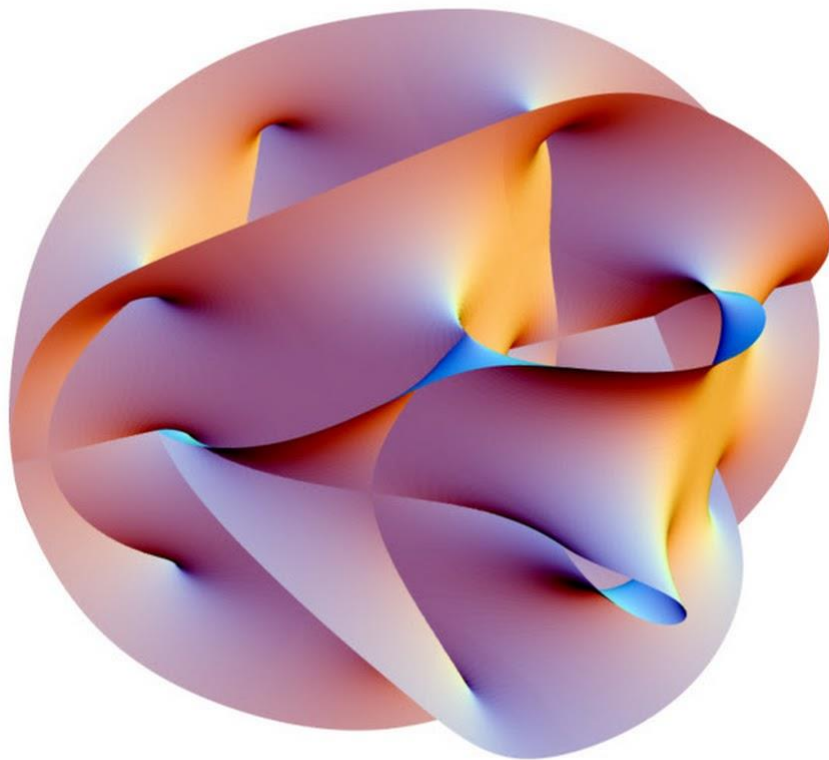


О.І.ГЕРАСИМОВ

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ І ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ В
ЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Підручник



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.І.ГЕРАСИМОВ

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ І ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ В
ЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Підручник

Одеса
Одеський державний екологічний університет
2024

УДК 53.01, 517.95

Г 37

Герасимов О.І

Г 37 Методи математичної і теоретичної фізики в екологічних дослідженнях: підручник.
Одеса: Одеський державний екологічний університет, 2024. 94 с.
ISBN 978-966-186-297-4

Матеріал підручника спрямований на формування у здобувачів вищої освіти не фізико-математичного профілю уявлень про методи та можливості математичної і теоретичної фізики у прикладних дослідженнях, і зокрема в технологіях та інженерії спрямованих на параметризацію, захист та збереження навколишнього середовища.

Підручник зорієнтовано на формування навичок та компетенцій здобувачів щодо використання могутньої бази теоретичної і математичної фізики для розбудови теоретичної бази зокрема технологій захисту довкілля. Підручник може бути корисним здобувачам вищої освіти всіх рівнів навчання (бакалавр, магістр, доктор філософії), а також співробітникам і викладачам в галузі Технологій захисту навколишнього середовища та суміжних міждисциплінарних галузей.

УДК 53.01, 517.95

Рецензенти :

Завідувач кафедри медичної і біологічної фізики Київського національного медичного університету ім. Богомольця (м.Київ), д.ф-м.н., проф., Член-кор. Академії педагогічних наук України, Чалий О.В

Професор кафедри фізики Одеського Національного університету ім. І.І. Мечнікова, д.ф-м.н. Калінчак В.В.

Професор кафедри автоматизованих систем моніторингу навколишнього середовища та інформатики Одеського державного екологічного університету, д.т.н. Мещеряков В.В

*Затверджено вченою радою Одеського державного екологічного університету
Міністерства освіти і науки України як підручник для здобувачів вищої освіти за
спеціальностями Технології захисту навколишнього середовища
(протокол №3 від 25.04.2024 р.)*

ISBN 978-966-186-297-4

© О.І. Герасимов, 2024

© Одеський державний екологічний університет, 2024

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| ВСТУП | 6 |
| 1 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ | 8 |
| 1.1 Скалярне поле. Поверхні рівня. Похідна за напрямком. Градієнт | 8 |
| 1.2 Оператори Гамільтона та Лапласа | 12 |
| 1.3 Векторне поле. Векторні функції. Векторні лінії. Векторна функція скалярного аргументу. | 13 |
| 1.4 Векторне поле | 14 |
| 1.5 Похідна векторного поля за напрямком | 15 |
| 1.6 Диференціальні характеристики скалярного і векторні поля | 15 |
| 1.7 Елементи тензорного обчислення | 16 |
| 1.8 Скалярний та векторний інваріанти. Тензор похідної векторного поля | 18 |
| 1.9 Потік векторного поля. Теорема Остроградського-Гаусса | 19 |
| 1.10 Вектор циркуляції поля. Теорема Стокса | 21 |
| 1.11 Контрольні запитання | 22 |
| 2 КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ | 24 |
| 2.1 Диференціальні рівняння у частинних похідних | 24 |
| 2.2 Приклади рівнянь математичної фізики | 25 |
| 3 ДЕЯКІ ТИПОВІ ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ | 27 |
| 3.1 Рівняння коливань струни | 27 |
| 3.2 Класифікація задач математичної фізики. Постановка задач математичної фізики, умова коректності | 31 |
| 3.3 Крайові задачі | 32 |
| 3.4 Контрольні запитання | 33 |
| 4 ТЕОРЕТИЧНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ | 35 |
| 4.1 Розв'язання задачі Коші про вільні коливання струни методом Даламбера | 35 |
| 4.2 Змішана задача про коливання струни із закріпленими кінцями методом Фур'є | 38 |
| 4.3 Стоячі хвилі, їхня суперпозиція | 42 |

| | |
|---|----|
| 5 ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ..... | 45 |
| 5.1 Задачі Коши для одновимірного рівняння теплопровідності..... | 45 |
| 5.2 Фундаментальне рішення рівняння теплопровідності та його фізичний зміст | 49 |
| 6 ФУНКЦІЯ ГРИНА. СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ | 51 |
| 6.1 Рівняння Лапласа. Гармонічні функції. Рішення рівняння Лапласа у сферичних координатах методом Фур'є. Поліноми Лежандра. Поняття про сферичні та кульові функції..... | 51 |
| 6.2 Задача Діріхле..... | 55 |
| 6.3 Рівняння Лапласа у циліндричних координатах. Поняття про функції Бесселя..... | 56 |
| 6.4 Метод функцій Гріна | 57 |
| 6.5 Спеціальні функції математичної фізики | 57 |
| 6.6 Контрольні запитання..... | 58 |
| 7 ДЕЯКІ СТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ..... | 60 |
| 7.1 Стаціонарний розподіл температури у шарі. Тепловий опір. | 60 |
| 7.2 Неоднорідна стінка із шаровою структурою. Неоднорідні граничні умови 1 роду | 62 |
| 7.3 Неоднорідні граничні умови 3 роду для шарової стінки..... | 64 |
| 7.4 Завдання та запитання | 65 |
| 7.5. Неоднорідні змішані граничні умови 4 роду для шарової стінки..... | 65 |
| 7.6 Завдання та запитання | 66 |
| 7.7 Стаціонарна теплопровідність радіатора..... | 68 |
| 7.8 Завдання та запитання | 70 |
| 7.9 Тривимірні стаціонарні рівняння теплових, хвильових та дифузійних процесів | 70 |
| 7.10 Теплообмін через циліндричну стінку..... | 72 |
| 7.11 Завдання та запитання | 74 |
| 7.12 Теплообмін крізь кульову стінку..... | 75 |
| 7.13 Завдання та запитання | 77 |
| 7.14 Теплообмін через випромінювання..... | 77 |
| 7.15 Завдання та запитання | 82 |
| 7.16 Метод функції джерела для рівняння Лапласа | 82 |
| 7.17 Завдання та запитання | 85 |
| 7.18 Стаціонарні рівняння гідродинаміки – гідростатика, рівняння Бернуллі..... | 85 |

| | |
|----------------------------------|----|
| 7.19 Завдання та запитання | 88 |
| ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА | 89 |
| ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЗЧИК..... | 90 |
| ДОДАТКИ..... | 91 |

ВСТУП

Математична фізика – наука, яка розробляє і вирішує математичні моделі, що описують основні закономірності досліджуваних явищ і лежать у основі процесів. Математична та теоретична фізика включають наступні етапи: 1. Формулювання задачі (виведення рівнянь, визначення початкових та граничних умов); 2. Класифікація отриманих рівнянь та визначення коректності задачі; 3. Вибір та побудова аналітичних методів вирішення задачі; 4. Вибір та побудова чисельних методів та фізична (або інша) інтерпретація змісту та розв’язків задачі.

Цілями підручника, поряд з ознайомленням з фактичним матеріалом, є формування навичок: 1. Критичного мислення; 2. Творчого підходу; 3. Асоціативного мислення; 4. Вміння адекватно ставити та вирішувати комплексні завдання.

