

ПЕРЕНЕСЕННЯ ЗБУДЖЕННЯ У 1D ГРАНУЛЬОВАНИХ ЛАНЦЮЖКАХ В УМОВАХ КОНФАЙНМЕНТУ

За допомогою підходу Бейтмена [1], визначені аналітичні розв'язки лінеаризованого рівняння руху імпульсу збудження у вертикальних гранульованих ланцюжках обмеженої довжини. Проаналізовано вплив довжини ланцюжків, граничних умов та матеріальних співвідношень на хвильову динаміку збуджень у досліджених системах.

Ключові слова: динамічні системи, гранульовані матеріали, хвильова динаміка.

Вступ

Задача про перенесення імпульсу у гранульованих одновимірних ланцюжках нескінченної довжини детально вивчалася в роботах [1-11]. Визначення точних розв'язків цієї задачі становить важливий елемент вивчення розподілу енергії по внутрішніх ступенях свободи у дискретних системах із силовими контактами [2-4]. До того ж, вивчення транспортних властивостей хвиль, які збуджуються у таких системах, та розбудова засобів використання відповідної схемотехніки потребує знань про вплив граничних умов, розмірів системи та матеріальних співвідношень.

На цьому шляху в запропонованій роботі розглянуті обмежені ланцюжки, які складаються із декількох елементів. Показано, що передача імпульсу збудження в таких системах описується за допомогою так званих вибираючих функцій, які у свою чергу визначаються за допомогою лінійних комбінацій дисперсійних хвиль. Отримані аналітичні розв'язки можна записати у формі, яка задовольняє довільні граничні умови. Вони також добре узгоджуються із результатами чисельних розрахунків моделі. Досліджено вплив граничних умов та матеріальних співвідношень на динаміку імпульсу. Проаналізовано роль, яку відіграє неоднорідність у переносі збурення крізь обмежену систему.

1 Керуюче рівняння та його розв'язки

Розглянемо керуюче рівняння, яке описує рух імпульсу енергії у неоднорідному гранульованому ланцюжку у такому (лінеаризованому) вигляді [9]

$$\frac{\partial^2 \varphi_n(\tau)}{\partial \tau^2} = \kappa_n \varphi_{n+1}(\tau) - [\kappa_n + \kappa_{n-1}] \varphi_n(\tau) + \kappa_{n-1} \varphi_{n-1}(\tau), \quad (1)$$

де $\varphi_n(\tau)$ - зміщення n -ої частинки (гранули) від положення її рівноваги; τ - час; n - номер частинки; κ_n - коефіцієнт, який залежить від степені нелінійності «початкової» системи i , фактично, відіграє роль позиційно залежної силової сталої (для випадку герцівських контактів $\kappa_n = n^{1/3}$).

Частинний розв'язок (1) будемо шукати у вигляді періодичної функції

$$\varphi_n(\tau) = X_n \cdot \cos \omega \tau, \quad (2)$$

де амплітуда X_n залежить від положення частинки n ; ω - частота.

Із урахуванням (2) із рівняння (1) отримуємо:

$$\frac{X_2}{X_1} = 1 + \lambda, \quad n = 1, \quad (3)$$

$$\frac{X_3}{X_1} = \frac{\kappa_2 + 1 + \lambda}{\kappa_2} \cdot (1 + \lambda) - \frac{1}{\kappa_2}, \quad n = 2, \quad (4)$$

Узагальнюючи, маємо що функції $\{X_n\}$ задовольняють рекурсивному співвідношенню

$$\frac{X_{n+1}}{X_1} = \frac{\kappa_n + \kappa_{n-1} + \lambda}{\kappa_n} \cdot \frac{X_n}{X_1} - \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} \cdot \frac{X_{n-1}}{X_1}, \quad n = 1..(N-1). \quad (5)$$

Тут X_1 - відповідає граничним умовам задачі ($X_1 \neq 0$). Зауважимо, що X_1 може бути вибраним у класі різних за аналітичної поведінкою функцій. Наприклад, у класі періодичних функцій, кусково-безперервних, або навіть узагальнених функцій.

Розглянемо для визначеності граничну умову $\varphi_N(\tau) = 0$ (яка відповідає $X_N = 0$).

Відповідно, поліном $P(\lambda) = \frac{X_N}{X_1} = 0$. Позначимо корені попереднього рівняння через:

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}$.

