

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

*С.В. Арестов*

**Моделі та методи економетрики**

Конспект лекцій

Одеса  
Одеський державний екологічний університет  
2022

УДК 330.43  
А 80

Арестов С.В.

*А80* Моделі та методи економетрики: конспект лекцій. Одеса, Одеський державний екологічний університет, 2022. 45 с.

ISBN 978-966-186-187-8

В конспекті лекцій викладаються аспекти вивчення щодо використання сучасних методів дослідження економічних процесів і явищ, повніше і глибше обґрунтовувати темпи і пропорції розвитку на макро- і мікрорівні.

Конспект лекцій призначений для магістрів спеціальності 051 "Економіка" всіх форм навчання.

**УДК 338.48**

*Рекомендовано методичною радою Одеського державного екологічного університету Міністерства освіти і науки України як конспект лекцій (протокол №5 від 30. 12. 2022 р.)*

**ISBN 978-966-186-187-8**

© Арестов С.В., 2022  
© Одеський державний екологічний університет, 2022

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b>	7
<b>Модуль 1. Елементи моделювання економічних систем</b>	8
<b>ТЕМА 1.1. Елементи моделювання економічних систем</b>	8
<b>1.1.1. Предмет, мета та задачі економетрії</b>	4
<b>1.1.2. Термінологія, яка використовується в економіко-математичному моделюванні</b>	9
<b>1.1.3. Історія розвитку економіко-математичних методів і економетрії</b>	11
<b>1.1.4. Сучасний стан економіко-математичного моделювання, класифікація економіко-математичних моделей, етапи економіко-математичного моделювання</b>	12
<i>Терміни</i>	14
<i>Питання для самоконтролю</i>	14
<b>ТЕМА 1.2. Економетричні методи та моделі</b>	15
<b>1.2.1. Матриці, визначники та дії з ними</b>	15
<b>1.2.2. Системи лінійних рівнянь та методи їх вирішення.</b>	10
<b>1.2.3. Загальний вигляд економетричної моделі, її структура та етапи побудування</b>	17
<b>1.2.4. Метод найменших квадратів, передумови застосування методу найменших квадратів</b>	19
<b>1.2.5. Оцінка тісноти та значущості зв'язку між змінними у рівняннях парної регресії, знаходження прогнозних значень змінних, оцінка тісноти та значущості зв'язку між змінними у множинній регресії, з значущості коефіцієнта кореляції та оцінок параметрів моделі множинної регресії.</b>	21
<i>Терміни</i>	23
<i>Питання для самоконтролю</i>	25
<i>Тести</i>	26
<b>ТЕМА 1.3. Порушення умов використання МНК для загальної лінійної моделі, шляхи їх виявлення та подолання.</b>	28
<b>1.3.1. Поняття мультиколінеарності та її ознаки</b>	28
<b>1.3.2. Визначення мультиколінеарності та способи її усунення.</b>	29
<b>1.3.3. Поняття гомо- і гетероскедастичності, методи</b>	

<b>визначення гетероскедастичності</b>	<b>30</b>
Терміни	31
Питання для самоконтролю	31
<b>Модуль 2. Моделі розподіленого лагу , системи одночасних структурних рівнянь</b>	<b>33</b>
<b>ТЕМА 2.1 Моделі розподіленого лагу</b>	<b>33</b>
<b>2.1.1 Поняття лагу та лагових змінних. Види лагових моделей.</b>	<b>33</b>
<b>2.1.2 Взаємна кореляційна функція. Лаги залежної та незалежних змінних</b>	<b>34</b>
<i>Терміни</i>	35
<i>Питання для самоконтролю</i>	35
<b>ТЕМА 2.2 Системи одночасних структурних рівнянь</b>	<b>36</b>
<b>2.2.1 Системи рівнянь при побудові економетричних моделей</b>	<b>36</b>
<b>2.2.2 Ідентифікація моделі. Рекурсивні системи</b>	<b>37</b>
<i>Терміни</i>	38
<i>Питання для самоконтролю</i>	38
<b>ТЕМА 2.3 Економетричні моделі з якісними пояснювальними змінними</b>	<b>39</b>
<b>2.3.1 Якісні змінні в економетричних моделях</b>	<b>39</b>
<b>2.3.2 Регресійні моделі з кількісними та якісними змінними</b>	<b>40</b>
<i>Терміни</i>	41
<i>Питання для самоконтролю</i>	41
<b>Перелік використаної і рекомендованої літератури</b>	<b>43</b>

## ВСТУП

В умовах переходу економіки України до ринкових відносин є підвищення інтересу фахівців до наукового вирішення проблем з використанням економіко-математичних методів і побудованих на їхній основі моделей. Проявляється це насамперед в тому, що математичні методи і моделі в економіці потребують ретельного вираховування всіх можливих ситуацій, що робить управлінські рішення науково обґрунтованими, динамічними для забезпечення збалансованого та стикового господарського механізму. Використання сучасних методів дослідження економічних процесів і явищ дозволяє повніше і глибше обґрунтовувати темпи і пропорції розвитку на макро- і мікрорівні, домагатися оптимальності серед альтернативних рішень. При цьому зростає роль економетрії як науки про виміри в економіці та управлінні з використанням сучасних економіко-математичних методів, моделей та засобів їх реалізації.

Економетрія - це прикладна наука і її важлива практична задача полягає в розробці методів обґрунтування і вибору тих або інших рішень. У загальному випадку для наукового пізнання якогось процесу чи явища можна користуватися в якості інструментаріїв такими чотирма методами: теоретичним аналізом; спостереженням; науковим експериментом; моделюванням. Якщо перші три інструменти успішно використовуються, наприклад, у технічних науках, то на долю економіки припадає останнє (за винятком спостереження, яке використовується у статистиці). Пояснити це можна тим, що економічні процеси достатньо тривалі. Для збору необхідного для теоретичного аналізу статистичного матеріалу часто необхідні роки і десятиліття; через це ускладнюється вияв діючих закономірностей та вплив численних окремих факторів.

Даний конспект складений на основі власного досвіду здобутого під час роботи на кафедрі «Економіка природокористування» і з використанням літератури: 1. Айвазян С.А., Мхитарян С.В. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998.-1022с. 2. Грубер Й. Економетрія. Вступ до множинної регресії та економетрії: Навчальний посібник.-К.:Нічлава, 1998.-384с. 3. Економетрія: Опорний конспект лекцій / Укл. О.Є.Лугінін. – Херсон: МІБ, 2001.-106с. 4. Кулинич О.І. Економетрія: Навчальний посібник. – Хмельницький: Поділля, 1997.-115с. 5. Кулинич О.І. Економетрія: Практикум. – Хмельницький: Поділля, 1998.-157с. 6. Лугінін О.Є., Білоусова С.В., Білоусов О.М. Економетрія: Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 252с.

# **ЕКОНОМЕТРІЯ**

## **МОДУЛЬ 1. Елементи моделювання економічних систем**

### **ТЕМА 1.1. Елементи моделювання економічних систем**

#### **1.1.1. Предмет, мета та задачі економетрії**

#### **1.1.2. Термінологія, яка використовується в економіко-математичному моделюванні**

#### **1.1.3. Історія розвитку економіко-математичних методів і економетрії**

#### **1.1.4. Сучасний стан економіко-математичного моделювання, класифікація економіко-математичних моделей, етапи економіко-математичного моделювання**

#### **1.1.1 Предмет, мета та задачі економетрії**

У сучасній літературі має місце ряд трактувань поняття економетрії, або економетрики (що одне і те ж), як наукової дисципліни: від надмірно розширеного з виміру всього, що є в економіці, до вузько орієнтованого з розгляду лише математико-статистичних способів. Широкий спектр економіко-математичних методів і моделей, корисний майбутнім фахівцям, не вивчається ні в одному з циклів фундаментальних та професійно-орієнтованих дисциплін підготовки економістів і менеджерів. Тому, з нашої точки зору, доцільно при вивченні економетрії перевагу віддати її зкорегованому першому тлумаченню, наведеному вище.

В даному навчальному виданні економетрія розглядається як наукова дисципліна, що вивчає комплекс економіко-математичних методів і побудованих на їх основі моделей для кількісного вимірювання взаємозв'язків між економічними показниками. Це складає предмет економетрії з розгляду основних економіко-математичних методів і моделей: оптимізаційних, сітьових, балансових і суто економетричних. Економіко-математична модель - це математичний опис економічного процесу чи явища з метою його дослідження та управління.

Оптимізаційна модель дозволяє з декількох альтернативних варіантів вибрати найкращий варіант за будь-якою ознакою. Сітьова модель заснована на використанні сітьового графіка, який дозволяє планувати виконання трудомістких робіт з великим числом виконавців.

Балансова модель узгоджує потреби споживачів товарів і послуг з обмеженням умов та спроможностей їх виробництва та надання

Економетрична модель призначена для аналізу і прогнозування розглядуваних економічних процесів і явищ в умовах невизначеності інформації за допомогою методів математичної статистики.

Метою економетрії є набуття майбутніми фахівцями знань з методик побудови економіко-математичних моделей на макро- і мікрорівні, уміння використовувати відповідний математичний апарат у вирішенні економічних і управлінських задач та розвиток творчих і аналітичних

навичок у економістів і менеджерів з математичного моделювання при використанні сучасних ПК для проведення досліджень.

Задачами економетрії є оволодіння студентами необхідними знаннями і навичками з моделювання економічних процесів і явищ, проведення аналізу з використанням економіко-математичних моделей в нових умовах господарювання і переходу до ринкової економіки.

### **1.1.2 Термінологія, яка використовується в економіко-математичному моделюванні**

Кожна наукова дисципліна використовує свою систему понять і категорій. В основі понятійного апарату економетрії лежить термінологія такого наукового напрямку, як економіко-математичні методи з побудовою та реалізацією на їх основі математичних моделей. Такий науковий напрямок, за характерним виразом акад. Л.І. Лопатнікова, являє собою єднання економіки, математики і кібернетики. А тому як економічні методи та моделі є різновидом економіко-математичного моделювання, приведемо його основну термінологію, з якою будемо мати справу в подальшому викладанні.