Матеріал підручника присвячено формуванню початкових уявлень про диференціальні рівняння (ДК) із частинними похідними (ЧП), тобто. рівняннях, що містять невідому функцію кількох змінних та її частинні похідні. ДУ з ЧП знаходять широке застосування, зокрема (але не тільки!), в різних розділах класичної та квантової фізики: квантова механіка, електродинаміка, термодинаміка, теорія тепло і масопереносу та ін., включаючи інженерні та технологічні складові, а також у науках про Землю, прикладній екології, біології, медицині, соціології, економіці та багатьох інших. Тому, такі рівняння теорії ДК з ЧП об’єднуються під загальною назвою рівнянь математичної фізики а поле цих застосувань нерозривно зв’язане с задачами теоретичної фізики. Вони, як правило, мають безліч рішень.

При дослідженні будь-якої, скажімо, конкретної фізичної чи прикладної задачі необхідно з цих рішень вибрати ті, що задовольняють деяким додатковим умовам, які впливають з її сенсу (фізичного, прикладного, або іншого). Отже, завдання математичної фізики, які спрямовані на створення теоретичних моделей явищ полягають у пошуку рішень рівнянь у частинних похідних, що задовольняють деяким додатковим умовам. Такими додатковими умовами найчастіше є так звані граничні умови, тобто, умови, задані на границях об’єкта, що аналізується, чи середовища, і початкові умови, які задаються в визначений момент часу,

з якого починається вивчення даного фізичного явища. Сукупність граничних та початкових умов називають крайовими умовами задачі.

Крайова задача рівняння математичної фізики вважається коректною, якщо розв'язання задачі, що задовольняє крайовим умовам, існує, є однозначним та стійким, тобто, малі зміни будь-якого з вихідних даних завдання викликають відповідно малу зміну рішення. Це важливо, оскільки реальні дані, щодо прикладного застосування часто отримані з експерименту (досвіду) і, таким чином, можуть містити певну похибку. Саме з цієї причини необхідно, щоб малі похибки в початкових умовах, які формуються на підставі даних про явище, призводили до малих змін у вирішенні відповідної крайової задачі.

При постановці та вирішенні крайових задач математичної фізики широко використовуються категорії та методи теоретичної фізики, що пройшли апробацію при розробці теорій фізичних процесів, які лежать в основі численних явищ, що спостерігаються. Дивно, але факт, що багато типових для фізичних процесів та явищ закономірностей виявлено в процесах нефізичного походження в науках про Землю, в екології, біології, та медицині та багатьох інших.

Матеріал підручника структурований таким чином, щоб послідовно сформулювати у читача, який не є професійним фізиком або математиком, уявлення про класифікацію та зміст основних методів математичної фізики та послідовно підійти до використання ідей загальної та теоретичної фізики для коректної постановки адекватних крайових завдань та їх аналітичного рішення. Підручник був написаний та адресований здобувачам, які проходять підготовку за спеціальністю Технології захисту навколишнього середовища та проходить апробацію в цій якості.

1 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

1.1 Скалярне поле. Поверхні рівня. Похідна за напрямком. Градієнт

Якщо у просторі, або будь-якій частині простору кожній точці M поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$, то кажуть, що встановлено скалярне поле $u = u(M)$.

Укажемо на такі приклади скалярних полів фізичних величин, як: поле густини, поле концентрацій, поле тиску, поле електростатичного потенціалу, поле температури нагрітого тіла та багато інших.

У загальному випадку скалярне поле є функцією трьох просторових координат і часу $u = u(x, y, z, t)$. У разі, коли поле $u = u(M)$ залежить від часу, його називають стаціонарним. Часто для спрощення при вивченні основ математичної теорії поля розглядають лише стаціонарні поля.

Скалярні поля можуть бути зображені геометрично за допомогою поверхонь рівня.

Поверхнею рівня скалярного поля $u = u(M)$ називається безліч точок простору, в яких скалярна функція $u(M)$, має деяке постійне значення.

Рівняння поверхні рівня має вигляд: $u(x, y, z) = C$ де $C = const$. У разі двовимірного поля $u = u(x, y)$ поверхні рівня вироджуються у лінії рівня.

Прикладами поверхонь рівня є, зокрема, екіпотенційні поверхні поля точкового заряду, ізотерми поля температури $T = const$, ізобари поля $p = const$ та ін.

Нехай у певній області простору задано скалярне поле $u = u(M)$. Для кількісної характеристики швидкості зміни поля у околі його довільної точки вводять поняття похідної за напрямком.

Нехай скалярне поле $u = u(M)$ має у точці M_0 значення $u(M_0) = u_0$ (рис 1.1), а в точці M_1 , що знаходиться на відстані Δl в напрямку \vec{l} — значення $u_1 = u_0 + \Delta u$.

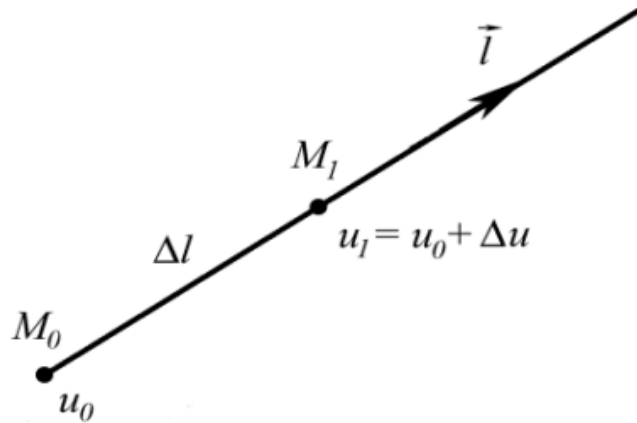


Рисунок 1.1 – Визначення похідної за напрямом

Похідною скалярного поля $u = u(M)$ у точці M_1 , у напрямку \vec{l} називається границя відношення збільшення скалярного поля при зміщенні вздовж \vec{l} до величини цього зсуву, коли останній прямує до нуля.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M_0)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} \quad (1.1)$$

На відміну від звичайної похідної значення похідної за напрямом залежить від вибору напрямку. Знайдемо алгоритм, що дозволяє знайти похідну за напрямом у точці M_0 , якщо задані скалярне поле та деякий напрямок.

Проведемо через лінію рівня площину, що відповідає значенню $u_0 = u(M_0)$. Побудуємо також лінію рівня, що відповідає деякому більшому за $u_0 = u(M_0)$ значенню поля (рис 1.2)

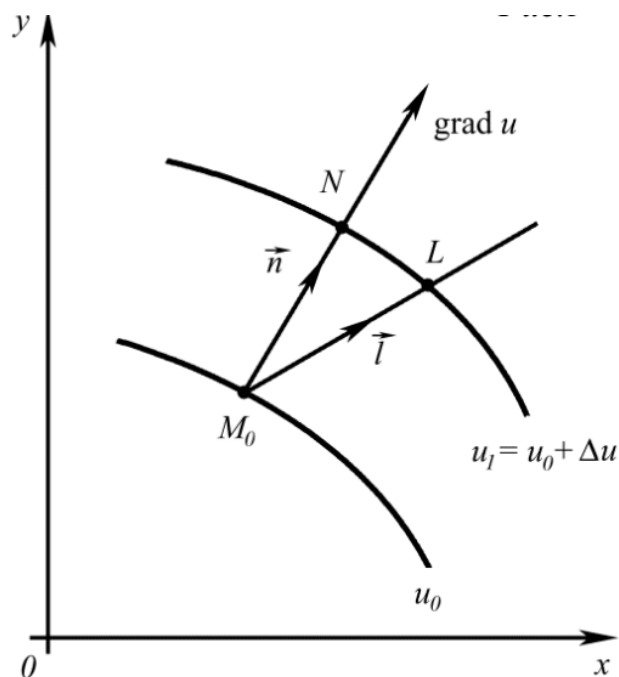


Рисунок 1.2 – Лінія рівня

Знайдемо похідні за напрямком нормалі до лінії рівня \vec{n} , та у довільному напрямку \vec{l} . За визначенням похідної за напрямком: з аналізу (Рис.1.2) та умов $M_0N \rightarrow 0$ $M_0L \rightarrow 0$ випливає, що $M_0N = M_0L \cdot \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{l}})$. З огляду на вищевказане можна показати, що:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial n} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{l}}), \quad (1.2)$$

З аналізу виразу (1.2) випливає, що в будь-якій точці поля похідна у напрямку нормалі до лінії рівня більше похідної за будь-яким іншим напрямком. Внаслідок чого, напрямок нормалі визначає напрямок якнайшвидшого зростання поля. Цей напрямок виділяють, і пов'язують із ним поняття градієнта скалярного поля.

