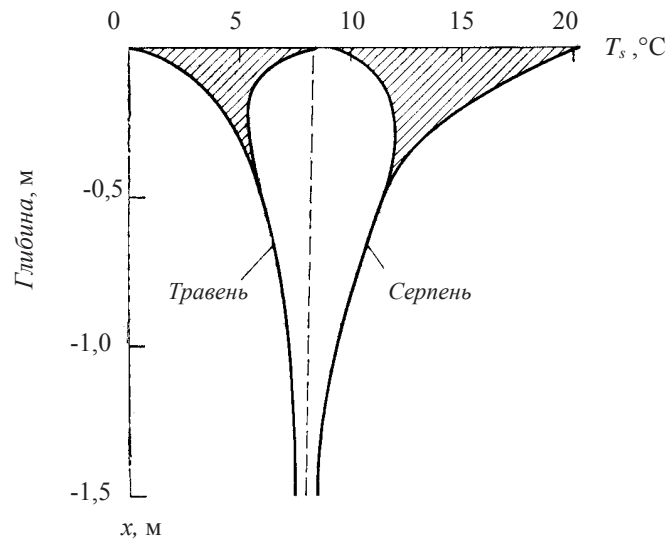


Рис. 4.9. Профілі температури ґрунту за різні періоди вегетації

### 4.3. Вологоперенесення у ґрунті

Водний режим є основним у житті рослин. При описі водного режиму варто виділити два принципово різних процеси – промочування ґрунту і його висушування.

При зволоженні ґрунту після досить інтенсивних опадів або поливу волога переміщується всередину ґрунту під дією суми двох сил – маси і сисної сили більш сухих нижніх шарів. Якщо верхній шар ґрунту промочується при цьому до максимального насичення, рух води здійснюється у рідкій фазі і відбувається в основному по великих порах, тріщинах та інших локальних каналах. Якщо розглядати вегетаційний сезон в цілому, то періоди зволоження займають не дуже великий відсоток сумарного часу, особливо в аридних і напіваридних регіонах, де вода є основним фактором, який лімітує урожай.

Значно більш істотне значення у житті рослин має режим висушування. В цьому режимі розчинені у воді мінеральні речовини підтягуються до коренів рослин, а самі рослини, поглинаючи воду з ґрунту і, випаровуючи її в атмосферу, підтримують свої життєво важливі функції в межах, які забезпечують їхнє нормальне функціонування. У тих випадках, коли ґрунт повністю насичений водою, на нього не діють ніякі інші сили, крім маси, і волога вільно перетікає в нижче розташовані шари аж до водоупора або ґрунтових вод. Однак, якщо виключити з розгляду болота і заливні луки, така ситуація створюється лише на короткочасні періоди. Звичайно лише частина порового простору зайнята водою, а інша – ґрунтовым повітрям. Саме рух вологи, у ненасиченій зоні ґрунтового профілю представляє головну задачу моделювання.

При зменшенні вологості пересування вологи починає здійснюватися по капілярах різного діаметра і «зазорах» між ґрунтовими агрегатами. Оскільки в більш сухих шарах зайняті водою капіляри в середньому мають менший діаметр, вода починає підсосуватись в ці шари за рахунок різниці капілярних тисків. Ця сисна сила ґрунту починає превалювати над силою маси і стає основною при зменшенні вологості нижче найменшої вологомісткості (НВ). При подальшому висушуванні ґрунту перенесення вологи здійснюється, як у рідкій фазі у вигляді дифузії молекул у шарі води, адсорбованому на ґрунтових частках, так і у вигляді водяної пари, яка дифундує у вільному поровому просторі. При цьому на сумарну швидкість вологоперенесення починає впливати не тільки градієнт вологості, але і градієнт температури. Вертикальні градієнти температурного поля ґрунту, покритого рослинністю, не настільки значні, щоб цей ефект міг відігравати істотну роль у сумарному вологообміні посіву. Головними діючими силами, відповідальними за переміщення води

у ґрунті є, таким чином, сила маси, завжди спрямована вниз і гідравлічний потенціал, дія якого спрямована від більш вологих шарів ґрунту до більш сухих. Наявність коренів у ґрунті варто розглядати як розподілену по глибині функцію стоку або джерела.

#### 4.3.1. Гідрофізичні характеристики ґрунту

Водний потенціал або «тиск» ґрунтової вологи прийнято подібно осмотичному тиску вважати величиною негативною і вимірювати в тих же одиницях, що і тиск, тобто в гектопаскалях, атмосферах або сантиметрах водного стовпа (як відомо, 1 атм = 1000 см водного стовпа). Величину зворотну водному (гідравлічному) потенціалу вважають «сисною силою» ґрунту.

Подібно напруженню в електротехніці або градієнту температури в теплофізиці градієнт водного потенціалу є рушійною силою міграції вологи в ґрунті. Якщо сила струму дорівнює різниці потенціалів електричного поля, помноженої на провідність, швидкість руху рідини у пористому середовищі, відповідно до закону Дарсі, дорівнює градієнту потенціалу, помноженому на вологопровідність цього середовища. Точно так само швидкість перенесення тепла визначається добутком градієнта температури на коефіцієнт теплопровідності.

Отже, швидкість руху вологи у ґрунті  $v$  відповідно до закону Дарсі визначається за виразом

$$v = -k \frac{\Delta H}{\Delta x}, \quad (4.19)$$

де  $k$  – коефіцієнт вологопровідності;

$\Delta x = x_2 - x_1$  – різниця близько розташованих рівнів ґрунтового профілю;

$\Delta H = H(x_2) - H(x_1)$  – різниця напорів води на цих рівнях.

Знак мінус свідчить про те, що швидкість вологоперенесення спрямована в сторону, протилежну зростанню напору. Сам напір  $H$  містить два доданки.

Перший з них відповідає вазі стовпця рідини над деяким рівнем. Оскільки вага, віднесена до одиниці площі, тобто тиск стовпа води можна виразити в грамах на квадратний сантиметр або в сантиметрах водного стовпа, цей доданок може бути виражений в тих же одиницях, що і тиск ґрунтової вологи, тобто другий доданок напору

$$H = z - p. \quad (4.20)$$

Тут враховано, що  $p < 0$ . Підставляючи (4.20) у (4.19), отримаємо співвідношення для швидкості руху води в ненасиченій зоні, виражене через градієнт водного потенціалу

$$v = k \left( \frac{\Delta p}{\Delta x} - 1 \right), \quad (4.21)$$

оскільки завжди  $\Delta z = \Delta x$ .

Відзначимо, що сам коефіцієнт вологопровідності залежить від водного потенціалу, тобто у виразі (4.21)  $k = k(p)$ . Саме ця залежність робить співвідношення (4.21) нелінійним, що принципово відрізняє його від законів тепло- і електропровідності. Очевидно також, оскільки, величина  $\Delta p / \Delta x$  є безрозмірною, то коефіцієнт вологопровідності має ту ж розмірність, що і швидкість, тобто см/с, см/год, см/д. Чисельно він дорівнює швидкості промочування ґрунту, коли градієнт напору дорівнює одиниці.

Рух ґрунтової вологи в ненасиченій зоні визначається двома основними залежностями. Перша з них – це зв'язок коефіцієнта вологопровідності з водним потенціалом, тобто функції  $k(p)$ . Друга, мабуть, навіть більш важлива, це так названа *крива водоутримання* або «*основна гідрофізична характеристика*» (ОГХ) ґрунту. ОГХ визначається як залежність об'ємної вологості ґрунтів від водного потенціалу. Чим сухіше ґрунт, тим більше його «сисна сила», яка дорівнює водному потенціалу, взятому зі зворотним знаком.

Отже, водний потенціал має збільшуватися за абсолютною величиною при зменшенні вологості і перетворюватися на нуль при повній вологомісткості. На рис. 4.10, як приклад, наводиться загальний вигляд кривої водоутримання. Відзначимо її характерні риси.

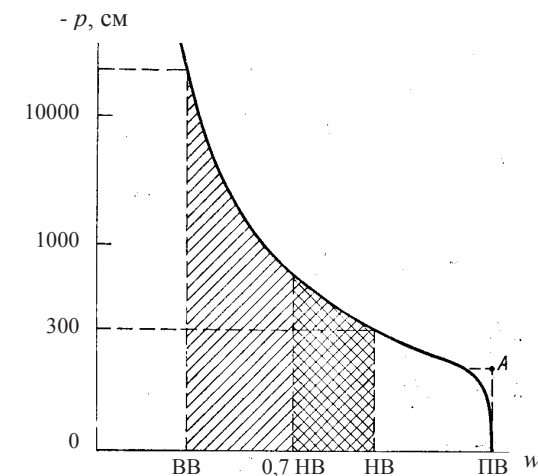


Рис. 4.10. Крива водоутримувальної властивості ґрунту



При незначному зменшенні вологості ґрунту від повної вологомісткості тиск ґрунтової води зростає на деяку величину практично миттєво. Цю ділянку кривої досить складно описати при моделюванні, у багатьох моделях вона заміняється вертикальною лінією, що продовжується до перетинання з плавним продовженням верхньої кривої у точці *A*. Можливість такої апроксимації пов'язана з тим, що режими, близькі до повного зволоження ґрунту, зустрічаються досить рідко. Деякі помилки, які тут з'являються, істотно не впливають на загальний розрахунок.

Подальше зниження вмісту води призводить до підвищення абсолютної величини потенціалу, який описується опукло-ввігнутою кривою з точкою перегибу. Практичне значення мають точки, зв'язані з тиском, приблизно рівним  $-330$  см і  $-15000$  см. Перша з них відповідає найменшій вологомісткості ґрунту (НВ). Це той вміст води у ґрунті, який залишається після стікання зайвої води під дією гравітаційних сил.

Вологість, яка приблизно дорівнює  $-15000$  см (точне значення залежить від виду рослин), називається вологістю в'янення (ВВ). При вологості, менше вологості в'янення, рослини не здатні поглинати вологу з ґрунту, оскільки при цьому сила ґрунту виявляється вище, ніж та максимальна сила, яку може розвивати коренева система. Ця волога є недоступною для рослин.

При вологості, рівній найменшій воломісткості (НВ) і нижче, у ґрунті є достатня кількість не тільки води в її рідкій фазі, але й повітря. При цьому створюються сприятливі умови для життєдіяльності кореневої системи. Тому діапазон вологості ґрунту приблизно від  $0,7$  НВ до НВ є для рослин оптимальним. При зменшенні вологості нижче  $0,7$  НВ або вище НВ створюються стресові умови по зволоженню ґрунту або по постачанню кореням кисню.

Таким чином, доступна для рослин волога знаходиться в межах вище ВВ, а сприятлива для росту і розвитку рослин – у діапазоні від  $0,7$  НВ до НВ. Зрозуміло, усі ці границі орієнтовні і залежать як від вирощуваної культури, так і від інших факторів навколишнього середовища, зокрема, від температури і вологості повітря.

Перейдемо до розгляду іншої гідрофізичної характеристики ґрунту – коефіцієнта її вологопровідності. Залежність  $k(p)$  при повному насиченні має назву *коефіцієнта фільтрації*  $k_f$ . Зі збільшенням абсолютної величини водного потенціалу, тобто зі зменшенням вологості ґрунту,  $k(p)$  зменшується (рис. 4.11). При цьому значення коефіцієнта фільтрації глинистих ґрунтів виявляється значно менше, ніж відповідне значення для піску або ґрунтів легкого складу.

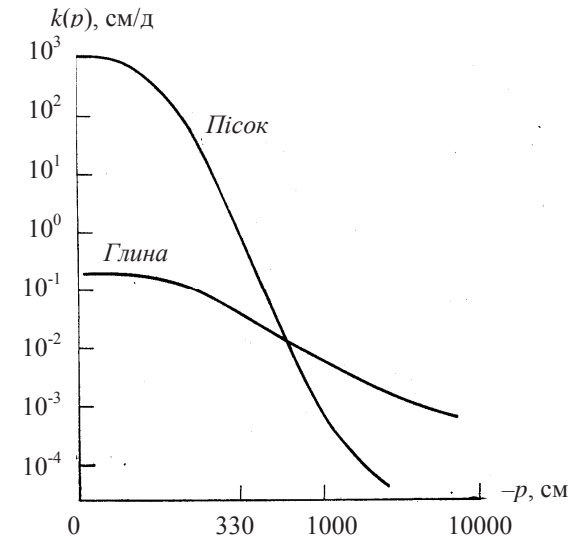


Рис. 4.11. Залежність коефіцієнта вологопровідності від водного потенціалу ґрунту

У той же час при зниженні вологості (росту сили ґрунту) вологопровідність легких ґрунтів зменшується більш різко і при вологості меншій НВ, значення  $k(p)$  для піску виявляється нижче, ніж для суглинку.

В зв'язку з цією властивістю вологопровідності посіви на легких ґрунтах виявляються надзвичайно чутливими до посушливих періодів: різке зростання коефіцієнта вологопровідності за умов, близьких до насичення, приводить до швидкого проникнення води, яка випадає у вигляді опадів, у нижні ґрунтові горизонти і зникнення її з шару, в якому розміщується коренева система.

Взагалі, вигляд розглянутих кривих визначається багатьма властивостями ґрунту – їхнім мінералогічним складом, щільністю, вмістом ґрунтової органіки і, зрештою, залежить від всієї історії ґрунтоутворюючого процесу в даному місці. Характерні риси залежностей  $p(w)$  і  $k(p)$  пов'язують з легко вимірюваними ґрунтовими параметрами. Найбільш поширені з них наведені у табл. 4.3 та 4.4.

Таблиця 4.3. Деякі напівемпіричні моделі ОГХ

Вид моделі	Автор
$w = -\frac{1}{B} \ln \frac{p}{A}$	W.C. Visser
$W = Ap^{-B}$	R.R. Curry, L.H. Chen
$w = \frac{w_s}{[1 + (p/A)^B]}$	Я.В. Пачепський
$\frac{w - w_r}{w_s - w_r} = \exp\left(-A \ln^2 \frac{p}{B}\right)$	В.В. Терлесв
$\frac{w_s - w}{w_s - w_r} = \frac{1}{B} \ln \frac{p}{A}$	D.A. Farrel, W.E. Larsen
$w = w_s$ при $p \geq p_B$	R.R. Brooks,
$\frac{w - w_r}{w_s - w_r} = \left(\frac{p_B}{p}\right)^A$ при $p < p_B$	A.T. Correy
$\frac{w - w_r}{w_s + w_r} = \frac{A}{A + ( p )^B}$	R. Havercamp
$p = A \exp\left(B \frac{w - BB}{HB - BB}\right)$	К.К. Павлова, I.Л. Калюжний

де  $w_s$  – вологість насичення;  $w_r$  – максимальна гігроскопічність;  $HB$  – найменша вологомісткість;  $BB$  – вологість в'янення.

Таблиця 4.4 – Моделі функції вологопровідності

Вид моделі	Автор
$k = A \left(\frac{p}{p_s}\right)^B$	Б.Н. Мічурін
$k = A[B + (-p)^n]$	W.R. Gardner
$k = k_f \left(\frac{w - w_r}{w_s - w_r}\right)^{1/2} \left(\frac{\int_0^w \frac{dw}{p(w)}}{\int_0^{w_s} \frac{dw}{p(w)}}\right)^2$	Y. Mualem

$k = k_f \left(\frac{w}{w_s}\right)^B \left(\frac{\int_0^w \frac{dw}{p^2(w)}}{\int_0^{w_s} \frac{dw}{p^2(w)}}\right)$	R.E. Green, A.T. Correy
---	-------------------------

де  $p_s$  – потенціал барботування.

### 4.3.2. Компартментна модель вологопровідності

Компартментна модель, яка описує динаміку водного режиму ґрунту, багато в чому аналогічна моделі теплоперенесення. Маються, однак, і принципи розходження. Перше з них пов'язано з тим, що вхідні в модель коефіцієнти самі залежать від моделюємої величини – вологості ґрунту або водного потенціалу. Тим самим моделі стають нелінійними, що різко ускладнює як аналіз, так і чисельне рішення рівнянь переносу. Друга відмінність пов'язана з тим, що в кожному компартменті з'являється функція внутрішнього стоку – поглинання води коренями. Тим самим задача кількісного опису динаміки вологообміну стає більш складною. З'являється необхідність зв'язати її з процесами, які відбуваються в інших блоках моделі не тільки через граничну умову (умова на границі ґрунт – повітря), але і через функцію розподілених по ґрунтовому профілю стоків, їхній сумарний транспорт по рослині і транспірацію.

Компартментна модель вологоперенесення у системі ґрунт – рослина – атмосфера зображена на рис. 3.4. Розглянемо рівняння водного балансу в деякому ґрунтовому шарі. За аналогією з (4.10) зміну вологовмісту в  $j$ -му компартменті за малий проміжок часу  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  можна записати у вигляді

$$\Delta W_j = W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k) = [(v_{j+1} - v_j) - h_j f_j] F \Delta t, \quad (4.22)$$

де  $F$  і  $h_j$  – відповідно площа і товщина компартмента;

$v_j$  і  $v_{j+1}$  – швидкість руху води через верхню і нижню границі;

$f_j$  – швидкість поглинання води коренями, яка віднесена до одиниці об'єму ґрунту.

Співвідношення (4.22) не що інше, як рівняння балансу (або нерозривності): кількість рідини, яка надходить в компартмент дорівнює  $v_{j+1} F \Delta t$ , а яка витікає дорівнює сумі потоку через нижню межу  $v_j \Delta t$  і кореневого поглинання  $f_j h_j F \Delta t$ .

Рівняння для швидкості руху води записано вище (4.21). Використовуючи аналогію температури з водним потенціалом і вологопровідності з теплопровідністю, відповідно до (4.11) і (4.12) запишемо:

$$v_j = k(p_{j-1}, j) \left( \frac{2}{h_{j-1} + h_j} [p_j(t_k) - p_{j-1}(t_k)] - 1 \right) \quad (4.23)$$

і

$$v_{j+1} = k(p_{j, j+1}) \left( \frac{2}{h_j + h_{j+1}} [p_{j+1}(t_k) - p_j(t_k)] - 1 \right). \quad (4.24)$$

Так само отримаємо зв'язок приросту вологовмісту компартмента за один часовий крок моделі з водним потенціалом даного компартмента  $p_j(t_k)$  і двох сусідніх  $p_{j-1}(t_k)$  і  $p_{j+1}(t_k)$  на початку цього кроку.

Для проведення розрахунків динаміки руху вологи необхідно, таким чином, використовувати залежність потенціалу від вологості. Ця залежність саме і визначається ОГХ. Використання ОГХ дозволяє виключити одну з двох цих величин і записати рівняння або для динаміки вологовмісту, або для динаміки водного потенціалу. Звичайно перевагу має другий шлях, для чого приводяться два аргументи. Перший з них зводиться до того, що поглинання вологи коренями визначається різницею водних потенціалів ґрунту і рослини і для замикання моделі все рівно необхідно розраховувати потенціали. Другий, заснований на аналогії: рівняння теплоперенесення записані для аналога потенціалу – температури, а не для аналога вологості – кількості потенціалу в компартменті.

Якщо продовжити цю аналогію, то цілком природним буде введення «диференціальної вологомісткості» ґрунту як коефіцієнта  $\mu$ , який пов'язує збільшення вологості зі збільшенням потенціалу

$$\Delta w = \mu \Delta p. \quad (4.25)$$

Вона показує, наскільки змінюється вологість ґрунту при зміні її водного потенціалу на одиницю. На відміну від теплоємності диференціальна вологомісткість ґрунту непостійна. Вона залежить від потенціалу, оскільки це не що інше, як похідна водоутримувальної здатності ґрунтів, побудованої в координатах:  $p$  – вісь абсцис,  $w$  – вісь ординат. Таким чином,  $\mu = \mu(p)$ . Принциповий хід цієї залежності наведений на рис. 4.12. Як функція потенціалу вона збільшується всюди, крім малої ділянки поблизу нуля (або поблизу вологості насичення).

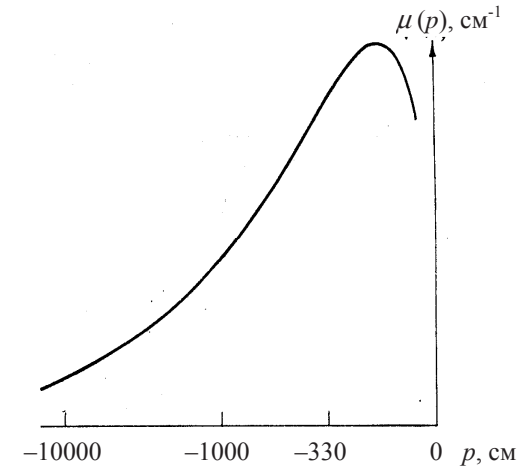


Рис. 4.12. Диференціальна вологомісткість ґрунту

Використовуючи введене тут поняття диференціальної вологомісткості і, приймаючи до уваги, що вологозапас компартмента  $W_j$  дорівнює його об'єму  $h_j F$ , помноженому на вологість  $w_j$ , запишемо рівняння балансу замість (4.22) у наступному вигляді

$$\mu(p_j) [p_j(t_{k+1}) - p_j(t_k)] = \left( \frac{v_{j+1} - v_j}{h_j} - f_j \right) \Delta t. \quad (4.26)$$

Це співвідношення створює разом з (4.23) і (4.25) замкнуту систему рівнянь для розрахунку водного потенціалу ґрунту «крок за кроком». Розглянемо міркування з приводу задання граничних умов і функцій стоку.

На межі ґрунт – повітря має бути заданий потік вологи – негативний у випадку випадання опадів і позитивний – при випаровуванні. При цьому інтенсивні дощі призводять до того, що волога не встигає всмоктуватися верхнім шаром ґрунту і просочується вглиб ґрунтового профілю. При наявності схилу це призводить до стікання частини води, а на горизонтальних ділянках і нерівностях поля утворюються калюжі. У моделі шар вільної вологи на поверхні ґрунту рівномірно «розповсюджується» по всьому полю і характеризується наведеною висотою стовпа води, що досягає декількох міліметрів. Ця величина додається до водного потенціалу, який при наявності насиченого вологого верхнього шару стає позитивним.

Після припинення опадів вільна волога частково випаровується, а частково всмоктується ґрунтом. При цьому «працює» саме криволінійна ділянка ОГХ, близька до вертикалі. Ця обставина ускладнює процес розрахунку і призводить до того, що в досить детальних моделях режим всмоктування повинен описуватися за допомогою спеціальних алгоритмів. У прикладних моделях, де не потрібна висока точність, ці труднощі спростовуються за рахунок використання дещо спрощеного перерозподілу надлишкової вологи по ґрунтових компартментах. Цей процес починається з верхнього компартмента, який заповнюється до ПВ або НВ, якщо залишилися волога то додається у другий компартмент і т.д. – доти, поки запас надлишкової вологи не буде вичерпаний. Якщо при цьому виявляється, що весь ґрунтовий профіль насичений водою, вважається, що надлишкова кількість вологи вноситься за межі розрахункового шару.

Розглянемо тепер особливості врахування кореневого поглинання. Врахування впливу коренів у моделі проводиться шляхом задання об'ємної щільності їхньої поглинаючої поверхні. Виділимо на деякій глибині одиничний об'єм ґрунту. Якщо після відмивання всіх живих коренів у цьому об'ємі виміряти площу їхньої поверхні і розділити на об'єм, то саме й отримаємо цю величину, яку будемо позначати через  $\omega$ . Величина  $\omega$  залежить від глибини  $x$  і змінюється з часом у зв'язку з ростом рослин і розвитком кореневої системи, тобто

$$\omega = \omega(x, t) \quad (4.27)$$

Вона вимірюється в  $\text{см}^2/\text{см}^3$ , тобто в  $\text{см}^{-1}$ . Очевидно, що поза зоною проникнення коренів  $\omega(x, t) = 0$ . Будемо вважати, що об'ємна щільність коренів постійна всередині кожного компартмента.

Тоді для функції стоку води у корінь у  $j$ -му компартменті, вираженій в  $\text{см}^3/\text{год}$  або в  $\text{см}^3/\text{д}$ , можна записати

$$f_j = \omega_j \xi (p_j - P_r) \quad (4.28)$$

де  $P_r$  – водний потенціал кореня, а  $\xi$  – його провідність.

При цьому стінки провідних судин кореня від епідерміса до ксилеми мають найбільший опір. По провідних судинах ксилеми вода рухається майже без опору, в зв'язку з чим водний потенціал усієї кореневої системи можна вважати постійним, поза залежністю від глибини шару або від номера компартмента. Таким чином, для розрахунку динаміки ґрунтової вологи необхідно знати додатково значення об'ємної площі кореня в компартментах  $\omega$ , провідність кореня  $\xi$  і його водний потенціал  $P_r$ .

Помножимо вираз (4.28) на товщину компартмента  $h_j$  і візьмемо суму

всіх цих рівностей, починаючи з одиниці  $i$ , кінчаючи  $NR$  – номером компартмента, у якому ще містяться корені:

$$\sum_{i=1}^{NR} h_i f_j = \xi \sum_{i=1}^{NR} h_i \omega_i (p_i - P_r) = \xi \sum_{i=1}^{NR} h_i \omega_i p_i - \xi P_r \sum_{i=1}^{NR} h_i \omega_i. \quad (4.29)$$

У виразі (4.29) остання сума безрозмірна і представляє собою площу коренів, віднесена до одиниці площі поля. За аналогією з листковим індексом її можна назвати «корневим індексом» і позначити через  $\Omega$ :

$$\Omega = \sum_{i=1}^{NR} h_i \omega_i. \quad (4.30)$$

Ліва частина виразу (4.29) є не що інше, як сумарне поглинання води коренями. Тому, якщо знехтувати акумуляцією води тканинами рослин, можна прив'язати його до транспірації

$$E = \xi \sum_{i=1}^{NR} h_i \omega_i p_i - \xi P_r \Omega. \quad (4.31)$$

Звідси можна виразити потенціал кореня  $P_r$  через транспірацію

$$P_r = \frac{\sum_{i=1}^{NR} h_i \omega_i p_i - E / \xi}{\Omega} \quad (4.32)$$

і для поглинання води коренями у  $j$ -му компартменті (4.28) записати

$$f_j = \frac{\omega_j}{\Omega} E - \frac{\xi \omega_j}{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{NR} h_i \omega_i p_i - \Omega p_j \right). \quad (4.33)$$

Приймається, що водний потенціал безпосередньо поблизу кореня дорівнює його середньому значенню на даній глибині ґрунтового профілю.

Розглянемо два окремих випадки, у яких рівняння для опису процесу поглинання води коренями спрощується.

1. При високій вологості ґрунту  $p_i \approx 0$  або в більш загальному випадку  $p_i$  постійне по всьому ґрунтовому профілю. У такому випадку замість (4.33) отримаємо

$$f_j = \frac{\omega_j}{\Omega} E . \quad (4.34)$$

2. В іншому випадку, коли корені розподілені по всьому ґрунтовому профілю рівномірно (що має місце, наприклад, у вегетаційних судинах),  $\omega_i$  не залежить від номера  $i$ ,  $\Omega = \omega h_r$  і  $\Omega = \omega h_r$ ,

$$f_j = E / h_r, \quad (4.35)$$

де  $h_r$  – глибина проникнення коренів.

Очевидно, що перший доданок у (4.33) є, таким чином, визначальним. Роль другого зводиться до врахування нерівномірності розподілу коренів або нерівномірного розподілу водного потенціалу по всій глибині ґрунту.

Завершуючи розгляд компартментаної моделі вологообміну, випишемо основні рівняння для того випадку, коли всі компартменти мають однакові висоти,  $h_j = h$ .

Рівняння балансу ґрунтової вологи у  $j$ -му компартменті має вигляд

$$\mu(p_j)[p_j(t_{k+1}) - p_j(t_k)] = \left( \frac{v_j - v_{j+1}}{h} - 1 \right) \Delta t . \quad (4.36)$$

Для швидкостей руху води із сусідніх компартментів одержимо:

$$v_j = k(p_{j-1,j}) \left[ \frac{p_{j-1}(t_k) - p_j(t_k)}{h} - 1 \right];$$

$$v_{j+1} = k(p_{j,j+1}) \left[ \frac{p_j(t_k) - p_{j+1}(t_k)}{h} - 1 \right]. \quad (4.37)$$

Нарешті, функція стоку у корінь визначається виразом (4.33).

Ці співвідношення справедливі для всіх компартментів, крім нульового й останнього. Тому до них необхідно додати граничні умови. Якщо, наприклад, нижня межа відповідає рівню залягання ґрунтових вод, то нижня гранична умова має вигляд

$$p_{NS} = 0, \quad (4.38)$$

На верхній межі при розрахунку режиму висушування додається умова заданого потоку – так названого *фізичного випаровування*. При

цьому, рівняння балансу вологи у нульовому компартменті записується у вигляді

$$\mu(p_0)[p_0(t_{k+1}) - p_0(t_k)] = E_s \Delta t - \left( \frac{v_1}{h} + f_0 \right) \Delta t, \quad (4.39)$$

де фізичне випаровування  $E_s$  повинне задаватися або обчислюватися з залученням додаткових міркувань. Використовуючи наведені вище рівняння при заданні початкового розподілу вологи  $w_j$  (або потенціалу) по компартментах, параметрів рослини  $\xi$ ,  $\omega_j$  і  $\Omega$ , випаровування  $E_s$  і транспірації  $E_r$  можна розраховувати зміни профілю водного потенціалу і, отже, вологості ґрунту крок за кроком, подібно тому, як це робиться при розрахунку теплоперенесення.

### 4.3.3. Зміна вологості ґрунту за період вегетації

На земну поверхню випадає протягом року в середньому 710 мм опадів, а сумарне випаровування складає 240 мм, проте, розподіл опадів, як по територіях областей, так і в кожному місці протягом року нерівномірний і ґрунтова волога в багатьох випадках є фактором, який лімітує урожай. Більш того, багато регіонів нашої країни періодично страждають від посухи, так що прогноз водного режиму ґрунтів і раціональне використання водних ресурсів є в землеробстві одним з найважливіших. При моделюванні водного режиму варто звернути увагу на два моменти – це по-перше, динаміка продуктивної вологи, найчастіше, у метровому шарі ґрунту і, по-друге, розподіл вологозапасів по ґрунтовому профілі.

Вологість ґрунту не має чітко вираженого добового ходу. Добовим коливанням піддається транспірація, тобто швидкість вилучення води з ґрунту при режиму висушування. Однак ці коливання мало відбиваються на загальному балансі. Вологозапаси у ґрунті досить швидко збільшуються при випаданні опадів і при поливах, а в проміжках між опадами й у міжполивні періоди повільно зменшуються. Це зменшення частково відбувається за рахунок гравітаційного стікання води, але в більшості за рахунок транспірації і поверхневого випаровування.

Тому типовий сезонний хід вологозапасів має чітко виражений пилкоподібний характер. При цьому в залежності від балансу опадів і транспірації вологість ґрунту в середньому за досить тривалі періоди (декада, місяць) або збільшується, або зменшується. Типовою є ситуація, коли рослини у перший період свого життя забезпечуються водою за рахунок весняних запасів вологи, які утворилися в результаті випадання осінніх дощів і танення снігу.

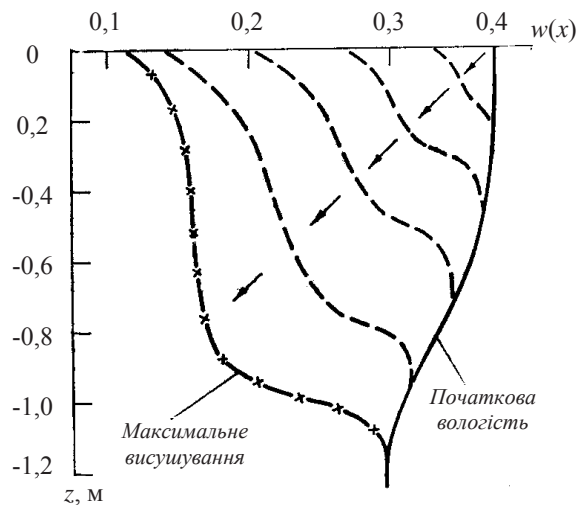


Рис. 4.13. Висушування ґрунту за період вегетації (схема)

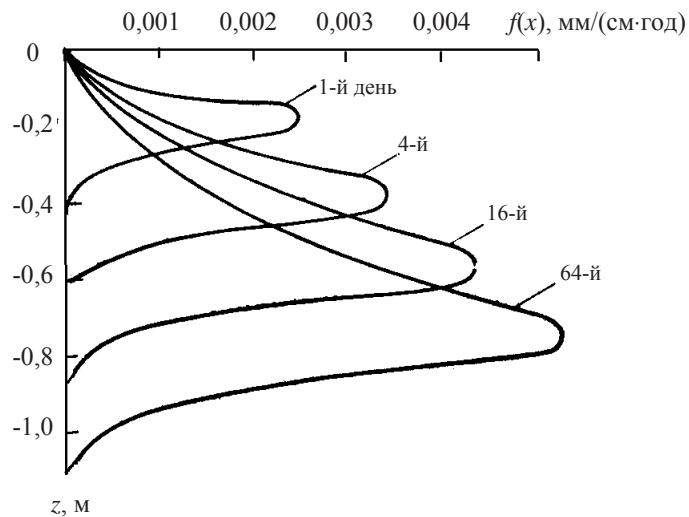


Рис. 4.14. Зміна профілю поглинання води кореневою системою (схема)

Надалі доля посіву залежить від поповнення води, оскільки інтенсивна транспірація, починаючи з моменту виходу в трубку, призводить до швидкого витрачання запасної води. У цьому процесі істотну роль відіграє вертикальний розподіл ґрунтової води. Оскільки, висушування починається з верхніх шарів ґрунту, то доля урожаю багато в чому залежить від того, наскільки швидко корені рослин проникають у більш глибокі ґрунтові шари, де вони можуть знайти достатню кількість води. При цьому особливу роль починають грати адаптивні властивості рослин, які призводять до прискореного росту коренів у глиб ґрунту при водному дефіциті.

Для ілюстрації цього феномена на рис. 4.13 показана зміна профілю ґрунтової води за період вегетації, а на рис. 4.14 представлена схематична картина зміни поглинання води коренями протягом вегетації.

Якщо ці два процеси – ріст коренів і висушування ґрунту – узгоджені, то рослини можуть і не зазнавати глибокого водного стресу, незважаючи на зменшення сумарних вологозапасів у метровому шарі ґрунту. Правда, при цьому виникає питання про «неузгодженість» профілів доступної води і доступних форм елементів живлення. Але це вже більш складне питання, до розгляду якого ми ще повернемося.

## 5. МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛО- І ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННЯ У ПОСІВІ

### 5.1. Загальні принципи моделювання

Одним із фундаментальних процесів у життєдіяльності рослин є вологоперенесення у посіві. Вода, яка проникає у кореневу систему і переміщується по ксилемі у листки, повинна, зрештою, випаровуватися й вивітрюватися в атмосферу. Інакше припиняється рух води у ґрунті і перериваються ланцюги мінерального живлення рослин. З іншого боку, вуглекислий газ, поглинений листком і, який перетворився в первинний продукт фотосинтезу, повинен постійно притікати з атмосфери, інакше його запаси швидко виснажаться.

Молекулярна дифузія CO<sub>2</sub> або водяної пари в примежових шарах, що прилягають до поверхні листка або ґрунту є надзвичайно повільним процесом, який, діючи «поодиночі», не здатний ефективно регулювати обмінні процеси. Існуюча у посівах швидкість обміну забезпечується в основному за рахунок турбулентного перемішування повітря в міжлистяному просторі і над посівом. Про інтенсивність цього процесу говорить такий факт. Добова сума нетто-асиміляції CO<sub>2</sub> у процесі фотосинтезу, яка дорівнює приблизно 300 кг/га, відповідає вмісту цього газу у шарі повітря, товщиною 55 м.

Турбулентне перемішування шарів повітря обумовлюється, в першу чергу, вертикальними градієнтами швидкості вітру і, крім того, перешкодами, які при переміщенні зустрічають маси повітря на своєму шляху – листки, стебла, нерівності ґрунту.

Турбулентний обмін має місце, як над посівом, так і всередині нього. Обмінні процеси над посівом, мають більш просту структуру, оскільки потоки кількості руху, тепла і маси (водяної пари і вуглекислого газу) тут постійні по висоті. Всередині посіву, однак, існують розподілені по висоті джерела і стоки цих субстанцій, що ускладнює їхній кількісний опис. У цьому розділі спочатку розглядається аеродинамічний режим посіву, завдяки якому і створюється механізм, який забезпечує перенесення пасивних домішок. Потім будуть описані власне процеси тепло- і вологообміну.

Загальна модель аеродинамічного режиму розроблена Г.В. Менжуліним. Нижче вона розглядається у спрощеному вигляді.

На відміну від ламінарного, тобто безвихрового руху рідини або газу, переміщування повітряних мас над посівом завжди супроводжується утворенням завихрень, у яких кінетична енергія вітру, передаючись від більш протяжних до усе менш і менш протяжних вихрів, дисипується зрештою в енергію безладного (теплого) руху молекул. Однак, цей процес перемішування виконує і дуже корисні функції – за рахунок неупорядкованих рухів повітря CO<sub>2</sub>, водяна пара та інші домішки при наявності градієнта їхні концентрації переносяться в напрямку, зворотному градієнту. Ефективність цього процесу при однаковому градієнті на декілька порядків більше, ніж молекулярна дифузія у нерухомому повітрі.

Повітря при його природному розширенні зі збільшенням висоти проохолоджується на 0,01 К/м. Якщо градієнт температури повітря по висоті в дорівнює цій величині, така ситуація свідчить про нейтральну стратифікацію атмосфери, оскільки при вертикальному переміщенні вихору температурні умови самого вихору і навколишнього його простору збігаються. Якщо градієнт температури виявляється менше 0,01 К/м, то вихор, який переміщується угору, виявляється холоднішим ніж навколишнє повітря і руйнується. Ці умови відповідають стійкій стратифікації атмосфери. Навпроти, при більш різкій зміні температури з висотою стратифікація стає нестійкою, вона сприяє зародженню вихрів при вільній конвекції повітря. Виявляється, що обмін теплом, вологою і кількістю руху між атмосферою і рослинним покривом при конвекції, тобто при нестійкій стратифікації приземного шару повітря в десятки (іноді навіть у сотні) разів інтенсивніше, ніж при стійкій стратифікації.

Для опису тепло- і масоперенесення у посіві необхідно знати закономірність зміни з висотою швидкості вітру і коефіцієнта турбулентного обміну. Швидкість вітру впливає на тепло- і вологообмін між листками і навколишнім повітрям. Провідність прилягаючого до листа тонкого шару повітря (примежового шару) залежить від швидкості обдування листка. Оскільки швидкість вітру у посіві загасає в міру наближення до поверхні ґрунту, інтенсивність процесів обміну «листок – повітря» також знижується, тому в найбільш сприятливих умовах знаходяться верхні яруси посіву, які і вносять основний вклад у газообмін і транспірацію. Провідність прилистяного шару повітря  $D_T$  для тепла і водяної пари пропорційна квадратному кореню швидкості вітру  $u$ , поділеній на характерний розмір листка  $L_0$ , тобто

$$D_T = \frac{1}{c_u} \sqrt{\frac{u}{L_0}}, \quad (5.1)$$

де  $c_u$  – деяка константа. Для вуглекислого газу ця величина повинна бути зменшена приблизно на 30 %.

Коефіцієнт турбулентного обміну – величина, аналогічна кінетичним коефіцієнтам розглянутим раніше, тобто тепло- і вологопровідності ґрунтів. З використанням цієї величини вертикальні потоки кількості руху водяної пари і тепла обчислюються як:

$$\frac{1}{\rho_a} \Pi_u = -k_u \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{\rho_a} \Pi_q = -k_q \frac{\Delta q_a}{\Delta x}, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{\rho_a c_p} \Pi_T = -k_T \frac{\Delta T_a}{\Delta x}, \quad (5.4)$$

де  $\rho_a$  – щільність повітря;

$c_p$  – теплоємність повітря при постійному тиску;

$\Pi_u, \Pi_q, \Pi_T$  – потоки кількості руху, водяної пари і тепла;

$\Delta u/\Delta x, \Delta q_a/\Delta x, \Delta T_a/\Delta x$  – відповідні градієнти швидкості повітря, його питомої вологості й температури;

$k_u, k_q$  і  $k_T$  – відповідні коефіцієнти турбулентного обміну пов'язані один з одним простими співвідношеннями: знаючи один з них, можна знайти інші.

Так, наприклад, при нейтральній стратифікації з достатньою точністю виконується рівність:

$$k_T = 1,35k_u. \quad (5.5)$$

Введені тут коефіцієнти змінюються з висотою і залежать від швидкості потоку, який набігає, а також густоти травостою. Розглянемо, насамперед, як змінюється швидкість вітру.

При нейтральній стратифікації залежність швидкості вітру від висоти над посівом підкоряється логарифмічному закону:

$$u(x) = \frac{u^*}{\kappa} \ln \left( \frac{x-d}{z_0} \right), \quad (5.6)$$

де  $u^*$  – динамічна швидкість;

$\kappa = 0,4$  – стала Кармана;

$z_0$  – висота шару шорсткості;

$d$  – висота шару витиснення.

Як видно з формули, швидкість вітру перетворюється в нуль на висоті

$$x_0 = d + z_0. \quad (5.7)$$

Однак це не зовсім точно. Справа в тому, що параметри  $d$  і  $z_0$ , які входять у формулу (5.6) є умовні величини, вони характеризують опір посіву прихідному потоку. Їхні числові значення залежать від висоти посіву і листкового індексу.

Звичайно виконується нерівність  $x_0 = d + z_0 < h_L$ , де  $h_L$  – висота посіву.

Параметри  $d$  і  $z_0$  характеризують приблизно ту точку, в якій швидкість вітру перетворилась би в нуль, якщо залежність (5.6) продовжити всередину посіву. Насправді всередині посіву швидкість вітру підкоряється скоріше експоненціальному, чим логарифмічному закону. Відповідний вираз для залежності  $u(x)$  всередині травостою має вигляд

$$u(x) = u(h_L) \exp \left[ -\beta \left( 1 - \frac{x}{h_L} \right) \right], \quad (5.8)$$

де  $u(h_L)$  – швидкість вітру на верхній межі посіву, тобто

$$u(h_L) = \frac{u^*}{\kappa} \ln \left( \frac{h_L - d}{z_0} \right). \quad (5.9)$$

Параметр  $\beta$  у формулі (5.8) не є постійним. Він, в свою чергу, залежить від об'ємної щільності листків  $s$  та висоти посіву і задається наступним регресійним співвідношенням

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 h_L + \beta_{11} s^2 + 2\beta_{12} s h_L + \beta_{22} h_L^2. \quad (5.10)$$

Формула (5.10) справедлива, принаймні, для висот посіву від 30 до 120 см і об'ємної щільності листків від 0,01 до 0,1  $\text{cm}^{-1}$ .

Приклади розрахунку за формулами (5.6)–(5.10) для мало розвинутого посіву (початок кушіння) і сформованого до кінця виходу в трубку наведені на рис. 5.1 і 5.2. Криві на рисунках відповідають швидкості вітру на рівні флюгера, тобто на висоті 10 м і дорівнюють 5 і 15 м/с.

Обґрунтування описаного вище логарифмічного закону зміни швидкості вітру над посівом засновано на наступних припущеннях про механізм турбулентного обміну. Коефіцієнт обміну вважається рівним добутку швидкості на шлях змішування. При цьому шлях змішування вихрових потоків повітря ототожнюється з довжиною вільного пробігу молекул.



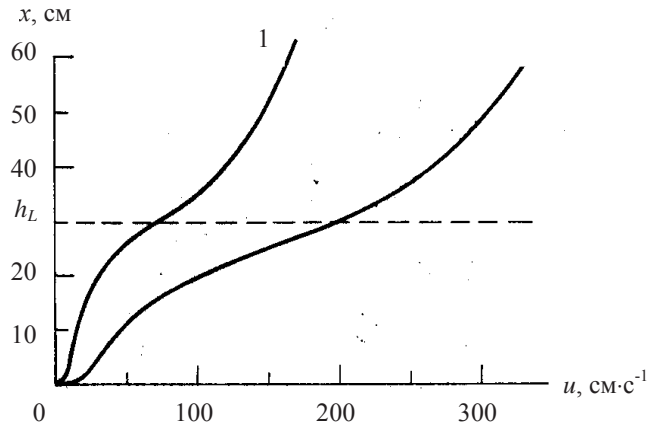


Рис. 5.1. Профіль швидкості вітру у посіві пшениці на фазу кушіння:  
1 –  $u_F = 5$  м/с; 2 –  $u_F = 15$  м/с

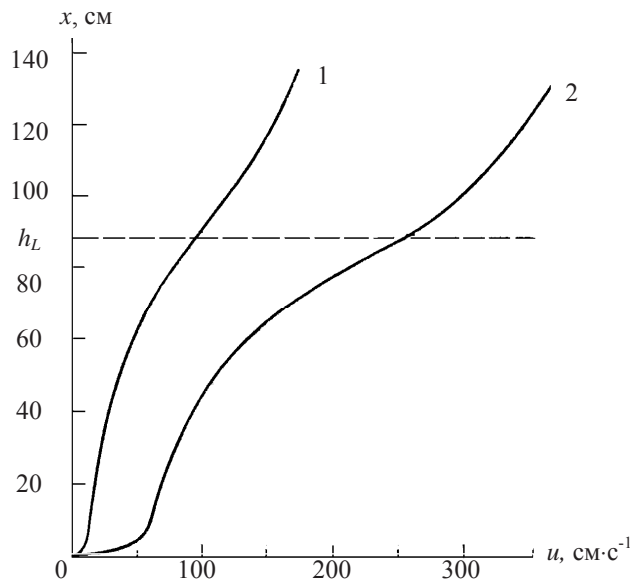


Рис. 5.2. Профіль швидкості вітру у посіві пшениці наприкінці виходу в трубку 1 –  $u_F = 5$  м/с; 2 –  $u_F = 15$  м/с

Для оцінки шляху змішування  $l_u$  вихрів прийнята гіпотеза Прандтля про те, що його значення пропорційне висоті, відлічуваної від рівня витиснення, тобто

$$l_u = \kappa(x - d). \quad (5.11)$$

У вільному повітрі турбулентний рух вихрів спричиняється вертикальним градієнтом швидкості. Різниця швидкостей на інтервалі висот  $l_u$  має порядок  $l_u \Delta u / \Delta x$ . При зроблених припущеннях вона дорівнює також швидкості вихрів. Тому коефіцієнт обміну дорівнює

$$k_u = l_u \frac{\Delta u}{\Delta x} = \kappa(x - d)^2 \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (5.12)$$

Оскільки вертикальний потік кількості руху, рівний

$$\Pi_u = -\rho_a k_u \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (5.13)$$

не залежить від висоти, а корінь квадратний з відношення  $\Pi_u / \rho_a$  є не що інше, як динамічна швидкість  $u^*$ , із формул (5.11), (5.12) і (5.13) можна одержати як співвідношення (5.6), так і залежність коефіцієнта турбулентного обміну від висоти

$$k_u = \kappa u^* (x - d). \quad (5.14)$$

Таким чином, коефіцієнт турбулентного обміну у вільній від джерел атмосфері змінюється з висотою за лінійним законом. Зокрема біля верхньої межі посіву, тобто на висоті  $h_L$

$$k_u(h_L) = \kappa u^* (h_L - d). \quad (5.15)$$

Формула (5.14) справедлива при  $x \geq h_L$ . При  $x < h_L$ , тобто всередині посіву залежність коефіцієнта турбулентного обміну від висоти змінюється. Для  $k(x)$  при  $x < h_L$  можна прийняти наступну апроксимацію

$$k_u(x) = k_u(h_L) \exp[-\alpha(1 - x/h_L)], \quad (5.16)$$

де константа  $\alpha \approx 2$ .

Відзначимо, що у формули для швидкості вітру над посівом (5.6) і у посіві (5.8) – (5.9) та у співвідношення, які визначають коефіцієнт обміну  $k_u$  (5.14) – (5.16), входить невідома величина  $u^*$ . Якщо вважати, що

швидкість вітру вимірюється на деякій висоті (висота флюгера  $h_F$ ), то можна, скориставшись рівнянням (5.6), визначити  $u^*$

$$u^* = \frac{\kappa u(h_F)}{\ln\left(\frac{h_F - d}{z_0}\right)}, \quad (5.17)$$

а потім, знаючи характеристики посіву, обчислити  $u(x)$  і  $k_u(x)$  на будь-якій висоті. При цьому для  $d$  і  $z_0$  в першому наближенні можна прийняти, що

$$d = 0,63h, \quad z_0 = 0,2h$$

або:

$$\log z_0 = 0,979 \log h_L - 0,154, \quad (5.18)$$

$$\log d = 0,997 \log h_L - 0,883. \quad (5.19)$$

У тих випадках, коли ситуація відрізняється від нейтральної, вона супроводжується перенесенням тепла, яке спрямоване до посіву або від посіву в атмосферу. Для характеристики цієї відмінності ситуації від нейтральної вводиться параметр Моніна-Обухова – величина, яка має розмірність довжини і дорівнює

$$l_* = \frac{\rho_a c_p T_{abs} (u^*)^3}{\kappa g \Pi_T}, \quad (5.20)$$

де  $T_{abs}$  – температура повітря в Кельвінах;

$g$  – прискорення вільного падіння;

$\Pi_T$  – потік тепла в атмосферу.

При  $\Pi_T \rightarrow 0$  величина  $l_*$  необмежено зростає.

Однак у формули входить зворотна величина, тобто  $l_*^{-1}$ , яка залишається кінцевою при всіх значеннях  $\Pi_T$ . Як уже вказувалося, у випадку, коли  $\Pi_T < 0$ , це означає стійку стратифікацію, а при  $\Pi_T > 0$  – нестійку стратифікацію. У першому випадку  $l_*$  від'ємна, а в другому – додатна. Звичайно для характеристики відмінності ситуації від нейтральної вводять безрозмірну величину

$$\xi = \frac{x - d}{l_*}. \quad (5.21)$$

У такому випадку для профілю швидкості вітру над посівом можна одержати в першому наближенні співвідношення, у якому містяться два доданки – логарифмічний, як і раніше і лінійний, який змінюється з висотою

$$u(x) = \frac{u^*}{\kappa} \left( \ln \frac{x - d}{z_0} \right) + B \Delta \xi, \quad (5.22)$$

де  $\Delta \xi = \frac{x - d - z_0}{l_*}$ , а  $B$  – деяка позитивна константа.

Для коефіцієнтів турбулентного обміну кількості руху і тепла отримані такі співвідношення:

$$k_u = \kappa u^* (x - d) / \Phi_u, \quad (5.23)$$

$$k_T = \kappa u^* (x - d) / \Phi_T, \quad (5.24)$$

де

$$\Phi_u = \begin{cases} (1 - 15\xi)^{-0,25} & \text{при } \xi < 0, \\ 1 + 4,7\xi & \text{при } \xi > 0, \end{cases} \quad (5.25)$$

$$\Phi_T = \begin{cases} 0,74(1 - 9\xi)^{-0,5} & \text{при } \xi < 0, \\ 0,74 + 4,7\xi & \text{при } \xi > 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

На рис. 5.3 і 5.4 наведені залежності турбулентного обміну  $k_u(x)$  для тих випадків, що і залежності швидкості вітру (див. рис. 5.1 і 5.2), при нейтральній стратифікації атмосфери.

Наведені формули турбулентного обміну осереднено впливають на опис процесів перенесення і відіграють роль допоміжних перемінних у загальній компартментній моделі тепло-і вологообміну у посіві, а також у моделі газообміну. Проте, їхня роль надзвичайно велика: при відсутності такого природного механізму, як турбулентне перемішування шарів повітря над посівом і в міжлистяному просторі самого посіву, інтенсивність процесу фотосинтезу була б набагато нижче.

### 5.3. Компартментна модель тепло- і вологоперенесення у посіві

Перенесення у посіві тепла і вологи – взаємозалежні процеси. Вони зв'язані не тільки тим, що транспортуються за допомогою турбулентного перемішування як пасивні домішки повітря. Більш тісний взаємозв'язок цих двох процесів виявляється у функціях джерел-стоків тепла і вологи, локалізованих на фітоелементах – листках, стеблах, колоссах.

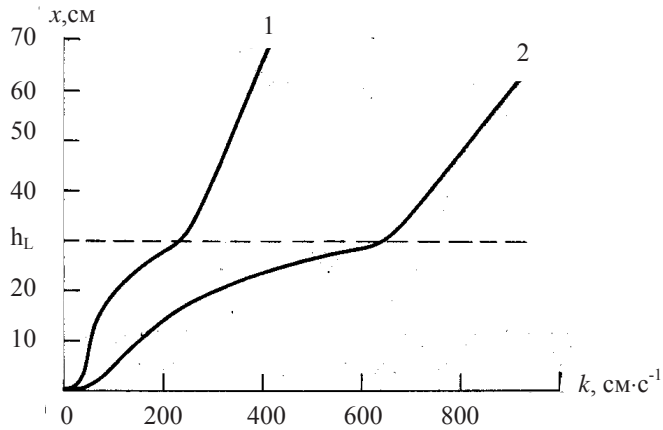


Рис. 5.3. Профіль коефіцієнта турбулентного обміну у посіві пшениці на фазу кушіння: 1 –  $u_F = 5$  м/с; 2 –  $u_F = 15$  м/с

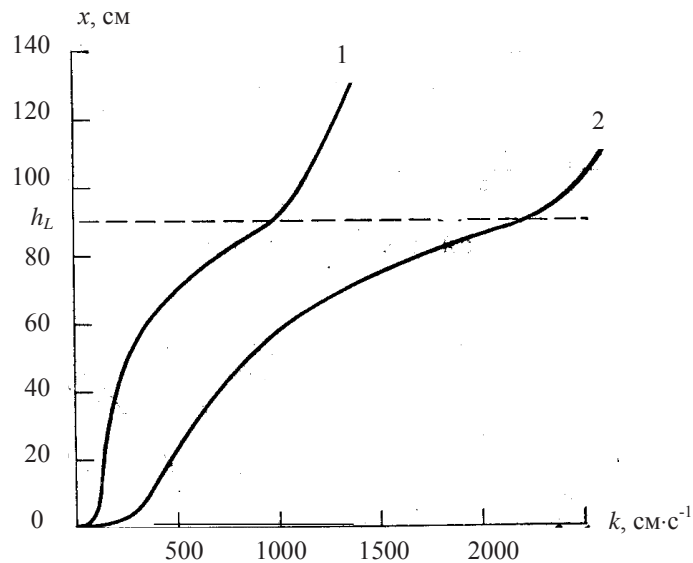


Рис. 5.4. Профіль коефіцієнта турбулентного обміну в посіві пшениці наприкінці виходу в трубку: 1 –  $u_F = 5$  м/с; 2 –  $u_F = 15$  м/с

Прийнято вважати, що інтенсивна транспірація пов'язана з приходом до посіву сонячної енергії. Це дійсно так, оскільки на випаровування одного грама води витрачається понад 500 калорій. Сонячна радіація, яка надходить до посіву, частково відбивається, а частково проникає всередину посіву. На своєму шляху вона поглинається непрозорими для даного діапазону довжин хвиль елементами. На що витрачається ця енергія? В першу чергу вона витрачається на нагрівання листя та інших органів рослини. При цьому з підвищенням температури листя вода, яка знаходиться у рідкій фазі, випаровується й у вигляді водяної пари накопичується у міжклітиннику. Завдяки процесу випаровування фітоелементи не нагріваються до настільки високої температури, до якої вони могли б нагрітися при відсутності випаровування. Оскільки вільний простір міжклітинника майже замкнутий, водяна пара в ньому знаходиться в стані, близькому до насичення, а значить чим вище температура листя, тим вище парціальний тиск водяної пари і питома вологість повітря в їхніх внутрішніх порожнинах.

Як же виводиться із міжклітинника волога, яка випаровується? Для проникнення в оточуючу листок атмосферу в неї є два шляхи – устячка і кутикула. Дифузійний опір кутикули досить великий – близько 40–50 с/см і більше, отже процес дифузії водяної пари через кутикулу мало ефективний. Головний шлях, яким вода транспортується в атмосферу, є її дифузія через устячка. Устячками «покриті» всі органи рослини – листя, стебла, зелені колосся, а дифузійний опір устячок, коли вони відкриті, у 20–40 разів менше кутикулярного.

Таким чином, відбувається постійне підведення енергії до листя, постійне випаровування води і її видалення у пароподібній формі через устячка в атмосферу. Збільшення приходу сонячної енергії призводить до підвищення температури листя, збільшення насиченої концентрації водяної пари у міжклітинниках і тим самим (за інших рівних умов) – до росту транспірації. Саме такий механізм забезпечує зростання інтенсивності транспірації з ростом рівня радіації, яка надходить до посіву.

Як ж у цих процесах роль турбулентного обміну? Вона зводиться до швидкого видалення водяної пари з оточуючого листок простору і до певного зняття тепла з листка, завдяки чому його температура також утримується в необхідних для життєдіяльності межах. Саме постійно протягом дня працюючий «відкачуючий насос» і постійний приплив енергії для роботи цього насоса, функціонуючи збалансовано і разом з механізмом регуляції устячкового опору, забезпечують температурний гомеостазис рослини. Хоча ця система не настільки досконала в порівнянні з системою терморегуляції теплокровних тварин, вона, проте, надійно функціонує в досить широких межах ґрунтово-кліматичних і погодних умов.

На рис 5.5 наведена схема вологообміну і газообміну листка. Дифузія  $\text{CO}_2$  здійснюється тим же устячково-кутикулярним шляхом, що і перенесення вологи, але тільки у зустрічному напрямку. Ця схема корисна для розуміння як вологообміну листка, так і його газообміну.

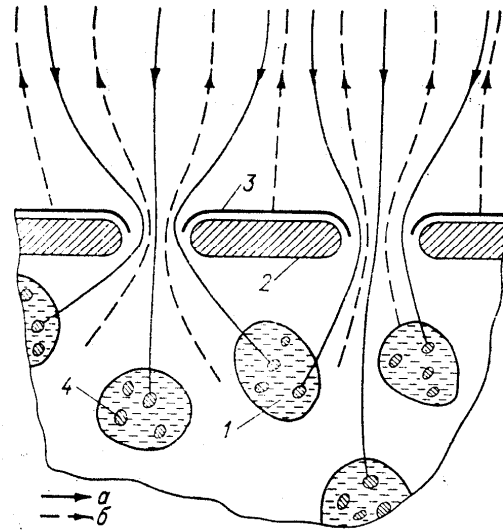


Рис. 5.5. Схема процесів вологообміну і газообміну листка:  
*a* – потоки  $\text{CO}_2$ ; *b* – потоки водяної пари;  
 1 – мезофіл; 2 – епідерміс; 3 – кутикула; 4 – хлорофіл

Перейдемо до розгляду загальної компартментної схеми тепло- і вологоперенесення. Виділення компартментів у посіві здійснюється так само, як і у ґрунті. Саме, посів по всій висоті поділяється умовно горизонтальними площинами на ряд шарів. У даному випадку немає необхідності вважати товщини цих шарів різними. Тому досить знати висоту посіву  $h_L$  та задати кількість розрахункових шарів  $NL$  для того, щоб була відома товщина кожного з них:  $h = h_L/NL$ . Якщо в силу горизонтальної однорідності посіву ми виберемо довільну площу ділянки поля  $F$  (зокрема, можна вважати, що  $F=1 \text{ м}^2$  або  $1 \text{ см}^2$ ), то одержимо для кожного компартмента схему, аналогічну рис. 4.5 за винятком того, що позитивним напрямком потоків будемо вважати напрямок від низу до верху.

У кожному такому шарі містяться фітоелементи. Для тих процесів, які будуть описуватися, важливою характеристикою цих елементів, тобто

листіків, стебел і колосся є не їхня біомаса, а асимілююча (для  $\text{CO}_2$ ), випарна (для водяної пари) або теплознімальна поверхні. Тому варто ввести для розгляду площу цієї поверхні, яку будемо вважати однаковою для процесів тепло-, волого- і газообміну і називати *асимілюючою поверхнею*. Кількісною характеристикою посіву в цьому понятті є об'ємна щільність асимілюючої поверхні, тобто її площа в  $\text{см}^2$ , яка знаходиться у  $1 \text{ см}^3$  повітря. Цю величину ми уже використовували у співвідношенні (5.10), де вона позначена через  $s$  і має розмірність  $\text{см}^{-1}$ . Величина  $s$  у межах  $j$ -го компартмента в силу його малої товщини вважається постійною і може бути позначена через  $s(j)$ . Площа асимілюючої поверхні у всьому компартменті з номером  $j$  дорівнює його об'єму, помноженому на  $s(j)$ , тобто

$$S(j) = hFs(j), \quad (5.27)$$

а якщо прийняти, що  $F=1 \text{ см}^2$ , то ця величина перетворюється в листковий індекс компартмента

$$L(j) = hs(j). \quad (5.28)$$

Листковий індекс посіву в цілому дорівнює, як очевидно, сумі листкових індексів усіх компартментів

$$L = \sum_{j=1}^{NL} L(j). \quad (5.29)$$

Відзначимо, що виділені нами компартменти відносяться до приземного шару повітря, а фітоелементи, які розташовуються в них, варто трактувати як рівні даної субстанції, що знаходяться в «ємності» компартмента.

Розглянемо баланс тепла і вологи в сформованій компартментній схемі. При цьому на відміну від ґрунту процеси у посіві можна вважати безінерційними. При  $F = 1 \text{ см}^2$  турбулентний потік тепла, що надходить у  $j$ -й компартмент із сусіднього, розташованого знизу, який має номер  $j+1$  відповідно до (5.4) дорівнює  $-c_p \rho_a k_T \frac{\Delta T_a}{\Delta x}$ , де  $T_a$  – температура повітря у міжлистяному просторі. Величину  $\Delta T_a$  в цьому співвідношенні варто прийняти рівною різниці температур компартментів  $(j+1)$  та  $j$

$$\Delta T_a = T_a(j) - T_a(j+1),$$

а  $\Delta x$  дорівнює відстані між «центрами» компартментів,  $\Delta x = h$ . Таким

чином, потік знизу дорівнює

$$\Pi_{j,j+1} = -c_p \rho_a k_T(x_{j,j+1}) \frac{T_a(j) - T_a(j+1)}{h}. \quad (5.30)$$

Аналогічно цьому для потоку тепла, що надходить з компартмента  $j$  у  $(j-1)$ -й запишемо

$$\Pi_{j-1,j} = -c_p \rho_a k_T(x_{j-1,j}) \frac{T_a(j-1) - T_a(j)}{h}. \quad (5.31)$$

Відзначимо, що значення коефіцієнта турбулентного обміну в (5.30) і (5.31), як і для ґрунту, повинні відповідати границям компартментів, тобто знаходитися всередині між відповідними вузлами  $x_j$  і  $x_{j+1}$  або  $x_{j-1}$  і  $x_j$ . Потік, який витікає з компартмента не дорівнює потоку, який притікає, оскільки частина тепла витрачається на теплообмін з листком. Ця стаття балансу залежить від різниці температури листок – повітря, площі фітоелементів у компартменті  $L(j) = hs(j)$  та коефіцієнта теплообміну  $D_T$

$$\rho_a c_p L(j) D_T T_l(j) - T_a(j), \quad (5.32)$$

де  $T_l(j)$  – температура листків, розташованих у компартменті.

Для коефіцієнта теплообміну, як уже говорилося, існує формула (5.1). У даному випадку в цю формулу необхідно підставити значення швидкості вітру в  $j$ -му вузлі, тобто записати

$$D_T = \frac{1}{c_u} \sqrt{\frac{u(x_j)}{L_0}}. \quad (5.33)$$

Тепер у нас є всі складові для балансу. Якщо до потоку тепла, що надходить у компартмент знизу, додати те тепло, яке віддає потіку листок, тобто (5.32), то одержимо значення потоку, який витікає з компартмента вгору. Таким чином,

$$\Pi_{j,j+1} + \rho_a c_p L(j) D_T (j) [T_l(j) - T_a(j)] = \Pi_{j-1,j},$$

а після підставлення (5.30) і (5.31) і скорочення загального множника  $\rho_a c_p$  дає

$$\frac{1}{h} \{-k_T(x_{j-1,j}) T_a(j-1) + [k_T(x_{j-1,j}) + k_T(x_{j,j+1}) + hL(j) D_T(j) T_a(j)] - k_T(x_{j,j+1}) T_a(j+1)\} = L(j) D_T(j) T_l(j). \quad (5.34)$$

Відзначимо, що на відміну від рівнянь теплоперенесення у ґрунті, теплоперенесення у посіві відбувається практично без запізнювання. Точніше, перехідні процеси у посіві загасають протягом доли хвилини, які при часовому кроці можна не враховувати. З іншого боку, рівняння (5.34) не утворюють замкнутої системи і не можуть розглядатися незалежно. Дійсно, у праву частину входить невідома температура листя, для визначення якої необхідно додати до (5.34)  $NL$  додаткових рівнянь, де  $NL$  – кількість виділених у посіві компартментів.

Розглянемо тепер рівняння вологоперенесення. Для їхнього виведення можна просто повторити все те, що було сказано вище. Варто тільки замінити температуру листків і повітря на питому вологість повітря у міжклітиннику й у міжлиstoffковому просторі, а коефіцієнт турбулентного обміну для тепла  $k_T$  на відповідний коефіцієнт для водяної пари  $k_q$ . Єдина відмінність, що при цьому виникає, стосується процесу вологообміну листок – повітря. Дійсно, теплозімання вітром, який обдуває листок, відбувається безпосередньо з його поверхні. Точно так само з поверхні листка виводиться і водяна пара. Однак шлях з міжклітинника, як про це говорилося вище, їй перешкоджає устячково-кутикулярний опір (див. рис. 5.5).

Устячково-кутикулярний опір одиниці поверхні листків описується одним членом  $r_{st}$ , який будемо для простоти називати далі *опором устячок*. При відкритих устячках цей опір складає величину 1–2 с/см, а при закритих – збільшується до 40–50 с/см і більше.

На шляху дифузії водяної пари з міжклітинника в атмосферу опори устячок і прилиstoffкового шару будуть послідовними. Отже, сумарний опір дорівнює їхній сумі

$$\frac{1}{D_q} = \frac{1}{D_T} + r_{st}. \quad (5.35)$$

Тут через  $D_Q$  позначена сумарна провідність для водяної пари – величина, зворотна опорі. Тому провідність  $D_Q$  дорівнює

$$D_q = \frac{D_T}{1 + r_{st} D_T} \quad (5.36)$$

і швидкість вологообміну «лиstoff – повітря» в  $j$ -ому компартменті за аналогією з (5.32) приймає значення

$$\rho_a L(j) D_q [q_l(j) - q_a(j)], \quad (5.37)$$

де  $q_l(j)$  – питома вологість повітря в міжклітиннику.

Вважаючи також, що швидкість турбулентного обміну із сусідніми компартментами підкоряється відомому закону (5.3) і, виконуючи перетворення, які були зроблені при аналізі теплоперенесення, можна одержати для питомої вологості повітря у посіві рівняння, цілком аналогічні (5.34), тобто

$$\frac{1}{h} \{-k_q(x_{j-1,j})q_a(j-1) + [k_q(x_{j-1,j}) + k_q(x_{j,j+1}) + hL(j)D_q(j)]q_a(j) - k_q(x_{j,j+1})q_a(j+1)\} = L(j)D_q(j)q_l(j), \quad (5.38)$$

Як раніше відзначалось, при виведенні рівнянь теплоперенесення з'явилося  $NL$  «зайвих» перемінних –  $T_l(j)$ . У рівняння (5.38) додатково входять ще  $NL$  величин – невідомі значення питомої вологості у компартментах  $q_l(j)$  і опору устячок  $r_{st}(j)$ .

Розглянемо їх визначення. Оскільки вологість всередині листка, тобто у міжклітиннику, знаходиться в стані насичення, то  $q_l$  цілком визначається температурою листка, і для визначення цієї залежності можна скористатися будь-якою відповідною апроксимацією, наприклад, формулою Магнуса

$$q_l = 3,79 \cdot 10^{-3} \exp[17,1T_l / (235 + T_l)]. \quad (5.39)$$

Отже, якщо ми зможемо визначити температуру листків у компартменті  $T_l(j)$ , то з визначенням величини  $q_l(j)$  ніяких труднощів не буде.

Розглянемо тепер  $r_{st}(j)$ . Як відомо, на величину устячкового опору значний вплив чинить радіаційний баланс посіву (у темряві устячка закриваються) і водний потенціал листка (устячка закриваються також при водному дефіциті, тобто при великих абсолютних значеннях потенціалу листків  $P_l$ ). Отже, для визначення  $r_{st}$  необхідно розраховувати поглинену листками радіацію і водний статус рослини. Нарешті, для розрахунку температури листків  $T_l(j)$  варто використати рівняння теплового балансу у кожному компартменті. Таким чином, для замикання отриманих рівнянь необхідно врахувати взаємодію у посіві умов поглинання рослинами променевої енергії, вологообміну і теплового балансу посіву в цілому. Цю сукупність співвідношень, які призводять до замикання загальної системи рівнянь, можна записати тільки тоді, коли будуть розглянуті радіаційний і водний режими посіву.

Вночі, коли в результаті радіаційного вихолодження температура листків виявляється нижче температури повітря, а питома вологість повітря близька до насичення, різниця  $q_l(j) - q_a(j)$  у (5.37) може виявитися

негативною. Це призводить до випадання роси на листках і, можливо, до «зворотної» дифузії водяної пари з атмосфери у міжклітинник. У денні години листки під дією сонячної енергії нагріваються. При цьому разом з ростом  $T_l$  збільшується і  $q_l$ , а різке зменшення устячкового опору призводить до інтенсивної транспірації.

Умови теплового балансу обмежують ріст температури листків, що відбувається за рахунок двох факторів: росту витрат тепла на транспірацію і збільшення теплового випромінювання листка в навколишнє середовище, яке відповідно до закону Стефана-Больцмана пропорційне четвертій степені абсолютної температури. Тим самим процес стабілізується.

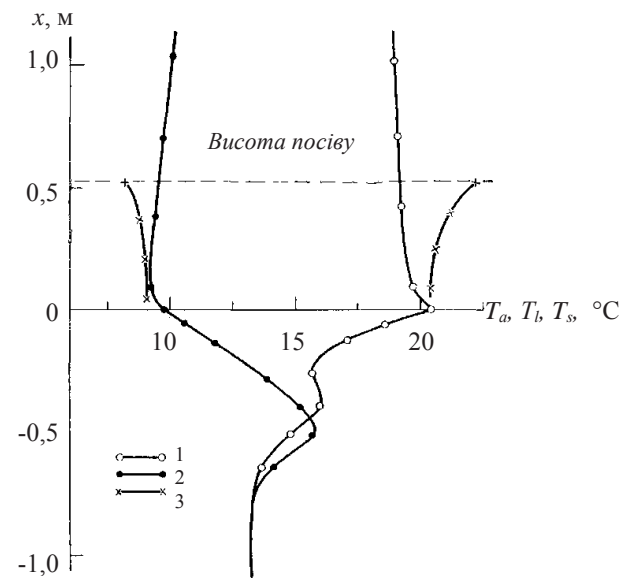


Рис. 5.6. Вертикальні профілі температури повітря, ґрунту і листя: 1 – температура ґрунту і повітря (день); 2 – температура ґрунту і повітря (ніч); 3 – температура листків

У денні години може наставати полуденна депресія транспірації, викликана частковим закриттям устячок. Це відбувається в основному завдяки зневоднюванню тканин листка, внаслідок недостатнього кореневого підживлення рослин водою в порівнянні з її витратою при транспірації.

На рис. 5.6 зображені вертикальні профілі температури повітря, листя і ґрунту у нічні й денні години доби. Видно, що перегріву в денні години піддаються в основному верхні яруси листків. Приклад добового ходу температури повітря, верхнього ярусу листків і поверхні ґрунту наведені на рис. 5.7.

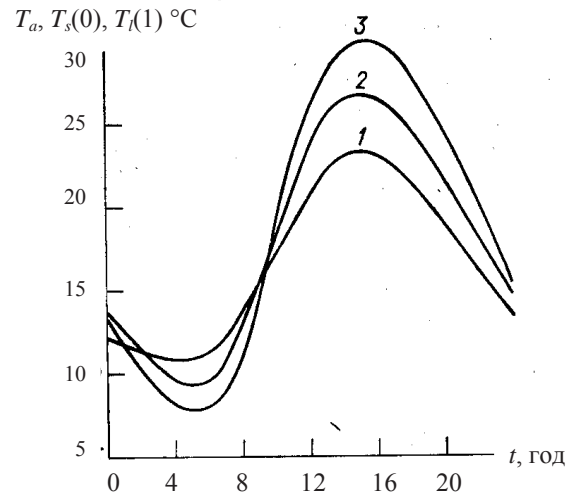


Рис. 5.7. Добовий хід температури повітря (1), поверхні ґрунту (2) і верхнього ярусу листків (3)

Ці дані отримані в результаті розрахунку за моделлю агрофітоценозу пшениці, розробленої в лабораторії математичного моделювання АФІ. Розрахунок відповідає умовам безхмарного неба при швидкості вітру 15 м/с і відносній вологості повітря 63–70 %. Мінімальна температура повітря дорівнює 7,5 °С, максимальна 20 °С. Як показано на рис. 5.7, температура верхніх ярусів листя значно відрізняється в денні години від температури повітря.

## 6. МОДЕЛЮВАННЯ РАДІАЦІЙНОГО І ТЕПЛОВОГО РЕЖИМІВ ПОСІВУ

Однією з головних проблем при моделюванні радіаційного режиму в системі ґрунту – рослина – атмосфера є встановлення зв'язку поглиненої різними ярусами посіву радіації з його архітектонікою, тобто з розміщенням фотосинтезуючих органів по висоті посіву та з їхньою орієнтацією у просторі. Те, що ця проблема є важливою, доведено експериментально. Дійсно, у густих посівах, особливо такої культури як кукурудза, радіація, яка надходить до посіву, швидко загасає у мірі проникнення в глиб травостою. Листки середніх і головним чином нижніх ярусів починають відчувати «радіаційне голодування», що негативно впливає на загальну продуктивність посіву.

Чи є можливість підвищити КПД фотосинтезу за рахунок оптимізації функції розподілу кута нахилу листя? Виявляється, так. Для цього верхні листки повинні бути орієнтовані ближче до вертикалі, а кут між дотиковою до поверхні листка площиною і вертикальним напрямком повинен збільшуватися при переміщенні зверху вниз.

Інша проблема зводиться до опису режиму довгохвильової (теплової) радіації. Хоча у денні години теплова частина спектра може складати лише невелику частку в загальному балансі, вночі це єдина частина балансу. Крім того, включення в модель довгохвильової радіації забезпечує стійкість розрахунку температурного режиму посіву і вдень, і вночі.

Розглянемо режими короткохвильової радіації, включаючи фотосинтетично-активну радіацію (ФАР), і довгохвильової радіації, а також їхній зв'язок з архітектонікою посіву.

### 6.1. Характеристики архітектоніки рослинного покриву

Геометричні характеристики надземної частини посівів сільськогосподарських культур обумовлюють пропускання, поглинання і відбиття радіації. Одна з таких характеристик уже введена у розд. 5. Це – об'ємна площа листя, яка позначена через  $s$  (тобто, площа листя в  $\text{см}^2$ , яка знаходиться в  $1\text{см}^3$ ), вона має розмірність  $\text{см}^{-1}$ . Оскільки важливим є зв'язок радіаційного режиму з фотосинтезом і транспірацією, для більш точних розрахунків необхідно було б ввести такий показник, як асимілююча або транспірувальна поверхня, і розподіл її площі по висоті рослинного покриву. Дійсно, значний внесок у фотосинтез і транспірацію вносять, окрім листя, стебла і колосся. У такому випадку потрібно було б

оцінювати площу бокової поверхні стебел і поверхні колоса, так це і робиться в детальних моделях. Більш того, при розрахунку функцій поглинання радіації також необхідно приймати до уваги всі фітоелементи, а не тільки листя. Зробити це, однак, надзвичайно важко.

Головна трудність криється у великій розкиданості характеристик фітоелементів. Наявність пагонів кущіння у зернових колосових культур при варіабельності їхнього біологічного віку і великої залежності показників кущіння від умов вирощування робить цю задачу досить важкою. Мабуть, більш надійні дані при роздільному врахуванні внеску листя й стебел у радіаційний режим і фотосинтез можна отримати для таких культур, як кукурудза і сорго, і це треба робити.

Для інших же культур, наприклад, зернових колосових (озимої і ярої пшениць, ячменю), очевидно, потрібно обмежитися аналізом динаміки листкової поверхні. Внесок же інших фітоелементів у показники радіаційного режиму, транспірації і фотосинтезу можна враховувати, вводячи поправочні коефіцієнти.

Тому, говорячи про площу листя, надалі будемо під нею розуміти всю асимілюючу поверхню та її розподіл по висоті посіву.

Залежність об'ємної площі листя  $s$  від висоти  $x$  може мати різний характер. На рис. 6.1 схематично наведені чотири типи таких залежностей: з максимумом у верхній, нижній і середній частинах посіву (криві  $a$ ,  $b$ ,  $v$ ), рівномірний по висоті розподіл (крива  $z$ ) і реальний профіль  $s(x)$  для посіву пшениці ( $d$ ).

Як видно з рисунка, тип кривої « $a$ » найбільш близький до реального. Хоча в літературі є деякі дані щодо вигляду кривих  $s(x)$  для різних культур, деталізація цих залежностей не має істотного значення. Як буде розглянуто далі, всі закони поглинання світла, а отже, і фотосинтезу, залежать від сумарної листкової площі, підраховуваної від верхньої кромки посіву. Тому неважливо, на якій конкретній глибині у посіві листковий індекс досягає, наприклад, половини свого значення (див. заштриховані частини на рис. 6.1).

Координатою, від якої все залежить, є сам інтегральний листковий індекс, а висота розміщення точок  $x_a$ ,  $x_b$ , ...,  $x_d$ , у посіві не настільки істотна.

Більш важливою характеристикою посіву є кутове розміщення листків, до розгляду якого і переходимо (рис. 6.2). Виділимо на якомусь листку ділянку, настільки малу, щоб її розміри дозволяли не враховувати кривизну листкової поверхні, на рис. 6.2  $a$  ця ділянка заштрихована. Розглянемо цей елемент листка в збільшеному вигляді (рис. 6.2  $b$ ). В силу того, що виділений елемент є плоским, можна побудувати нормаль до його поверхні і проекцію цієї нормалі на горизонтальну площину.

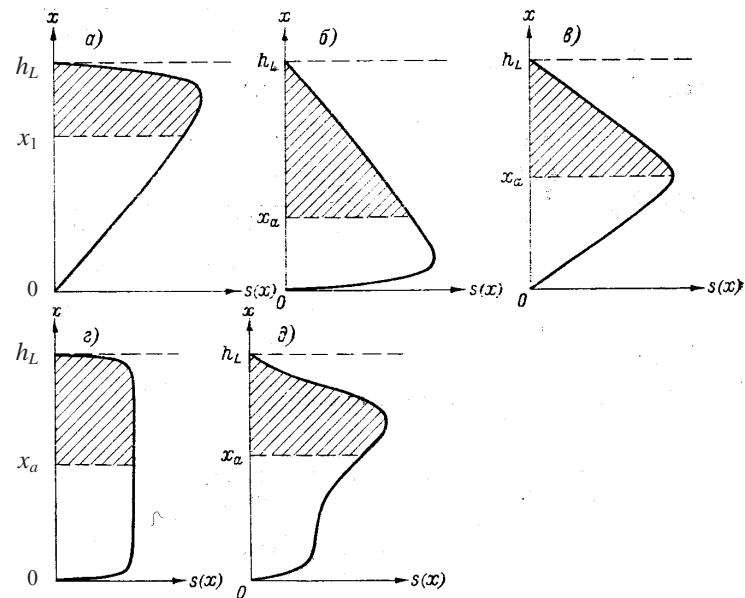


Рис. 6.1. Типи розподілу об'ємної площі листя по висоті посіву

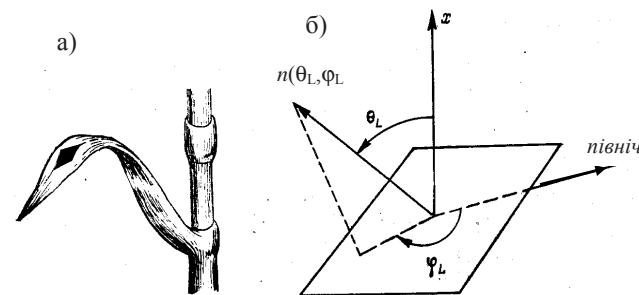


Рис. 6.2. Кути, які визначають напрямок нормалі листка

Напрямок нормалі визначається двома кутами:  $\Theta_L$  – кут її нахилу стосовно вертикалі і  $\Phi_L$  – азимут нахилу нормалі листка, відлічуваний від напрямку на північ за годинниковою стрілкою. Ці кути можуть змінюватися в межах:  $0 \leq \Theta_L \leq 90^\circ$  та  $0 \leq \Phi_L \leq 360^\circ$ .



Очевидно, що різні листки і різні частини одного листка мають різні напрямки нормалей. Інтерес представляє розподіл кутів нахилу і азимута листків та його зміни по висоті рослинного покриву.

Як показали деякі вимірювання, зернові культури не мають переважних азимутальних напрямків. У табл. 6.1 наведені дані О.О. Ничипоровича про процентний розподіл листків у азимутальних секторах з кутом  $90^\circ$ , спрямованих відповідно на чотири сторони світу.

Таблиця 6.1. Відсоток листків у секторах з кутом  $90^\circ$

Культура	Південь	Захід	Північ	Схід
Пшениця	26	26	23	25
Кукурудза	23	27	24	26

Звичайно, листки деяких видів мають тенденцію підтримувати певну орієнтацію відносно Сонця або змінювати її під дією вітру. Проте, було б нереальним намагатися врахувати в моделі ці залежності. Вплив на фотосинтез навіть досить великої нерівномірності в азимутальному розподілі листків виявляється несподівано малим. Тому для характеристики просторової орієнтації листків істотними виявляються тільки кути нахилу їхньої нормалі стосовно вертикалі  $\Theta_L$ .

Зокрема, при горизонтальному розміщенні листків  $\Theta_L = 0$ , якщо ж всі листки розміщені вертикально, то  $\Theta_L = 90^\circ$ . Це, однак, ідеалізовані крайні випадки. Звичайно у посіві зустрічаються листки з різними значеннями  $\Theta_L$ . Орієнтація листків взагалі характеризується диференціальною функцією розподілу або просто розподілом  $g(\Theta_L)$ , що показує частку листків, які мають той чи інший кут нахилу. Ця функція залежить від біологічного віку рослин і, звичайно, від координати  $x$ . Тому позначимо її через  $g_x(\Theta_L)$ .

Приклади розподілу наведені схематично на рис. 6.3, де випадок «а» відповідає переважно горизонтальному розміщенню листків, випадок «б» – вертикальному, випадок «в» – такому розміщенню листків, при якому їх більша частина має кут нахилу  $\Theta_L \approx 45^\circ$  і «г» відповідає рівномірній (сферичній) орієнтації листків.

Посів пшениці, наприклад, на ранніх стадіях розвитку має розподіл типу «б». При наступних фазах він поступово переходить у хаотичний. У посівах пасльонових (томатів, картоплі) більше 50 % листків мають нахили від 0 до  $30^\circ$  (тип «а»), тобто більшість листків розміщена горизонтально.

Орієнтація листків кукурудзи істотно відрізняється для різних гібридів. Архітектоніка багатьох гібридів кукурудзи така, що верхні яруси листків мають розподіл «б», однак на висоті, яка складає приблизно 1/3 від верхньої кромки посіву, зустрічається ярус листків з горизонтальним розміщенням – тип «а».

Це надзвичайно не вигідно, оскільки цей ярус перехоплює всю сонячну енергію, яка дійшла до нього, і утрудняє процеси переносу.

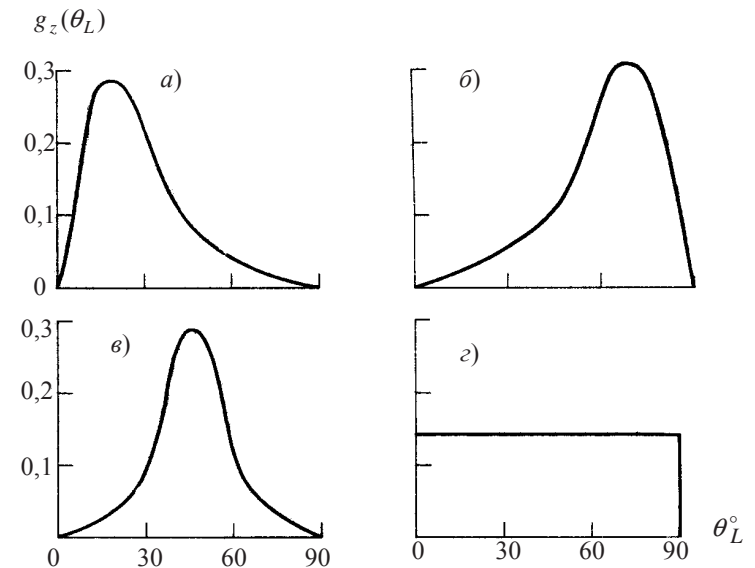


Рис. 6.3. Приклади функцій розподілу кута нахилу листків

Яруси, які розміщені нижче, практично не «працюють» на продуктивність. Однак, зустрічаються і гібриди з іншою архітектонікою. Зокрема, для гібриду Н-780 югославської селекції характерним є те, що при переміщенні у посіві зверху вниз розподіли, проходячи проміжні форми, міняються від типу «б» у верхніх ярусах до типу «в» у середніх і, нарешті, до типу «а» у нижніх. Як було показано Х.Г. Тоомінгом, ця архітектоніка є оптимальною для сумарного нетто-фотосинтезу посіву.

Крім диференціальної функції розподілу в літературі часто зустрічається інтегральна (кумулятивна) функція. Кумулятивні функції для розподілу, близького до вертикального і для сферичного розподілів зображені на рис. 6.4.

На рис. 6.5 наведені емпіричні розподіли для ряду культур. Як видно з даних цього рисунка, багато розподілів мають вигляд S-подібної кривої, що відповідає розподілам типу «в», «а» або деяким проміжним.

## 6.2. Режим короткохвильової радіації і ФАР

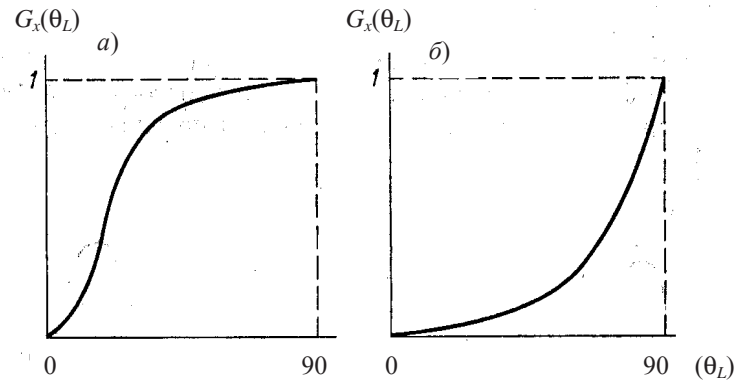


Рис. 6.4. Приклади кумулятивних розподілів кута нахилу листків:  
а) розподіл, близький до вертикального; б) сферичний розподіл

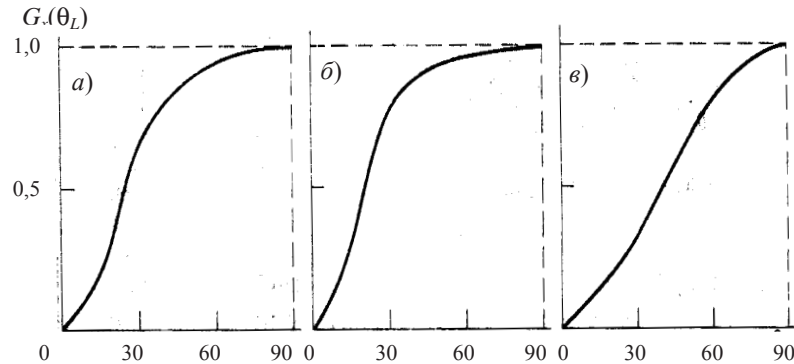


Рис. 6.5. Приклади кумулятивних розподілів кутів нахилу листків різних культур:  
а) біла конюшина; б) картопля; в) пшениця

Спектр сонячної радіації падаючої на земну поверхню прийнято поділяти на дві частини: короткохвильову (інтегральну) радіацію, довжини хвиль якої лежать у діапазоні 0,28 – 4,0 мкм, і довгохвильову з довжинами хвиль 4,0–40,0 мкм. Біологічно активна частина короткохвильової радіації – ФАР – займає діапазон  $\approx 0,38 - 0,71$  мкм.

Розподіл енергії у спектрі сонячної радіації мінливий і залежить від багатьох причин. Він залежить як від висоти Сонця  $h_o$ , так і від оптичних властивостей самої атмосфери. Так, наприклад, при збільшенні  $h_o$  частка синіх променів (400–500 нм) у прямій сонячній радіації зменшується, частка червоних (600–700 нм) зростає, а частка жовто-зелених (500–600 нм) залишається постійною. В зв'язку з цим при зміні у сумарному потоці прямої радіації міняється і частка ФАР. Спектр розсіяної радіації похмурого неба для видимої області аналогічний спектральному складу прямої сонячної радіації. При цьому співвідношення радіації у синій і червоній областях спектра в залежності від  $h_o$  також міняється, так при малих  $h_o$  переважає довгохвильова частина спектра.

Для розрахунку добового ходу падаючої на посів короткохвильової радіації при безхмарному небі можна скористатися формулою Т.Г. Берлянд:

$$Q_o = \frac{S_o \sin h_o}{1 + f \cos \sec h_o}, \quad (6.1)$$

де  $S_o$  – сонячна постійна, яка дорівнює  $1,98 \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{хв}^{-1}$ ;

$f$  – коефіцієнт, який залежить від географічної зони і пори року.

Розрахунок висоти Сонця  $h_o$  проводиться за допомогою формул

$$\sin h_o = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos [2\pi(t_h + 12)/24], \quad (6.2)$$

$$\delta = -0,408 \cos [2\pi(t_d + 10)/365], \quad (6.3)$$

де  $\varphi$  – географічна широта місця;

$\delta$  – кут схилення Сонця;

$t_h$  – поточний час всередині доби, виражений у годинах, який відраховується від полудня;

$t_d$  – номер доби, який відраховується від 1 січня.

Всі кути виражені в радіанах.

Прокоментуємо ці залежності. Величина  $Q_o$ , як очевидно, повинна

бути рівною нулю при негативній висоті Сонця, тобто між заходом і сходом Сонця. Тому необхідно спочатку визначити ці моменти часу.

Робиться це в такий спосіб. У будь-яку модель повинен бути вбудований календар, тобто програма, яка визначає номер доби з початку року, і порівнює її з визначеною датою. Тому, знаючи поточну дату розрахунку, можна знайти значення  $t_d$  з врахуванням, зрозуміло, різної кількості днів у лютому. Потім, розрахуємо за рівнянням (6.3)  $\delta$  і прирівнявши праву частину формули (6.2) нулю, визначимо для заданої географічної широти  $\varphi$  і розрахованого кута  $\delta$  час заходу Сонця

$$t_h^{zax} = \frac{12}{\pi} \arcsin\left(-\frac{\sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}\right) \quad (6.4)$$

і сходу Сонця

$$t_h^{cx} = 24 - t_h^{zax} \quad (6.5)$$

Для виконання цих елементарних розрахунків розроблені програми для ПЕОМ. При обчисленні падаючої радіації в ході моделювання можна використовувати формулу (6.1), перевіряючи на кожному часовому кроці умови перебування поточного часу в інтервалі  $t_h^{cx} \leq t \leq t_h^{zax}$  і якщо ця умова порушена, то прирівнювати  $Q_0$  нулю, .

Навіть при безхмарному небі у прихідній радіації міститься і пряма і розсіяна складові. При цьому частка розсіяної радіації зменшується зі збільшенням висоти Сонця  $h_0$ .

Для обчислення відношення  $S'/D$  або  $S'/Q_0$  і  $D/Q_0$ , тобто відношення прямої радіації до дифузійної або прямої і дифузійної до загальної, можна скористатися даними табл. 6.2. При наявності суцільної хмарності вся радіація стає розсіяною, а її величина пов'язана з  $Q_0$  коефіцієнтом ослаблення радіації  $k_R$

$$Q = D = k_R \cdot Q_0 \quad (6.6)$$

Таблиця 6.2. Залежність відношення дифузійної радіації до загальної від висоти Сонця

Висота Сонця, град.	Відношення $D/Q$	Висота Сонця, град.	Відношення $D/Q$
5	1,00	35	0,18
15	0,32	45	0,16
25	0,22	90	0,13

Для величини  $k_R$  може бути використана залежність

$$k_R = 1 - c_n n_n - c_c n_c - c_e n_e, \quad (6.7)$$

де  $n_n$ ,  $n_c$  і  $n_e$  – кількість нижньої, середньої і верхньої хмарності в балах, а  $c_n$ ,  $c_c$  і  $c_e$  відповідні числові коефіцієнти. При цьому  $c_e$  залежить від висоти Сонця.

Перейдемо до характеристики прихідної ФАР. Для прямої радіації встановлений досить тісний зв'язок коефіцієнта  $c_s$ , який характеризує частку ФАР, з висотою Сонця, особливо в інтервалі  $10^\circ \leq h_0 \leq 75^\circ$ , тобто

$$c_s = \frac{S'_\phi}{S'} = c_s(h_0). \quad (6.8)$$

Осереднена за багатьма географічними точками залежність  $c_s(h_0)$  наведена на рис. 6.6. Коефіцієнт переходу від інтегральної розсіяної радіації до інтегральної ФАР, тобто  $c_D = D_\phi / D$ , зі збільшенням  $h_0$  також зростає. Однак при моделюванні ця залежність часто не враховується, а для  $c_D$  береться середнє значення, рівне 0,6.

Відповідно до викладеного коефіцієнт переходу від сумарної радіації до сумарної ФАР, тобто  $c_Q$  можна представити виразом

$$c_Q = \frac{c_s S' D^{-1} + c_D}{1 + S' / D}. \quad (6.9)$$

Для ілюстрації на рис. 6.7 наведено річний хід добових сум сонячної радіації при безхмарному небі, а на рис. 6.8 – річний хід добових сум ФАР.

На рис. 6.9 зображено добовий хід інтегральної радіації для Ленінграда ( $\varphi = 60^\circ$  півн. ш.). Нарешті, рис. 6.10 ілюструє нерегулярний хід зміни протягом одного місяця коефіцієнта ослаблення радіації, обумовленого випадковим характером погодних умов. Мінливість протягом року тривалості дня на різних географічних широтах, розраховується за формулами (6.4) і (6.5).

Радіація, яка надходить до посіву, частково відбивається елементами рослинності або ґрунтом і розсіюється в навколишньому просторі, частково проникає всередину посіву. Коефіцієнт відбиття називається альбедо відповідно посіву або ґрунту. Альбедо залежить як від виду і стану рослин або ґрунту, так і від спектрального складу радіаційного потоку і, отже, від висоти Сонця. В зв'язку з розглядом питання про взаємодію радіації з рослинним покривом необхідно зробити декілька зауважень. З оптичної точки зору посів можна розглядати як мутне середовище.