Ціль - це фундаментальне поняття, тому що економічна Діяльність завжди цілеспрямована. Під ціллю розуміють бажаний результат, що повинний бути досягнутий.

Захід - сукупність дій, об'єднаних загальною ціллю. В Дослідженні операцій (відгалудженні кібернетики) замість терміну «захід» використовується поняття «операція». Альтернативи - можливі варіанти заходів, на підставі яких приймається рішення. Таких варіантів може бути декілька. Альтернативи можуть бути дискретними або безперервними. Кількість дискретних альтернатив скінченна: наприклад, замінити певний вид устаткування або ні (у даному разі альтернативи дві). Альтернативи можуть вибиратися на безперервній множині: наприклад, коли замінити устаткування даного виду (через день, два, тиждень, місяць, рік і т.д.); тоді кількість альтернатив нескінченне і під рішенням розуміють вибір однієї альтернативи з безліч можливих.

Система (у перекладі з грецької - ціле, зіставлене з частин) - це множина взаємозв'язаних елементів, які складають певну єдність.

Елемент системи - частина системи, яка виходячи з цілі та функцій даної системи, є неділимою.

Складна система - це безліч різних структур і елементів цих структур.

Підсистема - частина системи, яка виділена з певною ціллю; може розглядатися як самостійна система.

Системний підхід - головний науковий принцип дослідження систем, згідно з яким необхідно враховувати взаємозв'язки між елементами системи, між системою та зовнішнім середовищем, між станом системи у даний час і майбутньому. Основне поняття в кібернетиці.

Модель - система, здатна замінити оригінал (тобто реальну систему) так, що її вивчення дає інформацію про оригінал. Модель може повністю або частково відтворювати структуру моделюємої системи та її функції.

Моделювання - процес побудови, реалізації та дослідження моделі, який здатний замінити реальну систему та дати інформацію про неї.

Математична модель - система математичних і логічних співвідношень, які описують структуру та функції реальної системи. Математична модель відрізняється за своєю природою від оригінала. Дослідження властивостей оригінала за допомогою математичної моделі зручніше, дешевше, займає менш часу порівняно з фізичним моделюванням, яке використовується в техніці. Більш того, цілий ряд економічних систем неможливо зобразити за допомогою фізичних моделей.

Економіко-математична модель включає в себе систему рівнянь та нерівностей математичного опису економічних процесів і явищ, які складаються з набору змінних і параметрів. Змінні величини характеризують, наприклад, обсяг виробленої продукції, капітальних вкладень, перевезень тощо. Змінні розділяються на дві групи: пояснювальні (залежні), які є наперед заданими та незалежними; пояснювані (незалежні), які є результативними показниками. Змінні величини можуть бути двох груп: зовнішні змінні (екзогенні), коли вони визначаються поза даною моделлю та вважаються для моделі заданими; внутрішні змінні (ендогенні), які визначаються в результаті дослідження даної моделі. Параметри - це чисельні ознаки показників, такі як норми витрат сировини, матеріалів, часу на виробництво тощо. В усіх випадках необхідно, щоб модель мала достатньо детальний опис об'єкту, який дозволяв би здійснювати вимір економічних величин та їх взаємозв'язок, щоб були виділені фактори, які впливають на досліджувані показники.

Економетрична модель - різновид економіко-математичної моделі, параметри якої оцінюються за допомогою методів математичної статистики. Одним з основних підходів у вимірі зв'язку між досліджувальними показниками в економетричній моделі є кореляційно-регресивний аналіз. Він являє собою комплекс методів, за допомогою яких визначається вид рівняння для досліджувальних показників та розрахунок їх параметрів (регресивний аналіз), а також встановлення тісноти та значимості зв'язку між змінними у рівнянні або рівняннях (кореляційний аналіз).

Економіко-математичні методи - узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об'єднаних для вивчення економіки та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей. Процес моделювання поки що не алгоритмізований з причин величезної складності логічної побудови і математичного опису цієї роботи. Однак у практиці моделювання вироблені певні принципи, якими необхідно користуватися і які будуть розглянуті нижче.



### 1.1.3 Історія розвитку економіко-математичних методів і економетрії

XVIII ст. - початок використання математичних методів у економіці з опублікування роботи "Економічні таблиці" французьким економістом Ф.Кене, який вперше зробив спробу формалізації процесу суспільного відтворення.

XIX ст. - формується економетрія як наука з початку розробки статистичних методів у вигляді парної та множинної регресії, теорії кореляції, теорії помилок, вибіркових методів (Р.Гамільтон, К.Пірсон, Р.Фішер та ін.). У середині 30-40-х років XX ст. виникають лінійні методи оптимізації: лінійне програмування, скорочено ЛП (Л.В.Канторович, Дж. Данціг) та теорія ігор (Дж. фон Нейман).

Досвід використання лінійних моделей показав, що вони далеко не завжди можуть бути використані для опису економічних процесів і явищ. Тому почитають розвиватися дослідження в інших напрямках нелінійного програмування: випуклого, геометричного, динамічного та ін.

У 1948 р. виникає нова наука - кібернетика (у перекладі з грецької - мистецтво управління), засновником якої став американський математик Норберт Вінер. Кібернетика - це наука про загальні закономірності процесів управління в різних системах: біологічних, економічних, технічних та ін. Одним з напрямків кібернетики, об'єктом якого виступають економічні системи, є економічна кібернетика. Вона лежить в основі побудови ряду оптимізаційних моделей. Пізніше розвиваються такі прикладні напрямки економічної кібернетики як дослідження операцій (пошук шляхів раціонального використання ресурсів для реалізації поставлених цілей), теорія масового обслуговування (яка розглядає різні явища в економіці як процеси обслуговування, тобто задовільнення будь-яких запитів, заказів тощо).

У 50-60-х роках макроекономічні дослідження у економетрії проводять Я.Тінберген, Р.Фріш. Центром розвитку економетрії стала Комісія Коулса (США). Новий інструментарій економетрія получила в результаті розробки моделей одночасних рівнянь (Т.Хаавельмо, Т.Купманс, Г.Гейл та ін.). Серед нових економетричних систем, за якими розрахунки починають вестись з використанням ЕОМ, виникають такі макроекономічні моделі: Брукінгська модель (США), Голандська модель, Уортонська модель (США), які використовуються для прогнозування та розробки економічної політики, для аналізу попиту та споживання.

У 60-х роках починається впровадження в практику планування СРСР нових методів, які одержали назву "Сітьові методи планування та управління" (СПУ). Вони лежать в основі сітьових моделей.

Розвиваються деякі розділи прикладної математики, пов'язані з вирішенням оптимізаційних задач: нелінійне математичне програмування; математична теорія оптимізаційних процесів.

Відповідний внесок у розвиток економетрії вносять вітчизняні вчені-економісти (Є.Є.Слущкий, Л.В.Канторович, В.С.Немчинов та ін.).

У 70-90-х роках економіко-математичне моделювання стало визнаним засобом аналізу економічних проблем. У вітчизняній практиці у 70-х роках з'являються автоматизовані системи управління (АСУ), призначені для оптимізації управління складними виробничими процесами та економічними системами.

У наш час набувають впровадження у вітчизняну практику економетричні підходи з використанням програмних комплексів ПК. В умовах України як самостійної держави зростає роль економіко-математичних методів як одного із засобів розвитку динамічно розвинутої та стійкої економіки з науково обґрунтованими шляхами розвитку та прогнозами на майбутнє в перехідному етапі до ринку.

#### **1.1.4. Сучасний стан економіко-математичного моделювання, класифікація економіко-математичних моделей, етапи економіко-математичного моделювання**

У теперішній час сфера можливого використання економіко-математичних методів і моделей у плануванні та управлінні значна і з кожним роком вона розширюється, але область фактичного їх використання на практиці пов'язана з труднощами: складність моделювання економічних процесів і явищ з урахуванням виробничих відносин (поведінка людей, їх інтереси, індивідуально прийняті рішення); необхідність "упровадження" математичних моделей в існуючу систему планування та управління; труднощі перевірки у вирішенні нових соціально-економічних задач тощо. До ефективних засобів подолання цих труднощів можна віднести такі: імітаційне моделювання, що дає змогу керівнику, який приймає рішення, за допомогою ПК включитися у процес побудови економіко-математичної моделі з прийняттям оптимального рішення на її основі (головний принцип імітаційного моделювання: "Що буде, коли..."); системний аналіз, який припускає комплексне проведення дослідження економічних процесів з урахуванням усіх існуючих елементів та взаємозв'язків, вивчення окремих господарських об'єктів як структурних частин більш загальних систем, виявлення ролі кожного з них у функціонуванні економічного процесу в цілому; програмно-цільовий метод планування, заснований на формуванні

цілей та підцілей економічного розвитку, на які треба направити найбільші сили і засоби, та розробці програм їх досягнення.

Економіко-математичні моделі можна класифікувати за такими ознаками:

призначенням; ступенем ймовірності; способом опису; способом обліку змінювання процесу за часом; точністю математичного відображення розглядуваних явищ.

За призначенням моделі доцільно розбити на чотири класи: імітаційні; балансові; сітьові; оптимізаційні.

За ступенем ймовірності моделі розділяються на два типи: ймовірні (стохастичні), параметри яких та зовнішні зміни носять випадковий характер; детерміновані, в яких ігнорується випадковий характер зміни параметрів.

За способом опису моделі поділяються на три класи: аналітичні, в яких показники описуються математичними формулами або системою формул; економетричні (статистичні), які призначені для аналізу і прогнозування розглядаємих економічних явищ в умовах невизначеності вхідних даних і реалізуються методами математичної статистики; змішані, в яких найбільш прості блоки описуються аналітичними залежностями, а в інших блоках, де опис аналітичними формулами може призвести до значних викривлень, використовується економетричне моделювання.