Користуючись вищевизначеним (див. також [1]), повний розв'язок рівняння (1) може бути записано у наступному вигляді

$$\varphi_n(\tau) = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{K_p} X_n(\lambda_p) X_k(\lambda_p) \cos[\omega(\lambda_p)\tau], \quad (10)$$

де k - номер частинки яка локально збуджується у початковий момент часу $\tau = 0$ (тобто $\varphi_k(0) = 1$). Величина K_p - визначається із умов ортогональності за допомогою співвідношення

$$\sum_{n=1}^{N-1} X_n(\lambda_p) X_n(\lambda_q) = K_p \delta_{pq}, \quad (11)$$

де δ_{pq} - дельта символ Кронекера.

2 Ланцюжок, що складається з двох частинок ($N = 2$)

Розглянемо тепер детальніше ланцюжки, які вміщують лише декілька центрів. Почнемо з ланцюжка, який вміщує дві частинки $N = 2$. Одна із частинок ланцюжка нехай буде зафіксована, наприклад $\varphi_2(\tau) = 0$ (відповідно $X_2 = 0$). Користуючись (3), знаходимо

$$\lambda = -1,$$

відповідно

$$\omega = \sqrt{-\lambda} = 1.$$

Функцію зміщення першої частинки в цьому разі отримуємо у вигляді

$$\varphi_1(\tau) = \frac{1}{K_1} X_1(\lambda) X_1(\lambda) \cos(\tau). \quad (12)$$

Фактор у (12) K_1 дорівнює

$$K_1 = [X_1(\lambda)]^2.$$

Таким чином, остаточний розв'язок для $N = 2$ набуває такого вигляду

$$\varphi_1(\tau) = \cos(\tau). \quad (13)$$

Зауважимо, що роль другої частинки може відігравати відбиваюча стінка.

3 Ланцюжок, який вміщує три частинки ($N = 3$)

Повторюючи попередній розгляд у випадку, коли ланцюжок складається з трьох частинок $N = 3$, та користуючись аналогічною граничною умовою $\varphi_3(\tau) = 0$ ($X_3 = 0$), отримуємо, відповідно, два подальших розв'язки

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\kappa_2 + 2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa_2 + 2}{2}\right)^2 - \kappa_2}. \quad (14)$$

Зміщення першої та другої частинок, відповідно, задовольняє співвідношення:

$$\varphi_1(\tau) = \frac{1}{K_1} X_1(\lambda_1) X_1(\lambda_1) \cos(\omega_1 \tau) + \frac{1}{K_2} X_1(\lambda_2) X_1(\lambda_2) \cos(\omega_2 \tau), \quad (15)$$

$$\varphi_2(\tau) = \frac{1}{K_1} X_2(\lambda_1) X_1(\lambda_1) \cos(\omega_1 \tau) + \frac{1}{K_2} X_2(\lambda_2) X_1(\lambda_2) \cos(\omega_2 \tau).$$

Фактори K_1 та K_2 визначаються з умов:

$$p = 1, q = 1: \quad X_1(\lambda_1) X_1(\lambda_1) + X_2(\lambda_1) X_2(\lambda_1) = K_1, \quad (16)$$

$$p = 2, q = 2: \quad X_1(\lambda_2) X_1(\lambda_2) + X_2(\lambda_2) X_2(\lambda_2) = K_2.$$

Підсумовуючи, маємо такі аналітичні розв'язки:

$$\varphi_1(\tau) = \frac{1}{1 + (1 + \lambda_1)^2} \cos(\omega_1 \tau) + \frac{1}{1 + (1 + \lambda_2)^2} \cos(\omega_2 \tau), \quad (17)$$

$$\varphi_2(\tau) = \frac{1 + \lambda_1}{1 + (1 + \lambda_1)^2} \cos(\omega_1 \tau) + \frac{1 + \lambda_2}{1 + (1 + \lambda_2)^2} \cos(\omega_2 \tau).$$

Якщо змінювати умови відбиття від крайньої частинки, тоді розв'язок буде мати інший вигляд.

4 Ланцюжок з чотирьох частинок ($N = 4$)

З огляду на попередні розгляди, у випадку коли ланцюжок складається з чотирьох частинок ($N = 4$), користуючись граничною умовою $\varphi_4(\tau) = 0$ ($X_4 = 0$), застосовуючи формули Кардано [12], отримуємо:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3} - \frac{b}{3}, \quad \lambda_3 = A + B - \frac{b}{3}, \quad (18)$$

де $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}$; $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$; $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$; $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$;

$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$. Тут $a = 1$; $b = \kappa_3 + 2\kappa_2 + 2$; $c = 2\kappa_3 + 3\kappa_2 + \kappa_3\kappa_2$; $d = \kappa_3\kappa_2$ - коефіцієнти в кубічному рівнянні.