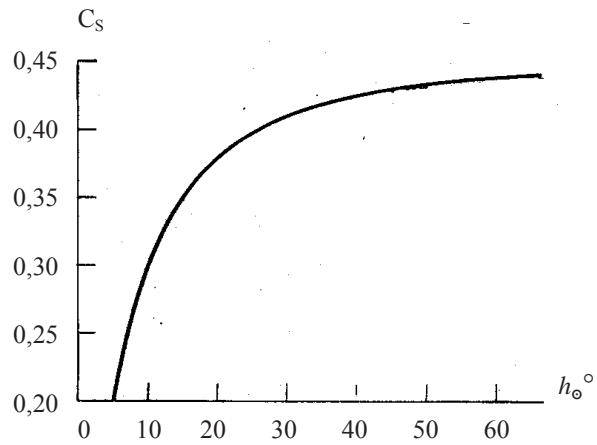


Рис. 6.6. Залежність коефіцієнта переходу від прямої радіації до ФАР від висоти Сонця

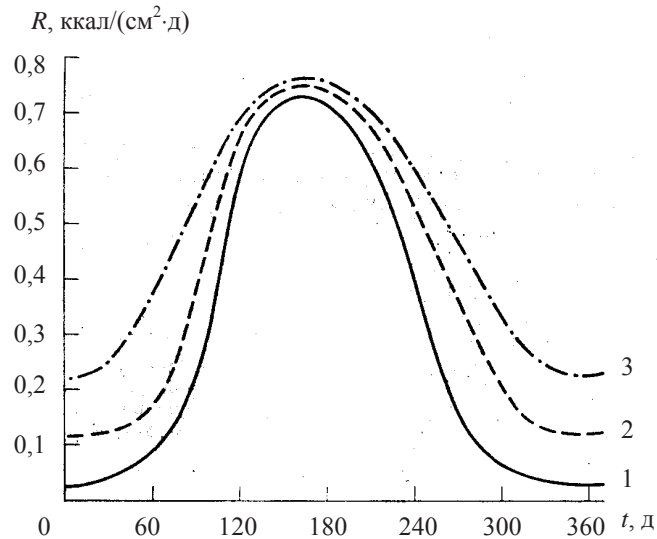


Рис. 6.7. Річний хід добових сум інтегральної радіації при безхмарному небі:  
1 – 60° півн. ш.; 2 – 51,5° півн. ш.; 3 – 43° півн. ш.

Однак, це тільки грубий образ. Він говорить про те, що в міру проникнення в глибину цього середовища частина радіації поглинається, а сумарний її потік поступово слабшає. При цьому поглинання і розсіювання радіації відбуваються вибірково, в залежності від довжини хвилі. Але якщо будемо далі деталізувати цю картину, то неминуче зіткнемося з труднощами. Насамперед, треба буде визнати, що це середовище неізотропне, а складається з різним образом орієнтованих і вигнутих пластин. Більш того, воно постійно змінюється завдяки коливанням рослин, викликаних вітром. І, нарешті, самі пластини не ідеальні. Дійсно, введено вище поняття локальної нормалі до поверхні листка у даній точці і розподіл кутів, які цю нормаль складала з вертикаллю, відображає лише ідеальну макроскопічну картину. Поверхня листків не є ідеально рівною, а вкрита нерівностями, утвореними устячковими клітинами і клітинами кутикули. Тому навіть паралельно падаючий на листок пучок світла відбивається в різних напрямках, утворюючи «індикатрису розсіювання».

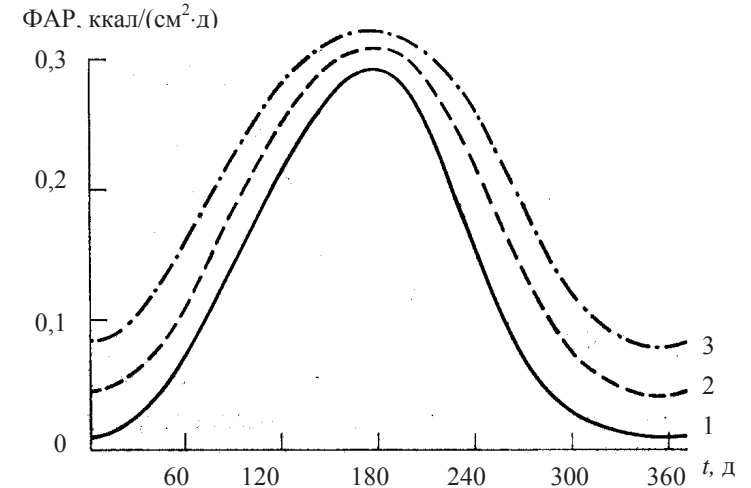


Рис. 6.8. Річний хід добових сум ФАР при безхмарному небі:  
1 – 60° півн. ш.; 2 – 51,5° півн. ш.; 3 – 43° півн. ш.

Якщо використати компартментний підхід, та уявно розділити посів на шари горизонтальними площинами, то можна в середньому виміряти (а потім і порахувати) сумарний потік радіації, що дійшов до деякого шару, сумарний потік, що виходить з цього шару і надходить у наступний шар і, отже, поглинену одиницею площі радіацію – як різницю, вхідного у компартмент і вихідного із нього потоків.

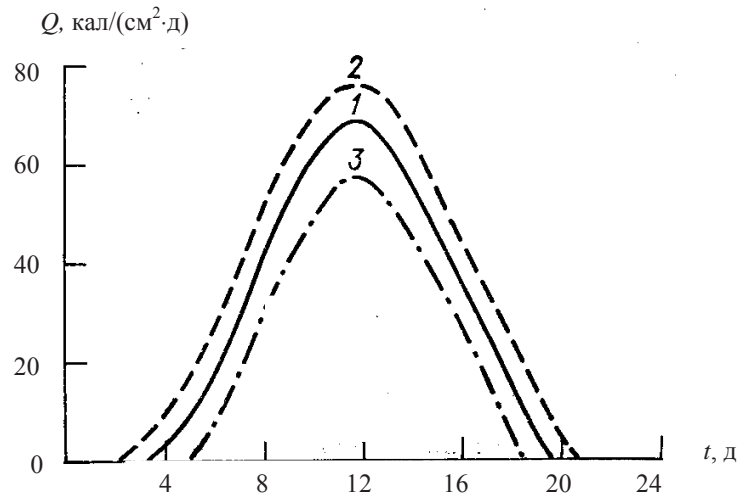


Рис. 6.9. Добовий хід інтегральної радіації у північній півкулі на широті 60°: 1 – 1 травня, 2 – 1 липня, 3 – 1 вересня

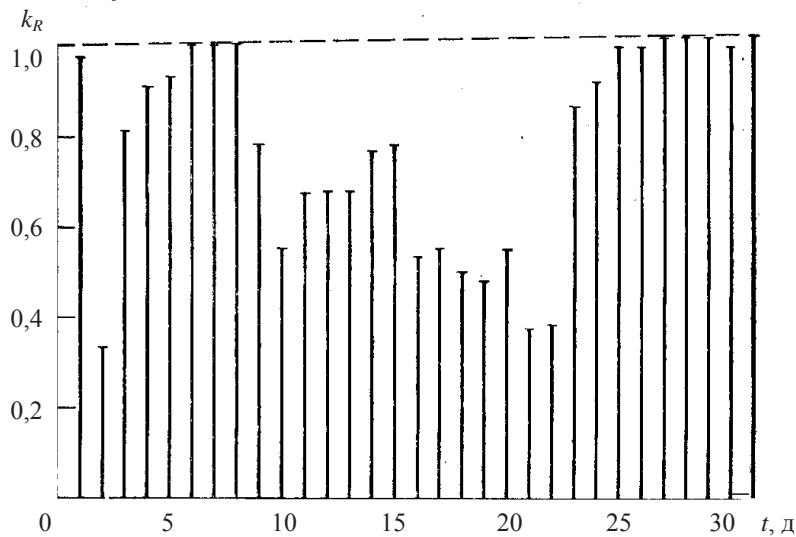


Рис. 6.10. Приклад зміни середньодобового коефіцієнта ослаблення радіації протягом місяця вегетації

Саме на цій основі й створені усі вимірювання радіаційного поля у рослинності та відповідні моделі. Побудовані ж за даними вимірювань безупинні криві представляють не що інше, як апроксимації «компаратментних» даних.

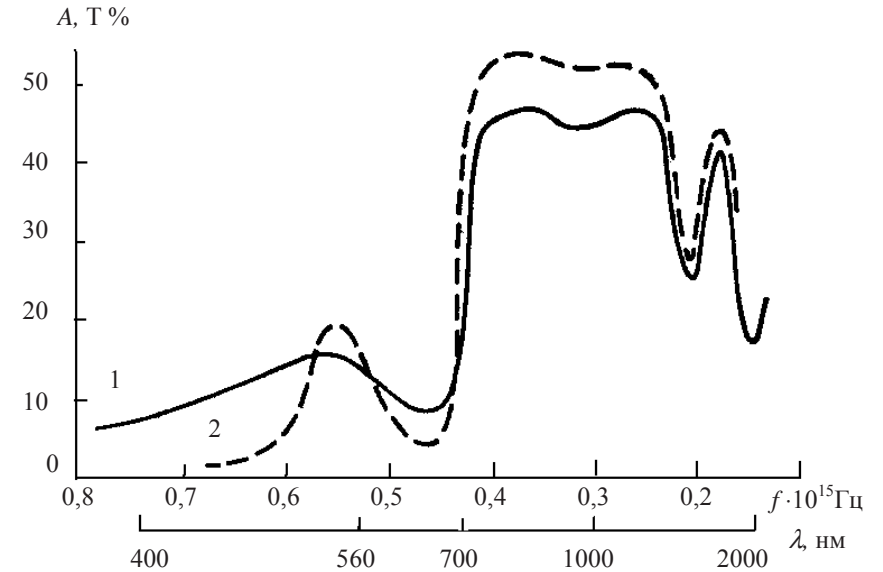


Рис. 6.11. Залежність коефіцієнтів відбиття (1) і пропускання (2) зеленого листка від довжини хвилі спадного світла.

Розглянемо спочатку трохи ідеалізовані оптичні характеристики окремого листка. Промениста енергія, яка падає на зелений листок, у тій чи іншій мірі поглинається ним, а інша її частина відбивається або пропускається. Якщо позначити прихідний потік енергії через  $Q$ , відбитий через  $Q_A$ , поглинений через  $Q_R$  і той, що пройшов крізь листок, через  $Q_T$ , то

$$A = \frac{Q_A}{Q}, \quad R = \frac{Q_R}{Q}, \quad T = \frac{Q_T}{Q}$$

відповідно позначаються коефіцієнти відбиття, поглинання і пропускання. Оскільки  $Q_A + Q_R + Q_T = Q$ , то

$$A + R + T = 1 \quad (6.10)$$

або

$$A + R + T = 100, \quad (6.11)$$

якщо ці величини виражені у відсотках.

Залежність коефіцієнтів відбиття  $A$  і пропускання від довжини хвилі для деякого «середнього» листка наведена на рис. 6.11. Характерним є різке зростання обох коефіцієнтів поблизу межі 700 нм. Більш того, в обох областях, розділених цією межею, тобто у видимій і близькій інфрачервоній, значення коефіцієнтів близькі й в середньому дорівнюють: у видимій області  $A \approx T \approx 0,1$ , а у близькій інфрачервоній  $A \approx T \approx 0,4$ .

Відзначимо, що в даному випадку ігнорується неізотропність відбиття. Радіація, відбита від поверхні ґрунту, завжди ізотропна. Коефіцієнт відбиття від ґрунту (альbedo ґрунту) не має такого крутого росту при  $\lambda = 700$  нм, але збільшується поступово. Альbedo сухого ґрунту монотонно зростає від значення 0,1 при 400 нм до 0,2 при 700 нм і далі до 0,3 при 1600 нм. Для вологого ґрунту ці величини відповідно дорівнюють 0,04; 0,1 і 0,25.

Взаємодія радіаційного поля з посівом представляється більш складним процесом. Радіація, перш ніж безповоротно поглинатися фітоелементом, багаторазово відбивається і розсіюється іншими елементами. При цьому міняється як напрямок поширення променистої енергії, так і її спектральний склад, а інтенсивність цих процесів саме і залежить, крім висоти Сонця  $h_0$ , від кутової орієнтації листків у посіві. У зв'язку з цим при моделюванні радіаційного режиму посіви розглядаються як горизонтально однорідні, а радіаційне поле вважається осередненим у горизонтальній площині.

Виділимо в посіві  $NL$  горизонтальних слоїв-компаратментів малої товщини і розглянемо компартмент з номером  $j^*$ . Нумерація компартментів проводиться зверху вниз: верхній шар (ярус) посіву має перший номер, а самий нижній – номер  $NL$ .

Позначимо листковий індекс  $j$ -го компартмента через  $L_j$ . В силу горизонтальної однорідності бокові потоки радіації взаємно компенсують один одного і сумарний боковий потік дорівнює нулю. Зверху  $j$ -го компартмента знаходиться  $j-1$  ярус із сумарним листковим індексом

$$L'(j) = L_1 + L_2 + \dots + L_{j-1} = \sum_{i=1}^{j-1} L_i. \quad (6.12)$$

В зв'язку з цим радіаційне поле на верхній кромці  $j$ -го ярусу можна розглядати як складене з наступних трьох компонентів:

1. Осереднені в горизонтальній площині потоки низхідної прямої

сонячної радіації щільністю  $E'(L'(j), h_0)$  і дифузійної радіації неба  $D(L'(j), h_0)$ .

2. Низхідні потоки цієї частини прямої і дифузійної радіації, яка розсіюється фітоелементами, розташованими вище, тобто  $S'(L'(j), h_0)$  і  $D_i(L'(j), h_0)$ .

3. Висхідні потоки прямої і розсіяної радіації, які формуються в результаті її відбиття фітоелементами ярусу  $(j+1)$  і нижче розташованих компартментів  $R_S(L'(j), h_0)$  і  $R_D(L'(j), h_0)$ .

Потоки, зазначені в пп. 2 і 3 також треба вважати осередненими у горизонтальній площині. Ці потоки необов'язково вертикальні. Важливо, що вони спрямовані відповідно у нижню або у верхню півсфери.

Для характеристики цих потоків вводять звичайно безрозмірні коефіцієнти – коефіцієнти пропускання для прихідної до посіву радіації:

$$a_S(L', h_0) = \frac{S'(L', h_0)}{S'(h_0)}, \quad (6.13)$$

$$a_D(L', h_0) = \frac{D(L', h_0)}{D(h_0)}, \quad (6.14)$$

для низхідної розсіяної фітоелементами радіації:

$$a_{IS}(L', h_0) = \frac{S'_I(L', h_0)}{S'(h_0)}; \quad (6.15)$$

$$a_{ID}(L', h_0) = \frac{D'_I(L', h_0)}{D(h_0)}, \quad (6.16)$$

а також альbedo

$$A_S(L', h_0) = \frac{R_S(L', h_0)}{Q(h_0)}; \quad (6.17)$$

$$A_D(L', h_0) = \frac{R_D(L', h_0)}{Q(h_0)}. \quad (6.18)$$

У цих співвідношеннях для простоти запису пропущений номер компартмента  $j$ . Вигляд коефіцієнтів пропускання прямої радіації визначається функцією  $G_I$ , яка означає середню для всіх листків проекцію площини фітоелементів на поверхню, перпендикулярну до напрямку сонячних променів.

Зокрема, при горизонтальному розміщенні листків

$$G_l = \sin h_o; \quad (6.19)$$

– при сферичному розміщенні

$$G_l = 0,5; \quad (6.20)$$

– при вертикальному, рівномірному по азимуту,

$$G_l = \frac{2}{\pi} \cos h_o. \quad (6.21)$$

Коефіцієнт пропускання прямої радіації виражається при цьому такою залежністю

$$a_S(L', h_o) = \exp(-L'G_l / \sin h_o), \quad (6.22)$$

а коефіцієнт пропускання дифузійної радіації має вигляд:

– при горизонтальному розміщенні листків

$$a_D = \exp(-L'); \quad (6.23)$$

– при сферичному розподілі

$$a_D = 2E_3(0,5L'), \quad (6.24)$$

де  $E_3$  – інтегрально-експоненціальна функція Гольда.

Для практичних розрахунків представляється доцільним усі низхідні потоки об'єднати і розглядати сумарний баланс на межі  $(j-1)$ -го і  $j$ -го компартментів. Тоді різниця між сумарним потоком на верхній і нижній межі  $j$ -го компартмента і буде тією радіацією, яка поглинена у даному компартменті. Для реалізації цього вводиться коефіцієнт або функція ослаблення сумарної радіації у посіві

$$a_Q(L', h_o) = \frac{(a_S + a_{IS})S'/D + (a_D + a_{ID})}{1 + S'/D}. \quad (6.25)$$

Для цього коефіцієнта отримані напівемпіричні формули. Залежність  $a_Q(L', h_o)$  для кукурудзи, сорго, ячменю має наступний вигляд

$$a_Q(L', h_o) = \frac{(S'/D)\exp(-c_1L'/\sin h_o) + a_D(L', h_o)}{1 + S'/D} + c_2[\exp(-c_1c_3L'\sin h_o) - \exp(-c_1L'/\sin h_o)] \quad (6.26)$$

при  $c_1 = 0,5$ ;  $c_2 = 0,3$ ;  $c_3 = 0,15$ ,

а для бавовнику записується у такій формі

$$a_Q(L') = \exp(-c_1L') + c_2[\exp(-c_1c_3L') - \exp(-c_1L')] \quad (6.27)$$

при  $c_1 = 0,65$ ;  $c_2 = 0,3$ ;  $c_3 = 0,15$ . Для потоку радіації у області ФАР можна також скористатися співвідношенням (6.26), у якому  $c_2 = 0$ .

Відзначимо, що функції пропускання сумарної радіації (6.25), особливо при сферичному і вертикальному розташуванні листків істотно залежать від відношення  $S'/D$ .

При мінливій хмарності це відношення міняється в широких межах, що неминуче приводить до мінливості радіаційного поля у посівах. При великих висотах Сонця функція пропускання сумарної радіації збільшується зі зростанням  $S'/D$ , а при малих  $h_o$  зменшується. Особливо помітна ця різниця при вертикальному розташуванні листків: при закритому хмарами Сонці ( $S'/D = 0$ ) на глибину  $L' = 2$  проникає тільки 30 % сумарної радіації, а з появою Сонця – до 90 %.

Розглянемо питання про альbedo посівів. Вище вже говорилося про коефіцієнти відбиття листка і ґрунту. Але якщо для ґрунту коефіцієнт відбиття дійсно можна прийняти за альbedo, то для рослинного покриву це не так. Інтегральна картина залежить від взаємного розміщення падаючих променів і листків, стану тканин листка й інших факторів. В цілому можна говорити лише про досить грубі залежності в умовах зімкнутого травостою. Альbedo сільськогосподарських культур складає в середньому 0,2–0,3 і зменшується при збільшенні висоти Сонця  $>8-10^\circ$ .

При малих кутах нахилу спостерігається деякий ріст альbedo, що пов'язано з перевагою дифузійної складової і зменшенням її частки з ростом  $h_o$ . Так само, як і функція ослаблення радіації, альbedo залежить від співвідношення  $S'/D$ , причому ця залежність при різних висотах Сонця, неоднакова: при  $h_o$ , які перевищують деяку величину, альbedo з ростом  $S'/D$  зменшується, а при малих висотах Сонця – збільшується. Ця мінливість підрозумівається різними співвідношеннями  $A_S$  і  $A_D$ . Крім того, спостерігається деяка асиметрія в добовому ході: значення відбитої радіації в післяполуденні години приблизно на 10 % більше, ніж до полудня. Значення альbedo посівів в області ФАР набагато менше, ніж для інтегральної радіації в цілому, і складає величину 0,02–0,07.

### 6.3. Режим довгохвильової радіації

Крім короткохвильової радіації до посіву з навколишнього простору надходять потоки довгохвильової (теплової) радіації. Вони поглинаються елементами посіву, пропускаються або розсіюються ними. Відповідно до

закону Стефана–Больцмана чорне тіло випромінює зі своєї поверхні теплову радіацію пропорційно четвертій степені абсолютної температури  $J = \sigma T_{abs}^4$ .

Дві необмежені пластини, розташовані паралельно одна одній, обмінюються променистою енергією, потік якої дорівнює

$$J_{1,2} = \sigma \delta (T_{1abs}^4 - T_{2abs}^4), \quad (6.28)$$

де  $\delta$  – коефіцієнт сірості.

При цьому потік тепла спрямовано від пластини з більшою температурою до пластини з меншою температурою. Для діапазону температур у межах від 0 до 30 °С, співвідношення (6.28) можна лінеаризувати і перейти до шкали Цельсія.

Дійсно, оскільки

$$\frac{1}{\sigma \delta} J_{1,2} = T_{1abs}^4 - T_{2abs}^4 = (T_{1abs}^3 + T_{1abs}^2 T_{2abs} + T_{1abs} T_{2abs}^2 + T_{2abs}^3)(T_{1abs} - T_{2abs})$$

в силу того, що  $T_{i,abs} = 273 + T_i$ , отримаємо

$$J_{1,2} = \sigma \delta \alpha (T_1 - T_2), \quad (6.29)$$

де

$$a = T_{1abs}^3 + T_{1abs}^2 T_{2abs} + T_{1abs} T_{2abs}^2 + T_{2abs}^3 \approx 4 \left( \frac{T_{1abs} + T_{2abs}}{2} \right)^2 \approx 9,6 \cdot 10^7. \quad (6.30)$$

Коефіцієнт  $a$  при зміні температури пластин у межах від 0 до 30 °С змінюється не більше ніж на 15 %. Якщо потрібна більш висока точність, то коефіцієнт  $a$  можна розраховувати щоразу, припускаючи

$$a = 4 \left( 273 + \frac{T_1 + T_3}{2} \right)^3 \approx 4 T_m^3, \quad (6.31)$$

де через  $T_m$  позначена півсума двох абсолютних температур.

З дуже високою точністю вираз (6.30) можна замінити лінійним

$$a = 8,13 [1 + 0,005(T_1 + T_2)] \cdot 10^7. \quad (6.32)$$

Представлення посіву у вигляді набору пластин, зрозуміло, було б

занадто великою ідеалізацією. На підставі компартментної стилізації, його можна, скоріше, уявити собі як набір решіток. У кожному компартменті «решітка» з фітоелементів частково пропускає крізь себе прихідний до неї потік радіації, а частково поглинає його або випромінює. Але до кожної такої «решітки» через їх напівпрозорість надходить потік не тільки від сусідніх компартментів, але й від усіх інших, розташованих вище або нижче даної, щоправда, в ослабленому вигляді. Таким чином, компартмент із номером  $j$  обмінюється тепловою енергією зі своїми безпосередніми сусідами.

Крім того, в залежності від знака різниці температур, він отримує теплову енергію або віддає її компартментам з номерами  $j-2, j-3, \dots, j+2, j+3, \dots$ , включаючи поверхню ґрунту й атмосферу. Однак, потік від більш далеких компартментів доходить до  $j$ -го, будучи ослабленим за рахунок його поглинання всіма проміжними елементами. Ця ідея була покладена І. Гоудріаном в основу отримання рівнянь балансу теплової радіації, які мають вигляд

$$J(j) = \frac{1 - \exp(-k_d L_j)}{L_j} \left[ \sigma'_{0,j} \{T_{sky} - T_l(j)\} + \sum_{i=1}^{NL} \sigma'_{i,j} \{T_l(i) - T_l(j)\} + \sigma'_{NL+1,j} \{T_{soil} - T_l(j)\} \right] \quad (6.33)$$

де  $J(j)$  – теплова радіація, яка поглинається за одиницю часу  $j$ -м ярусом листків;

$k_d$  – коефіцієнт поглинання, а через  $\sigma'$  позначені величини:

$$\sigma'_{0,j} = 4\sigma T_m^3(0, j) \exp\left(-k_d \sum_{l=1}^{j-1} L_l\right),$$

$$\sigma'_{i,j} = 4\sigma T_m^3(i, j) \exp\left(-k_d \sum_{l=1}^{i-1} L_l\right) \cdot [1 - \exp(-k_d L_j)], \quad (6.34)$$

$$\sigma'_{NL+1,j} = 4\sigma T_m^3(NL+1, j) \exp\left(-k_d \sum_{l=1}^{NL} L_l\right).$$

Нагадаємо, що позначення  $L_j$  відноситься до листового індексу  $j$ -го компартмента, а  $NL$  – означає їхню загальну кількість. У (6.34) для зручності запису поверхні ґрунту привласнено номер  $NL+1$ . Крім того, у моделі (6.33) фігурує «удавана температура неба»  $T_{sky}$ , яка відповідно до



досліджень Монтейса може бути прийнята рівною  $1,2T_a-21$  для ясного неба і  $T_a-2$  для похмурого неба, де  $T_a$  – температура повітря на рівні метеорологічної будки.

Відзначимо, що в денні години довгохвильова частина радіації складає дуже малу частку у загальному балансі посіву. В той же час вночі вона часто є визначальною. Крім того, виявляється, що включення у загальну модель рівнянь (6.32) необхідно для забезпечення стійкості чисельних схем при розрахунку температури листків і поверхні ґрунту.

#### 6.4. Моделювання виникнення радіаційного заморозку

Основною причиною нічного зниження температури у приземному шарі повітря є втрата тепла підстильною поверхнею, внаслідок довгохвильової радіації. Радіаційний баланс у нічний час визначає ефективно випромінювання землі. Радіаційне охолодження власне приземного шару повітря набагато менше охолодження підстильної поверхні. Тому внаслідок ефективного випромінювання проохолоджується в основному поверхня землі і це приводить до охолодження найближчих до неї шарів повітря і ґрунту. Таким чином, у нічні години підстильна поверхня виявляється охолодженою, а температура нагорі і внизу від неї поступово підвищується.

Чим більше ефективно випромінювання землі, тим більше нічне вихолоджування повітря і ґрунту. Збільшується і різниця між температурою нижнього і верхнього шарів повітря, а також поверхневих і більш глибоких шарів ґрунту, тобто збільшується градієнт температури. Нічне охолодження, а також температурні градієнти зростають зі збільшенням періоду охолодження після заходу Сонця.

Внаслідок того, що підстильна поверхня у нічні години охолоджена, а температура повітря поступово підвищується з висотою, повинен мати місце потік тепла від більш нагрітих шарів повітря вниз до поверхні землі. Такий потік тепла трохи послаблює вихолоджування підстильної поверхні, але разом з тим обумовлює зниження температури повітря.

Зі збільшенням швидкості вітру і шорсткості підстильної поверхні, коефіцієнт турбулентного обміну збільшується. З його ростом збільшується тепловий потік з повітря до поверхні ґрунту. Зменшення нічного спаду температури підстильної поверхні, в свою чергу викликає ослаблення вихолоджування приземного шару у нічні години.

Рослинний покрив згладжує різкі варіації температурного режиму поверхні ґрунту. В даний час розроблені теоретичні схеми розрахунку нічного зниження температури у рослинному покриві при безмарному

небі. Перша модель формування радіаційних заморозків у рослинному покриві запропонована В.А. Горбачовим. У цій моделі система ґрунт – рослина – атмосфера розглядається як сукупність трьох сполучених середовищ.

Зона I охоплює приземний шар атмосфери, який безпосередньо прилягає до верхньої межі рослинного покриву. Його висота ( $z=H_1$ ) вибирається на рівні, де не позначається вплив обмінних процесів агроценозів, і складає звичайно  $(3-4)h$ , де  $h$  – висота посіву.

Зона II ( $0 \leq z \leq h$ ) – це міжлисточковий простір рослинного покриву. Рослинний покрив при цьому передбачається досить протяжним середовищем, для якого виконана умова горизонтальної однорідності в статистичному розумінні. Остання обставина дозволяє знехтувати впливом горизонтальних градієнтів і розглядати перенесення основних субстанцій тільки у вертикальному напрямку.

Зона III містить у собі шар ґрунту, в якому розміщена коренева система рослин ( $R_1 \leq z \leq 0$ ).

Границі системи вибираються таким чином, щоб, з одного боку, забезпечити розрахункову схему всім необхідним комплексом метеорологічних параметрів (рівень  $z=H_1$ ), які спостерігаються, а з іншого боку досягти рівня стабільності термічних характеристик, на якому не позначається вплив добового ходу надземних метеорологічних елементів (рівень  $z=R_1$ ).

Конструкція моделі будується за припущенням, що в умовах формування заморозків процеси вологообміну у міжлисточковому просторі практично відсутні і не впливають на загальний енерго- і масообмін системи ґрунт – рослина – атмосфера. При такому підході предметом основної уваги є формування температурного режиму в цій системі.

Характерною рисою зони I є якісно різний характер процесів перенесення на її границях. Якщо віддалення верхньої межі  $z=H_1$  дозволяє розглядати її як частину квазістаціонарного приземного шару, то нижній рівень  $z=h$  піддається істотному впливу обмінних процесів рослинного покриву. Профіль температури тут знаходиться за співвідношенням

$$P(z) = -\rho c_p k_T(z) \frac{\Delta T}{\Delta z}, \quad (6.35)$$

де  $T$  – температура повітря;

$P(z)$  – потік тепла;

$k_T$  – коефіцієнт турбулентного обміну для потоку тепла;

$\rho, c_p$  – щільність і питома теплоємність повітря відповідно.

Припускаючи, що умови квазістаціонарності виконуються аж до рівня  $z=h$ , поведження температури в області  $h \leq z \leq H_1$  описується у вигляді

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{P(h)}{\rho c_p k_T(z)}. \quad (6.36)$$

Вигляд коефіцієнта  $k_T(z)$  визначається загальними особливостями перенесення кількості руху у шарі атмосфери, який прилягає до верхньої межі рослинного покриву.

Ця сукупність рівнянь розв'язується за умови, що потік тепла з верхньої межі рослинного покриву  $P(h)$  відомий. Для отримання його числового значення необхідно описати процес турбулентного теплоперенесення у міжлистковому просторі рослинного покриву  $0 \leq z \leq h$ . Це досягається за допомогою рівняння турбулентного теплообміну і рівняння теплопровідності для складових фітоелементів посіву

$$\begin{cases} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho c_p k_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho c_p S D_T (T_L - T), \\ \frac{\partial T_L}{\partial t} = \frac{1}{c_L} \left[ \frac{\partial}{\partial z} R_L - \rho c_p S D_T (T_L - T) \right], \end{cases} \quad (6.37)$$

де  $T_L(z)$  – температура фітомаси;

$S$  – питома площа листків;

$D_T$  – коефіцієнт теплообміну «листок – повітря»;

$R_L$  – радіаційний баланс рослинного покриву;

$c_L$  – питома теплоємність фітомаси.

Картина термічного режиму рослинного покриву взагалі і вигляд функції  $k_T(z)$ , зокрема, визначаються числовими значеннями основних параметрів, які характеризують перенесення кількості руху всередині посіву. Такими в нашому випадку є: масштаб турбулентності  $l(z)$ ; інтенсивність турбулентності  $b(z)$ ; коефіцієнт турбулентного обміну швидкості вітру  $k_u(z)$ .

Неоднорідність радіаційного поля на поверхні ґрунту породжує відповідну мінливість її температури. В той же час температура на рівні  $z = R_1$  вважається незмінною, тому необхідно врахувати формування температурного профілю в зоні III. Це здійснюється шляхом використання звичайного рівняння теплопровідності

$$\frac{dT}{dt} = \mu \frac{d^2 T}{dz^2}, \quad (6.38)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт теплопровідності ґрунту, значення якого в даному випадку вважається постійним.

Запишемо крайові умови задачі. Вище говорилося про способи задавання умов на межах  $z = H_1$  і  $z = R_1$ . Невизначеними залишаються тільки поверхні розділу середовищ: верхня межа рослинного покриву і для процесів переносу тепла – поверхня ґрунту. При написанні крайових умов на поверхні  $z = h$  у даному випадку виходимо з традиційної фізичної передумови про безперервність основних метеорологічних субстанцій і їхніх градієнтів.

У такому випадку приходимо до умов «зшивання» у вигляді:

$$T(z)|_{z=h_+} = T(z)|_{z=h_-}; \quad (6.39)$$

$$\frac{dT}{dz}|_{z=h_+} = \frac{dT}{dz}|_{z=h_-}.$$

Крайові умови на поверхні ґрунту враховують також умови збереження енергетичного балансу і мають такий вигляд:

$$T(z)|_{z=0_+} = T(z)|_{z=0_-}; \quad (6.40)$$

$$-\lambda_n \frac{dT}{dz}|_{z=0_+} + \lambda_{zp} \frac{dT}{dz}|_{z=0_-} = R(t),$$

де  $\lambda_n$  і  $\lambda_{zp}$  – теплопровідність повітря і ґрунту відповідно.

Початкові значення функцій, які необхідні для розв'язку диференціальних рівнянь, задаються у формі

$$T(z, t)|_{t=0} = T_0(z), \quad z \in [R_1, H_1], \quad (6.41)$$

$$T_L(z, t)|_{t=0} = T_0(z) + 5, \quad z \in [0, h].$$

Дослідження поведінки моделі проводилося за такими даними: висота рослинного покриву 80 см; верхня межа системи 200 см; глибина у ґрунті 50 см; температура на поверхні ґрунту 2,0 °С; температура ґрунту на глибині 50 см 6,8 °С; відносна площа листя 5 см<sup>2</sup>/см<sup>2</sup>; питома поверхня листя розподілена рівномірно по висоті посіву. Вхідна інформація про температуру повітря і швидкості вітру наведена на рис. 6.12.

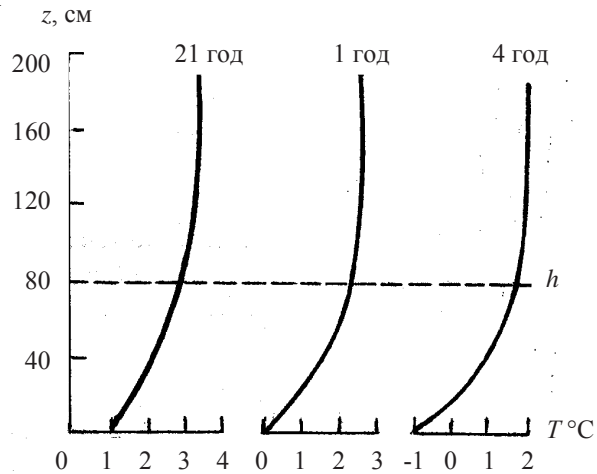


Рис. 6.12. Метеорологічні умови на рівні  $z = H_1$ , на фоні яких моделювалось формування радіаційного заморозку:  
1 – швидкість вітру; 2 – температура повітря;  $h$  – висота рослин

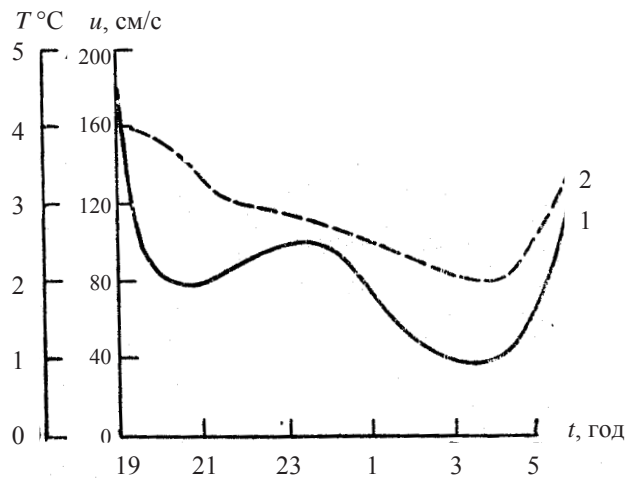


Рис. 6.13. Розраховані вертикальні профілі температури повітря  $T$  у нічні години при моделюванні формування радіаційного заморозку

На рис. 6.13 наведені профілі температури у рослинному покриві, які характеризують динаміку формування радіаційного заморозку. Так, якщо о 21 годині температура повітря у міжлистяному просторі змінювалася від 1 до 2,7 °С, то о першій годині в результаті радіаційного вихолодження відбулося її зниження – вона змінювалася від 0 до 2,2 °С. У ранкові години (о 4 годині) відбувалася більш значна зміна профілю температури повітря у міжлистяному просторі. Температура на поверхні ґрунту і температура повітря у нижніх шарах рослинного покриву була від'ємною, спостерігався заморозок.

### ЧАСТИНА III

## МОДЕЛЮВАННЯ РОСТУ РОСЛИН І ПРОЦЕСУ ФОРМУВАННЯ УРОЖАЮ ПОСІВІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР

### 7. РІВНЯННЯ РОСТУ

#### 7.1. Підходи до емпіричного опису процесів росту

Кількісний опис росту та розвитку рослинних і тваринних організмів вже протягом багатьох років спирається на функції росту. Звичайно їхнє призначення – зв'язати часові ряди даних, які відносяться до росту організму чи його частини, у рамках єдиного математичного виразу. Термін «функція росту» у зв'язку з цим найчастіше означає деяку аналітичну залежність. Зокрема, функція росту, яка пов'язує в загальному вигляді суху масу речовини  $M$  і час  $t$ , записується як

$$M = f(t), \quad (7.1)$$

де  $f$  – визначений функціональний зв'язок.

Використання функцій росту звичайно має емпіричну орієнтацію: вигляд виразу  $f$  часто підбирають, виходячи з припущень, обумовлених характером фактичного експериментального матеріалу. Проте краще спробувати вибрати або побудувати таку функцію, яка б відрізнялась визначеною біологічною правдоподібністю, а її параметри було б можливо піддавати інтерпретації, тобто відображала б фізіологічні або біохімічні механізми й обмеження, які лежать в основі досліджуваного процесу. Так, автокаталіз добре описується кривою експоненціального росту; ріст в умовах дефіциту поживних речовин – асимптотичною кривою; старіння або інші видозміни організму, які знижують темп його росту, також добре відображаються асимптотичними функціями, зокрема рівнянням Гомпертца. Виявилось, що досить важко знайти таку аналітичну функцію, яка описувала б ріст рослини або тварини в широкому діапазоні зовнішніх умов і параметри якої було б можливо інтерпретувати. Саме ця обставина стимулювала розвиток моделювання рослин і тварин. Зараз уже не викликає сумнівів, що дати простий опис такої складної системи, як рослина чи тварина, практично неможливо. Тому усе більше поширення отримують моделі, які використовують дві або більше залежностей,

містять багато параметрів і засновані на застосуванні різних чисельних методів і імітацій. Було б бажано саме за допомогою таких процедур отримувати конкретні залежності (7.1) кількості сухої речовини від часу. Тут, однак, розглядається декілька залежностей, які базуються на теоретичній структурі моделі, що містить гіпотези про дію фізіологічних і біохімічних механізмів. Хоча будь-яка модель на якомусь рівні є емпіричною, функції росту, які конструюються за її допомогою, виявляються корисними як при вивченні окремих органів, тканин і клітин, так і при дослідженні всього організму. Аналіз динаміки кількості сухої речовини  $M$  зручно (це стало також традиційним) починати з обговорення питання про темпи росту, тобто про похідну  $dM/dt$ . Диференціюючи вираз (7.1) за часом, отримуємо

$$\frac{dM}{dt} = g(t), \quad \text{де} \quad g(t) = \frac{df(t)}{dt}. \quad (7.2)$$

Потім виключимо із рівнянь (7.1) і (7.2) перемінну  $t$ , та отримаємо вираз

$$\frac{dM}{dt} = h(M), \quad (7.3)$$

де  $h$  – деяка функція.

Зауважимо, що рівняння (7.3) являє собою конструкцію «температура стану», де як змінна стану виступає кількість сухої речовини  $M$ . Залежність у формі рівняння (7.3) часто виявляється такою, що може бути біологічно інтерпретована, як правило, у біохімічних термінах. Однак для деяких функцій росту (наприклад, для визначеного типу експонентних поліномів) аналітичний висновок залежності (7.3) з рівнянь (7.1) і (7.2) може виявитися практично недоцільним. У ряді випадків функція росту може бути записана відразу ж у вигляді рівняння типу (7.3), а іноді, як, наприклад, для рівняння Гомпертца, більш зручнішою виявляється така форма

$$\frac{dM}{dt} = u(M, t), \quad (7.4)$$

де  $u$  є функція від  $M$  і  $t$ .

Оскільки кількість сухої речовини представляє для нас великий інтерес, подальше обговорення буде стосуватися саме цього параметра, хоча ясно, що отримані результати можуть бути поширені і на такі характеристики, як зелена маса, площа поверхні листя, сира маса і т.д. Крім того, хоча одиниці вимірювання повинні вибиратися виходячи з понять найкращого узгодження з конкретною ситуацією, у даному випадку доцільно внести визначеність: за одиницю виміру часу прийнято день, а за

одиницю виміру маси – кілограм. Величина  $\frac{1}{M} \cdot \frac{dM}{dt}$ , яка має розмірність, зворотну часу, також часто зустрічається при визначенні функцій росту. На жаль, для темпу росту, заданого зазначеним образом, використовуються різні терміни: *відносний темп росту*; *питомий темп росту*; *пропорційний темп росту*. Надалі в залежності від контексту будемо вживати кожний з названих трьох термінів.

У цьому розділі надається огляд найбільш поширених рівнянь росту. Там, де це можливо, ці рівняння виводяться на основі аналізу простих моделей, звичайно шляхом інтегрування диференціального рівняння типу (7.3) або (7.4). Такий підхід полегшить інтерпретацію параметрів залежностей типу «суха маса – час». На практиці для апроксимації часових рядів росту найчастіше застосовується напівлогарифмічна шкала, але при цьому можлива така ситуація, при якій крива складної форми на такому графіку може повністю втратити свою специфіку. Щоб цього уникнути, вирішення рівнянь, буде зображуватись як у лінійному, так і в напівлогарифмічному масштабі. На рис. 7.1 схематично зображена проста двокомпонентна модель.

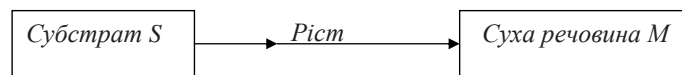


Рис. 7.1. Замкнута двокомпонентна модель росту

Система на рис 7.1 замкнута, оскільки не має ні входів, ні виходів: передбачається, що в процесі росту перетворення матеріалу першого компонента (субстрату –  $S$ ) у матеріал другого компонента (суха речовина –  $M$ ) відбувається без втрат. Різні припущення щодо залежності швидкості процесу (темлів росту) від  $M$  і  $S$  призводять до різних формалізацій.

Якщо допустити, що на розглянутому відрізку часу система не одержує з зовнішнього середовища і не втрачає ніякого матеріалу, то справедливо:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{dS}{dt};$$

$$\frac{dM}{dt} + \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(M + S) = 0, \quad (7.5)$$

так що

$$M + S = \text{const} = M_0 + S_0 = M_f + S_f = C, \quad (7.6)$$

де  $M_0$  і  $S_0$  – вихідні значення  $M$  і  $S$  за момент  $t = 0$ ;

$M_f$  і  $S_f$  значення, до яких наближаються ці параметри при  $t \rightarrow 0$  (при допущенні, що система згодом приходить у стабільний стан);

$C$  – постійна величина.

Далі темп росту можна представити у вигляді деякої функції  $v$

$$\frac{dM}{dt} = v(M, S). \quad (7.7)$$

Оскільки з рівняння (7.6) видно, що  $S = C - M$ , шляхом підстановки  $S$  у рівняння (7.7) одержуємо

$$\frac{dM}{dt} = v(M, C - M) = h(M), \quad (7.8)$$

де  $h$  – функція тільки одної перемінної  $M$ , як і у рівнянні (7.3).

Таким чином, рішення зводиться до задачі з одною змінною стану. Тепер треба розв'язати кардинальне питання – яку функцію варто використовувати у рівнянні (7.7). Відповідь на нього визначить вигляд рівняння (7.8) і після інтегрування – вигляд самого рівняння росту, тобто залежності (7.1). Подальші висновки будуть спиратися на різні припущення щодо функції  $v$  у рівнянні (7.7), тобто на деяких цілком визначених рівняннях росту, кожне з яких можна інтерпретувати в термінах зображеної на рис. 7.1 моделі.

## 7.2. Простий експоненціальний ріст з різкою відсічкою, мономолекулярне рівняння

*Простий експоненціальний ріст з різкою відсічкою.* Прийняті допущення: кількість енергії росту пропорційно кількості сухої маси  $M$ ; механізм росту «працює» з максимальним темпом протягом усього часу, поки існує живильне середовище; процес росту необоротний і припиняється, як тільки виснажується живильне середовище. Рівняння (7.7) набуває вигляду

$$\frac{dM}{dt} = \mu M, \quad (7.9)$$

де  $\mu$  – параметр, який вже згадувався під назвою питомого чи відносного темпу росту.

Параметр  $\mu$  залежить, по-перше, від виду сухої маси  $M$ , що відповідає (у заданій пропорції) ресурсу живильного середовища  $i$ , по-друге, – від продуктивності або швидкості, з якою «працює» механізм росту. Інтегрування рівняння (7.9) дає:

$$M = M_0 e^{\mu t} \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_f; \quad (7.10)$$

$$M = M_f \quad \text{при} \quad t > t_f.$$

Коли  $M = M_f$ ,  $S = 0$ , то з рівняння (7.6) виходить

$$M_f = M_0 + S_0 \quad (7.11)$$

і ріст раптово припиняється, якщо

$$t_f = \frac{\ln[(M_0 + S_0)/M_0]}{\mu}. \quad (7.12)$$

Тут наводиться результат підстановки  $t = t_f$  і  $M = M_0 + S_0$  у вираз (7.10).

Простий експоненціальний ріст, обмежений реальним ресурсом живильного середовища, графічно наведений на рис. 7.2, на якому суха речовина  $M$  і час  $t$  надані в довільних одиницях. Криві задані виразом (7.10) при  $M_0 = 1$ ;  $M_f = 100$ ;  $\mu = 2,2$ ;  $t_f = 23,0$ .

При використанні напівлогарифмічного масштабу крива росту перетворюється в пряму лінію, тому що з виразу (7.10) виходить

$$\ln M = \ln M_0 + \mu t. \quad (7.13)$$

*Мономолекулярне рівняння.* Це рівняння описує хід простої необоротної хімічної реакції першого порядку. Прийняті допущення: кількість енергії росту незмінна і не залежить від кількості сухої маси  $M$ ; механізм росту «працює» зі швидкістю, пропорційно ресурсу живильного середовища  $S$ ; ріст необоротний. В даному випадку замість рівняння (7.9) отримаємо

$$\frac{dM}{dt} = kS, \quad (7.14)$$

де  $k$  – постійна величина.

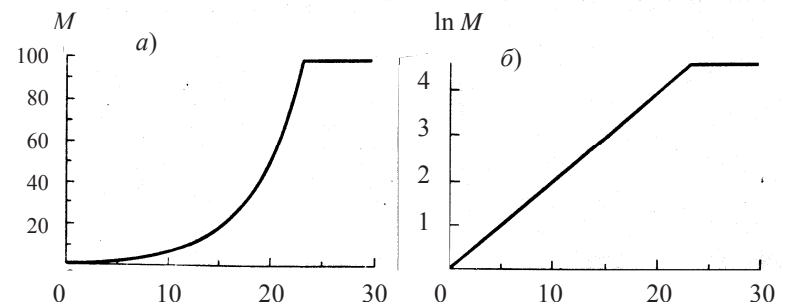


Рис. 7.2. Простий експоненціальний ріст з різким відсіканням

Користуючись співвідношенням (7.6), зробимо підстановку в рівняння (7.14), що при значеннях  $S(f) = 0$  і  $S = M_f - M$  дає

$$\frac{dM}{dt} = k(M_f - M). \quad (7.15)$$

Інтегруємо праву і ліву частини

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M_f - M} = \int_0^t k dt$$

і отримаємо

$$\ln \left( \frac{M_f - M_0}{M_f - M} \right) = kt.$$

Останній вираз можна записати у вигляді співвідношення

$$M = M_f - (M_f - M_0) \cdot e^{-kt}. \quad (7.16)$$

Якщо задати початкову масу  $M_0 = 0$ , то співвідношення (7.16) набуває ще більш простішої форми

$$M = M_f (1 - e^{-kt}).$$

Залежність (7.16) графічно наведена на рис. 7.3, де суха речовина  $M$  і час  $t$  представлені в довільних одиницях. Криві задані співвідношенням (7.16) при  $M_0 = 1$ ,  $M_f = 100$ ,  $k = 0,2$ .

Темп росту безупинно падає, і крива не має точки перегину. У цьому можна переконатися, досліджуючи другу похідну

$$\frac{d^2M}{dt^2} = -k^2(M_f - M) = -(M_f - M_0)k^2 e^{-kt},$$

яка перетворюється в нуль тільки при  $t \rightarrow 0$  або при  $M \rightarrow M_f$ .

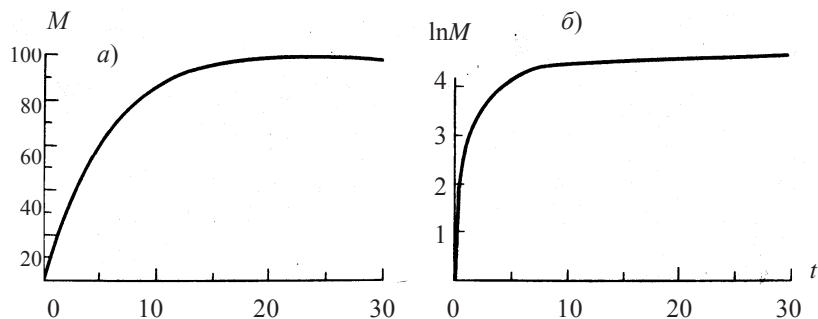


Рис. 7.3. Мономолекулярний ріст

### 7.3. Рівняння логістичного росту і крива росту Гомпертца

*Рівняння логістичного росту.* У попередніх розділах були розглянуті дві крайні ситуації: 1) у рівнянні (7.9) темп росту залежить тільки від енергії росту, яка пропорційна кількості сухої маси  $M$  і не залежить від ресурсу живильного середовища; 2) у рівнянні (7.15) темп росту залежить тільки від ресурсу живильного середовища і не залежить від сухої маси. При виведенні рівняння логістичного росту робиться двояке припущення: енергія росту пропорційна сухій масі  $M$ ; механізм росту «працює» зі швидкістю пропорційною ресурсу живильного середовища  $S$ ; процес росту необоротний. Відповідно до (7.9) і (7.14) за цих умов справедливо рівняння

$$\frac{dM}{dt} = k'MS, \quad (7.17)$$

де  $k'$  — постійна величина.

Далі підставимо із (7.6)  $S = M_f - M$  і прийемо  $S_f = 0$ , тоді отримаємо

$$\frac{dM}{dt} = k'M(M_f - M). \quad (7.18)$$

Скориставшись співвідношенням

$$k' = \frac{\mu}{M_f} \quad (7.19)$$

можна перейти від константи  $k'$  до уже відомого нам параметра  $\mu$ , тобто

$$\frac{dM}{dt} = \mu M \left(1 - \frac{M}{M_f}\right). \quad (7.20)$$

Одержаний вираз із залученням методу елементарних дробів можна переписати у вигляді

$$\int_{M_0}^M \left(\frac{1}{M_f - M} + \frac{1}{M}\right) dM = \int_0^t \mu dt \quad (7.20a)$$

і потім після інтегрування й елементарних перетворень отримати

$$M = \frac{M_0 M_f e^{\mu t}}{M_f - M_0 + M_0 e^{\mu t}}. \quad (7.21)$$

Частіше логістичне рівняння записують у вигляді

$$M = \frac{M_0 M_f}{M_0 + (M_f - M_0)e^{-\mu t}}. \quad (7.22)$$

Аналіз будь-якого з двох останніх виразів показує, що при  $M_0 \ll M_f$  для малих значень  $t$  (підстановка  $M_0 = 0$  у знаменник) справедлива наближена рівність

$$M \approx M_0 \cdot e^{-\mu t}, \quad (7.23)$$

з якої випливає, що при зазначених умовах має місце експоненціальний ріст з початковим темпом, рівним  $\mu$ . Якщо  $t \rightarrow \infty$  і  $M \rightarrow M_f$ , процес росту носить асимптотичний характер. Диференціювання (7.20) дає

$$\frac{1}{\mu} \frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{dM}{dt} \left( 1 - \frac{2M}{M_f} \right). \quad (7.20б)$$

Прирівнюючи праву частину нулю, переконаємося, що існує точка перегину при

$$M = \pm 1/2 M_f. \quad (7.24)$$

Підстановкою останнього виразу у рівняння (7.22) можна встановити, що ця точка відповідає моменту часу  $t = t^*$ , де

$$t^* = \frac{1}{\mu} \ln \left( \frac{M_f - M_0}{M_0} \right). \quad (7.25)$$

Відповідна крива росту зображена на рис. 7.4, на якому суха маса  $M$  і час  $t$  – у довільних одиницях. Криві задані виразом (7.22) при  $M_0=1$ ,  $M_f=100$ ,  $\mu=0,3$ . Через  $t^*$  позначена точка перегину: відповідно до виразу (7.25)  $t^*=15,32$ . Логістичне рівняння – перше серед розглянутих тут, яке дає криву з точкою перегину.

*Крива росту Гомпертца.* При виведенні логістичного рівняння виходили з припущення, що темп автокаталітичного росту регулюється ресурсом живильного середовища у відповідності з залежністю (7.17). Рівняння ж Гомпертца виводять, виходячи з наступних припущень: ресурс живильного середовища не обмежений, так що з цієї сторони енергія росту не зазнає впливу, енергія росту пропорційна сухій масі  $M$ , причому коефіцієнт пропорційності  $\mu$  є величина постійна.

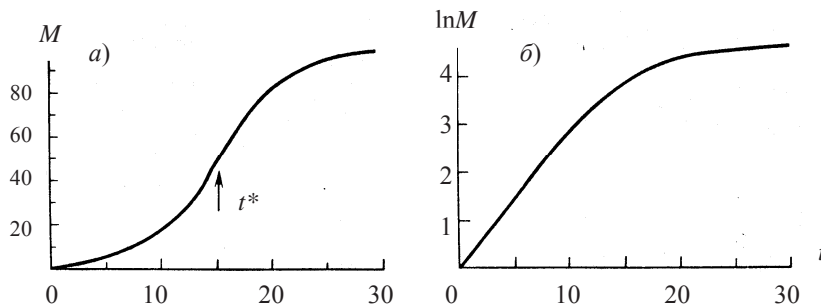


Рис. 7.4. Логістичний ріст

Ефективність енергії росту падає згодом, причому спад цей являє собою динаміку першого порядку і відповідно носить експоненціальний характер. Причиною спаду може бути деградація (зокрема, розщеплення ферментів), старіння або розвиток і ускладнення організму. До рівняння Гомпертца приводять різні комбінації припущень. Формалізація вказаних вище умов приводить до співвідношення

$$\frac{dM}{dt} = \mu M, \quad (7.26)$$

збіжному з рівнянням (7.9), однак тепер параметр  $\mu$ , тобто питомий темп росту, уже не є постійною величиною, а змінюється за законом

$$\frac{d\mu}{dt} = -D\mu, \quad (7.27)$$

де  $D$  – додатковий параметр, який характеризує зменшення  $\mu$ . Інтегруючи рівняння (7.27), одержуємо

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{-Dt}. \quad (7.28)$$

де  $\mu_0$  – значення параметра  $\mu$  в момент  $t = 0$ .

Підставляючи вираз (7.28) у рівняння (7.26), знаходимо

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 M e^{-Dt}. \quad (7.29)$$

Це – рівняння типу (7.4). Воно легко інтегрується

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = \mu_0 \int_0^t e^{-Dt} dt \quad (7.30)$$

і в результаті дає

$$\ln \left( \frac{M}{M_0} \right) = \frac{\mu_0}{D} (1 - e^{-Dt}). \quad (7.31)$$

Останнє співвідношення можна переписати у вигляді

$$M = M_0 \exp \frac{\mu_0 (1 - e^{-Dt})}{D}. \quad (7.32)$$



Для малих значень  $t$  величина  $e^{-Dt} \approx 1 - Dt$  і, отже, знову ми приходимо до експоненціального росту

$$M \approx M_0 \cdot e^{\mu_0 t}. \quad (7.33)$$

Оскільки  $t \rightarrow \infty$ , суха маса  $M$  наближається згодом до свого асимптотичного значення  $M = M_f$ , де

$$M_f = M_0 e^{\mu_0 / D}. \quad (7.34)$$

Після диференціювання рівняння (7.29), отримаємо

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{dM}{dt} e^{-Dt} - DM e^{-Dt}.$$

Потім прирівнюємо другу похідну до нуля з одночасною підстановкою  $dM/dt$  із рівняння (7.29) і знаходимо точку перегину, яка відповідає моменту  $t=t^*$ , де

$$t^* = \frac{1}{D} \ln\left(\frac{\mu_0}{D}\right) \quad \text{і} \quad M(t=t^*) = \frac{M_f}{e} \quad (7.35)$$

Шляхом виключення  $e^{-Dt}$  з рівняння (7.29) за допомогою співвідношення (7.31) можна прийти до стандартної форми «темп є функція стану» (див. рівняння (7.3))

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 M \left[ 1 - \frac{D}{\mu_0} \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) \right] \quad (7.36)$$

Використовуючи співвідношення (7.34), можна перейти від параметра  $D$  або  $\mu_0$  до величини  $W_f$  і отримати при цьому дві часто використовувані рівнозначні форми рівняння Гомпертца

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 M \left[ \frac{\ln(M_f / M)}{\ln(M_f / M_0)} \right] = DM \ln\left(\frac{M_f}{M}\right) \quad (7.37)$$

Рівняння Гомпертца наведене графічно на рис. 7.5. Криві заданні виразом (7.32) при  $M_0=1$ ,  $\mu_0=0,5$ ,  $D=0,1086$ ; відповідно до виразу (7.34),

$M_f=100$ . Через  $t^*$  позначена точка перегину; відповідно до виразу (7.35),  $t^*=14,07$ . Суха речовина  $M$  і час  $t$  в довільних одиницях.

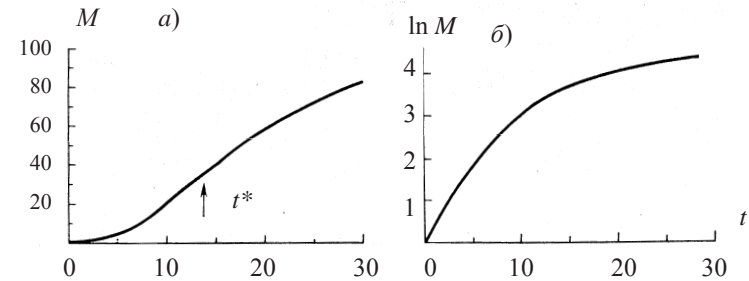


Рис. 7.5. Функція росту Гомпертца

Так само, як і в логістичному рівнянні, тут використовуються три параметри, однак точка перегину відповідає не половині підсумкової маси як у (7.24), а масі, яка менше підсумкової в  $e$  раз, див. вираз (7.35).

Порівняння рис. 7.4 і 7.5 показує, що при тих самих значеннях початкової і підсумкової маси і близьких значеннях часу, який відповідає точці перегину, крива Гомпертца демонструє більш швидкий ріст у початковій фазі, більш повільне наближення до асимптоти і більш протяжна лінійна ділянка на кінцях точки перегину.

#### 7.4. Рівняння росту Річардса і Чантера

*Рівняння росту Річардса.* Серед представників науки про рослини Річардс був першим, хто використовував рівняння росту, виведені фон Бергаланфі для опису розвитку тварин. Хоча функцію Річардса варто розглядати як емпіричну конструкцію, вона відрізняється універсальністю, що в ряді випадків є серйозною перевагою: при деяких значеннях додаткового параметра  $n$  функція Річардса перетворюється в одне з розглянутих вище рівнянь росту – мономолекулярне ( $n = -1$ ), логістичне ( $n = 1$ ) або Гомпертца ( $n = 0$ ). Диференціальне рівняння для функції Річардса може бути записане у вигляді

$$\frac{dM}{dt} = \frac{kM(M_f^n - M^n)}{nM_f^n}, \quad (7.38)$$

де  $k$ ,  $n$  і  $M_f$  – постійні величини, причому  $k$  і  $M_f$  – позитивні, а  $n \geq -1$ .

При  $n < -1$  рівняння втрачає фізіологічне значення, демонструючи при  $M \rightarrow 0$  безкінечний ріст.

При  $n = -1$  функція приводиться до вигляду

$$\frac{dM}{dt} = k(M_f - M) \quad (7.38a)$$

ідентичному мономолекулярному рівнянню (7.15). При  $n = 1$  вона перетворюється в таку формулу

$$\frac{dM}{dt} = kM \left( 1 - \frac{M}{M_f} \right) \quad (7.38b)$$

яка при заміні  $k$  на  $\mu$  перетворюється в логістичне рівняння (7.20). І, нарешті, при  $n = 0$ , скориставшись розкладанням  $M_f^n$  і  $M^n$  у логарифмічний ряд вигляду

$$x^n = e^{n \ln x} = 1 + n \ln x + \frac{1}{2!} (n \ln x)^2 + \dots,$$

Тоді легко показати, що

$$\frac{dM}{dt} = kM \ln \left( \frac{M_f}{M} \right),$$

тобто функція Річардса переходить у рівняння Гомпертца (7.37) за умови заміни  $k$  на  $D$ .

Рівняння (7.38) можна переписати у вигляді

$$n \int_{M_0}^M \left( \frac{1}{M} + \frac{M^{n-1}}{M_f^n - M^n} \right) dM = \int_0^t k dt \quad (7.39)$$

і після інтегрування отримати

$$M_0^n M_f^n = M^n [M_0^n + (M_f^n - M_0^n) e^{-kt}],$$

що еквівалентно

$$M = \frac{M_0 M_f}{[M_0^n + (M_f^n - M_0^n) e^{-kt}]^{1/n}}. \quad (7.40)$$

При  $t = 0$ ,  $M = M_0$ , а при  $t \rightarrow \infty$ ,  $M \rightarrow M_f$ . Щоб знайти точку перегину, якщо така існує, рівняння (7.38) необхідно диференціювати

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{k}{n M_f^n} \frac{dM}{dt} [M_f^n - (n+1) M^n]$$

і прирівняти другу похідну нулю. В результаті виявляється, що перегин має місце в момент  $t = t^*$ , коли  $dM/dt = 0$  або

$$M(t = t^*) = M_f \left( \frac{1}{n+1} \right)^{1/n}. \quad (7.41)$$

Підставимо  $M = M(t = t^*)$  у рівняння (7.41) і  $t = t^*$  у рівняння (7.40) та визначимо вираз для моменту перегину

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{M_f^n - M_0^n}{n M_0^n} \right). \quad (7.42)$$

Сімейство кривих, яке утвориться при різних фіксованих значеннях параметра  $n$ , наведене на рис. 7.6, де суха маса  $M$  і час  $t$  подані в довільних одиницях. Криві задані виразом (7.40) при  $M = 1$ ,  $M_f = 100$ ,  $k = 0,2$  для шести значень параметра  $n$ . Через  $N$  позначена крива мономолекулярного росту ( $n = -1$ , див. рис. 7.3), через  $G$  – крива Гомпертца ( $n = 0$ , див. рис. 7.5), а через  $L$  – логістична крива ( $n = 1$ , див. рис. 7.4). Точки перегину на рис. 7.6 позначені суцільними кружками функції (7.41) і (7.42).

На відміну від кривих Гомпертца і логістичної кривої тут точка перегину може відповідати будь-якій частці сумарної сухої маси (7.41). При цьому підрозумівається, що  $n$  змінюється в межах  $-1 < n < \infty$ .

*Рівняння росту Чантера.* Функція Чантера являє собою гібрид рівнянь Гомпертца і логістичного, а параметри її інтерпретуються аналогічним образом. За аналогією з рівняннями (7.20) і (7.29) можна побудувати функцію

$$\frac{dM}{dt} = \mu M \left( 1 - \frac{M}{B} \right) e^{-Dt}, \quad (7.43)$$

у якій  $\mu$ ,  $B$  і  $D$  – постійні величини.

Таким чином, у рівнянні (7.43) питомий темп росту  $(1/M) \cdot (dM/dt)$  регулюється двома факторами: по-перше, параметром  $(1 - M/B)$ , що лінійно пов'язаний з ресурсом живильного середовища і, по-друге, параметром  $e^{-Dt}$ , який пов'язаний з часом і може бути інтерпретований як ускладнення, розвиток або старіння аналогічно рівнянню Гомпертца (7.29). В результаті інтегрування рівняння (7.43) отримаємо

$$M = \frac{M_0 B}{M_0 + (B - M_0) \exp\{-[\mu(1 - e^{-Dt})/D]\}} \quad (7.44)$$

Цей вираз подібний, але не ідентичний функції Річардса (7.40). Усім чотирьом параметрам  $M_0$ ,  $B$ ,  $\mu$ , і  $D$ , які тут використовуються, може бути надана біологічна інтерпретація.

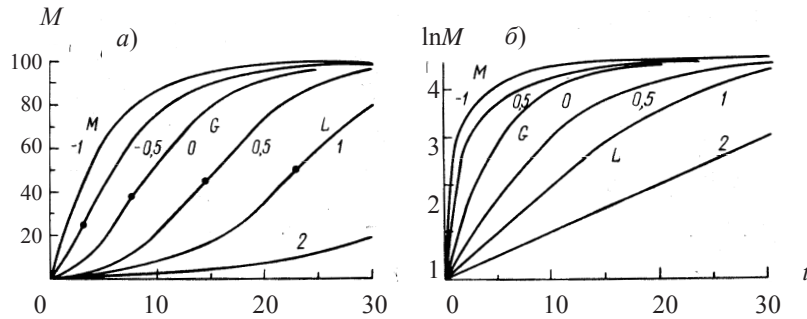


Рис. 7.6. Функція росту Річардса

В момент часу  $t = 0$  початкова маса може бути задана як  $M = M_0$ . Однак підсумкова маса, визначена при  $t \rightarrow \infty$ , виражається більш складною залежністю

$$M_f = \frac{M_0 B}{M_0 + (B - M_0) e^{-\mu/D}} \quad (7.45)$$

Слід зазначити, що підсумкову масу  $M_f$  можна визначити через доступність живильного середовища  $B$ , через показник ускладнення  $D$  або шляхом використання комбінації цих двох параметрів.

Наприклад, приймаючи

$$M_L = B \quad \text{і} \quad M_G = M_0 \cdot e^{\mu/D} \quad (7.46)$$

для обмеження підсумкової маси, яка була б розрахована за допомогою тільки логістичного рівняння або тільки функції Гомпертца, рівняння (7.45) можна записати у вигляді

$$M_f = \frac{M_L M_G}{M_L + M_G - M_0} \quad (7.47)$$

Іншими словами, підсумкова маса, відповідно до цієї залежності набуває значення, яке завжди нижче, ніж  $M_L$  і  $M_G$ , хоча може наближатися до зазначених меж як завгодно близько.

За допомогою виразу (7.45) визначаємо

$$B = \frac{M_f M_0 (e^{\mu/D} - 1)}{M_0 e^{\mu/D} - M_f} \quad (7.48)$$

і, підставляючи отриману формулу в (7.44), виразити функцію росту через уже знайомі параметри  $M_0$ ,  $M_f$ ,  $\mu$  і  $D$ .

Розв'язуючи рівняння (7.44) відносно  $e^{-Dt}$  і потім, замінюючи в (7.43)  $e^{-Dt}$  на отриманий результат, можна побудувати функцію стану, права частина якої не містить перемінної часу, див. рівняння (7.3) і (7.4)

$$\frac{dM}{dt} = \mu M \left( \frac{B - M}{B} \right) \left\{ 1 - \frac{D}{\mu} \ln \left[ \left( \frac{M}{B - M} \right) \left( \frac{B - M_0}{M_0} \right) \right] \right\} \quad (7.49)$$

Якщо параметр  $D \rightarrow 0$  – це є відсутність старіння, то функції (7.44) і (7.49) стають ідентичними логістичним рівнянням (7.22) і (7.20); якщо ж  $B \rightarrow \infty$ , тобто – не має обмежень на ресурс живильного середовища, то ті ж функції перетворюються у рівняння Гомпертца (7.32) і (7.36).

Диференціювання функцій (7.43) і (7.49) з метою визначення точки перегину кривої росту призводить до рівняння, яке може бути розв'язане тільки чисельними методами на момент часу перегину ( $t = t^*$ ) або для значення сухої маси, що відповідає моменту перегину.

Сімейство кривих, описаних рівнянням (7.44), наведено графічно на рис. 7.7. Суха маса  $M$  і час  $t$  подані в довільних одиницях. Щоб їх побудувати, треба було зафіксувати значення початкової і підсумкової маси  $M_0$  і  $M_f$ , а також значення питомого темпу росту, тобто параметра  $\mu$ .

## 7.5. Експоненціальні поліноми

Криві задані співвідношенням (7.44) при  $M_0=1$ ,  $M_f=100$ ,  $\mu = 0,5$  для трьох значень параметра  $D$ . Через  $L$  позначена логістична крива ( $D \rightarrow 0$ ), через  $G$  – крива Гомпертца ( $D \rightarrow \mu / [\ln(M_f / M_0)]=1086$ ); проміжна крива будувалася для значення  $D = 0,05$ . Значення перемінної  $B$  у виразі (7.44) визначалось за допомогою рівняння (7.48).

Всім наведеним кривим відповідали однакові значення початкової і кінцевої сухої маси, а також темпу росту. Для кожного значення параметра  $D$ , що включаються до розглядання за допомогою рівняння (7.48) вираховувалось відповідне значення параметра  $B$ , яке потім підставлялося у рівняння (7.44) для визначення величини  $M(t)$ . Для даних значень  $M_0$ ,  $M_f$  і  $\mu$  параметр  $D$  може лежати в межах

$$0 \leq D \leq \mu / [\ln(M_f / M_0)], \quad (7.50)$$

причому верхня межа встановлюється шляхом спрямування до нуля знаменника у рівнянні (7.48), що перетворює  $B$  у нескінченність.

Вибираючи значення для  $D$  із зазначеного числового інтервалу, можна будувати сімейство кривих, яке обмежено праворуч і ліворуч відповідно кривими Гомпертца і логістичної кривої.

Всі криві сімейства мають ті самі значення початкової і підсумкової сухої маси, а також рівний для всіх початковий питомий темп росту. Точка перегину в міру збільшення  $D$  зміщується в сторону великих значень часу.

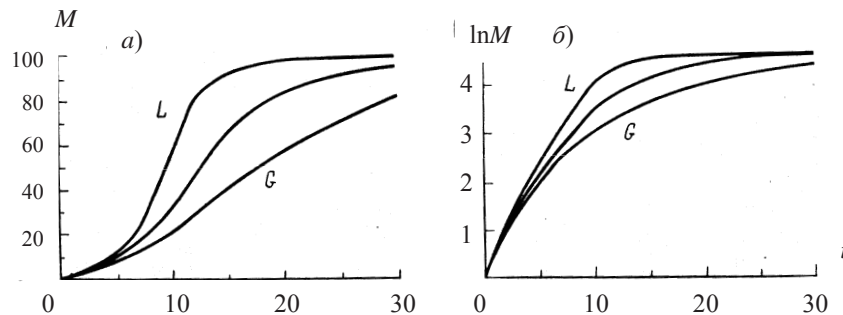


Рис. 7.7. Функція росту Чантера

На противагу розглянутим вище шістьом функціям росту, що виводяться з відносно простих посилок (відносини між фіксованими станами використовуються як функціональна основа), клас функцій, відомих за назвою експоненціальних поліномів, є чисто емпіричним і, як правило, не піддається фізіологічній інтерпретації. Рівняння цього класу записуються у вигляді

$$M = \exp(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots), \quad (7.51)$$

де  $a_0, a_1, \dots$  – постійні коефіцієнти.

Після логарифмування вираз (7.51) набуває вигляду

$$\ln M = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \quad (7.52)$$

Похідна від кожної з двох останніх функцій

$$\frac{dM}{dt} = (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots) \exp(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) \quad (7.53)$$

може бути представлена як

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots). \quad (7.54)$$

Справедливо також

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = M[(2a_2 + 6a_3 t + \dots) + (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots)^2]. \quad (7.55)$$

Вихідна суха маса при цьому складає

$$M_0 = M(t=0) = \exp a_0, \quad (7.56)$$

а підсумкова суха маса  $M(t \rightarrow \infty)$  дорівнює нескінченності або нулю. Момент перегину  $t^*$  визначається з рівняння (7.55)

$$0 = 2a_2 + 6a_3t + \dots + (a_1 + 2a_2t + \dots)^2. \quad (7.57)$$

Момент часу, при якому досягається максимум сухої маси, визначається з рівняння (7.53)

$$0 = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + \dots, \quad (7.58)$$

а значення цього максимуму – шляхом зворотної підстановки отриманого результату у рівняння (7.51).

На відміну від розглянутих раніше функцій рівняння (7.51) легко підігнати до результатів експерименту, користуючись існуючими методами обробки статистичних даних, причому для вирішення такої задачі на ПЕОМ уже написано ряд обчислювальних програм. При цьому ступінь полінома доцільно обмежувати квадратом, тобто  $a_3 = a_4 = \dots = 0$ , тому що в іншому випадку виникає імовірність помилкових відгуків і інших помилкових рішень.

Для квадратичних поліномів існує наступний простий і швидкий метод рішення, за допомогою якого можна отримувати наближені оцінки трьох параметрів  $a_0, a_1$  і  $a_2$ . З виразу (7.52) визначається  $a_0$

$$a_0 = \ln M_0, \quad (7.59)$$

а з (7.54) визначається вихідний питомий темп росту  $a_1$

$$a_1 = \frac{1}{M} \frac{dM}{dt} (t=0). \quad (7.60)$$

Помітимо, що параметр  $a_1$  може бути також визначений геометрично як нахил кривої на графіку функції (7.52), якщо цей графік виконаний у напівлогарифмічному масштабі. Далі, за допомогою рівняння (7.58) знаходять момент часу  $t_m$ , який відповідає максимуму сухої маси:

$$t_m = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad (7.61)$$

а потім підстановкою у вираз (7.51) і власне максимальне значення  $W_m$ . Тепер можна записати

$$M_m = M_0 \exp(-a_1^2 / 4a_2), \quad (7.62)$$

відкіля

$$a_2 = -\left(\frac{a_1^2}{4}\right) / \ln\left(\frac{M_m}{M_0}\right). \quad (7.63)$$

Таким чином, отримані шукані оцінки всіх трьох параметрів –  $a_0, a_1$  і  $a_2$ . Моменти перегину  $t^*$  (див. рівняння (7.57)) розташовуються симетрично моменту часу, що відповідає максимуму сухої маси

$$t^* = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{1}{(-2a_2)^{1/2}}. \quad (7.64)$$

Типова експоненціально-квадратична крива зображена на рис. 7.8, де криві задані рівняннями (7.51) і (7.52) при  $a_0 = 0; a_1 = 0,5; a_2 = -0,0136; a_3 = a_4 = \dots = 0$ , так що  $M_0 = 1$ , а максимальна суха маса (функція 7.62)  $M_m = 100$ . Суха речовина  $M$  і час  $t$  дані в довільних одиницях. Стрілочками на рис. 7.8а позначені моменти часу, які відповідають точкам перегину функції (7.64).

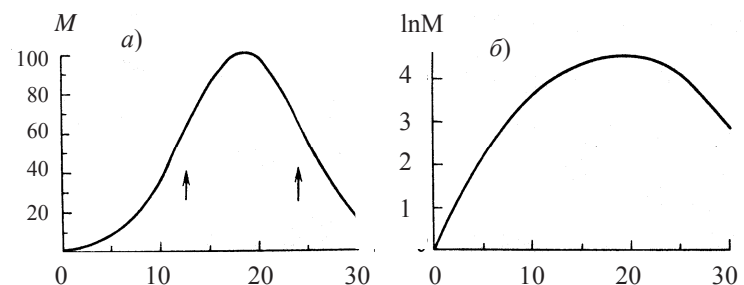


Рис. 7.8. Експоненціально-квадратична функція росту

Ясно, що ця крива, не може описувати поведінку органа чи організму, для яких характерний асимптотичний (з ненульовою асимптотою) ріст або збільшення сухої маси. Вона може досить адекватно описувати процес тільки до точки максимуму.

## 8. ФІЗИКО-СТАТИСТИЧНІ МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ УРОЖАЙНОСТІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР

### 8.1. Комплексна біофізична модель погода – ґрунт – урожай О. Р. Константинова

#### 8.1.1. Передумови побудови моделі

Встановлені багато численні локальні зв'язки урожайності з окремими факторами, які часто використовувалися в минулому, не можуть досить повно задовольнити запити практики сільськогосподарського виробництва. Комплексна емпірична модель життєдіяльності рослин, повинна відповідати таким вимогам:

- а) мати кількісні характеристики всіх основних елементів продукційного процесу (тобто процесу формування біомаси);
- б) кількісно виражати вплив усіх факторів на рослину в величинах зміни урожайності;
- в) бути забезпеченою необхідною інформацією, яка накопичена до теперішнього часу.

Така комплексна емпірична модель погода – ґрунт – урожай розглядається нижче.

У моделі автоматично враховується взаємозв'язок між факторами, які обумовлюють урожайність. Так, при аналізі безпосереднього впливу на урожайність першого фактора враховується непрямий вплив на урожайність усіх наступних факторів, пов'язаних з першим. Кожен  $i$ -й фактор враховує, таким чином, непрямий вплив усіх наступних  $n-i$  факторів і не враховує вплив попередніх  $i-1$ , оскільки їхній вплив був врахований раніше. В результаті лише вплив останнього фактора виявляється у розглянутому ряді при виключеному впливі всіх попередніх факторів.

Незалежний вплив попередніх факторів можна визначити шляхом зворотного ходу процесу виключення при русі від останнього фактора до першого. Для розрахунку урожаю перевагу варто віддавати результатам, встановленим при прямому ході, коли враховуються як прямі, так і непрямі зв'язки. Це зручно при використанні отриманої характеристики в сільськогосподарських цілях. У цих випадках потрібні такі характеристики, які б враховували вплив не тільки обраного фактора, але і непрямий вплив на урожайність через неї інших факторів, оскільки в природі вони так само і таким самим способом взаємно пов'язані, як і у вихідній вибірці, покладеної в основу побудови розрахункових графіків.

При зміні черговості обліку впливу окремих факторів кінцевий результат розрахунку залишається попереднім, однак, можливі деякі розбіжності кількісних характеристик ефективності проміжних предикторів. Попередня оцінка показала, що вони здебільшого лежать в межах точності розрахунків і на них можна не зважати. Щоб цілком виключити навіть найменший вплив цих розбіжностей на точність розрахунків, фактори рекомендується враховувати в тій же послідовності, що і при аналізі, який послужив основою побудови розрахункових графіків.

Серед основних факторів, які впливають на урожайність сільськогосподарських культур, О.Р. Константиновим вибрані біологічні особливості культури, гідрометеорологічні елементи, родючість ґрунту і агротехніка. Відповідно до цього комплексна біофізична модель погода – ґрунт – урожай має чотири блоки: біологічний, метеорологічний, родючості ґрунту та агротехніки.

Врахування біологічних особливостей здійснюється за рахунок послідовного розгляду всіх факторів за міжфазні періоди, а також диференціації культур за видом і сортом. Вплив метеорологічних факторів зводиться до врахування температури й абсолютної вологості повітря за літній період, а також температури повітря і висоти снігового покриву за зимовий період.

У загальному вигляді модель О.Р. Константинова представлена рівнянням

$$Y_{роз.} = Y_1^2 + \sum_{i=2}^n \Delta Y_i^2 \quad (8.1)$$

де  $Y_{роз.}$  – відносне значення розрахункової урожайності (у частках середньої урожайності, досягнутої при існуючому рівні культури землеробства);

$Y_1^2$  – графічне значення відносної урожайності, обумовленої впливом першого фактора;

$\Delta Y_i^2$  – додатковий вплив на урожайність інших факторів, які визначаються за допомогою графічної регресії:

$$\begin{aligned} \Delta Y_1 &= Y_{\phi} - Y_1^2 \\ \Delta Y_2 &= Y_{\phi} - (Y_1^2 + \Delta Y_2^2) = \Delta Y_1 - \Delta Y_2^2 \\ \Delta Y_3 &= Y_{\phi} - (Y_1^2 + \Delta Y_2^2 + \Delta Y_3^2) = \Delta Y_2 - \Delta Y_3^2 \\ &\dots \\ \Delta Y_i &= Y_{\phi} - (Y_1^2 + \sum_{i=2}^n \Delta Y_i^2) = \Delta Y_{i-1} - \Delta Y_i^2 \end{aligned} \quad (8.2)$$

де  $V_\phi$  – фактична урожайність.

Обрані фактори досить тісно корелюють з іншими елементами, такими, як фотосинтетично-активна радіація (ФАР), концентрація  $\text{CO}_2$ , в атмосфері, відносна вологість повітря, дефіцит насичення повітря і т.д. Тому попарного розгляду температури і вологості повітря достатньо для оцінки впливу метеорологічних умов на урожайність культури.

Стосовно родючості ґрунту, то її також зведено у моделі до врахування двох складових: вологості та об'ємної маси ґрунту. Агротехніка враховується шляхом виділення впливу різних агротехнічних засобів на підвищення родючості ґрунту і збільшення урожайності в залежності від внесених добрив. Вплив усіх визначених факторів оцінюється у відносних одиницях урожайності, що дозволяє наочно судити про їх значимість і безпосередньо порівнювати їх між собою.

З врахуванням викладеного модель (8.1) набуває такого вигляду

$$V_{\text{роз.}} = V_{T,e}^2 + V_{T,h}^2 + V_{W,Q}^2 + V_{A,n}^2 + V_{A,\text{добр.}}^2 + V_{A,C}^2 - (i-1) \quad (8.3)$$

де  $V_{T,e}^2$  – урожайність, обумовлена впливом температури і вологості повітря теплого періоду;

$V_{T,h}^2$  – урожайність, обумовлена умовами перезимівлі;

$V_{W,Q}^2$  – урожайність, обумовлена ґрунтовою родючістю ( $W$  – запаси продуктивної вологи,  $Q$  – об'ємна маса ґрунту);

$V_{A,n}^2$  – урожайність, обумовлена впливом попередника;

$V_{A,C}^2$  – урожайність, обумовлена сортом культури;

$V_{A,\text{добр.}}^2$  – урожайність, обумовлена добривами.

Для забезпечення можливості співставлення між собою урожаїв, обумовлених впливом різних факторів, останні надаються у відносних величинах, тобто в частках середньої урожайності. Це досягається тим, що після зняття значень  $\Delta V_i$  з графіків зв'язку до них додається 1. Тому у правій частині (8.3) як вільний член є присутнім  $(i-1)$ . У даному випадку, враховано шість факторів, отже, величина виразу  $(i-1)$  дорівнює 5.

Вплив на урожайність погоди теплого періоду аналізується послідовно за фазами розвитку рослин (тобто безпосередньо залежить від них); за фазами розвитку аналізується і вплив на урожайність вологозапасів ґрунту. Вплив умов перезимівлі безпосередньо залежить від властивостей сорту культури, тобто від їхньої зимостійкості.

Непрямі зв'язки між факторами, які визначають урожайність більш

різноманітні. Вплив на урожайність погодних умов теплого періоду і вологозапасів ґрунту взаємозалежний, він залежить також від виду і сорту рослин, Умови перезимівлі посередньо впливають на розвиток рослин у теплий період. Тип ґрунту і його вологозапаси посередньо взаємозалежні. Вибір агротехнічних прийомів залежить від типу ґрунту і виду культури; вологозапаси ґрунту пов'язані з попередником. Вплив на урожайність попередника залежить від виду культури і її сорту, а біологічна післядія попередника залежить від типу ґрунту, його вологозапасів і взаємозалежна з видом добрив. Ефективність кількості і виду добрив також залежить від типу ґрунту й агротехніки.

Розглянемо вплив визначальних факторів на урожайність озимої пшениці.

### 8.1.2. Погода теплого періоду і урожайність

Під умовами погоди підрозумівається температура і вологість повітря, фотосинтетично-активна радіація і концентрація вуглекислого газу  $\text{CO}_2$ . Відомо, що ФАР знаходиться в тісному зв'язку з температурою і вологістю повітря. З цими ж факторами пов'язаний добовий і сезонний хід концентрації  $\text{CO}_2$ , абсолютні значення якого залежать ще і від родючості ґрунту, що враховується окремо. Тому за характеристику погодних умов теплого періоду прийняті значення температури і вологості повітря.

При аналізі вихідних даних на координатну сітку, уздовж осей якої відкладені температура  $T$  і вологість повітря  $e$ , наносяться розраховані величини відносної урожайності  $V_\phi = V_\phi / V_{\text{ср}}$ . При цьому в полі графіка утворюється замкнена зона високої урожайності  $V_\phi > 1$ , при відхиленні від якої, відповідно у бік високих і низьких температур (вологості повітря) урожайність знижується.

Значення фактичної відносної урожайності наносяться на графік першого міжфазного періоду (рис. 8.1, криві 1). Відповідно до прийнятої схеми аналізу на графік другого міжфазного періоду (рис. 8.1, криві 2) наносяться величини

$$\Delta V_{T,e,1} = V_\phi - V_{T,e,1}^2, \quad (8.4)$$

де  $V_{T,e,1}^2$  – графічне значення відносної урожайності, зняте з ізоліній, проведених на рис. 8.1, криві 1;

$\Delta V_{T,e,1}$  – різниця між  $V_\phi$  і  $V_{T,e,1}^2$  обумовлена впливом ще не врахованих факторів.

Для переведення величини  $\Delta V_{T,e,1}$  у відносну урожайність, тобто для вираження її в частках середньої урожайності, до її значення додається одиниця (вважається, що  $V_{T,e,1} = \Delta V_{T,e,1} + 1$ ). Відповідно до цього на другий

графік (рис. 8.1, криві 2) наноситься значення  $U_{T,e,1}$  і визначається  $\Delta U_{T,e,2}$  як різниця між  $U_{T,e,1}$  і  $U_{T,e,2}^c$ , після чого визначається  $U_{T,e,2} = \Delta U_{T,e,2} + 1$ . Остання величина наноситься на третій графік (рис. 8.1, криві 3), а на четвертий (рис. 8.1, криві 4), – значення  $U_{T,e,3} = \Delta U_{T,e,3} + 1$ , за допомогою якого визначається величина  $U_{T,e,4}$ . Криві 5 дають уявлення про зв'язок відносної урожайності з погодними умовами теплового періоду.

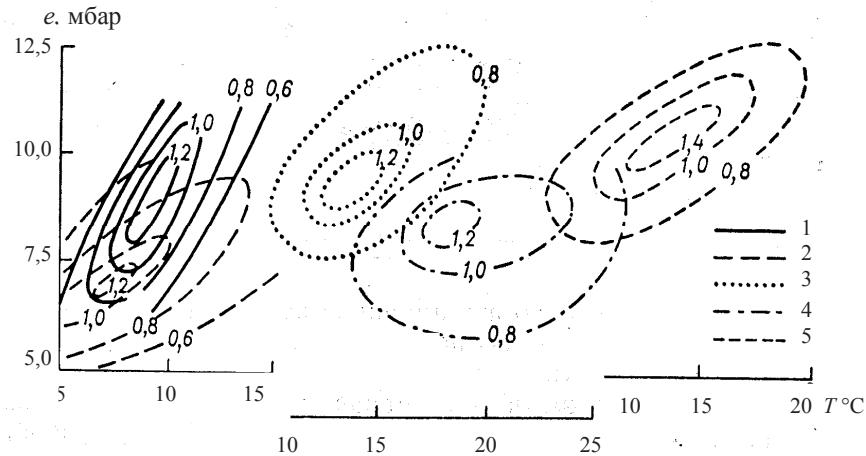


Рис. 8.1. Залежність урожайності озимої пшениці від погодних умов періоду вегетації, які характеризуються температурою  $T$  і вологістю повітря  $e$ :  
1 - посів – припинення вегетації; 2 - відновлення вегетації – вихід у трубку; 3 - вихід у трубку – колосіння; 4 - колосіння – воскова стиглість; 5 - теплий період вегетації

На зв'язок приросту рослинної маси і урожайності з умовами навколишнього середовища впливає і стан рослин у попередньому міжфазному періоді розвитку. Добре розвинута рослина збільшить свій бонітет при хороших умовах за наступний час і здатна витримати більш жорсткі умови вирощування, ніж рослина, ослаблена в попередні періоди. Тому «види на урожай» за другий міжфазний період, що визначаються ізолініями на рис. 8.1 (криві 2), які характерні для середнього стану рослин за попередній період, повинні уточнюватись. Для цього виправлена величина  $U'_{T,e,i}$  зіставляється із значенням  $U_{T,e,i-1}$ .

$$U'_{T,e,i} = k_{T,e,i}(U_{T,e,i-1}) \cdot U_{T,i} \quad (8.5)$$

Цей зв'язок графічно наведений на рис. 8.2. Зі збільшенням  $U_{T,e,i-1}$ , природно, збільшується і  $k_{T,e,i}$ , а за умови  $U_{T,e,i-1} \rightarrow 0$ , (що відповідає загибелі урожаю)  $k_{T,e,i} \rightarrow 0$ , тобто  $U'_{T,e,i}$  теж прагне до нуля. При  $U_{T,e,i-1} > 1$  величина  $U'_{T,e,i}$  збільшується більш повільно, ніж  $U_{T,e,i-1}$ .

Зв'язки  $k_{T,e,i} = f(U_{T,e,i-1})$ , які наведені на рис. 8.2, виявилися подібними для всіх міжфазних періодів. Різниця між кривими зв'язку для всіх міжфазних періодів лежить в межах точності визначення значень  $U_{T,e,i}$ . Тому в першому наближенні прийнято, що крива, наведена на цьому рисунку, придатна і для уточнення значень  $U_{T,e,i}$  всіх інших міжфазних періодів, а тим самим вважається справедливим і співвідношення (8.5).

Надалі всі значення  $U_{T,e,i}$  прийняті для аналізу і розрахунку, будуть вважатися виправленими з врахуванням стану рослин за попередній період із співвідношення (8.5) і рис. 8.2.

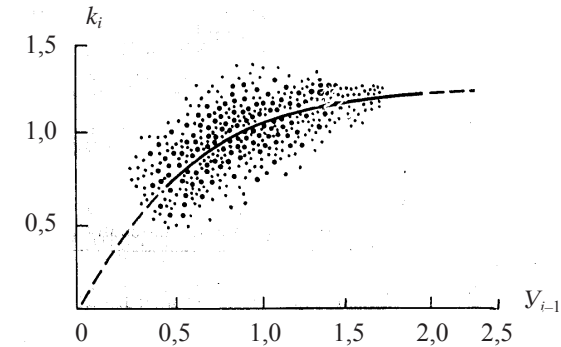


Рис. 8.2. Зв'язок корегуючого коефіцієнта (8.5) видів на урожай після врахування умов  $i$ -го міжфазного періоду  $k_{T,e,i}$  з аналогічною характеристикою за попередній період  $U_{i-1}$ . Великі точки відповідають умовам перезимівлі, дрібні – всім іншим фазам

Основою такої поправки для першого міжфазного періоду могла бути характеристика кондиції зерна, наявність або відсутність його передпосівної обробки. Однак такі систематичні дані відсутні, тому згадана поправка для першого міжфазного періоду не вводилася. Для другого міжфазного періоду (відновлення вегетації – вихід у трубку) основу поправки складає характеристика стану посівів після перезимівлі, що виражається в одиницях відносної урожайності  $U_{T,h}$ , яка буде розглядатися нижче.

Взагалі, значення  $k_{T,e,i}$ , відповідно до вчення П.І. Броунова про критичні періоди розвитку рослин, очевидно, повинні бути різними і для



різних міжфазних періодів. Обраний шлях аналізу надалі дозволить уточнити це ключове положення в агрометеорології і дати йому кількісну характеристику.

В основу аналізу були покладені такі міжфазні періоди розвитку рослин, які у першому наближенні однаково впливають на величину кінцевого урожаю. Тому і поправочні коефіцієнти  $k_{T,e,i}$ , розраховані за допомогою рис. 8.2, у першому наближенні виявилися близькими за величиною.

Розрахунковий урожай при послідовному врахуванні впливу погодних умов за міжфазні періоди може бути отриманий з рівняння

$$Y_{T,e} = \sum_{i=1}^{i=4} Y_{T,e,i} - (i-1). \quad (8.6)$$

Графічний зв'язок величин відносної урожайності з погодними умовами всього теплого періоду вегетації, яка розрахована за рівнянням (8.6) і віднесена до середніх за вегетаційний період значень  $T$  і  $e$ , наведений на рис. 8.1 (криві 5). При цьому спостерігається та ж картина, що і для окремих міжфазних періодів: максимальні значення урожайності відповідають температурі від 10 до 14°C і вологості повітря від 8,5 до 11,5 мб. Менші значення температури характеризують умови недостатньої теплозабезпеченості, великі – надмірної. Малі значення вологості відповідають надмірно посушливим умовам, великі – надмірно зволуженим умовам. Ті й інші значення характеризують несприятливі умови для рослин і знижують їхню урожайність.

Тіснота зв'язку між урожаями вимірюваними  $Y_{\phi}$  і графічними  $Y_{T,e,i}^2$  (знятими з графіків шляхом інтерполяції між ізолініями) за міжфазні період складає:

$$r_1 = 0,214 \pm 0,021; \quad r_2 = 0,218 \pm 0,028; \\ r_3 = 0,226 \pm 0,030; \quad r_4 = 0,321 \pm 0,025.$$

Висока значимість цих коефіцієнтів кореляції (понад 99 %) говорить про їхню надійну забезпеченість.

Зі статистики відомо, що при дії приблизно рівнозначних  $n$  факторів, тіснота зв'язку результуючого ефекту з кожним з них близька до  $1/n$ . Оскільки у нас кількість факторів, що враховуються, складає біля двох десятків, тоді середнє значення коефіцієнта кореляції повинне бути близьким до 0,05. Більш тісні зв'язки перших із розглянутих нами факторів з урожайністю пояснюються їхньою більшою значимістю й інформативністю в порівнянні з іншими факторами, а також обраним

способом аналізу, за якого до впливу перших факторів додається і непрямий вплив інших, ще не врахованих факторів.

Природно, що в міру збільшення кількості враховуваних міжфазних періодів, погодні умови яких формують урожайність, тіснота зв'язку  $Y_{T,e,i}^2$  з фактичним урожаєм  $Y_{\phi}$  зростає. Так, після врахування впливу погоди осіннього періоду значення коефіцієнта кореляції між  $Y_{\phi}$  і  $Y_{T,e,1}^2$  дорівнює, як уже відзначалося, лише  $r = 0,214 \pm 0,021$ . Після врахування впливу першого і другого міжфазних періодів  $Y_{\phi}$  і  $Y_{T,e,1-2}$  величина  $r = 0,342 \pm 0,024$ , після врахування першого – третього періодів між  $Y_{\phi}$  і  $Y_{T,e,1-3}$  величина  $r = 0,416 \pm 0,023$ , а після врахування впливу першого – четвертого періодів коефіцієнт кореляції дорівнює  $0,502 \pm 0,029$ .

### 8.1.3. Родючість ґрунту і урожайність

Родючість ґрунту – складне комплексне поняття, єдиним критерієм якого є величина обумовленої ним урожайності. Родючість має конкретний зміст: воно відноситься до заданої культури і її сорту.

Родючість варто розглядати в нерозривному зв'язку типу ґрунту з його зволоженням. Встановлено (рис. 8.3), що родючість різних типів мінеральних ґрунтів, поряд із вологозапасами, кількісно найкраще характеризуються їхньою об'ємною вагою  $Q$ , тісно пов'язаною з такими загальноновизначеними компонентами родючості, як кількість гумусу  $G_r$ , азоту  $N$ , фосфору  $P$  і т.д. Залежність родючості ґрунту від  $Q$  для кислих і лужних ґрунтів трохи різна.

Дані про оптимальні значення  $Q$  для деяких сільськогосподарських культур показують, що оптимум величини  $Q$  майже для всіх культур лежить у межах 1,05–1,30 г/см<sup>3</sup>, а для більшої частини – в межах 1,20–1,30 г/см<sup>3</sup>, що відповідає об'ємній вазі чорноземних ґрунтів.

Об'ємна вага ґрунту – це характеристика, яка змінюється в часі. Збільшення об'ємної ваги орного шару ґрунту, що спостерігається на кінець сезону пояснюється двома факторами: усадкою ґрунту і зміною його вологості.

Зв'язок об'ємної ваги ґрунту з вологозапасами наведені на рис. 8.4, де крива 1 характеризує зв'язок об'ємної ваги і вологості орного шару ґрунту (0–20 см), а крива 2 – підорного шару. Наведені на рис. 8.4 криві осереднено показують зміну об'ємної ваги в залежності від ступеня розпушування ґрунту (орний і підорний шари). Під впливом навантажень об'ємна вага ґрунту може зростати на 10–15 %.