За способом обліку змінювання процесу за часом моделі розділяються на три класи: статичні, у яких передбачається, що вхідні параметри не змінюються за часом; багатокрокові, у яких час протікання процесу ділиться на "кроки" (інтервали) і в рамках одного кроку процес розглядається статичним; динамічні, де враховується безперервна зміна часу.

За точністю математичного відображення розглядаємих явищ моделі діляться на дві групи: лінійні, залежності у яких мають змінні у першій степені, та не включають їх обернених величин та добуток змінних; нелінійні

Процес побудови економіко-математичних моделей загального типу складається з таких взаємозв'язаних етапів:

**Перший етап** - постановка задачі, де формується ціль запланованого заходу, ставляться задачі дослідження, проводиться якісний опис об'єкта.

**Другий етап** - розробка описувальної моделі, де формулюються та обґрунтовуються показники та система основних припущень.

**Третій етап** - розробка математичної моделі виучуваного об'єкта з вибором методів дослідження, програмного забезпечення ПК або складання алгоритму та програми для ПК за новими задачами.

**Четвертий етап** - рішення задачі на базі розробленої моделі, яке складається з реалізації пакету прикладних або розроблених програм для ПК.

**П'ятий етап** - перевірка та підстроювання моделі, тобто встановлення відповідності моделі описаному економічному процесу.

**Шостий етап** - представлення результатів рішення у формі, зручної для вивчення, аналіз матеріалів моделі на основі обробки результатів.

### **Терміни**

Ціль, захід, система, модель, математична модель, моделювання, системний підхід.

### **Питання для самоконтролю**

1. Етапи економіко-математичного моделювання?
2. Сучасний стан економіко-математичного моделювання?
3. Класифікація економіко-математичних моделей?
4. Предмет, мета та задачі економетрії?
5. Історія розвитку економіко-математичних методів і економетрії?

**Знання:** основні поняття, терміни, принципи, напрямки і механізми економетрії.

**Уміння:** проводити класифікацію економіко-математичних моделей, будувати економіко-математичні моделі загального типу.

## **ТЕМА 1.2.Економетричні методи та моделі**

### **1.2.1.Матриці, визначники та дії з ними.**

### **1.2.2.Системи лінійних рівнянь та методи їх вирішення.**

### **1.2.3.Загальний вигляд економетричної моделі, її структура та етапи побудування.**

### **1.2.4.Метод найменших квадратів, передумови застосування методу найменших квадратів.**

### **1.2.5.Оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними у рівняннях парної регресії, знаходження прогнозних значень змінних, оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними у множинній регресії, значимість коефіцієнта кореляції та оцінок параметрів моделі множинної регресії.**

#### **1.2.1.Матриці, визначники та дії з ними**

Різні економічні дані часто надаються у вигляді таблиць. Математична обробка їх значно спрощується, якщо абстрагуватися від їх економічного змісту, тобто розглядати їх як математичний об'єкт - матрицю.

Матрицею називається таблиця чисел, яка складається з  $m$  рядів і  $n$  стовпців та записується у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

де  $a_{ij}$  - числа, які називаються елементами матриці;  $i$  - номер рядка ( $i=1 \dots m$ );  $j$  - номер стовпця ( $j=1 \dots n$ ).

Кількість рядків і стовпців матриці визначає її розмір  $m \times n$ .

Якщо  $m=n$ , то матриця квадратна порядку  $n$  (або  $m$ ); якщо  $m \neq n$ , то матриця - прямокутна.

Матриця може складатися з одного стовпця або рядка, тоді її називають вектором або відповідно матрицею-стовпцем і матрицею-рядком

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; A = (a_{11} a_{12} \dots a_{1n})$$

Квадратна матриця, усі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається діагональною. Якщо в діагональній матриці елементами головної діагоналі є одиниці, то матриця називається одиничною n-го порядку:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якщо у заданій матриці A поміняти місцями елементи рядків на відповідні елементи стовпців (або навпаки), то дістанемо транспоновану матрицю:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Додавання і віднімання виконуються тільки для матриць одного й того самого порядку. Якщо матриці  $A=(a_{ij})$  і  $B=(b_{ij})$  мають однаковий порядок, то матриця суми або різниці дорівнює відповідно  $C=(a_{ij} \pm b_{ij})$ .

Помножити матрицю A на скаляр  $\lambda$  (скаляр - дійсне число зі своїм знаком) означає, що у новій матриці  $D=\lambda*A$  її елементи  $d_{ij}$  дорівнюють результатам помноження скаляра на елементи матриці A:  $d_{ij}=\lambda*a_{ij}$ .

Дві матриці A і B можна помножити одна на одну, якщо кількість стовпців r першої матриці дорівнює кількості рядків r другої матриці. Тоді кожний елемент матриці добутку  $C=A*B$  є сумою добутків відповідних елементів  $a_{ij}$  i-го рядка на відповідні елементи  $b_{ij}$ -го стовпця:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}$$

Визначником (детермінантом) квадратної матриці A, що позначається

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається число, яке може бути отримано як алгебраїчна сума попарних додатків елементів будь-якого стовпця (рядка) на їх відповідні алгебраїчні доповнення:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

де  $A_{ij}$  - алгебраїчне доповнення елемента матриці  $a_{ij}$ , яке визначається розкриттям визначника  $|A|$  викресленням  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця. Знак алгебраїчного доповнення "+" або "-" залежить від того, парна або непарна сума номерів рядка та стовпця, на перехрещенні яких є даний елемент  $a_{ij}$ .

Мінором  $M_{ij}$  матриці  $A$  називається визначник, який одержується з матриці  $A$  викресленням  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпця. Мінор відрізняється від алгебраїчного доповнення тим, що він завжди додатний.

Квадратна матриця, для якої  $|A| \neq 0$ , називається невинродженою. Кожна невинроджена матриця має єдину обернену матрицю  $A^{-1}$ , для якої виконується умова

$$A^{-1}A = A A^{-1} = E$$

Обернена матриця знаходиться за умовами: переконуються у невинродженості матриці  $A$  (тобто  $|A| \neq 0$ ); розраховуються алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$  елементів визначника матриці  $A$ ; складається матриця  $B$ , елементами якої є алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$ ; складається нова матриця  $B^1$ , яка є транспонованою до матриці  $B$ ; розраховуються елементи оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} B^1$$

### 1.2.2 Системи лінійних рівнянь та методи їх вирішення

Рівняння є лінійним, якщо воно містить у собі змінні тільки у першій степені, відсутні їх обернені величини та добуток змінних. Сукупність чисел називається рішенням системи, якщо при підстановці їх замість змінних усі рівняння обертаються в тотожність (тобто ліві частини рівнянь відповідають правим). Коли праві частини системи рівнянь дорівнює нулю, то система називається однорідною, у протилежному випадку - неоднорідною. Безліч тривіальних розв'язків система має тоді, коли  $A = 0$ .

Система називається сумісною, коли вона має хоча б одне рішення, та несумісною, якщо у неї відсутні рішення. Сумісна система рівнянь, яка має тільки одне рішення, називається визначеною, а більш одного-невизначеною.

Рішення системи називаються незалежними, якщо ні одне з них не є наслідком інших. У протилежному випадку рівняння є залежним та "зайві" рівняння повинні бути виключені із залежної системи. Дві системи рівнянь називаються еквівалентними, якщо всі рішення однієї системи є рішеннями іншої, і навпаки. Якщо скінченне число разів із рівнянь системи віднімати або прибавляти будь-які інші рівняння, помножені на постійні величини, то одержується система, еквівалентна первинної. Якщо при цьому виявляється, що в будь-якому рівнянні коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю, то можливі два випадки: в першому випадку права частина дорівнює нулю, що означає залежність даного рівняння від інших і таке рівняння із системи необхідно виключати; у другому випадку права частина не дорівнює нулю, тоді система несумісна (не має рішень).

У вирішенні системи  $t$  рівнянь з  $p$  невідомими можуть бути три випадки:

а) число рівнянь перевищує число невідомих  $t > p$ ;

б) число рівнянь дорівнює числу невідомих  $t = p$ ;

в) число рівнянь менше числа невідомих  $t < p$ .

Випадок  $t > p$  не має самостійного значення для сумісної системи, так як послідовним виключенням змінних з рівнянь можна отримати нову систему з числом рівнянь  $t < p$ , еквівалентну первинній системі. У випадку, коли система несумісна, вона не має рішень.

При  $t = p$  неоднорідна система сумісна і має ненульове рішення, коли її визначник відрізняється від нуля. В економічній практиці розповсюджені такі три основні методи вирішення системи рівнянь: метод Гауса; метод Крамера; метод оберненої матриці (або матричний спосіб).

Метод Гауса. Система  $t$  лінійних рівнянь з  $p$  змінними, Метод Гауса є одним з найбільш зручних способів рішення систем лінійних рівнянь і полягає в послідовному виключенні змінних. На першому кроці за допомогою першого рівняння виключається змінна із інших рівнянь; на другому кроці за допомогою нового другого рівняння виключається змінна із усіх послідовуючих рівнянь і т.д. Якщо при цьому не з'явиться ні одне рівняння з нульовими коефіцієнтами при змінних, то система рівнянь зводиться до трикутної форми і останнє рівняння буде мати тільки одну змінну.

Якщо при послідовному виключенні змінних зустрінеться хоча б одне рівняння з нульовими коефіцієнтами при невідомих і нульовою правою частиною, то отримимо систему рівнянь отриманої системи число рівнянь  $t$  менше числа змінних  $p$  і така система буде невизначеною.

Метод Крамера. При наявності системи, яка складається з  $t$  рівнянь при  $p$  змінних, вона має єдине рішення, якщо визначник цієї системи відрізняється від нуля. Таким чином, система рівнянь має єдине рішення. Перевіркою можна переконатися, що знайдені значення змінних задовольняють розглядаємі системі.