Градієнтом скалярного поля $u = u(M)$ у точці M_0 називають вектор, спрямований у бік якнайшвидшого зростання скалярного поля, модуль якого дорівнює похідній скалярного поля в цьому напрямі:

$$\text{grad } u (M_0) = \frac{\partial u}{\partial n} \vec{n} \quad (1.3)$$

З урахуванням (1.3) та визначення скалярного добутку векторів формулу (1.2) можна переписати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial n} n \cdot l \cdot \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{l}}) = \left(\frac{\partial u}{\partial n} \vec{n}\right) \cdot \vec{l} = \text{grad } u \cdot \vec{l} = \\ &= |\text{grad } u| \cdot \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{l}}) = \text{grad}_l u\end{aligned}\quad (1.4)$$

З виразу (1.4) випливає, що похідна за довільним напрямком \vec{l} дорівнює проекції модуля градієнта на цей напрямок. Знайдемо координати градієнта в декартовій системі координат. Користуючись співвідношенням (1.4), отримуємо

$$\text{grad}_x u = \frac{\partial u}{\partial x}, \text{grad}_y u = \frac{\partial u}{\partial y}, \text{grad}_z u = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Таким чином, у декартовій системі координат маємо:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}\quad (1.5)$$

Завдяки евклідовості простору модуль градієнта скалярного поля має вигляд:

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Координати l_x, l_y, l_z одиничного вектору \vec{l} у декартовій системі координат (Рис.3) можуть бути визначені як $l_x = \cos \alpha, l_y = \cos \beta, l_z = \cos \gamma$ де $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляючі косинуси напрямку \vec{l} Як показує виразі (1.4):

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \vec{l}$$

Тоді, враховуючи властивості скалярного добутку векторів, похідна за напрямком може бути знайдена таким чином:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

1.2 Оператори Гамільтона та Лапласа

Оператор Гамільтона (його ще інколи називають оператором набла) – векторний диференціальний оператор першого порядку вигляду:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

З огляду на вищевказане, градієнт скалярного поля може бути записаний у вигляді

$$\text{grad } u = \nabla u$$

Укажемо на деякі суттєві властивості градієнта:

$$\nabla(C_1 u + C_2 v) = C_1 \nabla u + C_2 \nabla v ;$$

$$\nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v ;$$

$$\nabla(C) = 0, C = \text{const};$$

$$\nabla f(u) = f'(u) \nabla(u)$$

Оператор Лапласа (його також називають лапласіаном) – скалярний диференціальний оператор другого порядку вигляду:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Оператори Лапласа та Гамільтона пов'язані між собою співвідношенням:

$$\Delta = \nabla(\nabla) = \nabla^2$$

1.3 Векторне поле. Векторні функції. Векторні лінії. Векторна функція скалярного аргументу.

Якщо кожному значення скалярного параметра t відповідає певний вектор $\vec{a}(t)$, то вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ називається векторною функцією скалярного аргументу. У декартовій системі координат векторна функція записується у наступному вигляді:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_x(t)\vec{i} + \vec{a}_y(t)\vec{j} + \vec{a}_z(t)\vec{k}$$

Для графічного представлення залежності $\vec{a} = \vec{a}(t)$ використовують концепцію годографа векторної функції.

Годографом векторної функції $\vec{a} = \vec{a}(t)$ називається лінія, яку описує кінець вектору $\vec{a}(t)$ при зміні t у випадку, коли початок $\vec{a}(t)$ поміщено у фіксовану точку, яка називається при цьому, полюсом годографа.

Прикладом векторної функції є радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у випадку якого полюсом годографа є початок системи координат $O(0,0,0)$, а самим годографом є траєкторія руху матеріальної точки. Похідна векторної функції $\vec{a} = \vec{a}(t)$ за скалярним аргументом визначається аналогічно до похідної скалярної функції:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t}$$

Похідна від векторної функція лежить на дотичній до годографа.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Зокрема, вектор миттєвої швидкості лежить на дотичній до траєкторії руху тіла.

1.4 Векторне поле

Якщо у певній області простору кожній точці M поставлений у відповідність певний вектор $\vec{a}(M)$, то кажуть, що завдано векторне поле

$$\vec{a} = \vec{a}(M)$$

У декартовій системі координат векторне поле задається векторною функцією

$$\vec{a}(M) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$$

де $a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)$ – скалярні поля. Завдання одного векторного поля дорівнює завданням сукупності трьох скалярних полів.

Якщо компоненти векторного поля $a_x, a_y, a_z = const$, то поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ називають однорідним. Прикладами векторних полів фізичних величин є поле сили тяжіння, поле напруженості точкового заряду, поле індукції магнітного поля постійного струму тощо.

Векторною лінією векторного поля називається крива, в кожній точці якої вектор поля спрямований дотично. Якщо $|d\vec{r}| \rightarrow 0$, то $M_2 \rightarrow M_1$ отже $\vec{a} \parallel d\vec{r}$ (рис 1.3) Враховуючі властивості векторного добутку, також маємо, що $d\vec{r} \times \vec{a} = 0$

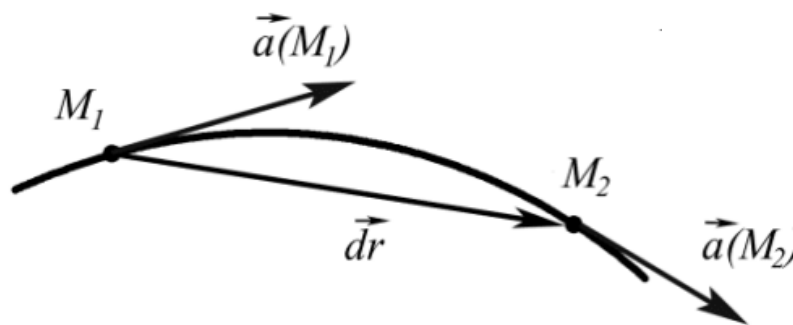


Рисунок 1.3 – Векторна лінія

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & dz \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0;$$

$$\vec{i}(a_z dy - a_y dz) + \vec{j}(a_x dz - a_z dx) + \vec{k}(a_y dx - a_x dy) = 0;$$

$$\begin{cases} a_z dy - a_y dz = 0 \\ a_x dz - a_z dx = 0 \\ a_y dx - a_x dy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z} \\ \frac{dz}{a_z} = \frac{dx}{a_x} \\ \frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$

Розв'язки отриманої системи диференціальних рівнянь є рівняннями векторних ліній векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$.

1.5 Похідна векторного поля за напрямком

Похідна векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в напрямку \vec{l} визначається аналогічно похідній за напрямком для скалярного поля:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(M_1) - \vec{a}(M_0)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta l}$$

У декартовій системі координат похідна векторного поля в напрямку знаходиться як $\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = (\vec{l}_0 \nabla) \vec{a}$ де \vec{l}_0 — одиничний вектор у напрямку \vec{l} .

1.6 Диференціальні характеристики скалярного і векторні поля

Шукатимемо величини, що однозначно характеризують швидкість зміни поля у кожній його точці.

У випадку, скажімо, скалярного поля $u = u(x, y)$ для диференціальної характеристики скалярного поля можна використовувати сукупність частинних похідних $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ у взаємно перпендикулярних напрямках. При тому виявляється, що така характеристика залежить від вибору системи координат. Отже, пара значень частинних похідних у взаємно перпендикулярних напрямках не є інваріантною диференціальною характеристикою скалярного поля.

Інваріантною диференціальною характеристикою скалярного поля виявляється поле його градієнта $\text{grad } u$. Дійсно, вектор $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial n} \vec{n}$ не залежить від вибору системи координат, а його модуль вочевидь є інваріантом

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \text{inv}$$

У випадку векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x, y)$ йому можна поставити у відповідність два скалярні поля $a_x(x, y)$ і $a_y(x, y)$. Так само як і у випадку скалярного поля можна показати, що величини $\nabla a_x, \nabla a_y$ не є інваріантними диференціальними характеристикою векторного поля, оскільки залежать від вибору системи координат.

Інваріантною диференціальною характеристикою векторного поля є його тензор-похідна:

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Зауважимо, що як у випадку скалярного поля величини $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ є компонентами інваріантної диференціальної характеристики $\text{grad } u$ так і у випадку векторного поля величини ∇a_x і ∇a_y є компонентами інваріантної диференціальної характеристики тензор-похідної.

1.7 Елементи тензорного обчислення

Тензором другого рангу в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називається величина, яка характеризується в тривимірному просторі дев'ятьма числами

$$p_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

що перетворюються при переході в базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ за формулою:

$$p'_{ij} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{ij}$$

де (α_{ks}) — матриця переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

Компоненти матриці переходу $\alpha_{ks} = \cos(\vec{e}_k, \vec{e}'_s), k, s = 1, 2, 3$. Тензор p -го рангу в тривимірному просторі являє собою сукупність 3^p компонентів. У n -мірному просторі тензор другого рангу описується сукупністю n^2 скалярних величин. У n -вимірному просторі тензор p -го рангу характеризується n^p компонентами. Отже, маємо, що вектор — це тензор першого рангу, а скаляр — тензор нульового рангу.

Тензор, заданий у n -мірному просторі, має n інваріантів, які складаються з його компонентів. Зокрема, у будь-якому базисі постійними залишаються детермінант матриці та сума елементів її головної діагоналі.

В якості прикладу тензорної величини розглянемо тензор інерції. У фізиці поняття моменту інерції тіла щодо деякої осі визначається, як величина, яка дорівнює сумі мас усіх його точок помножених на квадрат відстані від них до цієї осі:

$$I = \sum_{k=1}^N m_k r_k^2$$

Для кожного тіла існує необмежена множина значень моменту інерції. Інваріант, що характеризує інертні властивості тіл, є тензором другого рангу — тензором інерції:

$$\hat{I} = \sum_{k=1}^N m_k \hat{R}_k$$

де тензор \hat{R}_k визначається як

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Зокрема, тензор інерції суцільного твердого диска радіусу R та масою m відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно диску і збігається з координатною віссю Oz , може бути записаний у вигляді

$$\hat{I} = \frac{mR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8 Скалярний та векторний інваріанти. Тензор похідної векторного поля

Як вже було сказано вище, інваріантною диференціальною характеристикою векторного поля $\vec{a}(t) = \vec{a}_x \vec{i} + \vec{a}_y \vec{j} + \vec{a}_z \vec{k} \in$ тензор вигляду:

$$\frac{d\vec{a}}{d\vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Зокрема два інваріанти саме такого тензора, відіграють важливе значення для багатьох фізичних та інженерних застосувань.