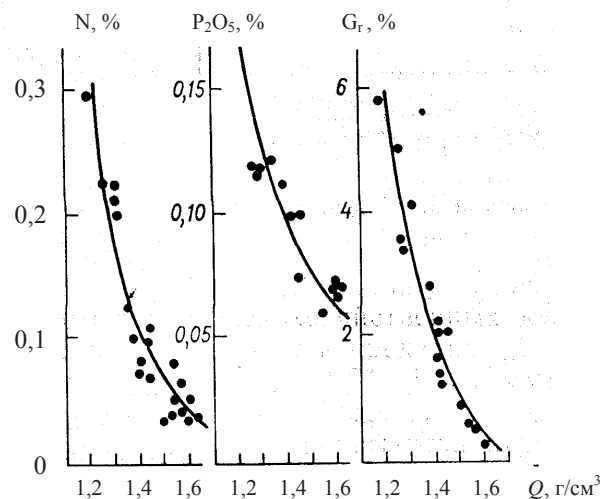


Рис. 8.3. Зв'язок об'ємної ваги ґрунту  $Q$  з ознаками його родючості: N – азот;  $P_2O_5$  – суперфосфат,  $G_r$  – гумус

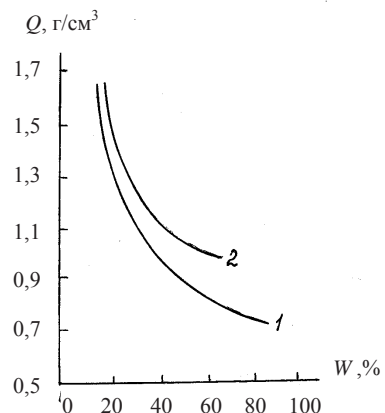


Рис. 8.4. Зв'язок об'ємної ваги ґрунту  $Q$  з її ваговою вологістю  $W$ : 1 – орний шар; 2 – підорний шар

При аналізі впливу родючості на урожайність відповідно до прийнятої схеми використовуються величини урожайності за винятком впливу на них погодних умов (тобто величини  $V_{T,e,4} = \Delta V_{T,e,4} + 1$ ). Аналіз здійснюється для тих же міжфазних періодів, що і при дослідженні впливу на урожайність кліматичних умов. Поправка за перший міжфазний період, що враховує стан рослин за попередній період, як і при аналізі впливу погоди, відсутня; за другий період (відновлення вегетації – вихід у трубку) величина поправки визначається умовами перезимівлі  $V_{T,h}$  (яка буде розглядатися нижче), а за третій і четвертий періоди – відповідно величинами  $V_{W,Q,2}^2$  і  $V_{W,Q,3}^2$ , тобто впливом родючості ґрунту за попередні періоди.

На графіку зв'язку урожайності  $V_{W,Q,i}$  з родючістю ґрунту (рис. 8.5) уздовж горизонтальної осі відкладаються продуктивні вологозапаси  $W$  метрового шару ґрунту у відсотках від найменшої вологомісткості (НВ), а уздовж вертикальної осі відкладається об'ємна вага того ж шару ґрунту. При цьому шкала лівої осі відповідає кислим ґрунтам, а шкала правої осі – лужним ґрунтам.

На рис. 8.5 виділяється зона оптимальної урожайності при об'ємній вазі  $Q = 1,2 \div 1,3$  г/см<sup>3</sup>, що відповідає потужним або глибоким середньо- і малогумусним чорноземам. Зі збільшенням  $Q$ , тобто зі збільшенням вмісту глинистих фракцій ґрунту, урожайність, природно, знижується. При зменшенні  $Q$  проти оптимального, урожайність також знижується внаслідок надмірної кількості органічних залишків, які не розклалися, властивих торф'яним ґрунтам.

Оптимальне значення продуктивних вологозапасів істотно змінюється не тільки за типом ґрунту, але і по міжфазних періодах розвитку пшениці. Найбільше значення вологозапаси  $W_{opt}$  мають в період весняного відновлення вегетації (90–100 % НВ). В осінній період вегетації вони досягають  $W_{opt} \approx 70$ –80 % НВ, за міжфазний період вихід у трубку – колосіння 60–70 % НВ, а в період дозрівання – лише 40–50 % НВ. Мінімальне значення  $W_{opt}$  характерне для чорноземних ґрунтів: для кислих і лужних ґрунтів воно підвищується, що пов'язано з хорошою структурою чорноземів, яка збільшує рухливість, а отже, і доступність води для кореневої системи рослин.

При аналізі впливу на урожайність родючості ґрунту також, як і при аналізі погодних умов, тіснота зв'язку розрахованої урожайності з кінцевою зростає в міру збільшення кількості фаз вегетаційного періоду, які враховуються. Після врахування погодних умов  $\Delta V_{T,e,4}$ , як уже вказувалося, коефіцієнт кореляції складає 0,502.

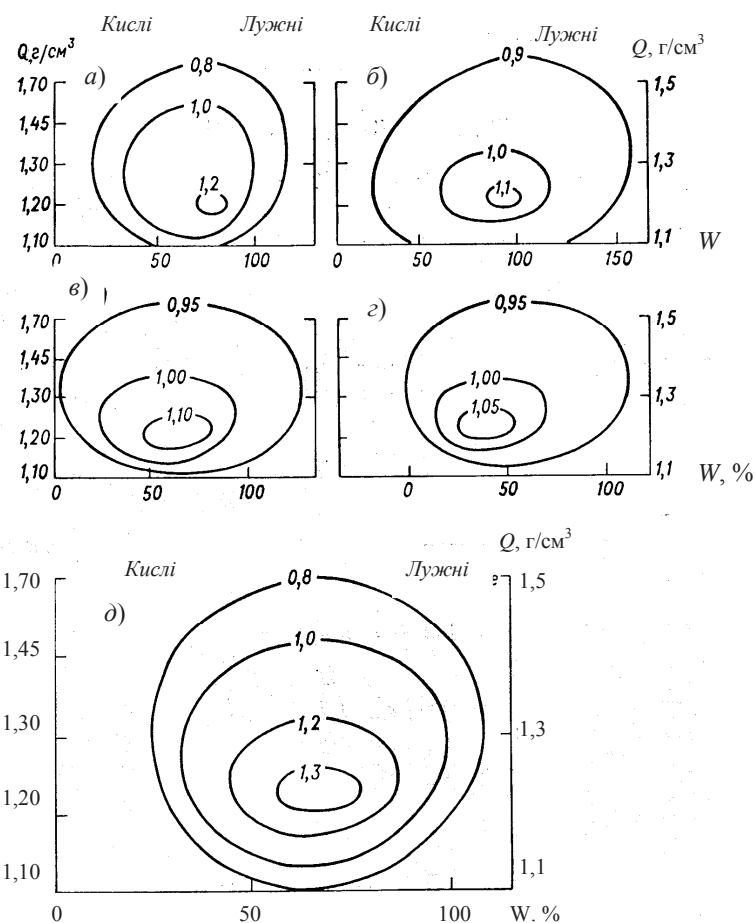


Рис. 8.5. Залежність урожайності озимої пшениці від продуктивних вологозапасів  $W$  % НВ та об'ємної ваги  $Q$  ґрунту (з врахуванням кислотності ґрунту): а) посів – припинення вегетації; б) відновлення вегетації – вихід у трубку; в) вихід у трубку – колосіння; г) колосіння – воскова стиглість; д) весь період вегетації

При врахуванні умов кожного періоду вегетації коефіцієнт кореляції зростає:

Величина, яка враховується	$Y_{W,Q,1}$	$Y_{W,Q,2}$	$Y_{W,Q,3}$	$Y_{W,Q,4}$
Коефіцієнт кореляції	$0,598 \pm 0,040$	$0,641 \pm 0,039$	$0,686 \pm 0,044$	$0,712 \pm 0,046$

Розрахунок обумовленої родючістю ґрунту урожайності  $Y_{W,Q}$  за весь вегетаційний період здійснюється за допомогою рівняння

$$Y_{W,Q} = \sum_{i=1}^{i=4} Y_{W,Q,i} - (i-1). \quad (8.7)$$

Побудований зв'язок урожайності з  $W$  і  $Q$  з врахуванням рН вказує на можливість, одержання об'єктивної кількісної характеристики ступеня родючості ґрунтів за їх відомими діагностичними ознаками. Використані для характеристики урожайності ґрунтового константи  $Q$  і рН не завжди відомі заздалегідь. О.Р. Константиновим був розроблений метод розрахунку кожного з цих параметрів за значенням іншого із залученням даних про тип ґрунту  $m$ , його механічний склад  $M$  і НВ.

#### 8.1.4. Умови перезимівлі та урожайність

Причини uszkodжень рослин у зимовий період різноманітні, але у кожній ґрунтово-кліматичній зоні переважає вплив одного, або двох несприятливих явищ. В районах достатнього зволоження випрівання і вимокання є однією з основних причин загибелі озимих.

В районах з незначним сніговим покривом на північному сході України передумов для випрівання не має, але досить часто спостерігається вимерзання. У центральних районах України крижана кірка часто призводить до загибелі рослин. У районах з нестійкою зимою досить часто причиною загибелі можуть бути різкі коливання температури та відлиги, а також поєднання метеорологічних умов, які призводять до випрівання рослин.

Благополучний результат перезимівлі часто залежить від «загартування» рослин. Ступінь загартування в свою чергу залежить від комплексу погодних умов у осінній період вирощування рослин. Відповідно до прийнятої методики аналізу, вплив загартування на перезимівлю рослин у зимовий період визначається станом рослин в осінній період розвитку (рис. 8.2).

Найбільш вразливим, з погляду формування урожайності у озимих культур є вузол кущіння, який розташовується приблизно на глибині 3 см. Тому прийнято вважати, що температура ґрунту на глибині вузла кущіння  $T_{в.к.}$  є найкращим показником морозонебезпечності.

Відповідно до прийнятої схеми дослідження зв'язку урожайності з визначальними факторами були побудовані залежності урожайності від умов перезимівлі. При виборі показників для оцінки умов перезимівлі враховувалося, що стан озимих культур визначається не тільки абсолютним мінімумом температури, дія якого найчастіше буває короткочасною, але й іншими температурами, не настільки низькими, але також досить шкідливими і тривало діючими, а тому не менш небезпечними. Тому сума негативних температур є більш інформативною характеристикою ефективності впливу на рослину несприятливих зимових температур.

Відомо, що найбільш сприятливою температурою для перезимівлі озимих культур є температура трохи вище  $-10^{\circ}\text{C}$ . При такій температурі ростові процеси озимих зводяться до мінімуму, а витрати сахарів на дихання майже цілком припиняються.

Для зручності аналізу виявилось доцільним взяти за початок підрахунку сум температур повітря величину  $-10^{\circ}\text{C}$ , яка відповідає  $T_{в.к.}$  при відсутності снігового покриву приблизно  $-7^{\circ}\text{C}$ .

Для визначення величини  $T_{в.к.}$  був використаний непрямий метод, що дозволяє характеризувати  $T_{в.к.}$  через температуру повітря і висоту снігового покриву. Таким чином, для оцінки умов перезимівлі було взято показник (в одиницях відносної урожайності), який виражається через суму мінімальних температур повітря нижче  $-10^{\circ}\text{C}$  ( $\sum T_{\min < -10^{\circ}\text{C}}$ ) і середню висоту снігового покриву за період з температурами повітря нижче  $-10^{\circ}\text{C}$  ( $h$ , см).

Сума мінімальних температур повітря нижче  $-10^{\circ}\text{C}$  досить тісно пов'язана із сумами температур нижче  $-7$ ,  $-15$  і  $-20^{\circ}\text{C}$ . Вона більш тісно корелює з величиною урожайності, ніж  $\sum T_{\min < -15^{\circ}\text{C}}$  і  $\sum T_{\min < -20^{\circ}\text{C}}$ . Коефіцієнти кореляції дорівнюють відповідно:  $0,430 \pm 0,030$ ;  $0,351 \pm 0,037$  і  $0,298 \pm 0,043$ . Таким чином, обраний параметр досить добре характеризує умови з найбільш низькими і небезпечними для рослин температурами у зимовий період.

Що стосується умов з більш високими температурами перезимівлі, то для їхньої кількісної характеристики, виходячи зі значень  $\sum T_{\min < -10^{\circ}\text{C}}$ , прийнята сума мінімальних температур вище  $-10^{\circ}\text{C}$ , тобто величина  $\Delta T = T - (-10)$ , у міру збільшення яких урожайність також знижується. При цьому, наприклад, замість  $-6^{\circ}\text{C}$  в таких розрахунках береться величина  $\Delta T = -6 - (-10) = 4$ , замість 0 або  $5^{\circ}\text{C}$  відповідно 10 і  $15^{\circ}\text{C}$  і т. д.

На рис. 8.6 наведено графік зв'язку урожайності озимої пшениці з

сумою мінімальних температур повітря нижче  $-10^{\circ}\text{C}$  і середньою висотою снігового покриву за період з такими ж температурами. Графік побудований за щорічними даними урожайності і метеорологічних елементів. Для побудови графіка використовувалися залишкові компоненти урожайності  $Y_{W,Q,4}$ , тобто

$$Y_{W,Q,4} = k_1 \Delta Y_{W,Q,4} + 1. \quad (8.8)$$

Величина поправки  $k_1$ , що враховує стан рослин за осінній період, а тим самим і ступінь загартування рослин, визначається значеннями величини  $Y_{T,e,4} + Y_{W,Q,4} - 1$  за допомогою графіка, наведеного на рис. 8.2. Експериментальні точки для характеристики впливу осіннього періоду на умови перезимівлі лягли в «гущавині» точок на цьому рисунку. У даному випадку ступінь осіннього загартування виступає як «види на урожай», які характеризуються значеннями коефіцієнта  $k_1$ .

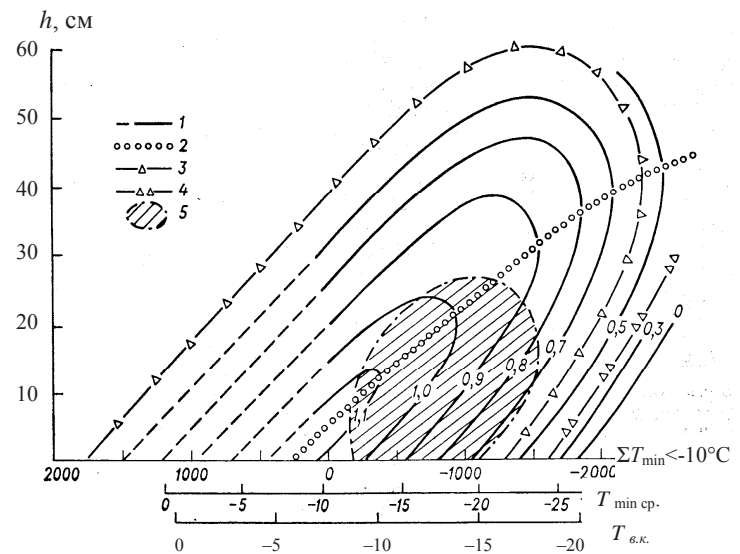


Рис. 8.6. Залежність урожайності озимої пшениці від умов перезимівлі:

- 1 – ізолінії  $Y_{T,h}$ ;
- 2 – лінія, що відокремлює умови випрівання від умов вимерзання;
- 3 – зниження урожайності на 50% (в порівнянні з оптимальними умовами перезимівлі);
- 4 – загибель 50% рослин (зниження урожайності на 70–75%);
- 5 – область можливого утворення крижаної кірки

При побудові графіка (рис. 8.6) на вертикальній осі відкладалася висота снігового покриву  $h$ , а на горизонтальній – значення  $\sum T_{\min} < -10^\circ\text{C}$ .

Для наочності уздовж тієї ж осі наведені рівнобіжні шкали величин середніх мінімальних температур повітря  $T_{\min}$  і середніх температур ґрунту на глибині вузла кушіння при відсутності снігового покриву. У полі графіка відповідно до формули (8.8) нанесені величини  $U_{w,0,4}$ .

Хід ізоліній величини  $U_{T,h}^2$  на графіку показує наявність оптимуму, близького до  $T_{o.k.} = -7^\circ\text{C}$  при відсутності снігового покриву. Зі збільшенням висоти снігового покриву величина  $\sum T_{\min} < -10^\circ\text{C}$ , що відповідає оптимальним умовам перезимівлі, збільшується. Від оптимуму при зниженні або підвищенні температур умови перезимівлі погіршуються. У першому випадку це зниження урожаю обумовлене вимерзанням рослин, а у другому – випріванням і погіршенням умов яровизації. З ростом висоти снігового покриву небезпека ушкодження рослин морозами помітно знижується і при  $h = 30-40$  см вона практично зникає. При надлишковій висоті снігового покриву умови перезимівлі погіршуються, як вказувалося вище, внаслідок випрівання. Область випрівання лежить вище і лівіше лінії 2 (рис. 8.6), проведеної по точках перегину або відхилень ізоліній  $U_{T,h}^2$  від вертикального напрямку у бік погіршення умов перезимівлі.

На графіку також виділені умови, які призводять до зниження урожайності внаслідок утворення крижаної кірки. Для цього на графік наносилися точки в тих випадках, коли крижана кірка зберігалася протягом трьох декад і більше. Така тривалість наявності крижаної кірки може виявитися шкідливою для рослин. Розташування і розміри області поширення крижаної кірки показують про широкий діапазон умов, які призводять до її утворення (суми мінімальних температур змінюються від мінус 200 до  $-1500^\circ\text{C}$ , а висота снігового покриву – від 0 до 25 см).

З метою порівняння величини  $U_{T,h}^2$  з існуючими характеристиками умов перезимівлі на графіку проведена лінія 4. Ця лінія визначена за допомогою відомих графіків залежності зрідженості озимої пшениці від мінімальної температури ґрунту на глибині вузла кушіння. При зрідженості 50 % урожайність знижується на 70–75 % через загибель 50 % стебел і пригнічення рослин, які вижили, лінія 4 близька до ізолінії  $U_{T,h}^2 = 0,6$ .

Після врахування умов перезимівлі тіснота зв'язку розрахункової урожайності з фактичною підвищилася з 0,712 до  $r = 0,822 \pm 0,049$ .

В цілому прийнята схема аналізу дозволяє отримувати необхідну інформацію про відповідність умов вирощування біологічним вимогам рослин, виходячи з загальноприйнятих характеристик середовища їх

мешкання і урожайності. При цьому немає необхідності, ні в яких додаткових гіпотезах, не допускається довільного або інтуїтивного вибору параметрів, які характеризують зовнішні умови. Схема аналізу логічна, проста, об'єктивна. На основі цього підходу була виконана оцінка агрокліматичних умов вирощування основних сільськогосподарських культур в Україні.

Слід відзначити перспективність використання описаної схеми аналізу зв'язку урожайності з визначальними факторами для селекціонерів, які вивчають властивості нових сортів у різних ґрунтово-кліматичних умовах.

## 8.2. Модель урожайності сільськогосподарських культур В. П. Дмитренка

### 8.2.1. Визначення оптимальних значень сум опадів і температури повітря для формування урожаю

Максимальний приріст рослинної маси і урожайність сільськогосподарських культур утворюються при поєднанні оптимальних значень факторів навколишнього середовища, в тому числі і метеорологічних елементів.

Максимальний приріст продукції при оптимальних значеннях елементів навколишнього середовища є біологічною властивістю рослинності і є однією з найважливіших особливостей реакції рослин на зовнішні умови в даній місцевості.

Якщо прийняти, що біологічні властивості рослин незмінні протягом ряду років, то коливання максимальної урожайності різних культур у географічному аспекті будуть визначатися кліматичними умовами, родючістю ґрунту й агротехнікою.

Кожен гідрометеорологічний елемент впливає на ріст і розвиток в залежності від біологічних властивостей даної рослини, його фази розвитку та інших умов. Тому для оцінки їхньої значимості у формуванні урожайності вегетаційний цикл кожної культури був поділений на чотири періоди, крім того, виділено передпосівний період. Потреба останнього впливає з необхідності оцінки умов зволоження до початку посіву за рахунок накопиченої вологи атмосферних опадів. Замість періоду появи сходів виділено період посів – укорінення.

Одним з можливих шляхів рішення поставлених у роботі задач є спосіб побудови графіків зв'язку між досліджуваним елементом і урожайністю. Він дозволяє виявити форму зв'язку для окремих періодів і

оцінити її узагальненість, визначити значення оптимумів за періоди та їх динаміку у вегетаційному циклі, а також оцінити загальну потребу окремих культур у тих чи інших елементах.

На підставі даних урожайності і середніх місячних величин опадів і температури повітря для всіх областей України побудовані графіки зв'язку між урожайністю і цими метеорологічними елементами за основні періоди розвитку основних сільськогосподарських культур.

При побудові графіків застосовано прийом осереднення даних по ординаті (урожайності) в інтервалах осереднення осі абсцис – опадів (температури повітря). Він полягає в тому, що, наприклад, усі дані по урожайності на графіку (рис. 8.7), що відносяться до кількості опадів від 0 до 40 мм, осереднюються, також визначається середнє значення опадів, які попадають у цей інтервал. Потім, наноситься на графік одна точка з координатами: по осі абсцис, рівними середньому значенню кількості опадів в інтервалі 0–40 мм, а по осі ординат – рівними середній величині з урожайностей, які попадають в інтервал опадів від 0 до 40 мм. Усі точки з'єднуються ламаною лінією, що представляє собою емпіричну лінію регресії.

Для прикладу такі графіки наведені на рис. 8.7 і 8.8 для озимої пшениці.

На цих графіках наведені емпіричні лінії регресії, які характеризують залежність урожайності від кількості опадів і температури повітря за окремі періоди вегетації. На наступному етапі аналізу емпіричні лінії згладжуються, далі до цих згладжених ліній підбирається відповідний аналітичний вираз.

На рис. 8.9 і 8.10 наведені отримані таким способом теоретичні лінії регресії, які відображають вплив кількості опадів і температури повітря за періоди вегетаційного циклу на урожайність озимої пшениці.

*Особливості впливу опадів.* Опади є основним джерелом надходження вологи у ґрунт, яка потім перетворюється в елемент структури рослини, розчинник і носій поживних речовин, компонент і субстрат біохімічних процесів, транспірації.

Вплив опадів на урожайність сільськогосподарських культур в основні періоди вегетації можливо представити в узагальненому вигляді, який відображається залежністю у вигляді опуклої параболи, з максимумом, що відповідає оптимуму опадів. Це досить чітко просліджується майже на всіх побудованих графіках. Однак, у період дозрівання для зернових колосових вісь параболи на цих графіках зміщується до нуля опадів і залежність обмежується лише низхідною правою віткою. Таке узагальнення реакції урожайності різних культур при значному розмаху коливання опадів являє собою біологічну властивість рослин.

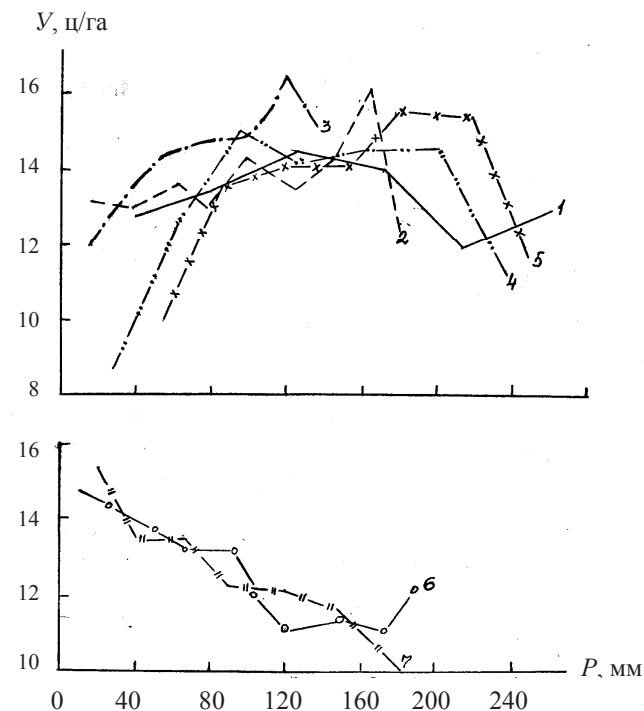


Рис. 8.7. Залежність урожайності озимої пшениці  $Y$  від суми опадів  $P$  за окремі періоди вегетації:

- 1 – передпосівний період; 2 – посів – укорінення;
- 3 – формування вегетативних органів (ріст пагонів);
- 4 – період спокою; 5 – формування репродуктивних органів;
- 6 – утворення зерна; 7 – дозрівання

Ця властивість означає, що збільшення опадів в основні періоди вегетації від 0 до певного значення, яке відповідає їхньому оптимуму, викликає ріст урожайності і досягнення його максимуму. Збільшення опадів після оптимуму призводить до зниження урожайності, пропорційно величині відхилення опадів від оптимуму.

Таким чином, крива зв'язку продуктивності рослин з опадами має три кардинальні точки. Спочатку мінімуму опадів відповідає мінімум продуктивності, його числове значення передбачається рівним нулю. Максимальна продуктивність формується в інтервалі кількості опадів, які близькі до біологічного оптимуму опадів.

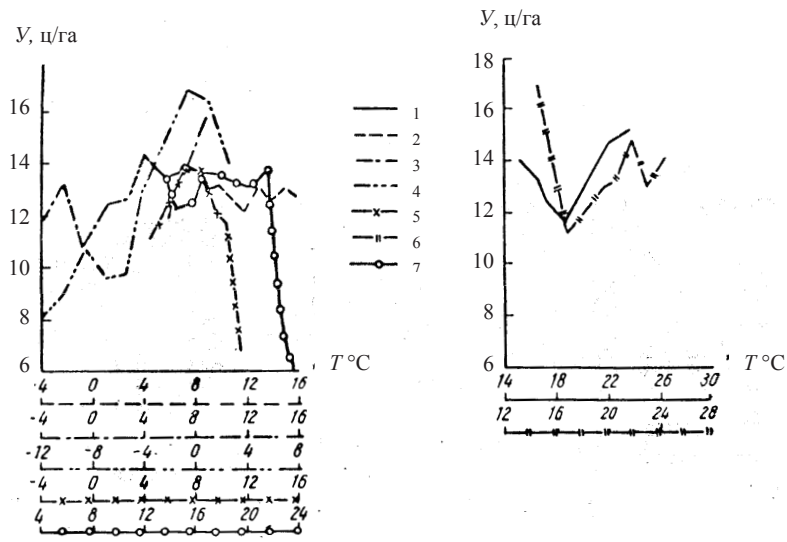


Рис. 8.8. Залежність урожайності озимої пшениці  $Y$  від середньої температури повітря  $T$  за окремі періоди вегетації:  
 1 – передпосівний період; 2 – посів - укорінення;  
 3 – формування вегетативних органів (ріст пагонів);  
 4 – період спокою; 5 – формування репродуктивних органів; 6 – утворення зерна; 7 – дозрівання

Наступне збільшення опадів призводить до падіння продуктивності і в точці, яка відповідає біологічному максимуму опадів, продуктивність рослин стає мінімальною.

Як правило, для сільськогосподарських культур мінімальна продуктивність формується при повній вологомісткості ґрунту. Це означає, що прихід вологи за рахунок опадів врівноважується витратними складовими водного балансу. Таку кількість опадів прийнято називати *біологічним максимумом*. Якщо фактичні значення опадів менше їхнього біологічного оптимуму, то крива продуктивності представлена висхідною віткою кривої. Якщо фактична величина опадів більше їхнього оптимуму, то ця крива зображується низхідною віткою. Для більшості періодів вегетаційного циклу висхідна ділянка кривої зв'язку продуктивності рослин з опадами є більш крутою, чим спадна.

Зазначені особливості ролі опадів відображені у формі їхніх

коефіцієнтів корисності. *Коефіцієнт корисності* – це біологічно ефективна частина розглянутого елемента навколишнього середовища, яка виражена в одиницях корисної продукції даного виду або сорту культури (по В.П. Дмитренко).

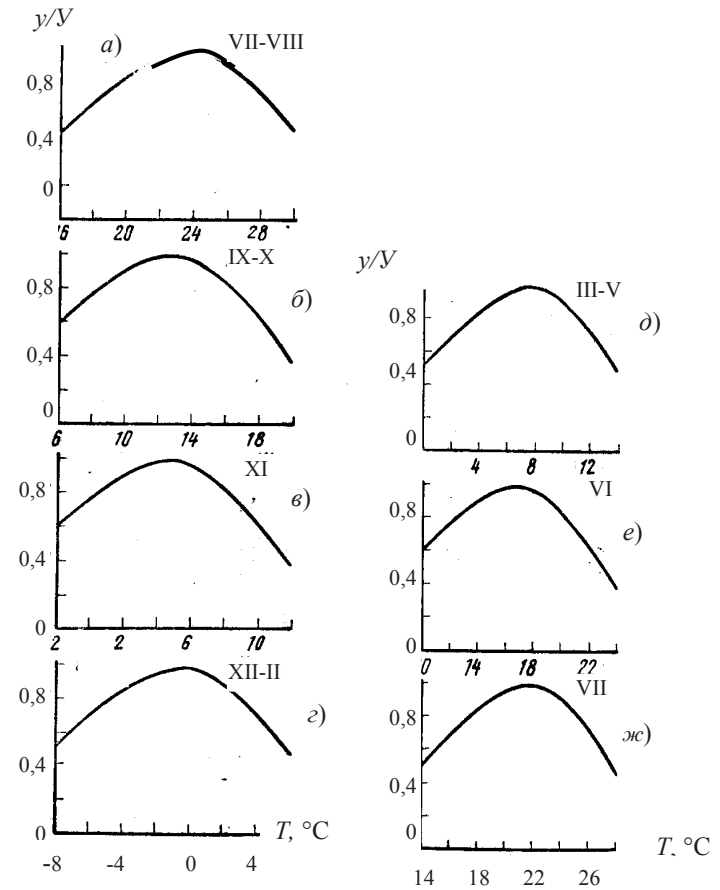


Рис. 8.9. Залежність відносної урожайності озимої пшениці  $y/Y$  від середньої температури повітря  $T$  за періоди вегетації:  
 а) передпосівний; б) посів – укорінення; в) ріст пагонів;  
 г) період спокою; д) формування репродуктивних органів;  
 е) утворення зерна; ж) дозрівання

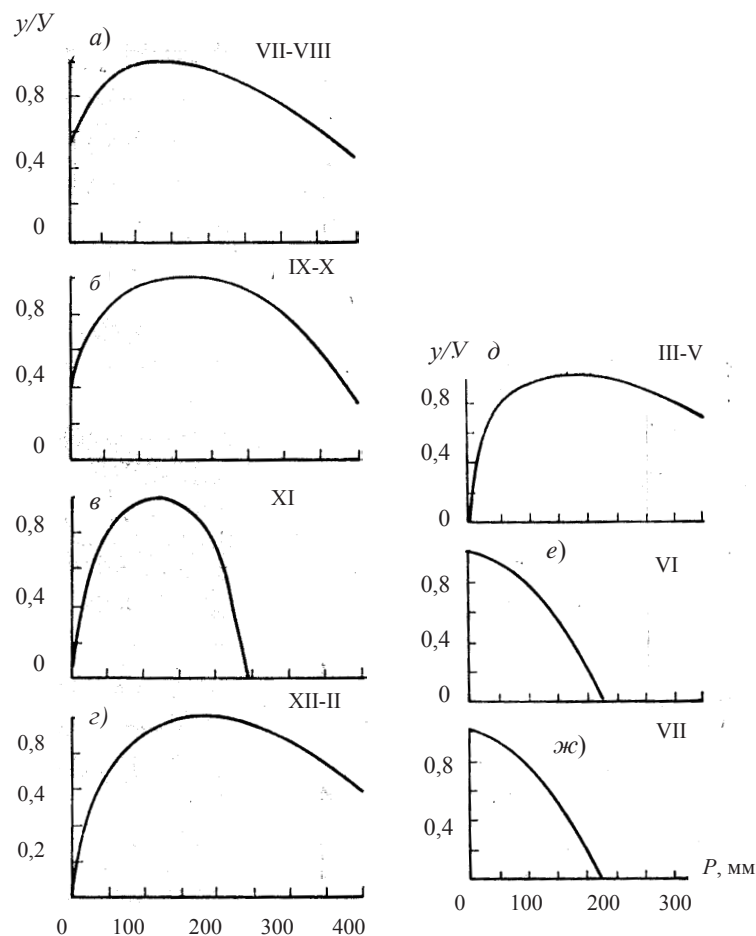


Рис. 8.10. Залежність відносної урожайності озимої пшениці  $y/Y$  від суми опадів  $P$  за періоди вегетації:  
 а) передпосівний; б) посів – укорінення; в) ріст пагонів;  
 г) зимовий період спокою; д) формування репродуктивних органів; е) утворення зерна; ж) дозрівання

Коефіцієнт корисності опадів для формування урожайності сільськогосподарських культур за кожен період вегетаційного циклу може бути отриманий за рівнянням

$$\eta(P) = \frac{m(P)}{M(P_o)} = \left(1 + \frac{P - P_o}{P_o - P_{\min}}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{P - P_o}{P_{\max} - P_o}\right)^{\alpha_2} \quad (8.9)$$

де  $m(P)$  – реальний приріст продукції, що спостерігається при сумі опадів;  
 $M(P_o)$  – максимально можливий приріст при оптимальній сумі опадів  $P_o$  у конкретний період вегетації;  
 $P_{\min}, P_{\max}$  – відповідно біологічний мінімум і максимум опадів;  
 $\alpha_1, \alpha_2$  – параметри.

Коефіцієнт корисності опадів для урожаю будь-якої культури в будь-який період вегетаційного циклу змінюється від 0 до 1, що відображає в кількісній формі їхній внесок у формування продуктивності рослин.

Числові значення оптимальних величин кількості опадів за періоди місяців вегетаційного циклу озимої пшениці наведені у табл. 8.1.

Розглянемо більш докладно динаміку оптимальних значень кількості опадів на підставі даних табл. 8.1. Для цього розмістимо оптимальні значення опадів для окремих періодів по осі часу вздовж вегетаційного циклу, привівши їх попередньо до однорідних значень шляхом обчислення середнього добового оптимуму  $\bar{P}_o$ . Величини добових оптимумів нанесемо на часовий графік (рис. 8.11) за номерами місяців вегетації озимої пшениці.

При побудові кривої на графіку (рис. 8.11) не враховувалися оптимуми опадів передпосівного періоду і періоду перезимівлі, тому що в більшості випадків вони мають значну забезпеченість і беруть участь у формуванні урожаю безпосередньо по раніше накопичених вологозапасах. На цій підставі прийняте положення про те, що в день посіву оптимальна сума середньодобових опадів дорівнює 0, а надалі вона плавно змінюється до наступних значень. При нестачі опадів у передпосівний період оптимум на день посіву варто змістити на величину цієї нестачі.

Крива середньодобових оптимумів опадів  $\bar{P}_o$  описує динаміку потреби культури в оптимальних опадах для одержання максимальної урожайності в залежності від періоду розвитку. Розподіл осі часу  $\tau$  по місяцях і декадах вегетації дозволяє оцінити добові значення оптимумів опадів в окремо узятий період. Площа фігури, обмежена кривою і віссю абсцис, дозволяє обчислити сумарну величину потреби культури в опадах, які дорівнюють сумі оптимумів, наведених у табл. 8.1.



Таблиця 8.1. Оптимальні значення температури повітря  $T$  і опадів  $P$  у різні періоди вегетаційного циклу озимої пшениці та параметри для розрахунку коефіцієнтів корисності

Період вегетаційного циклу	Місяці	Оптимальна температура повітря $T_o$ , °C	Параметр $a$		Оптимальна сума опадів $P_o$ , мм	Параметри рівняння (8.9)			Ваговий коефіцієнт $\alpha$
			$T \leq T_o$	$T > T_o$		$P_{\text{макс}}$	$a_1$	$a_2$	
Передпосівний	VII-VIII	18	-1	-2	130	526	1/3	1	7
Посів – укорінення	IX-X	13	-1	-2	170	411	1/3	1/2	7
Ріст пагонів	XI	5	-1	-2	120	243	1/2	1/2	5
Зимовий спокій	XII-II	-0,5	-1	-2	160	552	1/2	1	29
Утворення генеративних органів	III-V	8	-1	-2	170	709	1/3	1	36
Формування зерна	VI	17	-1	-2	17	320	0	2	9
Дозрівання	VII	22	-1	-2	<10	320	0	2	7

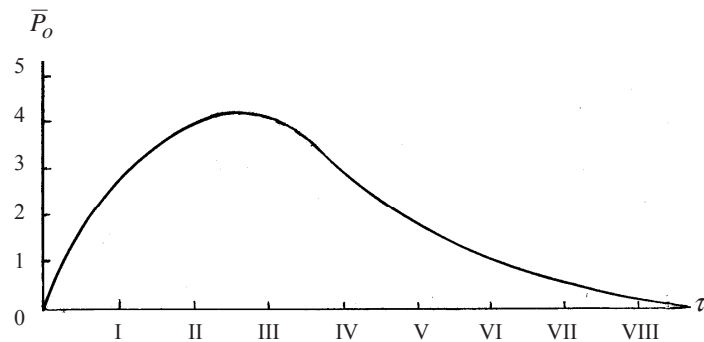


Рис. 8.11. Динаміка оптимальних значень середніх добових величин опадів  $P_o$  за період вегетації  $\tau$  для озимої пшениці

Аналіз кривої наведеної на рис. 8.11 дозволяє зробити наступний висновок. Її положення має своєрідний, властивий тільки даній культурі характер, тобто є її біологічною властивістю, що носить форму складного

закону, який залежить від особливостей росту і розвитку в часі. Потреба рослин в добовому оптимумі опадів є величиною динамічною з чітко вираженим максимумом і двома мінімумами, один із яких знаходиться на початку вегетації, а другий – наприкінці. Величина максимуму у вегетаційному циклі за абсолютним значенням і за часом його розміщення, є також і біологічною властивістю рослин.

*Особливості впливу температури повітря.* Найважливішою рисою впливу температури повітря на ріст і продуктивність рослин є наявність зв'язку за складним законом, у вигляді асиметричної кривої з одним максимумом. Як видно з наведених графіків (рис. 8.8), точка максимуму майже у всіх періодах вегетаційного циклу знаходиться між двома мінімумами.

Температура навколишнього середовища на ділянці від біологічного мінімуму до біологічного максимуму є регулятором швидкості процесів утворення всієї біомаси і її продуктивної частини. При цьому продуктивність рослин неоднакова при різних рівнях температури.

Низькі температури, близькі до біологічного мінімуму, обумовлюють дуже повільне утворення органічної речовини. Природно, що і кількість її в таких умовах виявляється надзвичайно малою. Високі температури, що граничать з біологічним максимумом, навпаки, сприяють дуже великим швидкостям реакції, процеси дисиміляції переважають над процесами асиміляції і повноцінна органічна речовина не встигає утворитися. У результаті її кількість виявляється недостатньою для створення високої урожайності. Якщо ж температура навколишнього середовища відповідає оптимальним значенням, то утвориться найбільша кількість повноцінної продукції.

Ділянка кривої зв'язку від біологічного мінімуму температури до її оптимуму є пологим висхідним, а від оптимуму до біологічного максимуму – більш крутим і низхідним. У тих випадках, коли в конкретній місцевості фактичні значення температур менше значень оптимуму крива буде представлена тільки висхідною ділянкою кривої, якщо ж значення температури повітря вище оптимальних, те крива буде представлена тільки спадною ділянкою кривої. Відзначені особливості впливу температури на формування продуктивності властиві для всіх періодів вегетаційного циклу і виражаються як коефіцієнти корисності.

Коефіцієнт корисності температури повітря для формування урожайності сільськогосподарських культур за будь-який з періодів вегетаційного циклу має такий вигляд

$$\eta(T) = \frac{m(T)}{M(T_o)} = e^{-a \left( \frac{T-T_o}{10} \right)^2} \quad (8.10)$$

де  $m(T)$  – реальний приріст продукції при температурі  $T$ ;  
 $M(T_0)$  – максимально можливий приріст при оптимальній температурі  
 $T_0$  в конкретний період вегетації;  
 $a$  – параметр.

Числові значення оптимальних величин температури повітря за періоди вегетаційного циклу озимої пшениці представлені в табл. 8.1.

За аналогією з рис. 8.11 були побудовані криві теплопотребі (рис. 8.12) для озимої пшениці послідовно за всі періоди вегетаційного циклу. Аналіз цієї кривої дозволяє знайти ряд істотних біологічних властивостей рослин стосовно термічного фактора.

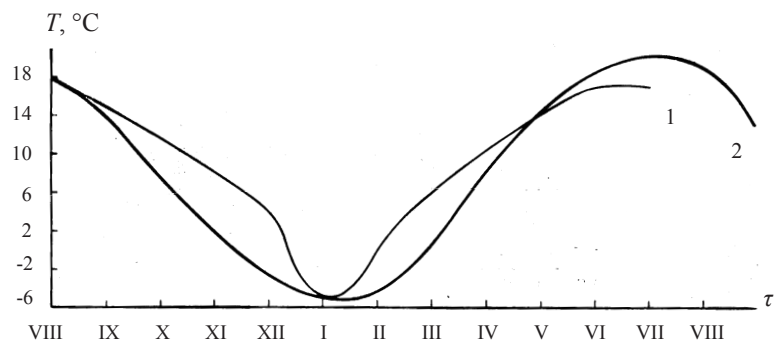


Рис. 8.12 Динаміка оптимальних значень середніх місячних величин температури повітря  $T$  протягом вегетаційного циклу  $\tau$  озимої пшениці:

- 1 – оптимальна температура повітря;
- 2 – середня багаторічна температура в Україні

Насамперед, оптимальні величини є своєрідним показником для кожного періоду вегетації культури. Вони динамічні і слідує за сезонним ходом температури повітря. У озимої пшениці крива теплопотребі має два максимуми й один мінімум. Екстремуми кривих близькі до екстремумів сезонного ходу температури повітря по розташуванню, але розрізняються за значеннями. Таким чином, значення оптимальних величин температури повітря для утворення максимальної продукції  $M$  є біологічною властивістю рослин і залежать від часу вегетації.

### 8.2.2. Опис структури моделі формування урожаю сільськогосподарських культур

Модель В.П. Дмитренка враховує вплив на урожайність різних факторів у динаміці за періоди вегетації, а її головним елементом є розрахунок показників продуктивності гідрометеорологічних елементів.

Для оцінки ресурсів урожайності озимої пшениці модель має вигляд

$$V = V_{\max} (1 - a) f(k) S(T, W, P)_{III-VII} \varphi(\lambda) + \Delta \quad (8.11)$$

де  $V_{\max}$  – щорічний статистичний максимум урожайності;

$a$  – зрідженість посівів;

$f(k)$  – функція кущистості;

$S(T, W, P)_{III-VII}$  – показник продуктивності гідрометеорологічних умов за період березень – липень;

$\varphi(\lambda)$  – показник рівня урожайності за різним співвідношенням площі збирання і посіву

$\Delta$  – похибка розрахунку за рахунок неврахованих факторів.

З гідрометеорологічних факторів у моделі враховуються температура повітря, опади у весняно-літній період і запаси вологи у ґрунті на весну. Розрахунок цієї складової здійснюється за формулою

$$S(T, W, P)_{III-VII} = \eta_{весн}(W) \alpha_{весн} + \sum_{i=1}^n \eta_i(T) \eta_i(P) \alpha_i \quad (8.12)$$

де  $\eta_i(T)$ ,  $\eta_i(P)$ ,  $\eta_i(W)$  – відповідно коефіцієнти продуктивності температури повітря, опадів і весняних запасів продуктивної вологи у ґрунті;

$\alpha_{весн}$ ,  $\alpha_i$  – вагові множники, які показують внесок на формування урожайності весняних запасів продуктивної вологи у ґрунті та гідрометеорологічних умов  $i$ -го ( $i=1, \dots, n$ ) періоду вегетації культури.

Значення  $\alpha_i$  розраховується за формулою

$$\alpha_i = \frac{1}{1 + C(1 - \tau)e^{-\gamma_o \tau}} \quad (8.13)$$

де  $C$  – параметр, який відображає вплив агрометеорологічних умов у передпосівний період;

$\tau$  – вегетаційний період у частках одиниці;

$\gamma_o$  – середній початковий коефіцієнт самозріджування посівів.

Коефіцієнт продуктивності весняних запасів продуктивної вологи розраховується за формулою

$$\eta_{весн}(W) = 1 - \left( \frac{W - W_o}{W_o} \right)^2 \quad (8.14)$$

де  $W$  – фактичні запаси продуктивної вологи у ґрунті;  
 $W_o$  – оптимальні запаси вологи у ґрунті на весну.

Коефіцієнт продуктивності температури повітря розраховується за формулою

$$\eta(T) = \frac{m(T)}{M(T_o)} = e^{-a \left( \frac{T - T_o}{10} \right)^2} \quad (8.15)$$

де  $m(T)$  – реальний приріст продукції при температурі  $T$ ;  
 $M(T_o)$  – максимально можливий приріст при оптимальній температурі  
 $T_o$  в конкретний період вегетації;  
 $a$  – параметр.

Коефіцієнт продуктивності опадів розраховується за виразом

$$\eta(P) = \frac{m(P)}{M(P_o)} = \left( 1 + \frac{P - P_o}{P_o - P_{\min}} \right)^{a_1} \left( 1 - \frac{P - P_o}{P_{\max} - P_o} \right)^{a_2} \quad (8.16)$$

де  $m(P)$  – реальний приріст продукції, що спостерігається при сумі опадів  $P$ ;  
 $M(P_o)$  – максимально можливий приріст при оптимальній сумі опадів  $P_o$   
за конкретний період вегетації;  
 $P_{\min}$ ,  $P_{\max}$  – відповідно біологічний мінімум і максимум опадів;  
 $a_1$ ,  $a_2$  – параметри.

Для оцінки ґрунтово-кліматичних ресурсів урожайності озимої пшениці у цій моделі враховується щорічний статистичний максимум урожайності, зрідженість посівів, кущистість, показники продуктивності гідрометеорологічних умов за період березень – липень, показник рівня урожайності при різному співвідношенні площ збирання й посіву. З гідрометеорологічних факторів у моделі враховуються температура повітря, опади весняно-літнього періоду і запаси вологи у ґрунті на весну.

Моделі В.П. Дмитренка досить універсальна і на її основі побудовані схеми розрахунку урожайності озимої пшениці, ярого ячменю, кукурудзи, озимого жита, картоплі, цукрового буряка і соняшника.

### 8.3. Комплексна модель для статистичної імітації урожайності зернових і кормових культур О. С. Образцова

Урожайність сільськогосподарських культур формується протягом вегетаційного циклу, який складається з чотирьох неоднорідних за функціями періодів: посів – сходи; сходи – початок формування зародкового суцвіття; початок формування суцвіття – початок цвітіння; цвітіння – формування і дозрівання зерна. Вимоги рослин до факторів середовища на кожному етапі різні. Це відноситься до умов освітлення і температури, зволоження і мінерального живлення.

Комплексна модель для статичної імітації урожайності кормових і зернових культур являє собою комбіновану виробничу функцію, у якій дія на урожай безлічі факторів враховується у виді добутку максимальної потенційної урожайності культури в оптимальних умовах і нормованих функціях оптимальності факторів (освітлення, температури, зволоження, мінерального живлення, технологічних факторів, технічної оснащеності і трудових ресурсів).

#### 8.3.1. Визначення потенційної урожайності

Максимальна потенційна урожайність є головною вихідною величиною, яка визначається у моделі в абсолютних величинах.

Величину максимальної потенційної урожайності можна приблизно визначити за кількістю поглиненої й утилізованої ФАР за оптимальних умов температури, зволоження і мінерального живлення:

$$V_Q = \frac{\sum^n Q(1-d)PK_Q r}{q}, \quad (8.17)$$

де  $V_Q$  – урожай сухої біомаси, т/га;

$Q$  – кількість ФАР, що приходить на 1 га посіву в середньому за день, кДж/га;

$d$  – частка ФАР надоптимального рівня при інтенсивності світла вище насиченого для фотосинтезу агрофітоценозу;

$P$  – середній за вегетацію коефіцієнт поглинання ФАР, безрозмірна величина;

$K_Q$  – максимальний теоретично можливий коефіцієнт засвоєння поглиненої ФАР при 8-квантовій витраті на фотосинтез, безрозмірна величина;

$r$  – частка урожаю надземної біомаси у загальній біомасі, сформованої за період вегетації, безрозмірна величина;  
 $q$  – калорійність надземної біомаси, кДж/т;  
 $n$  – кількість днів вегетації.

У польових умовах температурний фактор ніколи не досягає оптимальних значень, за винятком коротких періодів часу, коли температура повітря протягом доби піднімається чи опускається і проходить точку оптимуму. Отже, урожайність, забезпечена ресурсами ФАР, у польових умовах не може бути досягнута, оскільки вона лімітується тепловим фактором.

Для визначення реальної потенційної урожайності  $V_{O_i}$  максимальну потенційну урожайність  $V_O$  множать на показник теплозабезпеченості. Визначення функції оптимальності температури  $K_t$  розраховується за формулою

$$K_t = \frac{1}{0,86 + 10^{b_1 - b_2} \left[ t - t_n - \sum \left( \frac{t_{m\delta} - t_{o\delta}}{2n} \right)^{1,4} \right]}, \quad (8.18)$$

де  $b_1$  і  $b_2$  – емпіричні коефіцієнти;

$t$  – середньодобова температура повітря за період вегетації, °С;  
 $t_n$  – початкова температура росту культури (біологічний нуль), °С;  
 $t_{m\delta}$  – максимальна денна температура, °С;  
 $t_{o\delta}$  – оптимальна денна температура для росту культури, °С.

### 8.3.2. Опис структури комплексної моделі формування урожайності зернових і кормових культур

Реальна урожайність визначається значною кількістю внутрішніх і зовнішніх факторів, які можна розташувати за їх значимістю в такій послідовності: зволоження, мінеральне живлення, окультуреність ґрунту, технологічні фактори, забезпеченість технікою і трудовими ресурсами.

Найбільш раціональна і компактна форма комплексної моделі – комбінована виробнича функція, в якій вплив на урожай значної кількості факторів визначається у вигляді добутку потенційної урожайності, яка забезпечується ресурсами світла і тепла з врахуванням видових і сортових особливостей рослин, а також функцій оптимальності умов зволоження, мінерального живлення та інших факторів.

Для прогнозування кількості та якості урожаю зернових культур і трав використовують систему рівнянь, де досить часто замість  $V_{O_i}$  як вихідну величину для розрахунків беруть біологічний потенціал урожайності сорту  $V_{n\delta}$ . Ця система рівнянь має такий вигляд:

$$V_o = (V_{n\delta} K_{c,n} K_{t_1} K_{t_2} K_{E_1} K_{E_2} K_T K_{NPK} K_{pH} K_{ок.зр.} K_{Г} K_{з.н} K_{пол} K_U) B_i K_{m.p.};$$

$$V_{ок.од} = (V_{n\delta} K_{c,n} K_{t_1} K_{t_2} K_{E_1} K_{E_2} K_T K_{NPK} K_{pH} K_{ок.зр.} K_{Г} K_{з.н} K_{пол} K_U K_{к.од.}) \times B_i K_{m.p.} 100$$

$$V_{о.с.нр} = (V_{n\delta} K_{c,n} K_{t_1} K_{t_2} K_{E_1} K_{E_2} K_T K_{NPK} K_{pH} K_{ок.зр.} K_{Г} K_{з.н} K_{пол} K_U K_{с.нр}) \times B_i K_{m.p.}$$

$$V_{о.н.нр} = (V_{n\delta} K_{c,n} K_{t_1} K_{t_2} K_{E_1} K_{E_2} K_T K_{NPK} K_{pH} K_{ок.зр.} K_{Г} K_{з.н} K_{пол} K_U K_{н.нр}) \times B_i K_{m.p.}$$

$$V_{о.Нф} = (V_{n\delta} K_{c,n} K_{t_1} K_{t_2} K_{E_1} K_{E_2} K_T K_{NPK} K_{pH} K_{ок.зр.} K_{Г} K_{з.н} K_{пол} K_U K_{Нф}) \times K_{m.p.}$$

$$V_{ок.зал.} = (V_{n\delta} K_{c,n} K_{t_1} K_{t_2} K_{E_1} K_{E_2} K_T K_{NPK} K_{pH} K_{ок.зр.} K_{Г} K_{з.н} K_{пол} K_U K_{к.зал.}) \times K_{m.p.} \quad (8.19)$$

де  $V_o$  – урожайність сухої речовини загальної біомаси при скошуванні рослин на висоті 5–6 см, т/га;

$V_{ок.од}$  – урожайність загальної біомаси в енергетичних кормових одиницях;

$V_{о.с.нр}$  – збір сирого протеїну з урожаєм загальної біомаси, т/га;

$V_{о.н.нр}$  – збір перетравлюємого протеїну з урожаєм загальної біомаси, т/га;

$V_{о.Нф}$  – кількість азоту, що залишається у ґрунті бобовими культурами за рахунок азотфіксації, т/га;

$V_{ок.зал.}$  – кількість сухої біомаси кореневих і пожнивних залишків, т/га;

$V_{n\delta}$  – біологічний потенціал урожайності загальної біомаси сорту у даній місцевості, т/га;

$K_{c,n}$  – нормована функція оптимальності строків посіву;

$K_t, K_E$  – функції оптимальності умов температури і зволоження в період від посіву до цвітіння ( $K_{t_1}, K_{E_1}$ ) і від цвітіння до дозрівання ( $K_{t_2}, K_{E_2}$ );

$K_T \dots K_{m.p.}$  – нормовані функції оптимальності факторів ( $K_T$  – віку травостою багаторічних трав;  $K_{NPK}$  – вмісту азоту N, фосфору P, калію K

у ґрунті і добривах;  $K_{pH}$  – кислотності ґрунту;  $K_{ок.зр.}$  – окультуреності ґрунту;  $K_G$  – густоти стояння рослин;  $K_{з.п}$  – засміченості посівів бур'янами;  $K_{пол}$  – ступеня полягання травостою;  $K_U$  – фаза розвитку рослин, що настає на момент збирання;  $K_{т.р}$  – забезпеченості технікою і трудовими ресурсами;  $K_{У.к.вал.}$  – накопичення у ґрунті кореневих та поживних залишків);

$B_i$ , – показник виходу готового корму, що залежить від технології збирання, консервування і збереження кормів.

Урожайність сухої маси зерна  $V_з$ , коренебульбоплодів  $V_{кб}$ , соломи  $V_{сол}$ , бадилля  $V_б$  визначають за формулами:

$$V_з = V_о K_з; \quad V_{кб} = V_о K_{кб}; \quad (8.20)$$

$$V_{сол} = V_о K_{сол}; \quad V_б = V_о K_б \quad (8.21)$$

де  $K_з, K_{кб}, K_{сол}, K_б$  – коефіцієнти виходу сухого зерна, коренебульбоплодів, соломи, бадилля із загального урожаю біомаси.

Як уже відзначалося, модель являє собою добуток нормованих функцій, у якій взаємодія факторів носить мультиплікаційний характер: у чисельнику – фактичне значення фактора, у знаменнику – деяка оптимальна величина його, яка обчислюється з врахуванням рівня інших факторів. Так, оптимальний рівень зволоження визначають з врахуванням температури і вологості повітря, а оптимальний рівень забезпеченості елементами мінерального живлення – з урахуванням умов освітлення, температури і зволоження.

Значення функції оптимальності строків посіву  $K_{с.п}$  для ярових зернових культур визначають за рівнянням

$$K_{с.п} = \begin{cases} 1,0 - 0,005с.п & \text{при } с.п \leq 5 \\ 0,97 - 0,0165с.п & \text{при } с.п \text{ від } 5 \text{ до } 25 \end{cases}, \quad (8.22)$$

де  $с.п$  – кількість днів після оптимального терміну посіву зернових культур, враховується тільки зниження урожаю внаслідок ураження рослин шкідниками і хворобами при запізнюванні з посівом.

Значення функції  $K_t$  – оптимальності середньодобової температури для рослин, урожаї яких збираються при досягненні певної фази розвитку, визначають за наступними рівняннями:

– ярі і озимі зернові культури, багаторічні й однолітні трави, коренеплоди:

$$K_{t1} = 1,12 - 0,033(t - 10); \quad (8.23)$$

$$K_{t2} = 1,15 - 0,030(t - 10); \quad (8.24)$$

– кукурудза, сорго, суданка:

$$K_{t1} = K_{t2} = 1,0 - 0,017(t - 21); \quad (8.25)$$

– картопля, соняшник:

$$K_{t1} = 1,0 - 0,015(t - 18); \quad (8.26)$$

$$K_{t2} = 1,0 - 0,015(t - 17), \quad (8.27)$$

де  $t$  – середня за період вегетації культури температура повітря.

Значення функції оптимальності зволоження  $K_E$  визначають за рівнянням

$$K_E = K_{E1} = K_{E2} = \left(\frac{E}{E_o}\right) + \left(\frac{E}{E_o}\right)^3 - \left(\frac{E}{E_o}\right)^4, \quad (8.28)$$

де  $E$  – можливе або фактичне водоспоживання культури за період вегетації, мм;

$E_o$  – оптимальне водоспоживання, мм.

Для визначення значень  $E$  використовують рівняння водного балансу

$$E = W_n - W_k + O + П + S_k - S_n - S_г, \quad (8.29)$$

де  $W_n$  – запаси вологи у шарі ґрунту, де розміщується коренева система, на початку вегетації;

$W_k$  – запаси вологи у ґрунті наприкінці вегетації, мм;

$O$  – опади за розрахунковий період вегетації, мм;

$П$  – поливна норма, мм;

$S_k$  – використання ґрунтових вод, мм;

$S_n$  – поверхневий стік, мм;

$S_г$  – втрата води в процесі інфільтрації, мм.

Для розрахунку оптимального водоспоживання використовуються формули (8.30) – (8.33)

$$E_o = l \sum d, \quad (8.30)$$

де  $\sum d$  – сума дефіцитів насичення повітря за період вегетації, мбар;

$l$  – біокліматичний коефіцієнт.

Приблизно його можна визначити за виразом  $l = (1 - 0,030t)$  для

однорічних культур і  $l = (1 - 0,028t)$  для багаторічних трав.

При відсутності даних про значення  $\Sigma d$  або біокліматичного коефіцієнта  $l$  оптимальне водоспоживання  $E_o$  у степових районах за період від сходів до змикання листя і в період їх відмирання можна розрахувати за формулою

$$E_o = \frac{\Sigma t (0,1t - a/100)}{10}, \quad (8.31)$$

де  $\Sigma t$  – сума середньодобових температур;

$t$  – середньодобова температура за вегетацію;

$a$  – середня відносна вологість повітря за вегетацію, %.

В період від змикання до початку відмирання листя (для кормових рослин у середньому за вегетацію) оптимальне водоспоживання обчислюють за наступними формулами:

– для степової зони

$$E_o = \frac{\Sigma t [0,1t + (1 - a/100)]}{10}, \quad (8.32)$$

– для лісостепової і лісової зон

$$E_o = \frac{\Sigma t [0,12t + (1 - a/100)]}{10}. \quad (8.33)$$

Значення функції оптимальності азотного  $K_N$ , фосфорного  $K_P$  і калійного  $K_K$  живлення розраховують за рівняннями:

$$K_N = \left( \frac{N}{N_o} \right)^{1,35} e^{1,1 \left( 1 - \frac{N}{N_o} \right)}, \quad (8.34)$$

$$K_P = \left( \frac{P}{P_o} \right)^{1,35} e^{1,1 \left( 1 - \frac{P}{P_o} \right)}, \quad (8.35)$$

$$K_K = \left( \frac{K}{K_o} \right)^{1,35} e^{1,1 \left( 1 - \frac{K}{K_o} \right)}, \quad (8.36)$$

де  $N, P, K$  – сумарна кількість  $N, P_2O_5, K_2O$  (внесених з добривами і наявних у ґрунті), еквівалентне застосовуваному мінеральному добриву, кг/га;

$N_o, P_o, K_o$  – оптимальна кількість  $N, P_2O_5, K_2O$ , необхідне для одержання максимального урожаю, забезпеченого ресурсами світла, тепла і зволоження з врахуванням віку травостою.

$$N = m_N N_n + N_m + m_{N_{od}} N_{od} + m_{N_{\phi}} N_{\phi} + N_{oc} + N_{c\phi} + N_c; \quad (8.37)$$

$$P = m_P P_n + P_m + m_{P_{od}} P_{od}; \quad (8.38)$$

$$K = m_K K_n + K_m + m_{K_{od}} K_{od}, \quad (8.39)$$

де  $m_N, m_P, m_K$  – коефіцієнти еквівалентності легкогідролізованого азоту  $m_N$  (по Корнфілду), рухливого фосфору  $m_P$  і калію  $m_K$ , (по Кірсанову), ґрунту азоту, фосфору і калію мінерального добрива, кг/мг 100г;

$m_{N_{od}}, m_{P_{od}}, m_{K_{od}}$  – коефіцієнти еквівалентності азоту, фосфору і калію органічних добрив азоту, фосфору і калію мінерального добрива, кг/кг;

$m_{N_{\phi}}$  – коефіцієнт еквівалентності азоту, фіксованого бобовими рослинами, азоту мінерального добрива, кг/кг;

$N_n, P_n, K_n$  – легкогідролізований азот, рухливий фосфор і калій у рік проведення аналізу, мг/100 г ґрунту;

$N_m, P_m, K_m$  – азот, фосфор, калій мінеральних добрив, внесених у рік отримання урожаю, кг/га;

$N_{od}, P_{od}, K_{od}$  – азот, фосфор, калій органічних добрив, внесених у рік одержання урожаю, кг/га;

$N_{\phi}, N_{\phi b}, N_{on}, N_n$  – азот, що надходить за рахунок азотфіксації бобовими травами  $N_{\phi}$ , вільними азотфіксаторами  $N_{\phi b}$ , з опадами  $N_{on}$  і насінням  $N_n$ , кг/га.

Значення функції оптимальності кислотності ґрунту  $K_{pH}$  визначається за рівнянням

$$K_{pH} = \left( \frac{pH}{pH_o} \right)^{24,3} e^{25,2 \left( 1 - \frac{pH}{pH_o} \right)}, \quad (8.40)$$

де  $pH$  – фактичне значення  $pH_{KCl}$ ;

$pH_o$  – оптимальне значення  $pH_{KCl}$  для даної культури.

Оптимальну кислотність ґрунту розраховують з врахуванням виду культури і механічного складу ґрунту. Вплив кислотності ґрунту на урожай залежить від доз і співвідношень мінеральних добрив. При внесенні фізіологічно кислих добрив негативна дія кислотності ґрунту зростає.

Наведені вище рівняння (8.19) – (8.40) є головною складовою комплексної моделі О.С. Образцова, яка орієнтована на вирішення задач прогнозування урожайності та оптимізації виробництва кормів.

## 9. МОДЕЛЮВАННЯ ПРОДУЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ РОСЛИН

### 9.1. Загальна характеристика продукційного процесу рослин

Продукційний процес рослин – це сукупність окремих взаємопов'язаних процесів, з яких фундаментальними є *фотосинтез*, *дихання* і *ріст*, в ході яких відбувається формування урожаю (рис. 9.1). Продукційний процес рослин залежить від умов навколишнього середовища і сам перетворює довкілля, в основному через архітектуру, газообмін та транспірацію фітоценозу.

Рослини, поглинаючи листям з атмосфери  $\text{CO}_2$  і кореневою системою воду з ґрунту, створюють в процесі фотосинтезу під впливом енергії сонячної радіації органічну речовину у вигляді асимілятів. Одночасно відбувається транспірація, яка відповідальна за забезпечення рослин водою і елементами мінерального живлення і за регуляцію теплового режиму рослин. В залежності від інтенсивності ФАР, водного і температурного режимів, швидкості вітру, концентрації  $\text{CO}_2$  у повітрі, родючості ґрунту і видових особливостей рослин процес фотосинтезу може йти з більшою або меншою швидкістю.

Другий фундаментальний процес – дихання забезпечує постачання енергією різних біохімічних процесів синтезу, пов'язаних з ростом, побудовою нових структурних елементів рослин і з транспортом речовин, а також підтримкою життєдіяльних структур органів рослин. При цьому затрачуються органічні речовини, накопичені в органах рослин.

Третій фундаментальний процес – ріст. Фотосинтез і ріст розглядаються як взаємопов'язані процеси. Енергетичне забезпечення ростової функції з боку фотосинтезу є неодмінною умовою росту. Система донорно-акцепторних відносин є основним виявленням інтеграції фотосинтезу і росту на рівні цілого організму. Між донором і акцептором формуються тимчасові проміжні фонди асимілятів. Фонди можуть знаходитися у кожному органі, але більш мобільні з них, ймовірно, знаходяться у листках і стеблах. Запасні асиміляти, на більш тривалий період, переважно накопичуються у коренях.

В умовах екологічного стресу, коли пригнічується фотосинтез, величина фондів стає істотним чинником формування урожаю. Фонди забезпечують часткову автономність функції фотосинтезу і росту. Можливе обмеження росту без фотосинтезу за умови, що енергетичне постачання відбувається за рахунок запасних субстратів попереднього фотосинтезу. Таким чином ростуть паростки, пагони і листя з бруньок дерев, так відбувається ріст у нічні години і т.д.

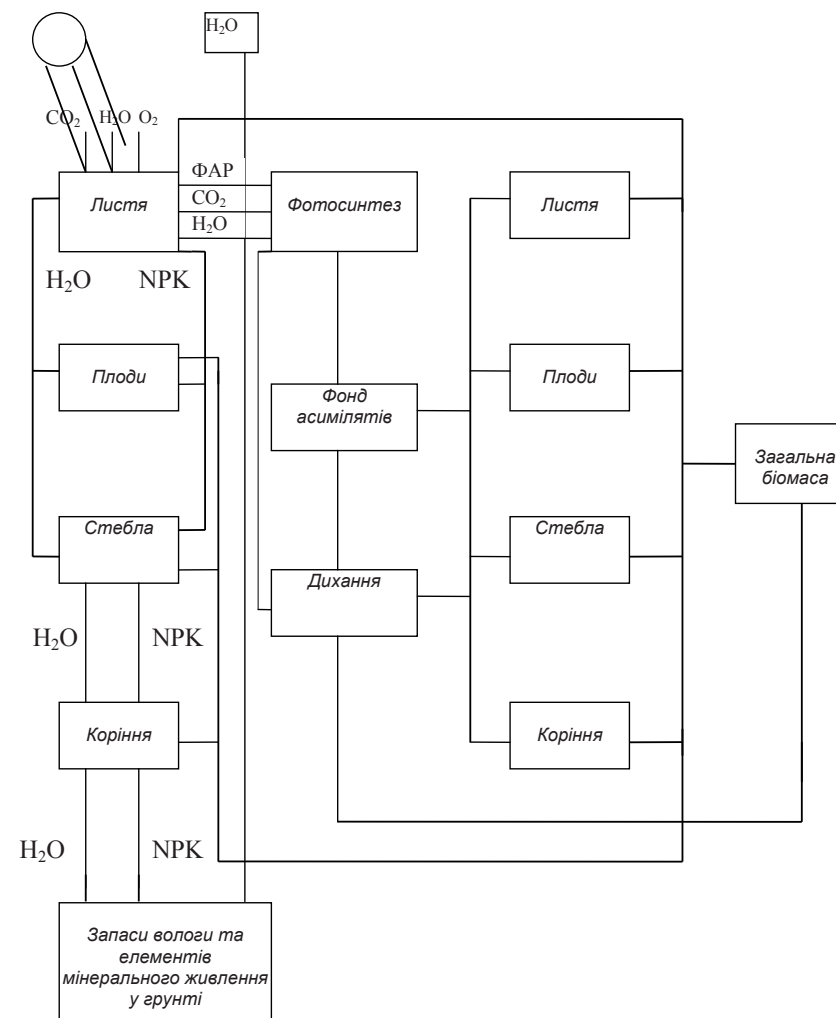


Рис. 9.1. Блок-схема продукційного процесу

Налив зерна у зернових культур і формування бульб у картоплі здійснюється також не тільки за рахунок «свіжих» асимілятів, які утворюються в листках, але і шляхом використання фондів асимілятів.

Ріст є складовою частиною продукційного процесу, який супроводжується збільшенням маси і розмірів органів, органел і живого організму в цілому.

Найбільш елементарний показник росту фітомаси – це приріст, тобто різниця між сухою фітомасою за певний проміжок часу

$$\Delta M = M_2 - M_1. \quad (9.1)$$

Приріст сухої фітомаси не є вичерпною характеристикою при оцінці росту органів рослин, оскільки не враховує хімічний склад фітомаси. Приріст сухої маси відбувається за якийсь інтервал часу  $\Delta t$  тому живається поняття абсолютної швидкості росту

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1} \quad (9.2)$$

відносного приросту

$$R_r = \frac{M_2 - M_1}{\bar{M}(t_2 - t_1)}, \quad (9.3)$$

де  $\bar{M}$  – середня суха маса рослини за період часу  $t_2 - t_1$ .

При аналізі приросту біомаси використовується і величина чистої продуктивності фотосинтезу посівів  $E_{n.ф.}$ , яка розраховується за формулою

$$E_{n.ф.} = \frac{1}{\bar{L}_0} \cdot \frac{\Delta M}{\Delta t}, \quad (9.4)$$

де  $\bar{L}_0$  – середня сумарна площа листя рослини за період  $\Delta t$ .

Величина  $E_{n.ф.}$ , широко використовується для характеристики фотосинтетичної активності листової поверхні.

За період вегетативного росту і за оптимальних умов збільшення структурної маси відбувається пропорційно самій масі (стадія експоненціального росту). Ріст окремих органів рослини в оптимальних умовах протягом всього онтогенезу має характерні для даного виду закономірності, які задані генетичним кодом рослини. При нестачі будь-якої фондової речовини ріст обмежений і пропорційний концентрації фондової речовини. При повних фондах лімітування росту фондами відсутнє.

Крім фондів вуглеводів і N, P, K істотний вплив на ріст проявляють температура і водний режим рослин. Ріст відбувається в певному температурному інтервалі, в середині цього інтервалу при оптимальній температурі ріст досягає максимальної швидкості. При великих значеннях водного потенціалу вода не лімітує його ріст, однак при погіршенні водного режиму ріст рослини буде затримуватись і припиниться, якщо водний потенціал досягне деякого критичного значення.

Згідно з роботами Х.Г. Тоомінга найвища продуктивність посівів сільськогосподарських культур може бути досягнута при таких умовах:

- формується оптимальний за розмірами і по тривалості роботи фотосинтетичний апарат;

- досягається найкраща по інтенсивності і по якісній спрямованості його робота в різних періодах фаз росту та розвитку рослин;

- забезпечується найкраще використання продуктів фотосинтезу з найменшими їх витратами на процеси загального метаболізму і росту;

- хід цих процесів підтримується оптимальним співвідношенням чинників середовища: світла, тепла, вологи, вуглекислого газу та елементів мінерального живлення.

Передумовою для створення математичних моделей продукційного процесу розвитку рослин є знання закономірностей залежності вищеназваних фундаментальних процесів від чинників навколишнього середовища і від внутрішніх біологічних, видових та адаптивних особливостей рослин у взаємозв'язку і в динаміці онтогенезу.

## 9.2. Моделювання фотосинтезу, дихання і газообміну CO<sub>2</sub> листка

Загально визнаним прийомом розглядання енерго- і масообмінних процесів у системі ґрунт – рослина – атмосфера є аналог у вигляді електричних ланцюжків з інтерпретацією зв'язків між об'єктами системи як опору на шляху потоку субстанції (рис. 9.2).

Теплообмін між листком і повітрям проходить через поверхню листка, він визначається опором ламінарного шару повітря у міжлистовому просторі – опором примежового шару листка  $r_a$  (рис. 9.2). Зовні листок має одношаровий епідерміс (на верхній і нижній стороні листка). Зовнішні стінки епідермісу покриті кутикулою – вологозахисним шаром. Епідерміс разом з кутикулою створює ефективний бар'єр на шляху руху води. Між верхнім і нижнім епідермісом розміщені два види рослинної тканини (зверху – паліадний (стовпчастий) мезофіл, внизу – губчастий мезофіл) та велика кількість міжклітинників. Завдяки розвинутій системі міжклітинників мезофіл має величезну поверхню, що в багато разів



перевищує зовнішню поверхню листка. Вода в міжклітинниках випаровується із всіх відкритих ділянок клітин мезофілу. У більшості видів рослин на нижньому епідермісі містяться устячкові (отвори) щілини – устячки (продихи).

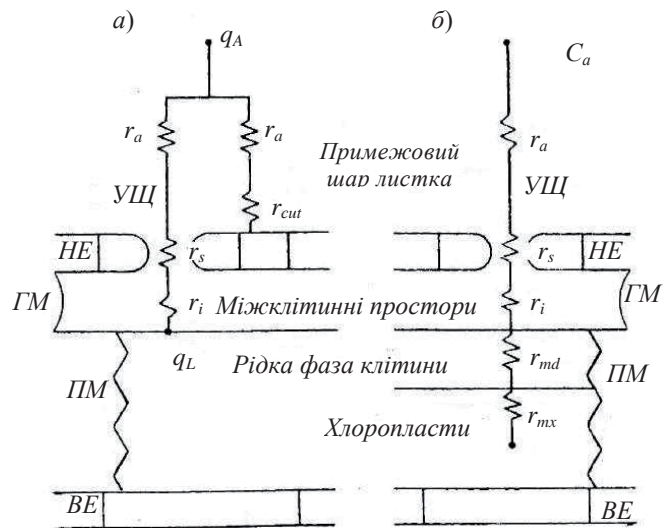


Рис. 9.2. Опір на шляху потоку водяної пари (а) та вуглекислого газу (б) в системі листок – атмосфера:

BE – верхній епідерміс; HE – нижній епідерміс; GM – губчастий мезофіл; ПМ – палисадний мезофіл; УЩ – устячко ва щілина;  $r_a$  – опір при граничного шару;  $r_{cut}$  – опір кутикули;  $r_i$  – опір міжклітинників;  $r_{md}$  – опір мезофілу;  $r_{mx}$  – опір в центрах карбоксилювання;  $r_s$  – опір устячок;  $q_A$  – питома вологість повітря між листками;  $q_L$  – питома вологість повітря в міжклітинному просторі;  $C_A$  – концентрація  $CO_2$  в повітрі між листками;  $C_c$  – концентрація  $CO_2$  в центрах карбоксилювання

Під транспірацією листя розуміють перенесення водяної пари уздовж градієнта концентрації з випарних поверхонь усередині листка до зовнішньої його поверхні і далі у повітря. Випаровування з листка відбувається в двох місцях: із зовнішніх стінок клітин епідермісу і зі стінок клітин мезофілу, що виходять у міжклітинні простори, заповнені повітрям. Звідси пара рухається до поверхні листка: у першому випадку через кутикулу, долаючи кутикулярний опір  $r_{cut}$  а в другому – через продихові

(устячкові) щілини, долаючи устячковий опір (рис. 9.2 а). Коли устячка відкриті, роль кутикулярної транспірації мала. Оскільки шляхи руху водяної пари – через кутикулу і через устячка – паралельні, то й сумарний внутрішній опір водяній парі  $r_w$  виражається через устячковий опір  $r_s$  і кутикулярний опір  $r_{cut}$  формулою

$$\frac{1}{r_w} = \frac{1}{r_{cut}} + \frac{1}{r_s} \quad (9.5)$$

На поверхні листка на перенесення водяної пари впливає, як і при теплообміні, опір примежового шару  $r_a$ . На шляху водяної пари опори  $r_w$  і  $r_a$  послідовні.

Інтенсивність транспірації листка визначається формулою

$$E_L = \rho_A \frac{q_L - q_A}{r_a + r_w} \quad (9.6)$$

де  $E_L$  – інтенсивність транспірації листка, г  $H_2O \cdot cm^{-2} \cdot c^{-1}$ ;

$\rho_A$  – об'ємна густина повітря, г  $cm^{-3}$ ;

$q_L$  і  $q_A$  – питома вологість повітря відповідно у міжклітинному просторі всередині листка і між листками, г  $H_2O/g$  повітря.

Газообмін  $CO_2$  між листком і повітрям є результатом протікання в листку процесів фотосинтезу і дихання. При фотосинтезі листок поглинає  $CO_2$  з повітря у міжлистковому просторі. Молекули  $CO_2$  рухаються через примежовий (приграничний) шар повітря над листком і через продихові (устячкові) отвори в міжклітинний простір всередині листка, де вони дифундують крізь стінки мезофільних клітин (рис. 9.2б). Цей шлях  $CO_2$  описується дифузійним рівнянням типу

$$F_{Li} = \frac{q_{Li} - q_{Ai}}{r_i} \quad (9.7)$$

де  $F_{Li}$  – потік  $i$ -тої субстанції між листком і повітрям, що визначає інтенсивність джерела, г  $cm^{-2} \cdot c^{-1}$ ;

$q_{Li}$  і  $q_A$  – концентрація субстанції відповідно у листку й у повітрі, г  $cm^{-3}$ ;

$r_i$  – сумарний дифузійний опір на шляху  $i$ -тої субстанції, с  $cm^{-1}$ .

На стінках мезофільних клітин молекули  $CO_2$  розчиняються, і подальший їхній шлях у центри карбоксилювання в хлоропластах описується законом дифузії розчинених газів у рідині і характеризується опором мезофіла  $r_{md}$ . У центрах карбоксилювання молекули  $CO_2$  вступають у біохімічний цикл фотосинтезу.

У процесі темного дихання молекули CO<sub>2</sub> виділяються в мітохондріях, що знаходяться усередині клітини на деякій відстані від центрів карбоксилування. Тому вони можуть дифундувати або до стінок клітин і потрапити в міжклітинний простір, або до центрів карбоксилування в межах клітини і поглинатися в процесі фотосинтезу.

У процесі світлого дихання молекули CO<sub>2</sub> виникають у безпосередній близькості від центрів карбоксилування й імовірність їх дифундування в міжклітинний простір мала. Дифузійний шлях молекул CO<sub>2</sub>, що виділяються в процесі дихання, істотно залежить від будови і структури клітин.

Процес фотосинтезу в листку підрозділяється на два етапи: дифузія молекул CO<sub>2</sub> з повітря до центрів карбоксилування у клітині, що описується законами біофізики і біохімічний цикл фотосинтезу в хлоропластах, який описується законами фотобіології й біохімії.

Для опису дифузії молекул CO<sub>2</sub> у листку Гаастра застосовував закон Фіка

$$\Phi_L = \frac{c_A - c_c}{r_{ac} + r_{sc} + r_{md}}, \quad (9.8)$$

де  $\Phi_L$  – інтенсивність фотосинтезу, мг CO<sub>2</sub>·см<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>.

$c_A$  і  $c_c$  – концентрація CO<sub>2</sub> відповідно в повітрі і в центрах карбоксилування, мг CO<sub>2</sub>·см<sup>-3</sup>;

$r_{ac}$ ,  $r_{sc}$ ,  $r_{md}$  – дифузійні опори для молекул CO<sub>2</sub> відповідно в приграничному шарі листка, устячках і клітинах мезофіла.

Біохімічний цикл фотосинтезу описується рівнянням Міхаеліса-Ментен

$$\Phi_L = \frac{1}{\frac{1}{\chi_{\Phi} a_{\Phi} I_{\Phi}} + \frac{r_{mx}}{c_c}}, \quad (9.9)$$

де  $a_{\Phi}$  – нахил світлової кривої фотосинтезу;

$I_{\Phi}$  – інтенсивність ФАР;

$\chi_{\Phi}$  – коефіцієнт поглинання листком ФАР;

$r_{mx}$  – ефективний опір карбоксилування.

Для оцінки залежності інтенсивності фотосинтезу від щільності світлового потоку існує багато різноманітних формул, але найчастіше фотосинтез листя описують формулою Монсі і Саєкі

$$\Phi_o^j = \frac{\Phi_{\max} \cdot a_{\Phi} \cdot I_{\Phi}}{\Phi_{\max} + a_{\Phi} \cdot I_{\Phi}}, \quad (9.10)$$

де  $\Phi_o^j$  – інтенсивність фотосинтезу при оптимальних умовах тепло- і вологозабезпеченості в реальних умовах освітленості;

$\Phi_{\max}$  – інтенсивність фотосинтезу при світловому насиченні і нормальній концентрації CO<sub>2</sub>;

$a_{\Phi}$  – початковий нахил світлової кривої фотосинтезу.

Формула Росса і Біхеле поєднує залежність фотосинтезу від радіації, концентрації CO<sub>2</sub> і від дифузійних опорів

$$\Phi_L = \frac{1}{\frac{1}{\Phi_m} + \frac{1}{\chi_{\Phi} a_{\Phi} I_{\Phi}} + \frac{r_{ac} + r_{sc} + r_m}{c_A}}, \quad (9.11)$$

де  $\Phi_m$  – потенційний фотосинтез, тобто  $\lim_{\substack{I_{\Phi} \rightarrow \infty \\ c_A \rightarrow \infty}} \Phi_L = \Phi_m$ , що залежить від

температури і віку листка, а  $r_m = r_{md} + r_{mx}$ .

Вплив інших факторів навколишнього середовища (температури, водного режиму, швидкості вітру і вологості повітря) на фотосинтез враховується побічно, в основному через дифузійні опори.

У формулі (9.11) фотобіологічна сторона фотосинтезу визначається через кут нахилу світлової кривої  $a_{\Phi}$ . Біохімічний цикл фотосинтезу виражається через параметри  $\Phi_m$  і  $r_{mx}$ .

Процес дихання усієї рослини охоплює дихання листка, а також дихання інших органів у денний час і дихання всіх органів у нічні години доби.

Мак-Крі на підставі лабораторних експериментів запропонував розділити темнове дихання рослин на дві складові – дихання росту  $R_G$  і дихання підтримки  $R_M$ , тобто

$$R = R_G + R_M. \quad (9.12)$$

Дихання росту характеризує витрату енергії на створення нової структурної маси, причому добове дихання росту пропорційно денній сумі фотосинтезу  $\Phi$ , тобто

$$R_G = k_1 \Phi, \quad (9.13)$$

де  $k_1$  – безрозмірна стала.

Дихання підтримки характеризує витрату енергії на підтримку життєздатності живих структур рослини, причому дихання підтримки всієї рослини  $R_M$  пропорційно масі рослини, тобто

$$R_M = \frac{m_p c}{\varepsilon}, \quad (9.14)$$

де  $m_p$  – суха фітомаса всієї рослини, г;  
 $\varepsilon$  – перехідний коефіцієнт від засвоєного вуглекислого газу до сухої фітомаси, г сухої речовини  $(\text{г} \cdot \text{CO}_2)^{-1}$ ;  
 $c$  – стала величина, год<sup>-1</sup>.

### 9.3. Моделювання розподілу асимілятів і елементів мінерального живлення

Очевидно, що розподіл сухої речовини між різними органами рослини і різних хімічних сполук впливає як на урожайність сільськогосподарської культури, так і на її поживну цінність. Дослідження зазначеної проблеми викликає дуже серйозні труднощі. Дотепер немає єдиної думки про те, який з підходів до неї є найкращим або, принаймні, задовільним.

Найбільш важливою характеристикою досліджуваного процесу є його динаміка, оскільки саме вона в остаточному підсумку (після інтегрування за часом) визначає структуру розподілу, що спостерігається. У загальному вигляді проблема формулюється просто. Нехай  $x$  є деяка хімічна речовина, це може бути елемент, сполука або група сполук. Тоді група з  $n$  речовин може бути позначена, як

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (9.15)$$

Ці речовини  $x$  розміщені в елементах структури рослини  $L$  (тканинах, органах або групах органів); усього таких елементів  $m$ , тобто

$$L = \{L_1, L_2, \dots, L_m\}. \quad (9.16)$$

Нехай  $M_{i,j}$  – маса речовини  $X = x_i$ , розміщеної в елементі  $L_j$  (параметри  $M_{i,j}$  – це змінні стану).

Тоді можна побудувати рівняння (кількість їх  $m \times n$ ) типу:

$$dM_{i,j}/dt = \text{функція змінних стану та інших величин}, \quad (9.17)$$

які цілком визначають досліджувану систему, в тому числі й остаточну структуру розподілу сухої речовини. Цей загальний підхід дозволяє адаптувати моделі розподілу речовини між органами і між хімічними сполуками. З біологічної точки зору найбільший інтерес представляють собою такі елементи, як вуглець і азот.

Нехай  $\Delta C_{\text{загал.}}$  – загальна кількість вуглецю, що поглинається рослиною при фотосинтезі за час  $\Delta t$ . Тоді можна записати

$$\Delta C_{\text{загал.}} = \text{втрати (дихання, старіння і т.д.)} + \Delta C_{\text{чист.}} \quad (9.18)$$

Розподіл поглиненого в «чистому» вигляді кількості вуглецю  $\Delta C_{\text{чист.}}$  між органами рослини задається таким виразом

$$\Delta C_{\text{орган}} = \sum_{\text{орган}} \Delta M_{C_{\text{орган}}}. \quad (9.19)$$

Головне завдання надалі – відшукати й інтерпретувати постійні рівняння (9.19), де  $\Delta M_{C_{\text{орган}}}$  означає збільшення маси вуглецю в кожному органі.

#### 9.3.1. Емпіричний підхід

На найпростішому рівні в рамках цього підходу здійснюються безпосередні виміри результатів розподілу для того, щоб визначити коефіцієнти рівняння (9.19). Наприклад, якщо суха речовина розподіляється між коренем, пагоном і суцвіттям, то це рівняння набуває вигляду

$$\Delta C_{\text{чист.}} = \Delta M_{C_k} + \Delta M_{C_n} + \Delta M_{C_c}. \quad (9.20)$$

Коефіцієнти розподілу  $\varphi_k$ ,  $\varphi_n$  і  $\varphi_c$  задовольняють співвідношенню типу

$$\varphi_n = \Delta M_{C_n} / \Delta C_{\text{чист.}} \quad (9.21)$$

за умови що

$$\varphi_k + \varphi_n + \varphi_c = 1. \quad (9.22)$$

Числові значення коефіцієнтів визначаються, як правило, експериментально.

*Ростові функції Ю.Росса.* Істотним кроком у розвитку математичного опису росту стали роботи Ю.Росса. Його система рівнянь росту

послужила основою для інтенсивного розвитку динамічного моделювання продукційного процесу і стала загальною системою. Система диференціальних рівнянь Росса для опису росту органів рослини має вигляд

$$\frac{DM_j}{dt} = \varepsilon_\Phi \sum_{i=1}^4 A_{ij} \bar{\Phi}_{ci} - \varepsilon_R \bar{R}_{cj} - V_j + M \sum_{i=1}^4 B_{ij}, \quad (9.23)$$

де  $i$  та  $j$  – органи рослини (1 – листя, 2 – стебла, 3 – корені, 4 – репродуктивні органи);

$M_j$  – суха маса органа  $j$ ;

$\varepsilon_\Phi$  – коефіцієнт ефективності фотосинтезу;

$\varepsilon_R$  – коефіцієнт ефективності дихання;

$\bar{\Phi}_{ci}$  – сумарний фотосинтез органа  $i$  за добу;

$\bar{R}_{cj}$  – сумарне дихання органа  $j$  за добу;

$V$  – втрати сухої фітомаси за добу внаслідок її опадів;

$M$  – сумарна суха маса рослин;

$A_{ij}$  – частка утворених за добу в  $i$ -му органі рослини «свіжих» асимілятів, які перетікають протягом доби в  $j$ -й орган;

$B_{ij}$  – обмін «старих» асимілятів між  $i$ -м та  $j$ -м органами, віднесений до одиниці сухої фітомаси всієї рослини.

$A_{ij}$  і  $B_{ij}$  надаються у вигляді «ростових матриць». У спрощеному випадку, коли основними синтезуючими органами є листя, замість ростових матриць для періоду вегетативного росту розглядаються функції вегетативного росту  $A_j$ , а для періоду репродуктивного росту – функції репродуктивного росту або так звані функції притоку – відтоку  $B_j$ .

Рівняння росту для  $j$ -го органа тоді записується так

$$\frac{\Delta m_j}{\Delta t} = A_j \frac{\Delta M}{\Delta t} + M B_j, \quad (9.24)$$

де  $\sum A_j = 1$  то  $\sum B_j = 0$ .

Функції періоду вегетативного росту  $A_j$  визначаються за формулою

$$A_j = \frac{\Delta m_j}{\Delta t} : \frac{\Delta M}{\Delta t} \quad (9.25)$$

та показують частку загального приросту біомаси цілої рослини, що припадає на  $j$ -й орган.

Функції періоду репродуктивного росту або так звані функції притоку – відтоку  $B_j$  визначаються як

$$B_j = \frac{\Delta m_j}{\Delta t} M^{-1} \quad (9.26)$$

та показують загальний притік «старих» асимілятів у  $j$ -й орган, якщо  $B_j \geq 0$ , або їхній відтік з  $j$ -го органу в інші органи, якщо  $B_j \leq 0$ .

Отримані за формулами (9.25) та (9.26) ростові функції ярого ячменю наведені на рис. 9.3. Ростові функції показують, коли починається і коли закінчується ріст того чи іншого органа, як проходить ріст окремих органів, коли відносний приріст маси органа буде максимальним. Як видно з даних рис. 9.3, функція вегетативного росту листя на початку вегетаційного періоду порівняно швидко досягла максимуму, а потім протягом 20 днів знижується до нуля – листя перестає рости, в цей час ріст стебла максимальний, починається також швидко підвищення функції росту колосся.

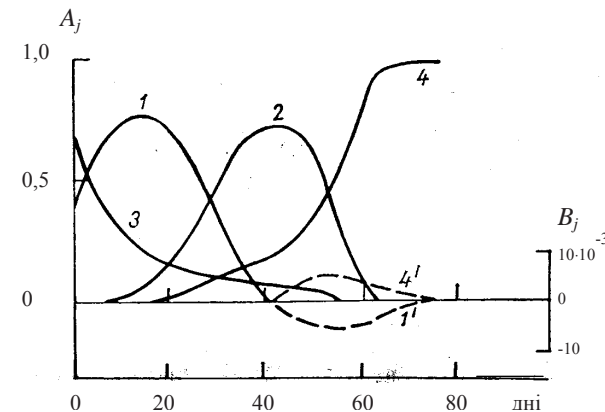


Рис. 9.3. Функції росту окремих органів ярого ячменю:

$A_j$  – функції росту  $j$ -го органа;  $B_j$  функції, які характеризують перерозподіл «старих» асимілятів в органах  $j$ : 1 – листя, 2 – стебла, 3 – коріння, 4 – репродуктивні органи,  $j=1'$ ,  $j=4'$  – криві  $B_j$

Рівняння Х. Тоомінга. У роботі Х. Тоомінга рівняння Росса трохи модифіковане. Він включив у рівняння (9.23) замість  $\Delta M/\Delta t$  добовий газовий обмін посіву і одержав таке рівняння

$$\frac{\Delta m_j}{\Delta t} = \varepsilon A_j(t) \left[ \int_t^{t+1} \int_0^{L_0(t)} (\Phi_1 - R_1) dL d\tau - \sum_{i=2}^n \bar{R}_{ci} \right] + MB_j, \quad (9.27)$$

де  $\sum_{i=2}^n \bar{R}_{ci}$  – сумарне за добу дихання всіх органів, крім листя;  
 $t$  – тривалість світлого часу доби.

*Ростові функції Є.П. Галяміна.* Виходячи з припущення, що відтік асимілятів із  $j$ -го органа пропорційний масі живої частини  $\tilde{m}_j$  цього органа, Є.П. Галямін запропонував функцію репродуктивного росту визначати за виразом

$$b_j = \frac{\Delta m_j}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\tilde{m}_j}, \quad (9.28)$$

де  $\tilde{m}$  – біомаса, у складі якої є компоненти, що здійснюють і регулюють обмін речовин, названа А.М. Польовим *функціонуючою біомасою*.

Згідно з роботами А.М. Польового її кількість оцінюється на основі використання універсального закону старіння біологічних систем. Для періоду активного росту рослини вся біомаса є функціонуючою, отже приріст загальної і функціонуючої біомаси однаковий

$$\frac{\Delta \tilde{m}_j}{\Delta t} = \frac{\Delta m_j}{\Delta t} \geq 0. \quad (9.29)$$

При виникненні стресових умов або при старінні рослин, коли кількість загальної біомаси знижується внаслідок переваги процесів розпаду над процесами синтезу, зміна кількості функціонуючої біомаси знаходиться за виразом

$$\frac{\Delta \tilde{m}_j}{\Delta t} = - \left( \frac{\Delta m_j}{\Delta t} \frac{1}{k_s} \right), \quad (9.30)$$

де  $k_s$  – параметр, який характеризує частку життєдіяльних структур у загальній біомасі органа.

*Рівняння О.Д. Сиротенка.* Для опису динаміки фітомаси посівів О.Д. Сиротенко запропонував наступну систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} m_l^{j+1} &= m_l^j + \varepsilon_R (\alpha_l^j \Phi^j - \varphi^j R_{0l} m_l^j - \lambda_l^j m_l^j + k^j \delta_r^j m_r^j), \\ m_s^{j+1} &= m_s^j + \varepsilon_R (\alpha_s^j \Phi^j - \varphi^j R_{0s} m_s^j - \lambda_s^j m_s^j + (1-k^j) \delta_r^j m_r^j), \\ m_r^{j+1} &= m_r^j + \varepsilon_R (\alpha_r^j \Phi^j - \varphi^j R_{0r} m_r^j - \lambda_r^j m_r^j - \delta_r^j m_r^j), \\ m_R^{j+1} &= m_R^j + \varepsilon_R (\alpha_R^j \Phi^j - \varphi^j R_{0R} m_R^j + L_R \lambda_l^j m_l^j + S_R \lambda_s^j m_s^j + r_R \lambda_r^j m_r^j), \end{aligned} \right\} (9.31)$$

де  $m_l^j, m_s^j, m_r^j, m_R^j$  – фітомаси відповідно листя, стебел, коріння та репродуктивних органів на  $j$ -ту добу;

$\alpha_l^j, \alpha_s^j, \alpha_r^j, \alpha_R^j$  – ростові функції листя, стебел, коріння і репродуктивних органів;

$\lambda_l^j, \lambda_s^j, \lambda_r^j$  – ростові функції, які визначають втрати фітомаси на опад та відтік у репродуктивні органи;

$L_R, S_R, r_R$  – коефіцієнти ( $\leq 1$ ), які показують яка частка втрат реутилізується у репродуктивних органах;

$\Phi^j$  – сумарний фотосинтез посіву за добу;

$R_{0l}, R_{0s}, R_{0r}, R_{0R}$  – коефіцієнти дихання підтримки листя, стебел, коріння та репродуктивних органів;

$\varepsilon_R = \Delta\tau / (1 + R_r)$ , де  $\Delta\tau$  – часовий крок;  $R_R$  – коефіцієнт дихання росту;

$k^j = \alpha_l^j / (\alpha_l^j + \alpha_s^j)$ ;

$\delta_r^j$  – функція, яка визначає швидкість переміщення асимілятів із підземних у надземні органи на початку весняної вегетації.

Ростові рівняння в (9.31) підпорядковуються наступним обмеженням:

$$\alpha_l^j + \alpha_s^j + \alpha_r^j + \alpha_R^j = 1$$

і

$$\alpha_p^j \geq 0 \quad p \in l, s, r, R$$

Для функції  $\delta_r^j$  характерно, що

$$\delta_r^j = \begin{cases} \delta_r^j, & \text{якщо } \omega^j \leq \omega_0, \\ 0, & \text{якщо } \omega^j > \omega_0, \end{cases}$$

де  $\omega^j$  – поточна сума ефективних температур;

$\omega_0$  – сума ефективних температур, за якої припиняється переміщення асимілятів із підземних у надземні органи на початку весняної вегетації.