Метод оберненої матриці (матричний спосіб). Система  $t$  лінійних рівнянь з  $p$  змінними, яка записана у матричному вигляді та , має рішення . Таким чином, єдине рішення системи рівнянь , безпосередньою перевіркою можна перекоонатися, що знайдені значення змінних задовольняють заданій системі.

Ми розглянули рішення систем лінійних рівнянь, у яких кількість рівнянь співпадає з числом змінних. Розглянемо тепер випадок, коли система загального виду містить  $t$  рівнянь з  $p$  змінними та  $t < p$ . За допомогою методу Гауса при послідовному виключенні змінних можна встановити, чи є система сумісною, а коли вона сумісна, залежні її рівняння чи ні. Рівняння, які є слідством інших, повинні бути виключені. Будемо вважати, що така перевірка вже виконана, залежні рівняння з системи виключені та рівняння системи незалежні.

Будь-які  $t$  змінних систем лінійних рівнянь з  $p$  змінними ( $t < p$ ) називають основними, якщо визначник матриці коефіцієнтів при них відрізняється від нуля. Тоді інші змінні називають неосновними (вільними).

Основними можуть бути різні групи з  $t$  змінних. Проте кількість способів вибору  $t$  змінних їх загальної кількості  $p$  скінчене. Воно дорівнює кількості сполучень із  $p$  елементів з  $t$ . Якщо для системи  $t$  лінійних рівнянь з  $p$  змінними ( $t < p$ ) існує хоча б один спосіб розподілу змінних на основні та неосновні, то система є сумісною, невизначеною та має безліч рішень. Із цих рішень при  $t < p$  виділяються базисні рішення, в яких неосновні змінні мають нульові значення. Кожному розподілу змінних системи на основні та неосновні відповідає одне базисне рішення. Може статися, що в базисному рішенні деякі основні змінні теж дорівнюють нулю. Тоді базисне рішення називають виродженим. Рішення системи  $t$  лінійних рівнянь з  $p$  змінними (у тому числі і базисні) називаються допустимими, якщо всі компоненти їх невід'ємні та недопустимими, якщо хоча б одна компонента невід'ємна.

### **1.2.3. Загальний вигляд економетричної моделі, та етапи її побудування**

Одною з головних задач економетрії в ринковій економіці є ретельне вивчення кількісних зв'язків між показниками для кращого розуміння господарських явищ і процесів, що в свою чергу дозволяє більш обґрунтовано сформулювати управлінські рішення та дати прогнози на майбутнє. Для вирішення цієї задачі потрібна побудова економетричної моделі. Модель, що описує кореляційно-регресивний зв'язок між економічними показниками називається загальною, яка дійсна для всієї генеральної сукупності спостережень. У лінійній економетричній моделі має місце лінійний зв'язок між змінними, що характеризують розглядаємий економічний процес чи явище. Зауважимо, що лінійні

регресійні моделі є найбільш прості і в переважній більшості випадків - достатні для практики. Ті з моделей, що базуються на методі найменших квадратів (МНК) при оцінюванні їх параметрів, називаються класичними і вивчаються у класичній економетрії, при порушенні умов використання МНК доводиться застосовувати інші методи оцінювання параметрів економетричних моделей. Такий підхід в їх побудові розглядається в даному навчальному посібнику. Економетрична модель виступає як функція або система функцій, що описує зв'язок між вхідними та результативними показниками економічної системи за допомогою методів математичної статистики. Незалежні фактичні змінні  $X$  (пояснювальні змінні) найчастіше бувають детермінованими і вони є наперед заданими змінними, або вхідними показниками для розглядаємої економічної системи.

Випадкові складові  $\epsilon$  називають ще стохастичними складовими, помилками або частіше залишками. Вони є наслідками помилок спостережень, містять у собі вплив усіх випадкових факторів, а також факторів, які не входять у модель.

З огляду того, що залежні фактичні змінні (пояснювані змінні), які є результативними показниками, залежать від випадкової складової  $\epsilon$ , то вони також є стохастичними (випадковими). Звідси і економетрична модель є стохастичною.

У ряді випадків економетричні моделі можуть бути описані методами кореляційно-регресійного аналізу. Задачею регресійного аналізу є встановлення виду залежності між змінними та вивчення залежності між ними. Основною задачею кореляційного аналізу є виявлення зв'язку між змінними та оцінка її тісноти та значимості. Але на застосування кореляційно-регресійного аналізу накладаються такі вимоги: необхідність достатньо великої сукупності спостережень; забезпечення однорідної сукупності спостережень; наявність нормального закону розподілення сукупності вивчаємих одиниць, на якому побудовані всі положення кореляційно-регресійного аналізу.

Побудова будь якої економетричної моделі базується на використанні таких специфічних послідовних етапів

**Етап1.** Постановка задачі.

**Етап2.** Специфікація моделі, яка полягає у встановленні функції або системи функцій, що використовуються для побудови моделі з ймовірними характеристиками.

**Етап3.** Формування вхідної інформації згідно з метою дослідження.

**Етап4.** Оцінка параметрів моделі регресії за допомогою методу найменших квадратів.

**Етап 5.** Перевірка передумов виконання вимог до моделі; у разі порушення розглянутих вимог треба змінити специфікацію або застосувати інші методи оцінювання параметрів.

**Етапб.** Проведення аналізу достовірності моделі та прогнозу за побудованою моделлю.

#### **1.2.4. Метод найменших квадратів, передумови застосування методу найменших квадратів, властивості оцінок параметрів рівнянь регресії, види рівнянь регресії та визначення їх параметрів**

Сутність методу (звичайного) методу найменших квадратів (МНК) полягає у знаходженні таких значень матриці параметрів А моделі, при яких сума квадратів залишків й була б мінімальною. Мінімізуя суму квадратів залишків й шляхом знаходження першої похідної за складовими, можна знайти оцінки для теоретичної моделі.

У ряді випадків при вирішенні економічних задач необхідно встановити теоретичну (аналітичну) залежність  $y = f(x)$  на підставі фактичних спостережень. Результати їх можуть бути наведені у таблиці для  $n$  пар значень змінних:  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n$ . Проаналізуємо, який вид кривої краще підійде для апроксимації емпіричних (фактичних) даних. У спрощеному випадку це може бути пряма, з кривих - парабола, гіпербола, степенна залежність та ін.

Припустимо, що для даного розподілення емпірично отриманих точок вибраний вид залежності у вигляді безперервної лінії  $f(x)$  між точками. Функцію  $f(x)$  описують параметри  $a_i$ , знайшовши які можна отримати рівняння апроксимуючої лінії. Наприклад, рівняння прямої задаються у вигляді  $y = a_0 + a_1x$ , рівняння параболи -  $y = a_0 + a_1x^2$  тощо. Відхилення ординат теоретичної лінії у від емпіричних даних  $y_i$ , при тих же абсцисах відповідають різниці  $u_i = y - y_i$  (при  $i=1..n$ ). Чим менші ці різниці, тим краще вибрана теоретична лінія буде апроксимувати емпіричні дані.

Французьким математиком Лежандром у ХІХ ст. запропоновано в якості міри відхилення точок А від апроксимуючої теоретичної лінії брати мінімальну суму S квадратів відхилення їх ординат  $y_i$  від теоретичних значень у:

$$S = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \sum_{i=1}^n (y - y_i)^2 = \min$$

З цього і назва методу - метод найменших квадратів (або скорочено МНК).

Оцінювати параметри економетричної моделі за допомогою МНК можна за умов:

1. Математичне сподівання залишків, тобто середня величина випадкових значень, дорівнює нулю. Якщо ця передумова не виконується, то йдеться про помилки специфікації. Специфікацію моделі називають її

аналітичну форму, яка складається з певного виду вибраної функції чи системи функцій для змінних. До помилок специфікації приводять: відсутність у моделі основної пояснювальної (незалежної) змінної, що призводить до зміщення оцінок параметрів і може привести до хибних висновків щодо значень параметрів; введення в модель пояснювальної змінної, яка не є істотною для вимірюваного зв'язку, що може привести до неправильно встановленого кількісного зв'язку між змінними; використання невідповідних аналітичних форм вибраних функцій для моделі, що як і при першій помилці специфікації може привести до зміщення оцінок параметрів моделі.

2. Дисперсія відображає розсіювання випадкових значень  $m$ , навколо їх математичного сподівання. Наявність сталої (постійної) дисперсії залишків називається гомоскедастичністю. Ця властивість може виконуватись лише тоді, коли залишки  $y$  є помилками вимірювання.

3. Незалежні змінні моделі не пов'язані із залишками, при порушенні цієї умови для оцінювання параметрів моделі використовуються не МНК, а інші методи, які будуть розглянуті пізніше.

4. Незалежні змінні моделі утворюють незалежну систему векторів, тобто ці змінні незалежні між собою. Якщо незалежні змінні пов'язані між собою, то це явище називають мультиколінеарністю і воно є небажаним, так як робить оцінку параметрів за допомогою МНК ненадійною чутливою до вибраної специфікації моделі.

До властивостей оцінок параметрів рівнянь регресії відносяться такі: незміщеність; обґрунтованість; ефективність; інваріантність.

Оцінка параметрів за допомогою МНК є незміщеною. Якщо оцінка незміщена, то при багаторазовому повторенні випадкової вибірки середнє значення помилок дорівнює нулю. Обґрунтованістю вибіркової оцінки  $A$  параметрів  $A$  називається така вимога, яка відповідає закону великих чисел і означає, що чим більшими розглядаються вибірки, тим більше ймовірність того, що помилка оцінки не перевищує достатньо малої величини. Ефективність оцінки параметрів  $A$  пов'язана з величиною дисперсії оцінок.