Зміщення частинок у випадку ланцюжка з $N = 4$, знаходимо у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= \frac{1}{K_1} X_1(\lambda_1)X_1(\lambda_1)\cos(\omega_1\tau) + \\ &+ \frac{1}{K_2} X_1(\lambda_2)X_1(\lambda_2)\cos(\omega_2\tau) + \frac{1}{K_3} X_1(\lambda_3)X_1(\lambda_3)\cos(\omega_3\tau), \\ \varphi_2(\tau) &= \frac{1}{K_1} X_2(\lambda_1)X_1(\lambda_1)\cos(\omega_1\tau) + \\ &+ \frac{1}{K_2} X_2(\lambda_2)X_1(\lambda_2)\cos(\omega_2\tau) + \frac{1}{K_3} X_2(\lambda_3)X_1(\lambda_3)\cos(\omega_3\tau), \\ \varphi_3(\tau) &= \frac{1}{K_1} X_3(\lambda_1)X_1(\lambda_1)\cos(\omega_1\tau) + \\ &+ \frac{1}{K_2} X_3(\lambda_2)X_1(\lambda_2)\cos(\omega_2\tau) + \frac{1}{K_3} X_3(\lambda_3)X_1(\lambda_3)\cos(\omega_3\tau). \end{aligned} \quad (19)$$

Фактори K_1 , K_2 та K_3 , які входять у (19), визначаються за допомогою співвідношень:

$$\begin{aligned} p = 1, q = 1: & \quad X_1(\lambda_1)X_1(\lambda_1) + X_2(\lambda_1)X_2(\lambda_1) + X_3(\lambda_1)X_3(\lambda_1) = K_1, \\ p = 2, q = 2: & \quad X_1(\lambda_2)X_1(\lambda_2) + X_2(\lambda_2)X_2(\lambda_2) + X_3(\lambda_2)X_3(\lambda_2) = K_2, \quad (20) \\ p = 3, q = 3: & \quad X_1(\lambda_3)X_1(\lambda_3) + X_2(\lambda_3)X_2(\lambda_3) + X_3(\lambda_3)X_3(\lambda_3) = K_3. \end{aligned}$$

Користуючись (3), (4), (20), (19) остаточний розв'язок можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{1+(1+\lambda_i)^2 + \left(\frac{\kappa_2+1+\lambda_i}{\kappa_2} \cdot (1+\lambda_i) - \frac{1}{\kappa_2}\right)^2} \cos(\omega_i \tau), \\ \varphi_2(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \frac{1+\lambda_i}{1+(1+\lambda_i)^2 + \left(\frac{\kappa_2+1+\lambda_i}{\kappa_2} \cdot (1+\lambda_i) - \frac{1}{\kappa_2}\right)^2} \cos(\omega_i \tau), \\ \varphi_3(\tau) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{\kappa_2+1+\lambda_i}{\kappa_2} \cdot (1+\lambda_i) - \frac{1}{\kappa_2}}{1+(1+\lambda_i)^2 + \left(\frac{\kappa_2+1+\lambda_i}{\kappa_2} \cdot (1+\lambda_i) - \frac{1}{\kappa_2}\right)^2} \cos(\omega_i \tau).\end{aligned}\tag{21}$$

5 Оцінка впливу матеріальних співвідношень та обговорення отриманих результатів

Розглянемо тепер розв'язок повного керуючого рівняння (нелінійного та неоднорідного), яке має такий вигляд

$$m \frac{\partial^2 z_n}{\partial t^2} = C[d - (z_n - z_{n-1})]^\delta - C[d - (z_{n+1} + z_n)]^\delta + mg,\tag{22}$$

де z_n - координата центра мас n -ої сферичної гранули, яка є функцією часу t ; m - маса частинки; d - діаметр частинки; g - прискорення вільного падіння; δ - параметр, який визначає нелінійність рівняння (22) та визначається типом контакту між частинками; C - силова стала, яка залежить від пружних властивостей матеріалу частинок та типу контакту між ними.

Для випадку ланцюжка із тотожних частинок сферичної форми, коли $\delta = 3/2$ (т.з. герцівський контакт), силова стала визначається таким чином:

$$C = \frac{E\sqrt{d}}{3(1-\nu^2)},\tag{23}$$

де E - модуль пружності Юнга; ν - стала Пуассона.