Рівняння А.М. Польового. Для опису динаміки росту сухої біомаси окремих органів А.М. Польовим запропонована така система рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta m_i^j}{\Delta t} &= \frac{\beta_i^j \Phi^j}{1 + c_{G_i}} - \frac{(\alpha_{R_i}^j c_{m_i} \varphi_R^j + \vartheta_i^j) \tilde{m}_i^j}{1 + c_{G_i}}, \\ \frac{\Delta m_p^j}{\Delta t} &= \frac{\beta_p^j \Phi^j}{1 + c_{G_i}} - \frac{\left( \alpha_{R_p}^j c_{m_p} \varphi_R^j \tilde{m}_p - \sum_i^{l,s,r} \vartheta_i^j \tilde{m}_i^j \right)}{1 + c_{G_i}}, \\ \frac{\Delta m_g^j}{\Delta t} &= \frac{\Delta m_{g_{\max}}^j}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta \tilde{m}_p^j / \Delta t}{k_g + \Delta \tilde{m}_p^j / \Delta t}, \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

де  $\frac{\Delta m_{i(p)}}{\Delta t}$  – приріст біомаси  $i$ -го вегетативного (репродуктивного) органа;  
 $\tilde{m}_{i(p)}$  – функціонуюча біомаса  $i$ -го вегетативного (репродуктивного) органа;  
 $\Delta m_g / \Delta t$  – приріст сухої біомаси зерна;  
 $\Delta m_{g_{\max}} / \Delta t$  – максимально можлива в реальних умовах швидкість приросту сухої біомаси зерна;  
 $\beta_i$  – ростова функція вегетативного періоду;  
 $\vartheta_i$  – ростова функція репродуктивного періоду;  
 $c_G$  – коефіцієнт дихання росту;  
 $\alpha_R$  – онтогенетична крива дихання;  
 $c_m$  – коефіцієнт дихання підтримки;  
 $\varphi_R$  – температурна крива дихання;  
 $k_g$  – константа Міхаеліса-Ментен;  
 $i$  – органи:  $l$  – листя;  $s$  – стебла;  $r$  – корені;  $p$  – колосся.

Ростові функції за методами Ю. Росса та Є.П. Галяміна визначаються за експериментальними даними спостережень над приростами сухої біомаси окремих органів рослин.

### 9.3.2. Напівемпіричний підхід до визначення ростових функцій

На основі закономірностей індивідуального розвитку рослин та розглядання закону росту і моделювання найбільш загального процесу, що характеризує старіння живих організмів – розпаду життєдіяльних структур, А.М. Польовий запропонував напівемпіричні методи визначення функцій періоду вегетативного і репродуктивного росту.

Головним блоком прикладних динамічних моделей формування урожаю є блок росту. Параметри цього блоку визначаються для кожної культури і для конкретної території. Ця група параметрів об'єднує функції періоду вегетативного росту  $\beta_i$  та функції періоду репродуктивного росту  $v_i$ . Функції періоду вегетативного росту визначаються як

$$\beta_i = \frac{\Delta m_i}{\sum_i^{l,s,r,p} \Delta M_i}, \quad i \in l, s, r, p. \quad (9.33)$$

Ростові функції вегетативного періоду показують частку сумарного приросту всієї рослини або частку «свіжих», тільки що утворених асимілятів, яка приходить на  $i$ -й орган.

Функції періоду репродуктивного росту визначаються так

$$v_i = \frac{\Delta m_i}{m_i}, \quad i \in l, s, r \quad (9.34)$$

і показують відтік (перерозподіл) асимілятів («старих», раніше створених – запасних) із кожного  $i$ -го вегетативного органа після закінчення його росту у репродуктивні органи.

Розрахунок функцій вегетативного і репродуктивного періодів у прикладних моделях формування урожаїв полягає в тому, що динаміка біомаси із кожного органа у відносних одиницях наводиться у вигляді логістичної кривої росту, яка симетрична відносно точки перегину.

Схематично динаміка біомаси всіх органів рослини наведена у вигляді сім'ї кривих (рис. 9.4), точки перегину яких  $\sum t_{2i}$ ,  $i \in l, s, r, p$  збігаються з сумами температур, які дорівнюють половині всієї суми, необхідної для завершення росту кожного органа. Наведена на осі абсцис сума  $\sum t_p$ , представляє собою суму температур, з якої починається ріст репродуктивних органів.

Якщо описати кожен криву рівнянням логістичної кривої, продиференціювати ці рівняння та помножити на коефіцієнт  $c_i$ , який характеризує частку органа в загальній біомасі під час дозрівання, то одержимо такий вираз для визначення функцій періоду вегетативного росту

$$\beta_i^j = \frac{\Delta \theta_i^j}{\sum_i^{l,s,r,p} \Delta \theta_i^j} \quad (9.35)$$

у якому

$$\Delta\theta_i^j = c_i \frac{2(\sum t_{2i} - TS_2^j)}{4,6052 \cdot 10 \left( 1 + 10 \frac{\sum t_{2i}}{2(\sum t_{2i} - TS_2^j)^2} \right)}, \quad (9.36)$$

$i \in l, s, r, p$

де  $\sum t_{2i}$  – сума ефективних температур, яка дорівнює половині суми температур, необхідної для закінчення росту кожного  $i$ -го ( $l, s, r, p$ ) органа;  
 $TS_2$  – поточна сума температур, яка накопичується з початку вегетації культури;  
 $c_i$  – коефіцієнт співвідношення різних органів у рослині на час дозрівання;  
 $j$  – часовий крок моделі.

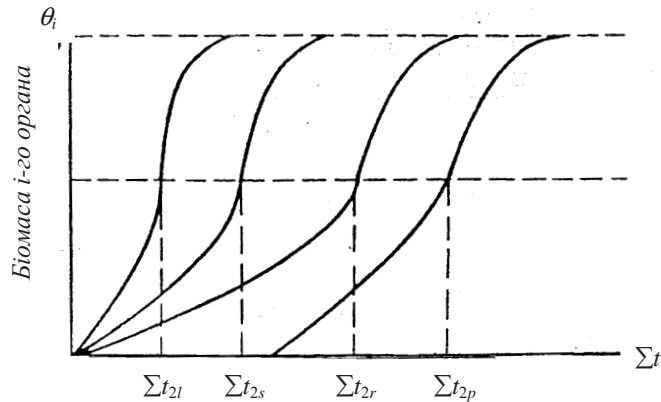


Рис. 9.4. Динаміка накопичення відносної біомаси  $\theta_i$  окремих органів рослин (схема):  
 $\sum t_{2l}, \sum t_{2s}, \sum t_{2r}, \sum t_{2p}$  – 1/2 суми температур, яка необхідна для закінчення росту органів:  $l$  – листя;  $s$  – стебла;  $r$  – коріння;  $p$  – колосся;  
 $\sum t_p$  – сума температур, з накопичення якої починається ріст колоса

Перерозподіл «старих» асимілятів із листя, стебел та коріння в репродуктивні органи починається з моменту закінчення росту кожного з цих органів. Ростові функції періоду репродуктивного росту  $v_i$  для кожного вегетативного органа знаходяться за виразом:

$$v_i^j = \frac{K_S TS_1^j}{(2\sum t_{2p} - \sum t_p) - 2\sum t_{2i}}, \quad (9.37)$$

$i \in l, s, r$

де  $K_S$  – частка життєдіяльних структур у загальній біомасі кожного  $i$  – го органа;

$TS_1$  – сума ефективних температур за будь-який інтервал часу (за добу або декаду);

$\sum t_p$  – сума температур, з якої починається ріст репродуктивного органа – колосся.

Зовнішній вигляд та числові значення функцій періоду вегетативного росту, які описують розподіл між органами рослин знову створених «свіжих» асимілятів, а також функцій періоду репродуктивного росту, що визначають перерозподіл між вегетативними та репродуктивними органами «старих», раніше створених запасних асимілятів, визначається сумами температур, які необхідні для закінчення росту листя, стебел, коріння, початку росту колосся, настання воскової стиглості. Для визначення цих сум необхідно розрахувати дати настання фаз виходу в трубку, появи нижнього вузла соломини, колосіння, цвітіння та підрахувати середні багаторічні суми ефективних температур вище 5 °C за періоди:

- відновлення вегетації (сходи) – вихід у трубку  $\sum t_1$ ;
- відновлення вегетації (сходи) – колосіння  $\sum t_2$ ;
- відновлення вегетації (сходи) – цвітіння  $\sum t_3$ .
- відновлення вегетації (сходи) – воскова (повна) стиглість  $\sum t_4$ .

Тоді сума температур, яка визначає вигляд ростової функції будь-якого  $i$  – органа, тобто сума  $\sum t_{2i}$  буде становити: для листя ( $\sum t_{2l}$ ) – 1/2 суми ефективних температур за період від відновлення вегетації до колосіння; для стебел ( $\sum t_{2s}$ ) – 1/2 суми ефективних температур за період від відновлення вегетації до цвітіння; для коренів ( $\sum t_{2r}$ ) =  $\sum t_{2s}$ , подібно до стебел.

Необхідно визначити суму температур  $\Sigma t_p$ , з якої починається ріст репродуктивного органа – колоса. Ця сума визначається як середня з двох сум: суми температур за період від відновлення вегетації (сходів) до виходу в трубку та суми температур за період від відновлення вегетації до колосіння:

$$\Sigma t_p = \frac{\Sigma t_1 + \Sigma t_2}{2}. \quad (9.38)$$

Положення ростової функції колосся визначається сумою температур  $\Sigma t_{2p}$ , яка розраховується за виразом

$$\Sigma t_{2p} = \frac{\Sigma t_4 - \Sigma t_p}{2} + \Sigma t_p. \quad (9.39)$$

На рис. 9.5 наведені ростові функції ярого ячменю, отримані за допомогою напівемпіричних методів визначення функцій періоду вегетативного та репродуктивного росту. Для порівняння також наведені згладжені ростові функції, які отримані на основі експериментальних даних за методом Ю. Росса. Як видно із даних рис. 9.5, хід розрахункових ростових функцій ідентичний ходу згладжених ростових функцій, отриманих експериментально.

Визначення ростових функцій виконується на основі багаторічних матеріалів агрометеорологічних спостережень мережі гідрометеорологічних станцій. Це дозволяє на основі стандартної агрометеорологічної інформації оцінювати географічну мінливість ростових функцій та вести їх визначення для різноманітних сільськогосподарських культур за допомогою доступних фенологічних даних.

### 9.3.3. Функціональний підхід до розподілу

Відома гіпотеза про те, що між розмірами пагона і його активністю при постачанні вуглеводами, з одного боку, і розмірами кореня і його активністю при постачанні водою і живильними речовинами, з іншого боку – існує функціональна рівновага. Формально це виражається так:

$$\begin{aligned} & (\text{маса пагона} \times \text{питома активність пагона}) \approx \\ & \approx (\text{маса кореня} \times \text{питома активність кореня}). \end{aligned} \quad (9.40)$$

Якщо маса пагона  $M_n$ , дійсна інтенсивність фотосинтезу у пагоні  $P_n$ , то питома активність пагона  $\sigma_n$  може бути визначена за співвідношенням

$$\sigma_n = P_n / M_n. \quad (9.41)$$

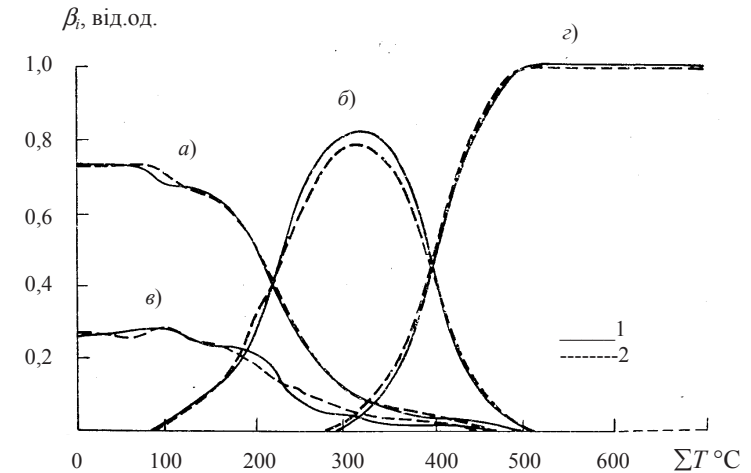


Рис. 9.5. Функції росту окремих органів ячменю, розраховані за напівемпіричним методом Польового (1) і отримані на підставі експериментальних даних за методом Росса (2): а) листя; б) стебла; в) корені; з) колосся

Вимірюючи активність кореня в одиницях інтенсивності споживання азоту  $U_N$ , можна записати за аналогією

$$\sigma_k = U_N / M_k, \quad (9.42)$$

де  $M_k$  – маса кореня.

Співвідношення (9.40) справедливо тільки для рослин, які адаптувалися до навколишнього середовища. Якщо ж активність пагона або кореня раптово міняється в зв'язку зі зміною, наприклад, щільності світлового потоку, який падає на пагін або температури кореня, то залежність (9.40) втрачає силу. Функціональний підхід передбачає можливість ревізії згаданого рівняння, коли того вимагає специфіка розподілу заново синтезованої сухої речовини. Однак перед цим необхідно з'ясувати, чи залишаться в силі коефіцієнти динамічного розподілу  $\phi$ , що



обчислюються за формулами (9.21) і (9.22), за умови дисбалансу рослини, що розцінюється як порушення залежності (9.40).

На рис. 9.6 показано, як досягається динамічний розподіл у системі пагін – корінь у випадку, коли, по-перше, існує обмеження на воду, яка доставляється коренем, і по-друге, прийнято допущення, що коефіцієнти  $\varphi_k$  і  $\varphi_n$  відповідають відносному вмісту води у рослині.

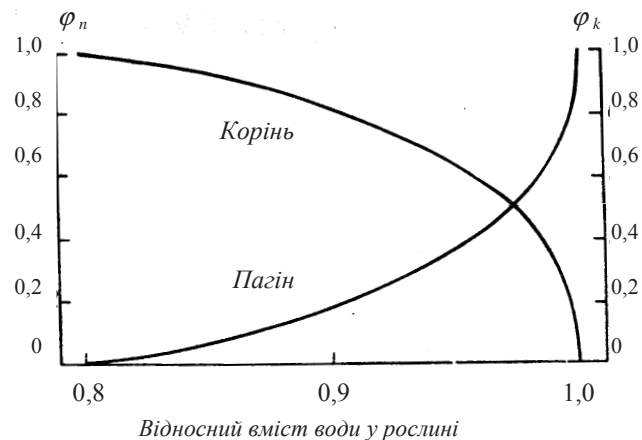


Рис. 9.6. Залежність динамічного розподілу сухої речовини у системі пагін – корінь від відносного вмісту води у рослині.

$\varphi_n$  – частка сухої речовини, яка розподіляється у пагін;

$\varphi_k$  – частка сухої речовини, яка розподіляється у корінь

Ясно, що концепція функціонального балансу, яка покладена в основу співвідношення (9.40), підходить для будь-якого органа, функції якого впливають на життєздатність рослини.

Для вуглецю й азоту стосовно до розподілу сухої речовини в тій же системі пагін – корінь Рейнолдс і Торнлі запропонували таке рівняння

$$\frac{\Delta M_n / M_n}{\Delta M_k / M_k} = K \left( \frac{N}{C} \right)^q, \quad (9.43)$$

де  $N$  і  $C$  – концентрація накопичених у клітинах азоту і вуглецю;

$K$  – константа;

$q$  – параметр.

Використання залежності (9.43) у моделі росту стабілізує впливає на відношення корінь – пагін. Останнє,  $d$  свою чергу, залежить від числового значення відношення  $N/C$  і, отже, від активності, з яким пагін і корінь засвоюють ці речовини з навколишнього середовища. Параметр  $q$  визначає чутливість, властиву згаданому відгуку.

М.О. Строганова запропонувала проводити розподіл асимілятів за метаболічним градієнтом, який створюється структурним обміном речовин. Під структурним обміном речовин розуміється обмін речовин тканин, які ростуть, тому що «ріст – це новоутворення елементів структури». Метаболічний градієнт створюється в системі «донор (функціонуюча тканина – джерело асимілятів) – акцептор (тканина, яка росте. є споживачем асимілятів)» (source-sink) за рахунок запиту з боку споживаючої тканини. Таким чином, моделювання розподілу асимілятів при такому підході – це фактично моделювання донор-акцепторних взаємин між тканинами і органами в процесі росту рослини, тобто взаємин у системі «джерело – споживач».

Метаболічний градієнт вводиться як співвідношення між основними компонентами структур: вуглецем, азотом і фосфором. Відомо, що співвідношення  $C/N$  змінюється в ході розвитку органа, а в органах, які закінчили ріст, воно підтримується на постійному, досягнутому до моменту завершення росту рівні. З огляду на те, що фосфор входить до складу найважливіших компонентів рослин, таких як нуклеїнові кислоти і фосфоризовані нуклеотиди (в останніх акумулюється енергія, необхідна для росту), то в модель вводиться співвідношення  $N/P$ , яке в процесі росту органа аналогічно співвідношенню  $C/N$ . Введення цих параметрів дозволяє врахувати не тільки розподіл найважливіших елементів у системі «зріла, функціонуюча тканина – тканина, яка росте», але і різний ступінь «запиту» з боку органів, які знаходяться в даний момент на різних фазах розвитку.

Як правило, в будь-який момент у рослині є декілька атрагуючих центри, які орієнтують на себе потік асимілятів. Розподільна функція розраховується як функція суми ефективних температур і ємності пулів для росту, що за інших рівних умов визначається впливом факторів навколишнього середовища.

У феноменологічній двофондовій моделі морфогенезу і продуктивності ярової пшениці О.Д. Сиротенка розглядається, що посів складається з  $n$  однакових (середніх) рослин, де  $n$  – кількість рослин на одиниці площі посіву. Кожна рослина протягом життєвого циклу проходить ряд якісно різних етапів розвитку, зовнішнім вираженням яких служить послідовна поява вегетативних, а потім і генеративних органів. У зв'язку з цим опис процесу розвитку – це, власне кажучи, моделювання виникнення і росту кожного окремого органа – фітомера, виходячи зі стану рослини й умов навколишнього середовища.

Аналіз морфологічних змін ярової пшениці показує, що кількість фітомерів однієї рослини досить велике, але в той же час це кінцева кількість, а головне, вони можуть бути згруповані у відносно невелику кількість класів, які складаються з однойменних фітомерів. Усього для ярової пшениці виділено дев'ять класів фітомерів: зернівка, паросток, головний корінь, первинні пари коренів, вторинні пари коренів, листя, стебла, колосся (оболонки), зерна. Фітомери, які входять в один клас, однотипні з погляду правил появи і подальшого росту. Це дає можливість у моделі описувати ріст кожного фітомера.

При моделюванні прийнята концепція фондів, тобто прийнято, що усі фітомери рослини складаються із структурної маси і фондів, а ріст фітомера – це зміна його структурної маси, яка будується за рахунок фондів. Модель двофондова, тобто розглядаються фонди азоту і вуглеводів.

В основу моделювання морфогенезу пагонів злаків А.М. Польовим покладена існуюча у злаків висока специфічність й одноманітність формування і побудови вегетативної і репродуктивної сфери.

Формування пагона у злаків йде шляхом послідовного вищлюювання на конусі наростання повторюваних метамерних утворень пагона – вузла з зачатком листка і міжвузлям, бруньки і придаткових коренів. Ці метамерні утворення, які періодично вищлюються, являють собою одиниці росту – фітомери. За рахунок самостійного автономного росту фітомерів здійснюється загальний «суглобистий» або «ярусний» ріст пагонів злаків.

При моделюванні формування вегетативної і репродуктивної сфери злаків розглядається, як обумовлений ендегенними й екзогенними факторами процес поновлення ростових процесів насіння (проростання), розгортання зародкових фітомерів, їхнього самостійного росту і розвитку, функціонування послідовності фітомерів у їхньому складному корелятивному зв'язку (рис. 9.7).

Функціональна діяльність фітомера, яка складається із вузла з міжвузлям, листком, брунькою і придатковими коренями, розглядається як функціонування елементарної одиниці росту і розвитку злаків.

Загальна кількість фітомерів пагона злакових складається з зародкових фітомерів і тих, які заново сформувалися. Це величина порівняно стала для даного виду, різновиду, сорту. Послідовні фітомери, які складають пагін змінюються закономірно, відповідно до внутрішнього ритму розвитку пагона і під впливом зовнішніх факторів. Після закладення цілком визначеної кількості фітомерів у злакових настає закладення суцвіття.

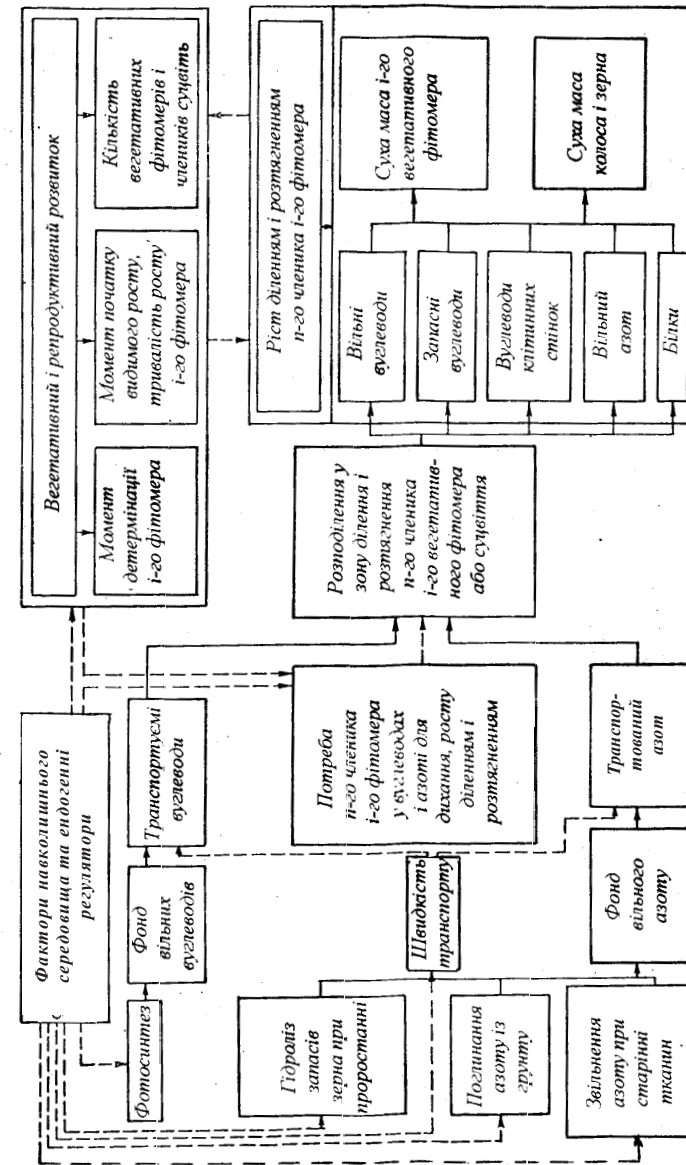


Рис. 9.7. Блок-схема моделі росту, розвитку і формування продуктивності злаків

Швидкість закладення нових фітомерів (темп формуючої діяльності конуса наростання) визначається тривалістю пластохронів. Пластохрон виявляється зручною і найбільш прийнятною часовою одиницею внутрішнього ритму розвитку пагона.

Концепція розподілу асимілятів за потребою передбачає врахування потреби росту за рахунок ділення або розтягання тканин члеників фітомера і на цій основі – врахування потреби всього фітомера. Під потребою розуміється запит активно ростучих меристем і зони розтягання на одержання азоту і вуглеводів у кількостях, які забезпечують найбільш інтенсивне протікання процесів ділення і розтягання клітинок за певних умов навколишнього середовища. Таким чином, безпосередньо оцінюється запит на асиміляти в період росту діленням і в період росту розтяганням окремих члеників і фітомера в цілому. Закономірності, які визначають процеси росту метамерів рослини, визначають закономірності організації загального метаболізму рослини. Ріст органа рослини визначається співвідношенням інтенсивності ділення клітин та їхнього розтягування.

## 10. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФОРМУВАННЯ УРОЖАЮ АГРОБІОЦЕНОЗУ Е. П. ГАЛЯМІНА

### 10.1. Підходи до моделювання

Модель формування урожаю сільськогосподарських культур має блокову структуру, блоки якої відповідають основним процесам, що протікають у системі ґрунт – рослина – атмосфера. Модель розподіляється на дві групи блоків, які описують біотичні та абіотичні процеси.

Група біотичних блоків містить у собі модель росту і розвитку посіву сільськогосподарської культури як найважливішого елемента агробіоценозу. Крім того, до біотичних блоків входять моделі, які описують трансформацію різних органічних і неорганічних речовин у ґрунті під впливом мікроорганізмів, а також життєдіяльність самих мікроорганізмів. Третьою великою складовою частиною біотичних процесів є процеси, пов'язані з життєдіяльністю шкідливих для культурних рослин організмів: шкідників, хвороб, бур'янів та ін., пов'язаних з ними організмів (ентомофагів, паразитів та ін.), а також з їхньою взаємодією в агробіоценозі.

Абіотичні блоки містять у собі моделі, які описують ряд геофізичних процесів, характеристики яких необхідні для функціонування біотичних процесів: формування теплового, водного режиму ґрунту та приземних шарів повітря, концентрації й пересування біогенних і токсичних солей, різних залишків розпаду пестицидів, ростових речовин і метаболітів у ґрунті, концентрації CO<sub>2</sub> у посіві та ін.

Абіотичні блоки враховуються в найпростішій формі і за рівнем, відповідають рівню деталізації моделі росту і розвитку рослин.

У моделі росту рослин можна виділити два блоки, які повинні бути присутніми у всіх динамічних моделях:

1) блок накопичення або приростів біомаси, який описує збільшення біомаси за рахунок асиміляції вуглекислоти повітря і за рахунок надходження елементів мінерального живлення з ґрунту;

2) блок, який описує у вигляді системи динамічних рівнянь перерозподіл цих речовин в окремих органах. Ці блоки складають основу моделі формування урожаю.

### 10.2. Динамічні рівняння росту

З огляду на те, що метою вирощування на сільськогосподарських полях є одержання деякої кількості біомаси одного або декількох органів рослини (зерна, бульб, коренеплодів, усієї надземної біомаси), опис

ростових процесів (накопичення біомаси) є найважливішою складовою частиною моделі формування урожаю.

Розглянемо процес накопичення біомаси всієї рослини або, що зручніше, біомаси посіву рослин на одиниці площі поля.

Швидкість накопичування біомаси не залишається постійною, а міняється протягом вегетаційного періоду. Ця зміна пов'язана як з генетичними факторами, так і з умовами вирощування, які змінюються.

У найпростішому вигляді процес накопичення біомаси всього посіву може бути записаний як

$$dM / d\tau = k(\tau, \bar{v}_p, \bar{\chi}_q), \quad (10.1)$$

де  $M$  – суха біомаса посіву рослин;

$k$  – швидкість накопичення біомаси;

$\tau$  – час;

$\bar{v}_p$  – вектор біологічних властивостей рослин, які мають вплив на швидкість накопичення біомаси;

$\bar{\chi}_q$  – вектор факторів навколишнього середовища, який має вплив на швидкість накопичення біомаси.

Рівняння (10.1) в узагальненому вигляді описує процес формування біомаси всього посіву (загальної біомаси).

Необхідно визначити  $k(\tau, \bar{v}_p, \bar{\chi}_q)$  як функцію, що залежить від біологічних властивостей рослин і факторів навколишнього середовища, а також, в свою чергу, є функцією часу. Для зручності скористаємося дискретною формою запису.

Поряд з процесом накопичення біомаси в період вегетації частина біомаси відмирає і відокремлюється від рослин (опадає) і тому не може бути врахована при вимірюванні сухої біомаси в будь-який момент часу. З балансових міркувань суха вага біомаси посіву на одиниці площі поля в момент часу  $(\tau + \Delta\tau)$  може бути записана у вигляді

$$M(\tau + \Delta\tau) = M(\tau) + \Delta\mu - \Delta\Omega, \quad (10.2)$$

де  $\Delta\mu$  – суха вага біомаси, що сформувалась за час  $\Delta\tau$ ;

$\Delta\Omega$  – суха вага опалої біомаси за час  $\Delta\tau$ .

Природно, що найважливішим компонентом у рівнянні (10.2) є другий член правої частини – швидкість формування нової біомаси, тому що третій член у правій частині – опадання біомаси – незначний у порівнянні з приростом, а в першій половині вегетаційного періоду він практично взагалі відсутній.

Приріст нової біомаси відбувається в основному за рахунок фотохімічних процесів, які протікають у зелених органах рослин, в хлоропластах, що містять зерна хлорофілу, і супроводжується поглинанням вуглекислоти з повітря. При цьому швидкість проходження процесу фотосинтезу на одиниці площі поля істотно залежить від площі поверхні зелених органів рослин і умов навколишнього середовища, у яких проходить процес, тобто

$$\Delta\mu = m[L(\tau), \bar{\chi}_q(\tau)]\Delta\tau, \quad (10.3)$$

де  $m$  – приріст сухої біомаси за одиницю часу;

$L(\tau)$  – площа поверхні асиміляційного апарата (фотосинтезуючих органів) рослин на одиниці площі поля за будь-який момент часу  $\tau$ .

Що стосується опалої біомаси, то її зручно виразити у вигляді добутку деякої функції  $\omega$  – відносної швидкості опадання – на суху вагу біомаси. Природно, що  $\omega$  являє собою функцію часу, вона залежить від віку рослин і умов навколишнього середовища. Функція  $\omega$  повинна визначатися експериментально, і, можна припустити, що вона буде досить стабільна для кожного виду і сорту рослин.

Тоді

$$\Delta\Omega = \omega M \Delta\tau, \quad (10.4)$$

де  $\omega = (\Delta\Omega/\Delta\tau)M^{-1}$ .

Функція опадання вводиться в основному для точності виведення рівнянь. У деяких випадках, коли вона може відігравати істотну роль у балансі речовин, її врахування може мати і практичне значення.

З врахуванням рівнянь (10.3) і (10.4) рівняння (10.2) набуває вигляду

$$M(\tau + \Delta\tau) = M(\tau) + \{m[L(\tau), \bar{\chi}_q(\tau)] - \omega[\tau, \bar{\chi}_q(\tau)]M(\tau)\}\Delta\tau. \quad (10.5)$$

Із структури рівняння (10.5) виходить, що для його рішення необхідне знання функції  $\omega$ , факторів навколишнього середовища  $\bar{\chi}_q$ , а також площі асиміляційного апарата  $L$ , від якого залежить визначення функції  $m$ .

Динаміка площі асиміляційного апарата також є результатом двох протилежних процесів – приросту нового асиміляційного апарата і відмирання частини вже наявного

$$L(\tau + \Delta\tau) = L(\tau) + \Delta\Lambda - \Delta G, \quad (10.6)$$

де  $\Delta\Lambda$  – приріст площі асиміляційного апарата на одиниці площі поля за час  $\Delta\tau$ ;

$\Delta G$  – приріст площі поживтілого асиміляційного апарата, що втратив здатність асимілювати вуглекислоту, за час  $\Delta\tau$ .

Збільшення площі асиміляційного апарата відбувається пропорційно швидкості утворення сухої речовини, тому

$$\Delta\Lambda = \beta\Delta\mu = \beta m\Delta\tau, \quad (10.7)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт формування асиміляційного апарата,  $\beta = \Delta\Lambda / \Delta\mu$

Коефіцієнт  $\beta$  є функцією часу і, ймовірно, залежить від умов навколишнього середовища рослин,  $\beta = \beta[\tau, \bar{\chi}_q(\tau)]$ .

Швидкість поживтілення асиміляційного апарата може бути представлена у вигляді добутку коефіцієнта пропорційності  $g$  – відносної швидкості відмирання асиміляційного апарата – на площу існуючого до моменту  $\tau$  асиміляційного апарата:

$$\Delta G = gL\Delta\tau, \quad g = g[\tau, \bar{\chi}_q(\tau)], \quad g = (\Delta G - \Delta\tau)L^{-1}. \quad (10.8)$$

З врахуванням формул (10.7) і (10.8) рівняння (10.6) набуває вигляду

$$L(\tau + \Delta\tau) = L(\tau) + [\beta m - g(\tau)]\Delta\tau. \quad (10.9)$$

Система рівнянь (10.5) і (10.9) дає можливість розраховувати загальну суху вагу біомаси посіву деяких сільськогосподарських культур у будь-який момент вегетації і кінцевий біологічний урожай, якщо відома зміна в часі параметрів продуктивності  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $g$  і є модель, придатна для обчислення приростів біомаси  $m$ .

Для тих же культур, у яких при створенні біомаси беруть участь не тільки листки, але й інші органи (наприклад, у зернових колосових), одним рівнянням швидкість утворення асиміляційного апарата описати не вдається. У окремих органів повинні бути різні види функцій, які описують параметри продуктивності  $\beta$  і  $g$ . Спроба об'єднати ці параметри для цілої рослини зробить їхню залежність від часу дуже складною і неоднозначною. Тому для таких рослин рівняння (10.9) потрібно записувати окремо для кожного фотосинтезуючого органа

$$L_j(\tau + \Delta\tau) = L_j(\tau) + [\beta_j m - g_j L_j(\tau)]\Delta\tau, \quad (10.10)$$

$$j = \overline{1, l}.$$

Потрібно відзначити, що при участі в асиміляції декількох органів рослини швидкість асиміляції буде виражатися сумою швидкостей

асиміляції всіх органів

$$m = \sum_{j=1}^l m_j, \quad j = \overline{1, l}. \quad (10.11)$$

Множина всіх фотосинтезуючих органів  $J$  потужністю  $|J| = l$  є підмножиною множини всіх органів рослини  $I$ , що має потужність  $|I| = n$ ,  $J \subset I$ .

У більшості випадків метою вирощування сільськогосподарської культури є один із її органів: зерно, качан, коренеплоди, бульба і т.д. У зв'язку з цим з'являється необхідність написати рівняння для зміни біомаси господарсько-корисного органа, що буде відбуватися за рахунок частки заново утворених («свіжих») асимілятів, а також за рахунок перетоку раніше запасених речовин («старих» асимілятів) з інших органів

$$M^*(\tau + \Delta\tau) = M^*(\tau) + \Delta\mu^* + \Delta B^*. \quad (10.12)$$

де  $M^*$  – суха вага біомаси господарсько-корисного органа;

$\Delta\mu^*$  – перетік у господарсько-корисний орган «свіжих» асимілятів;

$\Delta B^*$  – перетікання у господарсько-корисний орган «старих» асимілятів, раніше запасених у інших органах.

Величина  $\Delta\mu^*$  пропорційна вазі фотосинтезованої за час  $\Delta\tau$  біомаси у всій рослині  $\Delta\mu$

$$\Delta\mu^* = a^* \Delta\mu = a^* m\Delta\tau, \quad (10.13)$$

де  $a^* = \Delta\mu^* / \Delta\mu$  – параметр продуктивності, який характеризує розподіл «свіжих» асимілятів в органах (ростова функція).

Збільшення ваги господарсько-корисного органа за рахунок раніше запасених речовин дорівнює зменшенню сумарної ваги органів, з яких ці речовини відтікають

$$\Delta B^* = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta B_i, \quad i \in I, \quad |I| = n, \quad (10.14)$$

де  $\Delta B_i$  – відтік за час  $\Delta\tau$  з  $i$ -го органа раніше запасених у ньому асимілятів.

Якщо вважати, що відтік асимілятів з  $i$ -го органа пропорційний (що цілком природно) вазі живої частини цього органа, то

$$\Delta B_i = b_i \tilde{M}_i \Delta\tau, \quad (10.15)$$

де  $b_i$  – параметр продуктивності, що характеризує перетік раніше

запасених асимілятів, який дорівнює  $b_i = (\Delta B_i / \Delta \tau) \tilde{M}_i^{-1}$ ;

$\tilde{M}_i$  – суха вага живої біомаси  $i$ -го органа.

Таким чином, з урахуванням виразів (10.13)–(10.15) рівняння (10.12) приймає вигляд

$$M^*(\tau + \Delta \tau) = M^*(\tau) + \left[ a^* m + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \tilde{M}_i(\tau) \right] \Delta \tau, \quad (10.16)$$

$$i \in I, \quad |I| = n.$$

Суха вага живої біомаси  $i$ -го органа, що входить у рівняння (10.16) може бути визначена за рівнянням

$$\tilde{M}_i = (\tau + \Delta \tau) = \tilde{M}_i(\tau) + \Delta \mu_i - \Delta B_i - \Delta V_i, \quad (10.17)$$

$$i \in I, \quad |I| = n.$$

Тут  $\Delta \mu_i$ ,  $\Delta B_i$ ,  $\Delta \Omega$  – раніше введені у рівняннях (10.12) і (10.2) функції, виписані для  $i$ -го органа;

$\Delta V_i$  – суха вага відмерлих за час  $\Delta \tau$  частин  $i$ -го органа.

Передбачається, що перетік «старих» асимілятів відбувається тільки в господарсько-корисний орган, у інші органи асиміляти не надходять, а лише відтікають від них, тому що господарсько-корисний орган – це або репродукційний орган – ціль функціонування рослини, або орган запасуючий, який служить для накопичення речовин, необхідних для функціонування у наступному році.

Запишемо аналогічно раніше введеним залежностям (10.13) і (10.4)

$$\Delta \mu_i = a_i \Delta \mu = a_i m \Delta \tau. \quad (10.18)$$

Якщо вважати, що швидкість відмирання біомаси  $i$ -го органа пропорційна сухій вазі живої біомаси цього органа

$$\Delta V_i = v_i \tilde{M}_i \Delta \tau, \quad (10.19)$$

то

$$\tilde{M}_i(\tau + \Delta \tau) = \tilde{M}_i(\tau) + [a_i m - (b_i + v_i) \tilde{M}_i(\tau)] \Delta \tau, \quad (10.20)$$

$$i \in I.$$

Визначення сухої ваги всієї біомаси  $i$ -го органа може бути здійснене за рівнянням

$$M_i(\tau + \Delta \tau) = M_i(\tau) + \Delta \tilde{M}_i + \Delta V_i - \Delta \Omega_i, \quad (10.21)$$

де аналогічно (10.4)  $\Delta \Omega = \omega_i M_i \Delta \tau$

або з врахуванням (10.19) і (10.20) набуває такого вигляду

$$M_i(\tau + \Delta \tau) = M_i(\tau) + [a_i m - b_i \tilde{M}_i(\tau) - \omega_i M_i(\tau)] \Delta \tau, \quad (10.22)$$

$$i \in I.$$

Усі введені параметри продуктивності  $a^*$ ,  $a_i$ ,  $v_i$ ,  $\omega_i$ ,  $b_i$ ,  $\beta_i$ ,  $g_i$  є явними функціями часу.

Розглянемо важливий аспект, пов'язаний з використанням отриманих вище рівнянь, які описують процес накопичення біомаси. Цей аспект стосується вибору масштабу часу.

Звичайно вегетаційний період трав'янистих сільськогосподарських рослин має тривалість 70–120 днів, протягом яких відбувається поступовий, монотонний процес накопичення біомаси і формування урожаю, пов'язаний зі створенням і розподілом асимілятів, утворенням органів рослин.

Однак цей процес можна назвати монотонним лише умовно, тому що на сезонний хід процесу накладається циклічний добовий процес фотосинтезу, який протікає лише протягом світлої частини доби. Розподіл же асимілятів відбувається, як правило, вночі. Протягом доби цикл в основному завершується. Тому зручно як дискретний час вибрати крок  $\Delta \tau = 1$  доба. Необхідно також враховувати, що добова величина приросту нових «свіжих» асимілятів являє собою суму асимілятів, створених усіма зеленими органами рослин:

$$m = \sum_{j=1}^l m_j; \quad (10.23)$$

$$j = \overline{1, l}; \quad j \in J; \quad |J| = l,$$

де  $m_j$  – добовий приріст сухої ваги заново асимільованої біомаси  $j$ -тим зеленим органом.

З урахуванням наведених вище міркувань щодо масштабу часу ( $\Delta \tau = 1$ ), якщо прийняти до уваги рівняння (10.11) і (10.23), то можна переписати рівняння (10.10), (10.16), (10.20), (10.22) у вигляді системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned}
 M^*(\tau+1) &= M^*(\tau) + a^* \sum_{j=1}^l m_j + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \tilde{M}_i(\tau); \\
 \tilde{M}_i(\tau+1) &= (1 - b_i - v_i) \tilde{M}_i(\tau) + a_i \sum_{j=1}^l m_j; \\
 M_i(\tau+1) &= (1 - \omega_i) M_i(\tau) + a_i \sum_{j=1}^l m_j - b_i \tilde{M}_i(\tau); \\
 L_j(\tau+1) &= (1 - g_j) L_j(\tau) + \beta_j \sum_{j=1}^l m_j,
 \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

$$i \in I, \quad |I| = n, \quad j \in J, \quad |J| = l, \quad J \subset I,$$

$$a^* + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \equiv 1, \quad (a^*, a_i, \beta_j, b_i, v_i, g_j, \omega_i) \geq 0.$$

Система рівнянь (10.24) разом з початковими умовами являють собою замкнуту систему, яка дозволяє в принципі обчислити суху вагу кожного органа рослини у посіві в будь-який момент (будь-яку добу) вегетації.

Кількість рівнянь росту, що входять у систему (10.24), залежить від виду й особливостей рослин. Наприклад, для цукрового буряка система буде складатися з п'яти рівнянь: одне для  $M^*$  – коренеплоду, два для  $M_i$  – листя і корені, одне для  $\tilde{M}_i$  – листя (для коренів приймаємо  $\tilde{M}_i = M_i$ , тому що відмирання коренів не має сенсу враховувати через трудомісткість і малу точність), одне для  $L_j$  – листя. Для колосових злакових культур необхідно виписати 11 рівнянь, для кукурудзи – 9.

Практичні розрахунки з використанням системи рівнянь (10.24) можна проводити, якщо є можливість обчислювати добові прирости заново асимільованої біомаси  $m_j$ , а також відомі параметри продуктивності як функції часу.

Зупинимось на характеристиці параметрів продуктивності, які входять у модель росту (10.24).

Аналіз опублікованих експериментальних матеріалів дозволяє зробити висновок, що в представленні перерахованих параметрів, як функцій часу, потрібно виділити дві складові: *регулярну* складову, яка характеризує генетичні особливості рослин і показує, як генетичний параметр міняється за часом при постійних екологічних умовах, і *випадкову* складову, яка характеризує відхилення від регулярного процесу за рахунок коливань умов навколишнього середовища.

При ідентифікації моделі велике значення має знання виду функцій,

що описують входні в модель параметри. Важливо також знання стійкості цієї форми. У випадку якщо форма стійка, ідентифікація зводиться до визначення числових коефіцієнтів функцій.

Вигляд залежності параметрів продуктивності від часу має характерні риси для кожної групи культур, а в середині цих груп виявляється досить однотипним для різних сортів і навіть видів рослин.

Почнемо з аналізу параметрів продуктивності, які характеризують розподіл заново створених «свіжих» асимілятів. На рис. 10.1. наведено часовий хід цих параметрів для двох сортів кукурудзи – ВІР-156 (а) і Імеретинський гібрид (б). По осі абсцис відкладено відносний час, де за одиницю прийнята тривалість вегетаційного періоду. Обидва графіка були отримані при обробці матеріалів досліду, проведеного в районі Волгограда в 1966 р. Криві на графіках рис. 10.1 за формою практично не відрізняються, хоча і характеризують різні сорти кукурудзи.

На рис. 10.2 наведені аналогічні графіки для ярої пшениці (а), вирощеної в районі Волгограда в 1972 р. (дослід Всеросійського НДІ зрошуваного землеробства — ВНДІЗЗ), і ячменю (б), вирощеного в Естонії в 1964 р. Ці графіки також дуже подібні між собою.

На всіх графіках рис. 10.1 і 10.2 видно генетично обумовлену послідовність розподілу асимілятів між органами. Так, у зернових колосових (пшениця, ячмінь) на початку вегетації всі асиміляти розподіляються між листками і коренями. Параметри  $a_i$  всіх інших органів протягом деякого часу дорівнюють нулю. Потім, в період куцїння, частина асимілятів надходить на створення зародкових стебел, на початок виходу в трубку значно зростає частка асимілятів, які йдуть на утворення стебел, і зменшується частка надходження асимілятів у листя і корені.

### 10.3. Модель приросту біомаси

Найважливішою складовою частиною моделі формування урожаю є біофізичний блок, який описує процес визначення величин  $m_j$ , що входять у всі рівняння системи (10.24). Це основне джерело, за рахунок якого відбувається накопичення біомаси посіву і формування урожаю.

Як видно із системи рівнянь (10.24), біомаса утворюється в результаті асиміляції фотосинтезуючими органами вуглекислоти і подальшого її розподілу між всіма органами рослини. Процес, накопичення біомаси є результатом двох процесів: фотосинтезу – утворення органічної маси під впливом фотосинтетично активної радіації (ФАР) і дихання – витрати цієї біомаси на підтримку життєвих процесів, що протікають у рослині.

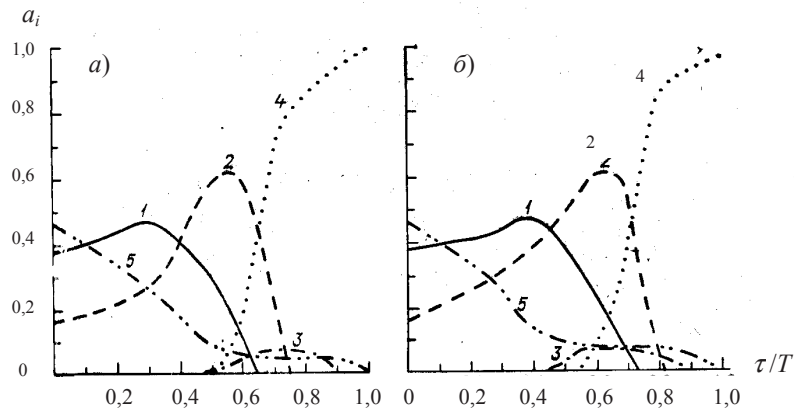


Рис. 10.1. Ростові функції  $a_i$  кукурудзи сортів VIP-156 (а) і Імеретинський гібрид (б):  
1 – листя, 2 – стебла, 3 – волоть, 4 – качан, 5 – корені

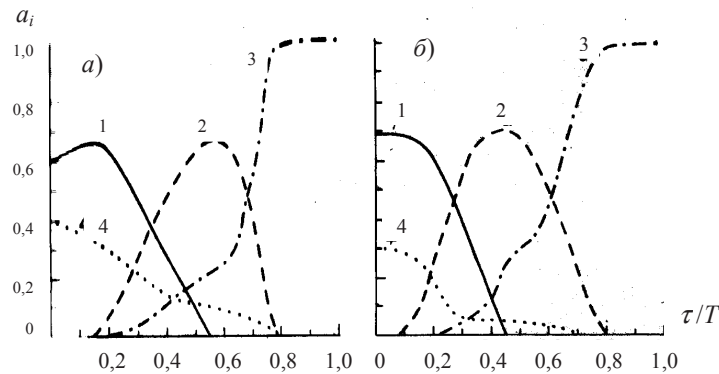


Рис. 10.2. Ростові функції  $a_i$  ярої пшениці (а) і ячменю (б):  
1 – листя, 2 – стебла, 3 – колосся, 4 – корені

Інтенсивність процесу фотосинтезу залежить від ряду факторів навколишнього середовища: інтенсивності ФАР, концентрації  $\text{CO}_2$  у навколишньому повітрі, ступеню забезпеченості рослин вологою, температури рослин, забезпеченості рослин основними елементами мінерального живлення NPK.

Оскільки за величину кроку в розрахунку біомаси прийнято одну добу, вплив на процес фотосинтезу концентрації  $\text{CO}_2$  можна в явному вигляді не враховувати. Пов'язано це з тим, що концентрація  $\text{CO}_2$  може змінювати свою величину у посіві в внутрішньодобовому ході, але в цілому за добу протягом вегетації не міняється. Її вплив буде враховано коефіцієнтами інтенсивності фотосинтезу, які будуть визначатися при ідентифікації моделі з використанням експериментальних даних. Вплив рівня мінерального живлення у моделі фотосинтезу також не буде враховуватися, оскільки, як показують експерименти, що проводилися з цілими рослинами на реальних ґрунтах, такий вплив не виявляється безпосереднім образом.

Як характеристика температурного режиму рослин використовується середня добова температура повітря у посіві, а як характеристика міри зволоженості – середня вологість шару ґрунту, в якому розміщується коренева система. Таке осереднення характеристик навколишнього середовища, як показав досвід моделювання, цілком себе виправдовує, значно спрощуючи абіотичні блоки моделі. В той же час при цьому забезпечується достатня точність.

Дихання посіву, відповідно до сучасних уявлень, складається з двох складових: дихання росту і дихання підтримки структурної біомаси. Такий розподіл вперше був запропонований на підставі аналізу експериментального матеріалу Мак-Крі. При цьому передбачається, що дихання росту залежить від інтенсивності фотосинтезу, а дихання підтримки пов'язано з біомасою органу.

Таким чином, величину добового приросту біомаси можна записати у вигляді

$$\sum_{j=1}^l m_j = \varepsilon \sum_{j=1}^l (\tilde{\Phi}_j - \tilde{R}_{1j}) - \sum_{i=1}^n \tilde{R}_{2i}, \quad (10.25)$$

$$j = \overline{1, l}; \quad i = \overline{1, n}; \quad j \in J; \quad i \in I; \quad J \subset I,$$

де  $m_j$  – добовий приріст біомаси посіву на одиниці площі поля за рахунок фотосинтезу  $j$ -го зеленого органу;

$\tilde{\Phi}_j$  – добова величина істинного фотосинтезу  $j$ -го органу на одиниці площі поля;

$\tilde{R}_{1j}$  – добова величина дихання росту  $j$ -го фотосинтезуючого органу на одиниці площі поля;

$\tilde{R}_{2i}$  – добова величина дихання підтримки  $i$ -го органу рослини на одиниці площі поля;



$\varepsilon$  – коефіцієнт, що показує, скільки одиниць сухої речовини може бути отримане з вагової одиниці  $\text{CO}_2$ , засвоєної посівом.

Звичайно, з теоретичних міркувань  $\varepsilon$  приймаємо рівним 0,67.

Введемо позначення

$$\tilde{\Phi}_j - \tilde{R}_{1j} = \tilde{F}_j, \quad (10.26)$$

де  $\tilde{F}_j$  – добова величина видимого фотосинтезу  $j$ -го органа на одиниці площі поля.

Скористаємося гіпотезою про можливість розділення впливу факторів навколишнього середовища на величину видимого фотосинтезу, що, як показує ідентифікація, виявляється припустимим в межах необхідної точності моделі. Тоді можна записати

$$\tilde{F}_j = \tilde{F}_{0j}(Q)u(t, w), \quad \max\{u(t, w)\} = 1, \quad (10.27)$$

де  $\tilde{F}_{0j}$  – добова величина видимого фотосинтезу  $j$ -го органа на одиниці площі поля з врахуванням реального радіаційного режиму при біологічно оптимальних інших факторах навколишнього середовища;  $u(t, w)$  – функція, яка враховує зниження видимого фотосинтезу за рахунок відхилення водного і температурного режимів від біологічного оптимуму;

$Q$  – інтенсивність фотосинтетично активної радіації;

$t$  – середня добова температура повітря у посіві;

$w$  – середня вологість шару ґрунту, де розміщена коренева система.

Добова величин видимого фотосинтезу може бути розрахована так

$$\tilde{F}_{0j} = \int_{\Theta_c}^{\Theta_3} F'_{0j} d\theta, \quad (10.28)$$

де  $F'_{0j}$  – миттєве значення видимого фотосинтезу  $j$ -го органа на одиниці площі поля;

$\theta$  – часовий кут Сонця;

$\theta_c$  і  $\theta_3$  – відповідно момент сходу і заходу Сонця.

$$F'_{0j} = \int_0^{H-H_{жс}} F_{0j}(Q_h)\varphi_j(h)dh, \quad (10.29)$$

де  $F_{0j}$  – інтенсивність видимого фотосинтезу одиниці площі  $j$ -го фотосинтезуючого елемента, що знаходиться на глибині посіву  $h$ ;

$Q_h$  – інтенсивність ФАР на глибині посіву  $h$  (початок відліку координат береться на верхній границі посіву);

$\varphi_j$  – щільність розподілу  $j$ -го фотосинтезуючого фітоелемента по висоті посіву  $h$ ;

$H$  – висота посіву в природному стані;

$H_{жс}$  – висота пожовклої частини посіву.

Аналогічно (10.26) інтенсивність видимого фотосинтезу визначається такою залежністю

$$F_{0j} = \Phi_{0j} - R_{0j}, \quad (10.30)$$

де  $\Phi_{0j}$  – інтенсивність істинного фотосинтезу одиниці площі  $j$ -го зеленого органа;

$R_{0j}$  – інтенсивність дихання росту одиниці площі  $j$ -го фотосинтезуючого органа.

У цій моделі інтенсивність дихання росту приймається пропорційним інтенсивності фотосинтезу  $R_{0j} = c_{1j}\Phi_{0j}$ . Тоді

$$F_{0j} = (1 - c_{1j})\Phi_{0j}, \quad (10.31)$$

де  $c_{1j}$  – коефіцієнт дихання росту.

Апроксимацію емпіричної функції, яка описує зв'язок інтенсивності видимого фотосинтезу одиниці площі зеленого елемента рослини, з інтенсивністю падаючої на нього фотосинтетично активної радіації  $Q$ , можна представити у вигляді

$$F_{0j} = \frac{k_j b_j Q}{k_j + b_j Q}, \quad (10.32)$$

де  $k_j$  – максимально можлива інтенсивність фотосинтезу при  $Q \rightarrow \infty$ ;

$b_j$  – квантовий вихід, тобто кількість квантів світла, необхідне для асиміляції однієї молекули  $\text{CO}_2$ .

Тепер можна в явному вигляді записати рівняння (10.29). Форма запису величини  $F_{0j}$  буде до деякої міри залежати від виду культури, для якої створюється модель.

Надалі розглядається створення моделі зернових колосових культур. Моделі цих культур найбільш складні по своїй структурі із всіх однолітніх сільськогосподарських культур, тому що проходять повний цикл розвитку, і в моделі потрібно враховувати усі їхні органи.

Зробимо кілька зауважень про прийняті в моделі допущення, що

стосуються геометричних і структурних характеристик посіву. Посів приймається горизонтально однорідним, який має єдину висоту в природному стані, що дорівнює середній висоті посіву; головні і бокові пагони вважаються ідентичними за розміром; усі колосся вважаються однаковими, які з'явилися одночасно і мають граничні (тобто на момент молочної стиглості) геометричні розміри. Колосся вважаються незатіненими, а їхній розподіл по глибині посіву не враховується.

Фотосинтезуючими органами в колосових злакових культур є листя, стебла і колосся, які характеризуються відповідною площею поверхні  $L_j$ , де  $j = 1, 2, 3$  (1 – листя, 2 – стебла, 3 – колосся).

Під  $L_1$  підрозумівається геометрична сумарна площа листових пластин на одиниці площі поля; під  $L_2$  – загальна площа мідель-перетинів стебел; під  $L_3$  – загальна площа мідель-перетинів колосся. Кожна з цих величин характеризується таким розподілом по висоті рослини, що для будь-якого дня вегетації, коли існує даний орган, справедливо:

$$L_1 = \int_0^{H-H_{жс}} E(\tau - \tau_1) \varphi_1(\tau, h) dh;$$

$$L_2 = \int_0^{H-H_{жс}} E(\tau - \tau_2) \varphi_2(\tau, h) dh; \quad (10.33)$$

$$L_3 = E(\tau - \tau_3) L_3,$$

де  $\varphi_1(\tau, h)$  – щільність розподілу площі листя по висоті рослини у різні періоди вегетації;

$\varphi_2(\tau, h)$  – щільність розподілу площ мідель-перетинів стебел по висоті рослин у різні періоди вегетації;

$E$  – символ одиничної функції;

$\tau_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  – моменти появи  $j$ -го органа.

Щільність розподілу площі мідель-перетину стебел може бути представлена залежністю

$$\varphi_2(\tau, h) = \begin{cases} 1, & 0 \leq h \leq \Delta H \\ d_g(\tau) + \frac{d_n(\tau) - d_g(\tau)}{H_2} (h - \Delta H) nK, & \Delta H \leq h \leq H \end{cases}, \quad (10.34)$$

де  $d_g$  і  $d_n$  – діаметр стебел відповідно на вершині і основі стебла;

$H_2$  – довжина стебла;

$\Delta H$  – різниця між висотою посіву у природному стані  $H$  і довжиною стебла  $H_2$  ( $H = H_2 + \Delta H$ ), для репродуктивного періоду, коли  $\tau \geq \tau_3$ , то  $\Delta H$  дорівнює довжині колоса  $f$ , для періоду  $\tau < \tau_3$   $\Delta H$  визначається при ідентифікації моделі;

$n$  – щільність посіву – кількість рослин на одиниці площі поля;

$K$  – куцистість – відношення загальної кількості пагонів на одиниці площі поля до густоти посіву.

Колос може бути апроксимований рівновеликим по об'єму циліндром, що має довжину реального колоса. Таким чином, сумарна площа мідель-перетинів колосся на одиниці площі поля дорівнює

$$L_3 = 2nK_n f \sqrt{\omega/\pi}, \quad (10.35)$$

де  $K_n$  – продуктивна куцистість – відношення загальної кількості колосоносних пагонів до щільності посіву;

$\omega$  – середня площа поперечного перетину колоса;

$f$  – середня довжина колоса.

З урахуванням рівнянь (10.29), (10.32) і (10.33) сумарний миттєвий газообмін посіву на одиниці площі поля зернових колосових культур в умовах біологічно оптимальних умов вологості ґрунту і температурних умов набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^3 F_{0j} = \sum_{j=1}^2 \int_0^{H-H_{жс}} E(\tau - \tau_j) \frac{k_j b_j Q_h}{k_j + b_j Q_h} \varphi_j(\tau, h) dh + E(\tau - \tau_3) \frac{k_3 b_3 Q}{k_3 + b_3 Q} L_3. \quad (10.36)$$

При такому описі газообміну посіву параметри світлових кривих  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  характеризують відповідні світлові криві листя, стебел і колосся у посіві рослин з ефективними площами фітоелементів  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  і продуктивністю, яка дорівнює продуктивності реального посіву.

Для обчислень за допомогою рівняння (10.36) необхідно знати інтенсивність ФАР  $Q_h$  на глибині посіву  $h$ .

Розподіл сонячної радіації у посіві описується наступною залежністю

$$Q_h = Qe^{-\frac{G_1 \lambda(h)}{\sin h^*}}, \quad (10.37)$$

де  $\lambda(h)$  – загальна площа затінених фітоелементів, які знаходяться у довільному шарі товщиною  $0 \leq h \leq H$ ;

$G_1$  – емпіричний коефіцієнт, що залежить від виду рослин;

$h_0$  – висота Сонця.

Затінена площа  $\lambda(h)$  фітомаси розраховується за формулою

$$\lambda(h) = \sum_{j=1}^2 \int_0^h E(\tau - \tau_j) \varphi_j(\tau, h) dh + E(\tau - \tau_3) L_3. \quad (11.38)$$

У рівняння (10.36) і (10.37) входить значення інтенсивності фотосинтетично-активної сонячної радіації, яка надходить на верхню межу посіву  $Q$ .

Таким чином, добова величина видимого фотосинтезу в умовах оптимального температурного режиму і режиму вологості ґрунту має вигляд

$$\sum_{j=1}^3 \tilde{F}_{0j} = \int_{\Theta_g}^{\Theta_3} \left[ \sum_{j=1}^2 \int_0^{H-H_{ж}} E(\tau - \tau_3) F_{0j}(Q_h) \varphi_j(\tau, h) dh + E(\tau - \tau_3) F_{03}(Q) L_3 \right] d\theta. \quad (10.39)$$

Для того щоб обчислити добову величину видимого фотосинтезу в реальних умовах навколишнього середовища, відповідно до прийнятої залежності (10.27), необхідно виписати в явному вигляді залежність  $u(t, w)$ . Ця залежність може бути представлена у вигляді добутку незалежних функцій

$$u(t, w) = u_1(t) u_2(w). \quad (10.40)$$

Як показує аналіз великої кількості експериментального матеріалу, ці залежності можуть бути апроксимовані унімодальними функціями. Конкретний вид цих функцій має такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= \left( \frac{t-t'}{t_0-t'} \right)^\alpha \left( \frac{t''-t}{t''-t_0} \right)^{-\alpha(t''-t_0)/(t_0-t')} \\ u_2(w) &= \left( \frac{w-w'}{w_0-w'} \right)^\gamma \left( \frac{w-w_0}{w''-w_0} \right)^{-\gamma(w''-w_0)/(w_0-w')} \end{aligned} \right\}, \quad (10.41)$$

де  $t'$  – нижня температурна межа життєдіяльності даного виду (сорт) рослин;

$t_0$  – біологічно оптимальна температура;

$t''$  – верхня температурна межа життєдіяльності рослин;

$w'$  – вологість стійкого в'янення в розрахунковому шарі ґрунту;

$w_0$  – біологічно оптимальна вологість ґрунту для даного виду (сорт) рослин;

$w''$  – повна вологомісткість ґрунту у розрахунковому шарі ґрунту;

$\alpha, \gamma$  – константи, обумовлені в процесі ідентифікації.

За характеристику температурного режиму приймається середня добова температура повітря у посіві; як характеристика водного режиму – середня вологість у розрахунковому шарі ґрунту.

Описана структура моделі продукційного процесу посівів сільськогосподарських культур заснована на апіорних уявленнях про хід моделюємих процесів. Для її ідентифікації необхідно проведення комплексного польового експерименту.

## 11. МОДЕЛЬ ПРОДУЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ РОСЛИН СЕНПА – ТООМІНГА

В основу моделі продукційного процесу агроценозу рослин (на прикладі картоплі) POMOD (POtato MODeL) покладена концепція максимальної продуктивності рослин Х.Г. Тоомінга і метод еталонних урожаїв, який впливає з цієї концепції. Розглянута динамічна модель створена для розрахунку потенційної урожайності (ПУ) і метеорологічно-можливої урожайності (ММУ). При цьому ПУ визначається шляхом врахування приходу фотосинтетично-активної радіації (ФАР) і біологічних особливостей культури (сорту) при оптимальному режимі метеорологічних факторів, а ММУ розглядається як найвища урожайність в існуючих метеорологічних умовах.

З фізіологічних процесів у POMOD враховуються основні процеси: фотосинтез, дихання і ріст. Із зовнішніх факторів при розрахунку ПУ враховуються суми сумарної сонячної радіації, а при розрахунку ММУ додається врахування температури повітря, опадів і весняних запасів продуктивної вологи у ґрунті. Розрахунок фотосинтезу проводиться з кроком в одну годину. Приріст біомаси рослин визначається з кроком в одну добу. В моделі можна використовувати щогодинну, середню добову, а також середню декадну метеорологічну інформацію.

### 11.1. Визначення потенційної урожайності

Відповідно до загальних принципів моделювання динамічних процесів усі зміни у досліджуваній системі та її параметри (перемінні стану) визначаються протягом розглянутого періоду через деякі встановлені інтервали часу. Цей інтервал називається кроком розрахунку. На кожному часовому кроці за основу розрахунку приймаються результати попереднього кроку. Так, якщо прийняти за крок розрахунку добу, то загальна біомаса рослини  $M_j$  у  $j$ -у добу вегетаційного періоду визначається як сума біомаси  $M_{j-1}$ , наприкінці попередньої доби, що має номер  $j - 1$ , і приросту біомаси  $\Delta M_j$  на дану добу, тобто

$$M_j = M_{j-1} + \Delta M_j. \quad (11.1)$$

Аналогічно проводиться розрахунок біомаси й окремих органів

$$m_{ij} = m_{ij-1} + \Delta m_{ij}, \quad (11.2)$$

де  $i$  – орган (1 – листя, 2 – стебла, 3 – корені, 4 – колосся, бульби);

$m_{i,j-1}$  – біомаса  $i$ -го органа наприкінці  $j-1$  або на початку  $j$ -тої доби на одиницю площі;

$\Delta m_{ij}$  – приріст біомаси  $i$ -го органа за  $j$ -ту добу.

У розглянутій моделі при визначенні величини  $\Delta M_j$  враховується фотосинтез і дихання, які розглядаються як реалізовані в умовах навколишнього середовища, близьких до оптимальних. Звідси  $\Delta M_j$  має сенс потенційного приросту і визначається за формулою

$$\Delta M_j = \int_0^t \int_0^{L_{j-1}} \varepsilon(\Phi - R_1) dL d\tau - R_2, \quad (11.3)$$

де  $\varepsilon$  – коефіцієнт ефективності газообміну, тобто коефіцієнт переходу від маси засвоєного двоокису вуглецю до сухої фітомаси (виходячи з хімічного рівняння фотосинтезу,  $\varepsilon = 0,67$ ), мг сухої речовини/мг  $\text{CO}_2$ ;

$\Phi$  – інтенсивність фотосинтезу листя, мг  $\text{CO}_2/(\text{дм}^2 \cdot \text{год})$ ;

$R_1$  – інтенсивність дихання росту, мг  $\text{CO}_2/(\text{дм}^2 \cdot \text{год})$ ;

$R_2$  – дихання підтримки структур, мг/дм<sup>2</sup>;

$L$  – індекс листової поверхні, м<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;

$\tau$  – годинний кут.

Інтегрування газообміну проводиться за зовнішнім інтегралом в рамках часового кроку розрахунку біомаси, тобто в межах доби ( $t = 24$ ). При цьому в ході чисельного інтегрування дискретність складає одну годину. У внутрішньому інтегралі інтегрування відбувається за допомогою площі листової поверхні, причому верхньою межею є значення індексу листової поверхні наприкінці попереднього кроку  $L_{j-1}$ .

Розподіл загального приросту  $\Delta M_j$  між окремими органами і перерозподіл існуючих асимілятів описується за допомогою ростових функцій. Ці функції, уперше запропоновані Ю. Россом, представлені в сумах температур і мають у моделі наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta m_{i,j} &= A_{i,\Sigma T} \Delta M_j - B_{i,j} T_j m_{i,j} \quad \text{при } i=1, 2, 3, \\ \Delta m_{4,j} &= A_{4,\Sigma T} \Delta M_j + \sum_{j=1}^3 B_{i,j} T_j m_{i,j}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

де  $A_{i,\Sigma T}$  – вегетативні функції росту як функції сум середніх добових температур вище нуля, безрозмірні;

$B_{i,j}$  – репродуктивні функції росту, що показують, яка частка біомаси інших органів переходить у бульби, 1/...°C;

$T_j$  – середня температура повітря  $j$ -ої доби, °C.

Інтенсивність фотосинтезу листя визначається за відомою формулою

$$\Phi = \frac{a\Pi(L, \tau)}{1 + \frac{\sqrt{c}}{1 - \sqrt{c}} \cdot \frac{\Pi(L, \tau)}{\bar{\Pi}}}, \quad (11.5)$$

де  $\Pi(L, \tau)$  – інтенсивність поглиненої в посіві фотосинтетично-активної радіації, Вт·м<sup>2</sup>;

$a$  – початковий нахил світлової кривої фотосинтезу,

(мг CO<sub>2</sub>·дм<sup>-2</sup>·год<sup>-1</sup>)/(Вт·м<sup>-2</sup>);

$\bar{\Pi}$  – інтенсивність радіації пристосування, Вт·м<sup>-2</sup>;

$c$  – коефіцієнт витрат на дихання при світловому насиченні, яке дорівнює:  $c = \sigma_2/\sigma_1$ , де  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  – інтенсивність фотосинтезу і дихання при світловому насиченні, які розраховані на одиницю сухої біомаси листя, мг CO<sub>2</sub>/(г·год).

У моделі приймається, що дихання складається з двох компонентів: дихання росту  $R_1$  і дихання підтримки структур  $R_2$ . Дихання росту  $R_1$  вважається пропорційним фотосинтезу, тобто передбачається, що має місце лінійна залежність

$$R_1 = c_1\Phi. \quad (11.6)$$

Дихання підтримки структур приймається пропорційним накопиченій біомасі і розраховується для окремих органів рослини. Розрахунок ведеться за формулою

$$R_2 = \sum_{i=1}^4 c_{2i}m_i, \quad (11.7)$$

де  $c_1$  і  $c_{2i}$  – коефіцієнти витрат на дихання, безрозмірні.

Індекс листової поверхні визначається як відношення маси листя до питомої поверхневої щільності

$$L_j = m_{1,j} / m_t. \quad (11.8)$$

При цьому згідно Х.Тоомінга, питома поверхнева щільність виражається такою залежністю

$$m_t = \frac{a}{\sigma_1} \cdot \frac{1 - \sqrt{c}}{\sqrt{c}} \bar{\Pi}. \quad (11.9)$$

Для розрахунку фотосинтезу за формулою (11.5) проводиться визначення інтенсивності поглиненої посівом ФАР  $\Pi(L, \tau)$  за формулою

$$\Pi(L, \tau) = (1 - A_\phi) \left( c_S S' \frac{\partial a_S}{\partial L} - c_D D \frac{\partial a_D}{\partial L} \right), \quad (11.10)$$

де  $A_\phi$  – альbedo посіву в області ФАР, безрозмірне;

$S'$  – щільність потоку прямої сонячної радіації на горизонтальну поверхню, Вт/м<sup>2</sup>;

$c_S$  – коефіцієнт переходу від інтегральної прямої радіації до прямої ФАР, безрозмірний;

$D$  – щільність потоку розсіяної радіації, Вт/м<sup>2</sup>;

$c_D$  – коефіцієнт переходу від інтегральної розсіяної радіації до розсіяної ФАР, безрозмірний;

$a_D$  – коефіцієнт пропускання розсіяної радіації у посіві, безрозмірний;

$a_S$  – коефіцієнт пропускання прямої радіації у посіві, безрозмірний.

Похідні  $\partial a_S / \partial L$  і  $\partial a_D / \partial L$  залежать від геометричної структури посіву. Для картоплі функція геометричної структури  $G_L(h_\odot)$ , тобто проекція одиниці площі листя на поверхню, перпендикулярну сонячним променям, виражається формулою

$$G_L(h_\odot) = 0,85 \sin h_\odot, \quad (11.11)$$

де  $h_\odot$  – висота Сонця, град.

У такому випадку для  $\partial a_S / \partial L$  і  $\partial a_D / \partial L$  будемо мати

$$\frac{\partial a_S}{\partial L} = \frac{\partial a_D}{\partial L} = 0,85 \exp(-0,85L) \quad (11.12)$$

і рівняння (11.10) матиме вигляд

$$\Pi(L, \tau) = (1 - A_\phi)(c_S S' + c_D D) 0,85 \exp(-0,85L). \quad (11.13)$$

Якщо підставити цей вираз у формулу фотосинтезу (11.5) і проінтегрувати за індексом листової поверхні, отримаємо наступний вираз для розрахунку інтенсивності фотосинтезу всієї листової площі:

$$\Phi_L = \int_0^{L_{j-1}} \Phi dL = \frac{\Phi_{\max}}{0,85} \ln \left[ \left( 1 - \frac{0,85a(1-A_\phi)}{\Phi_{\max}} Q_\phi \right) : \left( 1 + \frac{0,85a(1-A_\phi)}{\Phi_{\max}} Q_\phi e^{-0,85L_{j-1}} \right) \right] \quad (11.14)$$

де

$$\Phi_{\max} = a\bar{I}(1-\sqrt{c})/\sqrt{c} \quad (11.15)$$

виражає інтенсивність фотосинтезу при світловому насиченні, а щільність потоку ФАР, що падає на посів, визначається за формулою

$$Q_\phi = c_s S' + c_D D. \quad (11.16)$$

Рівняння для розрахунку приросту біомаси (11.3) набуває вигляду

$$\Delta M_j = \varepsilon(1-c_1) \int_0^t \Phi_L d\tau - \sum_{i=1}^4 c_{2i} m_{i,j}. \quad (11.17)$$

Інтенсивність і сума ФАР регулярно не вимірюються. Тому при розрахунках по моделі приходиться виходити із суми сумарної радіації. Оскільки коефіцієнти переходу для прямої і розсіяної радіації розрізняються, причому перший істотно залежить від висоти Сонця, то сумарну радіацію слід, насамперед, розділити на компоненти.

Щільність розсіяної радіації може бути визначена за формулою

$$D = Q_{\max}(a_D Q_N - b_D Q_N^2), \quad (11.18);$$

де  $Q_{\max}$  – щільність потоку можливої сумарної радіації Вт/м<sup>2</sup>;

$Q_N$  – відношення суми сумарної радіації  $Q_c$  до можливої суми сумарної радіації  $Q_m$  за той же часовий інтервал;

$a$  і  $b$  – безрозмірні параметри, які залежать від висоти Сонця.

Щільність потоку прямої радіації виражається залежністю

$$S' = Q_{\max} Q_N - D. \quad (11.19)$$

За допомогою формул (11.18) і (11.19) можна легко конструювати добовий хід радіації, пропорційний розділенню можливої сумарної радіації протягом дня, якщо відома сумарна радіація, нормована до можливої. Нормування можна провести за годинним, добовим або відповідним якомусь іншому проміжку часу сумам сумарної радіації.

Величина  $Q_{\max}$  описується за формулою Т.Г. Берлянд:

$$Q_{\max} = \frac{S_0 \sin h_0}{1 + f / \sin h_0}, \quad (11.20)$$

де  $S_0 = 1380$  Вт/м<sup>2</sup> – сонячна стала;

$f$  – безрозмірний параметр, величина якого залежить від властивостей підстильної поверхні і атмосфери;

$\sin h_0$  визначається за астрономічною формулою

$$\sin h_0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \tau, \quad (11.21)$$

де  $\varphi$  – географічна широта;

$\delta$  – схилення Сонця;

Схилення Сонця представлено у моделі дискретно у формі табличних даних.

## 11.2. Визначення метеорологічно-можливої урожайності

Для розрахунку ММУ потенціальний фотосинтез на кожному часовому кроці розрахунку помножується на деяку нормовану функцію  $\Psi$ , яка відображає поточний вплив метеорологічних факторів, що лімітують процес фотосинтезу

$$\Phi_{\text{ММУ}} = \Phi \Psi. \quad (11.22)$$

За фактори навколишнього середовища, які лімітують продуктивність рослин, приймаються запаси продуктивної вологи у ґрунті і температура повітря. При цьому зниження приросту сухої біомаси під впливом дії окремого фактору враховується за допомогою функції, яка має максимум в оптимальній області даного фактора. Зокрема, вплив температурного фактора, виражається залежністю

$$\Psi_T = \exp[-\alpha_T (T - T_{\text{опт}})^2], \quad (11.23)$$

де  $T$  – температура повітря;

$\alpha_T$  – емпіричний параметр;

$T_{\text{опт}}$  – оптимальна температура для фотосинтезу.

Залежним від температури вважається також коефіцієнт дихання підтримки

$$c_2 = a_o \cdot 2^{T/10}, \quad (11.24)$$

де  $a_0$  – безрозмірний емпіричний параметр.

Вплив запасів продуктивної вологи на фотосинтез також описується експоненціальною кривою з «розширеним» діапазоном оптимальних значень. При цьому оптимальними вважаються запаси вологи, які знаходяться в діапазоні від 60 до 100 % найменшої вологомісткості ґрунту. Відповідна формула має вигляд:

$$\Psi_W = \begin{cases} \exp \left[ -b_1 \left( \frac{W_{onm1} - W}{W_{onm1}} \right)^2 \right] & \text{при } W < W_{onm1}, \\ 1 & \text{при } W_{onm1} \leq W \leq W_{onm2}, \\ \exp \left[ -b_2 \left( \frac{W - W_{onm2}}{W_{max} - W_{onm2}} \right)^2 \right] & \text{при } W > W_{onm2}, \end{cases} \quad (11.25)$$

де  $W$  – запаси продуктивної вологи ґрунту, мм;

$W_{onm1}$  і  $W_{onm2}$  – межі оптимального діапазону запасів продуктивної вологи ґрунту, які відповідають 60 і 100 % найменшої вологомісткості;

$b_1$  і  $b_2$  – безрозмірні емпіричні коефіцієнти.

Запаси продуктивної вологи ґрунту визначаються із рівняння водного балансу

$$W = W_0 + U - E - V \quad (11.26)$$

де  $W_0$  – початкові вологозапаси, мм;

$U$  – опади, мм;

$E$  – евапотранспірація, мм;

$V$  – стік води, мм.

Для розрахунку евапотранспірації використовується формула, знайдена за даними польового експерименту, що має вигляд

$$E = Q_c (a_E + b_E \sqrt{L}) \min \{1, W / W_{onm1}\}, \quad (11.27)$$

де  $Q_c$  – сумарна енергія падаючої сонячної радіації, МДж·м<sup>-2</sup>;

$L$  – індекс листкової поверхні, м<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;

$a_E$ ,  $b_E$  – емпіричні коефіцієнти, мм/(МДж·м<sup>-2</sup>).

Слід зазначити, що широко розповсюджений спосіб врахування сумарного впливу метеорологічних факторів на продукційний процес у вигляді добутку коефіцієнтів відносного значення окремих впливів у динамічних моделях викликає сумнів. Така маніпуляція не узгоджується з

добре відомим у землеробстві законом мінімуму і веде до збільшення сумарного впливу, який лімітує фотосинтез. Особливо сильно це виражається тоді, коли часовий крок розрахунку малий. При врахуванні спільного впливу факторів, які лімітують фотосинтез, виходимо з закону мінімуму Лібіха. Відповідно до цього закону ріст рослин обмежується фактором, що в найменшій мірі задовольняє вимогам виду рослин, тобто значення функції вплив якої найнижчий. Звідси

$$\Psi_L = \min \{ \Psi_T, \Psi_W \}. \quad (11.28)$$

Звичайно, застосування цього закону обмежено. Точність його тим нижче, чим довше період, протягом якого він застосовується. Для ослаблення надлишкової жорсткості цього принципу для коефіцієнта  $\Psi_L$  введено коригувальне виправлення, за яким дія факторів, які лімітують фотосинтез, виражається функцією

$$\Psi = \Psi_L [1 \pm (1 - \Psi_T)(1 - \Psi_W)]. \quad (11.29)$$

У цій формулі знак «+», який зменшує лімітуючий вплив комплексу температури і вологи, використовується при  $T < T_{onm}$  і  $W < W_{onm1}$  (посуха і низька температура) або при  $T > T_{onm}$  і  $W > W_{onm2}$  (надлишок води і висока температура), знак «-», навпаки, підвищує спільне лімітування і застосовується при  $T < T_{onm}$  і  $W > W_{onm2}$  або при  $T > T_{onm}$  і  $W < W_{onm1}$ .

Модель РОМОД призначена для проведення розрахунків за весь період вегетації. З моменту визначення початкових весняних вологозапасів у ґрунті починається розрахунок водного балансу. Початком розрахунку динаміки біомаси рослин і їхніх органів вважається момент, з якого приріст вегетативних органів перевищує відтік речовини з материнської бульби. Цей момент визначається при позитивних температурах, підсумовування яких починається з моменту посадки. Оптимальною датою посадки картоплі вважається дата стійкого переходу температури ґрунту на глибині 10–12 см через 8 °С.

Приймається, що рослини закінчують ріст і розвиток з настанням перших осінніх заморозків, коли температура на поверхні ґрунту падає нижче –2 °С. При відсутності ранніх заморозків восени за кінець вегетаційного періоду в розрахунках ММУ приймається час, коли середня добова температура повітря опускається нижче 7 °С. Якщо температура не лімітує ріст і розвиток, то розрахунки проводяться до кінця вересня.

Оскільки визначення потенційного урожаю не встановлює умов для обмеження тривалості періоду розрахунку, то ПУ розраховується для того ж періоду, що і ММУ, причому біологічний час (сума температур) для обох варіантів розраховується однаково. Таким чином, ПУ не є повністю

незалежним від температури, а залежить від термічних ресурсів посередньо. Такий шлях розрахунку ПУ з метою визначення агрометеорологічних ресурсів є доцільним.

Таким чином, створюється можливість визначення недобору урожайності за конкретний вегетаційний період через несприятливі метеорологічні умови. Величину ПУ можна розраховувати також за середніми багаторічними даними або за якимсь іншим сценарієм.

### 11.3. Ідентифікація зв'язків і параметрів моделі

При розробці формул для розрахунку необхідних величин і ідентифікації параметрів моделі використовувалася емпірична інформація з чотирьох джерел: польових дослідів, сортодослідних ділянок, агрометеорологічних станцій і літературних даних.

#### Визначення функцій росту картоплі

Функції росту визначені Ю. Россом, відповідно до рівняння росту

$$\frac{\Delta m_i}{\Delta t} = A_i \frac{\Delta M}{\Delta t} + MB_i, \quad (11.30)$$

де  $\Delta m_i / \Delta t$  – приріст  $i$ -го органа за інтервал часу  $\Delta t$ ;

$A_i$  і  $B_i$  – відповідно функції вегетативного і репродуктивного росту.

Функції вегетативного росту  $A_i$  розраховуються за умови, що репродуктивний ріст дорівнює нулю, тобто  $B_i = 0$ , як

$$A_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta M}. \quad (11.31)$$

Для періоду репродуктивного росту  $A_i = 0$  і  $B_i$ , можна визначити за формулою

$$B_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta t} \frac{1}{M}. \quad (11.32)$$

При розробці цих формул Ю. Росс запропонував вважати, що обмін «старих» асимілятів пропорційний загальній сухій біомасі цілої рослини. У розрахунках по моделі POMOD загальна біомаса  $M$  в знаменнику (11.32) замінена на біомасу відповідних органів  $m_i$ , припускаючи, що відтік «старих» асимілятів в першу чергу залежить від біомаси органа, з якого

відбувається відтік «старих» асимілятів. Заміна  $M$  на  $m_i$  повинна зблизити значення  $B_i$  окремих органів між собою, при цьому спрощується їхнє використання. У такому випадку функції репродуктивного росту, що враховують тільки перетікання «старих» асимілятів з інших органів у бульби, описуються формулою

$$B_i = \frac{1}{m_i} \frac{dm_i}{dt} \quad \text{при } i = 1, 2, 3. \quad (11.33)$$

Функції росту  $A_i$  і  $B_i$ , картоплі середньопізнього сорту Сулев вимірялися в польових дослідах в Естонії протягом п'яти років. Отримані результати показують, що функції росту, які є в першу чергу характеристиками виду чи сорту, до деякої міри залежать від факторів навколишнього середовища. Для зменшення цієї залежності розглянуті функції доцільно представити в шкалі так названого біологічного часу, яку можна замінити сумами температур.

Для вибору порога, вище якого підсумовуються середні добові температури, був проведений аналіз функцій росту листя за п'ять років. Функції росту листя були обрані тому, що урожай найбільш чутливий саме до характеру росту листкової поверхні.

Отримані результати показують, що функції росту листя в окремі роки дають найбільше гарний збіг між собою, якщо початком відліку сум температур вибрати  $0^\circ\text{C}$ . Якщо початком шкали вважати температури  $5, 8$  чи  $10^\circ\text{C}$ , то функції росту листків в окремі роки відрізняються більше. Отже, осереднені функції росту доцільно розраховувати як функції сум позитивних температур (рис. 11.1).

У розрахунках з моделлю POMOD на ПЕОМ значення функцій  $A_i$  представлені в табульованій формі з часовим кроком  $10^\circ\text{C}$ .

Функції репродуктивного росту  $B_i$  приймаються до уваги, якщо  $\Delta m_{i,j} < 0$  ( $i$  дорівнює 1, 2, 3). Виходячи з цієї умови і першого рівняння (11.33), була знайдена формула для розрахунку  $B_i$ . Подібно  $A_i$  функції  $B_i$  виражаються як функції суми температур вище  $0^\circ\text{C}$  і мають вигляд

$$B_{i,j} = \frac{m_{i,j-1} - m_{i,j} - v_{i,j}}{m_{i,j-1} \sum_{j-1}^j T}, \quad (11.34)$$

де  $j$  – порядковий номер вимірювання біомаси;

$v_{i,j}$  – опад біомаси  $i$ -го органа між вимірами  $j-1$  і  $j$ ;

$\sum_{j-1}^j T$  – сума середніх добових температур між вимірами  $j-1$  і  $j$ .



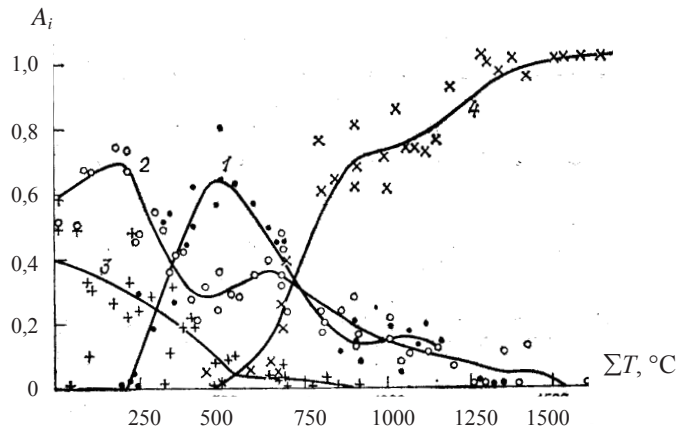


Рис. 11.1. Функції вегетативного росту картоплі, сорт Сулев в залежності від сум позитивних температур:  
1 – листя; 2 – стебла; 3 – корені; 4 – бульби

При проведенні польових дослідів виникають труднощі вимірювання опадів  $v_{i,j}$ , оскільки складно установити, якій рослині належали вихли листя і стебла, а визначення опадів коренів є практично неможливим. У зв'язку з цим у досліді опад не вимірюється, а пропонується інший спосіб визначення значення  $B_{i,j}$  – за наявними експериментальними даними.

З цією метою використовується наступна формула, яка відрізняється від (11.34) тим, що доданок  $v_{i,j}$  тут опущений

$$B_{i,j}^* = \frac{m_{i,j-1} - m_{i,j}}{m_{i,j-1} \sum_{j=1}^j T} \quad (11.35)$$

Величину  $B_{i,j}^*$  варто розраховувати тільки в тих випадках, коли  $A_{i,j} \leq 0$  у всьому інтервалі між вимірами  $j-1$  і  $j$ . Отримані таким шляхом значення  $B_{i,j}^*$  представлені у вигляді чисельних рядів (рис. 11.2) окремо для кожного органа. Кожний з цих рядів починається сімейством точок, причому надалі частота точок у ряду зменшується. Можна прийняти, що ущільнення точок на початку рядів відповідає випадкам, коли опадів не має, і середнє значення ущільнених точок можна вважати функцією репродуктивного росту  $B_{i,j}$ . Розсіяні підвищені значення  $B_{i,j}^*$  характеризують, крім притоку речовин у бульби, і опад.

Виявляється (рис. 11.2), що значення  $B_{i,j}$  можна вважати приблизно рівними для усіх вегетативних органів:  $B_{i,j} = 0,0003 \text{ град}^{-1}$  при  $A_i = 0$ .

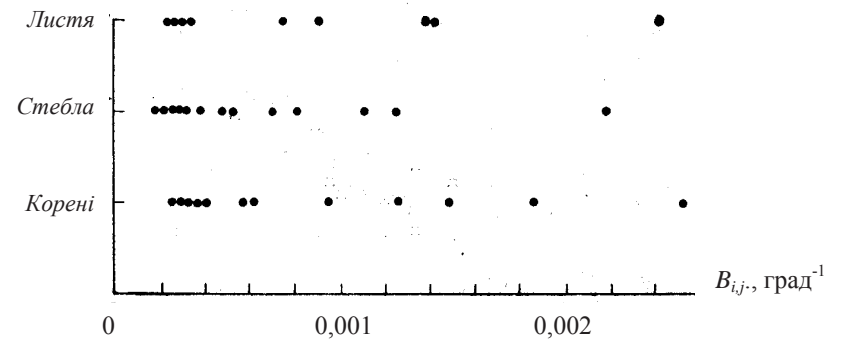


Рис. 11.2. Значення функцій репродуктивного росту окремих органів, які розраховані за дослідними даними без врахування опадів листя

#### Визначення коефіцієнтів у формулі температурної залежності фотосинтезу

Параметри кривої температурної залежності фотосинтезу (11.23) були визначені для картоплі на основі досліджень Е. Вунклера. Шляхом підсумовування цих даних, була отримана залежність чистого фотосинтезу від температури при різних освітленості й у різні міжфазні періоди вегетаційного циклу. Після нормування на їхні максимуми ці залежності осереднювались. Отримана таким шляхом емпірична крива характеризує середній вплив температури на фотосинтез (рис. 11.3). При цьому виявилось, що емпірична крива має максимум при температурі  $18,6 \text{ }^\circ\text{C}$ , який варто вважати значенням параметра  $T_{opt}$ .

Значення емпіричного параметра  $\alpha_T$ , прийняте рівним  $0,0038 \text{ град}^{-2}$ , було визначено методом найменших квадратів. При цих значеннях параметрів у діапазоні від  $8$  до  $38 \text{ }^\circ\text{C}$  крива (11.23) практично точно описує емпіричні дані (рис. 11.3).

#### Визначення коефіцієнтів у формулах дихання

Коефіцієнт витрат  $c_1$  на дихання росту у формулі (11.6) вважається постійним, і як у багатьох інших моделях, він прийнятий рівним  $0,25$ .

Коефіцієнти дихання  $c_{2i}$  підтримки структур враховані у моделі як залежні від температури. Згідно з експериментальними і літературними даними дихання підтримки структур зростає на кожні  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  приблизно в 2 рази.

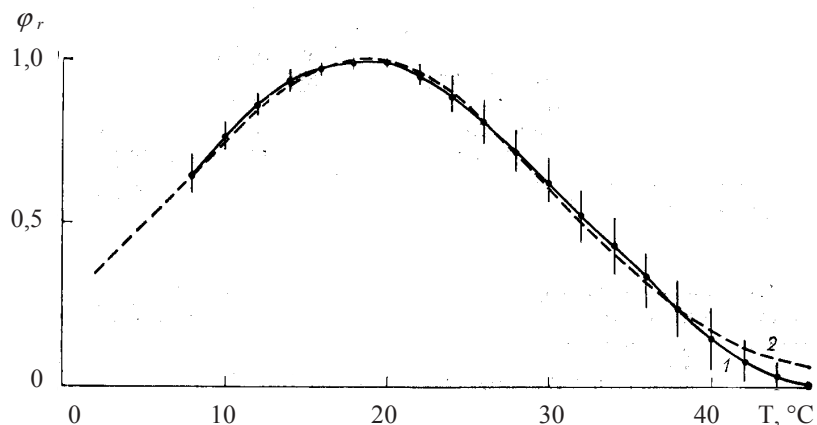


Рис. 11.3. Температурна залежність фотосинтезу ( $\psi_r$ ) експериментальна (1) і розрахована (2) за формулою (11.23): Вертикальними лініями позначені середні відхилення від осереднених даних вимірювань

Математично цей факт виражається формулою

$$c_{2i} = a_0 2^{T/10}, \quad (11.36)$$

де  $T$  – температура;

$a_0$  – значення  $c_{2i}$  при  $T = 0$  °C.

При розрахунку потенційного урожаю температура приймається рівній оптимальній температурі фотосинтезу  $T_{opt}$  і, крім коефіцієнта дихання підтримки структур бульб  $c_{24}$ , коефіцієнти для інших органів розглядаються при постійній температурі, тобто вважаються незмінними протягом усього вегетаційного періоду. При температурі  $T_{opt}$  буде  $c_2 = c_{2i} = 0,015$  ( $i=1, 2, 3$ ). Підставляючи у рівняння (11.36) значення  $c_{2i}$  і  $T_{opt}$ , легко знайти, що  $a_0 = 0,0043$ .

Дихання підтримки структур при  $i=1, 2, 3$  виражається в такому випадку, як

$$R_{2i} = 0,0043 m_i 2^{T/10}. \quad (11.37)$$

Що стосується коефіцієнта  $c_{24}$ , то він зменшується під час вегетації і, виходячи з даних Вінклера, відповідна залежність апроксимована виразом

$$\left. \begin{aligned} c_{24} &= (1,23 - 0,0099j)c_2 && \text{при } j < 120, \\ c_{24} &= 0,05c_2 && \text{при } j \geq 120, \end{aligned} \right\} \quad (11.38)$$

де  $j$  – порядковий номер доби, починаючи з 1 травня.

Відповідно дихання бульб описується такими формулами

$$\left. \begin{aligned} R_{24} &= (0,0053 - 0,000043j)m_4 2^{T/10} && \text{при } j < 120, \\ R_{24} &= 0,00023m_4 2^{T/10} && \text{при } j \geq 120. \end{aligned} \right\} \quad (11.39)$$

### Калібрування параметрів моделі

Одним з найбільш важких питань при динамічному моделюванні є визначення числових значень «відсутніх» параметрів. Виникнення подібних невідомих параметрів у моделях, які описують складні біологічні системи, може бути обумовлене, по-перше тим, що не відомо про всі процеси, які відбуваються у цих системах. Особливо гостро ця проблема встає при необхідності поєднання знань різних рівнів організації (наприклад, при переході з рівня окремих органів рослин на рівні цілих рослин або посівів в цілому). З іншого боку, існують параметри, які хоча і можуть бути експериментально визначені для деяких видів або сортів, однак повторення цих вимірювань для конкретної культури в конкретних екологічних умовах виявляється практично неможливим через велику трудомісткість чи відсутність необхідного устаткування. Нарешті, зустрічаються параметри, які «прив'язані» до структури конкретної моделі і без них не мають змістовного значення.

Дану проблему можна вирішити методом калібрування або настроювання моделі, яка базується на використанні самої розглянутої моделі. У літературі для цього методу зустрічається також термін «ідентифікація», але він часто використовується в більш широкому розумінні – як визначення структури моделі. Тому, якщо мова йде лише про визначення невідомих параметрів, то представляється більш придатним термін «калібрування». Метод калібрування полягає в тому, що розрахунки по моделі або частиною моделі проводяться для різних значень параметрів, які визначаються, розташованих у деякому діапазоні їхніх очікуваних значень. Результати розрахунків порівнюються з дослідними даними. На основі придатного критерію (середня квадратична помилка, коефіцієнт кореляції і т.д.) вибираються такі значення параметрів, при яких збіг розрахованих даних з реальними виявляється найкращим. Однак,

такий підхід пов'язаний з можливістю (особливо при великій кількості каліброваних параметрів) отримання нереальних значень, які складають якийсь локальний оптимум. Тому перед використанням результати калібрування необхідно порівняти з даними, які існують у літературних джерелах.

Стосовно до моделі POMOD невизначеними параметрами залишилися величини  $a$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , і  $\bar{P}$  у формулі фотосинтезу (11.5) і коефіцієнти  $b_1$  і  $b_2$  у формулі (11.25). Ці параметри визначалися методом калібрування за допомогою самої моделі. У процесі калібрування використовувалася метеорологічна і фенологічна інформація, а також реальні урожаї картоплі, отримані в польових дослідях. Калібрування проводилося з врахуванням зниження індексу листової поверхні у другій половині вегетації за рахунок впливу фітофтори.

Значення параметрів  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\bar{P}$ ,  $b_1$  і  $b_2$  були визначені, виходячи з умови досягнення максимального коефіцієнта кореляції між розрахунковими і фактичними урожаями. Таким чином, було отримано, що  $\sigma_1 = 100$  мг  $\text{CO}_2/(\text{г}\cdot\text{год})$ ,  $\sigma_2 = 10$  мг  $\text{CO}_2/(\text{г}\cdot\text{год})$ ,  $\bar{P} = 28$  Вт $\cdot\text{м}^{-2}$ ,  $b_1 = 1,4$  і  $b_2 = 0,7$ . Параметр  $a$ , змінювання якого не впливає на коефіцієнт кореляції, визначений за умови, що розрахований урожай ММУ не може бути менше фактичного. Такий вимозі задовольняє наступне значення  $a = 0,497$  (мг  $\text{CO}_2\cdot\text{дм}^{-2}\cdot\text{год}^{-1})/(\text{Вт}\cdot\text{м}^{-2})$ , що приблизно відповідає шістнадцятиквантовому виходу фотосинтезу.

Отримані значення параметрів фотосинтезу знаходяться в задовільній відповідності з експериментально визначеними параметрами для видів рослин, з близькими вимогами до світлових умов. Визначені за даними польових дослідів значення інтенсивності радіації пристосовані для картоплі варіюють у межах 17–30 Вт $\cdot\text{м}^{-2}$ .