В регресійному аналізі розрізняють рівняння парної (простої) та множинної (багатофакторної) регресії. Коли зв'язок із залежною змінною  $y$  здійснюється з одним видом незалежних змінних  $x$ , то рівняння регресії є найпростішим і має назву рівняння парної регресії (проста модель). Якщо залежна змінна  $y$  пов'язана з декількома видами незалежних змінних  $x$ , то така залежність має назву рівняння множинної регресії. Використання МНК для оцінки теоретичних параметрів моделі розглянутих видів рівнянь парної регресії приводить до таких систем нормальних рівнянь. Рішення наведених систем нормальних рівнянь парної регресії дозволить знайти оцінки параметрів моделі. У разі множинної регресії оцінка

параметрів моделей здійснюється за допомогою виразу , записаному у матричному вигляді.

### **1.2.5 Оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними у рівняннях парної регресії, знаходження прогнозних значень змінних, оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними у множинній регресії, значимість коефіцієнта кореляції та оцінок параметрів моделі множинної регресії**

Після вибору виду рівняння регресії та знаходження спостережень за допомогою статистичних критеріїв характеристики тісноти та значимості зв'язку зручно користуватися перетвореними виразами дисперсії для коефіцієнтів, розглядаємих залежною змінною у та незалежною змінною оцінюють за допомогою побудованої регресійної моделі (теоретично) фактичним даним.

Коефіцієнт детермінації приймає значення від 0 (відсутній лінійний зв'язок між показниками) до 1 (відсутній кореляційний зв'язок між показниками).

Коефіцієнт кореляції, або індекс кореляції, показує, наскільки значним є вплив змінної, на у.

В залежності від значення стандартної похибки робиться висновок про ступінь незміщеності оцінок параметрів.

Після встановлення тісноти зв'язку між змінними моделі характеризують значимість зв'язку, яка в кореляційному аналізі частіше всього здійснюється за допомогою критерію Фішера.

Під терміном "ступень вільності" (ступень свободи) в економетрії розуміють число, яке показує, скільки незалежних елементів інформації із змінних  $y_i$  ( $i = 1..n$ ) потрібно для розрахунку розглядаємої суми квадратів. В кореляційному аналізі існує рівняння, яке пов'язує відхилення загальної суми квадратів із залишковою сумою квадратів та сумою квадратів, що пояснює регресію.

$$S_y = S_e + S_r$$

де  $S_y$ - загальна сума квадратів відхилень

$$S_y = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$S_e$  -залишкова сума квадратів відхилень,

$$S_e = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2$$

$S_Y$ -регресійна сума квадратів відхилень

$$S_Y = \sum_{i=1}^n (\hat{y} - \bar{y})^2$$

Кожна із зазначених сум пов'язана з ступенями вільності: для загальної суми квадратів  $S_Y$  потрібно  $(n-1)$  незалежних чисел, тобто ступенів вільності; для залишкової суми квадратів  $S_e - (n - m_1)$  ступенів вільності; для регресійної суми квадратів  $S_Y - (m_1 - 1)$  ступенів вільності.

За статистичними таблицями розподілу Фішера із ступенями вільності 1,  $i$   $(n-2)$  і рівнем довіри  $(1-\alpha)$  вибирається  $F$ . Можлива помилка (рівень значимості)  $\alpha$  може прийматися 0,05 або 0,01. Це означає, що у 5% або 1% випадків ми можемо помилитися, а у 95% або 99% випадків (рівень довіри) наші висновки будуть правильними. Побудована регресійна модель відповідає реальній дійсності.

Припустимо, що ми побудували модель та оцінили параметри методом найменших квадратів. На підставі побудованої моделі можна знайти прогностні значення матриці залежних змінних, які відповідають очікуванім значенням матриці незалежних змінних. Прогноз на перспективу буває двох видів: точковий та інтервальний. Незміщена оцінка точкового прогнозу може розглядатися як точкова оцінка математичного сподівання прогнозного значення. Визначення інтервального прогнозу індивідуального значення базується на знаходженні середньоквадратичної помилки прогнозу. Тіснота зв'язку загального впливу всіх незалежних змінних на залежну змінну визначається коефіцієнтами детермінації і множинної кореляції, а також парними коефіцієнтами кореляції. Коефіцієнт детермінації характеризує, якою мірою варіація залежної змінної визначається варіацією незалежних змінних. Вигляд коефіцієнта детермінації у множинній регресії ідентичний коефіцієнту детермінації простої регресії. Оскільки введення нових незалежних змінних  $X_i$  у множинну регресію, а значить і ступенів вільності моделі, приводить до зменшення коефіцієнта детермінації, то його розрахунок повинен бути відкорегований з урахуванням ступенів вільності дисперсії залишок та загальної дисперсії. Підстановка залежностей для дисперсій у формулу для коефіцієнта детермінації дає його вираз в залежності від ступенів вільності.

Числові значення коефіцієнта детермінації лежать у діапазоні від 0 до 1. Чим ближчий він до одиниці, тим більше варіація залежної змінної визначається варіацією незалежних змінних.

Якщо виникає потреба в оціню точності моделі за рахунок кількості незалежних змінних, то це можна здійснити за допомогою нормованого (оціненого) коефіцієнта детермінації. Для нього характерна така сама зміна числового значення, як і для коефіцієнта детермінації. Парні коефіцієнти кореляції дають оцінку тісноти зв'язку між парами змінних: залежною у та незалежною  $x$  змінними ; незалежними змінними .

Фактичне значення критерію Фішера порівнюється з табличним при ступенях вільності та вибраному рівню значимості . Гіпотеза про значимість зв'язку між залежною та незалежними змінними множинної регресії підтверджується, у противному разі - відкидається.

У кореляційному аналізі для характеристики відхилень коефіцієнта кореляції, як вибіркової величини, від свого "істотного" значення вимагається перевірка його значимості за критерієм Ст'юдента.

Фактичне значення критерію зіставляється з табличним значенням , останнє обирається за статистичними таблицями на підставі прийнятого рівня значимості  $\alpha$  та розрахованого числа ступеней вільності . Якщо  $t > t_{\alpha}$ , то можна зробити висновок про значимість коефіцієнта кореляції між змінними.

У кореляційному аналізі може перевірятись також значимість оцінок параметрів моделі  $A$  із знаходженням їх довірчих інтервалів. Припустивши, що залишки  $y$  розподілені за нормальним законом, приймається, що параметри моделі  $A$  також задовольняють нормальному розподілу. Тоді перевірку гіпотези про значимість оцінок параметрів моделі проводять згідно з  $t$ -критерієм Ст'юдента . Обчислене значення критерію порівнюється з табличним при вибраному рівні значимості  $\alpha$  ступенях вільності. Якщо  $t < t_{\alpha}$ , то оцінка значимості відповідного параметру моделі є достовірною.

На підставі критерію  $t$  і стандартної помилки встановлюються довірчі інтервали для параметра  $a$  . Коли стандартні помилки параметрів не перевищують абсолютні значення цих параметрів  $a$ , то це може означати, що оцінки параметрів є незміщеними відносно їх істотних значень.

## Терміни

Матриця, визначник, система рівнянь лінійна, система рівнянь нелінійна, квадратна матриця.

## Питання для самоконтролю

- 1.Що називають матрицею?
- 2.Як визначають розмір матриці?
- 3.Яка матриця називається квадратною? прямокутною?
- 4.Яку матрицю називають матрицею-стовпцем, матрицею-рядком?
- 5.Яка матриця називається діагональною? одиничною?

6. Як отримати транспоновану матрицю?
7. Який порядок додавання та віднімання матриць одного порядку?
8. Коли можна помножити одну матрицю на іншу?
9. Який порядок множення матриць?
10. Яка характеристика матриці називається рангом? слідом?
11. Що називається визначником квадратної матриці?
12. Як визначаються алгебраїчні доповнення елемента матриці та як вони розкриваються?
13. Правило знаків для алгебраїчного доповнення?
14. Що називають мінором матриці і чим він відрізняється від алгебраїчного доповнення?
15. Яка матриця називається не виродженою?
16. Який порядок складання оберненої матриці?
17. Яка система рівнянь називається лінійною, нелінійною, однорідною?
18. Яка система рівнянь є сумісною? Несумісною, визначеною, невизначеною?
19. Які рівняння системи називаються залежними, незалежними?
20. Які дві системи рівнянь є еквівалентними?
21. Які випадки у вирішенні систем лінійних рівнянь можуть?

## Тести

Виберіть правильну відповідь:

1) Матриця це :

- а ) таблиця чисел, яка складається з  $t$  рядів і  $p$  стовпців
- б ) таблиця чисел, яка складається з  $t$  рядів
- в ) таблиця чисел, яка складається з  $p$  стовпців

2) матриця квадратна, як що:

- а)  $t=m$
- б)  $m>n$
- в)  $m<n$

3) вектором називають матрицю коли:

- а ) матриця складається з одного стовпця
- б ) матриця складається з одного рядка
- в ) матриця складається з діагоналі
- г) а, б

4) матриця називається одиничною якщо:

- а) в діагональній матриці елементами головної діагоналі є одиниці
- б) в діагональній матриці елементами головної діагоналі є нулі



в) в діагональній матриці елементами головної діагоналі є будь які числа

5) транспонована матриця якщо:

а) поміняти місцями елементи рядків на відповідні елементи стовпців

б) поміняти місцями елементи стовпців на відповідні елементи рядків

в) поміняти місцями елементи в будь яком порядку

г) а, б

**Знання:** метод найменших квадратів, передумови застосування методу найменших квадратів, властивості оцінок параметрів рівнянь регресії, види рівнянь регресії та визначення їх параметрів

**Уміння:** матриці, визначники та дії з ними, оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними у рівняннях парної регресії, знаходження прогнозних значень змінних, оцінка тісноти та значимості зв'язку між змінними у множинній регресії, значимість коефіцієнта кореляції та оцінок параметрів моделі множинної регресії

## **ТЕМА 1.3** **Порушення умов використання МНК для загальної лінійної моделі, шляхи їх виявлення та подолання**

### **1.3.1. Поняття мультиколінеарності та її ознаки**

### **1.3.2. Визначення мультиколінеарності та способи її усунення**

### **1.3.3 Поняття гомо- і гетероскедастичності, методи визначення гетероскедастичності.**

#### **1.3.1. Поняття мультиколінеарності та її ознаки**

Однією з умов використання методу найменших квадратів (МНК) для знаходження параметрів економетричної моделі є те, що пояснювальні змінні у матриці  $X$  мають бути незалежними між собою, тобто  $|X'X| \neq 0$  (четверта умова застосування МНК). Проте на практиці можуть мати місце випадки, коли пояснювальні змінні пов'язані між собою, що стає перешкодою до використання МНК.