Визначимо деякі суттєві оператори. Дивергенцією векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ називається скалярна функція

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \vec{a}$$

Ротором векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ називається векторна функція

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}$$

Наведемо деякі суттєві властивості дивергенції:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{c} &= 0, \text{ якщо } \vec{c} = \text{const}; \\ \operatorname{div} (\vec{a} + \vec{b}) &= \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}; \\ \operatorname{div} (u\vec{a}) &= \nabla(u\vec{a}) = u(\nabla\vec{a}) + \vec{a}\nabla u = u \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} u \end{aligned}$$

Також приведемо основні властивості ротора:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{c} &= 0, \text{ якщо } \vec{c} = \text{const}; \\ \operatorname{rot} (\vec{a} + \vec{b}) &= \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}; \\ \operatorname{rot} (u\vec{a}) &= \nabla \times (u\vec{a}) = u(\nabla \times \vec{a}) + u\nabla \times \vec{a} \end{aligned}$$

Якщо $\operatorname{rot} \vec{a}(M) = 0$, то поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ називають безвихровим або потенційним. Для такого поля справедливо, $\vec{a}(M) = -\operatorname{grad} u(M)$ де $u(M)$ – потенціал векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$. Якщо $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$ то поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ називається вихровим або соленоїдальним.

Диференціальні характеристики векторного поля можуть бути однозначно описані, якщо одночасно відомі дивергенція та ротор цього поля.

1.9 Потік векторного поля. Теорема Остроградського-Гаусса

Нехай задано векторне поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$. Виберемо в цьому полі малий майданчик dS такий, що у всіх його точках поле можна вважати постійним (рис 1.4)

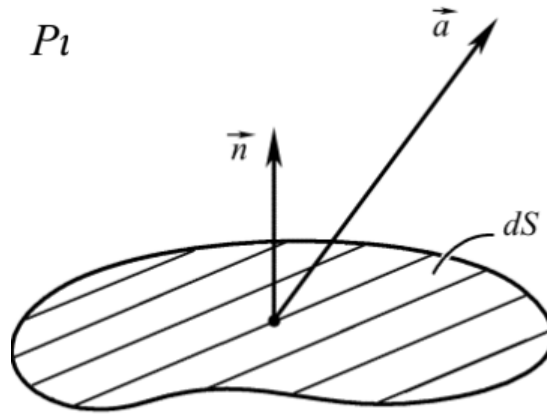


Рисунок 1.4 – Потік векторного поля

Потоком векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ через майданчик dS називається величина $d\Phi = \vec{a} \overline{dS}$, де $\overline{dS} = \vec{n} dS$, \vec{n} — нормаль до dS . Потік векторного поля через поверхню S може бути знайдений як

$$\Phi = \iint d\Phi$$

Тоді потоком векторного поля називається величина

$$\Phi = \iint_S \vec{a} \overline{dS}$$

Якщо поверхня замкнута і обмежує певний об'єм, то потік векторного поля може бути знайдений за теоремою Остроградського-Гаусса:

$$\oint_S \vec{a} \overline{dS} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{a} dV$$

1.10 Вектор циркуляції поля. Теорема Стокса

Нехай у полі $\vec{a} = \vec{a}(M)$ задана деяка замкнута лінія L і обрано позитивний напрямок її обходу (рис.1.5).

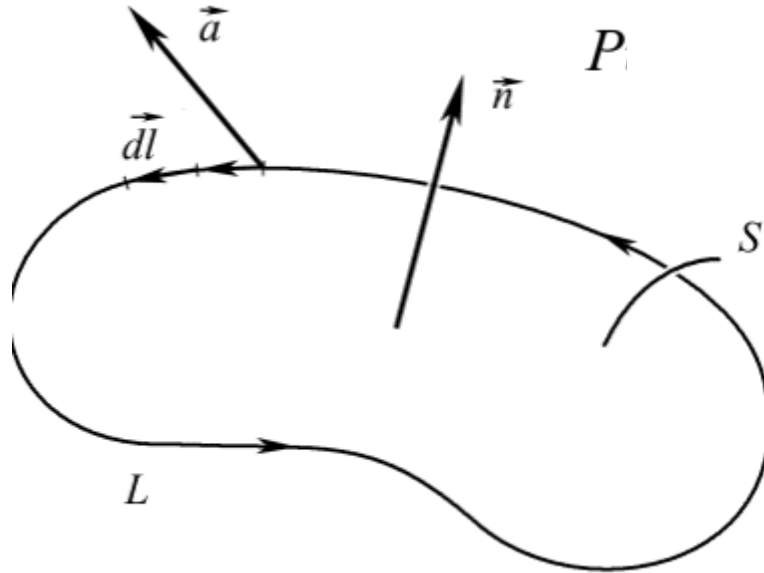


Рисунок 1.5 – Циркуляція векторного поля

Розіб'ємо L на елементарні ділянки $d\vec{l}$. Циркуляцією векторного поля \vec{a} вздовж лінії L називається величина

$$\Gamma = \oint_L \vec{a} d\vec{l}$$

Якщо замкнута крива обмежує поверхню, то величина циркуляції може бути знайдена за теоремою Стокса.

Теорема Стокса: циркуляція векторного поля по замкнутому контуру дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню, що спирається на контур L .

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{a} d\vec{S}$$

1.11 Контрольні запитання

1. Дайте визначення скалярного поля.
2. Наведіть приклади математичних скалярних полів фізичних величин.
3. За допомогою якого прийому візуалізується скалярне поле?
4. Запишіть рівняння поверхні рівня скалярного поля.
5. Що таке похідна за напрямком?
6. Що називають градієнтом скалярного поля?
7. За якою формулою розраховується градієнт скалярного поля в декартовій системі координат?
8. Який вид має оператор набла в декартовій системі координат?
9. Який вид має лапласіан у декартовій системі координат?
10. Що таке векторна функція скалярного аргументу?
11. Наведіть приклади використання векторних функцій у фізиці.
12. Що називають годографом векторної функції? Для чого використовується це поняття?
13. Що є годографом радіус-вектора матеріальної точки?
14. Що таке векторне поле?
15. Дайте визначення векторної лінії векторного поля.
16. Як можна знайти рівняння векторних ліній?
17. Назвіть інваріантні диференціальні характеристики скалярних та векторних полів.
18. Що таке тензор?
19. Скільки компонент містить тензор p -го рангу в n -мірному просторі?
20. Дайте визначення тензора інерції.
21. Що таке векторний ротор поля?
22. Що таке дивергенція векторного поля?
23. Яке поле називають соленоїдальним?
24. Яке поле називають потенціальним?
25. Що таке потік векторного поля? З якою метою вводиться це поняття?
26. Сформулюйте теорему Остроградського-Гаусса. У яких випадках її можна застосовувати?
27. Дайте визначення циркуляції векторного поля.

28. Сформулюйте теорему Стокса. У яких випадках її можна застосовувати?

2 КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.1 Диференціальні рівняння у частинних похідних

Диференціальне рівняння у частинних похідних (РЧП) пов'язує потрібну функцію, незалежні змінні та її частинні похідні за незалежними змінними.

Ранг старшої частинної похідної визначає так званий порядок рівняння. Лінійним буде рівняння, якщо воно лінійно залежить від всіх його складових (самої потрібної функції та її похідних).

Для чисельних практичних (наприклад, фізичних) застосувань особливий інтерес представляє клас лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

Розв'язком (інтегралом) РЧП у частинних похідних називається функція, яка перетворює його на тотожність. Загальне рішення (загальний інтеграл) РЧП є сукупність всіх функцій, що задовольняють умові існування розв'язку диференціального рівняння.

Для того, щоб виділити частинне рішення РЧП, що описує реальний, скажімо, фізичний процес, необхідно завдати додаткові умови (початкові та граничні).

Початкові умови задають значення шуканої функції та (або) її першої похідної у початковий момент часу $t=0$.

Граничні (крайові) умови задають значення шуканої функції та (або) її першої похідної на межах області пошуку рішення.

У загальному випадку лінійне диференціальне рівняння у частинних похідних функції $u = u(x, y)$ має вигляд:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad 2.1$$

де A, B, C, D, E, F, G – відомі неперервні функції від x і y (в окремих випадках - постійні коефіцієнти).

Якщо $G = 0$, рівняння (2.1) називають однорідним, при $G \neq 0$ неоднорідним.

Введемо величину $\Delta = B^2 - AC$, яка є дискримінантом рівняння (2.1).

Якщо у заданій області:

- 1) $\Delta > 0$, то рівняння (2.1) відноситься до рівнянь гіперболічного типу;
- 2) $\Delta = 0$, то рівняння (2.1) відноситься до рівнянь параболічного типу;
- 3) $\Delta < 0$ то рівняння (2.1) відноситься до рівнянь еліптичного типу.

На сьогоднішній день усі відомі фізичні, або інженерні задачі зводяться до розв'язання рівнянь зазначених трьох типів. Для кожного з типів диференціальних рівнянь розроблені відповідні методи їх вирішення. Також відомі характерні властивості відповідних рішень.

2.2 Приклади рівнянь математичної фізики

Почнемо з видів рівнянь гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Прикладами рівнянь цього класу є

- а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - рівняння коливань струни (одномірне хвильове рівняння);
- б) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ - рівняння коливань мембрани;
- в) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$ - загальне хвильове рівняння.

Зауважимо, що, як правило, рівняння гіперболічного типу описують періодичні процеси.