Ідентифікація і калібрування параметрів моделі POMOD, наведені вище, здійснені для картоплі сорту Сулев. Для використання стосовно інших сортів параметри моделі необхідно визначати заново.

## 12. ПРИКЛАДНА ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ФОРМУВАННЯ УРОЖАЮ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР О. Д. СИРОТЕНКА

### 12.1. Концепція моделювання

Створення автоматизованих систем агрометеорологічного забезпечення сільського господарства, очевидно, є одне з найбільш важливих прикладних завдань, що стоять перед агрометеорологією в даний час. Центральною ланкою агрометеорологічних імітаційних систем (АМІС) повинні служити динамічні моделі формування урожаїв найважливіших сільськогосподарських культур.

Один з головних напрямків розвитку моделей продукційного процесу – використання сучасних уявлень про інтеграцію найважливіших фізіологічних процесів рослини, зокрема, концепції фондів.

Модель О.Д. Сиротенка «погода – урожай 3» – це реалізація однієї з перших спроб створення робочої прикладної моделі, заснованої на концепції фондів. У запропонованій моделі вплив факторів навколишнього середовища на продуктивність враховується не тільки через процес фотосинтезу, як у попередніх варіантах моделі («погода – урожай 1», і «погода – урожай 2»), але і через процеси дихання і старіння тканин. Процеси пожовтіння і відмирання в моделях першого покоління описувалися за допомогою емпіричних функцій, які залежать від температури. У моделі «погода – урожай 3» пожовтіння й опад визначаються динамікою всіх процесів, що формують фітомасу посіву, і залежать від напруженості факторів середовища життєдіяльності рослин. Це спрощує структуру моделі і дозволяє відмовитися від ряду біологічних функцій, які досить важко визначаються в експерименті, що істотно полегшує завдання ідентифікації параметрів.

Схема зв'язків моделі «погода – врожай 3» наведена на рис. 12.1. Центральне місце в моделі займає біологічний блок, призначений для розрахунку продуктивності посіву. Розглянемо його структуру на прикладі моделі для урою пшениці.

Посів у моделі розглядається як функціонально диференційоване ціле, у якому виділено п'ять структурних одиниць – «ємностей» (надалі будемо називати їх органами рослин): листя –  $l$ , стебла –  $s$ , корені –  $r$ , оболонка колоса –  $k$  і зерно –  $z$ . Зона розповсюдження кореневої системи обмежується півтораметровим шаром ґрунту, який розділений на п'ятнадцять шарів. Часовий крок моделі – доба. При побудові системи рівнянь, які описують динаміку фітомаси, прийнята концепція фондів,

тобто зроблене допущення, що маса рослини складається із структурного компонента і фонду вуглеводів

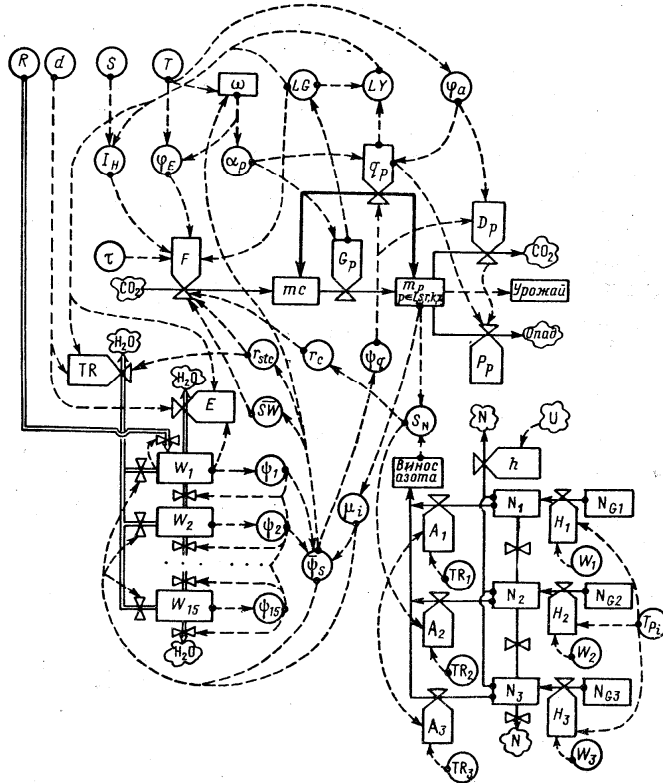


Рис. 12.1. Схема зв'язків моделі «погода – урожай 3».

### 12.2. Моделювання фотосинтезу, дихання і приросту маси рослин

Маса фонду вуглеводів  $mc$  для будь-якої доби вегетаційного періоду формується з продуктів добового сумарного фотосинтезу  $F$  і продуктів розпаду структурних тканин  $Q$  за ту ж добу

$$mc = R + Q. \quad (12.1)$$

Добовий приріст фітомаси кожного органа рослини визначається процесами росту  $G_p$ , дихання  $D_p$ , розпаду тканин органа  $q_p$  і опадом відмерлих тканин  $P_p$ :

$$\frac{\Delta m_p}{dt} = G_p - D_p - q_p - P_p, \quad (12.2)$$

$p \in l, s, r, k, z$

де  $\Delta m_p$  – приріст структурної маси за час  $\Delta t$  (доба)  $p$ -го органа.

Під ростом у даній моделі розуміється новоутворення структурної маси. З метою істотного спрощення моделі і, з огляду на те, що крок моделі доба, зроблено допущення, що весь фонд вуглеводів, який сформувався за добу, перетвориться на структурну масу в процесі росту

$$G_p = \alpha_p mc = \alpha_p (F + Q), \quad (12.3)$$

$$\alpha_p \geq 0, \quad \sum_{p=1}^5 \alpha_p = 1,$$

де  $\alpha_p$  – ростові функції, що показують, яка частка фонду вуглеводів йде на ріст  $p$ -го органа.

В даний час стає загальноприйнятим, що енергетичні витрати рослини (дихання) ототожнюються, по-перше, з ростом і по-друге, з підтримкою в активному стані органів рослин, які вже закінчили ріст (так зване, дихання росту і дихання підтримки). Дихання росту  $p$ -го органа прямо пропорційне швидкості росту, а дихання підтримки визначається величиною вже сформованої маси органа, вологістю і температурою навколишнього середовища

$$D_p = R_G G_p + [D_1(1 - \psi_Q) + D_2] m_p \varphi_Q, \quad (12.4)$$

де  $D_p$  – дихання  $p$ -го органа;

$R_G$  – коефіцієнт дихання росту;

$D_1$  і  $D_2$  – коефіцієнти дихання підтримки;

$\psi_Q$  – функція впливу вологості ґрунту на дихання;

$\varphi_Q$  – температурна функція дихання.

Якщо підставити вирази (12.3) і (12.4) у формулу (12.2), одержимо наступну систему рівнянь для розрахунку добових приростів фітомаси посіву для органів рослин:

$$\frac{\Delta m_p}{\Delta t} = \alpha_p (1 - R_G)(F + Q) - [D_1(1 - \psi_Q) + D_2] m_p \varphi_Q - q_p - P_p, \quad (12.5)$$

де  $Q = \sum_{p=1}^5 q_p$ .

Сумарний фотосинтез посіву за добу розраховується за формулою Шартьє

$$F = \frac{\varepsilon \tau \varphi_F LG \cdot \overline{SW}}{2(r - r_c)} [\text{CO}_2 + \alpha I - \sqrt{(\alpha I - \text{CO}_2)^2 + 4r_c I \alpha \text{CO}_2}], \quad (12.6)$$

де  $\varepsilon$  – коефіцієнт газообміну (константа);  
 $\tau$  – тривалість дня;  
 $\varphi_F$  – температурна функція фотосинтезу;  
 $LG$  – фотосинтезуюча поверхня посіву;  
 $\overline{SW}$  – середньозважений коефіцієнт перезволоження;  
 $r$  – загальний опір фотосинтезу, який дорівнює:  $r = r_{mes} + r_c + r_{stc}$ ,  
де  $r_c$  – фотохімічний опір фотосинтезу;  
 $r_{mes}$  – опір мезофіла (константа);  
 $r_{stc}$  – устячково-кутикулярний опір потоку  $\text{CO}_2$ ;  
 $\text{CO}_2$  – концентрація вуглекислого газу у посіві;  
 $\alpha$  – кут нахилу світлової кривої фотосинтезу;  
 $I$  – середня інтенсивність ФАР, поглинена листком усередині посіву.  
Температурна залежність фотосинтезу представлена у моделі в такому вигляді:

$$\varphi_F = \begin{cases} 1 - 2x^2, & \text{якщо } 0 \leq x < 0,5, \\ 2(1 - x)^2, & \text{якщо } 0,5 < x < 1, \\ 0, & \text{якщо } T \leq T_{0F} \text{ або } T \geq T_F, \end{cases} \quad (12.7)$$

$$x = \begin{cases} \frac{T_{opt} - T}{T_{opt} - T_{0F}}, & \text{якщо } T_{0F} < T < T_{opt}, \\ \frac{T - T_{opt}}{T_F - T_{opt}}, & \text{якщо } T_{opt} < T \leq T_F, \end{cases} \quad (12.8)$$

де  $T_{0F}$ , і  $T_F$  – відповідно нижня і верхня температурні межі фотосинтезу;  
 $T_{opt}$  – оптимальна температура для фотосинтезу.

Для прийнятої моделі росту рослин (12.3) температурна функція  $\varphi_F$  повинна відображати характер впливу температури на новоутворення структурної речовини (фотосинтез, ріст).

Природно припустити, що в процесі росту і розвитку рослин оптимальна для приросту фітомаси температура не залишається постійною: у початковий період вона нижче, ніж за період колосіння – повна стиглість.

Тоді

$$T_{opt}^j = \begin{cases} T_{opt}^0 + (w_{BK}^j / w_R) D_T, & \text{якщо } w_{BK}^j < w_R, \\ T_{opt}^0 + D_T, & \text{якщо } w_{BK}^j \geq w_R, \end{cases} \quad (12.9)$$

де  $T_{opt}^0$  – початкове значення оптимальної температури;  
 $w_{BK}^j$  – значення суми ефективних температур на  $j$ -му кроці за часом;  
 $w_R$  – сума ефективних температур на фазу колосіння;  
 $D_T$  – максимально можлива зміна оптимальної температури фотосинтезу.  
Вигляд температурної функції фотосинтезу  $\varphi_F$  для ярої пшениці наведено на рис. 12.2.  
Вплив режиму вологості на утворення нових тканин рослини здійснюється у моделі через два канали: при нестачі ґрунтової вологи через  $r_{stc}$ , а при надлишку – через  $\overline{SW}$  – коефіцієнт перезволоження.

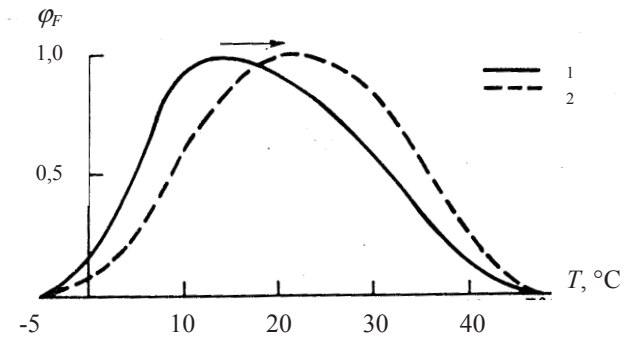


Рис. 12.2. Залежність фотосинтезу ярої пшениці  $\varphi_F$  від температури повітря  $T$  у моделі «погода – урожай 3»:  
1 – на момент сходів;  
2 – від фази колосіння до кінця вегетаційного періоду

Для розрахунку  $r_{stc}$  прийнята модель рівнобіжного включення устячкового  $r_{st}$  і кутикулярного  $r_{cut}$  опорів листка

$$r_{stc} = \frac{r_{st} r_{cut}}{r_{st} + r_{cut}}. \quad (12.10)$$

У моделі величина кутикулярного опору не змінюється в часі і залежить від посухостійкості культури, устячковий же опір визначається видом культури і залежить від вологості ґрунту (рис. 12.3):

$$r_{st} = \begin{cases} r_{\min}, & \text{якщо } \bar{\psi}_s \leq \psi_{cr}, \\ r_{\min} \exp(a_2 \psi_s), & \text{якщо } \bar{\psi}_s \geq \psi_{cr}, \end{cases} \quad (12.11)$$

де  $r_{\min}$  – мінімально можливий устячковий опір;  
 $\bar{\psi}_s$  – середньозважений потенціал ґрунтової вологи;  
 $\psi_{cr}$  – критичне значення потенціалу ґрунтової вологи, починаючи з якого опір устячок залежить від вологості ґрунту;  
 $a_2$  – константа.

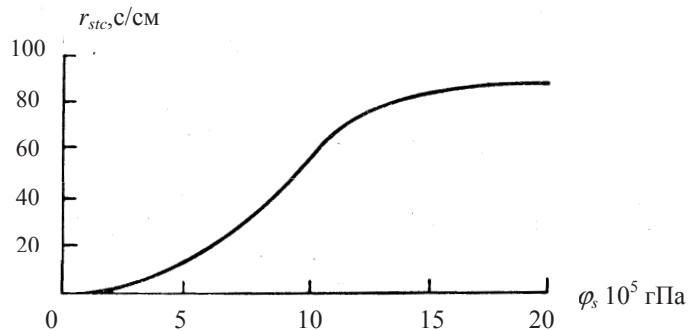


Рис. 12.3. Залежність устячково-кутикулярного опору  $r_{stc}$  потоку  $\text{CO}_2$  від потенціалу ґрунтової вологи  $\psi_s$

Коефіцієнт впливу перезволоження на фотосинтез  $\overline{SW}$  ( $0 \leq \overline{SW} \leq 1$ ) розраховується для кожного  $i$ -го шару ґрунту, а потім осереднюється з урахуванням частки коренів у шарі  $\mu_i$

$$\overline{SW} = \frac{\sum_{i=1}^{15} SW_i \mu_i}{\sum_{i=1}^{15} \mu_i}. \quad (12.12)$$

Алгоритм росту коренів ґрунтується на припущенні про експоненціальний профіль щільності кореневої системи і незворотності ростових процесів.

При виведенні формули для розрахунку  $SW_i$  використовувалися наступні положення. Якщо вологість ґрунту  $W_i$  вище деякої оптимальної величини  $W_{opt}$ , то спостерігається зниження продуктивності рослин. Зі збільшенням кількості днів, протягом яких рослина знаходилася під впливом перезволоження, вплив цього фактора на продуктивність рослин підсилюється. Залежність коефіцієнта перезволоження ( $SW_i$  розраховується при виконанні умов  $W_i > W_i^{opt}$ ) від цих двох факторів записується у такому вигляді

$$SW_i = 1 - \left[ \frac{jS_i}{N_{SW}} \frac{W_i - W_i^{opt}}{W_i^{IB} - W_i^{opt}} \right]^{a_{sw2}}, \quad (12.13)$$

де  $jS_i$  – кількість днів, для яких виконується умова  $W_i > W_i^{opt}$ ;  
 $N_{SW}$  – період (кількість днів), до кінця якого повністю припиняється ріст рослин;  $SW = 0$ , якщо  $W_i = W_i^{IB}$  для всіх днів періоду;  
 $W_i^{IB}$  – повна вологомісткість  $i$ -го шару ґрунту;  
 $W_i^{opt} = a_{sw1}(W_i^{IB} - W_i^{B3}) + W_i^{B3}$ , де  $a_{sw1}$  – константа;  
 $W_i^{B3}$  – вологість стійкого в'янення ґрунтового шару.  
 Азотний режим впливає на фотосинтез і ріст через величину фотохімічного опору фотосинтезу

$$r_c = r_c^0 \exp[C_N (S_N - 1)^2], \quad (12.14)$$

де  $r_c^0$  – мінімальний фотохімічний опір;  
 $C_N$  – параметр, що має різні значення при нестачі і надлишку азоту в рослинах;  
 $S_N$  – показник забезпеченості рослин азотом.

При моделюванні процесу розпаду  $q_p$ , пов'язаного зі старінням тканин, враховувалося таке:

- 1) за інших рівних умов величина  $q_p$  повинна зростати в міру старіння органа;
- 2) старіння прискорюється при несприятливих умовах зволоження і з підвищенням температури;
- 3) величина  $q_p$ , так само як і дихання підтримки, пропорційна вже

сформованій масі органа.

Тоді

$$q_p = m_p \varphi_Q (1 - a_p) [Q_1^p (1 - \psi_Q) + Q_2], \quad (12.15)$$

де  $Q_1$  і  $Q_2$  – коефіцієнти розпаду.

$a_p$  – відносна функція росту, яка дорівнює

$$a_p = \begin{cases} 1 & \text{– до настання максимуму } \alpha_p (\alpha_p^{\max}) \\ \alpha_p / \alpha_p^{\max} & \text{– після настання максимуму } \alpha_p \end{cases}$$

У формулі (12.15) використовуються ті ж самі температурна функція  $\varphi_Q$  і функція вологості ґрунту  $\psi_Q$ , що і при розрахунку дихання підтримки, тому що природа цих двох процесів близька. Дихання підтримки описує в основному втрати, пов'язані з витратами енергії при відновленні високомолекулярних сполук, які розпалися. Ці витрати тим більші, чим більше речовин розпалося.

Температурна функція і функція вологості ґрунту розпаду (дихання підтримки) представлені в моделі такими формулами:

$$\varphi_Q = 2^{0,1(T-T_R)}, \quad (12.16)$$

$$\psi_Q = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \bar{\psi}_S < b_2, \\ \exp[-b_1(\psi_S - b_2)]^{b_3} & \text{якщо } \bar{\psi}_S \geq b_2, \end{cases} \quad (12.17)$$

де  $T_R$  – кардинальна температура дихання, °C;

$b_1, b_2, b_3$  – емпіричні коефіцієнти.

Аналіз системи рівнянь для розрахунку добового приросту фітомаси (12.5) для всіх органів рослини показує, що накопичення маси будь-якого органа до настання максимуму відбувається в тому випадку, якщо  $G_p > D_p$ ; після настання максимуму  $\alpha_p$  – якщо  $G_p > (D_p + q_p)$  (без врахування опадів, він буде описаний пізніше). До моменту досягнення максимуму може спостерігатися гальмування росту або навіть зменшення маси за рахунок інтенсифікації процесу дихання в результаті високих температур і погіршення режиму зволоження. У другу половину вегетації картина трохи складніша. З одного боку, при несприятливих термічних умовах і напруженому режимі зволоження посилюється дихання і розпад тканин вегетативних органів. Але, з іншого боку, більш інтенсивний розпад

тканин вегетативних органів забезпечує наприкінці вегетації збільшення фонду вуглеводнів  $mc$ , а значить і відносно більш швидкий ріст зерна. Така досить складна залежність  $\Delta m_p / \Delta t$  від стану навколишнього середовища робить цю модель більш гнучкою.

### 12.3. Моделювання динаміки площі листа

Для розрахунку добового приросту зеленої площі органів рослини використовується співвідношення

$$\frac{\Delta(LG_p)}{\Delta t} = S_p (G_p - D_{Rp}), \quad (12.18)$$

$$p \in l, s, k,$$

де  $S_p$  – коефіцієнт переходу від заново утвореної структурної маси до площі  $p$ -го органа;

$D_{Rp}$  – дихання росту.

Для моделювання процесів поживтіння й опадів у листках і стеблах (колосся жовтіють після настання воскової стиглості і не опадають) приймається, що кожна з цих ємностей (листя, стебла) складається з окремих елементів, кількість яких на одиницю площі перевищує кількість днів від сходів. Перший елемент ємності описує стан органа до початку розрахункового періоду, тобто до моменту сходів, другий елемент – частку фітомаси органа, що утворилася в першу добу, третій елемент – у другу добу і т.д. Для кожного «добового» елемента фітомаси визначаються чотири характеристики: максимальна маса (маса елемента в момент його утворення), поточна маса, а також зелена й жовта площа. Причому, кожен елемент в момент утворення має зелену площу, відмінну від нуля. Надалі він може бути або зеленим, або жовтим.

Максимальна площа першого елемента дорівнює масі органа на момент сходів ( $em_p^1 = m_p^0$ ). Зелена площа його на дату сходів дорівнює початковій площі відповідного органа ( $eLG_p^1 = LG_p^0$ ), а жовта площа за умовою дорівнює нулю ( $eLY_p^1 = 0$ ).

На кожну  $j$ -у добу утвориться новий  $(j+1)$ -й елемент листка (стебла) масою

$$em_p^{j+1} = G_p^j - DR_p^j \quad (12.19)$$

і площею

$$eLG_p^{j+1} = S_p em_p^{j+1}, \quad (12.20)$$

де  $em_p^{j+1}$  – маса  $(j+1)$ -го елемента в момент утворення (максимальна маса);  
 $DR_p^j$  – дихання росту  $p$ -го органа на  $j$ -у добу.

Далі переглядаються усі створені раніше елементи фітомаси і визначаються значення їхньої поточної маси відповідно до витрат на дихання підтримки і розпад

$$(em_p^i)^j = (em_p^i)^{j-1} - \left[ (em_p^i)^{j-1} \left/ \sum_{k=1}^{j+1} (em_p^k)^{j-1} \right. \right] (DO_p^j + q_p^j), \quad (12.21)$$

де  $(em_p^i)^j$  – поточна маса  $i$ -го елемента ( $i = \overline{1, j+1}$ )  $p$ -ої ємності на  $j$ -у кроці за часом;

$DO_p^j$  – дихання підтримки.

Таким чином, на кожному кроці за часом поточна фітомаса будь-якого добового елемента ємності зменшується відповідно до поточних умов навколишнього середовища.

Коли відношення поточної фітомаси до максимальної  $em_p^i$  стає менше деякої заданої величини  $\gamma_p$ , добовий елемент «жовтіє», тобто якщо

$$\frac{(em_p^i)^j}{em_p^i} \leq \gamma_p, \quad \text{то} \quad (eLY_p^i) = S_p em_p^i \quad \text{і} \quad (eLG_p^i)^j = 0. \quad (12.22)$$

Елемент фітомаси визнається опалим, якщо це відношення опускається нижче заданого критичного значення  $\xi_p$ . Сума маси "опалих" елементів дає значення  $P_p$  у формулі (12.5).

Маса і площа  $p$ -го органа ( $p \in l, s$ ) на  $j$ -у кроці визначається підсумовуванням поточних мас і площ всіх елементів відповідної ємності

$$\left. \begin{aligned} m_p^i &= \sum_{i=1}^{j+1} em_p^i, \\ LG_p^i &= \sum_{i=1}^{j+1} eLG_p^i, \\ LY_p^i &= \sum_{i=1}^{j+1} eLY_p^i. \end{aligned} \right\} \quad (12.23)$$

Величина фотосинтезуючої площі посіву складається із зеленої площі листя, стебел і колосся

$$LG^j = LG_l^j + \rho_s LG_s^j + \begin{cases} 0, & \text{якщо } w_{BK}^j < w_R, \\ \rho_R LG_R^j, & \text{якщо } w_{BK}^j \geq w_R, \end{cases} \quad (12.24)$$

де  $\rho_s$  і  $\rho_R$  – коефіцієнти ( $\rho_s \leq 1$  і  $\rho_R \leq 1$ ), які дорівнюють відношенню фотосинтезу одиниці площі стебла і колосу відповідно до фотосинтезу одиниці листової поверхні.

Ефективна площа поверхні рослин знаходиться на основі наступного співвідношення, що враховує відмінність в геометрії органів рослини

$$L^j = (LG_l^j + LY_l^j) + \frac{1}{\pi} (LG_s^j + LY_s^j) + \begin{cases} 0, & \text{якщо } w_{BK}^j < w_R, \\ \frac{1}{2} (LG_R^j + LY_R^j), & \text{якщо } w_{BK}^j \geq w_R. \end{cases} \quad (12.25)$$

Перевага такого опису виникнення й росту площі очевидна. Розроблений алгоритм використовує для розрахунку наростання площі фітомаси, її пожовтіння й опаді, одержану в процесі чисельного інтегрування системи рівнянь (12.5) усю передісторію формування функцій  $mp$ . По мірі старіння органів темп пожовтіння й опаді збільшуються у зв'язку зі зростанням швидкості розпаду (12.15).

### Ростові функції

Кожна рослина протягом життєвого циклу, як відомо, проходить ряд якісно різних етапів розвитку, зовнішнім відображенням якого служить послідовна поява вегетативних, а потім і генеративних органів. У зв'язку з цим опис процесу розвитку – це, власне кажучи, моделювання виникнення й росту кожного органа, що здійснюється в моделі за допомогою апарату ростових функцій. Ростові функції ярої пшениці наведені на рис. 12.4 і описані простими співвідношеннями.

Аргументом ростових функцій служить біологічний час, розрахунок якого проводиться для двох періодів: від сходів до колосіння ( $w = w_{BK}$ ) і від колосіння до кінця вегетаційного періоду ( $w = w_{BK}$ ) за таким алгоритмом:

$$w_V^j = \begin{cases} w_V^{j-1}, & \text{якщо } T^j \leq T_0^V, \\ w_V^{j-1} + (T^j - T_0^V) \exp[C_1^V (C_2^V - \bar{\psi}_s^j)^{C_3^V}], & \text{якщо } T^j > T_0^V \text{ і } \bar{\psi}_s^j < C_2^V, \\ w_V^{j-1} + (T^j - T_0^V), & \text{якщо } T^j > T_0^V \text{ або } \bar{\psi}_s^j \geq C_2^V, \end{cases} \quad (12.26)$$



де  $w_V^j$  – сума ефективних температур (біологічний час);  
 $T^j$  – середня добова температура повітря;  
 $T_0^V$  – біологічний нуль культури;  
 $C_1^V, C_2^V, C_3^V$  – константи.

Введення залежності біологічного часу від вологості дозволило, по-перше, збільшити точність розрахунку дат настання основних фаз розвитку, і, по-друге, правильно розраховувати зміну тривалості міжфазних періодів при поливі. Формування вегетативної маси і урожаю зерна  $m_z$  за формулами (12.1) – (12.26) визначається динамікою стану атмосферного і ґрунтового середовищ мешкання рослин.

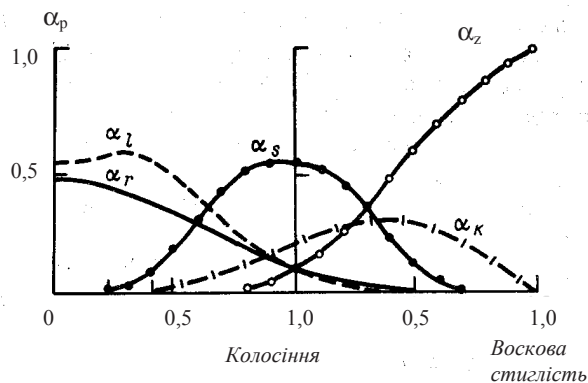


Рис. 12.4. Ростові функції  $\alpha_p$  ярої пшениці

З метою спрощення розрахункової схеми в моделі приймається, що вміст  $\text{CO}_2$  протягом вегетаційного періоду не змінюється, а температура тканин рослин дорівнює температурі повітря, щоденні значення якої вводяться на основі даних метеорологічних станцій. Інтенсивність фотосинтетично-активної радіації розраховується для кожної доби на основі інформації про кількість годин сонячного сяйва.

#### 12.4. Моделювання водного режиму

Вологість ґрунту  $W_i$  і потенціал ґрунтової вологи  $\bar{\psi}_s$  визначаються у водному блоці моделі в результаті розрахунку системи рівнянь вигляду

$$\frac{dW_i}{dt} = R_{ef} + K_{i-1} - K_i - TR_i - \sigma_i E, \quad (12.27)$$

де  $t$  – час;

$W_i$  – вологозапаси  $i$ -го шару ґрунту ( $i=1,15$ );

$K_{i-1}$  і  $K_i$  – потоки води через верхню і нижню межі  $i$ -го шару,  $K_0=R_{ef}$ ;

$TR_i = f(d, \bar{\psi}_s, LG, \mu)$  – витрати води на транспірацію з  $i$ -го шару ґрунту;

$d$  – дефіцит насичення повітря;

$E$  – випаровування з поверхні ґрунту;

$R_{ef}$  – ефективні опади;

$\sigma_i$  – логічна перемінна, яка дорівнює 1 при  $i=1$  і нулю для всіх інших шарів ґрунту.

Передбачається, що початкові вологозапаси ґрунту ( $W_i$  при  $t=0$ ) задані, і, крім того, у нижньому п'ятнадцятому шарі ґрунту протягом усього розрахункового періоду підтримується постійна вологість, яка дорівнює

$$W_{15} = W_{15}^{B3} + \kappa(W_{15}^{PB} - W_{15}^{B3}), \quad (12.28)$$

де  $\kappa$  – константа, що змінюється по території.

Для інтегрування рівняння (12.28) використовується метод дрібних кроків з часовим кроком, який дорівнює 6 годинам. Вхідні дані для водного блоку вводяться для кожної доби розрахункового періоду – дефіцит насичення повітря й опади.

#### 12.5. Моделювання азотного живлення рослин

Для визначення забезпеченості рослин азотом використовується субмодель азотного живлення. Застосування субмоделей, які досить докладно описують перетворення азотних сполук у ґрунті, обмежується відсутністю необхідних початкових даних. У зв'язку з цим для моделі «погода – урожай 3» розроблено спрощений азотний блок, який використовує для розрахунку початкових даних процентний вміст гумусу у ґрунті й умови навколишнього середовища за осінньо-весняний період.

Вміст доступного рослинам мінерального ґрунтового азоту  $N_k$  для трьох ґрунтових шарів 0–20, 20–50 і 50–100 см визначається шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\frac{dN_k}{dt} = H_k + \delta_k U_N - h_k + V_{k-1} - V_k - A_k, \quad (12.29)$$

де  $H_k$  – мінералізація легкогідролізуемого органічного азоту  $k$ -го шару ґрунту;

$U_N$  – кількість мінеральних добрив з урахуванням їх іммобілізації;

$\delta_k$  – логічна перемінна, яка має значення  $\delta_k = 1$  для першого шару ґрунту в день внесення добрив і  $\delta_k = 0$  у всіх інших випадках;

$V_{j-1}$  і  $V_k$  – потоки мінерального азоту з водою через верхню і нижню межі  $k$ -го шару ґрунту: для  $k = 1$  величина  $V_{k-1} = 0$ ;

$h_k$  – денітрифікація;

$A_k$  – поглинання азоту рослинами з  $k$ -го шару ґрунту.

Основне поповнення запасів доступного мінерального азоту у ґрунті відбувається за рахунок мінералізації (різниця мінералізації й іммобілізації) легкогідролізуемого органічного азоту  $N_G$ , що міститься у ґрунті. При записі виразу для швидкості мінералізації приймається, що вона залежить від наявності субстрату  $N_G$ , здатності ґрунту перетворювати субстрат – легкогідролізуемий органічний азот у мінеральний  $C_n$ , а також температури і вологості ґрунту

$$H_k = C_{Hk} N_{Gk} \varphi_{Hk} \psi_{Hk}, \quad (12.30)$$

де  $\psi_{Hk}$  – коефіцієнт вологості для мінералізації;

$\varphi_H$  – температурний коефіцієнт мінералізації, який дорівнює

$$\varphi_H = \exp[-a_\varphi (T_{pk} - T_p^{opt})^2], \quad (12.31)$$

де  $a_\varphi$  – параметр;

$T_{pk}$  – середня температура  $k$ -го шару ґрунту, яка розраховується на підставі отриманих напівемпіричних співвідношень, що зв'язують різницю температури ґрунту і середнє багаторічне її значення з площею фітомаси і відхиленнями температури повітря і кількості годин сонячного сяйва від відповідних середніх багаторічних величин;

$T_p^{opt}$  – оптимальна для мінералізації температура ґрунту.

Аналогічно (12.30) записується рівняння для розрахунку швидкості денітрифікації

$$h_k = C_{hk} N_k \varphi_{hk} \psi_{hk}, \quad (12.32)$$

де  $C_{hk} N_k$  – можлива швидкість денітрифікації;

$C_h$  – коефіцієнт, що залежить від властивостей ґрунту;

$\varphi_{hk}$  – температурний коефіцієнт;

$\psi_{hk}$  – коефіцієнт вологості.

Якщо прийняти, що доступний рослинам мінеральний азот цілком розчиняється у воді, можна записати

$$V_k = \frac{N_k}{W_k} K_k, \quad (12.33)$$

де  $N_k/W_k$  – концентрація мінерального азоту у ґрунтовому розчині;

$K_k$  – потік води через границі шарів ґрунту.

Для опису потоку азоту у рослину  $A_k$  приймається, що пасивний транспорт, в результаті якого поглинається основна маса мінерального азоту, здійснюється у вигляді водорозчинних форм і тільки з транспіраційним потоком розчину через рослину

$$A_{nk} = TR_k \frac{N_k}{W_k}. \quad (12.34)$$

Активний транспорт можна розглядати як збільшення або зменшення кількості азоту, що надійшов в результаті пасивного транспорту. Тоді

$$A_k = TR_k \frac{N_k}{W_k} (C_R - 1) + A_{nk}, \quad (12.35)$$

де  $C_R = 2 - (S_N^j)^c$  – коефіцієнт для врахування внеску активного транспорту в процес поглинання азоту рослинами;

$c$  – параметр, який приймає одне з двох можливих значень в залежності від характеру поточного азотного режиму (нестача азоту при  $S_N \leq 1$  або його надлишок при  $S_N > 1$ ).

Кількість азоту у рослинах на будь-яку  $j$ -у добу визначається підсумовуванням величин

$$A^j = \sum_{i=1}^j \sum_{k=1}^3 A_k^j. \quad (12.36)$$

Якщо прийняти, що оптимальна частка азоту у сухій речовині рослин на  $j$ -у кроці дорівнює  $D_{opt}^j$ , а фактична частка азоту складає

$$D^j = A^j / M^j, \quad (12.37)$$

де  $M^j = \sum_{p=1}^5 m_p^j$ , то величина  $S_N^j = D^j / D_{opt}^j$  показує, чи зазнають рослини

нестачу ( $S_N^j < 1$ ) або надлишок ( $S_N^j > 1$ ) азоту. При оптимальному вмісті азоту в рослинах  $S_N^j = 1$ .

Модель «погода – урожай 3» ідентифікована за матеріалами спеціального комплексного експерименту і призначена для використання в автоматизованій системі агрометеорологічного забезпечення сільського господарства.

### 13. МОДЕЛЬ ВПЛИВУ АГРОМЕТЕОРОЛОГІЧНИХ УМОВ НА РІСТ, РОЗВИТОК ТА ФОРМУВАННЯ УРОЖАЮ ОЗИМОЇ ПШЕНИЦІ В. С. АНТОНЕНКО

#### 13.1. Теоретичне обґрунтування моделі

Життєвий цикл культури озимої пшениці поділяється на кілька важливих етапів, які значно відрізняються один від одного проходженням біологічних процесів і типом обміну речовин у рослині, а також впливом агрометеорологічних умов на ці процеси. Виділяються етапи: проростання насіння і формування сходів, осінньої вегетації і загартування рослин, перезимівлі, весняно-літньої вегетації.

При розробці теоретичної основи концепції моделі використовуються загально біологічні уявлення й експериментальні дані про ріст, розвиток і формування продуктивності озимої пшениці, перезимівлю рослин та вплив агрометеорологічних умов на ці процеси. Основні положення цієї концепції полягають у наступному:

– процеси росту і розвитку моделюються з врахуванням біологічних особливостей рослин і в залежності від впливу агрометеорологічних умов та розглядаються процеси формування надземних і підземних органів рослин;

– як елементарна одиниця росту розглядається формування пагона (головного і бокових) та їх первинної і вторинної кореневої системи;

– моделювання розподілу асимілятів засновано на синтезі концепції функціональної рівноваги між надземною і підземною частинами рослин та принципом пріоритетності в розподілі продуктів фотосинтезу і розпаду між окремими пагонами;

– вплив волого-температурного режиму на інтенсивність фотосинтезу розглядається за принципом Ю. Лібіха з врахуванням корекції на співвідношення екстремальних температур і екстремальних умов зволоження;

– в основі закономірності формування пагонів лежить погодженість і скоординованість росту вегетативних органів з репродуктивними – тривалість росту одних органів завжди визначається тривалістю формування та ростом інших органів.

Виділено чотири періоди в життєдіяльності озимої пшениці:

1) період проростання насіння як процес переходу насіння під впливом агрометеорологічних умов із стану покою до активної життєдіяльності – ріст колеоптиля та зародкових коренів і формування

сходів;

2) період осінньої вегетації, процеси кушіння і формування зимостійкості – перебудова процесів обміну і проходження двох фаз загартування;

3) період перезимівлі рослин, коли відбувається гідроліз дисахаридів у моносахари та їх витрати на дихання, формується критична температура вимерзання і визначається кількість стебел, які перезимували;

4) період весняно-літньої вегетації, коли подовжується процес кушіння, продовжується вегетативний і репродуктивний розвиток пагонів озимої пшениці, відбувається стеблевідбір та формування продуктивного стеблестоя, маси урожаю.

Блок-схема динамічної моделі впливу агрометеорологічних умов на ріст, розвиток і формування урожаю озимої пшениці наведена на рис.13.1.

#### 13.2. Проростання насіння і формування сходів

Початок відновлення ростової діяльності у зародку зернівки починається при її набувнянні. Набувняння зернівки може початися вже при вологості ґрунту, яка дорівнює її подвоєній гігроскопічності.

Поглинання води насінням визначається різницею водних потенціалів насіння і ґрунту на глибині загортання насіння. Надходження води в насіння описується таким рівнянням

$$\frac{dW_{sd}}{dt} = S_{sd} P_{sd} \left[ \exp\left(-\frac{E_{sd}}{R_{const} T_{sl}}\right) \right] (\Theta_{sl} - \Theta_{sd}), \quad (13.1)$$

де  $\frac{dW_{sd}}{dt}$  – потік води, що надходить у насіння;

$S_{sd}$  – поглинаюча поверхня насіння;

$P_{sd}$  – проникність оболонки насіння;

$E_{sd}$  – енергія активації дифузії;

$R_{const}$  – газова постійна;

$T_{sl}$  – температура ґрунту на глибині загортання насіння;

$\Theta_{sl}$  – водний потенціал ґрунту;

$\Theta_{sd}$  – водний потенціал насіння.

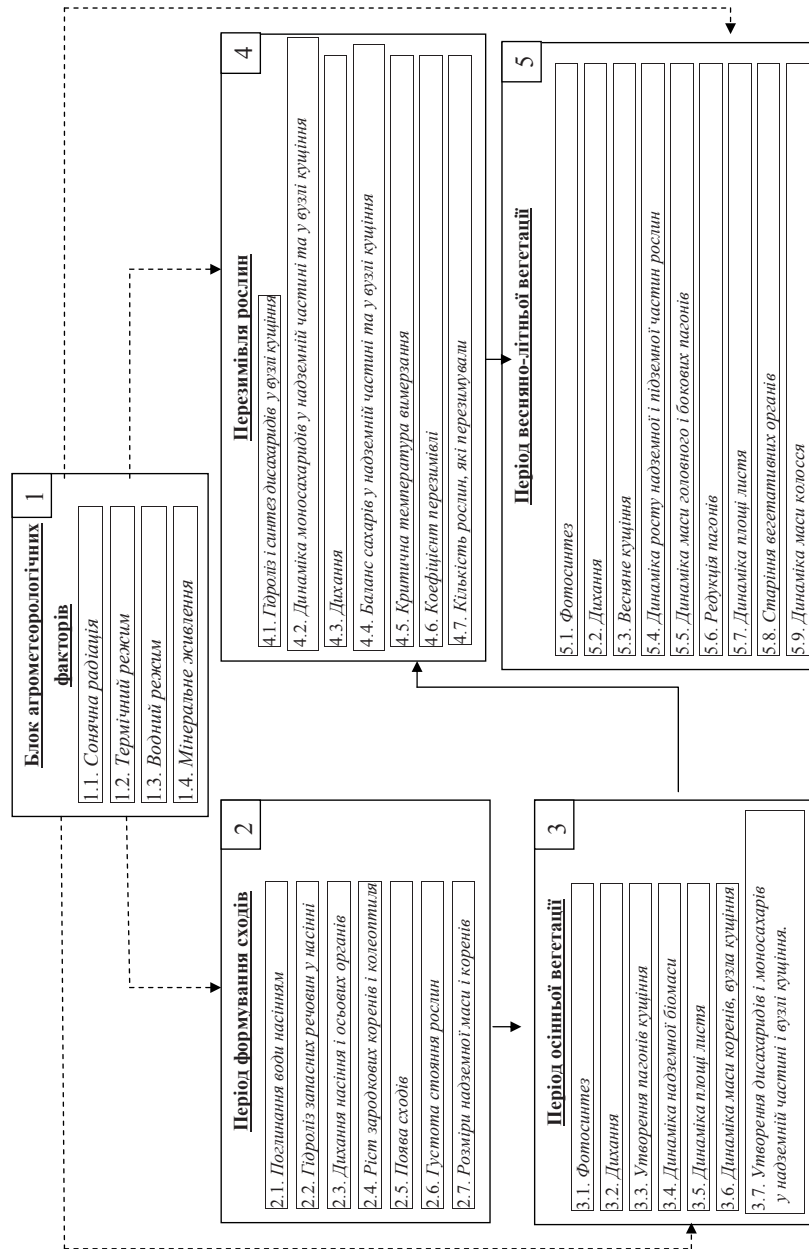


Рис.13.1. Блок-схема динамічної моделі впливу агрометеорологічних умов на ріст, розвиток і формування урожаю озимої пшениці.

З набубнявінням насіння зростає інтенсивність їхнього дихання і при досягненні деякого критичного рівня оводненості насіння на фоні певного рівня температури ґрунту на глибині загортання насіння активізується діяльність ферментів, які перетворюють крохмаль і запасні білки ендосперми насіння у форми доступні для живлення. Їхня кількість визначається інтенсивністю процесів гідролізу запасних речовин насіння, яка описується рівнянням

$$\frac{dm_{sd}^{hydr}}{dt} = K_{sd}^{hydr} m_{sd} k_{sd}(T_{sl}), \quad (13.2)$$

де  $\frac{dm_{sd}^{hydr}}{dt}$  – швидкість гідролізу запасних речовин насіння;

$K_{sd}^{hydr}$  – коефіцієнт швидкості гідролізу;

$m_{sd}$  – маса насіння;

$k_{sd}(T_{sl})$  – функція впливу температури ґрунту на глибині загортання насіння на швидкість гідролізу запасних речовин насіння.

Поживні речовини, які утворюються в процесі гідролізу, витрачаються на дихання насіння та ріст осевих органів (паростка)

$$\frac{dR_{sd}}{dt} = c_m m_{sd} Q_R(T_{sl}), \quad (13.3)$$

де  $\frac{dR_{sd}}{dt}$  – витрати на дихання насіння;

$c_m$  – коефіцієнт витрат на дихання підтримки;

$Q_R(T_{sl})$  – функція впливу температури ґрунту на глибині загортання насіння на інтенсивність дихання насіння.

Частина поживних речовин, яка залишилася від витрат на дихання, складає резерв поживних речовин для росту зародкових коренів та колеоптіля

$$\frac{dm_{sd}^{res}}{dt} = \frac{dm_{sd}^{hydr}}{dt} - \frac{dR_{sd}}{dt}, \quad (13.4)$$

де  $\frac{dm_{sd}^{res}}{dt}$  – резерв поживних речовин насіння.

Поживні речовини ендосперму переміщуються до головного корінця паростка, що викликає початок розтягання клітин у головному корінці зародка. В результаті росту головний корінь зародка, прорвавши колеоризу й оболонку насіння, заглиблюється у ґрунт і починає поглинати вологу та мінеральні речовини ґрунтового розчину. Відновлюється життєдіяльність у колеоптилі та бруньці паростка – головний пагінець рослини озимої пшениці продовжує ріст у фазі паростка. Ріст зародкових коренів і колеоптиля описується такими рівняннями:

$$\frac{dm_{col}}{dt} = \gamma_{col} \frac{dm_{sd}^{res}}{dt} - \frac{dR_{col}}{dt}, \quad (13.5)$$

$$\frac{dm_{r(з.к.)}}{dt} = (1 - \gamma_{col}) \frac{dm_{sd}^{res}}{dt} - \frac{dR_{r(з.к.)}}{dt}, \quad (13.6)$$

де  $\frac{dm_{col}}{dt}$ ,  $\frac{dm_{r(з.к.)}}{dt}$  – швидкість розподілу резервних поживних речовин насіння відповідно в колеоптилі і зародкових коренях;

$\frac{dR_{col}}{dt}$ ,  $\frac{dR_{r(з.к.)}}{dt}$  – витрати на дихання росту колеоптиля і зародкових коренів;

$\gamma_{col}$  – функція розподілу резервних поживних речовин у колеоптилі.

Колеоптиль являє собою круглий прямий конус «шильце» з постійним радіусом основи і постійною питомою щільністю рослинної маси. Тоді, швидкість подовження колеоптиля можна описати як функцію накопичення його маси з врахуванням механічного опору ґрунту, обумовленого щільністю ґрунту  $\rho_{sl}$  та його зволоженням  $W_{sl}$

$$\frac{dH_{col}}{dt} = \left( \frac{dm_{col}}{dt} \cdot \frac{1}{\rho_{col}} \right) \frac{3}{\pi r_{col}^2} k_{col}(\rho_{sl}) k_{col}(W_{sl}), \quad (13.7)$$

де  $\frac{dH_{col}}{dt}$  – швидкість росту колеоптиля у довжину;

$\rho_{col}$  – питома щільність рослинної маси колеоптиля;

$r_{col}$  – радіус основи колеоптиля;

$k_{col}(\rho_{sl})$  – функція впливу щільності ґрунту на ріст колеоптиля;

$k_{col}(W_{sl})$  – функція впливу вологості верхніх шарів ґрунту на подовження колеоптиля.

Якщо довжина колеоптиля  $H_{col}$  перевищить глибину загортання насіння  $H_{з.н.}$ , тобто спостерігається умова  $H_{col} > H_{з.н.}$ , то цей стан визначається як фаза сходів. Колеоптиль припиняє свій ріст, а через його верхівку на денну поверхню виходить перший зелений листок. Система рівнянь (13.1) – (13.7) описує стан рослин на фазу сходів (розміри маси паростка і зародкових коренів).

Поряд з розглянутим вище, формування повноти сходів визначається й іншими факторами, серед яких важливу роль грає також якість посівного матеріалу і варіювання глибини загортання насіння в залежності від мікрорельєфу ґрунту. Виходячи з цього не можна очікувати, що множення розмірів маси паростка і зародкових коренів на норму висіву, дозволить без погрішності визначити параметри рослинного покриву на одиницю площі у фазу сходів. Необхідне залучення додаткової інформації про польову схожість насіння. Рівняння, яке дозволяє визначити цю характеристику має вигляд

$$k_{sd}^{n.cx} = \frac{W_{0-20}}{a + bW_{0-20}}, \quad (13.8)$$

де  $k_{sd}^{n.cx}$  – коефіцієнт польової схожості насіння;

$W_{0-20}$  – вологість ґрунту в орному шарі;

$a$  і  $b$  – коефіцієнти, що обумовлені глибиною загортання насіння  $H_{з.н.}$ . Вони визначаються так:

$$a = 2,1 + 0,29 (H_{з.н.})^2, \quad (13.9)$$

$$b = 1,03 - 0,0127 (H_{з.н.})^2. \quad (13.10)$$

Кількість рослин на одиницю площі  $N_{посл.}$  визначається як добуток норми висіву  $N_1$  на коефіцієнт польової схожості насіння. Розміри надземної маси і коріння рослин визначаються за співвідношеннями

$$m_l = k_{sd}^{n.cx} N_1 m_{col}, \quad (13.11)$$

$$m_r = k_{sd}^{n.cx} N_1 m_{r(з.к.)}, \quad (13.12)$$

де  $m_l$  – маса листя.

### 13.3. Період осінньої вегетації і формування зимостійкості

Після появи сходів (розгортання над поверхнею ґрунту першого листка, який виріс з першого зародкового листка) завершується перехід молодого паростка на самостійне кореневе і позакореневе живлення.

Для розрахунку інтенсивності фотосинтезу листя була використана формула, що запропонована Дж. Торнлі. В цю формулу додатково вводяться функції, які відображають вплив на інтенсивність фотосинтезу забезпеченість рослин азотом, а також враховують вплив волого-температурного режиму на швидкість процесу фотосинтезу

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\tau_c C_a k_N}{k_{PII}} \left\{ I_n \left[ \frac{k_{PII} I_0 \alpha + \tau_c C_a k_N (1 - k_L)}{k_{PII} I_0 \alpha \exp(-k_L L) + \tau_c C_a k_N (1 - k_L)} \right] \right\} k_{WT}, \quad (13.13)$$

де  $\frac{d\Phi}{dt}$  – інтенсивність фотосинтезу листя;

$\tau_c$  – коефіцієнт потенційної провідності CO<sub>2</sub>;

$C_a$  – концентрація CO<sub>2</sub> в атмосфері;

$k$  – коефіцієнт забезпеченості рослин азотом;

$k_{PII}$  – коефіцієнт ослаблення радіації рослинним покривом;

$I_0$  – інтенсивність фотосинтетично-активної радіації (ФАР) над посівом;

$\alpha$  – нахил світлової кривої фотосинтезу;

$k$  – коефіцієнт пропускання ФАР листям рослинного покриву;

$L$  – відносна площа листової поверхні посіву;

$k_{WT}$  – узагальнена функція впливу вологозабезпеченості посівів і температури повітря на фотосинтез.

Узагальнена функція  $k_{WT}$  визначається як деяка комбінація функцій впливу вологозабезпеченості посівів  $k_{\Phi}(W_{sl})$  і впливу температурного режиму повітря на фотосинтез  $k_{\Phi}(T_a)$ , за принципом Ю. Лібіха

$$k_{WT} = \min \{ k_{\Phi}(W_{sl}), k_{\Phi}(T_a) \}. \quad (13.14)$$

При цьому до визначеного за таким принципом коефіцієнта лімітування вводиться, згідно з роботами Сеппа і Тоомінга, поправка з деякою корекцією. Її сутність полягає в тому, що при одночасному впливі високої температури та посухи або низької температури та надлишку вологи вплив лімітуючих факторів на продуктивність рослин підсилюється, а при високій температурі та надлишку вологи або низькій

температурі та посухи – послаблюється.

З врахуванням поєднання таких волого-температурних умов буде визначатися лімітуючий фактор фотосинтетичної продуктивності:

$$\left. \begin{aligned} k_{WT} &= \{ [1 - [1 - k_{\Phi}(T_a)] \cdot [1 - k_{\Phi}(W_{sl})]] \}, \\ \text{при } T_a < T_a^{opt} \text{ і } W_{sl} > W_{sl2}^{opt} \text{ або } T_a > T_a^{opt} \text{ і } W_{sl} < W_{sl1}^{opt}, \\ k_{WT} &= \{ [1 + [1 - k_{\Phi}(T_a)] \cdot [1 - k_{\Phi}(W_{sl})]] \}, \\ \text{при } T_a < T_a^{opt} \text{ і } W_{sl} < W_{sl1}^{opt} \text{ або } T_a > T_a^{opt} \text{ і } W_{sl} > W_{sl2}^{opt}, \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

де  $T_a^{opt}$  – оптимальна для фотосинтезу температура повітря;

$W_{sl1}^{opt}$ ,  $W_{sl2}^{opt}$  – оптимальні межі вологості ґрунту.

Слідом за появою першого зеленого листка з'являються другий і третій зародкові листки, при достатньому зволоженні продовжується ріст першої і другої пари зародкових коренів, з'являються колеоптильні корені – йде формування первинної кореневої системи. Разом з ростом другого і третього листка відбувається швидкий ріст третього міжвузля в довжину, який припиняється у верхньому дуже тонкому підповерхневому шарі ґрунту, куди вже починає проникати сонячна радіація. Третій зародковий вузол починає різко збільшуватися в об'ємі й утворює підземний вузол кущіння.

Спочатку вузол кущіння утвориться на материнському (головному) пагоні, потім розвиваються бокові пагони 1-го порядку, і вузол кущіння головного пагона поповнюється за рахунок вузлів кущіння всіх його бокових пагонів 1-го порядку. Потім в результаті кущіння бокових пагонів 1-го порядку з'являються бокові пагони 2-го порядку зі своїми вузлами кущіння і т.д. З настанням фази кущіння розвиваються вторинні або вузлові корені, які ростуть з вузлів кущіння спочатку головного, а потім і бокових пагонів. Тривалість періоду сходи – утворення вузла кущіння визначається температурним режимом та зволоженням ґрунту. Мінімальні величини запасів продуктивної вологи у 0–20 см шарі ґрунту, при яких кущіння практично відсутнє, складають близько 5–7 мм.

Оптимальні умови складаються при запасах вологи більше 40 мм. Результати досліджень впливу температури і умов зволоження на тривалість розглянутого періоду дозволяють об'єднати опис впливу цих факторів на тривалість періоду сходи – утворення вузла кущіння

$$n_{cx.-в.к.} = \left[ \left( \frac{176}{T_{cx.} - T_{cx.-в.к.}^{\min}} - 7,4 \right) \left( \frac{93,4}{W_{0-20}^{0,64}} \right) \right] n_{cx.-в.к.}^{\min}, \quad (13.16)$$

де  $n_{cx.-в.к.}$  – тривалість періоду сходи – утворення вузла кущіння;

$T_{cx.-в.к.}^{\min}$  – мінімальна температура, при якій починається закладка вузла кущіння;

$n_{cx.-в.к.}^{\min}$  – мінімальна тривалість періоду сходи – утворення вузла кущіння при оптимальній вологості ґрунту.

З цього моменту відбувається утворення бокових пагонів 1-го порядку, потім 2-го і наступних порядків.

Водний і повітряний режим ґрунту, рівень мінерального живлення значно обмежують швидкість кущіння. Для появи кожного чергового бокового пагона потрібна цілком визначена сума ефективних температур і сумарної сонячної радіації. Формування бокових пагонів кущіння 1-го, 2-го і наступних порядків повинне бути забезпечено резервом поживних речовин, які залишаються з верх кількості, необхідної для розвитку головного пагона та бокових пагонів перших порядків.

Рівняння швидкості формування бокових пагонів кущіння має вигляд

$$\frac{dN_{\delta.n.}}{dt} = \begin{cases} \frac{2,3b_{\delta.n.}(10^{a_{\delta.n.}-b_{\delta.n.}T})N_{\delta.n.}^{\max} \min\{k_{\delta.n.}(Q), k_{\delta.n.}(\sum T_{ef})\}}{(1+10^{a_{\delta.n.}-b_{\delta.n.}T})^2} n_{pu} W_{0-20} > W_{0-20}^{crit} \\ 0 & n_{pu} W_{0-20} \leq W_{0-20}^{crit} \end{cases} \quad (13.17)$$

де  $\frac{dN_{\delta.n.}}{dt}$  – швидкість формування бокових пагонів кущіння;

$N_{\delta.n.}^{\max}$  – максимально можлива в даних умовах кількість пагонів кущіння, забезпечена поживними речовинами;

$k_{NPK}$  – коефіцієнт забезпеченості елементами мінерального живлення;

$k_{\delta.n.}(Q)$  і  $k_{\delta.n.}(\sum T_{ef})$  – функції забезпеченості необхідної кількості сонячної радіації і тепла;

$W_{0-20}^{crit}$  – критичний вміст води в орному шарі ґрунту, коли кущіння не відбувається;

$a_{\delta.n.}$  і  $b_{\delta.n.}$  – параметри.

Величина максимально можливої в даних умовах кількості пагонів, яка буде забезпечена асимілятами, визначається як співвідношення

резерву поживних речовин до максимально можливого в даних умовах приросту біомаси бокових пагонів

$$N_{\delta.n.}^{\max} = \frac{dm_{\delta.n.}^{res}}{dt} / G_{\delta.n.}^{\max}, \quad (13.18)$$

де  $\frac{dm_{\delta.n.}^{res}}{dt}$  – резерв асимілятів, який залишається після забезпечення потреб

росту головного пагона;

$G_{\delta.n.}^{\max}$  – максимально можливий в даних умовах приріст біомаси бокових пагонів.

Резерв асимілятів визначається як різниця між кількістю асимілятів, спрямованих у надземну частину рослини, і кількістю асимілятів, які надійшли у головний пагін

$$\frac{dm_{\delta.n.}^{res}}{dt} = \frac{dm_{shoot}}{dt} - \frac{dm_{\delta.n.}}{dt}, \quad (13.19)$$

де  $\frac{dm_{shoot}}{dt}$  і  $\frac{dm_{\delta.n.}}{dt}$  – приріст біомаси відповідно надземної частини рослини і головного пагона;

Максимально можливий в даних умовах приріст біомаси бокових пагонів  $G_{\delta.n.}^{\max}$  визначається як

$$G_{\delta.n.}^{\max} = (m_{\delta.n.} G_{\delta.n.}^{pot}) \min\{k_{\delta.n.}(T_a), k_{\delta.n.}(W_{sl})\}, \quad (13.20)$$

де  $m_{\delta.n.}$  – біомаса бокових пагонів;

$G_{\delta.n.}^{pot}$  – потенційний відносний приріст біомаси бокових пагонів;

$k_{\delta.n.}(T_a)$  і  $k_{\delta.n.}(W_{sl})$  – функції впливу відповідно температури повітря і зволоження ґрунту на ріст бокових пагонів.

Для опису динаміки формування надземної і підземної частин рослини використовується концепція існування функціональної рівноваги між цими частинами рослин у вигляді блоків моделей, які одержали назву, моделі типу «shoot» і «root». Співвідношення цих частин визначається режимом зволоження ґрунту і рівнем мінерального живлення

$$\gamma_{shoot} = \gamma_{shoot}^{pot} k_{shoot}(W_{sl}) k_{shoot}(NPK), \quad (13.21)$$

де  $\gamma_{shoot}$  – ростова функція надземної частини рослин;  
 $\gamma_{shoot}^{pot}$  – потенційне значення ростової функції надземної частини рослин;  
 $k_{shoot}(W)$  і  $k_{shoot}(NPK)$  – функції впливу відповідно вологозабезпеченості посівів і забезпеченості елементами мінерального живлення на співвідношення надземної і підземної частин рослин.  
Потім за визначенням співвідношення  $\gamma_{shoot}$  описується динаміка біомаси надземної і підземної частин рослин озимої пшениці рівняннями:

$$\frac{dm_{shoot}}{dt} = \left( \Phi - \frac{dR}{dt} \right) \gamma_{shoot}; \quad (13.22)$$

$$\frac{dm_{root}}{dt} = \left( \Phi - \frac{dR}{dt} \right) (1 - \gamma_{shoot}), \quad (13.23)$$

де  $\frac{dm_{shoot}}{dt}$  і  $\frac{dm_{root}}{dt}$  – приріст маси відповідно надземної і підземної частин рослин;  
 $dR/dt$  – дихання рослин, визначається як складова двох компонентів – дихання росту і дихання підтримки структур

$$\frac{dR}{dt} = D_M [c_m M Q_R(T_\theta) + c_G \Phi], \quad (13.24)$$

де  $D_M$  – параметр старіння рослин, який відображає зміну дихальної активності рослин у життєвому циклі;  
 $c_m$  і  $c_G$  – коефіцієнти дихання відповідно підтримки і росту;  
 $M$  – маса рослин.

Приріст надземної маси розподіляється спочатку у головний пагін, потім у бокові пагони 1-го, 2-го і наступних порядків:

$$\frac{dm_{z.n.}}{dt} = \gamma_{z.n.} \frac{dm_{shoot}}{dt}; \quad (13.25)$$

$$\frac{dm_{1\delta.n.}}{dt} = \gamma_{\delta.n.} \left( \frac{dm_{shoot}}{dt} - \frac{dm_{z.n.}}{dt} \right); \quad (13.26)$$

$$\frac{dm_{q\delta.n.}}{dt} = \gamma_{q\delta.n.} \left( \frac{dm_{shoot}}{dt} - \frac{dm_{z.n.}}{dt} - \sum_i^{q-1} \frac{dm_{i\delta.n.}}{dt} \right), \quad (13.27)$$

де  $\frac{dm_{1\delta.n.}}{dt}$ ,  $\frac{dm_{i\delta.n.}}{dt}$ ,  $\frac{dm_{q\delta.n.}}{dt}$  – приріст біомаси бокових пагонів 1-го,  $i$ -го і  $q$ -го порядків;  
 $\gamma_{z.n.}$ ,  $\gamma_{\delta.n.}$ ,  $\gamma_{q\delta.n.}$  – функції розподілу асимілятів для головного та бокових пагонів.

Динаміка площі асимілюючої поверхні описується таким рівнянням

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dm_{shoot}}{dt} \frac{1}{\delta_m}, \quad (13.28)$$

де  $\delta_m$  – питома поверхнева щільність листя.

Потік поживних речовин у підземну частину рослин направляється на формування первинної і вторинної кореневої системи, а також на ріст вузла кущіння:

$$\frac{dm_{r1}}{dt} = \gamma_{r1} \frac{dm_{root}}{dt}, \quad (13.29)$$

$$\frac{dm_{r2}}{dt} = \gamma_{r2} \frac{dm_{root}}{dt}, \quad (13.30)$$

$$\frac{dm_{\theta.k.}}{dt} = \gamma_{\theta.k.} \frac{dm_{root}}{dt}, \quad (13.31)$$

де  $\frac{dm_{r1}}{dt}$  і  $\frac{dm_{r2}}{dt}$  – приріст маси відповідно первинної і вторинної кореневої системи;  
 $\frac{dm_{\theta.k.}}{dt}$  – приріст маси вузла кущіння;

$\gamma_{r1}$ ,  $\gamma_{r2}$  і  $\gamma_{\theta.k.}$  – ростові функції росту відповідно первинної і вторинної кореневої системи та вузла кущіння.

Природно, що в другій половині осені хід зниження середньодобової температури повітря, особливо, в нічні години викликає гальмування ростових процесів, в той час як у світлий час доби на фоні позитивних температур спостерігається інтенсивний процес фотосинтезу – починається підготування рослин озимої пшениці до перезимівлі. Процес загартування поділяється на дві фази: перша протікає в умовах достатнього освітлення при зниженні середньої добової температури повітря до 0...6 °С, а друга починається вже після переходу температури повітря через 0 °С в сторону негативних температур. Відомо що фотосинтез озимої пшениці йде і при температурі повітря –6...–8 °С.



Надлишок продуктів фотосинтезу, які не були використані на ростові процеси, призводить до утворення і накопичення сахарів у листках і вузлах кущіння. У озимих пшениць накопичуються переважно дисахариди (сахароза) і моносахариди (глюкоза).

Після стійкого переходу температури повітря через 6 °C моделюється зміна механізму розподілу асимілятів між органами рослин, які продовжують уповільнений ріст і створюють резервний фонд асимілятів, який перетворюється в сахара. При цьому кількість продуктів фотосинтезу порівнюється з розрахованою максимально можливою величиною приросту надземної  $G_{shoot}^{max}$  і підземної  $G_{root}^{max}$  біомас, які визначаються рівняннями, що аналогічні (13.20).

Імовірно, можна припустити дві ситуації:

$$\Phi > G_{shoot}^{max} + G_{root}^{max} \quad (13.32)$$

і

$$\Phi < G_{shoot}^{max} + G_{root}^{max} . \quad (13.33)$$

У першому випадку приріст маси надземної і підземної частини рослин визначається як :

$$\frac{dm_{shoot}}{dt} = G_{shoot}^{max} ; \quad (13.34)$$

$$\frac{dm_{root}}{dt} = G_{root}^{max} . \quad (13.35)$$

У другій ситуації, аналогічно співвідношенню (13.33), при описі динаміки приросту маси надземної і підземної частин рослин враховується відношення максимально можливої величини приросту окремої частини рослин до суми максимальних приростів обох частин:

$$\frac{dm_{shoot}}{dt} = \left( \frac{G_{shoot}^{max}}{G_{shoot}^{max} + G_{root}^{max}} \right) \Phi - \frac{dR_{shoot}}{dt} ; \quad (13.36)$$

$$\frac{dm_{root}}{dt} = \left( \frac{G_{root}^{max}}{G_{shoot}^{max} + G_{root}^{max}} \right) \Phi - \frac{dR_{root}}{dt} . \quad (13.37)$$

Приріст маси головного пагона, бокових пагонів, первинної і вторинної кореневої системи і вузла кущіння визначаються виразами

аналогічними (13.34) – (13.37).

Надлишок продуктів фотосинтезу за умови (13.32) визначається як

$$\frac{dm_{res}}{dt} = \Phi - (G_{shoot}^{max} + G_{root}^{max}) , \quad (13.38)$$

де  $\frac{dm_{res}}{dt}$  – резерв продуктів фотосинтезу, що утвориться після задоволення потреби підземної і надземної частини рослин в асимілятах, для максимально можливих умов росту, що складаються на фоні зниження середньодобових температур.

Концентрація резервних продуктів фотосинтезу у рослинах, які виникли, визначається як відношення

$$mc_{res} = \frac{m_{res}}{M} , \quad (13.39)$$

де  $mc_{res}$  – концентрація надлишку продуктів фотосинтезу у рослинах.

Процес утворення дисахаридів у надземній частині та вузлі кущіння рослин визначається за рівнянням Михаеліса-Ментен:

$$\frac{dCD_{shoot}}{dt} = \frac{dCD_{shoot}^{pot}}{dt} \cdot mc_{res} / (mc_{res} + K_{shoot}^{M-M}) \quad (13.40)$$

$$\frac{dCD_{\text{в.к.}}}{dt} = \frac{dCD_{\text{в.к.}}^{pot}}{dt} \cdot mc_{res} / (mc_{res} + K_{\text{в.к.}}^{M-M}) , \quad (13.41)$$

де  $\frac{dCD_{shoot}}{dt}$  і  $\frac{dCD_{\text{в.к.}}}{dt}$  – швидкість утворення дисахаридів відповідно у надземній частині і вузлі кущіння рослин;

$\frac{dCD_{shoot}^{pot}}{dt}$  і  $\frac{dCD_{\text{в.к.}}^{pot}}{dt}$  – потенційна швидкість утворення сахарів відповідно у надземній частині і вузлі кущіння рослин;

$K_{shoot}^{M-M}$  і  $K_{\text{в.к.}}^{M-M}$  – константи Михаеліса-Ментен для надземної частини і вузла кущіння рослин.

Аналогічно визначається швидкість накопичення моносахарів у надземній частині  $\frac{dCM_{shoot}}{dt}$  і у вузлі кущіння  $\frac{dCM_{\text{в.к.}}}{dt}$ .

В період другої фази загартування ріст надземних і підземних органів відсутній, в зв'язку з цим формула (13.38) набуває вигляду

$$\frac{dm_{res}}{dt} = \Phi . \quad (13.42)$$

Утворення дисахаридів і моносахарів за цей період моделюється рівняннями, аналогічними (13.40) – (13.41).

### 13.4. Перезимівля рослин

У зимуючих рослин озимої пшениці, які знаходяться в стані спокою, навіть при низьких температурах обмін речовин не припиняється. У цей період відбувається гідроліз складних сахарів й істотно збільшується частка моносахарів, які мають великий вплив на формування зимостійкості. Спостерігається витрата сахарів на дихання підтримки рослинних тканин, відбувається переміщення сахарів з надземної частини у вузол кущіння, при відлигах активізується процес росту, що викликає додаткову витрату запасів розчинних вуглеводів.

Потім, при поступовому зниженні температури спостерігається повторне загартування рослин. При цьому формується вже більш низький рівень морозостійкості в порівнянні з початковим рівнем. Повторні відлиги викликають нове проходження цього процесу, що призводить до поступового зниження морозостійкості на кінець зими.

Процес гідролізу дисахаридів на моносахари у вузлі кущіння описується рівнянням ферментативної кінетики з врахуванням впливу низьких негативних температур на інтенсивність процесу

$$\frac{dCD_{\text{в.к.}}^{hydr}}{dt} = K_{\text{в.к.}}^{hydr} CD_{\text{в.к.}} k_{\text{в.к.}}^{hydr}(T_{sl}), \quad (13.43)$$

де  $\frac{dCD_{\text{в.к.}}^{hydr}}{dt}$  – швидкість гідролізу дисахаридів у вузлі кущіння;

$K_{\text{в.к.}}^{hydr}$  – коефіцієнт швидкості гідролізу;

$CD_{\text{в.к.}}$  – вміст дисахаридів у вузлі кущіння;

$k_{\text{в.к.}}^{hydr}(T_{sl})$  – функція впливу температури ґрунту на глибині вузла кущіння на швидкість гідролізу дисахаридів.

Синтез дисахаридів з моносахарів у вузлі кущіння визначається за рівнянням Михаеліса-Ментен

$$\frac{dCD_{\text{в.к.}}^{syn}}{dt} = \frac{\frac{dCD_{\text{в.к.}}^{pot}}{dt} \cdot \overline{CM_{\text{в.к.}}} \cdot k_{\text{в.к.}}^{syn}(T_{sl})}{CM_{\text{в.к.}} + K_{\text{в.к.}}^{M-M}}, \quad (13.44)$$

де  $\frac{dCD_{\text{в.к.}}^{syn}}{dt}$  – інтенсивність синтезу дисахаридів з моносахарів у вузлі

кущіння;

$CM_{\text{в.к.}}$  – концентрація моносахарів у вузлі кущіння;

$\frac{dCD_{\text{в.к.}}^{pot}}{dt}$  – потенційна швидкість синтезу дисахаридів;

$k_{\text{в.к.}}^{syn}(T_{sl})$  – функція впливу температури ґрунту на глибині вузла кущіння на швидкість синтезу дисахаридів.

У надземній частині рослин інтенсивність гідролізу дисахаридів визначається більш низьким рівнем температури повітря.

Для надземної частини рослин швидкість гідролізу дисахаридів  $\frac{dCD_{shoot}^{hydr}}{dt}$  і

швидкість синтезу дисахаридів  $\frac{dCD_{shoot}^{syn}}{dt}$  визначається за формулами, аналогічними (13.43) – (13.44).

Таким чином, баланс дисахаридів у вузлі кущіння визначається як різниця двох протилежних процесів, які проходять на фоні різного ходу температур повітря, гідролізу дисахаридів і їхнього синтезу

$$\frac{dCD_{\text{в.к.}}}{dt} = \frac{dCD_{\text{в.к.}}^{syn}}{dt} - \frac{dCD_{\text{в.к.}}^{hydr}}{dt}. \quad (13.45)$$

Швидкість зміни вмісту моносахарів у вузлі кущіння визначається різницею швидкості їхнього надходження (за рахунок гідролізу дисахаридів, а також надходження з надземної частини рослин) і швидкості їх витрати на синтез дисахаридів і витрат на дихання підтримки

$$\frac{dCM_{\text{в.к.}}}{dt} = \frac{dCD_{\text{в.к.}}^{\text{hydr}}}{dt} + \gamma_{\text{в.к.}}^{CM} CM_{\text{shoot}} - \frac{dCD_{\text{в.к.}}^{\text{syn}}}{dt} - \frac{dR_{\text{в.к.}}}{dt}, \quad (13.46)$$

де  $\frac{dCM_{\text{в.к.}}}{dt}$  – швидкість зміни вмісту моносахарів у вузлі кущіння;

$CM_{\text{shoot}}$  – вміст моносахарів у надземній частині;

$\gamma_{\text{в.к.}}^{CM}$  – функція переміщення моносахарів з надземної частини у вузол кущіння;

$\frac{dR_{\text{в.к.}}}{dt}$  – витрати на дихання підтримки життєдіяльних структур вузла кущіння.

У надземній частині рослин на фоні більш низьких температур повітря протікають процеси, які описуються рівняннями, аналогічними (13.43) – (13.46), що дозволяє визначити сумарний вміст дисахаридів  $CD_{\text{shoot}}$  і моносахарів  $CM_{\text{shoot}}$ .

Таким чином, рівняння (13.43) – (13.46) описують процеси перетворення вуглеводів в залежності від умов, що складаються, тобто чергування періодів зниження температури, відлиг, наступного підвищення температури.

Баланс вмісту суми сахарів у органах озимої пшениці записується як:

$$\frac{dC_{\text{shoot}}}{dt} = \frac{dCD_{\text{shoot}}}{dt} + \frac{dCM_{\text{shoot}}}{dt}, \quad (13.47)$$

$$\frac{dC_{\text{в.к.}}}{dt} = \frac{dCD_{\text{в.к.}}}{dt} + \frac{dCM_{\text{в.к.}}}{dt}, \quad (13.48)$$

де  $\frac{dC_{\text{shoot}}}{dt}$  і  $\frac{dC_{\text{в.к.}}}{dt}$  – швидкість зміни вмісту суми сахарів відповідно у надземній частині і вузлі кущіння рослин.

Рівняння (13.47) і (13.48) дозволяють визначити динаміку вмісту суми сахарів у органах рослин в період їхньої перезимівлі. Доказано, що між вмістом суми сахарів у вузлі кущіння і критичними температурами вимерзання існує досить тісний зв'язок

$$T_{\text{в.к.}}^{\text{crit}} = -0,47C_{\text{в.к.}} - 3,0, \quad (13.49)$$

де  $T_{\text{в.к.}}^{\text{crit}}$  – критична температура вимерзання на глибині вузла кущіння рослин;

$C_{\text{в.к.}}$  – вміст суми сахарів у вузлі кущіння.

Розрахунок критичної температури вимерзання за вмістом суми сахарів у вузлі кущіння за допомогою рівняння (13.49) дозволяє використовувати цю величину при розрахунку показників морозонебезпечності.

Найбільш важливим при оцінці перезимівлі озимої пшениці є визначення кількості рослин, які перезимували. Результати досліджень показують, що існує тісний зв'язок між кількістю рослин, які перезимували і вмістом суми сахарів у вузлі кущіння за 1,5–2 тижні до відновлення вегетації, коли вміст сахарів у вузлі кущіння, як правило, буває мінімальним

$$k_{\text{зим.}} = \frac{(C_{\text{в.к.}}^{\text{min}})^2}{0,0172 + 0,87(C_{\text{в.к.}}^{\text{min}})^2}, \quad (13.50)$$

де  $k_{\text{зим.}}$  – коефіцієнт перезимівлі;

$C_{\text{в.к.}}^{\text{min}}$  – мінімальний вміст суми сахарів у вузлі кущіння рослин.

Розрахунок динаміки сахарів узимку й у ранньовесняний період дозволяє визначити кількість перезимованих рослин  $N_{\text{росл}}$  та їхні параметри на початок весняно-літньої вегетації.

### 13.5. Період весняно-літньої вегетації озимої пшениці

У ранньовесняний період завершується процес кущіння рослин і після їхнього переходу у фазу виходу в трубку починається процес стеблевідбору. Маса бокових пагонів на момент виходу в трубку досягає значних розмірів в порівнянні з головним пагоном. Продовжується вегетативний і репродуктивний розвиток головного і бокових пагонів. Частина бокових пагонів не переходить до генеративного розвитку. Обмін асимілятів йде між головним і боковими пагонами, а також між боковими пагонами; при відмиранні непродуктивних бокових пагонів продукти розпаду перетікають у головний і продуктивні бокові пагони.

Процес весняного кущіння моделюється рівняннями, аналогічними (13.17) – (13.27). З моменту настання фази вихід в трубку визначається інтенсивність фотосинтезу кожного окремого  $i$ -го пагона, для цього використовується формула (13.13), в яку вводиться параметр, який характеризує фотосинтетичну активність і старіння фотосинтетичного апарата кожного окремо взятого пагона

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{\tau_C C_a k_N D_i^l}{k_{P\Pi}} \left\{ \ln \left[ \frac{k_{P\Pi} I_0 \alpha + \tau_C C_a k_N (1 - k_L)}{k_{P\Pi} I_0 \alpha \exp(-k_L L) + \tau_C C_a k_N (1 - k_L)} \right] \right\} k_{WT}, \quad (13.51)$$

$i \in \text{з.н.}, \text{б.н.}$

де  $D_i^l$  – параметр, який характеризує часові зміни фотосинтетичної активності  $i$ -го пагона.

З цього ж моменту моделюється, що фонд (резерв) поживних речовин складається з продуктів фотосинтезу і продуктів розпаду речовин при старінні вегетативних органів (головного пагона, продуктивних і непродуктивних бокових пагонів):

$$\frac{dm_{res}}{dt} = \Phi + B_{\text{з.н.}}^{cm.} + B_{\text{нр.б.н.}}^{cm.} + B_{\text{нр.б.н.}}^{cm.} + B_r^{cm.}, \quad (13.52)$$

де  $\frac{dm_{res}}{dt}$  – фонд поживних речовин, який створюється в процесі фотосинтезу усіх пагонів і розпаду речовин при старінні вегетативних органів рослин;

$B_{\text{з.н.}}^{cm.}, B_{\text{нр.б.н.}}^{cm.}, B_{\text{нр.б.н.}}^{cm.}, B_r^{cm.}$  – відтік поживних речовин із вегетативних органів, які старіють, відповідно головного пагона, продуктивних і непродуктивних бокових пагонів, а також коренів.

Розподіл між надземною і підземною частиною рослин визначається за співвідношеннями:

$$\frac{dm_{shoot}}{dt} = \gamma_{shoot} \frac{dm_{res}}{dt}; \quad (13.53)$$

$$\frac{dm_{root}}{dt} = (1 - \gamma_{shoot}) \frac{dm_{res}}{dt}. \quad (13.54)$$

Функція  $\gamma_{shoot}$  у рівняннях (13.53) і (13.54) визначається за виразом аналогічним (13.21).

Передбачається черговість у розподілі приросту надземної маси між пагонами, спочатку воно направляє у головний пагін, потім послідовно у продуктивні пагони 1-го, 2-го і наступних порядків, а потім у непродуктивні. Пагони, які не досягли репродуктивної стадії розвитку після цвітіння, поступово відмирають.

Динаміка приросту маси головного і бокових пагонів визначається рівняннями такого типу:

$$\frac{dm_{\text{з.н.}}}{dt} = \gamma_{\text{з.н.}} \frac{dm_{shoot}}{dt} - \frac{dR_{\text{з.н.}}}{dt} - B_{\text{з.н.}}^{cm.}, \quad (13.55)$$

$$\frac{dm_{\text{нр.б.н.}}}{dt} = \gamma_{\text{нр.б.н.}} \left( \frac{dm_{shoot}}{dt} - \frac{dm_{\text{з.н.}}}{dt} \right) - \frac{dR_{\text{нр.б.н.}}}{dt} - B_{\text{нр.б.н.}}^{cm.}; \quad (13.56)$$

$$\frac{dm_{\text{нр.б.н.}}}{dt} = \gamma_{\text{нр.б.н.}} \left( \frac{dm_{shoot}}{dt} - \frac{dm_{\text{з.н.}}}{dt} - \sum_{i=1}^{q-1} \frac{dm_{\text{нр.б.н.}}}{dt} \right) - \frac{dR_{\text{нр.б.н.}}}{dt} - B_{\text{нр.б.н.}}^{cm.}. \quad (13.57)$$

$$\frac{dm_{\text{х нр.б.н.}}}{dt} = \gamma_{\text{х нр.б.н.}} \left( \frac{dm_{shoot}}{dt} - \frac{dm_{\text{з.н.}}}{dt} - \sum_{i=1}^q \frac{dm_{\text{нр.б.н.}}}{dt} - \sum_{j=1}^{x-1} \frac{dm_{\text{х нр.б.н.}}}{dt} \right) - \frac{dR_{\text{х нр.б.н.}}}{dt} - B_{\text{х нр.б.н.}}^{cm.}. \quad (13.58)$$

де  $\frac{dm_{\text{з.н.}}}{dt}, \frac{dm_{\text{нр.б.н.}}}{dt}, \frac{dm_{\text{х нр.б.н.}}}{dt}$  – приріст біомаси відповідно головного пагона, продуктивних і непродуктивних бокових пагонів;  
 $\gamma_{\text{з.н.}}, \gamma_{\text{нр.б.н.}}, \gamma_{\text{х нр.б.н.}}$  – ростові функції головного пагона, продуктивних і непродуктивних бокових пагонів.

Моделювання ростових функцій окремих пагонів (головного, бокових продуктивних і непродуктивних) засновано на принципі визначення максимально можливого приросту біомаси пагонів і дотримання пріоритетності в розподілі приросту надземної маси.

Для кожного окремо взятого пагона визначається максимально можливий у даних умовах приріст біомаси:

$$G_{\text{наг.}}^{\max} = m_{\text{наг.}} G_{\text{наг.}}^{\text{pot}} \min \{ k_{\text{наг.}}(T_a), k_{\text{наг.}}(W_{sl}), k_{\text{НПК}} \}, \quad (13.59)$$

де  $G_{\text{наг.}}^{\max}$  – максимально можливий приріст біомаси пагона;

$m_{\text{наг.}}$  – маса пагона;

$G_{\text{наг.}}^{\text{pot}}$  – потенційна відносна швидкість росту пагона;

$k_{\text{наг.}}(T_a)$ , і  $k_{\text{наг.}}(W_{sl})$  – функції впливу відповідно температури повітря і вологозабезпеченості на швидкість росту пагона.

Виходячи із співвідношення максимально можливих швидкостей

росту пагонів спочатку проводиться розрахунок функції росту головного пагона

$$\gamma_{z.n.} = \frac{G_{z.n.}^{\max}}{G_{z.n.}^{\max} + G_{1np.\delta.n.}^{\max}}. \quad (13.60)$$

При розрахунку за формулою (13.55) дотримується умова

$$\frac{dm_{z.n.}}{dt} > G_{z.n.}^{\max}, \quad \text{mo} \quad \frac{dm_{z.n.}}{dt} = G_{z.n.}^{\max}. \quad (13.61)$$

Для продуктивних бокових пагонів 1-го порядку ростова функція буде отримана за співвідношенням

$$\gamma_{1np.\delta.n.} = \frac{G_{1np.\delta.n.}^{\max}}{G_{1np.\delta.n.}^{\max} + G_{2np.\delta.n.}^{\max}}. \quad (13.62)$$

Також при цьому зберігається умова, аналогічна (13.61). Таким чином, за цим принципом послідовно проводиться розрахунок ростових функцій усіх продуктивних і непродуктивних бокових пагонів.

Рівняння (13.55)–(13.58) описують приріст рослинної маси головного пагона і бокових продуктивних і непродуктивних пагонів. Між органами пагона (листя, стебла, колосся) розподіл проводиться за ростовими функціями. Тоді, динаміка біомаси окремих органів кожного пагона буде описуватися такими рівняннями:

$$\frac{dm_l}{dt} = \gamma_l \frac{dm_{naz.}}{dt} - \omega_l m_l; \quad (13.63)$$

$$\frac{dm_s}{dt} = \gamma_s \frac{dm_{naz.}}{dt} - \omega_s m_s; \quad (13.64)$$

$$\frac{dm_p}{dt} = \gamma_p \frac{dm_{naz.}}{dt}, \quad (13.65)$$

де  $\frac{dm_l}{dt}$ ,  $\frac{dm_s}{dt}$ ,  $\frac{dm_p}{dt}$  – приріст маси відповідно листя, стебел і колосся

( $l$  – листя,  $s$  – стебла,  $p$  – колосся);

$\gamma_l$ ,  $\gamma_s$ ,  $\gamma_p$  – ростові функції періоду вегетативного росту;

$\omega_l$ ,  $\omega_s$  – ростові функції періоду репродуктивного росту.

Сумарний приріст біомаси колосся розраховується як сума приростів біомаси колосся головного пагона і бокових продуктивних пагонів

$$\frac{dm_p}{dt} = \frac{dm_{p(z.n.)}}{dt} + \sum_{i=1}^q \frac{dm_{pi\delta.n.(np.)}}{dt}. \quad (13.66)$$

Динаміка площі листової поверхні рослин визначається як сума приросту площі листя кожного окремого пагона

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL_{z.n.}}{dt} + \sum_{i=1}^q \frac{dL_{i\delta.n.(np.)}}{dt} + \sum_{j=1}^x \frac{dL_{j\delta.n.(непр.)}}{dt}. \quad (13.67)$$

Розрахунок приросту площі листя окремого пагона виконується з врахуванням старіння листя

$$\frac{dL_{naz.}}{dt} = \begin{cases} \frac{dm_{l(naz.)}}{dt} \cdot \frac{1}{\delta_m} & \text{при } \frac{dm_{l(naz.)}}{dt} > 0, \\ \frac{dm_{l(naz.)}}{dt} \cdot \frac{1}{\delta_m} \cdot \frac{1}{k_{ps}} & \text{при } \frac{dm_{l(naz.)}}{dt} \leq 0, \end{cases} \quad (13.68)$$

де  $k_{ps}$  – параметр, який характеризує частку життєдіяльних структур у загальній біомасі листя.

Динамічна модель впливу агрометеорологічних умов на ріст, розвиток та формування урожаю озимої пшениці дозволяє оцінити в будь-який момент вегетації кількісні характеристики надземної частини рослин (кількість рослин і пагонів, площу листової поверхні, масу рослин та ін.). Це відкриває можливість вести інтерпретацію дистанційної інформації, коректувати розрахунки оцінки агрометеорологічних умов формування продуктивності рослин та прогнозувати очікувану урожайність.

## 14. БАЗОВА ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ФОРМУВАННЯ УРОЖАЮ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР А. М. ПОЛЬОВОГО

Розробка теорії фотосинтетичної продуктивності посівів стимулювала інтенсивний розвиток робіт по моделюванню продукційного процесу рослин, серед яких особливий інтерес для практики становлять довгоперіодні динамічні моделі формування урожаю, на основі яких створюються оперативні методи оцінки агрометеорологічних умов росту і розвитку сільськогосподарських культур та прогнозування їх урожайності.

Розвиток автоматизованих методів обробки агрометеорологічної інформації (добової та щоденної) зробив можливим створення Автоматизованого робочого місця агрометеоролога – прогнозіста (АРМ – агрометеоролога). Відкрилась можливість наповнення АРМ – агрометеоролога моделями формування продуктивності сільськогосподарських культур для виконання в автоматизованому режимі оперативної кількісної оцінки агрометеорологічних умов вирощування та прогнозування урожайності на основі використання стандартної оперативної агрометеорологічної інформації.

Теоретичною основою цих моделей є базова динамічна модель формування урожаю сільськогосподарських культур А.М. Польового.

### 14.1. Концепція моделювання

Структура моделі визначається виходячи з закономірностей формування гідрометеорологічного режиму у системі ґрунт – рослина – атмосфера і біологічних уявлень про ріст і розвиток сільськогосподарських культур під впливом чинників зовнішнього середовища. У основі моделі лежить система рівнянь радіаційного, теплового і водного балансів, балансу біомаси (вуглеводу та азоту) в рослинному покриві.

Основні концептуальні положення такі:

- ріст і розвиток рослин визначається генотипом і чинниками зовнішнього середовища;
- моделюється ріст рослин (накопичення сухої біомаси) шляхом розподілу продуктів фотосинтезу і поглинутих елементів мінерального живлення з урахуванням потреб для росту в асимілятах надземної і підземної частин рослин;

- моделюються радіаційний, тепловий і водний режими системи ґрунт – рослина – атмосфера;

- моделюється трансформація форм азоту в ґрунті та азотне живлення рослин;

- моделюється гідроліз рослинної тканини при старінні рослин і в стресових умовах, а також перетік продуктів гідролізу з листя, стебел, коренів у репродуктивні органи;

- моделюється вплив агрометеорологічних умов в основні міжфазні періоди сільськогосподарських культур на формування урожаю, втрати урожаю за рахунок посухи, а для зернових колосових культур – полягання посівів і «стікання» зерна.

Модель складається з 8 блоків (рис. 14.1):

1. Блок вхідної інформації.
2. Блок радіаційно-теплового режиму рослинного покриву.
3. Блок водного режиму рослинного покриву.
4. Блок фотосинтезу.
5. Блок дихання і старіння рослин.
6. Блок мінерального живлення.
7. Блок росту (розподіл структуроутворюючих компонентів – вуглеводів і азоту);
8. Блок формування площі листя.

Розглядається, що рослина складається з двох функціонально пов'язаних частин: надземної (*shoot*) і підземної (*root*), які у свою чергу поділяються на окремі органи або їх складові частини. Виділяються: функціонуючі листки ( $l_{func}$ ), пожовклі листки ( $l_{yel}$ ), відмерлі листки ( $l_{mor}$ ), зелені стебла ( $s_{gr}$ ), пожовклі стебла ( $s_{yel}$ ), функціонуючі корені ( $r_{func}$ ), відмерлі корені ( $r_{mor}$ ), функціонуючі репродуктивні органи ( $p_{func}$ ), дозріваючі репродуктивні органи ( $p_{rip}$ ).

Маса  $m$  окремих  $i$ -х органів та їх окремих частин складається з двох компонентів – маси вуглеводів  $C$  і маси азоту  $N$ . Моделюється, що під впливом екзогенних і ендогенних чинників у рослині відбувається формування єдиного фонду вільних вуглеводів  $C_{lab}$  та єдиного фонду вільного азоту  $N_{lab}$ .

У моделі розглядається, що ґрунт має 12 шарів: 0-2 см, 2-5 см, 5-10 см, 10-20 см і так далі через 10 см до глибини 100 см.

Моделюються потоки води і азоту у ґрунті, який розглядається одночасно як насичене та ненасичене вологою середовище.

Модель реалізовано в двох варіантах – з добовим кроком в часі та з декадним кроком.

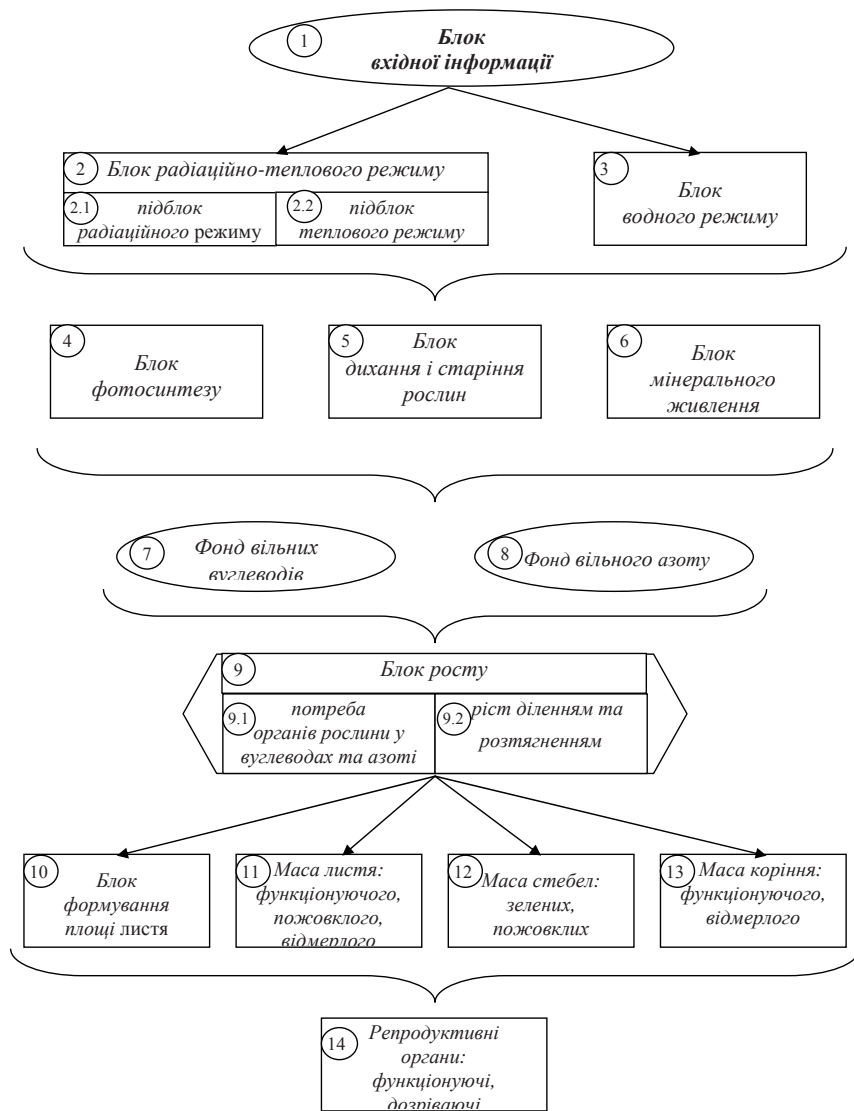


Рис. 14.1. Блок-схема базової динамічної моделі формування урожаю сільськогосподарських культур

## 14.2. Моделювання радіаційного та теплового режимів рослинного покриття

Радіаційний баланс рослинного покриття можна представити у вигляді суми довгохвильової і короткохвильової радіації:

$$R_L = Q_L + F_L; \quad (14.1)$$

$$R_S = Q_S + F_S, \quad (14.2)$$

де  $R_L$  і  $R_S$  – радіаційний баланс рослинного покриття (РП) і поверхні ґрунту;  
 $Q_L$ , і  $Q_S$  – величини поглиненої короткохвильової радіації РП і поверхні ґрунту;  
 $F_L$  і  $F_S$  – величини балансу довгохвильової радіації РП і поверхні ґрунту.

Величини поглиненої короткохвильової радіації рослинного покриття і поверхні ґрунту визначаються за такими співвідношеннями:

$$Q_L = Q_o(1 - \alpha_{LS}); \quad (14.3)$$

$$Q_S = Q_o \alpha_Q(1 - \alpha_S), \quad (14.4)$$

де  $Q_o$  – сумарна короткохвильова радіація над верхньою межею РП;

$\alpha_{LS}$  і  $\alpha_S$  – альbedo РП і поверхні ґрунту;

$\alpha_Q$  – функція пропускання сумарної радіації РП.

Альbedo рослинного покриття визначається за формулою

$$\alpha_{LS} = \alpha_{Lh_o} + (\alpha_S - \alpha_{Lh_o}) \exp[-L(1 + ctgh_o / \pi)] \quad (14.5)$$

де

$$\alpha_{Lh_o} = \frac{0,4084}{1 + 1,1832 \sinh \cdot}$$

Альbedo поверхні ґрунту визначається в залежності від зволоження ґрунту за допомогою рівнянь:

$$\alpha_S = \begin{cases} \alpha_S^{\max} & \text{при } W_{SS} < W_{WP} \\ \alpha_S^{\max} - (\alpha_S^{\max} - \alpha_S^{\min}) \frac{W_{SS} - W_{WP}}{W_{FC} - W_{WP}} & \text{при } W_{WP} \leq W_{SS} \leq W_{FC} \\ \alpha_S^{\min} & \text{при } W_{SS} > W_{FC}, \end{cases} \quad (14.6)$$

де  $\alpha_S$  – альbedo поверхні ґрунту;

$\alpha_S^{\max}, \alpha_S^{\min}$  – альbedo сухого і досить зволоженого ґрунту;

$W_{SS}$  – вологість поверхневого шару ґрунту;

$W_{WP}$  – вологість стійкого в'янення;

$W_{FC}$  – найменша вологомiсткiсть ґрунту.

Функцію пропускання сумарної радіації визначаємо за формулою

$$a_Q = (1 - c_2) \exp\left(-\frac{k_s^L L}{\sinh_o}\right) + c_2 \exp\left(-c_3 \frac{k_s^L L}{\sinh_o}\right), \quad (14.7)$$

де  $c_2$  і  $c_3$  – емпіричні сталі;

$k_s^L$  – емпірична стала, яка характеризує вплив геометричної структури РП на пропускання сонячної радіації.

Величини балансу довгохвильової радіації визначаються за такими формулами:

$$F_L = (F_A + \varepsilon_S \sigma T_S^4 - 2\varepsilon_L \sigma T_L^4)(1 - e^{-kL}); \quad (14.8)$$

$$F_S = F_A e^{-kL} - \varepsilon_S \sigma T_S^4 + \varepsilon_L \sigma T_L^4 (1 - e^{-kL}), \quad (14.9)$$

де  $F_A$  – противипромiнювання атмосфери

$\varepsilon_L$  і  $\varepsilon_S$  – коефіцієнти сірості листя і ґрунту;

$\sigma$  – стала Стефана-Больцмана;

$T_L, T_S$  – температура листя і ґрунту;

$k$  – емпіричний параметр орієнтації листя.