Явище існування тісної лінійної залежності, або сильної кореляції, між двома або більше пояснювальними змінними називається мультиколінеарністю. Термін "мультиколінеарність" вперше було введено Р.Фрішем (1934 р.). Вона негативно впливає на кількісні характеристики економетричної моделі або взагалі робить неможливою її побудову.

Основні наслідки мультиколінеарності такі:

- падає точність оцінювання параметрів моделі;
- оцінки деяких параметрів моделі можуть показати порушення гіпотези про значимість зв'язку через наявність мультиколінеарності пояснювальних змінних;
- оцінки параметрів моделі стають дуже чутливими до розмірів сукупності спостережень і навіть збільшення цієї сукупності іноді може призвести до значних змін в оцінках параметрів. Головними ознаками мультиколінеарності є такі:

- наявність високих значень парних коефіцієнтів кореляції  $r_{x_i x_j} \geq 0.8$  (це означає, що пояснювальні змінні  $x_i$  та  $x_j$  пов'язані між собою лінійною залежністю та  $r_{x_i x_j} \rightarrow 1, i \neq j$ );

- значне наближення коефіцієнта кореляції до одиниці;
- наявність малих значень оцінки параметрів моделі при високому рівні коефіцієнта детермінації  $R^2$  і F-критерія;
- істотна зміна оцінок параметрів моделі при додатковому введенні до неї пояснювальної змінної та ін.

### 1.3.2. Визначення мультиколінеарності та способи її усунення

Мультиколінеарність може бути досліджена за допомогою алгоритму Фаррара-Глобера. Основу алгоритму складають три види статистичних критеріїв, за якими перевіряється мультиколінеарність:

1. Визначення критерію Пірсона  $\chi^2$  усього масиву незалежних змінних  $X$ :

$$\chi^2 = - \left[ n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5) \right] \ln |r|$$

де  $|r|$  - визначник кореляційної матриці коефіцієнтів парної регресії  $r(r_{x_j}, r_{\bar{x}_k})$

Значення цього критерію порівнюється з даними статистичних таблиць

2. Обчислення F-критерію Фішера:

$$F_k = (C_{kk} - 1) \frac{n - m_1}{m_1 - 1}$$

де  $C_{kk}$  - діагональні елементи матриці  $C = r^{-1}$ .

Фактичні значення критеріїв порівнюються з табличними

3. Обчислення t-критеріїв Ст'юдента:

$$t_{kj} = \frac{r_{kj} \sqrt{n - m_1}}{\sqrt{1 - r_{kj}^2}}$$

Фактичні значення критеріїв  $t_{kj}$  порівнюються з табличними.

Усунути мультиколінеарність в економетричній моделі можна, відкинувши одну із змінних мультиколінеарної пари. Але такий засіб часто суперечить дійсності економічних зв'язків між чинниками. Тоді можна перетворити пояснювальні змінні моделі одним із підходів: узяти відхилення від середньої; замість абсолютних значень узяти відносні; стандартизувати пояснювальні змінні; змінити специфікацію моделі.

Коли жодний з розглянутих способів не дає змоги позбутися мультиколінеарності, то Параметри моделі слід оцінювати методом головних компонент. Цей метод використовується для оцінювання параметрів моделей великого розміру. Ідея методу полягає в перетворенні множини пояснювальних змінних матриці  $X$  на нову множину попарно некорельованих змінних, серед яких перша відповідає максимально можливій дисперсії, друга - максимально можливій дисперсії у просторі, який є ортогональним до першого, і т.д. Існують також інші статистичні методи виправлення мультиколінеарності, такі як факторний аналіз, гребенева регресія.

### 1.3.3 Поняття гомо- і гетероскедастичності, методи визначення гетероскедастичності

Однією з чотирьох необхідних умов для застосування МНК при оцінюванні параметрів економетричної моделі є вимоги постійної дисперсії залишків для кожного спостереження, тобто  $M(uu') = \delta_u^2 S$ . Ця властивість незмінної дисперсії в спостереженнях називається гомоскедастичністю.

Якщо дисперсія залишків змінюється для кожного спостереження або групи спостережень, тобто  $M(uu') = \delta_u^2 S$ , то це явище називається гетероскедастичність. Тут позначено:  $\delta_u^2$  - дисперсія залишків, яка виступає невідомим параметром;  $S$  - відома симетрична додатково визначена матриця, обидва терміни гомоскедастичність та гетероскедастичність - запропоновані відомим російським вченим-статистиком А.А.Чупровим.

При наявності гетероскедастичності залишків у оцінки параметрів моделі МНК будуть незміщеними, обґрунтованими, але неефективними. При цьому формулу для обчислення стандартної помилки спостережень застосовувати не можна.

При наявності гетероскедастичності в простій економетричній моделі, тобто

$Y = a_0 + a_1 X + u$ , щоб оцінити параметри МНК, достатньо змінити специфікацію моделі. Коли будується модель множинної регресії з багатьма змінними, то таке перетворення значно ускладнюється. Тому спочатку треба одним із методів визначити наявність гетероскедастичності, а потім оцінити параметри моделі із застосуванням спеціального підходу.

Використання того чи іншого методу перевірки економетричної моделі на наявність гетероскедастичності залежить від вхідних даних. Можуть бути запропоновані чотири таких методи: критерій  $\mu$ ; параметричний тест Гольдфелда-Квандта; непараметричний тест Гольдфелда-Квандта; тест Глейсера. Розглянемо послідовність тестування наявності гетероскедастичності.

Критерій  $\mu$ . Цей метод використовується при великій кількості сукупності спостережень  $n$ , яких може бути удвічі більше, ніж оцінюваних параметрів. Вхідні дані залежної змінної  $Y$  розбиваються на  $k$  груп з номерами  $r=1 \dots k$ . За кожною групою спостережень розраховується сума квадратів відхилень:

$$S_r = \sum_{i=1}^k (y_{ir} - \bar{y}_r)^2$$

Обчислюється сума квадратів відхилень у цілому для сукупності спостережень

$$\sum_{r=1}^k S_r = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{i=1}^k (y_{ir} - \bar{y}_r)^2$$

де  $n_r$  - кількість спостережень у кожній групі  $r$ .

Розраховується параметр  $\lambda$ :

$$\lambda = \prod_{i=1}^k \left( \frac{S_r}{n_r} \right)^{n_r/2} / \left( \frac{\sum_{r=1}^k S_r}{n} \right)^{n/2}$$

де  $\Pi$ - прибуток  $k$  виразів за цією позначкою. Обчислюється критерій

$$\mu = -2 \ln \lambda$$

який наближено відповідає розподілу  $\chi^2$  при ступені вільності  $(k-1)$

та рівні довіри  $(1-\alpha)$ . Якщо  $\mu > \chi^2$ , то у розглядаємій множині спостережень має місце гетероскедастичність.

## Терміни

Гетероскедастичність, мультиколінеарність, алгоритм Фаррара-Глобера

## Питання для самоконтролю

1. Як впливає явище гетероскедастичності на оцінку параметрів моделі?
2. Які існують методи визначення гетероскедастичності?
3. Як перевіряються гетероскедастичність за критерієм [F]?
4. Як і у яких випадках застосовується параметричний тест Гольдфельда-Квандта?
5. У чому сутність непараметричного тесту?
6. Яка сутність тесту Глейсера?
7. У яких випадках використовується УМНК (метод Ейткена)?
8. Що означає мультиколінеарність змінних?

9. Які наслідки мультиколінеарності?
10. Ознаки мультиколінеарності?
11. Які статичні критерії використовуються для виявлення мультиколінеарності?
12. Дати коротку характеристику алгоритму Фаррара-Глобера?
13. Які існують способи для усунення мультиколінеарності?
14. Для чого призначений метод головних компонент?
15. В чому полягає ідея методу?
16. Дати означення гомоскедастичності і гетероскедастичності?

**Знання:** Обчислення F-критерія Фішера, Критерій  $\mu$ , Визначення критерію Пірсона, Обчислення t-критеріїв Ст'юдента

**Уміння:** Визначення мультиколінеарності та способи її усунення, знаходження параметрів економетричної моделі

## **Модуль2 Моделі розподіленого лагу, системи одночасних структурних рівнянь.**

### **ТЕМА 2.1. Моделі розподіленого лагу.**

#### **2.1.1.Поняття лагу та лагових змінних. Види лагових моделей**

#### **2.1.2.Взаємна кореляційна функція. Лаги залежної та незалежних змінних.**

#### **2.1.1 Поняття лагу та лагових змінних. Види лагових моделей**

В ряді економетричних моделей з використанням динамічних рідів, які описують економічні процеси, типовим є проявлення впливу деякого фактору (або факторів) на результативний показник через якийсь період часу. Таке явище називається лагом (запізненням). Наприклад, у динамічних моделях необхідно враховувати лаг при встановленні зв'язку між обсягом продукції і капітальними вкладеннями, між затратами виробничих ресурсів і обсягом виробництва, між доходами та витратами і т. д. Лаг може проявлятися не лише через певний період часу, а й протягом кількох часових періодів. У такому разі маємо справу з економетричною моделлю розподіленого лагу.