Для випадку ланцюжка із частинок, з'єднаних пружинками, коли $\delta = 1$ (закон Гука), силова стала визначається таким чином:

$$C = k,\tag{24}$$

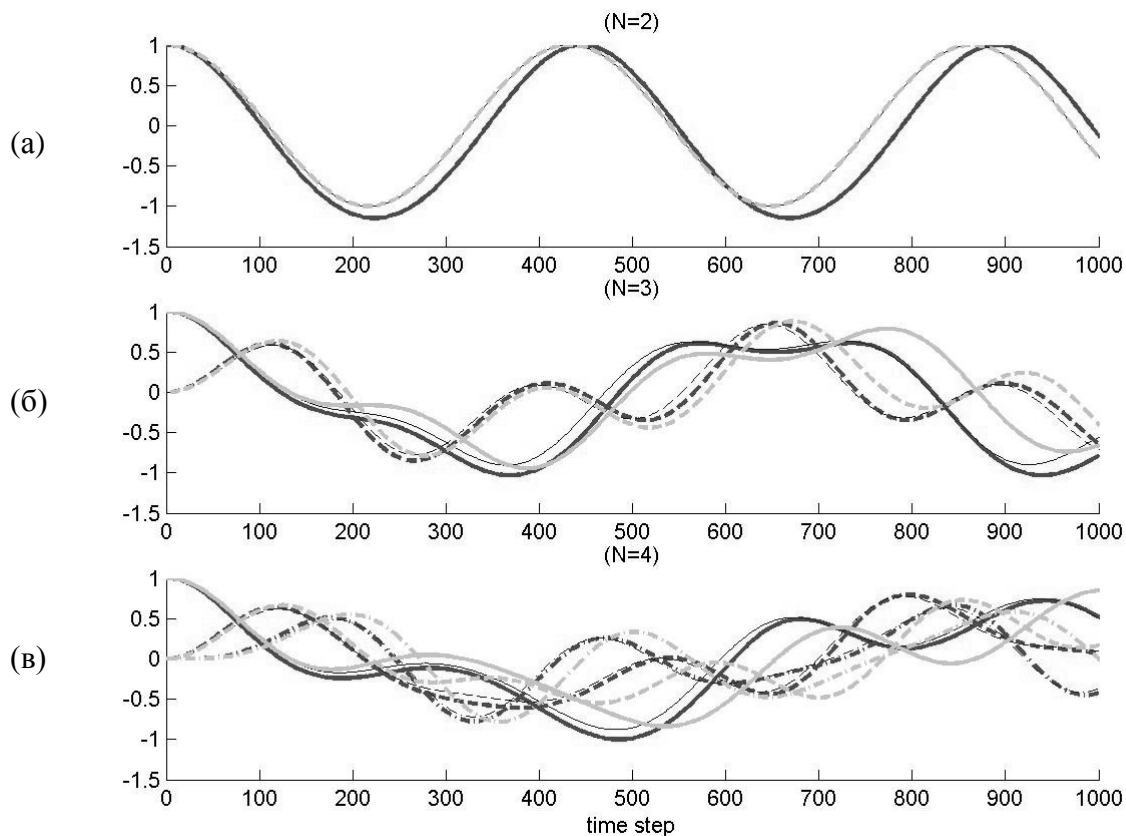
де k - жорсткість пружини.

Чисельне моделювання системи гранул, яка описується нелінійним рівнянням руху (22), було здійснено за допомогою алгоритму предиктор-коректор Гіра 4-го порядку. При цьому використані такі граничні умови:

- система складається із невеликої кількості ($N = 2; 3; 4$) частинок;

- матеріал частинок – скло ($E = 62 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.2$, $d = 1 \text{ мм}$ густина скла $\rho = 2426 \text{ кг/м}^3$);
- у початковий момент часу всі рівнодіючі на частинки сили дорівнюють нулю;
- збудження ланцюжка відбувається раптовим зміщенням першої (верхньої) частинки у бік підкладинки (величина цього зсуву дорівнює 5 \AA);
- частинки знаходяться у полі тяжіння ($g = 9.81 \text{ м/с}^2$);
- часовий крок (step time) у термінах τ відповідає 0.0146.

Отримані у вищевказаному моделюванні дані наведені на Рис.1 (чорна жирна лінія). Результати чисельних розрахунків проведених за формулами (13), (17) та (21) також наведені на Рис. 1 (тонка лінія).