Другим класом рівнянь є рівняння параболічного типу. Прикладами виступають:

- а) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - одновимірне рівняння теплопровідності (u - температура);
- б) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - одновимірне рівняння дифузії (u - концентрація речовини);
- в) $-\frac{\hbar}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ - загальне (нестационарне) рівняння Шредінгера.

Зауважимо, що рівняння параболічного типу, переважно, описують незворотні процеси.

Третім класом рівнянь, на який ми звернемо увагу, є рівняння еліптичного типу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Прикладами такого класу рівнянь є

а) $\Delta u = 0$ - рівняння Лапласа;

б) $u\Delta = f$ - рівняння Пуассона;

в) $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0$ - стаціонарне рівняння Шредінгера.

Рівняння еліптичного типу описують стаціонарні процеси.

3 ДЕЯКІ ТИПОВІ ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

3.1 Рівняння коливань струни

Будемо розуміти під струною однорідну гнучку пружну нитку з постійною лінійною густиною. Нехай струна, довжиною l натягнута і закріплена в точках $x = 0$ та $x = l$ (рис.3.1).

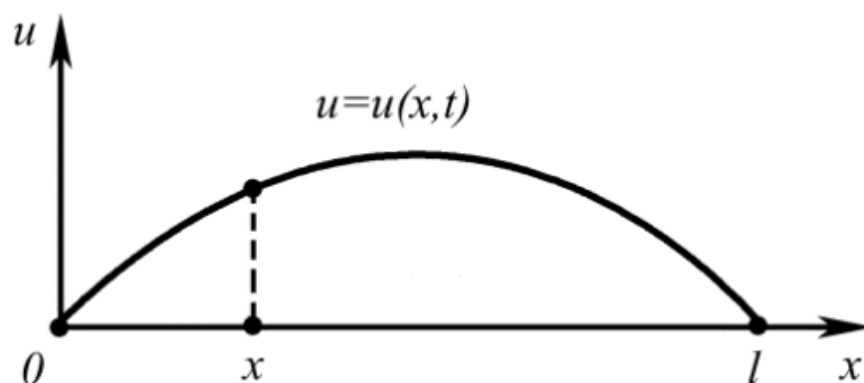


Рисунок 3.1 – Профіль струни з однорідною густиною

Якщо струну відхилити від її первісного положення і відпустити, то вона буде здійснювати поперечні коливання біля положення рівноваги.

Розглянемо малі відхилення точок струни. Припустимо, що рух точок струни відбувається перпендикулярно до осі Ox в одній площині. При цьому процес коливань описується функцією $u = u(x, t)$, що визначає відхилення точки з координатою x в момент часу t . Функція $u = u(x, t)$ буде визначати положення струни у будь-який момент часу (профіль струни).

Малі відхилення точок струни мають на увазі в наступному сенсі:

1) Кут між дотичною до довільної точки і віссю Ox малий настільки, що його синус приблизно дорівнює його тангенсу: $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$;

2) Зміна сили пружності, що виникає внаслідок додаткової деформації, мала порівняно з силою натягу струни, яка перебуває у положенні рівноваги. Іншими словами вважатимемо силу натягу струни у процесі коливань постійною.

Розглянемо малу ділянку струни $(x, x + \Delta x)$, масою $\Delta m = \rho \Delta x$, ρ -лінійна масова щільність (рис.3.2).

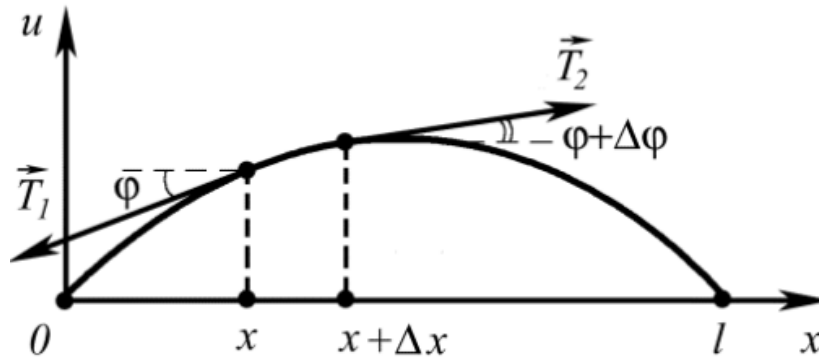


Рисунок 3.2 – Параметри струни в стані рівноваги

Довжина ділянки струни, що розглядається, приблизно дорівнює Δx завдяки малості відхилення. Рівнодіюча сил \vec{T}_1 та \vec{T}_2 , що діють на ділянку Δx , надає їй прискорення $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Тоді з другого закону Ньютона випливає:

$$T_2 \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T_1 \sin \varphi = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

З урахуванням малості відхилень замінимо в рівнянні, $\sin \varphi = \tan \varphi$. Врахуємо також, що з однорідності струни $T_1 = T_2 = T$. З геометричного сенсу похідної випливає, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}; \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}$$

Користуючись вищенаведеними співвідношеннями, отримуємо

$$T \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

За теоремою Лагранжа про середні значення:

$$\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x$$

З урахуванням цього, маємо

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Скоротивши на Δx , і поділивши обидві частини рівняння на ρ отримуємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Позначимо $\sqrt{\frac{T}{\rho}} = a$. Тоді рівняння коливань струни прийме вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

де a - швидкість поширення пружної хвилі струни.

3.2. Рівняння теплопровідності

Нехай на осі Ox лежить однорідний стрижень, теплоізований від оточення (рис.3.3).

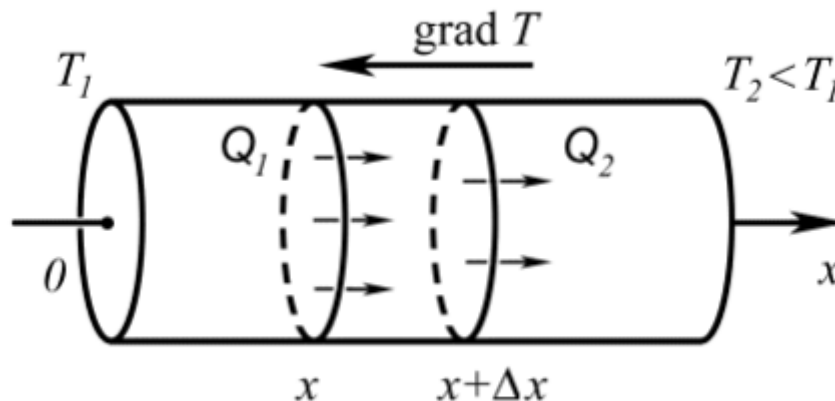


Рисунок 3.3 – Однорідний теплоізований стрижень

Якщо в початковий момент часу зі збільшенням x температура зменшувалась, то з часом буде відбуватися процес теплопередачі у позитивному напрямку осі Ox .

Будемо описувати цей процес за допомогою функції $u = u(x, t)$, яка визначає температуру в перерізі стрижня з координатою x на момент часу t .

Визначимо фізичний зміст її перших частинних похідних за координатою та часом:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=\text{const}}$$

– швидкість зміни температури в даному перерізі;

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=\text{const}}$$

– значення градієнта температури в даний момент часу.

Виберемо в стрижні довільно два перерізи з координатами x та $x + \Delta x$. Кількість теплоти, що передається через переріз стрижня з координатою x визначається емпіричним законом Фур'є для теплопровідності:

$$Q_1(x) = -\kappa \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} S \Delta t$$

де κ коефіцієнт теплопровідності, S площа перерізу стрижня, Δt час. Кількість теплоти, що проходить через переріз стрижня з координатою $x + \Delta x$ визначається наступним виразом:

$$Q_2(x + \Delta x) = -\kappa \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} S \Delta t$$

За один і той же час Δt на ділянку стрижня Δx надходить кількість тепла Q_1 . Виходить $-Q_2$. Їхня різниця- ΔQ йде на підвищення температури ділянки стрижня:

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = \kappa \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] S \Delta t;$$

$$\Delta Q = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \Delta t$$

Вважатимемо ділянку стрижня Δx настільки малою, що у кожний момент часу температура в кожному його перерізі однакова. Тоді за час Δt , температура в кожній точці Δx ділянки збільшиться на

$$\Delta T = u(x, t + \Delta t) - u(x, t)$$

Кількість теплоти, яка необхідна для цього:

$$\Delta Q = c \Delta m \Delta T = c \rho \Delta x S [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)]$$

З урахуванням теореми про середнє, отримуємо:

$$\Delta Q = c \rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

За законом збереження енергії:

$$c \rho \Delta x S \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x S \Delta t;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\kappa}{c \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

де $\frac{\kappa}{c \rho}$ - коефіцієнт теплопровідності.

Для уніфікації запису рівнянь позначимо $\frac{\kappa}{c \rho} = a^2$. Тоді, одомірне рівняння теплопровідності набуває вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3.2 Класифікація задач математичної фізики. Постановка задач математичної фізики, умова коректності

Як зазначалося раніше, для однозначного вирішення диференціального рівняння у приватних похідних необхідно приєднати до його додаткові умови – початкові та граничні. Залежно від того, які з умов

можуть бути задані, завдання математичної фізики поділяються на три типи: задача Коші, змішана задача та крайова задача.

1. Задача Коші. Якщо процес протікає у нескінченному інтервалі (нескінченна струна, нескінченний стрижень), то крайові умови не задаються і завдання зводиться до завдання лише з початковими умовами задачі Коші.

2. Змішана задача. Якщо розглядається завдання для кінцевого проміжку, то мають бути задані і початкові та граничні умови. Це, так звана, змішана задача.