Кількісне вимірювання взаємозв'язку між економетричними показниками з використанням динамічної моделі розподіленого лагу може визначатися такою залежністю:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_{t-r} + u_t$$

де  $a_j$  - параметри моделі розподіленого лагу, або коефіцієнти лагу; послідовність коефіцієнтів  $a_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) називається структурою лага;  $x_{t-r}$  - пояснювальна лагова змінна;  $t$  - час;  $r$  -період зрушення (часовий лаг);  $u_t$  - залишки, які розподілені за нормальним законом, тобто мають нульове математичне сподівання і постійну дисперсію.

Моделі розподіленого лагу задовільно описують економічні процеси лише в умовах відносної стабільності, в яких ці процеси відбуваються: стабільність відповідних індексів, процентних ставок за кредити, норм амортизації, термінів будівництва, структури ресурсів і т. ін. Така стабільність не завжди спостерігається для порівняно довгих періодів часу. Ця причина підводить до необхідності побудови узагальненої моделі розподіленого лагу, яка містить не тільки лагові змінні, а й пояснювальні змінні характеристики поточних умов функціонування економічних систем:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_{t-r} + \sum_{s=1}^m b_s z_{is} + u_t$$

де  $z_{is}$  - пояснювальні змінні поточних умов;  $b_s$  - коефіцієнти цих пояснювальних змінних.

### 2.1.2. Взаємна кореляційна функція. Лаги залежної та незалежних змінних

Для обґрунтування лагу (або лагів) пояснювальних змінних в динамічних моделях доцільно використовувати взаємну кореляційну функцію. Вона характеризує тісноту зв'язку кожного елемента залежної функції  $y_t$  з елементом незалежної змінної  $x_t$ , зсунутих на часовий лаг  $\tau$  один відносно другого. Значення взаємної кореляційної функції  $r_{\tau}$  лежать у діапазоні від -1 до 1. Найбільше значення  $|r_{\tau}|$  (найближче до одиниці) визначає часовий лаг. Якщо серед ряду значень  $r_{\tau}$  є кілька наближених до одиниці, то це означає, що запізнення впливу змінної  $x_t$  відбувається протягом певного періоду часу і в результаті маємо кілька часових лагів для взаємопов'язаних часових рядів. Знайшовши часові лаги для визначення взаємозв'язку між економічними показниками, можна побудувати економетричну модель розподіленого лагу.

Наявність мультиколінеарності між лаговими змінними в динамічній моделі ускладнює її побудову. Щоб звільнитись від мультиколінеарності необхідно ввести такі коефіцієнти при лагових змінних, які б мали однаковий знак і для яких можна було знайти суму:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = w; \quad w_j = \frac{a_j}{w} \quad \sum_{j=0}^{\infty} w_j = 1 \quad 0 \leq w_j \leq 1$$

де  $w$  - скінчене число;  $w_j$  - нормовані коефіцієнти лагу. Тоді економетрична модель запишеться у вигляді

$$y_t = w \sum_{j=0}^{\infty} w_j x_{t-r} + u_t$$

Припущення, що зробив Л.Койк, приводять до значних спрощень.



## **Терміни**

розподіленого лагу, Кількісне вимірювання взаємозв'язку, кореляційна функція

## **Питання для самоконтролю**

1. Дати означення узагальненої моделі розподіленого лагу?
2. З якою метою в динамічних моделях використовується взаємна кореляційна функція?
3. Що потрібно робити, щоб звільнитись від мультиколінеарності між лаговими змінними?
4. Яку схему розподіленого лагу запропонував Койк?
5. Які гіпотези відносно залишків можуть мати місце при оцінці параметрів лагової моделі?
6. Перерахувати методи оцінки, параметрів моделі розподіленого лагу?

**Знання:** поняття лагу та лагових змінних. Види лагових моделей, Взаємна кореляційна функція. Лаги залежної та незалежних змінних

**Уміння:** визначати залежність між економетричними показниками, змінні характеристики поточних умов змінні характеристики поточних умов

## ТЕМА 2.2. Системи одночасних структурних рівнянь

### 2.2.1 Системи рівнянь при побудові економетричних моделей

#### 2.2.2 Ідентифікація моделі. Рекурсивні системи

### 2.2.1 Системи рівнянь при побудові економетричних моделей

Економічні процеси і явища характеризуються складною системою зв'язків між чинниками. Ці зв'язки в ряді випадків слід описувати моделями, які побудовані на основі системи рівнянь. Оскільки найчастіше вони характеризують економічні процеси і явища, які відбуваються одночасно; то всі ці рівняння мають спільний зв'язок і називаються системою одночасних (симультивних) структурних рівнянь. Наведемо два приклади таких економетричних моделей, які використовуються для кількісного взаємозв'язку показників на макро- і мікрорівні.

Так, залежність обсягу національного доходу від основних виробничих фондів, робочої сили і матеріальних ресурсів відповідає економетричній моделі на основі системи Одночасних структурних рівнянь, яку наведемо у загальній формі:

$$\begin{cases} X_t = f(F_t, L_t, u_t) \\ M_t = f(X_t, v_t) \\ Y_t = X_t - M_t \end{cases}$$

де  $X_t$  - випуск продукції;  $F_t$  - основні виробничі фонди;  $L_t$  - робоча сила;  $M_t$  - матеріальні ресурси;  $Y_t$  - валовий внутрішній продукт;  $u_t, v_t$  - залишки;  $t$  - період часу.

Змінні  $X_t$  і  $M_t$ , виражаються через параметри  $a_i$  та  $b_i$ , які підлягають знаходженню. Взаємозв'язок темпів зниження собівартості продукції на підприємстві з темпами росту продуктивності праці та підвищенням заробітної плати можна визначити на основі економетричної моделі, яка також описується системою одночасних структурних рівнянь:

$$\begin{cases} T_c = f(T_n, T_z, u) \\ T_c = k_1 T_z \end{cases}$$

де  $T_c$  - індекс зниження собівартості продукції;  $T_n$  - темпи росту продуктивності праці;  $T_z$  - темпи росту заробітної плати;  $u$  - залишки;  $K_1$  - рівень співвідношення між темпами зміни собівартості продукції і заробітної плати.

Змінні  $T_n$  і  $T_z$  виражаються через розшукувані параметри. Модель містить два рівняння, одне з них є регресійними, а друге - тотожність. Моделі найпростіші. Вони можуть бути доповненими лаговими змінними. Узагальнюючи розглянуті моделі та розповсюджуючи їх на інші приклади, можна сказати, що взаємозв'язки між змінними можуть бути стохастичними і описуватися регресійними рівняннями та детермінованими і відповідати тотожностям.

Системи одночасних структурних рівнянь найчастіше включають лінійні рівняння, а не лінійність зв'язків здебільшого апроксимується лінійними співвідношеннями. Динаміка зв'язків між показниками враховується за допомогою часових лагів або лагових змінних.

Система одночасних рівнянь у матричній формі може бути записана у вигляді:

$$Y = AY + BX + u$$

де  $Y$  - матриця (вектор) залежних змінних;  $X$  - матриця незалежних змінних;  $u$  - матриця залишків;  $A$  - матриця коефіцієнтів при змінних  $Y$  розміром  $k \times k$ ;  $B$  - матриця коефіцієнтів при змінних  $X$  розміром  $k \times m$ .

Економетрична модель відображає структуру зв'язків між змінними і тому називається структурною формою економетричної моделі.

Якщо кожне рівняння системи розв'язати відносно  $Y$ , то одержимо зведену форму моделі, яка має вигляд:

$$Y = RX + v,$$

де  $v$  - лінійна комбінація залишків  $u$ ;  $R$  - матриця оцінок параметрів, якої за допомогою одиничної матриці  $E$  можна надати вид

$$R = (E - A)^{-1} B.$$

До оцінок параметрів моделей може бути застосований МНК, який приводить до зміщення оцінок параметрів.

### 2.2.2 Ідентифікація моделі. Рекурсивні системи

Чисельна оцінка параметрів моделі на основі одночасних структурних рівнянь пов'язана з проблемою ідентифікації. Якщо ніяка лінійна комбінація рівнянь структурної форми не може привести до рівняння, що має ті самі змінні, як і деяке рівняння в структурній формі, то модель буде ідентифікованою.

Необхідна умова ідентифікації системи - виконання такої нерівності для кожного рівня моделі :

$$k_s - 1 \leq m - m_s$$

де  $k_s$  - кількість ендогенних змінних у  $s$ -му рівнянні структурної форми;  $m$  - загальна кількість екзогенних змінних моделі;  $m_s$  - кількість екзогенних змінних, які не входять в  $s$ -те рівняння структурної форми моделі.

Зауважимо, що змінні, які містяться в правій частині системи рівнянь є наперед заданими (вхідними) і називаються екзогенними. Змінні, які знаходяться в лівій частині рівнянь і обчислюються в результаті реалізації моделі, називаються ендегенними.

Для ідентифікації моделей зведена форма визначається однозначно.

Якщо співвідношення виконується як рівність, то відповідне рівняння є точно ідентифікованим, а коли як нерівність, то це рівняння є над ідентифікованим.

Коли в структурі форми моделі матриця  $A$  при екзогенній змінній  $U$  є трикутною, а залишки характеризуються діагональною матрицею, то така система рівнянь називається рекурсивною. Для знаходження її рішення відносно невідомих параметрів застосовувати МНК.