φ_1 - суцільна лінія, φ_2 - пунктир, φ_3 - крапки

Рис.1 – Зміщення n -ої частинки φ_n в залежності від часу τ у неоднорідних ланцюжках, які складаються з: а) 2-х, б) 3-х, в) 4-х частинок. Тонка лінія – розрахунки проведені за точними формулами (13), (17) та (21). Чорна жирна лінія – результати чисельних розв’язків головного керуючого рівняння (22) для неоднорідного герцівського ланцюжка. Сіра лінія – чисельні розрахунки для лінійного однорідного рівняння.

Аналіз результатів наведених на Рис.1 показує гарне співпадання отриманих аналітичних розв’язків (13), (17) та (21) з чисельними розрахунками за головним керуючим (нелінійним та неоднорідним) рівнянням з якого отримано рівняння (1) [3-11]. Вищевизначене відбувається коли збудження є значно меншим за величину прекомпесії частинок у не збудженому стані. Із збільшенням довжини ланцюжку із $(N-1)$ вільною частинкою, траєкторія руху частинок ускладнюється за рахунок

суперпозиції $(N - 1)$ гармонічних коливань. Як показують чисельні розрахунки, вже за наявності 7-10 центрів формується біжуча хвиля, яка у лінійному однорідному випадку відповідає циліндричній хвилі у термінах функцій Беселя першого роду [7-11]. Розв'язок такого типу, як можна показати [13], строго задовольняє керуюче рівняння.

Наведені на Рис.1 результати розрахунків для лінійного однорідного рівняння (сіра лінія) отримані покладанням у головному керуючому рівнянні показника нелінійності $\delta = 1$, тобто такого, що відповідає закону Гука. За таких умов неоднорідність практично зникає ($\kappa_n = n^{1-1/\delta} = 1$). З аналізу Рис.1 можна бачити повне співпадання даних з результатами розрахунку за формулою (13) (Рис.1а).

Розглянемо вплив нелінійності на масштаб часу τ_0 . Враховуючи зв'язок нормованого часу (τ) з реальним (t) [7-10]: $\tau = t \cdot \sqrt{g\delta} (\gamma/g)^{1/2\delta}$, де γ - силова стала (яка для скляних частинок розміром 1 мм, $\gamma = 5.3593 \cdot 10^{14}$); розрахуємо відношення $\tau_0^{lin} / \tau_0^{nonlin} = 2.3150 \cdot 10^7 / 1.4555 \cdot 10^5 = 159.0519$. Таким чином, наведені на Рис.1 результати, які стосуються розв'язків лінійного однорідного рівняння (зображено сірою лінією), мають приблизно у 159 разів менший масштаб часу. З фізичної точки зору це відповідає більшій швидкості розповсюдження збуджень у лінійному ланцюжку у порівнянні із нелінійним. Як відомо з фізичних експериментів з гранульованими ланцюжками, швидкість розповсюдження збуджень уздовж ланцюжка дійсно менша більш ніж на порядок у порівнянні із розповсюдженням у суцільному середовищі [14]. Як бачимо з вищенаведеного розгляду причина цього у нелінійності.

Аналізуючи дані, наведені на Рис.1б та Рис.1в, доходимо до висновку, що залежність зсуву фази, відносно отриманих по аналітичних розв'язках (тонка лінія), збільшується за умови зростання числа частинок у ланцюжку. Вищесказане дозволяє припустити поступове зменшення різниці у швидкості із збільшенням довжини ланцюжка. Асимптотично, для нескінченного ланцюжка (у континуальній границі) вони можуть навіть співпасти.

Висновки

Наочно продемонстровано, як використовуючи відомий алгоритм Бейтмена [1], можна знайти аналітичні розв'язки рівняння руху імпульсу у неоднорідному герцівському ланцюжку із довільними граничними умовами. Отримані результати добре узгоджуються із чисельними розрахунками повного керуючого рівняння (22) у випадку ланцюжків обмеженої довжини та дозволяють зробити висновок, що за умов конфайнменту взаємний вплив нелінійності та неоднорідності на характеристики транспорту імпульсу є мультипараметричним фактором і для своєї оцінки потребує врахування граничних умов і матеріальних співвідношень.