Противипромiнювання атмосфери визначається за виразом

$$F_A = \varepsilon_a \sigma T_a^4, \quad (14.10)$$

де  $T_a$  – температура повітря;

$\varepsilon_a$  – коефіцієнт довгохвильового випромiнювання, який визначається за емпіричною формулою

$$\varepsilon_a = 0,398 \cdot 10^{-5} \cdot T_a^{2,148}. \quad (14.11)$$

Потік тепла у ґрунті приймається пропорційним радіаційному балансу поверхні ґрунту

$$B_S = c_{BS} R_S, \quad (14.12)$$

де  $c_{BS}$  – емпірична стала.

Сумарна короткохвильова радіація визначається за формулою

$$Q_o = A_1 \left(\frac{1}{\tau} + S\right)^{A_2} \exp\left(-A_3 \frac{S}{\tau}\right) + A_4 \exp\left[-A_5 \left(1 - \frac{S}{\tau}\right) (\sinh_o)^{A_6}\right], \quad (14.13)$$

де  $A_1 - A_6$  – константи;

$\tau$  – тривалість світлого часу доби, від сходу до заходу Сонця.

### 14.3. Моделювання водного режиму рослинного покриву

Вологоперенесення у ґрунті. Рівняння потоку води в системі ґрунт – корінь розглядається одночасно як для насиченого так і ненасиченого середовища

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{C(\psi)} \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\Theta) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right] - \frac{S(\psi)}{C(\psi)}, \quad (14.14)$$

де  $\psi$  – потенціал тиску ґрунтової вологи;

$C(\psi) = \frac{d\Theta}{d\psi}$  – диференціальна вологоємність;

$K(\Theta)$  – гiдравлiчна провiднiсть;

$\Theta$  – об'ємна вологість;

$S(\psi)$  – поглинання води коренями;

$t$  – час;  $z$  – вертикальна координата.

Як початка умова ( $t = 0$ ) задається

$$\psi(z, t = 0) = \psi_0(z). \quad (14.15)$$

За граничні умови приймається:

– на нижній межі ( $z_{so}$ ) потенціал тиску задається як

$$\psi(z = z_{so}, t) = \psi_{so}(t), \quad (14.16)$$

– на рівні ґрунтових вод величини

$$C(\psi) = 0 \quad \text{і} \quad \psi(z_{so}, t) = 0; \quad (14.16 \text{ a})$$

– на поверхні ґрунту  $z_o$  (верхня межа):



$$P_s - E = -K(\Theta) \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + 1 \right) \quad \text{при } P_s - E < J_{\max}; \quad (14.17)$$

$$\Theta = \Theta_{\max} \quad \text{при } P_s - E \geq J_{\max},$$

де  $P_s$  – кількість опадів, які досягли поверхні ґрунту;

$E$  – випаровування з поверхні ґрунту;

$J_{\max}$  – максимально можлива інтенсивність інфільтрації при вологості ґрунту на його поверхні, дорівнює  $\Theta_{\max}$ .

Кількість опадів, які досягли поверхні ґрунту, визначається як

$$P_s = P_o - P_L, \quad (14.18)$$

де  $P_o$  – кількість опадів, що випали;

$P_L$  – кількість опадів, перехоплених рослинним покривом, яка залежить від величини листової поверхні

$$P_L = 0,2L, \quad (14.19)$$

де  $L$  – відносна площа листової поверхні (листовий індекс).

Величина джерельно-стокового члена  $S(\psi)$  визначається в залежності від потенціалу тиску і максимальної швидкості поглинання води  $S_{\max}$

$$S(\psi) = \alpha_s(\psi) \cdot S_{\max} / f_{\text{depth}}^{\text{root}} \quad (14.20)$$

приймаємо, що

$$S_{\max} = T_r, \quad (14.21)$$

де  $T_r$  – транспірація;

$f_{\text{depth}}^{\text{root}}$  – функція розподілу коренів на глибині;

$\alpha_s(\psi)$  – функція впливу водного потенціалу ґрунту на поглинання води кореневою системою.

Транспірація рослинного покриву визначається за формулою Пенмана

$$T_r = \frac{\Delta \left( \frac{R_L}{\lambda} \right) + ET_{\text{pot}}}{\Delta + \gamma_{\text{ef}}}, \quad (14.22)$$

де  $\Delta$  – нахил кривої залежності тиску насиченої водяної пари від температури повітря;

$\gamma_{\text{ef}}$  – ефективна психрометрична стала;

$R_L$  – радіаційний баланс РП;

$ET_{\text{pot}}$  – випаровуваність;

$\lambda$  – прихована теплота пароутворення.

Випаровуваність визначається за допомогою рівняння

$$ET_{\text{pot}} = \frac{(e_s - e_a) \rho c_p}{r_a}, \quad (14.23)$$

де  $e_s$  – тиск насиченої пари при даній температурі повітря;

$e_a$  – фактичний тиск водяної пари;

$\rho$  – щільність повітря;

$c_p$  – теплоємність повітря;

$r_a$  – опір прилежого шару.

Ефективна психрометрична стала визначається за формулою

$$\gamma_{\text{ef}} = \gamma \frac{r_a + r_{st}}{r_a}, \quad (14.24)$$

де  $\gamma$  – психрометрична стала;

$r_{st}$  – продиховий (устячковий) опір дифузії водяної пари для листя.

Опір прилежого шару визначається за виразом

$$r_a = \frac{\ln[(z - d_o) / z_o]^2}{\chi^2 u}, \quad (14.25)$$

де  $d_o$  – висота шару витіснення;

$z_o$  – висота шару шорсткості;

$\chi$  – стала Кармана;

$u$  – швидкість вітру на висоті  $z$ .

Продиховий опір визначається за формулою

$$r_{st} = \frac{1}{g_n + \frac{g_x Q_o}{Q_o + p_r}} \quad (14.26)$$

де  $g_n, g_x, p_r$  – емпіричні параметри.

Випаровування з поверхні ґрунту  $E_S$  визначається як

$$E_S = \frac{(\Delta R_S) \cdot 1,26}{\Delta + \gamma}. \quad (14.27)$$

Рівень ґрунтових вод визначається за методом Шебеко:

$$H_{gr.w.}^{j+1} = H_{gr.w.}^j + \Delta H_{gr.w.}^j; \quad (14.28)$$

$$\Delta H_{gr.w.} = I_w / k_w \cdot 10 \quad (14.29)$$

або

$$\Delta H_{gr.w.} = -V_p / k_w \cdot 10, \quad (14.30)$$

де

$$I_w = W_n + P_o - ET_{opt} - W_{FC} \quad (14.31)$$

і величина  $V_p$  визначається як

$$0 \leq W_{PC} - (W_n + P_o - ET) \geq V_p \leq V_{max},$$

де  $H_{gr.w.}$  – рівень ґрунтових вод;

$I_w$  – інфільтрація;

$V_p$  – розрахункове підживлення в зону аерації з ґрунтових вод;

$W_n$  – початковий вміст вологи у ґрунті;

$ET$  – сумарне випаровування;

$V_{max}$  – максимально можливе підживлення в зону аерації з ґрунтових вод;

$k_w$  – коефіцієнт водовіддачі.

#### 14.4. Моделювання процесів фотосинтезу, дихання та старіння рослин

Фонд вільних вуглеводів рослин на кожному часовому кроці являє собою баланс продуктів фотосинтезу і продуктів розпаду тканин (при стресових умовах або старінні рослин), а також витрат на дихання

$$\frac{dC_{lab}}{dt} = \Phi + C_{hydr} - R, \quad (14.32)$$

де  $C_{lab}$  – фонд вільних вуглеводів;

$\Phi$  – маса продуктів фотосинтезу;

$C_{hydr}$  – маса вуглеводів, що утворюються при розпаді тканин, які старіють;

$R$  – витрати вуглеводів на дихання рослин.

Процес фотосинтезу листя описується з врахуванням впливу на

фотосинтез рівня мінерального живлення, фази розвитку рослин, температурного режиму і вологозабезпеченості рослин

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{1/\Phi_{pot}K_{\Phi}(N_{str}^L) + 1/a_C C_0 + 1/a_{\Phi}\Pi} \min \left\{ \alpha_{\Phi}, \Psi_{\Phi}, \frac{ET}{ET_{pot}} \right\}, \quad (14.33)$$

де  $\Phi_{pot}$  – інтенсивність потенційного фотосинтезу;

$a_C$  – нахил вуглекислотної кривої фотосинтезу;

$C_0$  – концентрація  $CO_2$  у повітрі;

$a_{\Phi}$  – нахил світлової кривої фотосинтезу;

$\Pi$  – поглинена рослинним покривом фотосинтетично-активна радіація;

$\alpha_{\Phi}$  – онтогенетична крива фотосинтезу;

$\Psi_{\Phi}$  – температурна крива фотосинтезу;

$K_{\Phi}(N_{str}^L)$  – коефіцієнт забезпеченості рослин елементами мінерального живлення

При стресових умовах і старінні рослин відбуваються процеси розпаду тканин. Ці процеси описуються рівняннями кінетики ферментативного каталізу. При достатньо високій концентрації гідролізуемого субстрату, швидкість розпаду може бути описана рівнянням реакції нульового порядку, а при достатньо низькому – рівнянням реакції першого порядку:

$$\frac{dC_{ihydr}}{dt} = K_{hydr}^0 K_{hydr}(T_a) K_{hydr}(W) \quad \text{при} \quad C_i \geq C_{icrit} \quad (14.34)$$

і

$$\frac{dC_{ihydr}}{dt} = K_{hydr}^1 K_{hydr}(T_a) C_i K_{hydr}(W) \quad \text{при} \quad C_i < C_{icrit} \quad (14.35)$$

де  $K_{hydr}^0$  – константа швидкості реакції нульового порядку;

$K_{hydr}^1$  – константа швидкості реакції першого порядку;

$K_{hydr}(T_a), K_{hydr}(W)$  – функції впливу температури повітря  $T_a$  і вологості ґрунту  $W$  на швидкість розпаду;

$C_{icrit}$  – критична кількість вуглеводів, що визнає початок реакції розпаду як реакції першого порядку;

$C_i$  – кількість вуглеводів тканин, які старіють.

Витрати на дихання росту і дихання підтримки моделюються з використанням концепції Мак-Крі і з врахуванням зміни інтенсивності дихання в онтогенезі та під впливом температури повітря

$$\frac{dR}{dt} = \alpha_R \left[ C_G \frac{dm}{dt} + C_m m \varphi_R \right], \quad (14.36)$$

де  $C_G$  – коефіцієнт витрат на дихання росту;  
 $C_m$  – коефіцієнт витрат на дихання підтримки;  
 $\alpha_R$  – онтогенетична крива дихання;  
 $dm / dt$  – приріст біомаси рослин;  
 $m$  – маса рослин;  
 $\varphi_R$  – температурна крива дихання.

#### 14.5. Моделювання мінерального живлення рослин

Формування фонду вільного азоту розглядається на кожному часовому кроці як поглинання азоту з ґрунту, продуктів розпаду рослинної тканини і витрат на відновлення активних структур тканини

$$\frac{dN_{lab}}{dt} = N_{abs} + N_{hydr} - N_{sen}, \quad (14.37)$$

де  $N_{lab}$  – фонд вільного азоту;  
 $N_{abs}$  – кількість поглиненого з ґрунту азоту;  
 $N_{hydr}$  – кількість азоту, що утвориться при розпаді білкових структур;  
 $N_{sen}$  – витрати на відновлення білків.

Процес поглинання азоту рослиною з ґрунту йде активним шляхом і пасивним – виносом азоту з транспіраційним потоком

$$dN_{abs} = D_{ef}^{Nr} N_{soil} L_{funkt}^r K_{dif}^N(T_S) + Tr \bar{N}_{s.w.}, \quad (14.38)$$

де  $N_{soil}$  – концентрація азоту у ґрунті ( $NH_4$ ,  $NO_3$ );  
 $D_{ef}^{Nr}$  – ефективний коефіцієнт дифузії азоту у ґрунтового розчині ( $NH_4$ ,  $NO_3$ );  
 $L_{funkt}^r$  – довжина життєдіяльних коренів;  
 $\bar{N}_{s.w.}$  – концентрація азоту у ґрунтового розчині;  
 $Tr$  – транспірація;  
 $K_{dif}^N(T_S)$  – функція впливу температури ґрунту на швидкість дифузії азоту у ґрунтового розчині.

Процеси поглинання амонію і поглинання нітратів розглядаються в моделі окремо.

Розпад білка в органах рослини виражається рівнянням, подібним до рівнянь (14.34) і (14.35). Приймається, що швидкість відновлення білків кожного органа рослини пропорційна вмісту азоту у тканині цього органа

$$\frac{dN_{isen}}{dt} = \alpha_{sen} N_i, \quad (14.39)$$

де  $\alpha_{sen}$  – відносна швидкість відновлення білків;  
 $N_i$  – вміст азоту у тканинах  $i$ -го органа.

У моделі розглядаються основні процеси трансформації азоту в ґрунті: амоніфікація, нітрифікація, іммобілізація амонію і нітратів, денітрифікація.

Кількість легкогідролізуемого азоту в ґрунті  $N_{tof}$  описується рівнянням

$$N_{tof} = P_{hum} K_{hum}^N K_{hydr}^N, \quad (14.40)$$

де  $P_{hum}$  – вміст гумусу у ґрунті;  
 $K_{hum}^N$  – вміст органічного азоту у гумусі ґрунту;  
 $K_{hydr}^N$  – коефіцієнт гідролізації азоту у ґрунті.

Трансформація форм азоту ґрунту описується наступною системою рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} dN_{NH} &= A_{NH} N_{tof} F_{am}(T_S) F_{am}(W), \\ dN_{NO} &= A_{NO} N_{soil}^{NH} F_{nitr}(T_S) F_{nitr}(W), \\ dN_{im}^{NH} &= A_{im}^{NH} N_{soil}^{NH}, \\ dN_{im}^{NO} &= A_{im}^{NO} N_{soil}^{NO}, \\ dN_{den} &= A_{den} N_{soil}^{NO} F_{den}(T_S) F_{den}(W), \end{aligned} \right\} \quad (14.41)$$

де  $dN_{NH}$  – швидкість амоніфікації;  
 $A_{NH}$  – коефіцієнт швидкості амоніфікації;  
 $F_{am}(T_S)$  і  $F_{am}(W)$  – функції впливу температури і вологості ґрунту на швидкість амоніфікації;  
 $dN_{NO}$  – швидкість нітрифікації;  
 $F_{nitr}(T_S)$  і  $F_{nitr}(W)$  – функції впливу температури і вологості ґрунту на швидкість нітрифікації;

$dN_{im}^{NH}$ ,  $dN_{im}^{NO}$  – швидкість іммобілізації азоту;  
 $A_{im}^{NH}$  і  $A_{im}^{NO}$  – коефіцієнт швидкості іммобілізації азоту з амонійних і нітратних форм азоту;  
 $dN_{den}$  – швидкість денітрифікації;  
 $A_{den}$  – коефіцієнт швидкості денітрифікації;  
 $F_{den}(T_s)$  і  $F_{den}(W)$  – функції впливу температури і вологості ґрунту на швидкість денітрифікації.

Баланс амонійних форм азоту у ґрунті може бути описаний таким рівнянням

$$N_{soil}^{NH(j+1)} = N_{soil}^{NH(j)} + dN_{NH} - dN_{NO} - dN_{im}^{NH} - dN_{abs}^{NH} + NH_m^{fert} + NH_{org.}^{fert} + NH_{atm.} \quad (14.42)$$

де  $NH_m^{fert}$  і  $NH_{org.}^{fert}$  – амоній мінеральних і органічних добрив;  
 $NH_{atm.}$  – амоній, що надходить з атмосферними опадами.

На відміну від амонійних форм азоту легкорухливі нітратні форми азоту ефективно переміщуються (пересуваються) від одного шару ґрунту до іншого дифузійним шляхом чи з потоками води. Дифузія нітратів  $dN_{dif}$  описується рівнянням

$$dN_{dif}^{NO} = D_{ef}^{NO} \frac{\bar{N}_{NO}^{\omega+1} - \bar{N}_{NO}^{\omega}}{h_{\omega}} \quad (14.43)$$

де  $dN_{dif}$  – дифузія нітратів;  
 $D_{ef}^{NO}$  – ефективний коефіцієнт дифузії нітратів у ґрунтового розчині;  
 $\bar{N}_{NO}^{\omega+1}$ ,  $\bar{N}_{NO}^{\omega}$  – концентрація нітратів у суміжних шарах ґрунту;  
 $h_{\omega}$  – відстань між серединою суміжних шарів ґрунту.

Рівняння, що описує переміщення нітратів з потоками води  $dN_{I_w}^{NO}$  записується у вигляді

$$dN_{I_w}^{NO} = \frac{\bar{N}_{NO}^{\omega+1} + \bar{N}_{NO}^{\omega}}{2} I_w^{\omega} \quad (14.44)$$

де  $dN_{I_w}^{NO}$  – переміщення нітратів з потоками води;  
 $I_w^{\omega}$  – інфільтрація води із одного шару в інший шар ґрунту.  
 Баланс нітратів у ґрунті записується як

$$N_{soil}^{NO(j+1)} = N_{soil}^{NO(j)} + dN_{NO} - dN_{im}^{NO} - dN_{abs}^{NO} + NO_m^{fert} + NO_{org.}^{fert} + NO_{atm} - dN_{dif}^{NO} - dN_{I_w}^{NO} \quad (14.45)$$

де  $NO_m^{fert}$  і  $NO_{org.}^{fert}$  – нітрати органічних і мінеральних добрив;

$NO_{atm}$  – нітрати, які надходять з атмосферними опадами.

Сумарний баланс гумусу у ґрунті визначається за методом О.С. Образцова

$$Hum = (m_l^{lit} K_C^{lit} K_{Hum}^{lit} + Org^{last} K_C^{Org} K_{Hum}^{Org} + Org^{last} K_N^{Org} K_{us}^{Org} + M_N^{last} K_{us}^M + (m_l^{lit} + m_r^{mort}) K_N^{lit(mort)} K_{us}^{lit(mort)} - m^{last} K_N^{last}) \cdot 1,724 \quad (14.46)$$

де  $Hum$  – баланс гумусу у ґрунті;

$m_l^{lit}$ ,  $m_r^{mort}$  – маса рослинних залишків і маса відмерлих коренів минулого року;

$K_C^{lit}$ ,  $K_C^{Org}$  – відносний вміст вуглецю в сухій речовині рослинних залишків і органічних добрив;

$K_{Hum}^{lit}$ ,  $K_{Hum}^{Org}$  – коефіцієнт гуміфікації рослинних залишків і органічних добрив;

$Org^{last}$ ,  $M_N^{last}$  – кількість мінеральних добрив і доза внесення мінерального азоту минулого року;

$K_N^{Org}$ ,  $K_N^{lit(mort)}$  – відносний вміст азоту в органічних добривах, рослинних залишках і відмерлих коренях;

$K_{us}^{Org}$ ,  $K_{us}^M$ ,  $K_{us}^{lit(mort)}$  – коефіцієнт використання азоту мінеральних і органічних добрив, рослинних залишків і відмерлих коренів;

$m^{last}$  – урожай біомаси минулого року;

$K_N^{last}$  – відносний вміст азоту у рослинній біомасі урожаю минулого року.

## 14.6. Моделювання росту рослин

Динаміка біомаси надземної і підземної частин рослин та окремих органів визначається з врахуванням потреб цих частин рослин в асимілятах.

Приріст маси вуглеводів та азоту розподіляється між надземною і підземною частинами рослин за допомогою таких рівнянь:

$$\frac{dmC(N)_{shoot}}{dt} = \left(1 - \beta_{root}^{mC(N)}\right) \frac{dC(N)_{lab}}{dt}; \quad (14.47)$$

$$\frac{dmC(N)_{root}}{dt} = \beta_{root}^{mC(N)} \frac{dC(N)_{lab}}{dt}, \quad (14.48)$$

де  $mC(N)_{shoot}$  і  $mC(N)_{root}$  – кількість відповідно вуглеводів і азоту у надземній і підземній частинах рослин;

$\beta_{root}^{mC(N)}$  – функції розподілу вуглеводів і азоту у підземну частину рослин.

Розподіл структуроутворювальних компонентів між надземними органами рослин та їх окремими частинами виконується за допомогою наступної системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dmC(N)_{lfunc}}{dt} &= \beta_l^{mC(N)} \frac{dmC(N)_{shoot}}{dt} - v^{C(N)} mC(N)_{lfunc}; \\ \frac{dmC(N)_{lyel}}{dt} &= \frac{dmC(N)_{lfunc}}{dt} \frac{1}{K_{st}^{C(N)}} \text{ при } \frac{dmC(N)_{lfunc}}{dt} < 0; \\ \frac{dmC(N)_{sgr}}{dt} &= \beta_{sgr}^{mC(N)} \frac{dmC(N)_{shoot}}{dt} - v_s^{C(N)} mC(N)_{sgr}; \\ \frac{dmC(N)_{syel}}{dt} &= \frac{dmC(N)_{sgr}}{dt} \frac{1}{K_{st}^{C(N)}} \text{ при } \frac{dmC(N)_{sgr}}{dt} < 0; \\ \frac{dmC(N)_{pfunc}}{dt} &= \beta_{pfunc}^{mC(N)} \frac{dmC(N)_{shoot}}{dt} + v_l^{C(N)} mC(N)_{lfunc} + \\ &+ v_s^{C(N)} mC(N)_{sgr} + v_r^{C(N)} mC(N)_{rfunc}; \\ mC(N)_{prip} &= mC(N)_{pfunc} k_{prip}, \end{aligned} \quad (14.49)$$

де  $mC(N)_{lfunc}$ ,  $mC(N)_{lyel}$ ,  $mC(N)_{sgr}$ ,  $mC(N)_{syel}$ ,  $mC(N)_{pfunc}$ ,

$mC(N)_{prip}$  – кількість вуглеводів і азоту відповідно у функціонуючих та поживклих листках, зелених та поживклих стеблах, функціонуючих та дозріваючих репродуктивних органах;

$\beta_l^{mC(N)}$ ,  $\beta_{sgr}^{mC(N)}$ ,  $\beta_{pfunc}^{mC(N)}$  – функції розподілу вуглеводів та азоту в ростучі

листя, зелені стебла, функціонуючі репродуктивні органи;

$v^{C(N)}$  – функції перетоку вуглеводів та азоту із листя, стебел та коріння при їх старінні.

Приріст маси окремого  $i$ -го органа або окремої його частини визначається як сума вуглеводів та азоту, що надійшли в цей орган

$$\frac{dm_i}{dt} = \frac{dC_i}{dt} + \frac{dN_i}{dt}. \quad (14.50)$$

Приріст стебел у висоту визначається як

$$\frac{dh_s}{dt} = \frac{dm_s}{dt} \frac{1}{\rho_s \pi r_s^2} \frac{1}{N_s}, \quad (14.51)$$

де  $dh_s/dt$  – швидкість росту стебел у висоту;

$dm_s/dt$  – приріст маси стебел;

$\rho_s$  – питома щільність стебел;

$r_s$  – радіус стебел;

$N_s$  – кількість стебел на одну рослину.

При моделюванні старіння листя зроблено припущення, що поживкли листя відпадають всі відразу при закінченні вегетаційного періоду:

$$m_{l\,fal} = m_{l\,yel} \quad \text{при } t = t_{end}^{gr.s.}, \quad (14.52)$$

де  $m_{l\,fal}$  – маса опалого листя;

$t_{end}^{gr.s.}$  – термін закінчення періоду вегетації рослин.

При моделюванні кореневої системи приймається, що всі вуглеводи та азот, що надійшли у підземну частину рослин направляються у функціонуючі корені

$$\frac{dmC(N)_{rfunc}}{dt} = \frac{dmC(N)_{root}}{dt}, \quad (14.53)$$

де  $mC(N)_{rfunc}$  – кількість вуглеводів та азоту у функціонуючих коренях.

Маса кореневої системи визначається за рівнянням (14.50).

Маса відмерлих коренів визначається за співвідношенням

$$m_{r\,mor} = \beta_{r\,mor} m_{r\,func}, \quad (14.54)$$

де  $\beta_{r\,mor}$  – функція відмирання функціонуючих коренів рослин.

Ріст коренів у глибину і їхня щільність у ґрунті визначається рівняннями виду:

$$z_r = \frac{d_r m_r}{\rho_r} f_r, \quad (14.55)$$

$$\rho_r = \rho_r^{\max} (1 - e^{-d_r z}), \quad (14.56)$$

де  $z_r$  – нижня межа кореневої системи;  
 $m_r$  – маса коренів;  
 $\rho_r$  – щільність коренів у ґрунті;  
 $\rho_r^{\max}$  – максимальна щільність коренів у ґрунті;  
 $f_r$  – функція впливу фізико-механічних властивостей ґрунту на ріст коренів;  
 $d_r, d_\rho$  – емпіричні параметри.

Динаміка площі асимілюючої поверхні листя описується такою системою рівнянь:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dm_{l_{func}}}{dt} \frac{1}{\sigma_L} \quad \text{при} \quad \frac{dm_{l_{func}}}{dt} \geq 0; \quad (14.57)$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dm_{l_{func}}}{dt} \frac{1}{\sigma_L k_s^l} \quad \text{при} \quad \frac{dm_{l_{func}}}{dt} < 0,$$

де  $\frac{dL}{dt}$  – швидкість росту відносної площі поверхні листя;  
 $\sigma_L$  – питома поверхнева щільність листя;  
 $k_s^l$  – параметр, який характеризує частку життєдіяльних структур у загальній біомасі листя.

Наведена вище система рівнянь (14.1) – (14.57) описує формування гідрометеорологічного режиму в системі ґрунт – рослина – атмосфера, основні процеси життєдіяльності рослин, їхній ріст та формування врожаю. Вона записана у загальному вигляді і трансформується в залежності від морфологічних та біологічних особливостей сільськогосподарських культур.

## 15. БАЗОВА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ АГРОКЛІМАТИЧНИХ РЕСУРСІВ ФОРМУВАННЯ ПРОДУКТИВНОСТІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР А. М. ПОЛЬОВОГО

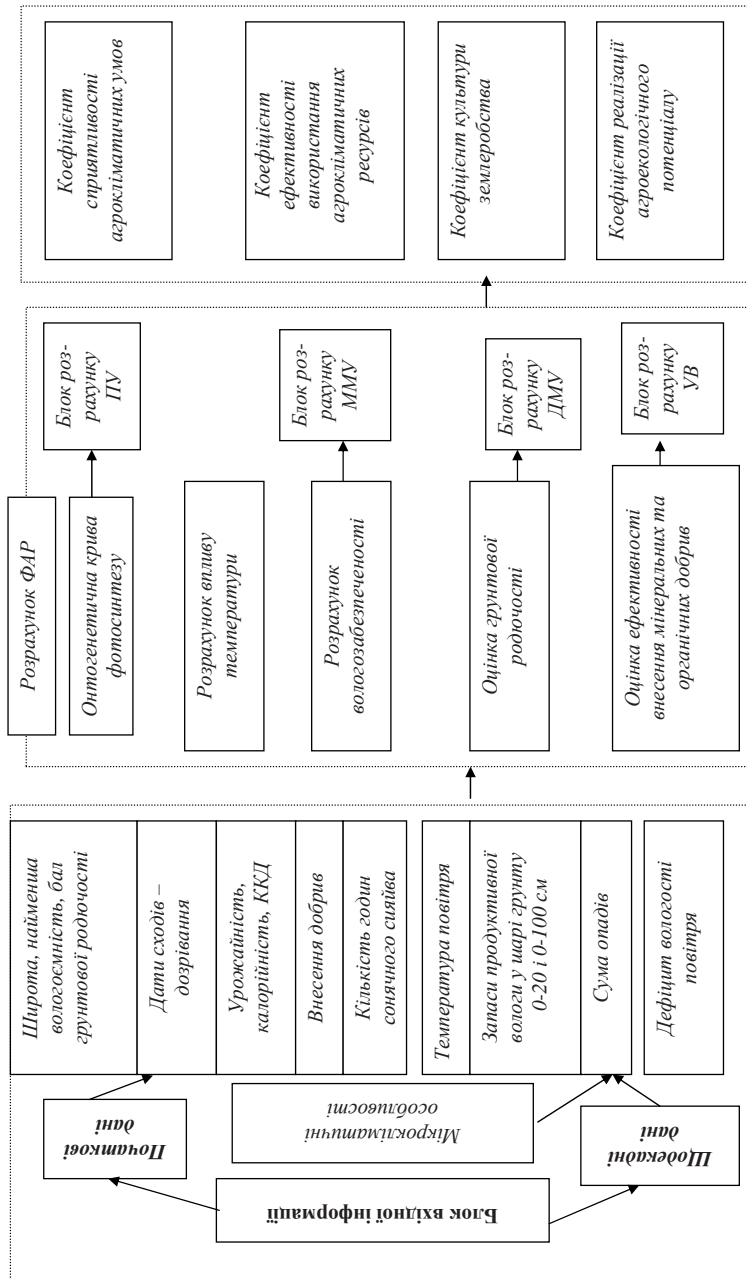
Однією з основних умов високої культури землеробства є найбільш повне використання кліматичних ресурсів. У цьому аспекті вивчення кліматичної забезпеченості формування урожаю сільськогосподарських культур з врахуванням особливостей мікроклімату конкретних територій має важливе наукове і практичне значення. При врахуванні впливу клімату на ефективність сільськогосподарського виробництва головним є визначення агрокліматичних ресурсів території, реалізоване шляхом їх агрокліматичного районування.

### 15.1. Концепція моделювання

Базова модель оцінки агрокліматичних ресурсів формування продуктивності сільськогосподарських культур заснована на концепції максимальної продуктивності рослин Х.Г. Тоомінга, результатах моделювання формування урожаю рослин А.М. Польового і методах оцінки мікрокліматичної мінливості елементів клімату у горбистому рельєфі Е.Н. Романової.

Базова модель оцінки агрокліматичних ресурсів має блокову структуру і містить шість блоків (рис. 15.1):

- блок вхідної інформації;
  - блок показників сонячної радіації і волого-температурного режиму з врахуванням експозиції схилів;
  - блок функцій впливу фази розвитку і метеорологічних факторів на продукційний процес рослин;
  - блок родючості ґрунту і забезпеченості рослин мінеральним живленням;
  - блок агроекологічних категорій урожайності;
  - блок узагальнюючих оцінюючих характеристик.
- Розглянемо більш докладно ці блоки.



15.1. Блок-схема агрокліматичної моделі формування урожаю сільськогосподарських культур

## 15.2. Блок вхідної інформації

Цей блок складається із даних стандартних метеорологічних і агрометеорологічних спостережень та містить у собі всі необхідні для виконання розрахунків характеристики. Вони поділяються на три групи:

Перша група – запаси продуктивної вологи у ґрунті, середньодекадна температура повітря, середня за декаду кількість годин сонячного сяйва, сума опадів за декаду, середній за декаду дефіцит насичення повітря, кількість днів у розрахунковій декаді.

Друга група – інформація про внесення доз азотних, фосфорних і калійних добрив, дані про оптимальні дози цих добрив, дані про внесення органічних добрив та їхній оптимальній дозі, рік внесення органічних добрив, бал ґрунтового бонітету.

Третя група – інформація про експозицію та крутість схилу, на якому розташоване поле, характеристика типу схилу і місяця розташування поля на схилі.

## 15.3. Блок показників сонячної радіації і волого-температурного режиму з врахуванням експозиції поля

Для розрахунку інтенсивності сумарної сонячної радіації використовується формула С.І. Сівкова

$$Q_o^j = 12,66 \cdot (SS^j)^{1,31} + 315 \cdot (A^j + B^j)^{2,1}, \quad (15.1)$$

де  $Q_o$  – сумарна сонячна радіація, що приходиться на горизонтальну поверхню, кал/см<sup>2</sup>·д;

$SS$  – середня за декаду кількість годин сонячного сяйва, год;

$j$  – номер розрахункової декади;

$A$  і  $B$  – проміжні характеристики, що визначаються в залежності від широти місцевості та схилу Сонця.

Інтенсивність сумарної сонячної радіації з урахуванням експозиції і крутості схилу визначається за виразом

$$Q_{eks}^j = k_{eks}^{Q(j)} \cdot Q_o^j, \quad (15.2)$$

де  $Q_{eks}$  – сумарна сонячна радіація в залежності від експозиції і крутості схилу, кал/см<sup>2</sup>·д;

$k_{eks}^Q$  – коефіцієнт для перерахунку середньої за декаду сумарної сонячної радіації з горизонтальної поверхні для схилів різної крутості, відн. од.

Величина  $k_{eks}^Q$  визначається в залежності від широти місцевості, календарного місяця, експозиції і крутості схилу (табл. 15.1).

Таблиця 15.1. Поправки для розрахунку середньої за декаду сумарної сонячної радіації

		Місяць					
Широта, град.		IV	V	VI	VII	VIII	IX
Північний схил 200	44	0,86	0,91	0,92	0,91	0,87	0,75
	46	0,85	0,90	0,92	0,91	0,86	0,75
	48	0,85	0,90	0,92	0,91	0,86	0,75
	50	0,84	0,90	0,91	0,90	0,85	0,75
	52	0,83	0,89	0,91	0,90	0,85	0,75
Північний схил 100	44	0,93	0,95	0,96	0,96	0,94	0,89
	46	0,93	0,95	0,96	0,96	0,94	0,89
	48	0,93	0,95	0,96	0,96	0,94	0,89
	50	0,92	0,94	0,96	0,96	0,94	0,88
	52	0,92	0,94	0,96	0,96	0,94	0,88
Південний схил 200	44	1,07	1,02	0,99	1,01	1,05	1,15
	46	1,07	1,02	0,99	1,01	1,06	1,15
	48	1,08	1,03	1,0	1,01	1,06	1,16
	50	1,08	1,03	1,0	1,01	1,06	1,16
	52	1,09	1,04	1,0	1,02	1,07	1,16
Південний схил 100	44	1,05	1,01	1,0	1,01	1,04	1,08
	46	1,05	1,02	1,0	1,01	1,04	1,08
	48	1,05	1,02	1,0	1,01	1,04	1,08
	48	1,05	1,02	1,0	1,01	1,04	1,08
	50	1,05	1,02	1,0	1,01	1,04	1,08
52	1,06	1,02	1,0	1,02	1,04	1,08	

Для розрахунку температури повітря на схилі використовується вираз

$$T_{S\,eks}^j = k_{eks}^{T(j)} \cdot T_s^j, \quad (15.3)$$

де  $T_{S\,eks}$  – середньодекадна температура повітря на схилі, °С;

$k_{eks}^T$  – коефіцієнт для перерахунку температури повітря на схилі, відн. од.;

$T_s$  – середньодекадна температура повітря на горизонтальній поверхні, °С.

Величина  $k_{eks}^T$  визначається в залежності від широти місцевості і крутості схилу:

а) північний схил

$$k_{eks}^{T(j)} = 1 - 0,003 \cdot (1 + 0,02\varphi) \cdot \beta_{kp}, \quad (15.4)$$

б) південний схил

$$k_{eks}^{T(j)} = 1 + 0,001 \cdot (1 + 0,007\varphi) \cdot \beta_{kp}, \quad (15.5)$$

в) східний і західний схили

$$k_{eks}^{T(j)} = 1 - 0,001 \cdot (1 - 0,005\varphi) \cdot \beta_{kp}, \quad (15.6)$$

г) північно-східний і північно-західний схили

$$k_{eks}^{T(j)} = 1 - 0,0025 \cdot (1 + 0,02\varphi) \cdot \beta_{kp}, \quad (15.7)$$

д) південно-східний і південно-західний схили

$$k_{eks}^{T(j)} = 1 - 0,00085 \cdot (1 + 0,07\varphi) \cdot \beta_{kp}, \quad (15.8)$$

де  $\varphi$  – широта пункту, град;

$\beta_{kp}$  – крутість схилу, град.

Режим зволоження ґрунту з урахуванням експозиції схилу визначається двома способами:

– перший спосіб – при наявності даних про вологість ґрунту

$$W_{eks}^j = k_{eks}^{W(j)} W_o^j, \quad (15.9)$$

де  $W_o$  – запаси продуктивної вологи у метровому шарі ґрунту на горизонтальній поверхні, мм;

$W_{eks}$  – запаси продуктивної вологи в шарі ґрунту 0–100 см на схилі, мм;

$k_{eks}^W$  – коефіцієнт для перерахунку запасів вологи на схилі, відн. од.

Величина  $k_{eks}^W$  визначається в залежності від зволоження місцевості, пори року, експозиції схилу і форми рельєфу (табл. 15.2).



Таблиця 15.2. Поправки для розрахунку запасів продуктивної вологи

Форма рельєфу	Пора року			Середня величина
	весна	літо	осінь	
А) Схили прямого та ввігнутого профілю				
Вершина	0,54	0,46	0,42	0,47
Північний схил:				
верхня частина	1,0	0,86	0,98	0,95
середня —"	1,0	1,0	1,0	1,03
нижня —"	1,5	1,49	1,08	1,36
Підніжжя	2,0	1,50	1,60	1,70
Південний схил:				
верхня частина	0,45	0,41	0,37	0,41
середня —"	0,62	0,50	0,48	0,53
нижня —"	0,93	0,93	0,96	0,95
Підніжжя	1,22	1,20	1,14	1,19
Рівна місцевість	1,0	1,0	1,0	1,0
б) Схили випуклого профілю				
Водороздільне плато	1,0	1,0	1,0	1,0
Північний схил:				
верхня частина	0,95	0,97	0,98	0,97
середня —"	1,03	1,0	1,0	1,01
нижня —"	1,03	0,92	0,82	0,92
Підніжжя	2,18	1,88	1,99	2,02
Південний схил:				
верхня частина	0,85	0,82	0,76	0,81
середня —"	0,73	0,77	0,71	0,74
нижня —"	0,78	0,72	0,66	0,72
Підніжжя	1,22	1,18	1,14	1,18

– другий спосіб – при відсутності даних про вологість ґрунту визначається сума опадів з урахуванням факторів зволоження території, експозиції схилу та форми рельєфу

$$O_{S_{eks}}^j = k_{eks}^{O_s} \cdot O_s^j, \quad (15.10)$$

де  $O_{S_{eks}}$  – сума опадів за декаду з урахуванням схилу, мм;

$k_{eks}^{O_s}$  – коефіцієнт для перерахунку опадів на схилі, відн. од;

$O_s$  – сума опадів за декаду на горизонтальну поверхню, мм.

Величина  $k_{eks}^{O_s}$  визначається в залежності від зволоження території, експозиції схилу і форми рельєфу (табл. 15.3).

Для розрахунку випаровуваності  $E_0$  використовується метод А.М. Алпатєва:

Таблиця 15.3. Поправки для розрахунку суми опадів в залежності від зволоження території, експозиції схилу та форми рельєфу

Зона зволоження	Північний схил				Південний схил			
	верхня частина	середня частина	нижня частина	підніжжя	верхня частина	середня частина	нижня частина	підніжжя
Ґрунт типу «а»								
Надмірно зволожена	0,82	0,87	0,92	1,50	0,88	0,90	0,92	1,38
Достатньо зволожена	0,83	0,85	0,88	1,56	0,88	0,94	0,96	1,32
Слабко посушлива	0,84	0,88	0,90	1,48	0,90	0,94	0,96	1,26
Посушлива	0,88	0,92	0,95	1,25	0,93	0,96	0,98	1,19
Дуже посушлива	0,93	0,95	0,98	1,15	1,0	1,0	1,0	1,0
Суха	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
Ґрунт типу «б»								
Надмірно зволожена	0,86	0,89	0,90	1,37	0,92	0,96	0,98	1,28
Достатньо зволожена	0,88	0,90	0,92	1,33	0,94	0,97	0,99	1,14
Слабко посушлива	0,89	0,92	0,95	1,20	0,96	0,98	1,0	1,06
Посушлива	0,95	0,97	0,89	1,15	0,98	1,0	1,0	1,02
Дуже посушлива	0,98	0,98	1,0	1,05	1,0	1,0	1,0	1,0
Суха	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Примітка:

1. Ґрунти типу «а»: підзолисті супіски, потужний чорнозем, типові і південні чорноземи, світло-каштанові.
2. Ґрунти типу «б»: підзолисті суглинки, лучні та деградовані чорноземи, терасовий чорнозем.

$$E_o^j = 0,65 \cdot DWW^j \cdot dv^j \cdot 0,75, \quad (15.11)$$

де  $DWW$  – середній за декаду дефіцит насичення повітря, мбар;  
 $dv$  – кількість днів у розрахунковій декаді.

Розрахунок випаровуваності з врахуванням експозиції схилу виконується за співвідношенням

$$E_{0eks}^j = k_{eks}^{E(j)} \cdot E_o^j, \quad (15.12)$$

де  $E_{0eks}$  – випаровуваність на схилі, мм;

$k_{eks}^E$  – коефіцієнт для перерахування випаровуваності на схилі, відн. од.

Сумарне випаровування визначається за формулою С.І. Харченко

$$E_{eks}^j = \frac{2W_{eks}^j + O_{S_{eks}}^j + P_{нор}^j}{1 + \frac{2W_{HB}}{E_{O_{eks}}^j}}, \quad (15.13)$$

де  $E_{eks}$  – сумарне випаровування на схилі, мм;

$P_{нор}$  – норма вегетаційних поливів, мм;

$W_{HB}$  – найменша вологемність у шарі ґрунту 0-100 см, мм;

$O_{S_{eks}}$  – сума опадів за декаду з урахуванням схилу, мм;

$W_{eks}$  – запаси продуктивної вологи у метровому шарі ґрунту на схилі, мм.

Величина коефіцієнта для перерахунку випаровуваності на схилі  $k_{eks}^E$  знаходиться в залежності від зволоження території, пори року, експозиції і крутості схилу (табл. 15.4).

За допомогою наступного співвідношення розраховується інфільтрація у нижні шари ґрунту

$$F_{ilt_{eks}}^j = W_{eks}^j + O_{S_{eks}}^j + P_{нор}^j - E_{eks}^j - W_{HB}, \quad (15.14)$$

де  $F_{ilt_{eks}}$  – інфільтрація в нижні шари ґрунту на схилі за декаду, мм.

Для розрахунку запасів продуктивної вологи на схилі використовується рівняння водного балансу

$$W_{eks}^{j+1} = W_{eks}^j + O_{S_{eks}}^j + P_{нор}^j - E_{eks}^j - F_{ilt_{eks}}^j. \quad (15.15)$$

Таблиця 15.4 – Поправки для розрахунку випаровуваності весною

Зона зволоження	Експозиція та крутизна схилу, град.							
	Північний схил				Південний схил			
	50	100	150	200	50	100	150	200
Достатньо зволожена	0,94	0,84	0,77	0,72	1,08	1,12	1,19	1,25
Слабко посушлива	0,92	0,87	0,76	0,69	1,05	1,11	1,17	1,20
Посушлива	0,91	0,82	0,75	0,66	1,05	1,10	1,17	1,19
Дуже посушлива	0,91	0,83	0,73	0,64	1,03	1,08	1,14	1,18

Примітка: ПВ – повна вологомність ґрунту.

Зони зволоження визначаються на основі середньорічних даних про зволоження ґрунту:

- 1) надмірно зволожена 70–90 % ПВ;
- 2) достатньо зволожена 50–60 % ПВ;
- 3) слабо посушлива 40–50 % ПВ;
- 4) посушлива 30–40 % ПВ;
- 5) дуже посушлива 20–30 % ПВ;
- 6) суха < 20 % ПВ

#### 15.4. Блок функцій впливу фази розвитку і метеорологічних факторів на продукційний процес рослин

В основі продукційного процесу рослин лежить фотосинтез. Його інтенсивність обумовлюється фазою розвитку рослин і умовами навколишнього середовища. Для розрахунку онтогенетичної кривої фотосинтезу використовується формула

$$\alpha_{\phi}^j = \exp \left[ -\alpha_{\phi} \left( \frac{TS_2 - \Sigma t_1}{10} \right)^2 \right], \quad (15.16)$$

де величина  $\alpha_{\phi}$  визначається за виразом

$$\alpha_{\Phi} = \frac{-100 \cdot \ln \alpha_{\Phi}^0}{(\sum t_1)^2}, \quad (15.17)$$

де  $\alpha_{\Phi}$  – онтогенетична крива фотосинтезу, відн. од.;

$\alpha_{\Phi}^0$  – початкове значення онтогенетичної кривої фотосинтезу, відн. од.

$\sum t_1$  – сума ефективних температур повітря від сходів, при якій спостерігається максимальна інтенсивність фотосинтезу рослин, °C;

$TS_2$  – сума ефективних температур, °C.

Функція впливу температури повітря на продукційний процес рослин визначається як:

$$\psi_{\Phi} = \begin{cases} 13,7 \cdot \sin(0,077 \cdot x_1^j) & \text{при } (T^j - T_{\Phi}) < T_{opt1}^j, \\ 1 & \text{при } T_{opt1}^j \leq (T^j - T_{\Phi}) \leq T_{opt2}^j, \\ 1,13 \cdot \cos(1,570 \cdot x_2^j) & \text{при } (T^j - T_{\Phi}) > T_{opt2}^j, \end{cases} \quad (15.18)$$

де  $\psi_{\Phi}$  – температурна крива фотосинтезу, відн. од.;

$T$  – середньодекадна температура повітря, °C;

$T_{\Phi}$  – середньодекадна температура повітря, при якій починається фотосинтез, °C;

$T_{opt1}$  – нижня межа температурного оптимуму для фотосинтезу, °C;

$T_{opt2}$  – верхня межа температурного оптимуму для фотосинтезу, °C.

У рівнянні (15.18) проміжні величини визначаються за формулами:

$$x_1^j = (T_s^j \cdot k_{eks}^T - T_{\Phi}) / (T_{opt1}^j - T_{\Phi}), \quad (15.19)$$

$$x_2^j = (T_s^j \cdot k_{eks}^T - T_{opt2}^j) / (T_{max}^j - T_{opt2}^j), \quad (15.20)$$

де  $T_{max}$  – середньодекадна температура повітря, при якій припиняється фотосинтез, °C;

$T_s$  – температура повітря на горизонтальній поверхні, °C;

$k_{eks}^T$  – коефіцієнт для перерахування температури повітря на схилі, відн. од.

Значення нижньої і верхньої межі температурного оптимуму для фотосинтезу визначаються як функції часу.

Функція впливу вологості ґрунту на фотосинтез  $\gamma_{\Phi}$  визначається так

$$\gamma_{\Phi} = \begin{cases} -1,163 \cdot (x_3^j)^2 + 2,187 \cdot x_3^j & \text{при } W^j \cdot k_{eks}^W < W_{opt1}^j \\ 1 & \text{при } W_{opt1}^j \leq W^j \cdot k_{eks}^W \leq W_{opt2}^j, \\ -0,654 + 3,824 \cdot x_4^j - 2,633 \cdot (x_4^j)^2 + 0,467 \cdot (x_4^j)^3 & \text{при } W^j \cdot k_{eks}^W > W_{opt2}^j, \end{cases} \quad (15.21)$$

де  $W$  – запаси продуктивної вологи у метровому шарі ґрунту, мм;

$W_{opt1}$  – нижня межа оптимальних запасів вологи, мм;

$W_{opt2}$  – верхня межа оптимальних запасів вологи, мм.

$$x_3^j = W^j \cdot k_{eks}^W / W_{opt1}^j, \quad (15.22)$$

$$x_4^j = W^j \cdot k_{eks}^W / W_{opt2}^j, \quad (15.23)$$

де  $k_{eks}^W$  – коефіцієнт для перерахування запасів вологи на схилі, відн. од..

Функція впливу вологозабезпеченості посівів розглядається як сполучення двох функцій. Враховується функція впливу вологості ґрунту на продуктивність рослин (за даними про фактичні запаси вологи) і відношення сумарного випаровування посівів до випаровуваності з врахуванням експозиції і крутості схилів

$$FW = \left( \gamma_{\Phi}^j \cdot \frac{E_{eks}^j}{E_{0\,eks}^j} \right)^{0,5}, \quad (15.24)$$

де  $FW$  – відносна вологозабезпеченість посівів, відн. од..

Аналогічно визначається узагальнена функція впливу термічного режиму і вологозабезпеченості  $FTW_1$  на фотосинтез

$$FTW_1 = (\psi_{\Phi} FW)^{0,5}. \quad (15.25)$$

До цієї функції вводиться корекція на рівень температури в сполученні з вологозабезпеченістю

$$FTW_2 = \begin{cases} FTW_1[1 + (1 - \Psi_\Phi)(1 - FW)] & \text{при } t_n < t_{opt1} \\ FTW_1 & \text{при } t_{opt1} \leq t_n \leq t_{opt2} \\ FTW_1[1 - (1 - \Psi_\Phi)(1 - FW)] & \text{при } t_n > t_{opt2} \end{cases} \quad (15.26)$$

### 15.5. Блок родючості ґрунту і забезпеченості рослин мінеральним живленням

Родючість ґрунту характеризується вмістом у ній гумусу, що залежить від міри впливу ерозії ґрунту.

$$G_{umeks} = k_{er}^G \cdot G_{um}, \quad (15.27)$$

$$F_{G_{um}} = \frac{G_{umeks}}{G_{umopt}}, \quad (15.28)$$

де  $G_{um}$  – вміст гумусу у ґрунті, %;

$G_{umeks}$  – вміст гумусу у ґрунті на схилах з врахуванням ерозії, %;

$k_{er}^G$  – функція впливу ерозії ґрунту на вміст гумусу у ґрунті, відн. од.;

$G_{umopt}$  – оптимальний для вирощування сільськогосподарської культури вміст гумусу у ґрунті, %.

Функція впливу вмісту гумусу у ґрунті визначається за формулою О.С. Образцова для розрахунку забезпеченості рослин елементами мінерального живлення

$$FW_{G_{um}} = (F_{G_{um}})^{1,35} \cdot \exp[1,1 \cdot (1 - F_{G_{um}})], \quad (15.29)$$

де  $FW_{G_{um}}$  – функція впливу вмісту гумусу у ґрунті на формування урожаю, відн. од..

Значення функцій оптимальності азотного, фосфорного і калійного живлення розраховується за методом О.С. Образцова з деякими модифікаціями:

$$F_N = \frac{N_m}{N_{opt}}, \quad (15.30)$$

$$FW_N^j = \left\{ (F_N)^{1,35} \cdot \exp[1,1 \cdot (1 - F_N)] \right\} \cdot k_{ef}^j, \quad (15.31)$$

де  $N_m$  – внесена доза азотних добрив, кг/га;

$N_{opt}$  – оптимальна доза азотних добрив, необхідна для одержання максимального урожаю, кг/га;

$FW_N$  – функції впливу забезпеченості азотом, відн. од.;

$k_{ef}$  – коефіцієнт ефективності добрив в залежності від вологості ґрунту, відн. од.

Аналогічно визначаються функції впливу забезпеченості фосфором  $FW_P$  і калієм  $FW_K$ .

Вплив режиму зволоження ґрунту на ефективність добрив враховується за виразом:

$$k_{ef}^j = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{W_{eks}^j}{W_{opt1}^j} \geq 0,85, \\ 0,8 & \text{при } 0,70 < \frac{W_{eks}^j}{W_{opt1}^j} < 0,85, \\ 0,6 & \text{при } \frac{W_{eks}^j}{W_{opt1}^j} \leq 0,70, \end{cases} \quad (15.32)$$

Аналогічно визначається співвідношення дози органічних добрив до їх оптимальної величини і розраховується функція впливу внесення органічних добрив з врахуванням року внесення добрив

$$F_{O_{rg}} = \frac{O_{rg}}{O_{rgopt}}, \quad (15.33)$$

$$FW_{O_{rg}}^j = \left\{ (F_{O_{rg}})^{1,35} \cdot \exp[1,1 \cdot (1 - F_{O_{rg}})] \right\} \cdot k_{O_{rg}}^g \cdot k_{ef}^j, \quad (15.34)$$

де  $FW_{O_{rg}}$  – функція впливу внесення органічних добрив на урожай;

$O_{rg}$  – внесена доза органічних добрив, т/га;

$O_{rgopt}$  – оптимальна для вирощування сільськогосподарської культури доза внесення органічних добрив, т/га;

$k_{O_{rg}}^g$  – коефіцієнт впливу року внесення органічних добрив, відн. од.

Узагальнена функція впливу родючості ґрунту і внесення мінеральних та органічних добрив розраховується за принципом Лібіха

$$FWM_{ef}^j = \min\{FW_{Org}^j, FW_N^j, FW_P^j, FW_K^j\}, \quad (15.35)$$

де  $FWM_{ef}$  – функція впливу ефективної родючості на урожай, відн. од.

### 15.6. Блок агроекологічних категорій урожайності

Визначення величини різних агроекологічних категорій урожайності здійснюється з врахуванням внесених модифікацій, із залученням більш повної інформації і наповненням цих категорій новим змістом.

Збільшення потенційної урожайності загальної біомаси за декаду визначається в залежності від інтенсивності фотосинтетично активної радіації (ФАР) і біологічних особливостей культури з врахуванням зміни здатності рослин до фотосинтезу протягом вегетації

$$\frac{\Delta ПУ^j}{\Delta t} = \alpha_\phi^j \frac{\eta \cdot Q_{\text{фар}}^j \cdot k_{\text{eks}}^{Q^j} \cdot dV^j}{q}, \quad (15.36)$$

де  $\frac{\Delta ПУ}{\Delta t}$  – приріст потенційної урожайності загальної біомаси за декаду, г/м<sup>2</sup>;

$\alpha_\phi$  – онтогенетична крива фотосинтезу, відн. од.;

$\eta$  – КПД посівів, відн. од.;

$Q_{\text{фар}}$  – середньодекадна за добу сума ФАР, кал/см<sup>2</sup>·д;

$k_{\text{eks}}^{Q^j}$  – коефіцієнт для перерахування середньої за декаду сумарної сонячної радіації з горизонтальної поверхні для схилів різної експозиції і крутості, відн. од.;

$q$  – калорійність, кал/г.

Приріст метеорологічно-можливої урожайності загальної біомаси являє собою приріст потенційної урожайності, який буде обмежений впливом волого-температурного режиму:

$$\frac{\Delta ММУ^j}{\Delta t} = \frac{\Delta ПУ^j}{\Delta t} \cdot FTW_2, \quad (15.37)$$

де  $\frac{\Delta ММУ}{\Delta t}$  – приріст метеорологічно-можливої урожайності загальної біомаси за декаду, г/м<sup>2</sup>;

$FTW_2$  – узагальнена функція впливу волого-температурного режиму з корекцією на сполучення різних екстремальних умов, відн. од.

Формування дійсно можливої урожайності загальної біомаси обмежується рівнем природної родючості ґрунту:

$$\frac{\Delta ДМУ^j}{\Delta t} = \frac{\Delta ММУ^j}{\Delta t} B_{\text{пл}} F_{\text{Гум}}, \quad (15.38)$$

де  $\frac{\Delta ДМУ}{\Delta t}$  – приріст дійсно можливої урожайності загальної біомаси за декаду, г/м<sup>2</sup>;

$B_{\text{пл}}$  – бал ґрунтового бонітету, відн. од.

Одержання рівня господарської урожайності загальної біомаси обмежується реально існуючим рівнем культури землеробства й ефективністю внесених мінеральних і органічних добрив:

$$\frac{\Delta УВ^j}{\Delta t} = \frac{\Delta ДМУ^j}{\Delta t} k_{\text{земл}} FWM_{ef}^j, \quad (15.39)$$

де  $\frac{\Delta УВ}{\Delta t}$  – приріст урожайності загальної біомаси у виробництві, г/м<sup>2</sup>;

$k_{\text{земл}}$  – коефіцієнт, що характеризує рівень культури землеробства і господарської діяльності, відн. од.;

$FWM_{ef}$  – функція ефективності внесення органічних і мінеральних добрив в залежності від умов вологозабезпеченості декад вегетації, відн. од.

Різні агроекологічні категорії урожаю зерна при його стандартній 14 %-ій вологості визначаються за виразом

$$ПУ_{\text{зерна}} = ПУ \cdot K_{\text{госп.}}^{ПУ} \cdot 1,14 \cdot 0,1 \quad (15.40)$$

де  $ПУ_{\text{зерна}}$  – потенційний урожай зерна, ц/га;

$K_{\text{госп.}}^{ПУ}$  – частка зерна в загальній масі потенційного урожаю, відн. од., яка визначається в залежності від розмірів урожаю загальної біомаси.

Аналогічно визначаються відповідно метеорологічно-можливий  $ММУ_{\text{зерна}}$ , дійсно можливий  $ДМУ_{\text{зерна}}$  і урожай у виробництві  $УВ_{\text{зерна}}$  зерна.

### 15.7. Блок узагальнених оціночних характеристик

Аналіз різноманітних агроекологічних категорій врожайності (*ПУ*, *ММУ*, *ДМУ*, *УВ*), а також їхніх співвідношень і відмінностей дозволяє судити про природні й антропогенні ресурси сільського господарства, а також про ефективність господарського використання цих ресурсів стосовно вирощування сільськогосподарських культур.

Розглянемо п'ять узагальнених характеристик:

1. Ступінь сприятливості метеорологічних умов вирощування культури характеризує співвідношення метеорологічно-можливої врожайності і потенційної врожайності

$$K_m = ММУ_{зерна} / ПУ_{зерна}, \quad (15.41)$$

де  $K_m$  – коефіцієнт сприятливості метеорологічних умов, відн. од.

2. Сприятливість ґрунтових умов показує відношення дійсно можливої врожайності до метеорологічно-можливої врожайності

$$K_g = ДМУ_{зерна} / ММУ_{зерна}, \quad (15.42)$$

де  $K_g$  – коефіцієнт сприятливості ґрунтових умов, відн. од.

3. Співвідношення врожайності у виробництві і метеорологічно-можливої врожайності встановлює ефективність використання агрокліматичних ресурсів. Якщо це співвідношення розраховується за середніми багаторічними даними, то воно відображає ефективність використання агрокліматичних ресурсів

$$K_{акл} = УВ_{зерна} / ММУ_{зерна}, \quad (15.43)$$

де  $K_{акл}$  – коефіцієнт ефективності використання агрокліматичних ресурсів, відн. од.

4. При реальних ґрунтових умовах співвідношення врожайності у виробництві і дійсно можливої врожайності можна розглядати як показник досконалої агротехнології

$$K_{земл} = УВ_{зерна} / ДМУ_{зерна}, \quad (15.44)$$

де  $K_{земл}$  – коефіцієнт ефективності використання існуючих агрометеорологічних і ґрунтових умов (характеризує рівень культури землеробства з погляду ефективності господарського використання

існуючого комплексу агрометеорологічних і ґрунтових умов), відн. од.

5. Величина відношення урожайності у виробництві до потенційної урожайності характеризує рівень реалізації агроекологічного потенціалу

$$K_{аек.пот} = УВ_{зерна} / ПУ_{зерна}, \quad (15.45)$$

де  $K_{аек.пот}$  – коефіцієнт реалізації агроекологічного потенціалу, відн. од.

Підвищення рівня  $УВ_{зерна}$  і доведення його до  $ДМУ_{зерна}$  вимагає ретельного дотримання всіх засобів агротехніки, виконання їх у повній відповідності з агрометеорологічними умовами на конкретному полі. Це є першочерговою задачею програмування урожаїв, спрямованого на усунення дії різноманітних господарських факторів, які знаходяться у мінімумі.

Наближення  $ДМУ_{зерна}$  до  $ММУ_{зерна}$  вимагає виконання різноманітних заходів для підвищення родючості ґрунту. Різниця між  $ММУ_{зерна}$  і  $ПУ_{зерна}$  компенсується за рахунок меліоративних заходів, а також внаслідок правильного підбору сортів і культур, що краще пристосовані до особливостей конкретного клімату. Підвищення рівня  $ПУ_{зерна}$  забезпечується головним чином шляхом селекції нових сортів, які будуть мати більш високий рівень урожайності за рахунок ефективного використання сонячної радіації.

Формули (15.1)–(15.45) дозволяють визначити основні агроекологічні категорії урожайності сільськогосподарських культур для різних елементів рельєфу, що формуються під впливом ґрунтово-кліматичних умов і мікрокліматичних особливостей досліджуваних територій та виконати для цих територій оцінку агрокліматичних ресурсів формування продуктивності сільськогосподарських культур.

## 16. ГОЛЛАНДСЬКА ШКОЛА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОДУЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР

Для голландської школи моделювання ("School of de Wit") характерно представляти продукційний процес рослин у вигляді системи, де відбувається інтенсивна взаємодія таких процесів як асиміляція  $\text{CO}_2$ , дихання, ріст і розвиток. Швидкості протікання цих фізіологічних процесів визначаються умовами навколишнього середовища. При цьому розглядається, що межі систем природних і культивованих рослинних суспільств дуже умовні.

Де Вітт запропонував розрізнити чотири рівні продуктивності сільськогосподарських культур [de Wit, Penning de Vries, 1982).

*Перший рівень продуктивності.* Ріст відбувається в умовах постійного повноцінного забезпечення рослин поживними речовинами і ґрунтовою вологою. Швидкість росту рослин визначається умовами погоди і в перерахунку на приріст сухої речовини складає 150–350 кг на 1 га за добу при зімкнутому рослинному покриві. Часто поглинена радіація є фактором, який обмежує швидкість росту протягом вегетаційного періоду, проте, на самому його початку ріст може лімітуватися низькими температурами.

В реальних умовах це часто спостерігається в районах з холодним кліматом. Для цього класу систем характерні наступні основні елементи: маса сухої речовини листя, стебел, репродуктивних або запасуючих органів і коріння, площа поверхні фотосинтезуючих тканин; основні процеси – асиміляція  $\text{CO}_2$ , дихання підтримки, ріст, розподіл асимілятів і розвиток листової поверхні. Умови, в яких ріст рослин протікає на такому рівні продуктивності, можуть бути створені як в полі, так і в лабораторії. На практиці такі умови зустрічаються, наприклад, в оранжереях і при інтенсивному обробітку цукрового буряка, картоплі і пшениці на деяких голландських фермах.

*Другий рівень продуктивності.* Ріст лімітується, принаймні частина часу, дефіцитом вологи, але при достатній вологозабезпеченості швидкість росту підвищується до максимального значення, яке визначається погодою. Таку ситуацію можна створити штучним шляхом, вносячи мінеральні добрива, в районах помірного і напівпосушливого клімату. На практиці такі умови складаються, наприклад, на богарних угіддях, які добре удобрюють, до яких відносяться багато пасовищ в Голландії.

До додаткових елементів, які характеризують системи цього класу, відноситься водний баланс рослин і ґрунту. До процесів, що мають вирішальне значення, відносяться транспірація, яка пов'язана з асиміляцією  $\text{CO}_2$ , а також усі інші процеси, що визначають водний режим ґрунту (такі як випаровування, дренаж і поверхневий стік). Для цього рівня

продуктивності необхідно детально досліджувати тепловий баланс посіву, оскільки він тісно пов'язаний з водним балансом.

*Третій рівень продуктивності.* Ріст лімітується нестачею азоту, принаймні деякий час, і вологою або погодними умовами протягом іншої частини вегетаційного періоду. Таке положення досить часто зустрічається в природі, а також складається в сільськогосподарських господарствах, в яких недостатньо використовуються мінеральні добрива. Проте, навіть при внесенні достатньої кількості мінеральних добрив, до кінця вегетаційного періоду рослини зазвичай починають відчувати нестачу вологи. Для систем такого класу важливими елементами є різні форми азоту, що міститься в ґрунті й рослинах, а до тих, що визначають відносяться процеси перетворення азотних сполук в ґрунті у форми, доступні для рослин, вилуговування, денітрифікація, поглинання азоту корінням, ростова реакція на концентрацію азоту і перерозподіл його в рослині (пересування з органів, які закінчили ріст в ті, що ростуть).

*Четвертий рівень продуктивності.* Ріст стримується дефіцитом фосфору або інших мінеральних речовин (таких, як калій), принаймні деякий час, і азотом, вологою або погодними умовами вегетаційного періоду. В цьому випадку особливий інтерес представляє дефіцит фосфору, оскільки він тісно пов'язаний з метаболізмом азоту. Швидкість росту, в перерахунку на приріст сухої речовини, зазвичай складає від 10 до 50  $\text{кг}\cdot\text{га}^{-1}\cdot\text{д}^{-1}$  протягом вегетаційного періоду, що не перевищує 100 діб. Така ситуація часто зустрічається в районах, де ґрунти виснажені, а мінеральні добрива не застосовуються, тобто в бідних країнах світу.

Для систем цього класу найважливішим елементом є вміст фосфору або інших мінеральних речовин у ґрунтах і рослинах, а найважливішими процесами – перетворення цих поживних речовин в органічні або неорганічні форми з різною мірою доступності, поглинання мінеральних речовин коренями та реакція ростових процесів на їх абсолютну доступність.

На основі цих підходів було створено ціле «сімейство» моделей. Одні з перших динамічних моделей потенційної продуктивності були моделі ELCROS (Elementary CROp Simulator, de Wit et al., 1970) і BACROS (Basic CROp growth Simulator, de Wit et al., 1978). В цих моделях розглядався ріст і транспірація польових культур у вегетативній фазі за умов, коли вологозабезпеченість і умови мінерального живлення не лімітують продуктивності.

На основі BACROS була створена більш деталізована з меншим кроком за часом модель PHOTON (simulation of daily PHOTOSynthesis and transpiration, de Wit et al., 1978). З метою врахування впливу головного лімітуючого фактора – вологозабезпеченості – на продуктивність сільськогосподарських культур була розроблена модель ARID CROP (van

Keulen, 1982), яка базувалася на концепціях сформованих в ELCROS і BACROS. Врахування динаміки азоту в ґрунті і лімітування продуктивності рослин азотом реалізований в моделі PAPRAN (Production of Arid Pastures limited by Rainfall and Nitrogen, van Keulen, 1982).

Модель SUCROS (Simple and Universal CROp growth Simulator, van Keulen, 1982) описує накопичення сухої маси рослин від сходів до дозрівання за умов потенційної продуктивності. Однією з перших орієнтованих на застосування моделей розвинених з моделей SUCROS була модель WOFOST (WOrld FOod STudies, van Keulen, Wolf, 1986; van Diepen et al., 1988).

Для умов напівгумідної зони запропонована модель MACROS (Modules of Annual CROp Simulator, Penning de Vries et al., 1989). Її побудова переслідувала двояку мету: по-перше, навчальну для освоєння апарату моделювання вченими у Південно-Східній Азії і, по-друге, для розвитку застосування моделей в дослідженнях таких проблем: рослинних систем, потенційної продуктивності рослин, поглинання води та азоту, ріст кореневої системи, розвитку й шкідливого впливу шкідників і хвороб рослин, ріст бур'янів.

На основі підходів Мантіса (Monteith, 1969, 1990) запропонована модель LINTUL (Light INTerception and Utilization, Spitters, Shapendonk, 1990; Kooman, 1995). LINTUL була перша модель, яка по будові відрізняється від принципів побудови моделей школи де Віта. У цій моделі швидкість росту біомаси розраховується як продукт перехоплення радіації рослинністю й ефективності використання світла.

Наступником агрогідрологічної моделі SWATR (Feddes et al., 1978) є модель SWAP version 3.0.3 (Soil – Water – Atmosphere – Plant, Kroes J.D., J.C. van Dam, 2003) з численними похідними (доповненнями). В моделі SWAP використовується модуль рослинності, заснований на моделі ріст рослин WOFOST.

## 16.1. Моделі системи ґрунт – вода – атмосфера – рослина (SWAP-WOFOST моделі)

### 16.1.1. Опис системи

Модель SWAP є фізично обґрунтованою деталізованою агрогідрологічною моделлю, в якій моделюються взаємозв'язки між ґрунтом, водою, погодою і рослиною (рис. 16.1). Центральною ланкою моделі є рівняння Річардса, яке моделює транспорт води в комбінації із законом Дарсі і законом збереження маси. В моделі SWAP розглядається рух ґрунтової води в просторі і потенціал ґрунтової вологи у ґрунтовому

профілі. Основне рівняння розв'язується чисельно, в нього включається схема, використана в роботі (Belmans et al., 1983), яка може бути ефективно застосована як для насичених, так і ненасичених вологою ґрунтах.

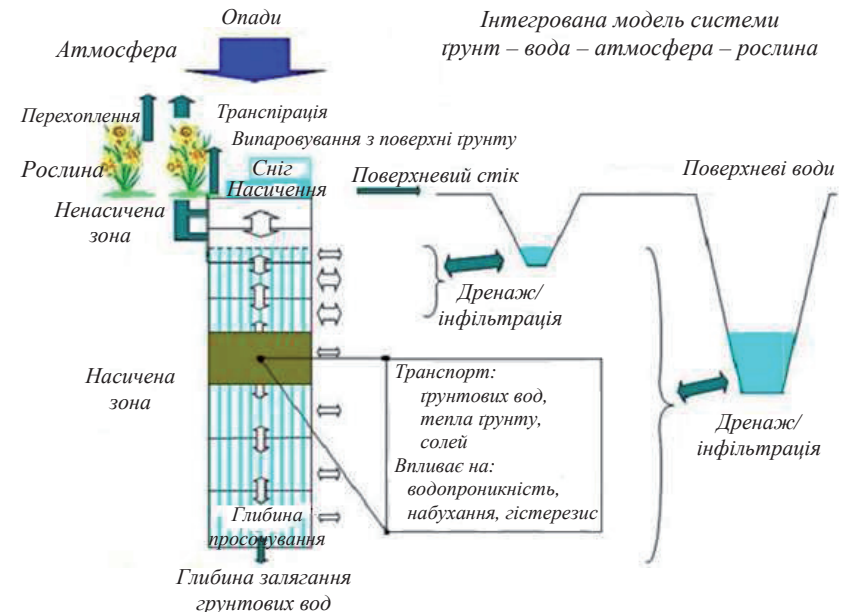


Рис. 16.1. Схематичне зображення системи, моделюємої в SWAP (Van Dam et al., 1997).

Значною особливістю рівняння Річардса є те, що воно дозволяє використовувати ґрунтово-гідрологічні бази даних і моделювати усі види керованих сценаріїв. У моделі SWAP ґрунтово-гідрологічні функції описуються за допомогою аналітичних функцій (Van Genuchten, 1980 і Mualem, 1976) для утримання ґрунтової вологи та гідравлічної провідності.

Модель SWAP моделює не лише кількість води але також і її якість і розглядає вплив тепла на стан ґрунтового розчину. Гістерезис, водопроникність, набухання ґрунту і стискування можуть бути також розглянуті під впливом транспорту ґрунтової води і розчину.

Водний баланс вирішується за допомогою двох граничних умов – на верхній і нижній межі. Ці межі задаються у вигляді потоків. При оцінці сумарного випаровування використовується рівняння Пенмана-Мантіса.



Модель використовує листковий індекс (LAI) або фракцію поверхні ґрунту (SC) для розрахунку потенційної транспірації і випаровування частково покритого рослинністю ґрунту. SWAP – перша модель, яка окремо розглядає потенційну транспірацію рослин  $T_p$  і потенційне випаровування  $E_p$  і надалі розраховує редуцію  $T_p$  на основі більш фізичних підходів. Вплив соляного і водно-кисневого стресу на поточну транспірацію розглядається мультиплікативно (множенням).

Поверхневий стік визначається як відношення різниці повного заповнення водою і максимальної висоти порогу або перешкод (нерівностей) до опору ґрунту поверхневому стоку. Поверхнєве затримання враховується за допомогою періоду опору.

Польовий дренаж може моделюватися за допомогою рівнянь Худхаудна і Ернста для однорідного і неоднорідного ґрунтового профілю. Дренаж моделюється як однорівнева і багаторівнева система. Потік вологи знизу визначається відповідно до граничних умов прийнятих в моделі.

У SWAP моделі проста модель рослинності і детальна модель рослинності WOFOST (Supit et al., 1994) моделюють ріст рослин. Проста модель заснована на лінійній функції продуктивності, описаній в роботі Doogenbos і Kassam (1979). Використовується специфічний листковий індекс (або фракція покриття ґрунту), висота рослин і глибина розповсюдження коріння як функція стадії розвитку. Модель WOFOST є досить узагальненою моделлю, яка може бути використана для моделювання росту і розвитку більшості сільськогосподарських культур.

Модель SWAP описує транспортний механізм розчинених речовин. Моделюється конвекція розчинених речовин, дифузія й дисперсія, нелінійна адсорбція, перший порядок декомпозиції та кореневе поглинання. У першому наближенні моделюється транспорт пестицидів і солей, включаючи вплив засоленості на ріст рослин.

Потік тепла в моделі SWAP вирішується аналітично і чисельно. В моделі SWAP моделюється декілька сценаріїв водного управління. Перелік іригації може бути розглянутий як фіксований в часі або наслідуючи чисельні критерії. Також передбачається комбінація способів іригації. Перелік критеріїв і глибина іригації визначаються в процесі росту рослин.

Для моделюваної системи ґрунт – вода – атмосфера – рослина розглядається повний водний баланс з гнучким тимчасовим інтервалом (доба – рік).

*Моделюється Зміна накопичення = Приплив – Витрата:*

*Зміна накопичення* охоплює протягом деякого часового інтервалу: ґрунт, сніговий покрив, поверхневий шар набухання, ґрунтові тріщини;

*Приплив* охоплює протягом деякого часового інтервалу: опади, зрошення, поверхневий стік; наплив поверхневих вод, інфільтрація з 5

різних поверхонь водної системи, підйом ґрунтових вод через нижню межу системи;

*Витрата* охоплює протягом деякого часового інтервалу: поверхневий стік, дренаж з 5 різних поверхонь водної системи, потік води вниз через нижню межу системи, випаровування перехоплених опадів, випаровування з поверхні ґрунту, шар набухання, транспірація рослин.

У моделі SWAP описується взаємодія між підсистемами ґрунту (ненасиченою і насиченою вологою ґрунту), атмосфери, рослини, ґрунтових вод і поверхневих вод. Потокова схема головних потоків води в модельованих підсистемах наведена на рис. 16.2.

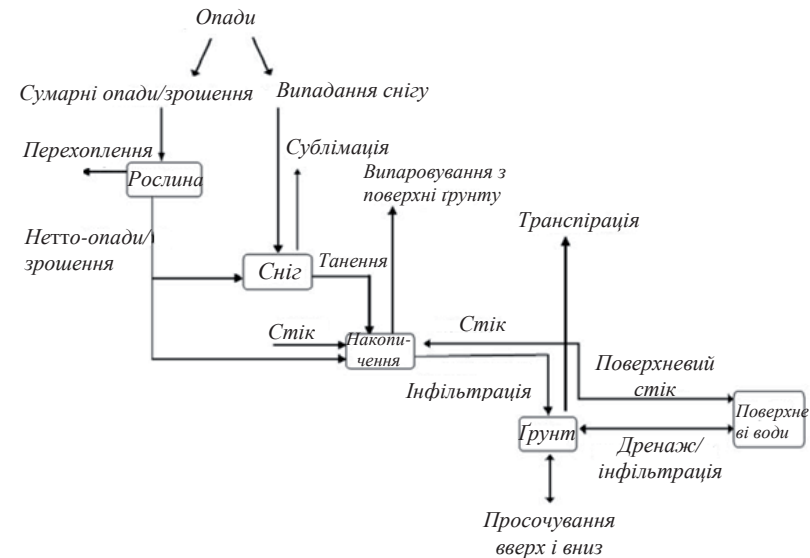


Рис. 16.2. Діаграма основних потоків між підсистемами.

### 16.1.2. Потік вологи у ґрунті

Просторові відмінності водного потенціалу індукують рух ґрунтової вологи. Для кількісного опису потоку вологи використовується рівняння Дарсі. Для однорізного вертикального потоку рівняння Дарсі може бути записане у вигляді

$$q = -K \frac{\partial(h+z)}{\partial z}, \quad (16.1)$$

де  $q$  – густина потоку води у ґрунті (позитивний напрям – вгору),  $\text{см}\cdot\text{д}^{-1}$ ;  
 $K$  – гідравлічна провідність,  $\text{см}\cdot\text{д}^{-1}$ ;  
 $h$  – тиск ґрунтової вологи,  $\text{см}$ ;  
 $z$  – вертикальна координата, яка позитивно спрямована вгору,  $\text{см}$ .

Водний баланс розглядається як баланс вологи в даних шарах ґрунту за допомогою рівняння нерозривності для води у ґрунті

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} - S_a(h), \quad (16.2)$$

де  $\theta$  – об'ємна вологість ґрунту,  $\text{см}^3\cdot\text{см}^{-3}$ ;

$t$  – час,  $\text{д}$ ;

$S_a$  – поглинання вологи корінням рослин,  $\text{см}^3\cdot\text{см}^{-3}\cdot\text{д}^{-1}$ .

Комбінація рівнянь (16.1) і (16.2) дає узагальнене рівняння потоку вологи в насиченому вологою ґрунті, назване рівнянням Річардса :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial [K(h) \left( \frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right)]}{\partial z} - S_a(h), \quad (16.3)$$

де  $C$  – диференціальна вологоємність ( $\partial \theta / \partial h$ ),  $\text{см}^{-1}$ .

Рівняння Річардса має ясну фізичну основу в масштабі, де ґрунт може розглядатися як континуум ґрунту, повітря і води. Рівняння (16.3) вирішується чисельно із заданими початковими і граничними умовами та знанням співвідношень між  $\theta$ ,  $h$  і  $K$ .

Для розрахунку  $\theta(h)$  запропонована (Van Genuchten, 1980) аналітична функція

$$\theta = \theta_{res} + \frac{\theta_{sat} - \theta_{res}}{\left(1 + |\alpha h|^2\right)^m}, \quad (16.4)$$

де  $\theta_{sat}$  – насичений вологовміст,  $\text{см}^3\cdot\text{см}^{-3}$ ;

$\theta_{res}$  – залишковий вологовміст в сухій області,  $\text{см}^3\cdot\text{см}^{-3}$ ;

$\alpha$  – параметр основної кривої висихання,  $\text{см}^{-1}$ ;

$n$  і  $m$  – емпіричні параметри основної кривої висихання і основної кривої зволоження.

Параметр  $m$  може бути визначений за формулою

$$m = 1 - \frac{1}{n}. \quad (16.5)$$

Використовуючи наведене вище відношення і застосовуючи теорію ненасиченої гідравлічної провідності Mualem (1976), отримаємо наступну функцію для  $K(\theta)$

$$K = K_{sat} S_e^\lambda \left[ 1 - \left( 1 - S_e^{1/m} \right)^m \right]^2, \quad (16.6)$$

де  $K_{sat}$  – насичена провідність,  $\text{см}\cdot\text{д}^{-1}$ ;

$\lambda$  – параметр, який залежний від ( $\partial \theta / \partial h$ );

$S_e$  – відносне насичення, яке визначається так

$$S_e = \frac{\theta - \theta_{res}}{\theta_{sat} - \theta_{res}}. \quad (16.7)$$

### 16.1.3. Взаємодія системи атмосфера – ґрунт – рослина

*Перехоплення опадів рослинністю.* У моделі SWAP передбачена оцінка перехоплення рослинністю опадів. На основі вимірювання перехоплення опадів різною рослинністю Von Hooningen – Hune (1983) і Braden (1985) запропонували наступну досить загальну формулу для розрахунку перехоплення опадів рослинністю

$$P_i = a \cdot LAI \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{b \cdot P_{gross}}{a \cdot LAI}} \right], \quad (16.8)$$

де  $P_i$  – перехоплена кількість опадів,  $\text{см}\cdot\text{д}^{-1}$ ;

$LAI$  – листовий індекс;

$P_{gross}$  – gros-опад,  $\text{см}\cdot\text{д}^{-1}$ ;

$a$  – емпіричний коефіцієнт,  $\text{см}\cdot\text{д}^{-1}$ ;

$b$  – міра покриття ґрунту ( $\approx LAI / 3,0$ ).

При збільшенні кількості опадів, кількість перехоплених опадів асимптотично наближається до насиченої кількості  $a \cdot LAI$ . В принципі коефіцієнт  $a$  має бути визначений експериментально. У разі звичайних сільськогосподарських культур він приймається рівним  $a = 0,25 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ .

*Потенційне сумарне випаровування.* Сумарне випаровування охоплює транспірацію рослин і випаровування з ґрунту або води, перехопленої рослинністю або накопиченої на поверхні ґрунту.

Потенційне й поточне сумарне випаровування оцінюється за допомогою рівняння Пенмана-Монтґа (Monteith, 1965).

$$ET_p = \frac{\Delta_v (R_n - G) + \frac{p_l \rho_{air} C_{air} e_{sat} - e_a}{\lambda_w} r_{air}}{\Delta_v + \gamma_{air} \left(1 + \frac{r_{crop}}{r_{air}}\right)}, \quad (16.9)$$

де  $ET_p$  – потенційна швидкість транспірації, мм·д<sup>-1</sup>;

$\Delta_v$  – нахил кривої тиску водяної пари, кПа °С<sup>-1</sup>;

$\lambda_w$  – прихована теплота пароутворення, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$R_n$  – радіаційний баланс на поверхні рослин, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$G$  – потік тепла в ґрунт, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$p_l$  – коефіцієнт для перерахунку, рівний 84600 с·д<sup>-1</sup>;

$\rho_{air}$  – густина (щільність) повітря, кг·м<sup>-3</sup>;

$C_{air}$  – теплоємність вологого повітря, Дж·кг<sup>-1</sup>·°С<sup>-1</sup>;

$e_{sat}$  – тиск насиченої водяної пари, кПа;

$e_a$  – поточний тиск водяної пари, кПа;

$\gamma_{air}$  – психрометрична стала, кПа·°С<sup>-1</sup>;

$r_{crop}$  – опір рослинності, с·м<sup>-1</sup>;

$r_{air}$  – аеродинамічний опір, с·м<sup>-1</sup>.

Радіаційний баланс є різницею між прихідною і відбивною короткохвильовою і довгохвильовою радіацією. Баланс між поглиненою енергією і випроміненою з поверхні ґрунту розраховується так

$$R_n = (1 - \alpha_r) R_s - R_{nl}. \quad (16.10)$$

де  $R_n$  – радіаційний баланс, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$\alpha_r$  – альбедо;

$R_s$  – щільність глобального (сумарного) радіаційного потоку, Дж·м<sup>-1</sup>·д<sup>-1</sup>;

$R_{nl}$  – радіаційний баланс довгохвильової радіації, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>.

Для розрахунку радіаційного балансу довгохвильової радіації застосовується формула (Allen et al., 1998)

$$R_{nl} = \sigma_{sb} \left[ \frac{T_{\max}^4 + T_{\min}^4}{2} \right] (0,34 - 0,14 \sqrt{e_{act}}) (0,1 + 0,9 N_{rel}), \quad (16.11)$$

де  $\sigma_{sb}$  – константа Стефана-Больцмана ( $4,903 \cdot 10^{-8}$  Дж·К<sup>-4</sup>·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>);

$T_{\max}$  і  $T_{\min}$  – відповідно максимальна і мінімальна абсолютна температура повітря протягом доби, К;

$e_{act}$  – поточний тиск водяної пари, кПа;

$N_{rel}$  – відносна тривалість сонячного саява.

Відносна тривалість сонячного саява може бути визначена за допомогою результатів вимірів глобальної сонячної радіації  $R_n$  і прихідної радіації  $R_a$ , яка надходить на горизонтальну поверхню верхньої межі атмосфери

$$N_{rel} = \frac{R_s}{b R_a} - a \quad (16.12)$$

де  $R_a$  – прихідна радіація, яка надходить на горизонтальну поверхню верхньої межі атмосфери, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$a$  і  $b$  – емпіричні коефіцієнти, які залежать від місцевого клімату і в першому наближенні набувають таких значень:  $a = 0,25$  і  $b = 0,50$ .

Прихідна радіація залежить від широти місцевості та дня року і визначається так

$$R_a = \frac{G_{sc}}{\pi} d_r [\omega_s \sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \sin(\omega_s)]. \quad (16.13)$$

де  $d_r$  – величина, зворотна відноській відстані Земля – Сонце;

$\omega$  – годинний кут заходу Сонця, рад;

$\varphi$  – широта місцевості, рад;

$\delta$  – схилення Сонця, рад.

Зворотна відносна відстань Земля – Сонце і схилення Сонця визначаються так:

$$d_r = 1 + 0,033 \cos\left(\frac{2\pi}{365} J\right); \quad (16.14)$$

$$\delta = 0,409 \sin\left(\frac{2\pi}{365} J - 1,39\right), \quad (16.15)$$

де  $J$  – кількість днів у році (1 – 365 або 366, початком розрахунку служить перше січня).

Годинний кут заходу Сонця, виражений тривалістю світлого часу доби, визначається за виразом

$$\omega_s = \arccos[-\tan(\varphi) \tan(\delta)]. \quad (16.16)$$

Прихована теплота пароутворення залежить від температури повітря (Harrison, 1963)

$$\lambda_w = 2501 - 2,361T_{air}, \quad (16.17)$$

де  $T_{air}$  – температура повітря, °C.

Насичений тиск водяної пари також залежить від температури повітря (Tetens, 1930)

$$e_{sat} = 0,611 \exp\left(\frac{17,27T_{air}}{T_{air} + 237,3}\right). \quad (16.18)$$

Нахил кривої водяної пари визначається (Муггау, 1967) за допомогою виразу

$$\Delta_v = \frac{4098 e_{sat}}{(T_{air} + 237,3)^2}. \quad (16.19)$$

Психрометрична стала визначається додержуючись (Brunt, 1952)

$$\gamma_{air} = 0,00163 \frac{P_{air}}{\lambda_w}, \quad (16.20)$$

де  $P_{air}$  – атмосферний тиск (кПа) на висоті  $z_0$ , який визначається за (Burman et fl., 1987)

$$P_{air} = 101,3 \left( \frac{T_{air,K} + 0,0065z_0}{T_{air,K}} \right)^{5,256}. \quad (16.21)$$

Застосовуючи закон ідеального газу щільність (густина) атмосфери  $\rho_a$  може бути показана як залежна від  $P_{air}$  і віртуальної температури

$$\rho_{air} = 3,486 \cdot 10^{-3} \frac{P_{air}}{T_{vir}}, \quad (16.22)$$

де  $T_{vir}$  – віртуальна температура (K) визначається за виразом

$$T_{vir} = \frac{T_{air,K}}{1 - 0,378 \frac{e_{act}}{P_{air}}}. \quad (16.23)$$

Теплоємність вологого повітря розраховується за формулою

$$C_{air} = 622 \frac{\gamma_{air} \lambda_w}{P_{air}}. \quad (16.24)$$

*Аеродинамічний опір* залежить від профілю швидкості вітру і шорсткості рослинного покриву, знаходиться за (Allen et al., 1998)

$$r_{air} = \frac{\ln\left(\frac{z_m-d}{z_{om}}\right) \cdot \ln\left(\frac{z_h-d}{z_{oh}}\right)}{\kappa_v^2 \cdot u}, \quad (16.25)$$

де  $z_m$  – висота виміру швидкості вітру, м;

$z_h$  – висота виміру температури і вологості повітря, м;

$d$  – висота шару витіснення, м;

$z_{om}$  – параметр шорсткості, м;

$z_{oh}$  – параметр шорсткості для тепла і водяної пари, м;

$\kappa_{vk}$  – стала Кармана, яка дорівнює 0,41;

$u$  – швидкість вітру, виміри на висоті  $z_m$ , м·с<sup>-1</sup>.

Параметри  $d$ ,  $z_{om}$  і  $z_{oh}$  визначаються за допомогою таких співвідношень:

$$d = \frac{2}{3} h_{crop}; \quad (16.26)$$

$$z_{om} = 0,123 h_{crop}; \quad (16.27)$$

$$z_{oh} = 0,1 z_{om}, \quad (16.28)$$

де  $h_{crop}$  – висота рослин, см

*Потенційний вимір вологих і сухих рослин та ґрунту*

В моделі SWAP розраховується три величини за допомогою рівняння Пенмана-Мантіса (16.9):

$ET_{wo}$  – швидкість потенційного сумарного випаровування перехоплених рослиною опадів, так званих, вологих рослин, що покривають ґрунт, см·д<sup>-1</sup>;

$ET_{po}$  – швидкість потенційного сумарного випаровування позбавлених перехоплених рослиною опадів, так званих, сухих рослин, що покривають ґрунт, см·д<sup>-1</sup>;

$E_{po}$  – швидкість потенційного випаровування з вологого оголеного ґрунту, см·д<sup>-1</sup>.

Ці величини визначаються при варіації величин опору рослинності, висоти рослин і коефіцієнта відбиття. В разі вологої рослинності опір рослин  $r_{crop}$  дорівнює нулю. В разі сухої рослинності з оптимальним водопостачанням у ґрунті  $r_{crop}$  мінімальний і коливається між  $30 \text{ с}\cdot\text{м}^{-1}$  для польових рослин до  $150 \text{ с}\cdot\text{м}^{-1}$  для дерев у лісі (Allen et al., 1986). В разі оголеного ґрунту приймається  $r_{crop} = 0$  і «висота рослин»  $h_{crop} = 0,1 \text{ см}$ . Коефіцієнт відбиття  $a_r$  в разі сухої або вологої рослинності дорівнює  $0,23$ , а для оголеного ґрунту приймається рівним  $0,15$ .

Для застосування рівняння Пенмана-Мантіса потрібні денні величини температури повітря, радіаційного балансу, швидкості вітру і вологості повітря, дані яких недоступні.

Модель SWAP дозволяє використовувати еталонну швидкість потенційного випаровування  $ET_{ref}$  (см·д<sup>-1</sup>). В цьому випадку  $ET_{po}$  розраховується як

$$ET_{po} = k_c ET_{ref}, \quad (16.29)$$

де  $k_c$  – так званий «рослинний фактор», який залежить від типу рослин і методу отримання  $ET_{ref}$ .

За допомогою рослинного фактора швидкість еталонного сумарного випаровування трансформується в швидкість потенційного сумарного випаровування сухої рослинності, яка покриває поверхню ґрунту:  $k_c$  приймається як функція певної стадії розвитку рослин від сходів до їх дозрівання.

З моделі SWAP виходить:  $ET_{wo} = ET_{ref}$ . Модель SWAP дозволяє використовувати «рослинний фактор» для переведення  $ET_{ref}$  в  $ET_{po}$

$$E_p = k_{soil} ET_{ref}, \quad (16.30)$$

де  $k_{soil}$  – «рослинний фактор» для оголеного ґрунту.

Величина еталонного випаровування може бути визначена декількома шляхами, таким як випаровування, або ж за допомогою рівняння Пенмана для відкритої водної поверхні.

У моделі SWAP окремо швидкість потенційної транспірації  $T_p$  і швидкість потенційного випаровування  $E_p$  розраховуються редукуванням швидкості потенційної транспірації та швидкості потенційного випаровування відповідно до фізичних підходів.

Для розподілу швидкості потенційного сумарного випаровування на дві складові – швидкість потенційної транспірації і на швидкість

потенційного випаровування ґрунту використовується або листковий індекс LAI (м<sup>2</sup>·м<sup>-2</sup>), або фракція покриття ґрунту SC. Обидві величини розглядаються як функції стадій розвитку рослин.

Виходячи з того, що радіаційний баланс зменшується за експоненціальною функцією і що потік тепла в ґрунт незначний, отримуємо (Goudriaan, 1977).

$$E_p = E_{p0} \exp(-k_{gr} LAI), \quad (16.31)$$

де  $k_{gr}$  – коефіцієнт послаблення глобальної сонячної радіації. Для більшості типів рослин  $k_{gr} = 0,39$ .

У моделі SWAP приймається, що швидкість випаровування води, перехопленої рослинами, дорівнює  $ET_{wo}$ , незалежно від міри покриття ґрунту. Тоді добова фракція випаровування перехоплених рослинами опадів з вологої рослини  $W_{frac}$  виходить з відношення денної кількості перехоплених опадів  $P_i$  і  $ET_{wo}$

$$W_{frac} = \frac{P_i}{ET_{wo}} \quad \text{при} \quad W_{frac} \leq 1,0. \quad (16.32)$$

В процесі випаровування перехопленої води вважається, що швидкість транспірації через устячка листя незначна. Коли рослини стають сухими, транспірація через устячка листя знову починається зі швидкістю  $ET_{p0}$ .

У моделі SWAP розраховується середня денна швидкість потенційної транспірації, зважаючи, що добова фракція  $W_{frac}$ , протягом якої перехоплена вода випаровується, розглядається як швидкість потенційного випаровування  $E_p$

$$T_p = (1,0 - W_{frac}) ET_{p0} - E_p \quad \text{при} \quad T_p \geq 0, \quad (16.33)$$

де  $T_p$  – швидкість потенційної транспірації, см·д<sup>-1</sup>.

Зважаючи, що добова фракція вологої рослини дається в (16.32), швидкість потенційної транспірації визначається за виразом

$$T_p = (1,0 - W_{frac}) SC \cdot ET_{p0}. \quad (16.34)$$

де SC – фракція покриття ґрунту в залежності від стадії розвитку рослин.

Швидкість потенційної транспірації визначається так

$$E_p = (1,0 - SC)(1 - W_{frac})E_{p0}. \quad (16.35)$$

*Поточна транспірація рослин.* Максимально можлива швидкість поглинання води корінням рослин, інтегрована по усій глибині залягання коріння, дорівнює швидкості потенційної транспірації  $T_p$ , яка визначається атмосферними умовами.

Швидкість потенційного поглинання води корінням рослин з певної глибини  $S_p(z)$  може бути визначена за допомогою щільності довжини залягання коріння  $l_{root}(z)$  на кожній глибині як фракція інтегрованої щільності коріння (Bouten, 1992)

$$S_p(z) = \frac{l_{root}(z)}{\int_{+D_{root}}^0 l_{root}(z) dz} T_p, \quad (16.36)$$

де  $S_p(z)$ - швидкість потенційного поглинання води коріннями рослин,  $\text{см} \cdot \text{д}^{-1}$ ;  
 $l_{root}(z)$  – щільність довжини залягання коріння рослин,  $\text{см} \cdot \text{см}^{-3}$ ;  
 $D_{root}$  – шар залягання тонкого коріння рослин,  $\text{см}$ .

$$\frac{l_{root}(z)}{\int_{-D_{root}}^0 l_{root}(z) dz} = \frac{1}{D_{root}}. \quad (16.37)$$

У практиці величина  $l_{root}(z)$  часто недоступна. Тому вважають, що довжину коріння рослин може описувати їхня щільність в об'ємі ґрунту (Feddes et fl., 1978)

$$S_p(z) = \frac{T_p}{D_{root}}. \quad (16.38)$$

Умови перезволоження або посухи, а також висока концентрація солей редукують величину  $S_p(z)$ . З врахуванням цих обставин поточний водний потік в коріння  $S_a(z)$  розраховується за формулою

$$S_a(z) = \alpha_{rw} \alpha_{rs} S_p(z), \quad (16.39)$$

де  $S_a(z)$  – поточний потік води в коріння,  $\text{см} \cdot \text{д}^{-1}$ ;  
 $\alpha_{rw}$  і  $\alpha_{rs}$  – редуційні фактори водного і соляного стресу відповідно.

Інтеграцією  $S_a(z)$  по всій довжині коріння визначається поточна швидкість транспірації  $T_a$  ( $\text{см} \cdot \text{д}^{-1}$ ).

#### 16.1.4. Модель росту WOFOST у моделі SWAP

Модель SWAP включає три моделі росту рослин: просту модель, деталізовану модель (WOFOST) і просту модель, пристосовану для моделювання росту трав.

У моделі WOFOST детально розглядається фотосинтез і розвиток рослин, а також береться до уваги вплив водного і соляного стресу на розвиток рослин. Модель WOFOST (World Food Studies) орієнтована на застосування у рамках міждисциплінарного вивчення потенційного світового продовольства Центром вивчення світового продовольства в кооперації з Сільськогосподарським університетом Вагенінгена (Голландія) та іншими дослідними установами.

Модель WOFOST – наступник моделі SUCROS (Spitters et al., 1989; Van Laaretal, 1992), Arid Crop (Van Keulen, 1975; Van Keulen et al., 1981), Spring wheat (Van Keulen and Seligmen, 1987), MACROS (Penning de Vriesetal, 1989) і ORYZA 1 (Kroff et al., 1993).