Розглянемо на прикладі змішаної задачі про коливання закріпленої струни способи завдання початкових та граничних умов. Нехай струна завдовжки l натягнута і закріплена на кінцях. Початкова форма струни описується функцією $y = f(x)$, початкова швидкість точок струни задається функцією $v = F(x)$.

Граничні умови в задачі про коливання струни описуються функцією $u(x, t)$. Вважаючи, що кінці струни закріплені в точках $x = 0$ та $x = l$, граничні умови будуть задані таким чином: $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ Початкова форма струни описується функцією

$$u(x, 0) = f(x)$$

Початкова швидкість точок струни завдається співвідношенням:

$$u'_t(x, 0) = F(x)$$

3.3 Крайові задачі

До крайових зводяться задачі, що описують стаціонарні процеси. У цьому випадку час до рівняння не входить, відповідно початкові умови не задаються, і завдання ставлять тільки граничні (крайові) умови, тобто вказують поведінку шуканої функції межі області. Якщо задається поведінка найбільш шуканої функції, то таке завдання називають задачею Діріхле, якщо задається значення першої похідної шуканої функції – задачею Неймана.

Визначення початкових та граничних умов має бути таким, щоб малі зміни даних завдання викликали лише малі зміни у її вирішенні. У цьому

випадку кажуть, що рішення є стійким щодо вихідних даних. Завдання математичної фізики вважається поставленим коректно, якщо рішення, що задовольняє всім її умовам, існує, єдино та стійке.

3.4 Контрольні запитання

1. Що називають диференціальним рівнянням із частинними похідними?
2. Яке диференціальне рівняння у частинних похідних називається лінійним?
3. Наведіть приклад лінійного диференціального рівняння у частинних похідних другого порядку
4. Що таке інтеграл диференціального рівняння у частинних похідних?
5. Що називають загальним рішенням диференціального рівняння із частинними похідними?
6. За якою ознакою класифікуються диференціальні рівняння у частинних похідних другого порядку?
7. Запишіть рівняння коливань струни. До якого типу рівнянь воно належить?
8. Запишіть одновимірне рівняння теплопровідності. До якого типу рівнянь воно відноситься?
9. Запишіть рівняння Лапласа. До якого типу рівнянь воно належить?
10. Якою загальною ознакою характеризуються фізичні процеси, що описуються диференціальними рівняннями гіперболічного типу?
11. Якою загальною ознакою характеризуються фізичні процеси, що описуються диференціальними рівняннями параболічного типу?
12. Якою загальною ознакою характеризуються фізичні процеси, що описуються диференціальними рівняннями еліптичного типу?
13. З якого загального закону природи виводиться рівняння теплопровідності?
14. Що ставлять початкові умови?
15. Що задають граничні умови?
16. Для чого необхідна постановка початкових та граничних умов?
17. Яке завдання називається задачею Коші?
18. Які умови мають бути задані у задачі Коші?

19. Який фізичний сенс має умова, задана для задачі Коші про вільні коливання струни: $u(x, 0) = f(x)$?
20. Яка задача називається змішаною?
21. У якому завданні задаються лише крайові умови?
22. Наведіть приклади завдання початкових та граничних умов.
23. У якому разі вважатимуться вирішення завдання стійким щодо вихідних даних?
24. У якому разі вважається, що завдання математичної фізики поставлено коректно?

4 ТЕОРЕТИЧНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

4.1 Розв'язання задачі Коші про вільні коливання струни методом Даламбера

Нехай струна є настільки протяжною, що за час, що нас цікавить, коливання, викликане відхиленням точок деякої середньої ділянки струни, що не встигає досягти її кінців. В цьому випадку граничні умови можна не враховувати. Це задача Коші про нескінченну струну. Розв'язання задачі зводиться до вирішення рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

за початкових умов:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u'_t(x, 0) &= F(x) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Метод Даламбера ще називають методом біжучих хвиль. Шукатимемо рішення у вигляді:

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at) \quad (4.3)$$

де φ і ψ - будь-які двічі диференційовані функції від x і t . Рішення у вигляді (4.3) означає, що реальна форма струни в кожний момент часу може бути представлена суперпозицією хвиль, що біжать назустріч одна одній з однаковою швидкістю.

Перевіримо, що (4.3) є розв'язком рівняння (4.1). З цією метою знайдемо частинні похідні функції (4.3) за x і t .

$$\begin{aligned} u'_x(x, t) &= \varphi'(x - at) + \psi'(x + at); \\ u''_{x^2}(x, t) &= \varphi''(x - at) + \psi''(x + at); \\ u'_t(x, t) &= -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at); \\ u''_{t^2}(x, t) &= a^2[\varphi''(x - at) + \psi''(x + at)]; \end{aligned}$$

Замінюючи в останній похідній вираз, що стоїть у квадратних дужках, на значення другої похідної по координаті u''_{x^2} , отримаємо:

$$u''_{t^2} = a^2 u''_{x^2}$$

Підставляючи останній вираз у рівняння (4.1), отримаємо тотожність. Це означає, що функція виду (4.3) задовольняє умові вирішення рівняння коливань струни (4.1). Рішення рівняння (4.1) представлене у формі (4.3) називають рішенням Даламбера. Визначимо функції φ та ψ з початкових умов. У початковий момент часу $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ u'_t(x, 0) &= -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x) \end{aligned}$$

Таким чином, для знаходження φ і ψ необхідно вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

Для спрощення другого рівняння системи візьмемо від його правої і лівої частин інтеграл змінною верхньою границею:

$$\begin{aligned} \int_0^x (-a\varphi'(x) + a\psi'(x)) dx &= \int_0^x F(x) dx; \\ -a\varphi(x)|_0^x + a\psi(x)|_0^x &= \int_0^x F(x) dx; \end{aligned}$$

Поділивши обидві частини на a і підставивши верхню і нижню границі в лівій частині, отримаємо:

$$-\varphi(x) + \varphi(0) + \psi(x) - \psi(0) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx;$$

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx + (-\varphi(0) + \psi(0))$$

Позначимо $C = -\varphi(0) + \psi(0)$. Тоді:

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx + C$$

Таким чином, система (4.4) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ -\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(x) dx + C \end{cases}$$

По черзі складаючи та віднімаючи рівняння, визначимо функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx - \frac{C}{2} \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(x) dx + \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Замінімо в отриманих виразах для $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ аргумент x відповідно на $(x - at)$ та $(x + at)$, і отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(x) dx - \frac{C}{2} \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(x) dx + \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Підставимо отримані вирази до рішення Даламбера (4.3), і після спрощення, отримаємо необхідну нам формулу у формі Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x) dx \quad (4.5)$$

Отримана формула (4.5) є рішенням рівняння коливань струни (4.1), що повністю задовольняє початковій умови (4.2).

4.2 Змішана задача про коливання струни із закріпленими кінцями методом Фур'є

Розглянемо завдання про вільні коливання струни, закріпленої на обох кінцях. Вона зводиться до вирішення рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.6)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

та початковими умовами

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u'_t(x, 0) &= F(x) \end{aligned} \quad (4.8)$$

З точки зору класифікації, це змішана задача про коливання закріпленої струни. Будемо вирішувати її методом Фур'є.

Метод Фур'є це метод поділу змінних. Його зміст зводиться до того, що потрібну функцію, що залежить від декількох змінних, представляють у вигляді добутку кількох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної. У нашому випадку функцію $u = u(x, t)$ представляють у вигляді добутку двох функцій: $X(x)$, яка залежить тільки від координати x , і $T(t)$, яка залежить тільки від часу t

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.9)$$

З'ясуємо, за яких умов рішення рівняння коливань струни (4.1) можна записати у вигляді (4.9). Для цього підставимо (4.9) до рівняння (4.1). Розраховуючи потрібні похідні $u''_{x^2} = X''(x)T(t)$ та $u''_{t^2} = X(x)T''(t)$, отримуємо:

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t)$$

В отриманому виразі розділимо праву та ліву частини на $a^2(x)T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Аналізуючи отримане співвідношення можна дійти висновку, що його ліва частина не залежить від x , а права - від t . Таким чином, відношення $\frac{T''(t)}{a^2T(t)}$ та $\frac{X''(x)}{X(x)}$ не залежить ні від x ні від t . Це можливо лише в тому випадку, якщо ці відношення дорівнюють одній і тій же постійній величині. Позначивши її, як $-\lambda^2$ маємо:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad (4.10)$$

де λ – вище введений параметр поділу. Таким чином, ми приходимо до висновку, що рівняння коливань струни (4.1) можна записати у вигляді (4.9) у тому у разі, якщо виконується умова (4.10).