Зменшення швидкості руху фронту збудження, яке точно спостерігається при збільшенні розмірів системи, вказує на потенційну можливість перетворення дисперсійної моди на нелінійну (лінеаризовану). У суцільній границі, розв'язки солітоноподібного типу були знайдені явно [15]. Процес взаємного перетворення локалізованих та делокалізованих збуджень у дискретних мікро-механічних системах у певному сенсі нагадує корпускулярно-хвильовий дуалізм у квантовій механіці, хоча й відтворюється фактично у макро-масштабі.

Список літератури

1. *Pinney E.* Ordinary Difference-differential equations. – University of California Press, Berkley and Los Angeles, 1958. – 250p.; *Bateman H.* Some simple differential difference

- equations and the related functions. //Bulletin of the American Mathematical Society.- 1943.-Vol.49, N7.-С. 494-512.
2. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of non linear problems. //Los Alamos Sc.Lab.Rep. - 1955.- Vol.LA-1940, P.978-988.
 3. *Hascoët E., Herrmann H.J., Loreto V.* Shock propagation in a granular chain. //Phys. Rev. E -1999.-Vol.59, P.3202–3206.
 4. *Sarmiento A., Reigada R., Romero A.H., Lindenberg K.* Enhanced pulse propagation in nonlinear arrays of oscillators. //Phys. Rev. E – 1999.-Vol.60, P.5317–5326.
 5. *Rosas A., Lindenberg K.* Pulse dynamics in a chain of granules with friction. //Phys. Rev. E – 2003.-Vol.68, P.041304.
 6. *Герасимов О.І., Співак А.Я., Худинцев М.М., Клименков О.А.* Транспорт енергії (імпульсу) в модельних низьковимірних дисипативних системах. //Вісник ОДЕКУ.- 2008.-№6.-С.225-233.
 7. *Герасимов О.І.* О новом классе точных решений дифференциально- разностного уравнения движения для механических возмущений в одномерной неоднородной гранулированной цепочке. //Вісник ОДЕКУ.-2011.-№11.-С.198-202.
 8. *Герасимов О.І., Вандевалле Н.* Щодо точних розв'язків задачі про перенесення імпульсу у неоднорідному гранульованому ланцюжку. //Доповіді НАН України.- 2012.-№8.-С.67-72.
 9. *Gerasymov O., Spivak A.* Performing of the momentum dynamics in 1D models of granular systems. //Book of extended abstracts of I-st Belgian-Ukrainian Mini-Symposium Selected Topics of Soft Matter Physics: Granular Materials. *Edited by O.Gerasymov* (Odessa, 2012), P.34-40.
 10. *Герасимов О.І., Співак А.Я.* Моделювання руху механічних збуджень у одновимірних неоднорідних гранульованих ланцюжках: вплив граничних умов. //Вісник ОДЕКУ.-2012.-№14.-С.217-223.
 11. *Lumay G., Dorbolo S., Gerasymov O., Vandewalle N.* Experimental study of a vertical column of grains submitted to a series of impulses. //Eur. Phys. J. E - 2013.- Vol.36, N2, P.1-6.
 12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984.-835с.
 13. *Sen S., Hong J., Bang J., Avalos E., Doney R.* Solitary waves in the granular chain. //Physics Reports-2008.-Vol.462, N2.-P.21-66.
 14. *Porter M.A., Daraio C., Szelengowicz I., Herbold E.B., Kevrekidis P.G.* Highly nonlinear solitary waves in heterogeneous periodic granular media. //Physica D: Nonlinear Phenomena.-2009.-Vol. 238, N6.-P.666-676.
 15. *Gerasymov O.I., Vandewalle N., Spivak A.Ya.* Towards the problem of momentum propagation along inhomogeneous granular chain. //Phil. Mag.-2014 (підготовано)

Перенос возбуждения в 1D гранулированных конечных цепочках.

Герасимов О.И., Спивак А.Я.

С помощью подхода Бейтмена [1], найдены точные решения линеаризованного уравнения движения импульса возбуждения в вертикальном гранулированной цепочке конечной длины. Проанализировано влияние длины цепочки, граничных условий и материальных соотношений на волновую динамику возбуждений в исследуемых системах.

Ключевые слова: динамические системы, гранулированные материалы, волновая динамика.

Transmission (propagation) of perturbation in 1D granular chain under the confinement.

Gerasymov O.I., Spivak A.Ya.

We use Bateman algorithm [1] to set exact solution of the linearized equations of motion for perturbation in vertical granular chain under the confinement. It is shown the wave dynamics is strongly influenced by boundary conditions and constitutive relations.

Key words: dynamic systems, granular materials, wave-dynamics.