Усе це «сімейство» моделей наслідує ієрархічну відмінність між потенційною і поточною продуктивністю і долями простих субмоделей ріст рослин, в яких розглядається перехоплення світла і асиміляція  $\text{CO}_2$ , які визначають ростові процеси і фенологічний розвиток як контролююче ростові процеси. У модель SWAP імплементована модель WOFOST 6.0. Специфічні параметри цієї моделі визначені для озимої пшениці, кукурудзи, ярого ячменю, рису, цукрового буряка, картоплі, кормових бобів, сої, озимого рапсу і соняшнику.

*Структура моделі WOFOST.* На рис. 16.3 показані процеси і співвідношення моделі WOFOST. Модель розраховує поглинену рослинами сонячну енергію як функцію прихідної радіації та площі листової поверхні рослин. Використовуючи поглинену радіацію і зважаючи на фотосинтетичні характеристики листової поверхні, розраховується потенційний грос-фотосинтез. В разі водного або соляного стресу потенційний грос-фотосинтез редукується до рівня поточного грос-фотосинтезу.

Частина продуційних вуглеводів ( $\text{CH}_2\text{O}$ ) використовується для забезпечення енергії дихання існуючої листової біомаси. Залишкові вуглеводи перетворюються в структурну масу. При цьому перетворенні деяка частина асимілятів витрачається на дихання росту.

Результуюча кількість сухої маси розподіляється між корінням, листям, стеблами і запасуючими органами, використовуючи фактори розподілу приростів сухої маси як функції стадії розвитку рослин. Фракція розподілу листя визначається розвитком площі листя, а отже, динамікою перехоплення світла. Суха маса органів рослин розраховується

інтегруванням їх швидкостей росту. Протягом розвитку рослин в процесі старіння частина живої біомаси відмирає.

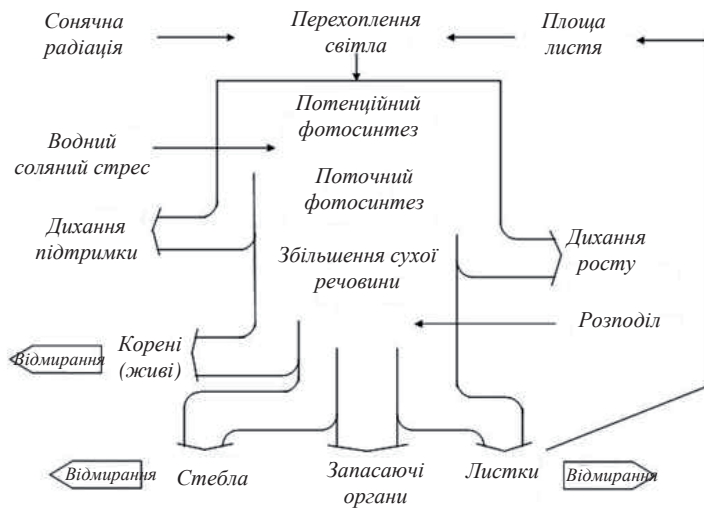


Рис. 16.3. Схематизація процесів росту рослин, включених в модель WOFOST.

**Фенологічний розвиток.** Багато фізіологічних і морфологічних процесів змінюються з фенологічними стадіями розвитку рослин. Кількісне визначення фенологічного розвитку є суттю моделей росту рослин. Для багатьох однорічних культур фенологічний розвиток може бути виражений відповідно в розвитку стадій  $D_s$ , що має величину 0 у фазу сходів, 1 у фазу цвітіння і 2 в період дозрівання (Van Heemst, 1986).

Велике значення мають фенологічні зміни у вегетативній ( $0 < D_s < 1$ ) і репродуктивній ( $1 < D_s < 2$ ) стадіях розвитку, які змінюють докорінно розподіл приростів сухої маси між органами.

У моделі WOFOST моделюється ріст рослин від сходів, дата настання яких використовується в подальших розрахунках. Рослини успішно проходять фенологічний розвиток стадій від 0 до 2. Тривалість цих стадій залежить від швидкості розвитку. Швидкість розвитку до ініціації квіток і цвітіння ( $D_s = 1$ ) контролюється тривалістю світлого часу доби і/або температурою. Розглядається, що в моделі до цвітіння активні обидва фактори. Вважається, що після цвітіння тільки температура впливатиме на

швидкість розвитку рослин. Висока температура прискорює швидкість розвитку рослин, що призводить до скорочення вегетаційного періоду.

У моделі WOFOST за шкалу часу використовують суми температур, які визначають стадії розвитку рослин. Ефективна температура  $T_{eff}$  розраховується як функція середньої добової температури  $T_{air}$ . Кожна культура має певні температурні потреби. Стадії розвитку розраховуються так

$$D_s^{j+1} = D_s^j + \frac{T_{eff}}{T_{sum,i}} \quad (16.40)$$

Для деяких видів культур протягом вегетативної стадії розвитку повинна братися до уваги також тривалість світлого часу доби. Підходи до опису цього кількісного ефекту наводяться в роботах Weig et al. (1984) і Reinink et al. (1986). У моделі введено редуційний фактор для швидкості розвитку як функція тривалості світлого часу доби  $f_{iday}$ , який має вигляд

$$f_{iday} = \frac{L_{day} - L_{cday}}{L_{oday} - L_{cday}} \quad \text{при } 0 < f_{iday} < 1, \quad (16.41)$$

де  $L_{day}$  – поточна тривалість дня, ч;

$L_{cday}$  – найкоротша довжина дня для розвитку, ч;

$L_{oday}$  – мінімальна довжина дня для оптимального розвитку, ч.

Необхідно відмітити, що сучасні сорти менш світлочутливі, ніж традиційні, і що для цілей моделювання довжина дня може бути замінена відповідною сумою температур, яка буде еквівалентна життєвому циклу.

Моделювання росту рослин закінчується (припиняється), коли розвиток досягає стадії, при якій збирають урожай.

**Радіаційний потік під рослинністю.** Вимірювання або оцінка добової глобальної радіації (довжина хвилі 300 – 3000 нм) включені в модель. Розглядається пряма і розсіяна радіація при різних кутах. Синус висоти Сонця як функція часу дня розраховується за формулою

$$\sin \beta_{sun} = \sin L_g \sin \sigma_{sun} + \cos L_g \cos \sigma_{sun} \cos \frac{2\pi(t_h + 12)}{24}, \quad (16.42)$$

де  $\sin \beta_{sun}$  – висота Сонця, град.;

$\sigma_{sun}$  – схил Сонця, град.;

$L_g$  – географічна широта, град.;

$t_h$  – час доби, год.

Близько 50 % глобальної сонячної радіації з довжиною хвиль 300 – 3000 нм є фотосинтетично-активною (PAR, Photosynthetically Active Radiation, довжина хвилі 400 – 700 нм). Ця фракція зазвичай називається «світло» або «видима радіація».

Миттєва прихідна фотосинтетично-активна радіація, розраховується як половина денної глобальної радіації з урахуванням відношення поточної ефективної висоти Сонця й інтегральної ефективної висоти, зважаючи на атмосферне пропускання при низьких висотах Сонця.

$$PAR = 0,5R_s \frac{\sin \beta_{sun}(1 + 0,4 \sin \beta_{sun})}{\int \sin \beta_{mod, sun}}, \quad (16.43)$$

де  $PAR$  – фотосинтетично-активна радіація, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$R_s$  – щільність потоку глобальної радіації, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$\int \sin \beta_{mod, sun}$  – інтеграл від  $\beta_{sun}$  в день, коли корегується редукція атмосферного пропускання при низьких висотах Сонця.

Потік дифузійної радіації – результат розсіювання сонячних променів хмарністю, газами та пилом в атмосфері. За відсутністю атмосфери сумарна сонячна радіація може бути розрахована як

$$S_{sun} = 1,1810^8 \left( 1 + 0,033 \left( \frac{2j\pi}{365} \right) \right), \quad (16.44)$$

де  $S_{sun}$  – сонячна стала, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$j$  – номер дня за Юліанським календарем.

Відношення потенційної і вимірної денної сумарної сонячної радіації називається *атмосферним пропусканням*. Дифузійна фотосинтетично-активна радіація визначається як

$$PAR_{dif} = 0,5I_{fdif} A_t S_{sun} \sin \beta_{sun}, \quad (16.45)$$

де  $PAR_{dif}$  – дифузійна фотосинтетично-активна радіація, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$A_t$  – атмосферне пропускання.

Потік прямої фотосинтетично-активної радіації визначається як

$$PAR_{dir} = PAR - PAR_{dif}, \quad (16.46)$$

де  $PAR_{dir}$  – потік прямої фотосинтетично-активної радіації, Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

*Профіль радіації в рослинності.* Потік падаючої фотосинтетично-активної радіації частково відбивається рослинним покривом. Коефіцієнт відбиття визначається як фракція падаючого вниз радіаційного потоку відбитого рослинністю. Слідуючи Goudriaan (1977) коефіцієнт відбиття зеленого листка рослин з хаотично розташованими кутами нахилу листя рівний

$$\rho_{rad} = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \sigma_{leaf}}}{1 + \sqrt{1 - \sigma_{leaf}}} \right) \left( \frac{2}{1 + 1,6 \sin \beta_{sun}} \right), \quad (16.47)$$

де  $\rho_{rad}$  – коефіцієнт відбиття зеленого листка;

$\sigma_{leaf}$  – коефіцієнт розсіювання одиничного листа для видимої радіації, який приймається рівним 0,2.

Фракція  $(1 - \rho_{rad})$  падаючої видимої радіації є потенційно доступною для поглинання рослинністю. Інтенсивність світла, регульована відбиттям рослин, апроксимується експонентою вглиб рослинного покриву в залежності від листового індексу

$$PAR_L = (1 - \rho_{rad}) PAR e^{-\kappa L}, \quad (16.48)$$

де  $PAR_L$  – нетто-інтенсивність світла на глибині  $L$ , Дж·м<sup>-2</sup>·д<sup>-1</sup>;

$\kappa$  – коефіцієнт послаблення радіації;

$L$  – листовий індекс наростаючим підсумком;

$\sum LAI$  – листовий індекс, розрахований від верхівки рослинного покриву до поверхні ґрунту.

Профіль нетто-дифузійного і нетто-прямого випромінювання може бути охарактеризований аналогічно Goudriaan (1982). Дифузійний і прямий потік ослабляються з різною швидкістю. Для сферично розташованого листя, рівномірно розподіленого в рослинному покриві, коефіцієнт послаблення прямого компонента прямого потоку апроксимується слідуючи Goudriaan (1982)

$$\kappa_{dir} = \frac{0,5}{\sin \beta_{sun}}, \quad (16.49)$$

де  $\kappa_{dir}$  – коефіцієнт послаблення прямої радіації.

Коефіцієнт послаблення дифузійного потоку визначається так

$$\kappa_{df} = \kappa_{dir} \sqrt{1 - \sigma_{leaf}}. \quad (16.50)$$

де  $\kappa_{df}$  – коефіцієнт послаблення дифузійної радіації.



Кількість поглиненої радіації зменшується за рахунок відбиття. Швидкість поглинання фотосинтетично-активної радіації на глибині  $L$  в рослинному покриві з врахуванням рівняння (16.48) має такий вигляд

$$PAR_{L,a} = \kappa(1 - \rho_{rad})PAR e^{-\kappa L}, \quad (16.51)$$

де  $PAR_{L,a}$  – швидкість поглинання фотосинтетично-активної радіації, Дж·м<sup>2</sup> (листка)·д<sup>-1</sup>.

Розрізняються два класи листя: затінене листя і освітлене листя. Затінене листя поглинає дифузійний потік і дифузійну компоненту прямого потоку. Освітлене листя поглинає дифузійну і пряму радіацію. В кожному горизонті всередині рослинності інтенсивність що проходить безперешкодно прямої радіації дорівнює її інтенсивності над рослинами.

*Швидкість асиміляції шаром листя.* Швидкість асиміляції CO<sub>2</sub> шаром листя визначається кількістю абсорбованої сонячної енергії в тому, що має асиміляційно-світлову чутливість у окремому листку. Двопараметрична функція чутливості, асимптотична експоненціальна функція задовольняє опису процесу

$$A_L = A_{\max} \left( 1 - e^{-\frac{\varepsilon_{PAR} PAR_{L,a}}{A_{\max}}} \right), \quad (16.52)$$

де  $A_L$  – швидкість грос-асиміляції, кг CO<sub>2</sub>·м<sup>2</sup>(листка)·д<sup>-1</sup>;

$A_{\max}$  – швидкість грос-асиміляції при світловому насиченні, кг CO<sub>2</sub>·м<sup>2</sup>(листка)·д<sup>-1</sup>;

$\varepsilon_{PAR}$  – нахил світлової кривої або коефіцієнт використання поглиненого світла, кг CO<sub>2</sub>·Дж<sup>-1</sup>.

Швидкість асиміляції на одиницю площі листка рослин є сума швидкості асиміляції освітленого і затіненого листя, беручи до уваги із співвідношення в кожному шарі. Доля (пропорція) освітленого листя на глибині  $L$  в рослинному покриві дорівнює долі (пропорції) прямої компоненти прямого потоку на глибині. Ця пропорція розраховується аналогічно рівнянню (16.51), використовуючи коефіцієнт послаблення компонента прямої радіації.

*Денна грос-асиміляція рослинності.* Швидкість фотосинтезу на шар листя необхідно інтегрувати за усією площею листя і за весь світлий час доби. Це ефективно виконується за допомогою інтеграції за методом Гауса. Три точки алгоритму оцінюють функції в  $0,1127a$ ,  $0,5a$  і  $0,8873a$  в інтервалі  $(0, a)$  з ваговими коефіцієнтами 1,0; 1,6 і 1,0 відповідно. Інтеграція по Гаусу є чудовим методом, точним у разі тригонометричної і експоненціальної функцій.

За допомогою моделі WOFOST в три обрані моменти часу протягом дня розраховується прихід ФАР на верхню межу рослинного покриву. Використовуючи цю радіацію, розраховують її послаблення на трьох обраних глибинах (висотах) у рослинному покриві і на цих висотах визначають інтенсивність фотосинтезу.

Інтеграція по Гаусу дає в результаті денну швидкість потенційної грос-CO<sub>2</sub> асиміляції,  $A_{pgross}$  (кг CO<sub>2</sub>·га<sup>-1</sup>·д<sup>-1</sup>).

Кількість асимілятів розглядається як функція перехоплення світла рослинами з такими фотосинтетичними характеристиками як початкова ефективність використання світла і максимальна асиміляція CO<sub>2</sub> листям при світловому насиченні.

Інші фактори можуть редукувати денну швидкість асиміляції типових рослинних характеристик несприятливими температурами і водним стресом. Характеристики рослинності залежать від фенологічної стадії розвитку рослин. Беручи це до уваги, встановлюють максимальну швидкість асиміляції  $A_{\max}$  (кг CO<sub>2</sub>·га<sup>-1</sup>·д<sup>-1</sup>) як функцію стадії розвитку.

Редукційний фактор  $f_{day}$  функцією середньої денної температури  $T_{day}$ , яка розраховується як

$$T_{day} = 0,75T_{\max} + 0,25T_{\min}. \quad (16.53)$$

де  $T_{\max}$  і  $T_{\min}$  – відповідно денна максимальна і мінімальна температура повітря, °С.

Рослинні характеристики і результати оцінки денної температури редукують  $A_{pgross}$  в  $A_{pgross}^1$

$$A_{pgross}^1 = \max(A_{pgross}, f_{day}, A_{\max}), \quad (16.54)$$

де  $A_{pgross}^1$  – редукована денна швидкість потенційної грос-асиміляції, кг CO<sub>2</sub>·га<sup>-1</sup>·д<sup>-1</sup>.

На додаток до цього низькі нічні температури також впливають на асиміляцію. Вночі, продукти, що асимілюють протягом дня, трансформуються в структурну біомасу. Цей процес утруднюється низькими температурами. Якщо низькі температури переважають декілька днів, то асиміляти акумулюються в рослині й швидкість асиміляції зменшується і в кінці кінців зупиняється. У моделі цей вплив температури враховується через редукційний фактор  $f_{7\min}$ , який є функцією мінімальної температури протягом останніх семи днів.

Серед інших факторів, які можуть редукувати асиміляцію розглядається водний і/або соляний стрес. У моделі WOFOST використовується відношення поточного і потенційного транспірації  $T_a/T_p$  як редуційний коефіцієнт.

Таким чином, редукція обумовлена мінімальними температурами, водним стресом і соляним стресом. Вважається, що з кожного кг  $\text{CO}_2$  формується біомаса  $\text{CH}_2\text{O}$  в співвідношенні 30/40, кг і як результат денна швидкість грос-асиміляції визначається наступним виразом

$$A_{gross} = \frac{30}{40} f_{7 \min} \frac{T_a}{T_p} A_{pgross}^1, \quad (16.55)$$

де  $A_{gross}$  – денна швидкість грос-асиміляції,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{д}^{-1}$ .

*Дихання підтримки.* Деяка кількість вуглеводів забезпечує енергію для дихання підтримки життєдіяльних біологічних структур. Дихання підтримки складає, приблизно, 15 – 30 % від вуглеводів продукованих рослиною за вегетаційний період (Penning de Vries et al., 1979). Це показує необхідність точного кількісного опису цих процесів у моделі.

Витрати на дихання можуть оцінюватися виходячи з кількості білків і мінеральних речовин, представлених в біомасі, або ж з метаболічної активності, як запропонував De Wit et al. (1978). Такий підхід вимагає інформації про вміст азоту і мінеральних елементів у рослині. Запропоновані De Wit et al. типові величини дихальних коефіцієнтів різних органів рослин встановлені Penning de Vries і Van Laar (1982). Ці коефіцієнти використовуються в моделі WOFOST. Додержуючись цих підходів потреби на дихання пропорційні сухій масі органів рослин, які підтримуються

$$R_{mref} = c_{m,leaf} W_{leaf} + c_{m,stem} W_{stem} + c_{m,stor} W_{stor} + c_{m,root} W_{root}, \quad (16.56)$$

де  $R_{mref}$  – витрати на дихання,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{д}^{-1}$ ;

$c_{m,i}$  – коефіцієнт дихання підтримки для  $i$ -го органу,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{д}^{-1}$ ;

$W_i$  – суха маса органу,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1}$ .

Швидкість дихання підтримки коригується процесом старіння і температурою. Редуційний фактор для старіння  $f_{senes}$  є специфічним для рослини і визначається як функція стадії розвитку. Висока температура прискорює швидкість обміну рослинних тканин і звідси витрати на дихання підтримки. Підвищення температури на  $10^\circ\text{C}$ , що впливає на дихання, збільшує витрати на дихання в два рази (Kase і Catsky, 1984). Як

більш гнучкіший, використовується специфічний фактор підвищення швидкості дихання з підвищенням температури на  $10^\circ\text{C}$

$$R_m = f_{senes} R_{mref} Q_{10}^{\frac{T_{avg}-25}{10}}, \quad (16.57)$$

де  $R_m$  – поточна швидкість дихання підтримки,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{д}^{-1}$ ;

$Q_{10}$  – відносне підвищення швидкості дихання з підвищенням температури на  $10^\circ\text{C}$ .

Отже, швидкість дихання підтримки залежить від кількості сухої маси різних органів, відносної швидкості дихання підтримки органу і температури. Вважається, що рослини не буде «само споживати» в часі вуглеводи. Тому швидкість дихання підтримки не може допустити надлишок швидкості грос-асиміляції.

Швидкість грос-асиміляції  $A_{gross}$  мінус швидкість дихання підтримки дають в результаті швидкість нетто-асиміляції, кількість вуглеводів для створення життєдіяльних структур

$$A_{net} = A_{gross} - R_m \quad \text{при} \quad A \geq 0 \quad (16.58)$$

де  $A_{net}$  – швидкість нетто-асиміляції,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{д}^{-1}$ .

*Розподіл сухої речовини і дихання росту.* Первинні асиміляти зверх витрат на дихання підтримки доступні для перетворення в структурний матеріал. В процесі перетворення молекули глюкози,  $\text{CO}_2$  і  $\text{H}_2\text{O}$  розщепляються. Це специфічне окислення глюкози забезпечує необхідну енергію в різних біохімічних шляхах метаболізму. Звідси, біосинтез різних структурних сполучень може розглядатися як процес зниження маси в диханні росту.

Важливість дихання росту визначається формуванням структури (складом) кінцевого продукту (Penning de Vries et al., 1974). Таким чином, первинні продукти фотосинтезу перетворюються в структурний рослинний матеріал з різними сполученнями. Жири і лігнін продукуються з великими витратами, а структурні вуглеводи і органічні кислоти з відносно низькими витратами. Білки і нуклеїнові кислоти формуються як проміжні форми. Високі температури прискорюють процес перетворення, але шляхи метаболізму будуть ідентичними (Spitters et al., 1989). Звідси потреби в асимілятах для процесів росту не дуже пов'язані з температурою.

Приріст сумарної сухої біомаси рослин розподіляється в органах рослин: коріння, листя, стебла і запасуючі органи. Це коректне моделювання проводиться протягом вегетативної фази. Запасуючі органи,

проте, можуть не лише формуватися з поточних асимілятів, але також з вуглеводів і білків, які були тимчасово запасені у вегетативній частині, і які перерозподіляються протягом репродуктивної стадії. У моделі останні процеси не враховуються: сумарна біомаса рослин розподіляється між органами рослин слідуючи факторам розподілення, які введені як діючі фактори, їх величина змінюється тільки зі стадіями розвитку рослин.

У моделі середній (специфічний для рослин) перетворювальний фактор  $C_{e,i}$  використовується для листя, запасуючих органів, стебел і кореневої біомаси. Середньозважений  $C_e$  цих органів специфічний перетворювальний фактор розраховується як багатоскладна специфічна величина органів з факторами розподілу

$$C_e = \frac{1}{\left( \frac{\xi_{leaf}}{C_{e,leaf}} + \frac{\xi_{stor}}{C_{e,stor}} + \frac{\xi_{stem}}{C_{e,stem}} \right) (1 - \xi_{root}) + \frac{\xi_{root}}{C_{e,root}}}, \quad (16.59)$$

де  $C_e$  – середньозважений специфічний для рослин перетворювальний фактор,  $\text{кг} \cdot \text{кг}^{-1}$ ;

$\xi_i$  – фактор розподілу для  $i$ -го органа.

Швидкість gros-росту сухої маси пов'язана зі швидкістю нетто-асимілятів  $A_{net}$  так

$$w_{gross} = C_e A_{net}, \quad (16.60)$$

де  $w_{gross}$  – швидкість gros-росту сухої маси,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{д}^{-1}$ .

Gros-ріст сухої біомаси в перший період розподіляється між надземною частиною (листя, стебла, запасуючі органи) і корінням:

$$\begin{aligned} w_{gross,sh} &= (1 - \xi_{root}) w_{gross} \\ w_{gross,root} &= \xi_{root} w_{gross} \end{aligned}, \quad (16.61)$$

де  $\xi_{root}$  – фактор розподілу для коріння;

$w_{gross,sh}$  і  $w_{gross,root}$  – швидкість gros-росту надземної частини і коріння відповідно.

Швидкість gros-росту листя, стебел і запасуючих органів є простим продуктом швидкості gros-росту сухої маси надземної частини і за допомогою певних функцій розподіляється між органами. Фактор розподілу є функцією стадії розвитку і специфічний для рослин. Сума  $\xi_{leaf}$ ,  $\xi_{stem}$ ,  $\xi_{stor}$  на будь-якій стадії розвитку дорівнює одиниці.

*Старіння.* Швидкість відмирання запасуючих органів приймається рівною нулю. Швидкість відмирання стебел і коріння є специфічною для рослин і визначається як денна кількість живої біомаси, яка недовгий час бере участь в рослинному процесі. Швидкість відмирання стебел і коріння розглядається як функція стадії розвитку.

Швидкість відмирання листя є більш складнішою. Відмирання листя трапляється при водному стресі, затінюванні (високе  $LAI$ ), а також надмірною тривалістю росту. Швидкість потенційного відмирання листя, обумовлена водним стресом, розраховується як

$$\zeta_{leaf,w} = W_{leaf} \left( 1 - \frac{T_a}{T_p} \right) \zeta_{leaf,p}, \quad (16.62)$$

де  $\zeta_{leaf,w}$  – швидкість потенційного відмирання листя під впливом

водного стресу,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{д}^{-1}$ ;

$W_{leaf}$  – суха маса листя,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1}$ ;

$T_a$  і  $T_p$  – швидкість поточної і потенційної транспірації,  $\text{см} \cdot \text{д}^{-1}$ ;

$\zeta_{leaf,p}$  – максимальна відносна швидкість відмирання листя, обумовлена водним стресом,  $\text{кг} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{д}^{-1}$ .

Остання величина є специфічною для рослин.

Потенційна швидкість відмирання, викликана самозатінненням, визначається коли підвищується лінійно вище за нуль деяка критична величина листового індексу і коли його максимальна величина вдвічі перевищує критичне значення листового індексу  $LAI$

$$\zeta_{leaf,shade} = 0,03 W_{leaf} \left( \frac{LAI - LAI_c}{LAI_c} \right)$$

$$\text{при } 0 < \left( \frac{LAI - LAI_c}{LAI_c} \right) < 1, \quad (16.63)$$

де  $\zeta_{leaf,shade}$  – потенційна швидкість відмирання, викликана

самозатінненням,  $\text{кг} \cdot \text{га}^{-1} \cdot \text{д}^{-1}$ ;

$LAI_c$  – критичний листовий індекс, який дорівнює  $3,2/\kappa_{df}$ , де  $\kappa_{df}$  – коефіцієнт послаблення для розсіяної радіації.

Типовими величинами для  $\zeta_{leaf,p}$  і  $LAI_c$  є  $0,03 \text{ д}^{-1}$  і  $4 \text{ га} \cdot \text{га}^{-1}$  відповідно.

В моделі WOFOST використовуються величини  $\zeta_{leaf,w}$  і  $\zeta_{leaf,shade}$  як комбінований ефект водного стресу і самозатінення. Листя з передчасним відмиранням, яке викликане водним стресом або самозатіненням, неминуче мають надмірну тривалість функціонування листя (фізіологічний вік).

Тривалість функціонування листя визначається як максимальний час, який може функціонувати листя при температурі 35 °С. Тривалість функціонування листя специфічна для рослин. Фізіологічний віковий фактор визначається як

$$f_{age} = \frac{T - T_{b,age}}{35 - T_{b,age}} \quad \text{при } f_{age} \geq 0, \quad (16.64)$$

де  $f_{age}$  – фізіологічний віковий фактор;

$T_{b,age}$  – нижній поріг температури для фізіологічного віку, який специфічний для рослин, °С.

Інтегральний фактор фізіологічного віку зверх часу фізіологічного віку для формування урожаю

$$P_{age}^{j+1} = P_{age}^j + f_{age} \Delta t, \quad (16.65)$$

де  $P_{age}$  – фізіологічний вік рослини, д.

Для коректного опису відмирання листя визначається специфічна площа листя за кожен день  $S_{la}^j$  (га·кг<sup>-1</sup>), ріст сухої маси листя за день  $w_{elay}$  і фізіологічний вік  $P_{age}$ .

*Нетто-ріст.* Швидкість нетто-росту органа рослин  $w_{net,i}$ , як результат швидкості грос-росту і швидкості старіння

$$w_{net,i} = w_{gross,i} - \zeta_i W_i, \quad (16.66)$$

де  $w_{net,i}$  – швидкість нетто-ріст  $i$ -го органа рослин, кг·га<sup>-1</sup>·д<sup>-1</sup>;

$\zeta_i$  – швидкість старіння, кг·кг<sup>-1</sup>·д<sup>-1</sup>.

Інтегрування  $w_{net,i}$  за часом дозволяє розрахувати суху масу  $i$ -го органа  $W_i$  (кг·га<sup>-1</sup>).

Швидкість росту листового індексу на, так званій, експоненціальній стадії описується так

$$w_{LAI} = LAI \cdot w_{LAI,max} \cdot T_{eff}, \quad (16.67)$$

де  $w_{LAI}$  – швидкість росту листя, га·га<sup>-1</sup>·д<sup>-1</sup>;

$w_{LAI,max}$  – максимальне відносне збільшення листового індексу, °С·д<sup>-1</sup>.

У моделі WOFOST приймається, що експоненціальний ріст листового індексу триватиме до моменту, поки асиміляти не лімітуватимуть швидкість росту листового індексу. Внаслідок цього лімітація стадії росту  $w_{LAI}$  описується так

$$w_{LAI} = w_{net,leaf} S_{la}, \quad (16.68)$$

де  $S_{la}$  – специфічна листовка площа як функція стадії розвитку, га·кг<sup>-1</sup>.

Зелена частина стебел і запасючих органів можуть поглинати деяку кількість радіації. Тому, так званий, індекс зеленої площі  $GAI_i$  може доповнити листовий індекс. Індекс зеленої площі стебел і запасючих органів розраховується по сухій біомасі органів

$$GAI_i = S_{ga,i} W_i, \quad (16.69)$$

де  $GAI_i$  – індекс зеленої площі, га·га<sup>-1</sup>;

$S_{ga,i}$  – специфічна зелена площа стебел і запасючих органів, га·кг<sup>-1</sup>.

Величина  $S_{ga,i}$  специфічна для рослин.

*Ріст коріння.* Ріст коріння моделюється прямим шляхом. Необхідно знати специфічну початкову глибину зони розповсюдження коріння, яка визначається видом рослини і типом ґрунту, максимальне денне збільшення глибини зони розповсюдження коріння  $d_{root,max}$ .

Денне збільшення глибини зони розповсюдження коріння дорівнює максимальному денному збільшенню за винятком випадків, коли максимальна глибина зони розповсюдження коріння вже досягнута, або ж доступні асиміляти відсутні для росту коріння

$$D_{root}^{j+1} = D_{root}^j + d_{root,max}, \quad \text{якщо } D_{root}^j \leq D_{root,max} \quad \text{і } w_{net,root} \geq 0, \quad (16.70)$$

де  $D_{root}^j$  – глибина залягання зони розповсюдження коріння, см;

$d_{root,max}$  – максимальне денне збільшення глибини зони розповсюдження коріння, см.

## 16.2. Модель конкуренції рослинності при світловому і водному лімітуванні: одновимірна конкуренція і вплив ґрунтових вод

Пропонується точкова модель, яка може бути також використана і як просторова з кроком 10×10 метрів, що відповідає розміру дорослого дерева. Спочатку розглядається водний баланс ґрунту і вплив атмосфери. Потім описується модель росту рослинності, яка включає процеси фотосинтезу, дихання, транспірації, перехоплення світла і поглинання вологи. У завершальній частині розглядається процес росту рослин, який включає розміщення рослин, алометрію, фенологію, старіння і відмирання органів рослини.

### 16.2.1. Водний баланс ґрунту

У моделі вологості ґрунту і поглинання вологи кореневою системою в зоні розповсюдження коріння розглядається як один шар з однорідним вмістом вологи у ґрунті. Модель має добовий крок за часом. Водний баланс описується як

$$\frac{d\theta}{dt} Z_r = I - ET - EV + Q_v, \quad (16.71)$$

де  $\theta$  – вміст вологи у ґрунті, мм;

$t$  – час, с;

$Z_r$  – глибина залягання коріння, м;

$I$  – інфільтрація, м/с;

$ET$  – сумарне випаровування, м/с;

$EV$  – випаровування з поверхні ґрунту, м/с;

$Q_v$  – вертикальний обмін – потік вологи з насиченої вологою зони ґрунту, м/с.

Цей потік розраховується з використанням виразу

$$Q_v = K_\theta \frac{[-dh_{gw} - (\psi_s / g\rho_w)]}{dh_{gw}}, \quad (16.72)$$

де  $dh_{gw}$  – відстань від рівня ґрунтових вод до центру кореневої зони, м;

$g$  – прискорення сили тяжіння, м/с<sup>2</sup>;

$\rho_w$  – густина води, кг/м<sup>3</sup>;

$K_\theta$  – вологопровідність в ненасиченому вологою ґрунті, м/с;

$\psi_s$  – потенціал вологи у ґрунті, Па;

Величини  $K_\theta$  і  $\psi_s$  обчислюються з використанням співвідношень Mualem-Van Genuchten, встановлених в роботі (Van Genuchten, 1980). Передбачається, що висхідна течія позитивна, а низхідна течія негативна. Величина  $Q_v$  на першому часовому кроці обмежена різницею між  $\theta - \theta_{eq}$ , де  $\theta_{eq}$  – вміст вологи у ґрунті за умови рівноваги з рівнем ґрунтових вод

$$Q_{eq} = \frac{\theta_s - \theta_r}{1 + \{\alpha(dh_{gw} / \rho_w g)\}^n} + \theta_r, \quad (16.73)$$

у якому  $\theta_s$  і  $\theta_r$  – насичений і залишковий вміст вологи у ґрунті;

$\alpha$ ,  $n$  і  $m$  – параметри Van Genuchten.

Інфільтрація  $I$  дорівнює мінімальному значенню кількості опадів, які досягли поверхні ґрунту (м/с) і величини  $K_\theta$ . Розглядається, що коли  $P_{net}$  перевищує  $K_\theta$ , опади видаляються з шару ґрунту. Обчислення  $P_{net}$  буде описано далі. Передбачається, що випаровування з поверхні ґрунту відбувається тільки за умов, коли вміст вологи у ґрунті близько до стану насичення ( $\theta > \theta_{sat} - 0,01$ ). За таких умов передбачається, що  $EV$  близько до випаровуваності і визначається за формулою Пенмана-Монтіса (Monteith, 1965) для відкритої водної поверхні.

### 16.2.2. Вплив атмосфери

Вплив атмосфери в моделі вегетації рослинності враховується через наступні метеорологічні змінні:

$T_{min}$  і  $T_{max}$  – максимальна і мінімальна температура повітря, °С;

$P$  – кількість опадів мм/д або м/0,5 год.;

$Rad_s$  – сумарна короткохвильова радіація, Вт;

$Rad_l$  – довгохвильова радіація, Вт;

$D$  – дефіцит водяної пари, мм.

Розрахунки по моделі виконуються з півгодинним часовим кроком. Якщо вказані вище змінні доступні на півгодинній вирішальній здібності, ці дані використовуються безпосередньо. У разі, якщо вони не доступні в півгодинному часовому кроці або, якщо дефіцит водяної пари, або довгохвильова радіація невідомі, приймаються деякі допущення для отримання півгодинних величин. У цих випадках температура повітря протягом дня апроксимується за виразом

$$T_a = \frac{T_{min} + T_{max}}{2} + \frac{T_{min} - T_{max}}{2} \cos[(t_d - t_s)2\pi], \quad (16.74)$$

### 16.2.3. Вегетативний ріст

де  $t_s$  – часовий лаг між часом, коли спостерігається  $T_{\max}$  і полуднем, д.

Розрахунок дефіциту водяної пари ґрунтується на різниці між тиском насиченої водяної пари при  $T_{\min}$  і при  $T_a$  згідно виразу в роботі Allen (1998).

Вплив хмарності на довгохвильову радіацію  $Rad_t$  ( $\text{Вт/м}^2$ ) і короткохвильову радіації  $Rad_s$  ( $\text{Вт/м}^2$ ) визначається за емпіричними виразами з роботи Shuttleworth (1993)

$$Rad_s = \left( a_s + b_s \frac{n}{N} \right) Rad_0, \quad (16.75)$$

де  $Rad_s$  – короткохвильова радіація,  $\text{Вт/м}^2$ ;

$Rad_0$  – короткохвильова радіація на верхній межі атмосфери,  $\text{Вт/м}^2$ ;

$n$  – фактична кількість годин сонячного сяйва за день, год.;

$N$  – максимально можлива кількість годин сонячного сяйва за день;

$a_s$  – доля  $Rad_0$  в умовах суцільної хмарності, безрозмірна;

$b_s + a_s$  – доля  $Rad_0$  в умовах ясної безхмарної погоди, безрозмірна.

Прихідна довгохвильова радіація визначається як

$$Rad_t = \sigma T_a^4 (a_e + b_e \sqrt{e_a}) \left( a_c + b_c \frac{n}{N} \right), \quad (16.76)$$

де  $Rad_t$  – довгохвильова радіація,  $\text{Вт/м}^2$ ;

$\sigma$  – константа Стефана-Больцмана;

$T_a$  – температура атмосфери, К;

$e_a$  – тиск водяної пари,  $\text{кПа}^{-0,5}$ ;

$a_c$  і  $b_c$  – емпіричні константи.

Короткохвильова радіація за день апроксимований виразом, аналогічним в роботі Daly et al., (2004)

$$Rad_d = \frac{4Rad_s}{\delta^2} [-t_d^2 + (\delta + 2t_0)t_d - (t_0 + \delta)], \quad (16.77)$$

де  $Rad_s$  – максимально можлива радіація протягом доби,  $\text{Вт/м}^2$ ;

$t_d$  – час доби, год.;

$t_0$  – час сходу Сонця, год.;

$\delta$  – тривалість світлого часу доби, год.

Для моделювання транспірації і фотосинтезу в запропонованій моделі використана модель, описана в роботі Daly et al., (2004). У моделі, яка розглядається, описуються найбільш важливі процеси та передумови як доповнення і модифікація моделі.

Модель розглядається як модель типу "Великий лист", в якій процеси затінення та інші, що відбуваються усередині рослинного покриву не розглядаються. Більше того рослинна система розглядається як серія стійких станів, береться до уваги, що зберігається рівновага між потоками ґрунтової вологи, що проходить через рослину, і транспірацією, які протікають миттєво і не накопичуються у рослині.

Модель послідовна в тому сенсі, що перша величина – транспірація обчислюється на основі провідності системи ґрунт – корінь – рослина і устячкової провідності. Потім обчислюється швидкість асиміляції вуглецю на основі біохімічних процесів з урахуванням устячкової провідності як обмежуючої умови.

Транспірація, асиміляція вуглецю, дихання і перехоплення світла визначаються на півгодинному інтервалі часу. Перехоплення опадів може бути вичислене як на півгодинному, так і на добовому часовому кроці. Всі інші процеси обчислюються з добовим кроком за часом. Коли розрахунки по моделі виконуються за триваліший період (більше ніж один рік), в моделі використовується добовий крок за часом. В цьому випадку потоки транспірації, засвоєння вуглецю і перехоплення світла підсумовуються як добові величини.

*Транспірація.* Модель транспірації заснована згідно роботи Daly (2004) з однією модифікацією: враховується кисневий стрес при високому вмісті вологи у ґрунті. Розрахунок транспірації  $ET_{srp}$  заснований на обліку провідності системи ґрунт – корінь – рослина та водного потенціалу ґрунту і площі листя на одиницю площі земної поверхні

$$ET_{srp} = g_{srp} (\psi_s - \psi_l), \quad (16.78)$$

де  $ET_{srp}$  – транспірація, м/д;

$g_{srp}$  – провідність в системі ґрунт – корінь – рослина на одиницю площі поверхні ґрунту,  $\text{м} \cdot \text{Па}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ;

$\psi_s$  – водний потенціал ґрунту, Па;

$\psi_l$  – водний потенціал листя, Па.

Величина  $g_{srp}$  описується так

$$g_{srp} = \frac{g_{sr} g_p LAI}{g_{sr} + g_p LAI}, \quad (16.79)$$

де  $g_p$  – провідність в рослині на одиницю площі листа, м·Па<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>;  
 $g_r$  – провідність в системі ґрунт – корінь на одиницю поверхні ґрунту, м·Па<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>;  
 $LAI$  – листковий індекс.

Величина  $g_{sr}$  розраховується з використанням спрощеної циліндричної моделі кореня, яка враховує відстань на шляху руху води до коріння в зону розташування коріння завглибшки  $Z_r$ , (м) і індекс площі коріння  $RAI$ , який визначається з використанням результатів дослідження Katul et al. (2003)

$$g_{sr} = \frac{K_{\theta} \sqrt{RAI}}{\pi g \rho_w Z_r} f_{ox}(\theta), \quad (16.80)$$

де  $K_{\theta}$  – провідність ненасиченою вологою ґрунту, м·Па<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>;  
 $f_{ox}(\theta)$  – редукційна функція для вологих умов, що враховує кисневий стрес в кореневій зоні.

Ця функція доповнюється як функція з роботи Katul et al. (2003) і моделі Daly et al. (2004), в яких досліджувався ефект впливу високого рівня ґрунтових вод і застою води на рослинність. Приймається додатковий ріст як результат сухіших ґрунтових умов. Величина  $RAI$  залежить від вологості ґрунту

$$RAI = RAI \cdot s^a, \quad (16.81)$$

де  $a$  – параметр, який змінюється в залежності від умов зволоження;  
 $s = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$  – насичення ґрунту вологою.

Провідність рослин залежить від водного потенціалу листа  $\psi_l$ , тому що кавітація трапляється як результат низького водного потенціалу в судинах ксилеми

$$g_p = g_{p, \max} \exp \left[ - \left( - \frac{\psi_l}{d} \right)^c \right], \quad (16.82)$$

де  $g_{p, \max}$  – максимальна провідність рослин на одиницю площі листка, м·Па<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>;  
 $c$  і  $d$  – параметри масштабу  $\psi_l$ , Па.

У вологих ґрунтових умовах поглинання води корінням може бути лімітоване завдяки нестачі кисню у кореневій зоні. Враховуючи цей ефект приймається редукційна функція  $f_{ox}$ . Ця функція ґрунтується на роботах Feddes et al. і Brotsme, Bierkens (2007).

$$f_{ox} = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta < \theta_{ox,1} \\ \frac{\theta_{ox,0} - \theta}{\theta_{ox,0} - \theta_{ox,1}} & \text{if } \theta_{ox,1} < \theta < \theta_{ox,0} \\ 0 & \text{if } \theta > \theta_{ox,0} \end{cases}, \quad (16.83)$$

де  $\theta_{ox,1}$  – вміст води в ґрунті, при якій поглинання води коренем зменшується;

$\theta_{ox,2}$  – вміст води в ґрунті, при якій поглинання води коренем припиняється.

Транспірація рослин  $ET_{pm}$  визначається за формулою Пенмана-Монтіа (Monteith, 1965)

$$ET_{pm} = \frac{(\lambda_w \gamma_w g_{ba} \rho_a D + \Delta AR)}{\rho_w \lambda_w \{ \gamma_w [(g_{ba} LAI) + 1] + \Delta \}}, \quad (16.84)$$

де  $\lambda_w$  – прихована теплота пароутворення, Дж/кг;  
 $\gamma_w$  – психрометрична константа, Па/К;  
 $g_{ba}$  – провідність прилежого шару і атмосфери (на одиницю поверхні ґрунту), м/с;  
 $\rho_a$  – щільність повітря, кг/м<sup>3</sup>;  
 $D$  – дефіцит вологості повітря;  
 $\Delta$  – нахил кривої тиску насиченої водяної пари в залежності від температури повітря, Па/К;  
 $AR$  – поглинена довгохвильова і короткохвильова радіація, Дж·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>;  
 $g_s$  – устячкова провідність (на одиницю площі листка), м/с.  
 Сутність величини  $g_{ba}$  полягає в тому, що ця провідність може бути розрахована використовуючи

$$\frac{1}{g_{ba}} = \frac{LAI}{g_b} + \frac{1}{g_a}, \quad (16.85)$$

де  $g_b$  – провідність прилежого шару (на одиницю площі листка), м/с;  
 $g_a$  – провідність атмосфери (на одиницю площі поверхні ґрунту), м/с.

Провідність устячок залежить від радіації, температури повітря, водного потенціалу листа і концентрації CO<sub>2</sub>. Ця залежність розраховується використовуючи формулу Jarvis (1976), яка базується на застосуванні редукційних функцій для обліку впливу факторів середовища на максимальну провідність(м/с)

$$g_s = g_{s,\max} f_{Rad}(Rad) f_D(D) f_{T_a}(T_a) f_{\psi_1}(\psi_1) f_{CO_2}(CO_2), \quad (16.86)$$

де  $f_{Rad}(Rad)$ ,  $f_D(D)$ ,  $f_{T_a}(T_a)$ ,  $f_{\psi_1}(\psi_1)$ ,  $f_{CO_2}(CO_2)$  – відповідно редуційні функції для сонячної радіації, дефіциту водяної пари, температури повітря, водного потенціалу листя і концентрації  $CO_2$  в атмосфері.

Редукція устячкового опору як результат впливу дефіциту водяної пари апроксимується за виразом

$$f_D(D) = \frac{1}{1 + (D/D_x)}, \quad (16.87)$$

де  $D_x$  – емпірична константа (Leuning, 1995)

Температура повітря впливає на  $g_s$  як низькими, так і підвищеними температурами

$$f_{T_a}(T_a) = 1 - k_2(T_a - T_{opt})^2, \quad (16.88)$$

де  $k_2$  – параметр, чутливий до зміни температури,  $K^{-2}$ ;

$T_{opt}$  – температура повітря, при якій провідність максимальна,  $K$ ;

$T_a$  – температура повітря,  $K$ .

Ефект впливу підвищення сонячної радіації на провідність устячок апроксимується функцією, яка враховує, що устячкова провідність підвищується при високих рівнях сонячної радіації

$$f_{Rad}(Rad) = 1 - \exp(-k_1 Rad), \quad (16.89)$$

де  $k_1$  – параметр, чутливий до зміни радіації (Jones, 1992 і Daly et al., 2004).

Нарешті  $g_s$  знаходиться в прямій залежності від водного потенціалу листя, коли редуція відбувається при низьких значеннях водного потенціалу

$$f_{\psi_1}(\psi_1) = \begin{cases} 0 & \text{if } \psi_1 > \psi_{l_0} \\ \frac{\psi_1 - \psi_{l_0}}{\psi_{l_1} - \psi_{l_0}} & \text{if } \psi_{l_0} < \psi_1 < \psi_{l_1}, \\ 1 & \text{if } \psi_1 < \psi_{l_1} \end{cases}, \quad (16.90)$$

де  $\psi_{l_1}$  – порогове значення водного потенціалу, при якому корене-листякова провідність починає падати, Па;

$\psi_{l_0}$  – порогове значення водного потенціалу, при якому корене-листякова провідність стає незначною, Па.

*Засвоєння  $CO_2$ .* Для моделювання асиміляції  $CO_2$  застосовується наступний підхід Daly et al., (2004). Асиміляція вуглецю визначається в залежності від співвідношення між асиміляцією, обгрунтованій на устячковій провідності  $CO_2$   $A_{n,g_sba}$  і асиміляцією, обгрунтованій на місткості карбоксилування листя  $A_{n,g_{bio}}$ . Обидва розрахунки виконуються на одиницю площі листя. Перший розрахунок описується як

$$A_{n,g_sba} = g_{sba,CO_2} (C_a - C_i), \quad (16.91)$$

де  $g_{sba,CO_2}$  – узагальнена устячкова, примежового шару і аеродинамічна провідності  $CO_2$ , моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>;

$C_a$  – концентрація  $CO_2$  на листовій поверхні, моль·моль<sup>-1</sup>;

$C_i$  – концентрація  $CO_2$  в міжклітинниках, моль·моль<sup>-1</sup>;

Вважають, що провідність примежового шару листя і атмосферна провідність – константи. Провідність, для  $CO_2$  визначається провідністю для  $H_2O$  як  $g_{s,CO_2} = g_s / 1,6$  (моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>) на одиницю площі листя,  $g_{b,CO_2} = g_b / 1,37$  (моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>) на одиницю площі листя і  $g_{a,CO_2} = g_a$  (моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>) на одиницю поверхні ґрунту.

Другий підхід до моделювання асиміляції  $CO_2$  запропонований Farguhar et al. (1980) і узагальнений Leuning (1995)

$$A_{n,bio} = A_{n,\psi_1} \min(A_{n,c}, A_{n,g}), \quad (16.92)$$

де  $A_{n,\psi_1}$  – редуційна функція для асиміляції  $CO_2$ , обумовлена низьким водним потенціалом листка  $\psi_1$ ;

$A_{n,c}$  і  $A_{n,g}$  – швидкість асиміляції при лімітації провідністю і лімітації світлом відповідно, моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>.

Редукція асиміляції  $CO_2$  обумовлена низьким  $\psi_1$  моделюється як

$$A_{n,\psi_1} = \begin{cases} 0 & \text{if } \psi_1 < \psi_{l,A_{n,0}} \\ \frac{\psi_1 - \psi_{l,A_{n,0}}}{\psi_{l,A_{n,1}} - \psi_{l,A_{n,0}}} & \text{if } \psi_{l,A_{n,0}} < \psi_1 < \psi_{l,A_{n,1}} \\ 1 & \text{if } \psi_1 > \psi_{l,A_{n,1}} \end{cases}, \quad (16.93)$$

де  $\psi_{l,A_{n,1}}$  – пороговий потенціал, при якому асиміляція  $CO_2$ , редукована хімічною активністю, починає знижуватися, Па;



$\psi_{l,A_{n,0}}$  – пороговий потенціал, при якому асиміляція, редукована хімічною активністю, стає незначною, Па.

В умовах лімітації світлом біохімічна асиміляція на одиницю площі листка визначається за виразом

$$A_{n,q} = \frac{J}{4} \frac{C_i - \Gamma^*}{C_i + 2\Gamma^*}, \quad (16.94)$$

де  $J$  – падаючий потік електронів поглиненої фотосинтетично-активної радіації, моль фотон·с<sup>-1</sup>·м<sup>-2</sup>;

$\Gamma^*$  – точка компенсації CO<sub>2</sub>, моль·С·моль<sup>-1</sup>·повітря.

Точка компенсації залежить від температури

$$\Gamma^* = \gamma_0[1 + \gamma_1(T_l - T_0) + \gamma_2(T_l - T_0)^2], \quad (16.95)$$

де  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  – емпіричні константи;

$T_0$  – еталонна температура, К;

$T_l$  – температура листя, К.

Асиміляція, яка визначається лімітуванням умов провідності, моделюється так

$$A_{n,c} = V_{c,\max} \frac{C_i - \Gamma^*}{C_i + K_c(1 + o_i/K_o)}, \quad (16.96)$$

де  $V_{c,\max}$  – максимальна місткість карбоксилування, моль·м<sup>-2</sup>(листка)·с<sup>-1</sup>;

$K_c$  і  $K_o$  – константи Михаеліса-Ментен для CO<sub>2</sub> і O<sub>2</sub> відповідно, моль·м<sup>-2</sup>;

$o_i$  – концентрація кисню в атмосфері, моль·м<sup>-2</sup>.

Потік електронів визначається як

$$k_1 J^2 - (k_2 Q + J_{\max})J + k_2 Q J_{\max} = 0, \quad (16.97)$$

де  $Q$  – поглинена фотосинтетично-активна радіація, моль·фотон·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>;

$k_1$  – параметр, який визначає форму прямокутної гіперболи;

$k_2$  – квантовий вихід, моль електрон·моль<sup>-1</sup>·фотон;

$J_{\max}$  – потенційна швидкість електронного транспорту, моль·фотон·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>

Потенційна швидкість електронного транспорту визначається так

$$J_{\max} = J_{\max,0} \frac{\exp[(H_{vj}/RT_0)(1 - T_0/T_l)]}{1 + \exp[(S_v T_l - H_{dj})/(RT_l)]}, \quad (16.98)$$

де  $J_{\max,0}$  – максимальна швидкість електронного транспорту при  $T_0$ ,

моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>, ( $T_0$  дорівнює 293,2 К);

$R$  – газова стала, Дж·К<sup>-1</sup>·моль<sup>-1</sup>;

$H_{vj}$  – енергія активації, Дж·моль<sup>-1</sup>;

$S_v$  – величина ентропії, Дж·моль<sup>-1</sup>·К<sup>-1</sup>;

$H_{dj}$  – енергія деактивації, Дж·моль<sup>-1</sup>.

Коефіцієнт Михаеліса-Ментен визначається за рівнянням

$$K_x = K_{x0} \exp\left[\frac{H_x}{RT_0} \left(1 - \frac{T_0}{T_l}\right)\right]. \quad (16.99)$$

де  $K_{x0}$  – константа Михаеліса-Ментен при  $T_0$ , моль·моль<sup>-1</sup>;

$H_x$  – енергія активації, моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>.

Максимальна місткість карбоксилування визначається так

$$V_{c,\max} = V_{c,\max 0} \frac{\exp[(H_{vV}/RT_0)(1 - T_0/T_l)]}{1 + \exp[(S_v T_l - H_{dV})/(RT_l)]}, \quad (16.100)$$

де  $V_{c,\max 0}$  – величина  $V_{c,\max}$  при  $T_0$ , моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>;

$H_{vV}$  – енергія активації;

$H_{dV}$  – енергія деактивації, Дж·моль<sup>-1</sup>.

Температура листка визначається з повного рівняння балансу енергії листка

$$T_l = T_a + \frac{AR - \rho_w \lambda_w ET}{c_p \rho g b a}, \quad (16.101)$$

де  $c_p$  – теплоємність повітря, Дж·кг<sup>-1</sup>·К<sup>-1</sup>.

Вважається еквівалентним атмосферне поглинання вуглецю і біохімічна асиміляція

$$A_{n,bio} = A_{n,g_sba}. \quad (16.102)$$

*Дихання.* Обмеження приросту вуглецю і виходить росту рослинності зумовлює дихання. Сумарне дихання рослинності складається з дихання

листя, дихання дерева, розташованого вище поверхні ґрунту, дихання тонкого і великого коріння та дихання росту.

Дихання листя, заболоні стебел, заболоні коріння і тканин тонкого коріння моделюється згідно з роботою Sitch et al. (2003). Ці підходи ґрунтуються на дослідженнях Ryan (1991) і Sprugel et al. (1995), у яких дихання моделюється з врахуванням утримання азоту в різних тканинах. Розглядається вміст азоту, характерний для живих дихаючих тканин. В зв'язку з цим може бути використаний єдиний, заснований на азоті коефіцієнт дихання, але при цьому потрібна диференціація для утримання азоту в різних тканинах.

Для тканин заболоні розрізняється дихання вище поверхні ґрунту  $R_{sws}$  (моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>) і дихання тканин нижче поверхні ґрунту  $R_{swr}$  (моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>) з урахуванням температурної залежності. Воно записується такими рівняннями:

$$R_{sws} = f_{above} \cdot B_{mol} \cdot f_{sw} \frac{r}{cn_w} f(\overline{T_{day}}); \quad (16.103)$$

$$R_{swr} = (1 - f_{above}) \cdot B_{mol} \cdot f_{sw} \frac{r}{cn_w} f(\overline{T_{year}}), \quad (16.104)$$

де  $r$  – коефіцієнт дихання, г С·г N<sup>-1</sup>·д<sup>-1</sup>;

$B_{mol}$  – сумарна біомаса, моль С·м<sup>-2</sup>;

$f_{sw}$  – фракція заболоні;

$cn_w$  – відношення С : N тканин дерева;

$f(\overline{T})$  – розрахунок залежності дихання від температури;

$f_{above}$  – фракція біомаси дерева, розташована вище поверхні ґрунту.

Дихання листя і дихання тонкого коріння моделюється так:

$$R_l = \frac{LAI}{SLA \cdot C_{mass}} \frac{r}{cn_l} f(\overline{T_{day}}); \quad (16.105)$$

$$R_{fr} = \frac{RAI}{SRA \cdot C_{mass}} \frac{r}{cn_{fr}} f(\overline{T_{year}}), \quad (16.106)$$

де  $R_l$  і  $R_{fr}$  – відповідно дихання листя і тонкого коріння, моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>;

$C_{mass}$  – маса моля вуглецю, г·моль<sup>-1</sup>;

$cn_l$  і  $cn_{fr}$  – відповідно відношення С : N для листя і тонкого коріння;

$SRA$  і  $SLA$  – відповідно специфічна площа коріння і площа листя,

м<sup>2</sup>·кг<sup>-1</sup>·листок.

Температурна залежність дихання тканин, розташованих вище і нижче поверхні ґрунту, розраховується по модифікованому рівнянню Арреніуса

$$f(T) = \exp \left[ 308,56 \left( \frac{1}{56,02} - \frac{1}{T + 46,02} \right) \right], \quad (16.107)$$

де  $T$  – температура, °С.

Сумарне дихання  $R$  визначається як сума дихання усіх компартментів дерева

$$R = R_{sws} + R_{rwr} + R_{fr} + R_l, \quad (16.108)$$

де  $R$  – сумарне дихання, моль·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>.

Нетто-асиміляція визначається як

$$A_{n,net} = A_n - R. \quad (16.109)$$

Згідно Ryan (1991) вважається, що дихання росту буде фіксованою частиною нетто-асиміляції

$$R_{growth} = A_{n,net} \cdot (1 - 0,3). \quad (16.110)$$

*Перехоплення світла і води.* Передбачається хаотично однорідне розташування листя в просторі між вершиною і основою крони, де основна частина крони розташована в середній частині дерева. Розрахунок поглинання радіації розглядається як ситуація двох дерев з кронами, що перекриваються, але може розглядатися як і ситуація з великою кількістю дерев. Розрахунок поглинання радіації, первинне (перше) поглинання шаром  $ARL$  (Вт·м<sup>-2</sup>), де  $L$  означає номер шару, розраховується на основі сумарного  $LAI$  по окремих шарах

$$ARL = Rad(1 - \alpha) \prod_{k=1}^L (1 - \exp^{-kLAI_l}), \quad (16.111)$$

де  $\alpha$  – альbedo;

$k$  – коефіцієнт екстинції (послаблення);

$LAI_l$  – сумарний  $LAI$  шару  $l$ , який у разі двох видів буде

$$LAI_l = \sum_{i=1}^2 \frac{LAI_{l,i} \cdot dz_l}{dz_{crown,i}}, \quad (16.112)$$

де  $dz_l$  – вертикальна товщина шару, м;  
 $LAI_{l,i}$  – листковий індекс дерева  $i$  в шарі  $l$ ;  
 $dz_{crown,i}$  – довжина (висота) крони дерева  $i$ .

Поглинена радіація на одне дерево може бути розрахована як зважена сума поглиненої шарами листя радіації. Для кожного дерева в клітині поглинена радіація

$$AR_i = \sum_{l=1}^L \frac{LAI_{l,i}}{LAI_l} AR_l, \quad (16.113)$$

Перехоплення опадів розраховується на основі сумарного  $LAI$  рослин і лінійного розподілу між окремими  $LAI$  представлених видів дерев. Було зроблено припущення, що опади випадають з постійною інтенсивністю через заданий інтервал часу. Частина опадів  $P$ , що досягає вершини випадає прямо на ґрунт як прямі перехоплені опади  $P_d$  (мм·д<sup>-1</sup>), інша частина – перехоплені опади  $P_{int}$  (мм·д<sup>-1</sup>) залежить від фракції проміжків (просвітів)  $f_{gap}$

$$P_{int} = (1 - f_{gap})P. \quad (16.114)$$

Функція проміжків (просвітів) оцінюється використовуючи тільки коефіцієнт пропускання частини рівняння (16.111)

$$f_{gap} = e^{-kLAI}. \quad (16.115)$$

Коли розрахунки по моделі ведуться з добовим кроком в часі, величина перехоплених опадів не лімітує випаровування з відкритої водної поверхні. Це означає, що перехоплена на попередньому часовому кроці рослиною вода не перевищує випаровування

$$I = E_l = \min(E_0, LAI \cdot \frac{I_{cap}}{\Delta t}, P_{int}). \quad (16.116)$$

де  $I$  – перехоплені опади, мм·д<sup>-1</sup>;  
 $E_l$  – випаровування перехоплених опадів, мм·д<sup>-1</sup>;  
 $E_0$  – випаровування вологи з відкритої водної поверхні розраховується з використанням рівняння Пенмана-Ментіса (Monteith, 1963), яке застосовується для відкритої водної поверхні, мм·д<sup>-1</sup>;  
 $\Delta t$  – крок в часі, д;  
 $I_{cap}$  – максимальна місткість перехоплення опадів, мм.

Коли розрахунки по моделі виконуються з півгодинним кроком за часом,  $I$  не лімітує  $E_0$ . Це означає, що перехоплена вода з попереднього кроку за часом ще не випаровувалась і нерухома в рослині

$$I_t = \min [\max (I_{t-\Delta t} + P_{int} - E_0, 0), LAI \cdot \frac{I_{cap}}{\Delta t}], \quad (16.117)$$

де  $t$  – означає час і  $\Delta t$  (0,5 години) розмір кроку за часом.

У обох випадках опади, які не перехоплені рослинністю і випадають на поверхню ґрунту, розраховуються за виразом:

$$P_{net} = P - I. \quad (16.118)$$

Протягом часу, необхідного для випаровування перехоплених опадів, транспірація незначна.

#### 16.2.4. Піст, розподіл асимілятів, алометрія

Для розрахунку конкуренції за світло між деревами необхідно знати висоту дерев  $H$  (м) і  $LAI$ . Необхідно також знати  $LAI$  для розрахунку дихання листя і розподілу вуглецю. В зв'язку з тим, що ці параметри рослинності важко розраховувати на основі біомеханічних принципів, алометричне масштабування встановлених взаємозв'язків використовується для розрахунку біомаси на одиницю площі.

Геометрія дерев заснована на дерев'янистій біомасі. Дерев'яниста біомаса ділиться на надземну біомасу  $B_{above}$  і підземну біомасу  $B_{below}$ :

$$\begin{aligned} B_{above} &= f_{above}B \\ B_{below} &= (1 - f_{above})B \end{aligned} \quad (16.119)$$

де  $B$  – суха біомаса деревної частини рослин, кг·м<sup>-2</sup>;  
 $f_{above}$  – фракція надземної біомаси.

Величина  $f_{above}$  фіксована протягом росту і однакова для кожного виду.

Спрощено приймається, що рослина однорідна між його основою і його вершиною, де його основа розміщується на висоті, що становить половину відстані між вершиною і поверхнею ґрунту. Вважається, що 40 % надземної біомаси зосереджено в стеблах і 60 % – у гілках. Кількість дерев на одиницю площі розраховується як

$$n_{tree} = a_{nrtree} + b_{nrtree} \exp(-c_{nrtree} B_{above}), \quad (16.120)$$

де  $n_{tree}$  – кількість дерев на одиницю площі, дерево-га<sup>-1</sup>.

$a_{nrtree}$ ,  $b_{nrtree}$  і  $c_{nrtree}$  – емпіричні параметри.

Функція отримана згідно з роботами Jansen et al. (1996). Звідси витікає, що маса стебел на рослині визначається так

$$B_{stem} = \frac{B_{above} \cdot 10^4}{n_{tree}}, \quad (16.121)$$

де  $B_{stem}$  – маса стебел на рослині, кг;

$10^4$  – коефіцієнт перерахунку з метрів на гектар, м<sup>2</sup>·га<sup>-1</sup>.

Коли щільність дерева відома  $\rho_{stem}$ , то величина дерев'янистої частини дерева  $V_{stem}$  розраховується так

$$V_{stem} = \frac{B_{stem}}{\rho_{stem}}. \quad (16.122)$$

де  $V_{stem}$  – величина дерев'янистої частини дерева, м<sup>3</sup>;

$\rho_{stem}$  – щільність дерева, кг·м<sup>-3</sup>

Розрахунок діаметра стебла на висоті грудей  $D_{stem}$  наведено в роботі Landsberg (1986)

$$D_{stem} = \frac{(B_{stem} / a_{md})^{(1,0/b_{md})}}{100}, \quad (16.123)$$

де  $D_{stem}$  – діаметр стебла, м;

$a_{md}$  і  $b_{md}$  – алометричні масштабуючі фактори;

100 – фактор переведення з сантиметрів в метри.

Вважаючи циліндричною форму стебла дерева, висота дерева  $H_{tree}$  розраховується так

$$H_{tree} = \frac{V_{stem}}{(D_{stem}/2)^2 \pi}. \quad (16.124)$$

Так, за допомогою рівнянь (16.119) – (16.124) визначається висота, кількість дерев і біомаса на одиницю площі м<sup>2</sup>.

Вважається, що взаємозв'язок між  $RAI$  і  $LAI$  фіксовані

$$RAI = LAI_{max} \cdot RAI_{frac}. \quad (16.125)$$

Максимальна величина  $LAI$  залежить від площі заболоні за даними (Shinozaki in Friend et al., 1997)

$$LAI_{max} = \eta_f Z_{sw}, \quad (16.126)$$

де  $\eta_f$  – заболонь листкового відношення;

$Z_{sw}$  – площа заболоні на висоті грудей, м<sup>2</sup>.

Площа заболоні визначається за формулою

$$Z_{sw} = \frac{f_{sw} \cdot D_{stem}^2 \cdot \pi}{4}, \quad (16.127)$$

де  $f_{sw}$  – фракція заболоні в сумарній масі дерева.

Вона залежить від алометричного масштабуючого фактора

$$f_{sw} = \exp(a_{sw} B_{above}), \quad (16.128)$$

де  $a_{sw}$  – параметр, який контролює площу заболоні у масі дерева.

Біомаса заболоні дерева визначається за формулою

$$B_{sw} = B_{stem} \cdot f_{sw}. \quad (16.129)$$

Фенологія залежить від 10-ти денних сум максимальних температур.

Коли ці суми перевищують 100 °С листя починає рости і максимальна швидкість росту – це фракція  $LAI_{max}$

$$LAI_t = LAI_{t-\Delta t} + LAI_g \cdot LAI_{max} \Delta t, \quad (16.130)$$

де –  $LAI_g$  швидкість росту  $LAI$ , д<sup>-1</sup>;

Вуглець, що споживається в період росту є субстрат із запасів вуглецю, який може бути результатом падіння швидкості росту, коли запаси виснажаться. В кінці вегетаційного періоду, коли сума 10-ти денної максимальної температури стане нижчою 100 °С, листя почне жовтіти і опадати подібно до того, як відбувається ріст при зменшенні вмісту вуглецю в листках.

Розподіл вуглецю розраховується для кожного виду з добовим кроком за часом. На кожному кроці асиміляти розподіляються в запасуючі компартменти. З початку вегетаційного періоду вуглець із запасуючих компартментів використовується для росту листя до досягнення величини

$LAI_{max}$  або до виснаження вуглецю в запасуючих компартментах до 10 % від його максимальної величини  $S$ . Коли  $LAI_{max}$  досягнутий, асиміляти зберігаються, розподіляючись в запасуючі компартменти до їх максимальної місткості. Коли запасуючі компартменти наповнені до максимуму, асиміляти використовуються для росту біомаси деревної частини. Ріст деревної частини біомаси відбувається завдяки росту стебел і коріння. Кількість вуглецю, який використовується на росту листя залежить від  $LAI$  і  $SLA$

$$B_{lai} = \frac{LAI}{SLA}, \quad (16.131)$$

де  $SLA$  – специфічний листковий індекс,  $m^2 \cdot kg^{-1}$  ·листок.

Місткість запасуючих компартментів  $S$  ( $kg \cdot m^{-2}$ ) лімітується фіксованою фракцією заболони

$$S = f_{store} \cdot B_{sw}, \quad (16.132)$$

де  $f_{store}$  – фракція заболони, яка може бути використана для запасання вуглецю.

Коли запаси починають виснажуватися дерево відмирає, оскільки воно не має можливості створювати нове листя в наступному вегетаційному періоді. Помічено, що ріст листя не відбувається тільки тоді, коли менше 10 % запасеного вуглецю може використовуватися.

*Відмирання рослин.* Рослини гинуть, коли виснажується запасений вуглець. Також вважається, що випадкова загибель включає відмирання в результаті хвороб, вітру, затінювання. Вважаючи середній вік дерев 300 років при нестресових обставинах вірогідність загибелі буде 1/300 в рік. Ця умова виконується у моделі в разі, коли біомаса клітин обох видів повертається при висаджуванні в початкові умови.

Вище було розглянуто, притаманні для голландської школи моделювання («School of de Wit»), уявлення продукційного процесу рослин у вигляді досить складної системи. Наведено розроблені в рамках цієї школи дві останні досить перспективні для використання моделі, які відрізняються широтою охоплення процесів та великою детальністю їх моделювання. Особливо це відноситься до моделі системи ґрунт – вода – атмосфера – рослина (SWAP–WOFOST моделі), використання якої перспективне для моделювання формування урожаю сільськогосподарських культур. Модель конкуренції рослинності при світловому і водному лімітуванні може успішно використовуватись для моделювання природної та садової деревинної рослинності

## 17. АМЕРИКАНСЬКА ШКОЛА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОДУЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР (МОДЕЛЬ CERES-Wheat)

### 17.1. Принципи побудови моделі

Модель CERES-Wheat призначена для моделювання ефекту впливу густоти стояння рослин, погоди, вологості ґрунту і вмісту азоту на ріст, розвиток і формування урожаю сільськогосподарських культур. Вона створювалась з метою прогнозу і контролю як на рівні ферми, так і на регіональному рівні. Ці об'єктивні складові визначали рівень деталізації моделі.

Першочерговою задачею моделі є прогнозування потенціальної альтернативної стратегії і тактики управління впливу на проміжні кроки в процесі і в цілому процес формування урожаю. Передбачається, що це буде корисним на рівні ферм для вирощування культур протягом року і для оцінки багаторічного ризику їх вирощування. На регіональному рівні передбачається, що ця модель буде корисною для прогнозування урожаю та аналізу можливих явищ, які мають відношення до продуктивності рослин та збереження ресурсів.

Ці задачі потребують від моделей таких характеристик:

- використання доступної вхідної інформації про погоду, ґрунт, генетику рослин;
- використання найбільш поширених мов програмування;
- вимагати мінімального комп'ютерного часу;
- бути корисними для реалізації на мікрокомп'ютерах.

Як результат цих вимог, головне – це доступна щоденна інформація про погоду, даних стандартних ґрунтових характеристик і даних, забезпечених в документації моделі. Комп'ютерна програма CERES-Wheat моделі написана на мові FORTRAN

При детальному моделюванні росту, розвитку і формування урожаю рослин, модель приймає до уваги такі процеси:

- фенологічний розвиток як результат впливу генетики рослин і погоди;
- екстенсивний ріст листя, стебел і коренів;
- накопичення біомаси та розподіл приросту маси, особливо в репродуктивні органи;
- водний баланс і використання води рослинами;
- процеси трансформації азоту в ґрунті, поглинання його рослинами та розподіл між органами рослин.

Головним при цьому є узагальнення та формалізація знань, що лежать в основі моделі.

CERES-модель окремо визначає фази розвитку, які обумовлюють процеси, що розглядаються в моделі в часі. Розраховується поява кількості листя на головному стеблі, кількість пагонів і кількість зерен в колосі. Ці елементи відносяться до морфологічного розвитку, вони тісно пов'язані з фазами розвитку і ростом рослин.

Ріст розтягненням листя і стебел розраховується за допомогою приросту маси, тому що ріст розтягненням розглядається як «стік», який визначається температурою ростучих тканин. Приріст маси розглядається як «джерело», необхідне для наповнення ростучих тканин, а також для забезпечення асимілятами росту і підтримки кореневої системи. Приріст маси визначається спочатку сонячною радіацією, перехопленою листям рослин. За допомогою окремо визначених цих чотирьох аспектів росту і розвитку рослин логіка розподілу асимілятів може бути реалізована додержуючись деяких принципів, обґрунтованих в науковій літературі. Основні із цих принципи такі:

- в період накопичення маси зерна зерно визначає стік асимілятів. За матеріал для накопичення маси зерна можуть бути використані асиміляти поточного фотосинтезу, а також раніше запасені асиміляти. Недостача води і азоту не мають великого впливу на доступність матеріалу для транспорту в зерно;

- протягом періоду вегетативного росту надземна частина рослин має більш високий пріоритет для розподілу асимілятів ніж коренева система, за умов адекватності забезпеченості водою і азотом із ґрунту. Коли волога або азот лімітують протягом вегетативного росту, корені мають більш високий пріоритет для розподілу асимілятів ніж надземна частина рослин.

CERES-модель використовує описані вище основні принципи розподілу асимілятів протягом різних фаз розвитку для прогнозування росту рослин від «насіння до насіння» з врахуванням основних генетичних характеристик рослин.

Модель CERES-Wheat розроблена для оцінки протягом вегетаційного циклу різних генетичних типів пшениці, яка вирощується в усьому світі. В період, коли вегетація рослин проходить без стресів, хвороб, шкідників або недостачі води часто головним визначальним фактором є потенційний урожай рослин. Взаємозв'язок між біомасою урожаю і урожаєм зерна, деяким чином залежить від генотипу, а урожай зазвичай пропорційний надземній масі. Поліпшення урожаю культур в регіонах світу головним чином пов'язано з підвищенням *індексу урожайності* («harvest index»), тобто відношення урожаю зерна до біомаси.

Фази розвитку в CERES-Wheat пов'язані з тривалістю стадій росту. Стадії росту пшениці в життєвому циклі рослин визначають зміни в

розподілі асимілятів серед різних органів рослини. Наприклад, до формування колоса практично всі асиміляти розподіляються між листя і коренями. Після формування колоса стебла починають витратити асиміляти і колос стає основним органом для споживання асимілятів.

В CERES-Wheat стадії росту пшениці нумеруються від 1 до 9 (табл. 17.1). Стадії від 1-ї до 5-ї – це активні стадії надземного росту, стадії від 6-ї до 9-ї описують інші важливі етапи у життєвому циклі рослин.

Таблиця 17.1. Стадії росту пшениці, визначені в моделі CERES-Wheat

Стадія	Стадії розвитку	Ростучий орган
7	Оранка пару, передпосівний період	
8	Посів – проростання зерна	
9	Проростання – сходи	Корені, колеоптіль
1	Сходи – ініціація верхівкового колоска	Корені, листя
2	Верхівковий колосок – кінець росту листя і початок росту колоса	Корені, листя, стебла
3	Кінець росту листя і початок росту колоса – кінець цвітіння колоса	Корені, листя, колос
4	Кінець цвітіння колоса – початок накопичення маси зерна	Корені, стебла
5	Накопичення маси зерна	Корені, стебла, зерно
6	Кінець накопичення маси зерна – збирання урожаю	

## 17.2. Контроль фаз розвитку

В CERES-Wheat моделі приймається, що генотип і навколишнє середовище впливають на фази розвитку. Для проростання зерна (стадія 9) пріоритетною змінною, яка впливає на швидкість розвитку, є умови зволоження. Після проростання зерна, пріоритетною змінною, яка впливає на швидкість розвитку є температура.

Після проростання і до появи сходів (стадія 9) швидкість розвитку регулюється температурою. Вважається, що швидкість розвитку прямо пропорційна температурі в межах зміни від базової температури (0 °C) до максимальної температури (26 °C). Використання 0 °C як базової температури краще ніж інші базові (близько 0 °C), які іноді використовуються. Це встановлено на основі вимірювання появи листя при регульованих умовах температури. Порівняння швидкості появи листя з температурою показало існування взаємозв'язку між ними. Цей взаємозв'язок використовується в CERES-Wheat в широкому діапазоні температур. Денна температура вище 0 °C підсумовується і виступає як тепловий (температурний) період (Gallagher, 1979). Коли денна мінімальна

температура вище 0 °C і максимальна нижче 26 °C, температурний період дня приймається як середнє між мінімальною і максимальною величинами. Середня температура повітря розглядається як еквівалент середньої температури крони рослин, де відбувається ріст рослин.

**Стадія 7.** Передпосівний період. У тих випадках коли дані про наявність вологи у ґрунті на початок посіву відсутні, то використовуються розрахункові дані про вологу, отримані за допомогою визначення рівняння водного балансу. Якщо наявність вологи у ґрунті на початок посіву відома, то немає необхідності розраховувати водний баланс у передпосівний період. Якщо водний баланс розраховується в передпосівний період, то вологовміст у ґрунті часто вважають сухим після збирання попередньої культури або вологим після випадання опадів. Звичайно, в модель вводиться інформація про погоду в період 7-ї стадії.

**Стадія 8.** Проростання насіння – швидкий процес і протікає протягом одного дня, якщо вміст вологи у верхньому шарі ґрунту не знаходиться біля нижнього значення вмісту вологи у ґрунті або температурі нижче 0 °C. Частіше всього за таких умов насіння не висівають у холодний ґрунт, проте, насіння висівають у сухий ґрунт, не чекаючи, коли ґрунт стане вологим.

**Стадія 9.** Приймається, що на проростання насіння і появу сходів впливають два основних фактора – температура повітря і глибина загортання насіння. Вплив вологи ґрунту не враховується, вважається, що вміст вологи у ґрунті достатній для появи сходів культури. Вплив температури на появу сходів враховується по накопиченню тепла (у вигляді сум температур). Вплив глибини загортання насіння на появу сходів розглядається через тривалість часу необхідного для досягнення колеоптилем поверхні ґрунту. Тривалість 9-ї стадії виражається таким рівнянням

$$P9 = 40 + 10.2 * SDEPTH, \quad (17.1)$$

де P9 – сума температур для проходження 9-ї стадії;

SDEPTH – глибина загортання насіння.

**Стадія 1.** Яровизація. Сума температур для всіх стадій росту не фіксована. Яровизація, фотоперіод і генетичні характеристики, які визначають потрібну суму температур для появи сходів і верхівкового колоска, дуже різноманітні. Два фактори визначають тривалість вегетативної фази росту – появи листя, вони ґрунтуються тільки на сумі температур, що потрібна для появи одного листка та ініціації цвітіння, яка оснований на яровизації і фотоперіодизмі.

Сортам озимої пшениці зазвичай потрібна експозиція при відносно низьких температурах до початку формування верхівкового колоска. Встановлено, що яровизація проходить при температурі від 0 до 15 °C.

Оптимальна температура для яровизації – від 0 до 7 °C, а температура від 7 до 15 °C знижує ефективність яровизації. Мінімальна і максимальна денна температура використовується для розрахунку денного фактора ефективності яровизації, його величина змінюється від 0 до 1.

Фактор відносної ефективності яровизації RVE накопичується і визначається тривалість ефективної яровизації або *яровизаційні дні*. Яровизаційні дні підсумовуються в сумарну RVE величину, якщо навіть існують генетичні відмінності в чутливості до яровизації між сортами, то 50 яровизаційних днів є достатніми для яровизації всіх культур (табл. 17.2). Генетичні варіації з чутливості до яровизації розглядаються через використання специфічного коефіцієнта (PIV), який враховує вплив яровизації на 1-у стадію росту.

Таблиця 17.2. Результати вивчення визначального коефіцієнта для 12 сортів: Величина константи яровизації (k) [ $RGR = 1 - k(50 - V)$ ]

Сорт	K · 10 <sup>-2</sup>	Сорт	k × 10 <sup>-2</sup>
Agent	0,5	Nugaines	3,0
Lancota	1,4	Triumph	3,1
Centurk	2,6	Bezastaya	3,1
Sage	2,7	Coker 68-15	3,1
Scout 66	2,9	Arthur 71	3,2
Sturdy	3,0	Pawnee	4,0

Короткий фотоперіод може затримувати 1-у стадію розвитку рослин. В CERES-Wheat тривалість дня коротше 20 годин може затримувати фази розвитку. Затримка залежить від чутливості до фотоперіодизму використовуваних сортів, яка визначається генетичною специфічною характеристикою PID (табл. 17.3). В моделі розраховується фотоперіод, який включає громадські сутінки. Для розрахунків необхідно вводити широту місцевості та пору року.

Яровизаційні дні і фотоперіод модифікуються в накопиченні сум температур у 1-й стадії. Яровизаційний і фотоперіодичний фактори з величинами між 0 і 1, VF і DF, відповідно, розраховуються з використанням PIV і PID коефіцієнтів. Мінімальні величини у VF і DF скорочують швидкість накопичення сум температур. Коли накопичення сум температур (TDU) досягне 400 градусо-днів, 1-а стадія завершиться

$$TDU = \sum_0^{400} DTT \cdot [\min(VF, DF)], \quad (17.2)$$

де TDU – одиниця термічного розвитку;  
DDT – денна сума температур повітря.

Таблиця 17.3. Результати вивчення впливового коефіцієнта для 12 сортів: величина фотоперіодичної константи (C) [RGR = 1 - C(20 - P)]

Сорт	C · 10 <sup>-3</sup>	Сорт	C × 10 <sup>-3</sup>
Sturdy	2.1	Lancota	4.0
Coker 68-15	2.6	Nugaines	4.4
Bezastaya	3.2	Scout 66	4.9
Arthur 71	3.4	Pawnee	5.2
Centurk	3.7	Sage	5.5
Triumph	3.9	Agent	6.0

У визначенні вегетативного розвитку пшениці необхідно знайти час (період), який відноситься до появи листя, філохрон. Філохрон визначається як інтервал між появою верхівки листка; в CERES-Wheat моделі це змінна PHINT. Філохрон вважається константою градусо-днів у даній версії моделі. Однак, перевірка моделі показала, що є деякий додатковий вплив температури на інтервал між появою листя. В середньому величина PHINT приймається рівною 95 градусо-днів.

Стадія 2. 2-а стадія розвитку – це ініціація кінцевої частини верхівкового колоска наприкінці росту листя, розвивається безпосередньо під температурним регулюванням і має три філохрона від появи кінцевої частини верхівкового колоска до появи флаг-листка.

Стадія 3. В 3-й стадії колос розвивається дуже швидко і служить стоком для асимілятів. В кінці цієї стадії підраховується кількість зерен, які наливаються. Тривалість третьої стадії еквівалентна двом філохронам.

Стадія 4. На протязі 4-ї стадії кінця росту колоса і початку наливу зерна має місце цвітіння. Індикатором цієї фази є накопичення 200 градусо-днів протягом цієї стадії, від максимальних розмірів і об'єму колоса до часу, коли почнеться лінійне накопичення маси зерна. Існує не очевидний надземний стік для асимілятів протягом цієї стадії розвитку і не явне збільшення в об'ємі. Рослина накопичує асиміляти як запасні вуглеводи протягом цієї стадії для переміщення в колос в період стадії наливу зерна.

Стадія 5. У 5-й стадії зерно наливається, визначаються розміри зерна. Сума температур не є константою і визначається генетичною специфічною константою P5. Для всіх генотипів вважається, що сума температур дорівнює приблизно 500 градусо-днів. Ця стадія починається після

цвітіння, тобто від 2 до 10 днів після цвітіння зі швидким, лінійним збільшенням ваги зерна

Стадія 6. 6-а стадія резервується для розрахунку періоду від фізіологічного досягання до збирання урожаю культури. Ця стадія використовується при необхідності визначення оцінки зниження урожаю із-за затримання його збирання.

### 17.3. Формування сухої речовини

В моделі розглядається, що фотосинтетично-активна радіація (PAR) мДж/м<sup>2</sup>-д складає 50 % прихідної сумарної радіації. Для розрахунку потенціальної продуктивності біомаси в CERES-Wheat використовується таке рівняння

$$PCARB = 7.5 * IPAR ** 0.6, \quad (17.3)$$

де PCARB – потенційна продуктивність біомаси, г·м<sup>-2</sup>;

IPAR – перехоплена фотосинтетично-активна радіація.

Функція перехопленої рослинним покривом радіації розраховується як функція листового індексу (LAI) за таким рівнянням

$$IPAR/PAR = 1 - \text{EXP}^{(-0.85*LAI)}, \quad (17.4)$$

де LAI – відношення площі листя на рослині до площі поверхні ґрунту, яку займає рослина.

На дату сходів початкова площа листя приймається рівною 0,4 см<sup>2</sup>. потенціально продуктивність біомаси зменшують два фактори: відхилення температури від оптимальної та водний стрес. Зважена денна температура розраховується із мінімальної (ТЕМPMN) і максимальної (ТЕМPMX) денних температур для використання в розрахунках редукованого температурного фотосинтетичного фактора (PRFT), де оптимальна денна температура приймається рівною 18 °С. Денна температура апроксимується таким відношенням

$$T = 0.25 * \text{ТЕМPMN} + 0.75 * \text{ТЕМPMX}. \quad (17.5)$$

Редукція фотосинтезу температурою має вигляд

$$\text{PRFT} = 1 - 0.0025 * (T - 16) ** 2. \quad (17.6)$$

Водний стрес редукує швидкість продуктивності сухої маси, коли потенціал поглинання рослинами вологи падає нижче швидкості



потенціалу транспірації, розрахованого для рослин. Редукований фактор SWGF1 розраховується у водному блоці моделі. Поточна продуктивність біомаси CARBO визначається за виразом

$$\text{CARBO} = \text{PCARB} + [\min(\text{PRFT}, \text{SWDF1})]. \quad (17.7)$$

Інтенсивність дихання вважається пропорційною засвоєнню CO<sub>2</sub> в процесі фотосинтезу і не розраховується окремо а посередньо включена в розрахунок PCARB і PRFT. Інші компоненти моделі росту включають розподіл асимілятів протягом п'яти фаз стадій розвитку. Для моделювання розвитку CARBO визначається ріст рослин на 1 м<sup>2</sup>. Так моделюється, що ріст однієї рослини відображає і порівнюється з ростом всіх рослин. Вважається, що всі рослини на розгляді мій площі однорідні.

*Ріст листя та початок утворення пагонів.* Площа листя рослин впливає на перехоплення світла і продуктивність сухої маси. Швидкість розгортання листової поверхні є компонентом росту рослин, який дуже чутливий до стресів навколишнього середовища. Наприклад, розпускання листя більш чутливе до водного дефіциту ніж фотосинтез. Так, стрес посухи редукує розгортання листя більш ніж він редукує фотосинтез. Ця редукція при рості розтягненням без супутнього пониженого фотосинтезу може підвищити специфічну масу листя або підвищити пропорцію асимілятів, які розподіляються у корені. Моделі враховують цей відгук рослин враховуючи окремі функції дефіциту вологи для редукції розгортання росту листя і фотосинтезу.

Денне підвищення площі листя є результатом росту листя на головному стеблі і пагонах. В моделі площа листя на головному стеблі розраховується першою, потім здійснюється регулювання для кількості пагонів на рослині.

*Розвиток площі листя головного стебла.* Площа листя рослин є результатом швидкості появи листя і швидкості розгортання листя. Коли тільки пластинка листка проглядає, то вважається, що тільки один листок в часі розгортається на стеблі в період вегетативного росту. Вважається, що тільки два листка перебувають у активній стадії розгортання, при цьому тільки один із цих листків має видимий ріст. Ріст других листків відбувається всередині піхви із верхівки видимих листків. Їхній внесок в площу листя доступну для перехоплення сонячної радіації не розглядається.

Швидкість появи листя є лінійною функцією зміни температури від 0 до 26 °C. Поява листя розраховується через інтервали, використовуючи інформацію про температуру. Інтервал появи листя PHINT, також використовується як база для визначення росту листя. Обидва процеси і швидкість появи, і швидкість розгортання листя вважаються

регульованими температурою. Так, ріст площі листя може розраховуватись як функція температури без окремого розгляду появи індивідуального (окремого) листка і швидкості його розгортання.

Швидкість розгортання перших листків на рослині буде меншою ніж більш пізніх внаслідок того, що здатність рослин отримувати асиміляти і піддержувати листя при більшій зеленій площі листя буде більша. Перші листки рослин із-за цього будуть меншими. Швидкість росту площі листя на головному стеблі визначається за таким рівнянням

$$\text{PLAGMS} = 7.5 * \text{CUMPH} ** 0.5 \text{TI}, \quad (17.8)$$

де PLAGMS – швидкість росту площі листя, см<sup>2</sup>·д<sup>-1</sup>;

CUMPH – кумулятивний (сумарний) філохрон від сходів;

TI – фракція денного філохрона, яка дорівнює TI=DTT/PHINT.

За допомогою швидкості росту площі листя головного стебла можна знайти швидкість росту площі листя (сумарну) всієї рослини за виразом

$$\text{PLAG} = \text{PLAGMS} * \text{TILN}, \quad (17.9)$$

де PLAG – сумарна площа листя всієї рослини;

TILN – кількість пагонів рослини.

При перетворенні швидкості росту площі листя у величину, яка описує ріст маси, приймається, що тільки водний дефіцит буде затримувати потенційний ріст площі листя. Дефіцит вологості ґрунту визначається за допомогою рівняння водного балансу.

Для визначення кількості листків, які ростуть, знаходиться відношення площі листя до маси AWR. На 1-й стадії AWR включає всю надземну біомасу рослин, яка складається тільки із листя. Стебла складають незначну частку. Величина AWR на 1-й стадії вегетативного росту описується виразом

$$\text{AWR} = 150 - 0.075 * \text{TDU}, \quad (17.10)$$

де TDU – одиниця термічного розвитку.

Потенційний ріст листя GROLF є масою асимілятів, яка необхідна щоб забезпечити денний ріст рослин розтягненням, описується так

$$\text{GROLF} = \text{PLAG} / \text{AWR}. \quad (17.11)$$

Вважається, що ріст коренів забезпечується залишками денних асимілятів

$$\text{GRORT} = \text{GARB} - \text{GROLF}, \quad (17.12)$$

де GRORT – потенційний ріст коренів;

GARB – поточна продуктивність біомаси.

Якщо ріст коренів складає більше ніж 35 % від GARBO на 1-й стадії росту, то приймається, що рослина адекватно забезпечує ріст листя та їхню потенційну швидкість (Gregory et fl., 1978). Якщо GRORT менше ніж 35 % від GARB, то GROLF редукується так, що його величина досягає 65 % від GARB і GRORT із-за цього складає 35 % від GARB. Коли це відбувається, то нова величина для PLAG визначається як

$$PLAG = GROLF * AWR. \quad (17.13)$$

Сумарна площа листя PLA з врахуванням денного приросту дорівнює

$$PLA = PLA + PLAG. \quad (17.14)$$

Розглянуте вище використовують для розподілу асимілятів між головним стеблом і пагонами.

На 1-й стадії розвитку резерви вуглеводів, які доступні для росту листя і коренів містяться в ендоспермі насіння. В моделі забезпечення асимілятами доповнюється вуглеводами насіння до тих пір, поки не вичерпаються запаси насіння.

#### 17.4. Утворення пагонів (кущіння)

Потенційна швидкість формування пагонів кущіння залежить від суми температур після сходів, яка міститься в концепції раннього розвитку сформованих листків або накопичених філохронів CUMPH. Після трьох філохронів приймається, що пагони продукуються прямо пропорційно кількості листя

$$TC1 = -2.5 + CUMPH, \quad (17.15)$$

де TC1 – швидкість денного продукування пагонів.

Хоча швидкість формування наступних пагонів коло головного пагона також слідує цьому співвідношенню, поточна кількість потенційно сформованих пагонів лімітується кількістю доступних асимілятів. Цей розподіл асимілятів між пагонами оцінюється використовуючи кількість пагонів на один квадратний метр TPSM, де

$$TPSM = PLANTS * TILN, \quad (17.16)$$

де PLANTS – кількість рослин;

TILN – кількість пагонів на рослині.

Швидкість формування пагонів заснована на конкуренції лімітування пагонів на одному квадратному метрі

$$TC2 = 2.56E - 10 * (2500 - TPSM) **3, \quad (17.17)$$

де TC2 – швидкість формування пагонів на одному квадратному метрі.

Кількість пагонів на рослині TILN визначається швидкістю денного пагоноутворення і визначається як

$$TILN = TILN + TI * \min(TC1, TC2). \quad (17.18)$$

де TI = DTT/PHINT, денна фракція філохрона.

Для раннього росту пагонів, TC1 звичайно мінімальне для швидкості лімітованої функції. Коли більше пагонів формується, швидкість розраховується для TC2 звичайно мінімальна внаслідок підвищеної конкуренції.

Фактор водного дефіциту редукує фактор пагоноутворення подібно до швидкості росту листя. Він ґрунтується на обчисленні функції SWDF2, яка визначається із рівняння водного балансу.

Якщо спостерігається стрес або конкуренція і TILN буде менше одиниці, то вважається, що рослинна популяція не зменшується. Якщо TPSM більше ніж 1000 в кінці 1-ї стадії розвитку, TILN редукує до 1000/м<sup>2</sup>. Це приймається логічно для подальших розрахунків і ґрунтується на спостереженнях, які показали що може продукуватись не більше 1000 пагонів/м<sup>2</sup>. Редукція на 2-й стадії розвитку кількості стебел розглядається як наслідок конкуренції за асиміляти.

*Старіння листя.* Старіння листя з самого початку пов'язували з розвитком листя. В спостереженнях відмічалось, що кожний пагін підтримує не більше чотирьох листків. Вважається, що інших стресів, які викликають раннє старіння не має, старіння починається в старих листках після формування чотирьох нових листків. Рослина може підтримувати тільки чотири нових зелених листка, в той період як інші листки старіють. Цей тип старіння пояснюється можливо затіненням старих, нижніх листків верхніми новими (молодими) листками та фізичним ушкодженням одержаним старими листками як результат росту стебла і розгортання листя із піхви.

Швидкість зменшення площі листя рослин PLALR визначається як

$$PLALR = [PLSC(LN - 4) - PLSC(LN - 5)] * TI, \quad (17.19)$$

де PLALR – швидкість зменшення площі листя;

PLSC – накоплена площа листя в період, коли кожний верхній листок головного стебла повністю сформується;  
 LN – кількість листків головного стебла, які сформувались після сходів;  
 TI – фракція денного філохрона.

Із вище сказаного старіння площі листя SENLA визначається так

$$\text{SENLA} = \text{SENLA} + \text{PLALR}, \quad (17.20)$$

Коли спостерігається дефіцит вологи у ґрунті, старіння листя рослин зменшується за допомогою фактора SWDF1. За допомогою площі листя PLA і SENLA визначається листковий індекс зелених листків

$$\text{LAI} = (\text{PLA} - \text{SENLA}) * \text{PLANTS} * 0.0001, \quad (17.21)$$

де LAI – листковий індекс зелених листків;  
 константа 0,0001 перетворює одиницю площі листя із см<sup>2</sup> в м<sup>2</sup>.

Наведене рівняння використовується для розрахунку старіння протягом всього життєвого циклу рослини.

*Ріст стебел (2-а стадія).* Протягом 1-ї стадії розвитку кількість розвинутих пагонів зазвичай перевищує кількість пагонів, з яких можуть розвиватися стебла і колоски. Так, потенційний стік асимілятів перевищує споживання. За таких умов головною проблемою моделі стає правильне розподілення доступних асимілятів між стеблами, листям і корінням. Розподілення у кореневу частину рослин визначається таким співвідношенням

$$\text{PTF} = 0.7 + \text{SWDF1} * 0.1, \quad (17.22)$$

де PTF – функція надземної частини рослин.

PTF дорівнює 0,8 за умови відсутності водного стресу і 0,7, якщо будуть більш суворі умови розвитку.

SWDF1 – редуційний фактор, який визначається за допомогою рівняння водного балансу.

Після розподілу асимілятів у надземну частину рослин, їхні залишки розподіляються у корені. На відміну від 1-ї стадії у 2-й стадії не має мінімального процента асимілятів необхідних для розподілу в корені. Іноді PTF визначається таким чином, що фракція повинна розподілятися між стеблами і листям.

Після формування верхівкового колоска в кінці 1-ї стадії, фракція розподілу асимілятів у стебла поступово підвищується із практично незначної до 0,5 в кінці 2-ї стадії. Швидкість росту всіх стебел, включаючи пагони GROSTM, описується таким виразом

$$\text{GROSTM} = (0.15 + 0.12 * \text{DTT}/\text{PHINT}) * \text{CARBO} * \text{PTF}, \quad (17.23)$$

де GROSTM – швидкість росту стебел.

CARBO – поточна продуктивність біомаси.

Швидкість росту листя визначається так

$$\text{GROLF} = \text{CARBO} * \text{PTF} - \text{GROSTM}, \quad (17.24)$$

де GROLF – швидкість росту листя

Протягом 2-ї стадії нова площа листя приймається пропорційною новій масі листя. Стала пропорційності дорівнює 115 см<sup>2</sup>/г. Приймається, що сюди входить листкова пластинка і обгортка. Сумарна площа листя PLA визначається так

$$\text{PLA} = \text{PLA} + \text{GROLF} * 115. \quad (17.25)$$

*Відмирання бокових пагонів (стебел).* Відмирання бокових пагонів розглядається як результат неефективного постачання асимілятів для підтримки росту пагонів і дихання. Асиміляти, які потрібні окремому пагону, розраховуються покладаючись на те, що ця потреба пропорційна швидкості, з якою пагін може рости розтягненням (ріст розтягненням). Швидкість росту розтягненням окремого стебла значно відрізняється у різних генотипів рослин. Низькорослі та напівнизкорослі генотипи мають меншу потребу на одне стебло ніж генотипи з великим стеблом.