Умова (4.10) дозволяє розділити диференціальне рівняння у частинних похідних (4.1) на два звичайні диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

З теорії звичайних диференціальних рівнянь випливає, що розв'язки цих рівнянь мають вигляд:

$$\begin{cases} T(t) = A \cos(\lambda at) + B \sin(\lambda at) \\ X(x) = C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x) \end{cases}$$

де A, B, C, D деякі постійні інтегрування. Підставимо отримані рішення у вираз (4.9):

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda at) + B \sin(\lambda at)][C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x)]$$

Таким чином, подальше вирішення рівняння коливань струни методом Фур'є зводиться до знаходження значень A, B, C, D та λ , що задовольняють початковим та граничним умовам. Врахуємо граничні умови (4.6):

$$u(0, t) = T(t)[C \cos(\lambda \cdot 0) + D \sin(\lambda \cdot 0)] \equiv 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u(l, t) = T(t)[D \sin(\lambda \cdot l)] \equiv 0 \Rightarrow D \sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi n}{l}$$

$$n = 0, 1, 2 \dots$$

Отримане значення $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ називають власним значенням для даної крайової задачі, а відповідні їм функції $X_n(x) = D_n \sin(\lambda_n x)$ - її власними функціями. З урахуванням отриманих значень, частинне рішення рівняння коливань струни (4.1), яке задовольняє граничним умовам приймає вигляд:

$$u_n(x, t) = [A \cos(\lambda_n at) + B \sin(\lambda_n at)] D_n \sin(\lambda_n x)$$

Позначимо: $a_n = AD_n$ і $b_n = BD_n$. Тоді:

$$u_n(x, t) = [a_n \cos(\lambda_n at) + b_n \sin(\lambda_n at)] \sin(\lambda_n x)$$

Оскільки рівняння (4.1) однорідне та лінійне, то сума його рішень також є його розв'язком:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

Звідси випливає:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\lambda_n at) + b_n \sin(\lambda_n at)] \sin(\lambda_n x) \quad (4.11)$$

Підберемо числа a_n і b_n так, щоб рішення (4.11) задовольняло початковим умовам (4.7). З умови, що $u(x, 0) = f(x)$, випливає, що:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x) \equiv f(x)$$

що являє собою розклад функції $f(x)$ в ряд Фур'є, де коефіцієнт a_n розраховується за формулою:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad (4.12)$$

З умови, $u'_t(x, 0) = F(x)$, випливає, що:

$$u'_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n a \sin(\lambda_n x) \equiv F(x)$$

Отриманий вираз являє собою розклад функції $F(x)$ в ряд Фур'є де коефіцієнт b_n визначається за формулою

$$b_n = \frac{2}{\lambda_n a l} \int_0^l F(x) \sin(\lambda_n x) dx \quad (4.13)$$

Таким чином, рішення рівняння (4.1), яке повністю задовольняє всім граничним (4.6) та початковим умовам (4.7), має наступний вигляд:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad (4.14)$$

де a_n і b_n знаходяться за формулами (4.12) та (4.13).

4.3 Стоячі хвилі, їхня суперпозиція

Визначимо фізичний зміст одержаного рішення (4.14). Для цього з'ясуємо який фізичний процес описує частинне рішення

$$u_n(x, t) = [a_n \cos(\lambda_n at) + b_n \sin(\lambda_n at)] \sin(\lambda_n x)$$

Помножимо праву частину цього виразу на величину $\frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$.

Позначимо чисельник $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_n$, а знаменник винесемо за дужки, поділивши доданки:

$$u_n(x, t) = A_n \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(\lambda_n at) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(\lambda_n at) \right) \sin(\lambda_n x)$$

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, легко довести, що $\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ і $\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ є, відповідно, синусом та косинусом деякого кута φ_n , тригонометричні характеристики якого мають вигляд $\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin \varphi_n$, $\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos \varphi_n$. Тоді отримуємо:

$$u_n(x, t) = A_n \sin(\lambda_n x) [\cos(\lambda_n at) \sin \varphi_n + \sin(\lambda_n at) \cos \varphi_n]$$

Згорнемо вираз, що стоїть у квадратних дужках, скориставшись формулою для синуса суми кутів:

$$u_n(x, t) = A_n \sin(\lambda_n x) \sin(\lambda_n at + \varphi_n)$$

Отриманий вираз являє собою рівняння стоячої хвилі. Цей термін означає, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однаковою частотою

$$\omega_n = \lambda_n a = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} n$$

і амплітудою $A_n \sin(\lambda_n x)$. В точках з координатами $x = 0; \frac{l}{n}; \frac{2l}{n}; \frac{3l}{n} \dots$ амплітуда коливань $A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = 0$, отже, точки залишаються нерухомими. Вони називаються вузлами стоячої хвилі. Вузли розбивають струну на ділянки, середини яких – пучності стоячої хвилі – коливаються з максимальною амплітудою (рис.4.1).

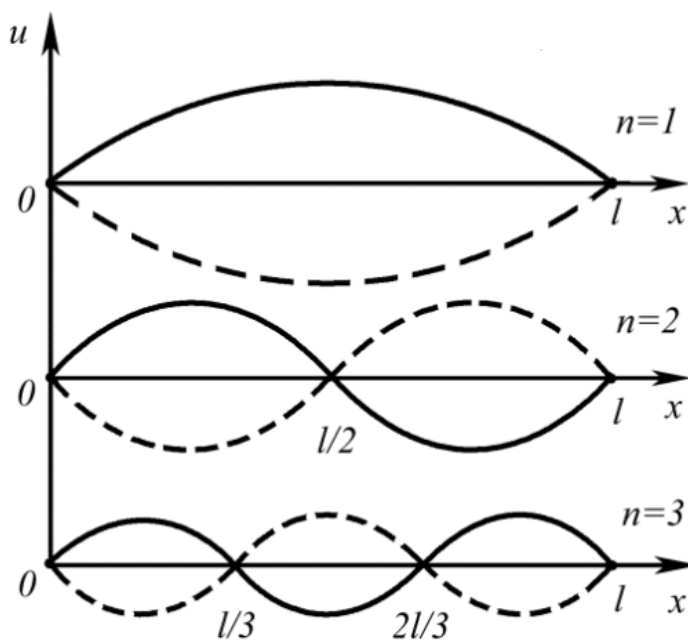


Рисунок 4.1 – Обертони струни

Найменша власна частота $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ називається частотою основного тону. Кратні до неї частоти $\omega_n = n\omega_1$ називають гармоніками або обертонами. Для кожної гармоніки найбільша амплітуда коливань $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ буде визначатися її номером n та початковими умовами (4.7), так як a_n і b_n у свою чергу, визначаються початковою формою струни і початковою швидкістю її точок. На рис.4.2 представлений характерний спектр коливань струни.

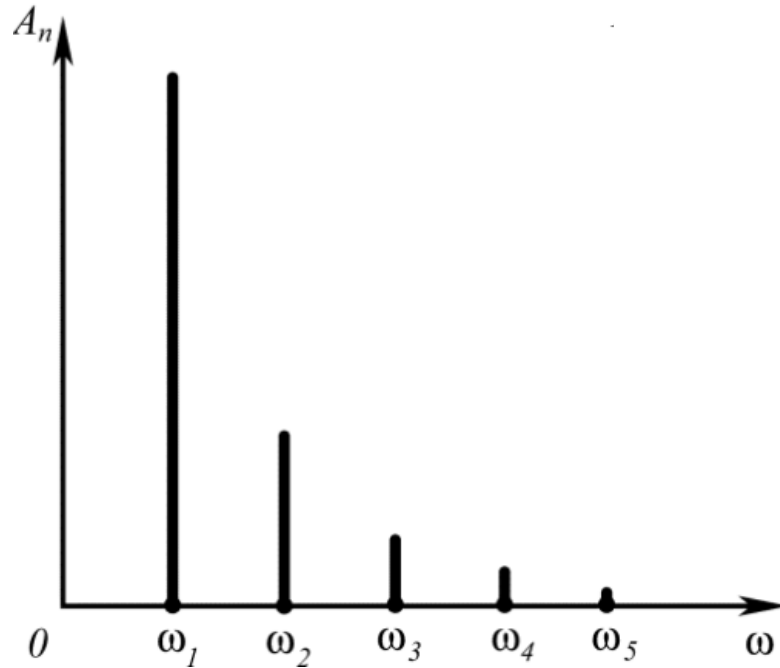


Рисунок 4.2 – Характерний спектр коливань струни

Оскільки загальне рішення має вигляд $u(x, t) = \sum u_n(x, t)$, то зрозуміло, що розв'язок (4.14) є суперпозицією стоячих хвиль із кратними частотами. Рішення (4.14), записане у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

означає, що струна випромінює обертоном із частотою

$$v = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}};$$

сукупність амплітуд $A_1, A_2 \dots$ характеризує спектр (тембр звуку), що визначається початковими умовами (4.7).

5 ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

5.1 Задачі Коши для одновимірного рівняння теплопровідності

Розглянемо питання про пошук розв'язків задачі про поширення тепла в тонкому довгому теплопровідному стрижні, теплоізованому від зовнішнього середовища. Цей процес описується одномірним рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.1)$$

Вважатимемо стрижень настільки довгим, що можна не враховувати температурні умови з його кінцях. У цьому випадку стрижень можна вважати нескінченним, і граничні умови можна не враховувати. Нехай у початковий момент часу розподіл температури у стрижні задано функцією

$$u(x, 0) = f(x) \quad (5.2)$$

Тоді опис процесу поширення тепла у стрижні буде зводитись до розв'язання задачі Коші для одномірного рівняння теплопровідності (5.1) за початкових умов (5.2). Шукатимемо її рішення методом Фур'є: $u(x, t) = X(x)T(t)$. Розділимо рівняння (5.1) на два рівняння:

$$\begin{aligned} u'_t &= XT'; & u''_{x^2} &= X''T \\ XT' &= a^2 X''T \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \quad (5.4)$$

де λ - параметр поділу. Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{T'}{T} = -\lambda^2 a^2 \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

Розділимо змінні у першому рівнянні системи:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\lambda^2 a^2$$

$$\frac{dT}{t} = -\lambda^2 a^2 dt$$

Взявши інтеграл від обох частин, отримаємо:

$$\ln T = \lambda^2 a^2 t + C;$$

$$T(t) = C e^{-\lambda^2 a^2 t}$$

Розв'язання другого рівняння системи має вигляд:

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

Таким чином маємо:

$$\begin{cases} T(t) = C e^{-\lambda^2 a^2 t} \\ X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \end{cases}$$

де A, B, C, λ деякі довільні сталі. Підставивши отримані рішення в (5.3), отримаємо частинне рішення рівняння (5.1):

$$u(x, t) = [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] C e^{-\lambda^2 a^2 t}$$

Зауважимо, що для будь-якого значення λ отримане частинне рішення буде рішенням рівняння (5.1). Отже, коефіцієнти A, B, C , і можуть бути довільними функціями від λ . Позначимо, $A(\lambda) = AC, B(\lambda) = BC$. Тоді, множина частинних рішень рівняння теплопровідності (5.1) має вигляд:

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t} \quad (5.5)$$

Оскільки $-\infty < \lambda < +\infty$, рівняння (5.1) лінійне та однорідне, то суперпозиція частинних рішень (5.4):

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_\lambda(x, t) d\lambda$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda$$

також задовольняє цьому рівнянню.