### **Терміни**

симультаивні, структурні рівняння, індекс зниження собівартості продукції, вектор, ідентифікації системи, екзогенні і ендегенні змінні

### **Питання для самоконтролю**

- 1.Що називають системою одночасних структурних рівнянь?
- 2.Навести приклади економетричних моделей, які побудовані на основі системи рівнянь?
- 3.Записати в загальному вигляді структурну форму моделі на основі одночасних рівнянь. Пояснити її структуру?
- 4.Що означає зведена форма моделі? Як її отримати?
- 5.Які змінні моделі називають екзогенними, ендегенними?
- 6.Записати умову ідентифікованості системи рівнянь?
- 7.Яка система рівнянь називається точно ідентифікованою?
- 8.Яка система рівнянь називається над ідентифікованою?
- 9.Дати визначення рекурсивних систем?
- 10.Які методи використовуються для оцінки параметрів моделей на основі системи рівнянь?

**Знання:** Системи рівнянь при побудові економетричних моделей, Ідентифікація моделі. Рекурсивні системи

**Уміння:** Узагальнюючи розглянуті моделі, чисельна оцінка параметрів моделі

## ТЕМА 2.3. Економетричні моделі з якісними пояснювальними змінними.

### 2.3.1. Якісні змінні в економетричних моделях.

### 2.3.2 Регресійні моделі з кількісними та якісними змінними.

#### 2.3.1. Якісні змінні в економетричних моделях

При побудові економетричних моделей зустрічаються випадки, коли поряд з факторами, які набувають кількісних значень, мають місце якісні фактори (ознаки). Прикладами якісних факторів можуть бути: стать, сімейний стан, освіта, якість продукції, зміни в економічній політиці, соціологічні опитування, релігія, страйки, війни тощо. Такі фактори в регресійних моделях характеризуються якісними змінними, або атрибутивними, які в ролі пояснювальних змінних впливають на залежну змінну. Потрібно вміти вводити якісні змінні у регресійні моделі, оцінювати їх параметри та аналізувати отримані результати. Часто якісні змінні є бінарними: вони отримують "значення 1" при наявності певної якості і "значення 0" при їх відсутності. Такі змінні називають даммі-змінними.

Особливістю якісних змінних є те, що вони класифікують інформацію за моделлю на декілька підгруп (категорій), що базуються на атрибутивних ознаках, і окремо працюють з кожною підгрупою. Взаємозв'язки між атрибутивними ознаками при парної регресії можуть бути проаналізовані на підставі таблиць взаємної спряженості, де можуть наводитися частоти розподілу  $f_{ij}$  - якісної ознаки за підгрупами. За даними таблиць дається оцінка тісноти зв'язку між змінними за показниками: відхиленню  $\chi^2$  Пірсона; коефіцієнту взаємної спряженості Чупрова; коефіцієнту контингенції (асоціації). Пропорційні теоретичні частоти показників розраховуються за формулою:

$$F_{ij} = \frac{f_{i0} \cdot f_{0j}}{n}$$

де  $f_{i0}$  - підсумкові частоти за ознакою  $x$ ;  $f_{0j}$  - підсумкові частоти за ознакою  $y$ ;  $n$  - обсяг сукупності спостережень.

Абсолютну величину відхилень частот  $f_{ij}$  від  $F_{ij}$  характеризує квадратична спряженість  $\chi^2$  Пірсона.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{(f_{ij} - F_{ij})^2}{F_{ij}}$$

Фактичне значення  $x^2$  порівнюється з табличним. Останнє вибирається із статистичних таблиць  $x^2$  в залежності від рівня значимості  $\alpha$  та числа ступенів вільності  $k = (m_x - 1)(m_y - 1)$ , де  $m_x$  - число груп за ознакою  $x$ ,  $m_y$  - число груп за ознакою  $y$ .

Коефіцієнт взаємної спряженості найчастіше обчислюється за формулами Чупрова

$$C = \sqrt{\frac{x^2}{n\sqrt{(m_x - 1)(m_y - 1)}}$$

або Крамера

$$C = \sqrt{\frac{x^2}{n\sqrt{(m_{\min} - 1)}}$$

де  $m_{\min}$  - мінімальне число груп .

При  $0,3 < C < 1$  існує тісний зв'язок між ознаками. В разі наявності 4-клітинної таблиці взаємної спів залежності розрахований коефіцієнт  $C$  називається коефіцієнтом контингенції або асоціації. Цей коефіцієнт зв'язаний з  $x^2$  функціонально:

$$x^2 = nC^2$$

Dummy-змінні не обов'язково приймають значення (0,1). Пара (0,1) може трансформуватись у будь-яку іншу пару лінійним перетворенням  $y = a + bz$  ( $b \neq 0$ ), де  $a$  та  $b$  - константи, а  $z = 1$  або 0.

Dummy -змінні можуть використовуватись у регресійних моделях у чистому вигляді або поряд з кількісними змінними. Моделі тільки з якісними змінними називаються АОV-моделями. Якщо в економетричних моделях є випадок змішаних факторів - якісних і кількісних, то такі моделі називають АCOV-моделями.

### 2.3.2 Регресійні моделі з кількісними та якісними змінними

Найпростіша лінійна регресійна модель тільки з якісними змінними має вид такої парної регресії (АОV-модель):

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_i + \varepsilon_i$$

Де  $Y_i$  - залежна змінна;  $d_i$  - Dummy -змінна, яка приймає значення 0 або 1;  $\alpha_0$  і  $\alpha_1$  - параметри, які характеризують математичне сподівання залежної змінної в залежності від якісних ознак у групах таких ознак:

$M[y_i / (d_i = 1)] = \alpha_0 + \alpha_1$  або  $M[y_i / (d_i = 0)] = \alpha_0 + \varepsilon_1$  залишки (випадкові величини).

Базуючись на реальних даних, проводяться розрахунки за моделлю .  
Більш поширеними моделями є такі, які містять у собі сукупність кількісних і якісних пояснювальних змінних. Найпростіша АCOV-модель описується таким рівнянням парної регресії:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 d_{1i} + \beta_{1i} x_{1i} + \varepsilon_i$$

де  $d_{1i}$  - думмі-змінна (0,1);  $x_{1i}$  - кількісна пояснювальна змінна;  $\alpha_0$  і  $\alpha_1$  характеристики математичного сподівання в залежності від якісних ознак.

Кількісний параметр  $\beta_{1i}$  розраховується за допомогою МНК.

Введення до регресії думмі -змінних має свої особливості, які полягають у такому: одна якісна змінна відокремлює дві атрибутивні ознаки; під час інтерпретації результатів моделей думмі-змінними важливо знати, які групи позначались 1, а які 0; група, позначена 0 (нулем), розглядається як базова категорія; коефіцієнт при думмі-змінній  $d_{1i}$  називається диференційним коефіцієнтом перетину і показує, наскільки значення першої групи відрізняється від значення базової категорії (групи).

У випадку порівняння двох або більше регресійних моделей з якісними змінними їх відмінність може бути в перетинах, нахилах або в обох випадках. У загальній методології знаходження відмінностей таких моделей може бути використаний Chow-тест (Чау-тест) або підхід з використанням думмі -змінної. Chow-тест заснований на використанні F-критерію Фішера у порівнянні, а підхід з використанням думмі -змінної - на аналізі параметрів моделей, які характеризують якісні ознаки за групами спостережень.

Економічні процеси дуже часто підпорядковані сезонним коливанням: різдвяний розпродаж товарів, попит на морозиво і напої влітку і т.д. В економічному аналізі інколи виникає проблема вилучення сезонних коливань з метою виявлення тенденції. Одним з методів вилучення сезонних коливань є використання думмі -змінних в регресійних моделях.

## Терміни

якісні фактори, відхилення  $\chi^2$  Пірсона, Коефіцієнт взаємної спряженості, думмі -змінни, Chow-тест, Коефіцієнт взаємної спряженості

## Питання для самоконтролю

1. Навести приклад якісних змінних в економетричних моделях?

2. Які якісні змінні називаються dummy-змінними?
3. Яку особливість мають якісні змінні?
4. Яка інформація наводиться у таблицях взаємної спів залежності?
5. За якими показниками оцінюється тіснота зв'язку між змінними на підставі таблиць взаємної спів залежності?
6. Як розраховуються пропорційні теоретичні частоти якісних показників?
7. Що характеризує спряженість  $\chi^2$  Пірсона для якісних показників?
8. Яка умова тісноти зв'язку для  $\chi^2$ ?

**Знання:** Якісні змінні в економетричних моделях, Регресійні моделі з кількісними та якісними змінними

**Уміння:** розраховувати пропорційні теоретичні частоти показників, обчислювати коефіцієнт взаємної спряженості, розраховувати кількісний параметр  $\beta_i$ .



**ПЕРЕЛІК  
ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

**Основна**

1. Грубер Й. Економетрія. Вступ до множинної регресії та економетрії: Навчальний посібник.-К.:Нічлава, 1998.-384с.
2. Економетрія: Опорний конспект лекцій / Укл. О.Є.Лугінін. – Херсон: МІБ, 2001.-106с.
3. Кулинич О.І. Економетрія: Навчальний посібник. – Хмельницький: Поділля, 1997.-115с.
4. Кулинич О.І. Економетрія: Практикум. – Хмельницький: Поділля, 1998.-157с.
5. Лугінін О.Є., Білоусова С.В., Білоусов О.М. Економетрія: Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 252с.

**Додаткова**

1. Лугинин О.Е., Белоусова С.Я., Львов М.С. Экономика-математические методы и модели: Учебное пособие. – Херсон: МИБ, 1998.-212с.
2. Лук'яненко І.Г., Красикова Л. І. Економетрика: Підручник.-К: Товариство "Знання" КОО, 1998.-494с.
- 3 Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: Підручник.-К.: КНЕУ, 2000 -296с.
4. Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Економетрія: Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни.-К.: КНЕУ, 2001 .-192с.

Навчальне електронне видання

*Арестов Сергій Вікторович*

Моделі та методи економетрики

Конспект лекцій

**Видавець і виготовлювач**

Одеський державний екологічний університет

вул. Львівська, 15, м. Одеса, 65016

тел./факс: (0482) 32-67-35

E-mail: [info@odeku.edu.ua](mailto:info@odeku.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

ДК № 5242 від 08.11.2016