Швидкість приросту потенційної біомаси окремого стебла визначається термічним часом (сумою температур) і масою окремого стебла за таким рівнянням

$$\text{TILSW} = \text{TILSW} + \text{G4} * 0.0089 * \text{DTT} * \text{SUMDTT} * \text{SWDF1}/\text{PHINT} ** 2, \quad (17.26)$$

де TILSW – маса окремого стебла.

G4 – генетична специфічна константа, г/стебло. Ця константа визначається як фінальна потенційна суха маса для окремого стебла плюс колос в період цвітіння, коли рослина росте при оптимальних умовах.

Іноді потреба окремого стебла в асимілятах визначається логічно в моделях, забезпечуючи часово-затримуючий баланс, із забезпеченням асимілятами детермінації кількості пагонів, що може подовжуватися при затриманні асимілятів. Це відбувається при денному відношенні RTSW між сумарною масою стебел рослини і потенційною масою стебел. Всі пагони TILN стебла можуть бути розраховані за масою окремого пагона TILSW

$$RTSW = STMWT / (TILSW * TILN), \quad (17.27)$$

де RTSW – денне відношення сумарної маси стебел рослини і потенційної маси стебел;

STMWT – сумарна маса стебел.

Час сповільнення редукування кількості пагонів визначається так

$$TILN = TILN - [TILN * DTT * 0.005 * (1 - RTSW)]. \quad (17.28)$$

### 17.5. Ріст колоса

*Ріст колоса перед цвітінням (стадія 3).* Протягом 3-ї стадії розвитку, ріст рослин продовжується до кінця росту колоса перед цвітінням і має тривалість рівну двом філохронам. Головні ростучі органи в цей період: стебла, колос і корені. Через те, що трудно знати точно, коли головна частина (доля) росту колоса ініціюється і його відносно короткий період росту розтягненням, не розрізняється маса колоса і стебла. У моделі їхня маса комбінується у змінній STMWT.

Фракція денних асимілятів, які розподіляються у надземну частину рослин PTF, вважається константою, якщо не має дефіциту вологи у ґрунті. Розподіл асимілятів у некореневу частину рослин подібно тому, як він використовується для росту стебел на 2-й стадії розвитку

$$PTF = 0.75 + SWDF1 + 0.1, \quad (17.29)$$

де PTF – функція розподілу асимілятів у надземну частину рослини.

Це рівняння відображає 5 % підвищення в долі асимілятів, які направлені в надземну частину рослин в порівнянні з 2-ю стадією розвитку. PTF змінюється від 0,85 за умови відсутності водного стресу до 0,75 за умови більш суворого водного стресу. Подібно до 2-ї стадії розвитку, після розподілу асимілятів у надземну частину рослин асиміляти, які залишилися, направляються в корені.

Швидкість потенційного приросту біомаси для окремого пагона протягом 3-ї стадії розвитку є лінійною функцією температурного часу (суми температур) помноженою на G4. Маса окремого пагона TILSW визначається так

$$TILSW = TILSW + G4 * DTT * 0.25 / PHINT * SWDF1. \quad (17.30)$$

Подібно до 2-ї стадії розвитку, потреба окремого пагона в асимілятах балансує між забезпеченням асимілятами і можливим редукуванням кількості пагонів

$$TILN = TILN - [TILN * DTT * 0.005 * (1 - RTSW)]. \quad (17.31)$$

В кінці 3-ї стадії розраховується мінімальна маса стебла SWMIN. Вважається, що ця величина представляє мінімальну масу стебла, яка може спостерігатися, коли резерви асимілятів стебла використовуються протягом наливу зерна. Коли потенційна швидкість росту зерна рослини така, що асиміляти, отримані в процесі фотосинтезу неефективні, то використовуються вуглеводи стебел для цієї потреби. Коли це відбувається, маса стебел може зменшуватись але тільки до мінімальної маси. Редукція швидкості росту площі листя рослин PLALR обумовлена старінням на 3-й стадії

$$PLALR = 0.0003 * DTT * GPLA, \quad (17.32)$$

де PLALR – редукція швидкості росту листя;

GPLA – зелена площа листя (PLA-SENLA) в кінці 2-ї стадії розвитку.

Старіння листя описується так

$$SENLA = SENLA - PLALR, \quad (17.33)$$

де SENLA – старіння площі листя.

*Кінець росту колоса розтягненням – початок наливу зерна (стадія 4).* 4-а стадія розвитку має тривалість, яка дорівнює сумі температур 200°C. В період цієї стадії надземні органи рослини активно не збільшуються в об'ємі (не розширяються). Вуглеводи, запасені протягом цього періоду, призводять до збільшення маси стебла. Ці резерви вуглеводів можуть пізніше транспортуватись у зерно. 4-а стадія дуже важлива для формування урожаю зерна, тому що маса стебел і колосків в кінці цієї стадії є пропорційною кількості зерен, які будуть наливатись. Цвітіння також протікає у цій стадії.

Вважається, що протягом 4-ї стадії, 90 % продукованої денної біомаси розподіляється у надземну частину рослин, якщо не буде водного стресу. За умови водного стресу ця величина редукує до 80 %

$$PTF = 0.8 + SWDF1 * 0.1. \quad (17.34)$$

Для спрощення приймається, що протягом 4-ї стадії все збільшення маси надземної частини рослини проходить у стеблах і колосі.

Зменшення швидкості росту листя і старіння площі листя SENLA розраховується на 4-й стадії розвитку подібно тому як на 3-й стадії, за винятком того, що швидкість іноді тісно пов'язана з дозріванням

$$PLALR = 0.0006 * DTT * GPLA. \quad (17.35)$$

Водний стрес прискорює старіння. Старіння листя визначається так

$$SENLA = SENLA + PLALR. \quad (17.36)$$

В кінці 4-ї стадії, базова температура для визначення термічного часу змінюється від 0 до 1, для подальшого визначення термічного часу в 5-й стадії розвитку. Вважається, що кількість зерен в колосі на одну рослину буде продуктом сумарної маси стебла і колоса в кінці 4-ї стадії та генетичної специфічної константи G2. Ця константа використовується для врахування відмінностей у кількості зерен в колосі для різних сортів

$$GPP = STMWT * G2, \quad (17.37)$$

де GPP – кількість зерен в колосі на одну рослину

G2 – генетична специфічна константа

Величина, яка отримується для GPP із цього рівняння, не змінюється протягом усього подальшого життєвого циклу рослин, якщо не має суворого водного стресу, що призводить до фертильності (безплідності) частини квіток в період наливу зерна.

*Налив зерна (5-а стадія).* При обґрунтуванні швидкості фотосинтезу для рослин в період наливу зерна, коли листя старіють, є деякі труднощі. Ріст коренів в цей період незначний, більшість даних досліджень показує, що деяка частина асимілятів використовується для наливу зерна у вигляді вуглеводів, які накопичились у інших органах рослини.

Більшість вимірювань швидкості продуктивності сумарної надземної біомаси показує зменшення відносної швидкості росту. Проте, в цей час протікає підвищення дихання підтримки, що обумовлено великими розмірами рослин. Припущення, що в усі стадії розвитку дихання пропорційне грос-фотосинтезу і змінюється під впливом редукованого температурного фактора обговорювалось раніше. Протягом цієї стадії це припущення не може бути обґрунтованим так, як для інших стадій.

Швидкість фотосинтезу буде залежати від поточних потреб в асимілятах в період наливу зерна (Evans et al., 1975). Друга можливість, коли більше асимілятів розподіляється у корені, якщо потреба для наливу зерна незначна. Опис цієї динаміки зворотного зв'язку і невизначеності кількості переміщеного в зерно денного фотосинтезу викликає певні труднощі.

Для оцінки кількості асимілятів, отриманих із фотосинтезу і кількості асимілятів із запасів вуглеводів, використовується таке співвідношення

$$PTF = SWMIN/STMWT * 0.35 + 0.65, \quad (17.38)$$

де PTF – фракція надземної біомаси;

SWMIN – мінімальна маса стебла, розрахована в кінці 3-ї стадії;

STMWT – маса стебла.

У корені буде розподілятися більша маса асимілятів, коли верхня частина рослини забезпечена запасними асимілятами. Коли запасні вуглеводи будуть використані, всі асиміляти фотосинтезу підуть на налив зерна, тобто при SWMIN=STMWT. Величина PTF змінюється звичайно між 0,7 на початку 4-ї стадії і 1,0 в кінці. Як і в інших стадіях розвитку, корені засвоюють фракцію асимілятів не розподілену у фракції надземної частини рослини.

Швидкість фотосинтезу під впливом віку листя і стоку потрібних асимілятів апроксимуються використовуючи рівняння, яке редукує початкову розраховану величину CARBO

$$CARBO = CARBO * [1 - (1.2 - 0.8 * SWMIN/STMWT) * (SUMDTT + 100)/(P5 + 100)] \quad (17.39)$$

де P5 – тривалість періоду наливу зерна у градусо-днях (сума температур).

Вплив віку листя, який розрахований за допомогою відношення (SUMDTT+100)/(P5+100) за допомогою рівняння (17.39) і потреба у асимілятах відображається посередньо через відношення SWMIN=STMWT.

Старіння на 5-й стадії визначається нелінійним рівнянням, в якому швидкість зменшення площі листя рослин PLALR приймається, як настання дозрівання

$$PLALR = GPLA * 2 * SUMDTT/P5 ** 2, \quad (17.40)$$

де PLALR – зменшення площі листя рослин;

GPLA – зелена площа листя.

Швидкість росту зерна на 5-й стадії розраховується для окремого зерна і вважається, що всі зерна ростуть з однаковою швидкістю. Спочатку відносна швидкість наливу зерна розраховується як функція температури. Припускається, що швидкість наливу зерна пропорційна температурі між 0 і 17 °C з оптимумом температури для наливу зерна вище 17 °C. Якщо середня температура менше 10°C, то швидкість наливу зерна RGFILL визначається за рівнянням

$$RGFILL = 0.065 * TEMPM, \quad (17.41)$$

де RGFILL – швидкість наливу зерна;

TEMPM – середня температура, при температурі нижче нуля налив не відбувається.

Якщо середня температура вище 10 °C, то

$$RGFILL = 0.65 + [0.0787 - 0.00328 * (TEMPMX - TEMPMN)] * (TEMPM - 10)^{0.8} \quad (17.42)$$

де TEMPMX – максимальна температура повітря;

TEMPMN – мінімальна температура повітря.

Величина RGFILL не може перевищувати 1.

В період наливу зерна рослин водний дефіцит впливає на налив зерна тільки через редукцію в забезпеченості асимілятами.

Денний потенційний ріст зерна цілої рослини GROGRN визначається із відносної швидкості наливу зерна, кількості зерен на рослині і генетичної константи G3

$$GROGRN = RGFILL * GPP * G3 * 0.001, \quad (17.43)$$

де GROGRN – денний потенційний ріст зерна рослини;

RGFILL – поточна швидкість наливу зерна;

GPP – кількість зерен на рослині;

G3 – генетична специфічна константа швидкості росту зерна;

0,001 – фактор переходу від одиниць мг до г.

Розрахунок поточної швидкості наливу зерна необхідно визначати за допомогою фотосинтезу плюс запасні асиміляти, які підтримують ріст всіх зерен. Виходячи з цього величина GROSTM розраховується додатково для надземної біомаси рослин з врахуванням потенційного росту зерна

$$GROSTM = GARBO * PTF - GROGRN, \quad (17.44)$$

де GROSTM – денний потенційний ріст надземної маси.

Залежна від стану резервів вуглеводів у стеблі і забезпеченості денними асимілятами величина GROSTM може бути додатною або від'ємною. Маса стебла визначається так

$$STMWT = STMWT + GROSTM, \quad (17.45)$$

де STMWT – маса стебла.

Якщо STMWT більше або рівне SWMIN, то швидкість росту зерна дорівнює від'ємній потенціальній швидкості. Якщо STMWT менше ніж SWMIN, то швидкість наливу зерна дорівнює денній біомасі, яка розподіляється в надземну частину рослин. Ця редукція росту зерна

відбувається тільки при закінченні стадії наливу зерна, тому що запасні вуглеводи вичерпуються і швидкість денної асиміляції буде нижче тому, що відбувається редукція зеленого листя, яка зумовлена старінням.

Маса зерна рослин GRNWT визначається за допомогою поточної швидкості росту зерна GROGRN

$$GRNWT = GRNWT + GROGRN, \quad (17.46)$$

де GRNWT – маса зерна рослини.

Суша маса урожаю зерна на одинцю площі в кінці 5-ї стадії визначається множенням маси зерна однієї рослини GRNWT на кількість рослин PLANTS. Цей урожай розраховується в моделі коректно, включаючи процент вологи в зерні.

### 17.6. Розвиток кореневої системи

Щільність довжини коренів необхідна для розрахунку поглинання води коренями та оцінки фактора водного дефіциту, який знижує інтенсивність різних процесів у рослині.

В кожен стадію розвитку рослин, деяка частина асимілятів розподіляється в корені GRORT. При моделювання адсорбційної системи коренів необхідно перетворити масу коренів GRORT в довжину коренів. Враховуючи, що зменшення біомаси обумовлене виділеннями коренів і опадом, приймається, що тільки 60 % розподіленої в корені біомаси залучається в приріст структурної маси коренів. Крім того, додатково 0,5 % кореневої маси буде зменшуватись через дихання. Перетворення GRORT в довжину коренів обгрунтовано за даними Gregoly et al. (1978), в яких наводиться, що  $1,05 \cdot 10^4$  см довжини коренів приходить на 1 грам кореня. Звідси денна довжина нових коренів визначається як

$$RLNEW = GRORT * PLANTS * 1.05, \quad (17.47)$$

де RLNEW – денна довжина нових коренів;

PLANTS – кількість рослин;

1,05 – константа для переведення денного розподілення у корені біомаси окремої рослини в сантиметрах довжини коренів на см<sup>2</sup> ґрунту.

В зв'язку з тим, що розглядається модель, яка не тривимірна у ґрунтовому просторі, довжина коренів розраховується з припущення, що корені рівномірно розташовані у ґрунті.

Просування вниз коренів приймається пропорційним денному термічному часу (сумі температур) подібно розвитку листя. За винятком, коли ґрунт сухий в шарі, де ростуть вниз корені або коли рослина

перебуває під впливом водного стресу. Якщо не розглядається водний стрес, то швидкість росту коренів вниз приймається рівним 0,22 см/градусо-день. Швидкість росту коренів вниз визначається як глибина залягання коренів RTDEP

$$RTDEP = RTDEP + DTT * 0.22(\min(SWDF1 * 2, SWDF)), \quad (17.48)$$

де RTDEP – глибина залягання коренів

SWDF1 – фактор стресу рослин, який визначається за допомогою рівняння водного балансу ґрунту;

SWDF – фактор водного стресу для шару ґрунту, де розташовані ростучі корені.

Величина фактора SWDF дорівнює 1, якщо є принаймні 25 % доступної ґрунтової вологи ESW на глибині, де розташовані ростучі корені. Якщо величина ESW менше 25 %, то

$$SWDF = 4 * [SW(L) - LL(L)] / ESW(L), \quad (17.49)$$

де SW(L) – вміст вологи у ґрунті на глибині L, де розміщені ростучі корені;

LL(L) – нижній ліміт доступної води в цьому шарі;

ESW(L) – різниця (відмінність) між верхнім рівнем ґрунтової вологи у дренаваному ґрунті DUL(L) і LL(L).

Розміщення коренів у ґрунтових шарах оцінюється за допомогою фактора відносної щільності довжини коренів RLDF у кожному шарі зі збільшенням глибини DLAYR(L), де ростуть корені

$$RLDF(L) = SWDF * WR(L) * DLAYR(L), \quad (17.50)$$

де RLDF – фактор відносної щільності довжини коренів;

WR(L) – фактор пріоритетності коренів для кожного шару L.

Фактор WR(L) зі збільшенням глибини залежить від властивостей ґрунту і змінюється від 0 до 1. Він представляє собою відносну перевагу для росту коренів на різній глибині в залежності від вологи ґрунту і рівня азоту.

Для отримання розподілення росту нових коренів з глибиною, фактор щільності довжини коренів RLDF(L) розраховується для кожного шару ґрунту зі збільшенням глибини до нижнього шару кореневої зони RTDFP

$$RLDF(L) = WR(L) * DLAYR(L) * \min(SWDF, RNFA), \quad (17.51)$$

де RLDF(L) – щільності довжини коренів у шарі L;

MIN – показник, за допомогою якого вибирається мінімальна величина із двох змінних;

SWDF – лімітування росту коренів через нестачу води у шарі ґрунту;

RNFA – лімітування росту коренів через нестачу азоту.

Величини SWDF і RNFA змінюються від одиниці при відсутності лімітування до нуля при значному лімітуванні росту

$$RNFA = 1.0 - [1.17 * \exp(-0.5 * TOTN)], \quad (17.52)$$

де TOTN – сумарний вміст азоту у шарі ґрунту.

Сума величин RLDF(L) для кожного шару з коренями розраховується як сумарний фактор щільності довжини коренів TRLDF. Фракція росту нових коренів для кожного шару ґрунту складає RLDF(L)/TRLDF. Збільшення щільності довжини коренів з глибиною визначається так

$$RLV(L) = RLV(L) + (RLDF(L)/TRLDF) * (RLNEW/DLAYR(L)) - 0.01 * RLD(L) \quad (17.53)$$

де RLV(L) – щільність довжини коренів з глибиною.

Розмірність RLV(L) см довжини коренів на см<sup>3</sup> ґрунту.

Вище було розглянуто одну з останніх найбільш розвинених та перспективних моделей американської школи моделювання продукційного процесу рослин – модель CERES-Wheat. На базі цієї моделі створено модель CERES-maize та моделі для інших сільськогосподарських культур, які призначені для моделювання росту, розвитку та формування продуктивності рослин під впливом метеорологічних умов, вологозабезпеченості посівів та азотного живлення. Цільовим призначенням моделей є діагностика стану посівів сільськогосподарських культур та прогнозування їхньої продуктивності. При цьому вирішуються також задачі, які пов'язані з оцінкою можливості прогнозування потенціальної альтернативної стратегії і тактики управління вирощування сільськогосподарських культур.

Використання моделі CERES-Wheat як базової дозволить створити новий клас моделей та буде перспективною для розробки методів прогнозування урожайності сільськогосподарських культур

## 18. АНГЛІЙСЬКА ШКОЛА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОДУЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ РОСЛИН

### 18.1. Підходи до моделювання продукційного процесу

#### 18.1.1. Структура і запас

В фундаментальній роботі J.H.M. Thornley (1976) розглядається, що моделі рослин незмінно ґрунтуються на сильному спрощенні реальної системи. Спрощення, яке має деякий фізіологічний сенс, полягає в тому, що рослинний матеріал розділяється на дві категорії: структуру і запас. Цей розподіл корисно зв'язати з величинами, які можуть бути виміряні; можна постулювати, що у тому випадку, коли доступ зовнішніх субстратів до нормально зростаючої рослини припинений, кількість запасних речовин зменшуватиметься; ті ж речовини, які при цьому збільшуються у своїй масі або не зменшуються, можуть бути віднесені до речовин структурних. Ділення на структуру і запас та його функціональне визначення являються, звичайно, наближенням, і в деяких випадках модель повинна ґрунтуватися на детальніших даних, які враховують значно більшу кількість речовин і їх взаємоперетворення.

На рис. 18.1 показано розподіл рослинного матеріалу на два компоненти – структуру і запас. Позначимо через  $W$  суху масу рослини (або орган рослини), а через  $W_G$  і  $W_S$  – відповідно суху масу структурного і запасеного компонентів, тоді

$$W = W_G + W_S. \quad (18.1)$$

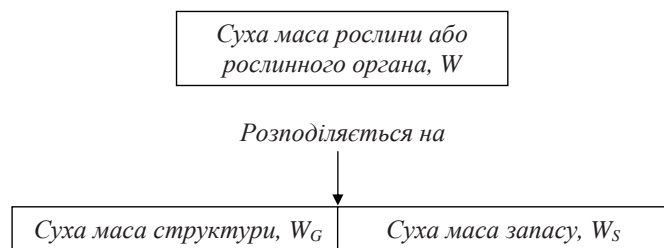


Рис. 18.1. Ілюстрація ділення рослинного матеріалу на дві категорії: структуру і запас.

Визначимо, що слово «ріст» безпосередньо розглядається як збільшення сухої маси, диференціюючи (18.1) за часом, отримаємо загальну швидкість росту, яка буде складатися із двох доданків

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_G}{dt} + \frac{dW_S}{dt}. \quad (18.2)$$

Швидкість росту структури  $dW_G/dt$  разом зі швидкістю росту запасу  $dW_S/dt$  складає загальну швидкість росту  $dW/dt$ . Таким чином, можливо, у рослини, яка має негативну загальну швидкість росту, вона складається із позитивної швидкості росту структури і негативної швидкості росту запасу. Прикладом цього може служити ріст вночі, коли у багатьох рослин сильно зменшується запас при значному рості структури, а загальне зменшення сухої маси обумовлюється диханням.

Фізіологи традиційно використовують символ  $R_W$ , щоб позначити відносну швидкість росту (іноді скорочено  $RGR$ ), яка визначається співвідношенням

$$R_W = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt'}, \quad (18.3)$$

де змінна часу  $t'$  вимірюється за добу.

Тут використання терміну «відносна» є неточним, а можливо, навіть невірним і краще використовувати слово «питома», яке має сенс «поділена на масу» (Royal Society, 1971). Більше того, термін «питома швидкість росту» знайшов схоже застосування в зоології і мікробіології, де символ  $\mu$  використовується для позначення цієї величини. У цій роботі використовується термін «питома швидкість росту» з символом  $\mu$ , який визначається співвідношенням

$$\mu = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}, \quad (18.4)$$

з розмірністю  $s^{-1}$  при збереженні вираження "відносна швидкість росту" для аналогічної одиниці, яка визначається за рівнянням (18.3) з розмірністю  $d^{-1}$ .

Очевидно, що питома швидкість росту (рівняння (18.4)) визначається з розрахунку на «загальну суху масу», яка включає структуру і запас; ця величина може і не мати сенсу в тих умовах, де співвідношення структура : запас варіює у великих межах, наприклад, у добовому експерименті, коли рослина схильна до дії темного і світлового періодів. Якщо утворення нового структурного матеріалу розглядається як визначальний процес, то, можливо, краще розраховувати питому швидкість росту структури  $\mu_G$



$$\mu_G = \frac{1}{W_G} \frac{dW_G}{dt}; \quad (18.5)$$

з іншого боку, при дослідженнях росту запасуючих органів може виявитися більш вагомим питома швидкість росту запасу  $\mu_s$ .

### 18.1.2. Джерела і стоки

Слова «джерело» і «стік» часто використовуються фізіологами рослин у зв'язку з проблемами росту рослин. Ці терміни застосовувалися різними дослідниками по-різному (Waggen, Wilson, 1972), що призводило до деякої плутаниці. Всі існуючі визначення джерела і стоку мають певні недоліки. Поняття джерело – стік з найбільшою користю можна застосовувати на рівні органів, і тоді воно може бути віднесене до речовин, які транспортуються через межі органу. Використання поняття джерело – стік зовсім не є необхідним і в сумнівних випадках його слід уникати.

У рослині вуглеводи є найбільш важливим сполученням, проте слід строго обумовлювати, по відношенню до якої речовини орган або тканина розглядаються як джерело або стік. Наприклад, можливі випадки, коли орган є вуглеводним стоком і амінокислотним джерелом. Ми визначаємо силу джерела таким чином

$$\begin{aligned} F_X &= \text{сила джерела частини рослини по відношенню до речовини} \\ X &= \text{видима (чиста) швидкість, з якою } X \\ &\text{транспортуються з цієї частини рослини.} \end{aligned} \quad (18.6)$$

Іншими словами, силу джерела якоїсь частини (або цілої) рослини можна розглядати просто як видимий потік із цієї частини і визначати її тільки на основі транспортних процесів, які йдуть через межі частини. Сила стоку дорівнює негативному значенню сили джерела, так якщо значення  $F_X$  негативне, то розмір стоку рівний  $-F_X$ . Силу джерела  $F_X$  зазвичай вимірюють в кг речовини  $X$  в с ( $\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}$ ) або іноді в кг моль речовини  $X$  в с ( $\text{кг моль}\cdot\text{с}^{-1}$ ). Закон збереження речовини дозволяє написати рівняння нерозривності, а саме

$$\begin{aligned} F_X &= \text{видима швидкість утворення } X \text{ в частині рослини -} \\ &\text{видима швидкість запасаювання } X \text{ в цій частині.} \end{aligned} \quad (18.7)$$

Усі ці величини вимірюють в тих же одиницях, що і  $F_X$ . Нижче наводимо деякі приклади застосування цих визначень в конкретних випадках.

1. Ізольований лист, який росте і здійснює фотосинтез. Цей лист є стоком для вуглекислоти, але не є ні джерелом, ні стоком для вуглеводів. Обидва члени в правій частині рівняння (18.7) рівні; слід пам'ятати, що видима швидкість утворення вуглеводів включає інтенсивність істинного фотосинтезу, а також швидкість використання вуглеводів для росту і дихання. Цей приклад ілюструє подальше ускладнення сенсу джерело – стік, оскільки в зростаючому органі визначальні його межі з часом змінюються; в цьому випадку наше визначення за рівнянням (18.6) застосовується до рухомих меж.

2. Проростання насіння в темряві. Уся система є джерелом  $\text{CO}_2$ , але не є ні джерелом, ні стоком для вуглеводів. З іншого боку, якщо розділити таку систему як сім'ядольне насіння на осі (погін і корінь), що розвиваються, то вони виявляться стоком для вуглеводів, а сім'ядолі – джерелом вуглеводів. Схожі міркування застосовані до сім'я ендосперми, що поглинає речовини з позаембріонного джерела.

3. Швидкорослий фотосинтезуючий молодий листок, який також імпортує вуглеводи. Видимий статус листка полягає в тому, що він є стоком для вуглеводів, хоча разом з імпортом частково може відбуватися і експорт вуглеводів, що відображає рівняння (18.7). Швидкість утворення вуглеводів при фотосинтезі менше швидкості, з якою вуглеводи використовуються для росту; різниця повинна покриватися за рахунок використання запасних вуглеводів листа (тобто за рахунок зменшення концентрації вуглеводів). Проте, в цьому випадку спостерігається також імпорт вуглеводів.

Таким чином, у визначенні описується загальний стан, хоча воно може містити і позитивні й негативні члени, які відносяться до сили джерела. Важливо те, що область простору (тканина або орган) і період часу, які характеризують джерело, точно вказані. Наприклад, якщо цю область розділити на дві підобласті, то це може позначитися позитивно або негативно на силі джерела. Аналогічним чином протягом усього періоду часу орган може бути джерелом, хоча всередині цього періоду він деякий час може бути стоком. У таких випадках інтегрування за часом або простором являється прямим, а вклади від різних частин простору і часу просто підсумовуються.

Рівняння (18.7) представлене в найзагальнішому вигляді. У моделях часто застосовують описане далі рівняння. Нехай  $P_X$  – видима швидкість утворення речовини  $X$  в даній частині рослини;  $P_X$  включає усі метаболічні реакції, в яких  $X$  бере участь як субстрат або продукт, і є першим доданком в правій частині рівняння (18.7). Нехай  $V$  – об'єм рослини, що вивчається, а  $X$  означає щільність речовини  $X$  в цьому об'ємі, причому припустимо, що  $X$  рівномірно розподілений в  $V$ .  $X$  має розмірність  $\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$ . Тоді кількість  $X$  в об'ємі  $V$  буде рівна  $VX$  і рівняння нерозривності (18.7) набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}(VX) = P_X - F_X. \quad (18.8)$$

Відмітимо, що кількість  $X$ , наявного або запасеного в об'ємі  $V$ , дорівнює  $VX$ . Якщо, наприклад, сахароза перетворюється на крохмаль, то це перетворення розглядається як метаболічне; воно включається до величини  $P_X$ , якщо  $X$  за умовами не включає і сахарозу, і крохмаль. У моделі рослини  $X$  рідко відповідає одному виду молекул, а розглядається як один пул декількох, тісно пов'язаних між собою молекул, що досить швидко приходять до рівноваги.

Можна спростити рівняння (18.8), виконуючи апроксимацію і приймаючи, що член в лівій частині рівняння невеликий порівняно з членами у правій частині. В результаті отримаємо

$$F_X \approx P_X. \quad (18.9)$$

Іншими словами, видима швидкість утворення  $X$  в об'ємі  $V$  дорівнює видимій швидкості транспорту  $X$  з об'єму; це означає, що пул  $X$ ,  $VX$  є малим. Таке припущення не завжди приймається в описаних далі моделях. Але тут воно прийняте, оскільки це дозволяє обговорити проблему джерело – стік. Уоррен Вільсон (Warren Wilson, 1972) висловив припущення, що поняття «активність» джерела (стоку) є корисною додатковою концепцією, і визначив це поняття таким чином

$$\text{сила джерела} = \text{розмір джерела} \times \text{активність джерела}. \quad (18.10)$$

У використанні цього виразу є деякі труднощі, на що вказував і В. Вільсон (1972). Розглянемо, як у відповідності зроблених визначень можна використовувати рівняння (18.10).

Перше завдання – вибір критерію розміру джерела. Серед можливих показників, очевидно, можна назвати об'єм  $V$ , загальну суху масу  $W$ , суху масу структури  $W_G$  і суху масу запасу  $W_S$ . Розглянемо спочатку загальну суху масу  $W$  (активність джерела в цьому випадку краще називати «питомою силою джерела»). Використовуючи рівняння (18.6) і (18.10), отримаємо

$$\text{активність джерела}_X = \frac{F_X}{W}, \quad (18.11)$$

де індекс  $X$  використовується для того, щоб відмітити, що активність джерела відноситься до речовини  $X$ . Використовуючи рівняння (18.9) (згадуючи, що воно стало результатом апроксимації), рівняння (18.11) можна написати у вигляді

$$\text{активність джерела}_X = \frac{P_X}{W}. \quad (18.12)$$

Тепер припустимо, що  $X$  відноситься до вуглеводів  $\text{CH}_2\text{O}$  і що видима швидкість використання вуглеводів –  $P_{\{\text{CH}_2\text{O}\}}$  пов'язана із швидкістю утворення сухої маси співвідношенням

$$\frac{dW}{dt} = -Y P_{\{\text{CH}_2\text{O}\}}, \quad (18.13)$$

де  $Y$  – ефективність конверсії з розмірністю кілограм сухої маси на кілограм вуглеводів (тут не робиться відмінностей між структурою і запасанням утвореної сухої речовини або використанням вуглеводів для підтримки).

Підставляючи рівняння (18.13) в (18.12), одержимо

$$\text{активність стоку}_{\{\text{CH}_2\text{O}\}} = \frac{1}{Y} \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \quad (18.14)$$

або, навпаки

$$\frac{dW}{dt} = W Y (\text{активність стоку}_{\{\text{CH}_2\text{O}\}}). \quad (18.15)$$

В. Вільсон (Warren Wilson, 1972) інтерпретує рівняння (18.10) таким чином

$$\text{швидкість росту} = \text{суха маса} \times \text{питома швидкість росту}. \quad (18.16)$$

Проте з рівняння (18.14) видно, що активність стоку не є синонімом питомої швидкості росту, а пов'язана з нею за допомогою ефективності конверсії. Це має підстави, оскільки можливо, що орган, що деградує вуглеводи, може мати питому швидкість росту, рівну нулю, і в той же час є істотним стоком для вуглеводів; ця ситуація описана рівнянням (18.14), при коефіцієнті  $Y$ , рівному нулю. Визначення призводять до висновку, що у відрізаного живого листка, де відбувається фотосинтез, активність стоку по відношенню до  $\text{CH}_2\text{O}$  дорівнює нулю, але не дорівнює нулю по відношенню до  $\text{CO}_2$ ; у рівнянні (18.14) коефіцієнт  $Y$  в цьому випадку описує перетворення  $\text{CO}_2$  на суху речовину.

Як відмічено раніше, сила джерела може бути пов'язана з іншими критеріями величини джерела. Проте термінологію концепції джерело – стік краще всього використовувати лише в тих випадках, коли основний інтерес представляють загальна суха маса і органи, біохімічний склад яких істотно не змінюється в часі. Ефективність конверсії в рівнянні (18.14), звичайно, залежатиме від того, чи є орган переважно структурним запасуючим або чимось проміжним.

### 18.1.3. Використання субстратів

Ріст і розвиток органа рослини залежать від доступності в потрібних кількостях субстратів, необхідних для цих процесів. У цьому розділі виводяться деякі феноменологічні рівняння використання субстратів, які часто є важливими компонентами моделей рослин. Ці рівняння не претендують на опис деталей вказаних, загалом дуже складних процесів; тому їх слід розглядати як наближення, хоча вони і можуть бути отримані з простих біохімічних моделей. Найвні дані зазвичай підтверджують придатність цих наближених рівнянь; проте часто доводиться робити певне обґрунтування внаслідок труднощів належного вибору між математичними рівняннями з аналогічними характеристиками.

*Прямокутна гіпербола (один субстрат).* Це рівняння, мабуть, є найважливішим при розробці моделей рослин. Зазвичай воно відоме біологам як рівняння Михаеліса-Ментен, як простий приклад моделювання. Воно часто використовується, коли даний процес залежить від рівня одного субстрату  $X$ . Швидкість використання  $X$  (або швидкість процесу, до якого залучається  $X$ ) задається у вигляді

$$U = \frac{kX}{K + X} \quad (18.17)$$

де  $k$  і  $K$  – константи, а символом  $X$  позначена щільність субстрату  $X$ . Графічно це рівняння наведено на рис 18.2.

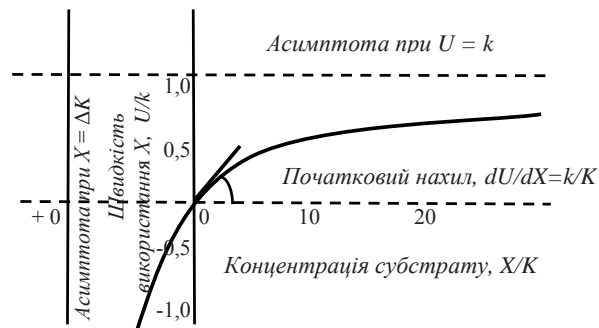


Рис. 18.2 Прямокутна гіпербола, рівняння (18.17):  $U$  – швидкість утилізації субстрату  $X$ ;  $k$  і  $K$  – константи. При  $X=K$  реакція, дорівнює половині максимального значення. Переривчастими лініями позначені асимптоти.

Коли  $X \rightarrow \infty$ ,  $U$  наближається до асимптоти (максимальному значенню) –  $U \equiv k$ . Такий характер кривої представляється логічним, оскільки очевидно, що при досить великих значеннях  $X$  ферментна система, що використовує його, насичується. При малих значеннях  $X$  і  $U$  лінійна по відношенню до  $X$  з нахилом  $k/K$  і наближається до нуля при  $X$ , що прагне до нуля. Значення  $X$  для половинного максимального значення реакції складає

$$X(\text{половина максимального значення}) = \frac{\text{асимптота}}{\text{початковий нахил}} = \frac{k}{k/K} = K. \quad (18.18)$$

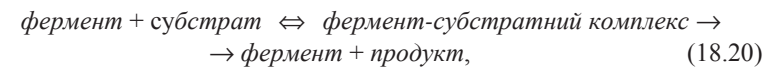
Гradient і похідна gradientа описуються такими виразами:

$$\frac{dU}{dX} = \frac{kK}{(K + X)^2} \quad \text{і} \quad \frac{d^2U}{dX^2} = -\frac{2kK}{(K + X)^2}. \quad (18.19)$$

Gradient безперервно зменшується із збільшенням  $X$  ( $K$  і  $X > 0$ ) і крива не має точок перегину. В протилежність цьому іноді припускають, що gradient найшвидше змінюється поблизу точки  $X \geq 0$ ; ця область кривої є її ділянкою, яка найточніше апроксимується прямою лінією

Дану криву називають прямокутною гіперболою, оскільки обидві її асимптоти перпендикулярні одна з одною. Крива характеризується двома параметрами: початковим нахилом і положенням горизонтальної асимптоти.

Прямокутна гіпербола і рівняння Михаеліса-Ментен широко використовуються для опису ферментативних реакцій (Fruto Simmonds, 1958). Наприклад, це рівняння може бути виведене для реакції



яка є одноферментною двоетапною реакцією. Проте воно може іноді застосовуватися до одноферментних багатоступінчастих реакцій (Dixon, Webb, 1964), а також до багатоферментних реакцій (Heagon, 1952).

Багато біологічних процесів описуються рівнянням типу (18.17). Так, питомі швидкості росту мікроорганізмів досить точно описуються цим рівнянням (Dean, Hinshewood, 1966), так само як інтенсивність дихання зрілого листа (Yemm, 1965), дихання картоплі (Barker, 1956). Абсолютно інший приклад представляє залежність між поглинанням іонів і їхньою зовнішньою концентрацією (Erstein, 1972).

Рівняння (18.17) може описувати також дію гормонів, чинників росту рослин, поживних речовин за умови вибору відповідних значень  $k$  і  $K$ .

Такий підхід зазвичай прийнятний лише у тому випадку, коли ефекти, що вивчаються, постійні, тобто  $k$  і  $K$  в процесі росту рослини не змінюються.

*Непрямокутна гіпербола (один субстрат).* Прямокутна гіпербола (рівняння (18.17)) може бути представлено у вигляді

$$XU + KU - kX = 0. \quad (18.21)$$

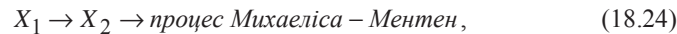
Це рівняння можна змінити, якщо додати до лівої частини член  $-aU^2$ , де  $a$  – константа

$$-aU^2 + XU + KU - kU = 0. \quad (18.22)$$

Рівняння (18.22) описує гіперболу, асимптоти якої вже не утворюють прямого кута. В даному випадку асимптоти – дві прямі лінії:

$$U = k \quad \text{і} \quad U = \frac{X}{a} = \frac{K}{a} - k. \quad (18.23)$$

Існує декілька фізіологічних процесів, які проявляють кінетику, яка описується непрямокутною гіперболою. Одним з найбільш звичайних прикладів є реакція Михаеліса-Ментен (рівняння (18.20) у поєднанні з дифузійним процесом. Розглянемо систему



де  $X_1$  – субстрат, який недоступний для використання, але після "дифузії" у другий компартмент стає доступним, як  $X_2$ .

Утилізація  $X_2$  залежить від щільності  $X_2$ , згідно з рівнянням Михаеліса-Ментен. Якщо  $R$  – опір між компартментами  $X_1$  і  $X_2$ , то швидкість пересування від  $X_1$  до  $X_2$  дорівнює  $\frac{X_1 - X_2}{R}$ .  $X_2$

використовується зі швидкістю (рівняння (18.17))  $\frac{kX_2}{K + X_2}$

У стаціонарному стані обидва процеси відбуваються з рівними швидкостями, і утилізація  $U$  надається у вигляді:

$$U = \frac{X_1 - X_2}{R} \quad \text{і} \quad U = \frac{kX_2}{K + X_2}. \quad (18.25)$$

Виключаючи  $X_2$  з першого рівняння (18.25) за допомогою другого рівняння, після перетворень одержимо

$$0 = -RU^2 + (Rk + K + X_1)U - kX_1. \quad (18.26)$$

Це рівняння може бути перетворене в таку формулу

$$0 = -\frac{Rk}{Rk + K} \left(\frac{U}{k}\right)^2 + \left(1 + \frac{X_1}{Rk + K}\right) \left(\frac{U}{k}\right) - \frac{X_1}{Rk + K}. \quad (18.27)$$

До фізіологічних процесів, які можна вивчати, використовуючи непрямокутну гіперболічну функцію, відносяться фотосинтез листка ( $\text{CO}_2$  дифундує в листок до фіксації в процесах типу Михаеліса-Ментен), клітинний ріст і реакція його на субстрат, а також поживні речовини (коли надходження останніх в клітину схоже з дифузиею, після якої здійснюється процес типу Михаеліса-Ментен).

*Прямокутна гіпербола (два субстрати).* Для багатьох процесів рослини потребують постачання принаймні двома субстратами. Наприклад, для фотосинтезу потрібні  $\text{CO}_2$  і  $\text{H}_2\text{O}$ , для росту рослин потрібні вуглець, азот, а також інші субстрати. Припустимо, що субстрати  $X_1$  і  $X_2$  потрібні для процесу в рівному співвідношенні, а  $U$  – швидкість використання  $X_1$  або  $X_2$ , тоді

$$U = \frac{k'X_1X_2}{1 + L_1X_1 + L_2X_2 + L_{12}X_1X_2}, \quad (18.28)$$

де  $k'$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  і  $L_{12}$  – константи.

Це рівняння за певних умов характеризує також кінетику двосубстратної ферментативної реакції (Dixon, Webb, 1964). Залежність між  $U$  і  $X_1$  є прямокутною гіперболою, у якої початковий нахил і асимптота залежать від значення  $X_2$ . Оскільки рівняння (18.28) симетричне відносно  $X_1$  і  $X_2$ , аналогічні міркування застосовуються і до  $X_2$ . Залежність реакцій від концентрації  $X_1$  і  $X_2$  наведені на рис. 18.3.

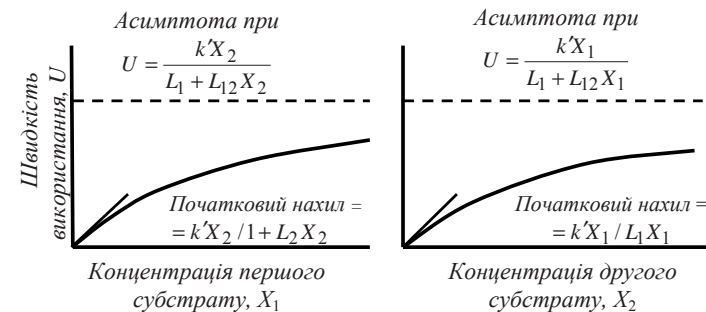


Рис. 18.3. Криві реакції використання двох субстратів рівняння (18.28).

### 18.1.4. Криві порогової реакції

Переривчастими лініями позначені асимптоти. Обидві криві є прямокутними гіперболами, в яких асимптота і початковий нахил по відношенню до одного субстрату залежать від концентрації другого субстрату.

На основі рівняння (18.28) можна отримати феноменологічні рівняння, які виражають реакцію типу прямокутної гіперболи з будь-якою кількістю субстрату. Якщо в рівнянні (18.28)  $X_2$  розглядати як рівень чинника росту або гормону, то воно може бути записано у формі рівняння (18.17) зі значенням  $X_2$ , вираженим через константи  $k$  і  $K$ .

*Сигмоїдальна реакція (один субстрат).* Жодна з описаних вище кривих реакцій не мала точок перегину; проте вони є характерною особливістю багатьох біологічних процесів. Припустимо, що реакція типу нормальної кінетики Михаеліса-Ментен (18.20) наведена в такому вигляді



де  $E$  означає фермент, а  $X$  – його субстрат.

В цьому випадку з однією молекулою  $E$  сполучаються дві молекули  $X$ . Можна показати, що швидкість використання субстрату  $X \rightarrow U$  складає

$$U = \frac{kX^2}{K^2 + X^2}. \quad (18.30)$$

де  $k$  і  $K$  – константи.

Рівняння має асимптоту  $U \approx K$ , початковий нахил дорівнює нулю, і точку перегину при  $X/K = 1/\sqrt{3}$ . Крива рівняння (18.30) наведена на рис. 18.4.

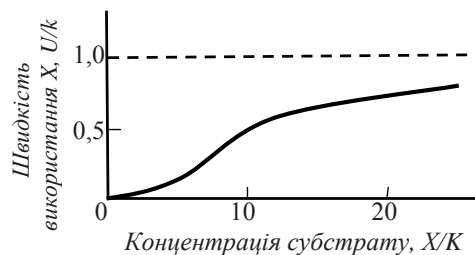


Рис. 18.4. Крива реакції сигмоїдального типу, рівняння (18.30):

$U$  – швидкість утилізації субстрату  $X$ ;  $k$  і  $K$  – константи. Переривчастою лінією позначена асимптота; початковий нахил дорівнює нулю, спостерігається точка перегину при  $X/K = 1/\sqrt{3}$ .

Деякі підсистеми рослини проявляють реакцію порогового типу. Це означає, що поведінка системи залежить від того, чи буде деякий чинник  $X$  вище або нижче за критичне значення  $X_c$ . Нижче описано два типи кривих сигмоїдальної реакції. Вони можуть бути отримані на підставі молекулярних моделей, хоч би емпіричних, для опису ряду завдань, таких як використання субстрату, активація або інгібування процесів, індукція або репресія синтетичних систем, токсичні ефекти в живленні рослин і перемикання альтернативних шляхів розвитку.

Першою розглянемо наступну криву порогової реакції

$$U = \frac{kX^n}{X_c^n + X^n}, \quad (18.31)$$

де  $U$  – реакція;

$X$  – концентрація, рівень деякої речовини або чинника;

$X_c$  – значення  $X$  для половини максимальної швидкості реакції;

$n$  – число (яке часто зручно задавати як позитивне ціле число);

$k$  – константа.

Рівняння (18.31) може бути записане у вигляді

$$\frac{U}{k} = \frac{(X/X_c)^n}{1 + (X/X_c)^n}. \quad (18.32)$$

На рис. 18.5 наведено графік цього рівняння для різних значень  $n$ . При  $n = 1$  крива ідентична прямокутній гіперболі без точки перегину, при  $n = 2$  проявляється слабка сигмоїдальність кривої. Для зростаючих значень  $n$  сигмоїдальність стає все більш вираженою, поки при наближенні до  $n \rightarrow \infty$  не виникне ступінчаста функція. При  $X \rightarrow \infty$   $U$  наближається до асимптоти  $U \cong k$ , для  $n \geq 2$  початковий нахил дорівнює нулю, і можна показати, що є точка перегину при

$$\frac{X}{X_c} = \left[ \frac{n-1}{n+1} \right]^{1/n}. \quad (18.33)$$

Зі збільшенням  $n$  точка перегину зсувається все ближче і ближче до точки  $X = X_c$ . Якщо рівняння (18.32) розглядати як емпіричну залежність, то  $n$  може бути і не цілим числом. Якщо ж встановлюється зв'язок між рівнянням (18.32) і конкретною молекулярною моделлю, наприклад такою, де передбачається певна кількість активних центрів на молекулу білка, тоді

$n$  є цілим числом, яке дорівнює кількості активних центрів на молекулу.

Рівняння (18.32) та рис. 18.5 показують тип режиму «включення», де різкість характеристики включення залежить від значення  $n$ . На рис. 18.6 наведено криві типу «виключення», які отримано для різних значень  $n$ .

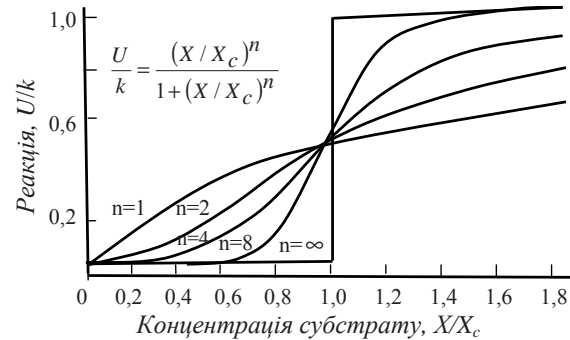


Рис. 18.5. Криві порогової реакції (типу «вмикач»):

$U$  – реакція, що варіює між 0 і  $k$ ;  $k$  – константа;  $X$  – концентрація або рівень субстрату або деякого іншого чинника;  $X_c$  – значення  $X$  для половини максимальної реакції;  $n$  – позитивне число, зазвичай вибране як ціле число. Сигмоїдальна реакція і тип включення проявляються при  $n \geq 2$ .

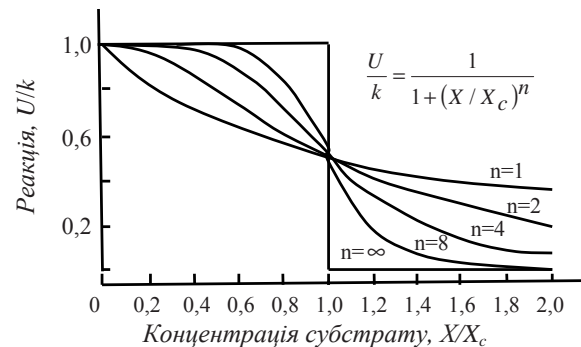


Рис. 18.6. Криві порогової реакції (типу «вмикач»):

$U$  – реакція, що варіює в межах  $k - 0$ ;  $k$  – константа;  $X$  – концентрація або рівень речовини або деякого іншого чинника;  $X_c$  значення  $X$  для половини максимальної реакції;  $n$  – позитивне число, вибране як ціле число. Сигмоїдальна реакція і виключення проявляються при  $n \geq 2$ .

Можна отримати відносно близьке до розглянутого рівняння типу «виключення». Це рівняння доповнює рівняння (18.32) і має такий вигляд

$$\frac{U}{k} = \frac{1}{1 + (X/X_c)^n}, \quad (18.34)$$

де символи мають ті ж значення, що і в (18.32). Зв'язок між рівняннями (18.34) і (18.32) очевидний: праві частини в сумі дають одиницю. Асимптота в цьому випадку при  $U \cong 0$  замість  $U \cong k$  і точка перегину задається рівнянням (18.33).

### 18.1.5. Транслокація

Рослини не могли б рости без здійснення транспорту речовин в ті місця, де вони використовуються для відповідних синтезів. Якщо модель рослини призначається для вивчення ролі транспорту речовин в процесах росту і формоутворення, то в ній повинно знайти відображення і опис транспортних процесів.

Тут розглянемо деякі підходи до вирішення цієї проблеми. Два фізіологічні трактування цієї проблеми опублікували Кенні (Canny, 1973) і Піл (Peel, 1974). Це питання розглянуте тут головним чином у зв'язку з транспортом сахарів. Небагато знайдеться проблем у фізіології рослин, які були б досліджені так докладно і породили так багато протиріч, як ця.

Незважаючи на це, досі не досягнуто належне розуміння існуючих механізмів транспорту. На щастя, знання деталей механізму в ряді випадків і не вимагається, важливо вміти описувати загальні закономірності транспорту з врахуванням властивостей рослини. Тобто, досить феноменологічного опису процесу. В зв'язку з цим доцільно розглянути деякі властивості простих фізичних систем, які можуть допомогти в розумінні властивостей транспортних процесів в рослині.

Обмежимося тут розглядом об'ємного транспорту рідин і розчинів, транспорту іонів або молекул субстрату шляхом дифузії і «активних» механізмів. Не торкатимемося питань транспорту через поверхні (Sutcliffe, Collins, 1975) або транспорту в газовій фазі; вони відносяться до процесів дифузії  $\text{CO}_2$  і  $\text{H}_2\text{O}$  в листя і з листя, а також до транспортних явищ у ґрунті і не пов'язані безпосередньо з вказаними вище питаннями.

Транспорт – суто полярне явище, хоча багато пов'язаних з ним механізмів за своєю природою є неполярними і полярність обумовлена лише системою розташування джерел і стоків. У таких випадках напрям транспорту може змінюватися при зміні знаків джерел і стоків.

### Означення термінів

#### Потік $F$

Потік речовини  $X$  – це кількість речовини, що проходить через цю поверхню в одиницю часу. Він позначений символом  $F$ ; його розмірність  $\text{кг } X \cdot \text{с}^{-1}$  або іноді –  $\text{кг} \cdot \text{моль } X \text{ в } \text{с}$ .

Якщо ця поверхня повністю становить якусь частину органа рослини, то потік  $F$  означає силу джерела або стоку цієї частини органа рослини за рівнянням (18.6). Потік є скалярною величиною і для цієї поверхні досить одного числа для його характеристики.

#### Густина потоку, $M$

Густина потоку – векторна величина з трьома компонентами. Компонент густини потоку речовини  $X$  в цій точці простору і в цьому напрямі – це кількість речовини, що пересікає одиницю площі поверхні в цій точці та напрямі, перпендикулярному до даного, в одиницю часу.  $M$  має розмірність  $\text{кг } X \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$  (іноді  $\text{кг} \cdot \text{моль } X \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ),  $F$  і  $M$  формально пов'язані інтегралом

$$F = \int_{\text{поверхня}} \overline{M} d\overline{S}, \quad (18.35)$$

де  $d\overline{S}$  – елемент поверхні;

$\overline{M} d\overline{S}$  – скалярний добуток вектора  $\overline{M}$  і  $d\overline{S}$  ( $M dS \cos \theta$ , де  $\theta$  – кут між  $M$  і нормаллю до  $dS$ );

інтеграл береться по поверхні, через яку розраховують потік.

Це схематично показано на рис. 18.7.

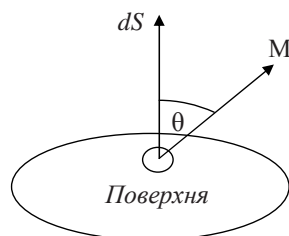


Рис. 18.7. Зв'язок між густиною  $M$  і потоком  $F$ , рівняння (18.35):

$dS$  – елемент даної поверхні, який можна представити у вигляді вектора, перпендикулярного до елемента поверхні. Значення  $M$  має бути представлене його компонентом, який перетинає  $dS$ , тобто у вигляді  $M dS \cos \theta$ . Потік  $F$  через поверхню отримують підсумовуванням усіх складових  $M dS \cos \theta$  по поверхні.

#### Швидкість, $v$

Якщо  $X$  означає густину речовини  $X$  з розмірністю  $\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$  (іноді  $\text{кг} \cdot \text{моль } X \cdot \text{м}^{-3}$ ), то швидкість  $v$  визначається за виразом з розмірністю  $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

$$v = \frac{M}{X}. \quad (18.36)$$

Слід зазначити, що величина  $v$  може бути, а може і не бути пов'язана з якою-небудь реальною швидкістю в системі, залежній від типу транспорту; це обговорюватиметься пізніше при розгляді конкретних механізмів.

#### Масовий потік

Термін «масовий потік» використовується для опису такого типу транспорту, при якому усі компоненти багатокомпонентної рідини рухаються з однаковою швидкістю, представляючи потік маси. У областях інших, ніж транслокація речовини в рослинах, цей тип потоку частіше прийнято називати «конвективним струмом», хоча з поваги до традиції для більшої ясності використовується термін «масовий потік». Слід нагадати, що транспорт, в основному, виражає рух маси, навіть якщо він дифузійного типу.

#### Активний транспорт

Хоча багато фізіологів рослин вважають, що вони знають сенс активного транспорту, чітке його визначення викликає утруднення. Це пов'язано з тим, що усі безперервні транспортні процеси активні, оскільки для їх підтримки потрібна енергія. В той же час є зустрічні транспортні процеси, які не можуть розглядатися як активні. Наприклад, у рослини, яка транспірує, коріння якої не поглинає певні види іонів, відбувається рух іонів в поживному або ґрунтовому розчині проти іонного градієнта до кореню. Нехтуючи інерційними ефектами (розглянемо, наприклад, м'яч, який рухається у повітрі), можна допускати, що молекули і іони завжди рухаються в напрямку, який визначається загальною рушійною силою; лише у тому випадку, коли розглядаються окремі компоненти рушійної сили, один з них може дати появу «зустрічного» транспорту.

Активний транспорт – це процес, в якому потік може підтримуватися проти градієнта електрхімічного потенціалу і для якого потрібне пряме використання метаболічної енергії десь уздовж транспортного шляху. Хоча активні механізми здатні здійснювати висхідний транспорт, вони можуть також прискорювати низхідні потоки.

#### Дифузія і полегшена дифузія

Звичайна дифузія не вимагає пояснення. Полегшена дифузія по суті також дифузійний процес, проте він має більш високе значення константи дифузії, чим це можна було б чекати. Наприклад, окрема молекула може завдяки своїм розмірам і електричним властивостям дифундувати відносно повільно в цьому середовищі; проте в комбінації або асоціації з деякими іншими молекулами вона придбаває здатність дифундувати швидше; це – приклад полегшеної дифузії. Як дифузія, так і полегшена дифузія мають одні й ті ж особливості, хоча іноді концентрація агента, що полегшує

дифузію, може досягати насичених значень, і тоді проявляється відмінність реакцій.

Розглянемо два резервуари, в кожному з яких знаходиться речовина  $X$ . Якщо  $X_1$  – концентрація  $X$  в першому резервуарі,  $X_2$  – концентрація  $X$  в другому резервуарі, і при цьому резервуари сполучені трубкою завдовжки  $l$  з площею поперечного перерізу  $A$ , то густина потоку  $X - M$  з першого резервуару в другий складатиме

$$M = \frac{D(X_1 - X_2)}{l}, \quad (18.37)$$

де  $D$  – константа дифузії.

У цьому випадку потік  $F$  дорівнює

$$F = AM = \frac{AD(X_1 - X_2)}{l}, \quad (18.38)$$

а швидкість його з рівняння (18.35), якщо  $X = 1/2 (X_1 + X_2)$  складає

$$v = \frac{2D(X_1 - X_2)}{l(X_1 + X_2)}. \quad (18.39)$$

Тут  $v$  означає середню швидкість перенесення молекул. Вона не пов'язана з реальними швидкостями руху молекул. Дана система в основному неполярна; полярність задається джерелом і стоком. Джерело і стік забезпечують енергію, яка витрачається на транспортні процеси. Якщо  $X_1 > X_2$ , то кількість вільної енергії, що приходить на одиницю  $X$ , вище в резервуарі 1, чим в резервуарі 2. Для підтримки системи в стаціонарному стані необхідно безперервно забезпечувати енергією джерело або стік, додаючи молекули в компартмент джерела і (або) видаляючи їх із компартмента стоку.

## 18.2. Моделювання розподілу з транспортно-конверсійними процесами

### 18.2.1. Структура моделі

Модель «транспорт – опір» (transport – resistance model) для моделювання розподілення сухої речовини в рослині (TR) ґрунтується на концепції Thornly (1970) про розподіл – надземна частина : корені (shoot : root) у взаємозв'язку з доступністю вуглецю (C) і азоту (N). В цьому

підході джерело субстратів пов'язано з опором транспорту стоку субстратів, де існують хімічні і біохімічні перетворення.

Блок-схема моделі наведена на рис. 18.8. Суха речовина рослин складається із структур і субструктур (вуглецю і азоту).

Для TR-моделі структура рослин розподіляється на надземну частину (shoot – sh) і корені (root – rt).

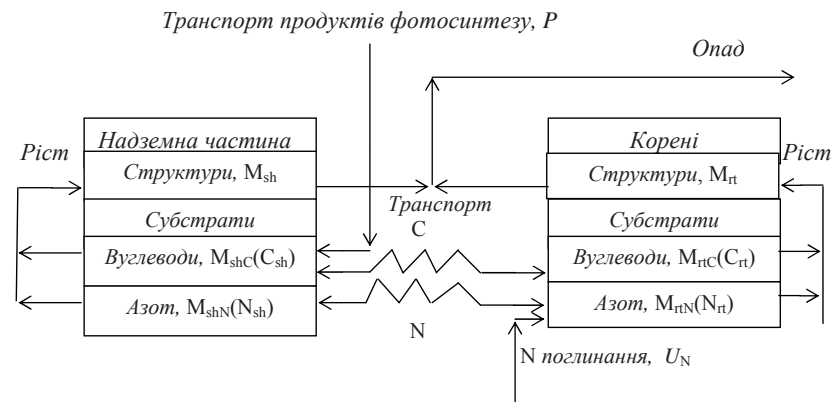


Рис. 18.8. Блок-схема моделі «транспорт – опір» (Thornly, 1970).

Окремі пули субстратів вуглецю і азоту входять в надземну частину і в корені. Розглядається шість змінних стану маси.

В надземній частині:

- структурна маса  $M_{sh}$ ;
- субстрат вуглецю  $M_{shC}$ ,  $C_{sh}$ ;
- субстрат азоту  $M_{shN}$ ,  $N_{sh}$

У коренів:

- структурна маса  $M_{rt}$ ;
- субстрат вуглецю  $M_{rtC}$ ,  $C_{rt}$ ;
- субстрат азоту  $M_{rtN}$ ,  $N_{rt}$ .

TR-модель описує балансовий експоненціальний ріст. Це означає ріст, де екстенсивні змінні зростають експоненціально при сталій специфічній швидкості росту й інтенсивні змінні (концентрація субстратів, відношення shoot : root) постійні.

Балансовим експоненціальним ростом часто апроксимують молоді рослини та культури і це забезпечує ідеалізоване моделювання змінної для дослідження властивостей евристичної моделі.



### 18.2.2. Структура надземної частини рослини і коріння

Диференціальні рівняння для опису стану двох змінних  $M_{sh}$  і  $M_{rt}$  мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{sh}}{dt} &= G_{sh} - L_{sh}; \\ \frac{dM_{rt}}{dt} &= G_{rt} - L_{rt}, \end{aligned} \quad (18.40)$$

де  $t$  – змінна часу, д;

$G_{sh}$  і  $G_{rt}$  – вхідні функції росту;

$L_{sh}$  і  $L_{rt}$  – вихідні функції росту.

Ріст приймається пропорційним концентрації продукту субстрату:

$$\begin{aligned} G_{sh} &= k_G M_{sh} C_{sh} N_{sh}; \\ G_{rt} &= k_G M_{rt} C_{rt} N_{rt}, \end{aligned} \quad (18.41)$$

де  $k_G$  – параметр росту, який приймається однаковим для надземної частини і коренів;

$C_{sh}$  і  $C_{rt}$  – концентрація вуглецю у надземній частині і в коренях;

$N_{sh}$  і  $N_{rt}$  – концентрація азоту в надземній частині і в коренях.

Вихідні функції опадів розраховуються так:

$$\begin{aligned} L_{sh} &= \frac{\sigma_{SS} k_{litt} M_{sh}}{1 + K_{M,litt} / M_{sh}}; \\ L_{rt} &= \frac{\sigma_{SS} k_{litt} M_{rt}}{1 + K_{M,litt} / M_{rt}}, \end{aligned} \quad (18.42)$$

де  $\sigma_{SS}$  – параметр «включення» опадів: на стадії експоненціального росту він дорівнює 0, а при старінні рослини – дорівнює 1;

$k_{litt}$  – стала швидкості опадів.

Знаменник функції опадів показує, якщо опад зменшується квадратично при низьких величинах структурних мас надземної частини і коріння, то завжди досягається стійкий стан. Без наведеного знаменника (тобто  $K_{M,litt} = 0$ ) рослина може «загинути» з наближенням всіх змінних до нуля, залежних від активності надземної частини і коріння. Це твердження біохімічно реальне, тому що призводить до зменшення швидкості опадів для малих рослин.

### 18.2.3. Субстрати вуглецю і азоту

Диференціальні рівняння для опису динаміки маси субстратів С і N у надземній частині та коренях записуються так

$$\begin{cases} \frac{dM_{shC}}{dt} = I_{P,shC} - O_{G,shC} - O_{T,shC} \\ \frac{dM_{rtC}}{dt} = I_{T,rtC} - O_{G,rtC} \\ \frac{dM_{shN}}{dt} = I_{shN} - O_{G,shN} \\ \frac{dM_{rtN}}{dt} = I_{U,rtN} - O_{G,rtN} - O_{T,rtN} \end{cases}, \quad (18.43)$$

де  $I_{P,shC}$  – фотосинтез;

$O_{G,shC}$  і  $O_{G,rtC}$  – використання вуглецю для росту відповідно надземної частини і коренів;

$O_{T,shC} = I_{T,rtC}$  – транспорт вуглецю із надземної у підземну частину рослин;

$I_{U,rtN}$  – поглинання азоту кореневою системою;

$O_{G,shN}$  і  $O_{G,rtN}$  – використання азоту для росту відповідно надземної частини і коренів;

$O_{T,rtN} = I_{T,shN}$  – транспорт азоту із коренів у надземну частину рослин.

*Фотосинтез*

Процес фотосинтезу описується таким рівнянням

$$I_{P,shC} = \frac{k_C M_{sh}}{(1 + \sigma_{SS} M_{sh} / K_M)(1 + \sigma_{Pl} C_{sh} / J_C)}, \quad (18.44)$$

де  $k_C$  – фотосинтетичний параметр;

$J_C$  – параметр інгібування, який може забезпечити інгібування продуктами фотосинтезу.

Якщо в знаменнику  $\sigma_{SS} = 1$ , то відбувається лімітування фотосинтезу зі збільшенням надземної маси  $M_{sh}$  до максимуму, так що стійкий стан  $SS$  може бути досягнутий. Це явище може представляти ефект самозатінення. Для малих величин  $M_{sh}$  величина  $\sigma_{SS}$  в знаменнику незначна, фотосинтез пропорційний надземній масі, що дає експоненціальний ріст. Коли  $\sigma_{SS} = 1$

система стартує в балансовий експоненціальний ріст BEG, якщо початкова величина мала, і закінчується у стійкому стані  $SS$ , в той час як при  $\sigma_{SS} = 0$  система залишається в BEG завжди.

Хоча докази інгібування для інгібування продуктами фотосинтезу досить суперечливі, ефект інгібування продуктами фотосинтезу на динамічну реакцію буде більшим, ніж це включати як необґрунтований вибір у моделі. Продукти інгібування можуть впливати посередньо скоріше ніж прямо, тобто через інші процеси, такі як підвищення дихання і виділення (окислення). Якщо  $\sigma_{Pl}$  буде дорівнювати нулю то інгібування не відбувається. З величиною  $J_C$ , продукти інгібування стають значними, коли концентрація субстрату вуглецю в надземній масі стає 0,1 або більше.

*Поглинання азоту*

Поглинання азоту кореневою системою описується рівнянням

$$I_{U,rtN} = \frac{k_N M_{rt}}{(1 + \sigma_{SS} M_{rt} / K_M)(1 + \sigma_{Pl} N_{rt} / J_N)}, \quad (18.45)$$

де  $k_N$  – параметр швидкості поглинання N,  $k_N = 0,02$  кг N (кг структур) $^{-1}$  d $^{-1}$ ;

$K_M = 1$  кг структур;

$J_N = 0,01$  кг субстрату N (кг структур) $^{-1}$ .

Максимальна швидкість поглинання азоту буде  $k_N K_M$  для стійкого стану ( $\sigma_{SS} = 1$ ), якщо  $M_{rt}$  велике. Для малих величин маси коренів  $M_{rt}$   $\sigma_{SS}$  в знаменнику незначне і швидкість поглинання азоту пропорційна масі коренів дає експоненціальний ріст.

Величина  $J_N$  забезпечує інгібування поглинання азоту, яке залежить від внутрішньої концентрації азоту в коренях; включення цього механізму редує ефект коливання надлишку надземної частини в моделі. Невиконання умови включення  $\sigma_{Pl} = 1$ ; установлення  $\sigma_{Pl} = 0$  знімає інгібування продуктом у моделі.

*Ріст*

Залучення субстратів C і N для використання в процесах росту надземної частини і коренів визначається таким рівнянням

$$\begin{cases} O_{G,shC} = f_C G_{sh}, & O_{G,rtC} = f_C G_{rt}; \\ O_{G,shN} = f_N G_{sh}, & O_{G,rtN} = f_N G_{rt}; \end{cases}, \quad (18.46)$$

де  $f_C = 0,5$ ;  $f_N = 0,025$ , кг C, N (кг структур) $^{-1}$ .

Вміст фракції C і N в структурах показують коефіцієнти  $f_C$  і  $f_N$ .

*Транспорт*

Транспортний потік C і N описується таким рівнянням

$$\begin{cases} O_{T,shC} = I_{T,rtC} = \frac{C_{sh} - C_{rt}}{r_{C,shrt}} \\ I_{T,shN} = O_{T,rtN} = \frac{N_{rt} - N_{sh}}{r_{N,rtsh}} \end{cases}. \quad (18.47)$$

Транспорт субстратів C і N пропорційний різниці концентрацій поділений на опір. Опір між надземною частиною і коренями для транспорту субстратів C і N визначається підсумовуванням окремих компонентів надземної частини і коренями. Балансовий експоненціальний ріст може відбуватися тільки якщо опір пропорційний відповідній рослинній масі. Це тому, що рослина в двох розмірах, які ростуть з деякою специфічною швидкістю, потребують транспортний потік у надземну частину і в корені.

#### 18.2.4. Загальні означення

Концентрація субстратів C і N визначається як

$$\begin{cases} C_{sh} = \frac{M_{shC}}{M_{sh}}, & N_{sh} = \frac{M_{shN}}{M_{sh}}, \\ C_{rt} = \frac{M_{rtC}}{M_{rt}}, & N_{rt} = \frac{M_{rtN}}{M_{rt}}. \end{cases} \quad (18.48)$$

Опір транспорту з розмірністю (кг структурної маси) $^{-1}$ ·d, асоціюється з коренями, надземною масою і субстратами C і N:

$$\begin{cases} r_{C,rt} = \frac{\rho_C}{M_{rt}^q}, & r_{C,sh} = \frac{\rho_C}{M_{sh}^q}, \\ r_{N,rt} = \frac{\rho_N}{M_{rt}^q}, & r_{N,sh} = \frac{\rho_N}{M_{sh}^q}, \end{cases} \quad (18.49)$$

де  $\rho_C$  і  $\rho_N$  – константи опору транспорту для субстратів C і N;

$q$  – масштабний параметр, який залежить від будови рослини (архітектура).

Опір транспорту між надземною частиною і субстратами С і N :

$$\begin{aligned} r_{C,shrt} &= r_{C,sh} + r_{C,rt}; \\ r_{N,rtsh} &= r_{N,rt} + r_{N,sh}. \end{aligned} \quad (18.50)$$

Сумарна структурна маса  $M$  визначається так

$$M = M_{sh} + M_{rt}. \quad (18.51)$$

Фракція нового структурного росту, що розміщується в надземній частині і коренях:

$$\begin{aligned} f_{G,sh} &= \frac{G_{sh}}{G}, \\ f_{G,rt} &= \frac{G_{rt}}{G}, \end{aligned} \quad (18.52)$$

де  $G = C_{sh} + G_{rt}$

Поточні структурні фракції надземної частини і коренів визначаються як:

$$\begin{aligned} f_{sh} &= \frac{M_{sh}}{M}, \\ f_{rt} &= \frac{M_{rt}}{M}. \end{aligned} \quad (18.53)$$

Питома швидкість росту рослин  $\mu$  визначається так

$$\mu = \frac{dM / dt}{M}, \quad (18.54)$$

де  $\frac{dM}{dt} = \frac{dM_{sh}}{dt} + \frac{dM_{rt}}{dt}$ .

Для балансового експоненціального росту з  $\sigma_{SS} = 0$  і відсутністю інгібування С і N, може бути показано, що фракція надземної частини і коренів  $f_{sh}$  і  $f_{rt}$ , питома швидкість росту  $\mu$ , вміст С і N у структурах  $f_C$  і  $f_N$  і середня концентрація субстратів С і N у рослині пов'язані відношеннями:

$$\begin{aligned} f_{sh}k_C &= \mu(f_C + \bar{C}); \\ f_{rt}k_N &= \mu(f_N + \bar{N}). \end{aligned} \quad (18.55)$$

Середня концентрація субстрату в рослині

$$\begin{aligned} \bar{C} &= f_{sh}C_{sh} + f_{rt}C_{rt}; \\ \bar{N} &= f_{sh}N_{sh} + f_{rt}N_{rt}. \end{aligned} \quad (18.56)$$

Виключення із рівняння (18.55) величини  $\mu$  дає

$$\frac{f_{sh}k_C}{f_C + C} = \frac{f_{rt}k_N}{f_N + N}. \quad (18.57)$$

Це рівняння представляє дискусійну гіпотезу «функціональної рівноваги» Davidson (1969), в якій активність надземної частини і коренів може бути пропорційне одне одному.

Вище було розглянуто підходи до моделювання продукційного процесу рослин, які притаманні англійській школі моделювання. Вони в більшій своїй частині були сформульовані в роботах J.H.M. Thornley та його послідовників.

В розділі 18.1 наведено сформульовані в роботах Thornley основні підходи до моделювання продукційного процесу рослин: розподіл рослинного матеріалу на два компоненти – структуру і запас; поняття «джерело» і «стік», що досить часто використовуються фізіологами рослин в зв'язку з проблемами росту рослин; феноменологічні рівняння використання субстратів, які часто є важливими компонентами моделей рослин.

Також отримані на підставі молекулярних моделей два типи кривих сигмоїдальної реакції порогового типу для кількісного опису таких процесів як використання субстрату, активація або інгібування процесів, індукція або репресія синтетичних систем, токсичні ефекти в живленні рослин і перемикання альтернативних шляхів розвитку; підходи до опису транспортних процесів.

В розділі 18.2 наводиться побудована на сформульованих вище принципах оригінальна двокомпонентна двосубстратна модель росту рослини. Використання положень цієї моделі, особливо в частині розподілу вуглеводів та азоту між надземною і кореневою системами, буде вельми перспективним при розробці моделей формування урожайності сільськогосподарських культур.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Абашина Е.В., Сиротенко О.Д. Прикладная динамическая модель формирования урожая для имитационных систем агрометеорологического обеспечения сельского хозяйства //Труды ВНИИСХМ. – 1986. – Вып. 21. – С. 13-33.
2. Антоненко В.С. Динамическое моделирование роста, развития и формирования продуктивности озимой пшеницы. – К.: АртЭк, 2002. – 64с.
3. Бихеле З.Н., Молдау Х.А., Росс Ю.К. Математическое моделирование транспирации и фотосинтеза растений при недостатке почвенной влаги. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 223 с.
4. Бихеле З., Молдау Х., Росс Ю. Субмодель распределения ассимилятов и роста растения при водном дефиците.–Тарту: АН ЭССР, 1980.– 22 с.
5. Бойко А.П. Исследование гидрометеорологического режима среды обитания растений численными методами. – С.-Пб.: Гидрометеиздат: 1993. – 215 с.
6. Будаговский А.И., Росс Ю.К. Основы количественной теории фотосинтетической деятельности посевов // Фотосинтезирующие системы высокой продуктивности. – М.: Наука, 1966. – С. 51-58.
7. Галямин Е.П. Оптимизация оперативного распределения водных ресурсов в орошении. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 272 с.
8. Динамическое моделирование в агрометеорологии / под ред. Ю.А. Хваленского, О.Д. Сиротенко, А.Н. Полевого – Л.: Гидрометеиздат, 1982. – 145 с.
9. Дмитренко В.П. О методике оценки гидрометеорологических условий формирования урожая сельскохозяйственных культур //Тр. УкрНИГМИ. – 1973. – Вып. 128. – С. 3–23.
10. Дмитренко В.П. Об учете неблагоприятных явлений в модели урожайности //Тр. УкрНИГМИ, 1979. – Вып. 173. – С. 3–10.
11. Ковтун И.И., Гойса Н.И., Митрофанов Б.А. Оптимизация условий возделывания озимой пшеницы по интенсивной технологии. – Л.: Гидрометеиздат, 1990. – 288 с.
12. Константинов А.Р. Погода, почва и урожай озимой пшеницы. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 248 с.
13. Моделирование продуктивности агроэкосистем / Н.Ф. Бондаренко, Е.Е. Жуковский, И.Г. Мушкин и др. – Л. : Гидрометеиздат, 1982. – 264с.
14. Моделирование роста и продуктивности сельскохозяйственных культур /под ред. Ф.В.Т. Пеннинга де Фриза и Х.Х. ван Лаара – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 320 с.
15. Нерпин С.В., Чудновский А.Ф. Энерго- и массообмен в системе «растение – почва – воздух». – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 358 с.
16. Ничипорович А.А., Строганова Л.Е., Чмора С.Н.. Фотосинтетическая деятельность растений в посевах. – М.: Изд-во АН СССР, 1961.– 136 с.
17. Образцов А.С. Системный метод: применение в земледелии. – М.: Агропромиздат, 1990. – 303 с.
18. Палагин Э.Г. Математическое моделирование агрометеорологических условий перезимовки озимых культур. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 191 с.
19. Полевой А.Н. Теория и расчет продуктивности сельскохозяйственных культур. – Л.: Гидрометеиздат, 1983. – 175 с.
20. Полевой А.Н. Прикладное моделирование и прогнозирование продуктивности посевов. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 319 с.
21. Полевой А.Н. Сельскохозяйственная метеорология. – С.-Пб.: Гидрометеиздат, 1992. – 424 с.
22. Польовий А.М. Моделювання гідрометеорологічного режиму та продуктивності агроекосистем. – К.: КНТ, 2007. – 344 с.
23. Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. Динамические модели экологических систем. –Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 288 с.
24. Полуэктов Р.А. Динамические модели агроэкосистемы. –Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 312 с.
25. Практикум з сільськогосподарської метеорології / А.М. Польовий, Л.Ю. Божко, В.М. Ситов, О.Є. Ярмольська – Одеса: Вид-во "ТЕС", 2002. – 400 с.
26. Росс Ю.К. Система уравнений для количественного роста растений // Фитоактинометрические исследования растительного покрова. – Таллин: Валгус, 1967. – С. 64–88.
27. Росс Ю.К. Радиационный режим и архитектура растительного покрова. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. – 342 с.
28. Сиротенко О.Д. Математическое моделирование водно-теплового режима и продуктивности агроэкосистем. – Л.: Гидрометеиздат, 1981. – 167 с.
29. Строганова М.А. Математическое моделирование формирования качества урожая. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 151 с.
30. Тооминг Х.Г. Солнечная радиация и формирование урожая. – Л.: Гидрометеиздат, 1977. – 200 с.
31. Тооминг Х.Г. Экологические принципы максимальной продуктивности посевов. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 264с.
32. Франс Дж., Торнли Дж.Х.М. Математические модели в сельском хозяйстве. – М.: Агропромиздат, 1990. – 303 с.

- 33.Харченко С.И. Гидрология орошаемых земель.— Л.: Гидрометеиздат, 1975. — 373 с.
- 34.Boogaard H.L. WOFOST 7.1.: user's guide for the WOFOST 7.1. crop growth simulation model and WOFOST Control Center 1.5. Technical document / H.L.Boogaard, C.A. van Diepen, R.P.Roetter, J.M.C.A.Cabrera, H.H. van Laar; DLO Winand Staring Centre; 52. DLO Winand Staring Centre. —Wageningen, 1998.
- 35.Diepen C.A., van, Wolf J., Keulen H., van. WOFOST: a simulation model of crop production // Soil Use and Management. — 1989. — №5. — P. 16-24.
- 36.Handbook of agricultural meteorology / Ed. J.F. Griffiths. — Oxford University Press, United Kingdom, 1994. — 320 p.
- 37.Ritchie J.T., Godwin D.C., Otter-Nacke S. CERES Wheat. A Simulation Model of Wheat Growth and Development College Station. — Texas: Texas. AM University Press, 1985.
- 38.Thornly J.H.M. Mathematical models in plant physiology. Academic Press. London. New York. San Francisco, 1976. — 310 p..
- 39.Thornly J.H.M. Modeling Allocation with Transport // Conversion Processes. Silva Fennica. — 1997. — №31(3). — P. 341–355.
- 40.Weisberg P.J., Bonavia F., Bugman H. Modeling the interacting effects of browsing and shading on mountain forest tree regeneration (*Picea abies*). //Ecological Modeling. — 2005. — 185. — P. 213–230.
- 41.Wieringa J., Lomas J. Lecture notes for training agricultural meteorological personnel. Secretariat of the World Meteorological Organization, Geneva-Switzerland, 2001. — 196 p.
- 42.Wit C.T., de, Goudriaan J. Simulation of ecological processes. — Wageningen: Pudoc, 1974. — 167 p.
- 43.Wit C.T., de et al. Simulation of assimilation, respiration and transpiration of crops. — Wageningen: Pudoc, 1978. — 141 p.

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

### А

агроекологічні категорії 329, 331  
агроecosистема 25  
аерація ґрунту 26  
аеродинамічний режим посіву 108  
азот 418  
альbedo 133, 141, 301  
алометрія 373  
амоніфікація 309  
архітектоніка 129  
асиміляти 204, 228, 234, 237, 353  
асиміляція 352  
атмосфера 33, 99, 125, 339

### Б

баланс CO<sub>2</sub> 119, 140, 144, 291  
біомаса 119, 216, 230, 246, 355

### В

випаровуваність 305, 322  
випаровування 104, 117, 273, 343  
вільні вуглеводи 299  
водний режим ґрунту 14, 303  
вологість ґрунту 100, 245, 267, 337  
вологозабезпеченість 325  
вологоперенесення 303  
вологопровідність 94, 97  
вуглеводи 308  
вуглець 367, 418

### Г

генеративні органи 27, 204  
грос-асиміляція 352  
грос-ріст 356  
густина речовини 412

### Ґ

ґрунт 27, 61, 79, 80, 84  
ґрунтові води 14, 306, 337

### Д

денітрифікація 274, 309  
джерела 378, 400  
дифузія нітратів 310  
дихання 369  
дихання підтримки 212, 239, 307, 354  
дихання росту 211, 239, 308, 355  
добовий хід 83, 133, 250  
добрива мінеральні 273  
добрива органічні 203, 311

### Е

екологічна система 26  
енерго-масообмін 204

### З

заболонь 370  
запаси продуктивної вологи у ґрунті 196, 251, 317  
зимостійкість рослин 282  
змінні 36, 58, 64, 69, 75

### І

інгібування 418  
індекс урожайності 378  
інфільтрація 306, 310, 322, 361

### К

компартмент 61, 64, 86, 99, 375  
константи 36, 37, 38, 157, 181, 245  
корінь 102, 113, 224, 332, 370

### Л

листок 70, 109, 117, 135, , 332, 378  
листяний індекс 64, 119, 336, 375

### М

максимальна гігроскопічність 98  
маса сухої речовини 332, 383, 398

масообмін 34, 145  
 мінеральне живлення 198  
 модель 11, 151, 229, 315, 332, 347

**Н**  
 навколишнє середовище 38, 40, 123  
 насіння 226, 276, 279, 280  
 нітрати 310  
 нітрифікація 309

**О**  
 опади 5, 196, 201, 252, 273  
 орган запасуючий 347, 356

**П**  
 параметри 36, 52, 111, 150, 161, 191  
 перезимівля 282, 290  
 підстильна поверхня 144  
 повітряний режим ґрунту 284  
 порогова реакція 409  
 посів 118, 131, 174, 197, 250  
 посуха 13, 253  
 потенційна транспірація  
 продуктивність 187, 207, 251, 325  
 продуційний процес 252, 315, 324

**Р**  
 радіація прихідна 348  
 радіаційний баланс 122, 146, 301  
 рівняння росту 153, 161, 229, 254  
 ріст рослин 150, 207, 253, 332, 399  
 родючість ґрунту 171  
 рослина 27, 58, 99, 125, 145, 225  
 ростові функції 216, 233, 271, 294

**С**  
 сонячна радіація 283, 317, 318  
 старіння рослин 286, 299, 306  
 стік 378, 400  
 структура 398  
 субстрат 375, 405, 419  
 сумарне випаровування 306, 322, 343  
 сходи 197, 221, 283, 284

**Т**  
 температура повітря 114, 124, 144  
 теплоємність ґрунту 84  
 теплоємність повітря 305  
 теплообмін 87, 88, 120  
 теплоперенесення 88, 99, 100, 121  
 теплопровідність ґрунту 86, 89  
 транспірація 105, 117, 204, 304, 363  
 транслокація 411

**У**  
 урожай 170, 185, 197, 229, 261, 276  
 урожай дійсно можливий (ДВУ) 328  
 урожай метеорологічно-можливий (ММУ) 251, 328  
 урожай потенційний (ПУ) 253, 328  
 урожай у виробництві (УВ) 328  
 устячковий опір 256, 366  
 устячкова провідність 363

**Ф**  
 фази розвитку 71, 185, 200, 323  
 філохрон 382  
 фітомаса 212, 270  
 фонд вільних вуглеводів 306  
 фотосинтез 210, 246, 264, 307, 323  
 функція розподілу 304  
 функція впливу 326, 328

**Ц**  
 цвітіння 32, 197, 199, 221, 294

**Ч**  
 чисельне інтегрування 39

**Щ**  
 щільність ґрунту 84  
 щільність посіву 243

**Я**  
 яровизація 380  
 яровизаційні дні 381

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
Передмова.....	5
<b>Частина I. Теорія моделювання динамічних процесів, які відбуваються в агроєкосистемі.....</b>	<b>11</b>
1. Основні положення моделювання.....	11
1.1. Основні принципи моделювання.....	11
1.2. Міждисциплінарність опису процесів, які відбуваються в агроєкосистемі, ієрархічність.....	15
1.3. Типи моделей.....	19
1.4. Агроєкосистема як об'єкт моделювання.....	25
1.4.1. Ґрунт.....	25
1.4.2. Рослина.....	27
1.4.3. Атмосфера.....	33
2. Основні методи динамічного моделювання.....	36
2.1. Змінні, параметри і константи моделі.....	36
2.2. Диференціальні рівняння.....	39
2.3. Чисельне інтегрування.....	42
2.4. «Жорсткі» рівняння, вибір методу чисельного інтегрування.....	47
2.5. Підгонка моделі.....	52
3. Технологія конструювання моделей.....	58
3.1. Поняття про коопартментний підхід до моделювання.....	58
3.2. Техніка моделювання.....	64
3.3. Перевірка й оцінювання моделей.....	72
<b>Частина II. Моделювання гідрометеорологічного режиму агроєкосистем.....</b>	<b>79</b>
4. Моделювання тепло- та вологоперенесення у ґрунті.....	79
4.1. Загальні принципи моделювання.....	79
4.2. Теплоперенесення у ґрунті.....	83
4.2.1. Теплофізичні характеристики ґрунтів.....	83
4.2.2. Теплообмін ґрунтових компартментів.....	86
4.2.3. Добовий і сезонний хід температури.....	90
4.3. Вологоперенесення у ґрунті.....	93
4.3.1. Гідрофізичні характеристики ґрунту.....	94
4.3.2. Компартментна модель вологопровідності.....	99
4.3.3. Зміна вологості ґрунту за сезон вегетації.....	105
5. Моделювання тепло- і вологоперенесення у посіві.....	108
5.1. Загальні принципи моделювання.....	108
5.2. Модель аеродинамічного режиму посіву.....	109
5.3. Компартментна модель тепло- і вологоперенесення у посіві.....	115
6. Моделювання радіаційного і теплового режимів посіву.....	125

6.1.	Характеристики архітекτονіки рослинного покриву.....	125
6.2.	Режим короткохвильової радіації і ФАР.....	131
6.3.	Режим довгохвильової радіації.....	141
6.4.	Моделювання виникнення радіаційного заморозку.....	144
<b>Частина III. Моделювання росту рослин і процесу формування урожаю посівів сільськогосподарських культур.....</b>		
7.	Рівняння росту.....	150
7.1.	Підходи до емпіричного опису процесів росту.....	150
7.2.	Простий експоненціальний ріст з різкою відсічкою, мономолекулярне рівняння.....	153
7.3.	Рівняння логістичного росту і крива росту Гомпертца.....	156
7.4.	Рівняння росту Річардса і Чантера.....	161
7.5.	Експоненціальні поліноми.....	167
8.	Фізико-статистичні моделі формування урожайності сільськогосподарських культур.....	170
8.1.	Комплексна біофізична модель погода – ґрунт – урожай О.Р. Константинова.....	170
8.1.1.	Передумови побудови моделі.....	170
8.1.2.	Погода теплого періоду і урожайність.....	173
8.1.3.	Родючість ґрунту і урожайність.....	177
8.1.4.	Умови перезимівлі та урожайність.....	181
8.2.	Модель урожайності сільськогосподарських культур В.П. Дмитренко.....	185
8.2.1.	Визначення оптимальних значень сум опадів і температури повітря для формування урожаю.....	185
8.2.2.	Опис структури моделі формування урожаю сільськогосподарських культур.....	195
8.3.	Комплексна модель для статистичної імітації урожайності зернових і кормових культур О.С. Образцова.....	197
8.3.1.	Визначення потенційної урожайності.....	197
8.3.2.	Опис структури комплексної моделі формування урожайності зернових і кормових культур.....	198
9.	Моделювання продукційного процесу рослин.....	204
9.1.	Загальна характеристика продукційного процесу рослин.....	204
9.2.	Моделювання фотосинтезу, дихання і газообміну CO <sub>2</sub> листка.....	207
9.3.	Моделювання розподілу асимілятів і елементів мінерального живлення.....	212
9.3.1.	Емпіричний підхід.....	213
9.3.2.	Напівемпіричний підхід до визначення ростових функцій.....	218
9.3.3.	Функціональний підхід до розподілу.....	222

10.	Математична модель формування урожаю агробіоценозу Е.П. Галяміна.....	229
10.1.	Підходи до моделювання.....	229
10.2.	Динамічні рівняння росту.....	229
10.3.	Модель приросту біомаси.....	237
11.	Модель продукційного процесу рослин Сеппа – Тоомінга.....	246
11.1.	Визначення потенційної урожайності.....	246
11.2.	Визначення метеорологічно-можливої урожайності.....	251
11.3.	Ідентифікація зв'язків і параметрів моделі.....	254
12.	Прикладна динамічна модель формування урожаю сільськогосподарських культур О.Д. Сиротенка.....	261
12.1.	Концепція моделювання.....	261
12.2.	Моделювання фотосинтезу, дихання і приросту маси рослин.....	262
12.3.	Моделювання динаміки площі листя.....	269
12.4.	Моделювання водного режиму.....	272
12.5.	Моделювання азотного живлення рослин.....	273
13.	Модель впливу агрометеорологічних умов на ріст, розвиток та формування урожаю озимої пшениці В.С. Антоненка.....	276
13.1.	Теоретичне обґрунтування моделі.....	276
13.2.	Проростання насіння і формування сходів.....	277
13.3.	Період осінньої вегетації і формування зимостійкості.....	282
13.4.	Перезимівля рослин.....	290
13.5.	Період весняно-літньої вегетації озимої пшениці.....	293
14.	Базова динамічна модель формування урожаю сільськогосподарських культур А.М. Польового.....	298
14.1.	Концепція моделювання.....	298
14.2.	Моделювання радіаційного та теплового режимів рослинного покриву.....	301
14.3.	Моделювання водного режиму рослинного покриву.....	303
14.4.	Моделювання процесів фотосинтезу, дихання та старіння рослин.....	306
14.5.	Моделювання мінерального живлення рослин.....	308
14.6.	Моделювання росту рослин.....	311
15.	Базова модель оцінки агрокліматичних ресурсів формування продуктивності сільськогосподарських культур А.М. Польового.....	315
15.1.	Концепція моделювання.....	315
15.2.	Блок вхідної інформації.....	317
15.3.	Блок показників сонячної радіації і волого-температурного режиму з врахуванням експозиції поля.....	317
15.4.	Блок функцій впливу фази розвитку і метеорологічних факторів на продукційний процес рослин.....	323

15.5.	Блок родючості ґрунту і забезпеченості рослин мінеральним живленням.....	326
15.6.	Блок агроекологічних категорій урожайності.....	328
15.7.	Блок узагальнених оціночних характеристик.....	330
16.	Голландська школа моделювання продукційного процесу сільськогосподарських культур.....	332
16.1.	Моделі системи ґрунт – атмосфера – рослина (SWAP – WOFOST моделі).....	334
16.1.1.	Опис системи.....	334
16.1.2.	Потік вологи у ґрунті.....	337
16.1.3.	Взаємодія системи атмосфера – ґрунт – рослина.....	339
16.1.4.	Модель росту WOFOST у моделі SWAP.....	347
16.2.	Модель конкуренції рослинності при світловому і водному лімітуванні: одновимірна конкуренція і вплив ґрунтових вод.....	360
16.2.1.	Водний баланс ґрунту.....	360
16.2.2.	Вплив атмосфери.....	361
16.2.3.	Вегетативний ріст.....	363
16.2.4.	Ріст, розподіл асимілятів, алометрія.....	373
17.	Американська школа моделювання продукційного процесу сільськогосподарських культур (модель CERES-Wheat).....	377
17.1.	Принципи побудови моделі.....	377
17.2.	Контроль фаз розвитку.....	379
17.3.	Формування сухої речовини.....	383
17.4.	Утворення пагонів (кущіння).....	386
17.5.	Ріст колоса.....	390
17.6.	Розвиток кореневої системи.....	395
18.	Англійська школа моделювання продукційного процесу рослин.....	398
18.1.	Підходи до моделювання продукційного процесу.....	398
18.1.1.	Структура і запас.....	398
18.1.2.	Джерела і стоки.....	400
18.1.3.	Використання субстратів.....	404
18.1.4.	Криві порогової реакції.....	409
18.1.5.	Транслокація.....	411
18.2.	Моделювання розподілу з транспортно-конверсійними процесами.....	414
18.2.1.	Структура моделі.....	414
18.2.2.	Структура надземної частини рослини і коріння.....	416
18.2.3.	Субстрати вуглецю і азоту.....	417
18.2.4.	Загальні означення.....	419
	Список використаної літератури.....	422
	Предметний покажчик.....	425

**Польовий, А. М.**  
 П49 Моделювання гідрометеорологічного режиму та продуктивності агроecosystem : [підручник] / А. М. Польовий ; МОН України ; Одес. держ. еколог. ун-т. — Одеса : Екологія, 2013. — 432 с.

ISBN 978–966–8740–95–4

У підручнику викладені теоретичні й практичні питання побудови моделей динамічних процесів, які відбуваються в агроecosystemах, моделювання радіаційного, водно-теплого і турбулентного режиму агроecosystem. Розглядається моделювання росту та впливу гідрометеорологічного режиму на формування фотосинтетичної продуктивності сільськогосподарських культур. Особлива увага приділяється сучасним комплексним моделям формування урожайності.

Підручник призначено для студентів вузів, які навчаються за напрямом «Гідрометеорологія», студентів сільськогосподарських вузів та технікумів, він може бути також корисним для студентів і аспірантів географічних і біологічних факультетів університетів. Підручник може використовуватись як посібник для фахівців, які працюють в галузі сільськогосподарської метеорології, екології, біології, географії і сільського господарства для ознайомлення з методами моделювання динамічних процесів та вирішення конкретних задач.

УДК 63:551.509  
 ББК 40.2



Theoretical and practical aspects of developing models for dynamic processes which take place in agroecosystems, modelling of radiation, aquathermal and turbulent regimes of agroecosystems are expounded in the textbook. Modelling of development and influence of hydrometeorological regime on generation of photosynthetic productivity in agricultural crops is under consideration. Special attention is given to the modern complex models of productivity development.

The textbook is intended for the use of the students of higher education institutions, who study under the direction of 'Hydrometeorology', as well as the students of agricultural institutions of higher learning and colleges and can turn beneficial to the students and post-graduate students of the faculties of geography and biology of universities. The textbook can be used as a handbook for the specialists involved in agricultural meteorology, environmental science, biology, geography and agriculture to provide familiarization with the methods of modelling dynamic processes and solving particular tasks.

The publication is prepared within the framework of 511390-TEMPUS-1-2010-1-SK-TEMPUS-JPCR 'Environmental Governance for Environmental Curricula' EC TEMPUS IV project and is intended for the use of students and post-graduate students of hydrometeorological and environmental directions of studies, researchers and specialists working in the field of Agricultural Meteorology, Environmental Science and Agriculture.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

---

*Навчальне видання*

**ПОЛЬОВИЙ Анатолій Миколайович**

**МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОМЕТЕОРОЛОГІЧНОГО РЕЖИМУ  
ТА ПРОДУКТИВНОСТІ АГРОЕКОСИСТЕМ**

Підручник

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макета

Підписано до друку 30.05.2013. Формат 60x84/16. Папір офсетний.

Гарнітура «Таймс». Друк офсетний. Ум. друк. арк. 25,11.

Тираж 50 прим. Вид. № 10. Зам. № 96.

Одеський державний екологічний університет  
65016, Одеса, вул. Львівська, 15

Друкарня видавництва «Екологія»  
65045, м. Одеса, вул. Базарна, 106, к. 313  
Тел.: (0482) 33-07-18, 37-07-95, 37-15-27

[www.fotoalbom-odessa.com](http://www.fotoalbom-odessa.com)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1873 від 20.07.2004 р.