Функції $A(\lambda)$ та $B(\lambda)$ мають бути такими, щоб виконувалась початкова умова (5.2). При $t = 0$ множник $e^{-\lambda^2 a^2 t}$ дорівнює одиниці, а функція $u(x, t)$ перетворюється на $f(x)$. Тоді:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x)] d\lambda \equiv f(x) \quad (5.6)$$

Як відомо, узагальненням ряду Фур'є для всієї числової осі $(-\infty; +\infty)$ є інтегральна формула Фур'є:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x)] d\lambda \quad (5.7)$$

де коефіцієнти $A(\lambda)$ та $B(\lambda)$ знаходяться за формулами

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos(\lambda s) ds$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \sin(\lambda s) ds$$

Підставимо коефіцієнти $A(\lambda)$ та $B(\lambda)$ в інтегральну формулу Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\cos(\lambda x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos(\lambda s) ds + \right. \\ \left. + \sin(\lambda x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \sin(\lambda s) ds \right] d\lambda$$

Занесемо $\cos(\lambda x)$ та $\sin(\lambda x)$ під знак інтеграла, і, скориставшись формулою косинуса різниці кутів, згорнемо отриманий вираз:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \lambda(s - x) ds \quad (5.8)$$

З порівняння (5.5) та (5.7), і з урахуванням (5.8), отримуємо, що рішенням (5.1), що задовольняє заданим початковим умовам, буде функція:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \lambda(s - x) ds$$

Спростимо отримане рішення. Враховуючи парність функції косинуса, напишемо:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(s - x) d\lambda$$

Тепер врахуємо, що:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(s - x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}}$$

З урахуванням останньої формули, загальне рішення рівняння теплопровідності (5.1), яке задовольняє початковій умові (5.2), має вигляд:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}} ds \quad (5.9)$$

Отримане рішення (5.9) називається формулою Пуассона.

5.2 Фундаментальне рішення рівняння теплопровідності та його фізичний зміст

Для визначення фізичного змісту (5.9) розглянемо фундаментальне рішення рівняння теплопровідності. Фундаментальним рішенням рівняння теплопровідності називають функцію

$$u_s(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}}$$

яка є частинним рішенням рівняння теплопровідності (5.1).

Фундаментальне рішення є рішенням задачі теплопровідності у нескінченному стрижні при початковому розподілі температури у вигляді теплового імпульсу. Поняття теплового імпульсу має наступну інтерпретацію.

Якщо в початковий момент часу миттєво надати стрижню кількість теплоти Q_0 в точці $x = 0$, то температура в точці $x = 0$ підніметься до T_0 , а в інших точках температура залишиться незмінною. В цьому випадку рішення рівняння (5.9) мають вигляд:

$$u(x, t) = \frac{T_0}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}} \quad (5.10)$$

Графіки розподілу температури для різних моментів часу $t > 0$ представлені на рис.5.1

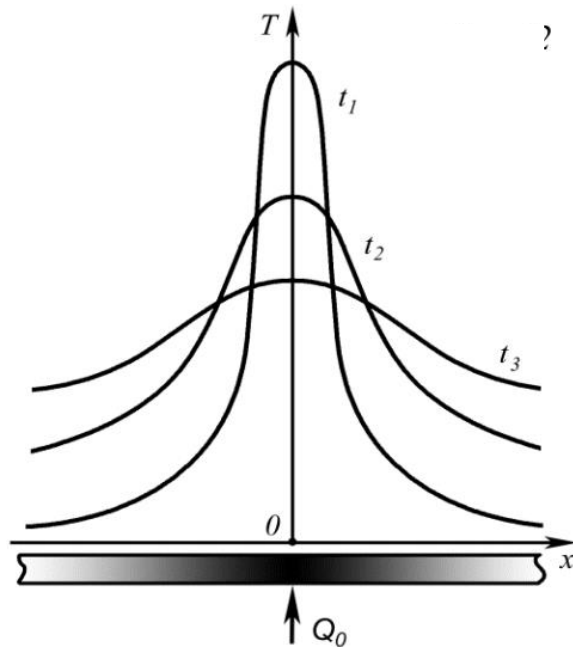


Рисунок 5.1 – Розподіл температур у стрижні

Таким чином, фізичний зміст рішення (5.9) можна уявити собі, як суперпозицію температур, що виникають у точці стрижня з координатою x в момент часу t внаслідок безперервно розподілених по стрижню теплових імпульсів $f(s)$, доданих до точок стрижня $x = s$ на момент часу $t = 0$.

6 ФУНКЦІЯ ГРИНА. СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

6.1 Рівняння Лапласа. Гармонічні функції. Рішення рівняння Лапласа у сферичних координатах методом Фур'є. Поліноми Лежандра. Поняття про сферичні та кульові функції

Вирішення великої кількості крайових завдань математичної фізики приводить до вирішення рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad (6.1)$$

Йому задовольняють, наприклад, потенціал електростатичного поля у просторі, в якому відсутні заряди. До рівняння Лапласа зводиться рівняння теплопровідності для стаціонарного розподілу температури. За певної граничної умови, що задає функцію на деякій замкнутій поверхні, рівняння Лапласа має однозначне рішення.

Функції, що задовольняють розв'язання рівнянню Лапласа, називають гармонічними функціями. Залежно від форми поверхні, на якій встановлено граничну умову, для вирішення рівняння Лапласа використовують різні системи координат. Розглянемо рішення рівняння Лапласа у сферичній системі координат. Для цього спочатку визначимо вид рівняння Лапласа у сферичних координатах.

У загальному випадку криволінійної системи координат оператор Лапласа має вигляд:

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_2 H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right]$$

де q_1, q_2, q_3 - криволінійні координати, H_1, H_2, H_3 - коефіцієнти Ламе.

У сферичних координатах положення точки у просторі задається величинами r, θ, φ . Відповідно, $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$, а коефіцієнти Ламе; $H_1 = H_r = 1, H_2 = H_\theta = r, H_3 = H_\varphi = r \sin \theta$.

Підставляючи відповідні координати та значення коефіцієнтів Ламе у формулу для знаходження лапласіану у криволінійних координатах,

отримаємо рівняння Лапласа у сферичних координатах у наступному вигляді:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (6.2)$$

Шукатимемо його рішення методом Фур'є. Представимо шукану функцію у вигляді добутку двох функцій:

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi), \quad (6.3)$$

Підставимо (6.3) до рівняння (6.2):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) Y + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) R + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} R = 0$$

Розділимо змінні:

$$\frac{\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right)}{R} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}}{Y} = \lambda \quad (6.4)$$

де λ – деяка стала (параметр поділу). З отриманого виразу випливає, що

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \lambda R = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0 \quad (6.6)$$

Рішення (6.6) також шукатимемо методом поділу змінних:

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (6.7)$$

Виконуючі нижчеописані маніпуляції,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \Phi + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \Theta + \lambda \Theta \Phi &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \Phi + \lambda \Theta \Phi &= -\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \Theta \\ \frac{\sin^2 \theta}{\Theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \Theta \right] &= -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \mu \end{aligned} \quad (6.8)$$

отримуємо

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \mu \Phi = 0 \quad (6.9)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \Theta \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right) = 0 \quad (6.10)$$

Поклавши $\mu = m^2$ отримуємо, що розв'язок отриманих рівнянь має вигляд

$$\Phi(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi} \quad (6.11)$$

де A і B деякі сталі величини.

З властивостей сферичних координат випливає, що функція $\Phi(\varphi)$ має задовольняти умові циклічності: $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$. Отже, m має бути цілочисленним: $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ Перед тим, як знаходити рішення рівняння (6.10) введемо позначення: $x = \cos \theta$, $\Theta(\theta) = y(x)$. З урахуванням вищенаведеної заміни рівняння (6.10) набуде вигляду:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0 \quad (6.12)$$

Рівняння (6.12) називається рівнянням Лежандра. В теорії диференціальних рівнянь доводиться, що рішення рівняння Лежандра, обмежені на інтервалі $[-1, 1]$ існують тільки при $\lambda = l(l + 1)$, де l - ціле. Враховуючи це, отримуємо:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0 \quad (6.13)$$

Вирішення цього рівняння має вигляд:

$$\Theta(\theta) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \quad (6.14)$$

де $P_l^{(m)}$ - приєднані поліноми Лежандра. Приєднані поліноми Лежандра визначаються за формулами Родріга:

$$P_l^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x); m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (6.15)$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (6.16)$$

де $P_l(x)$ - поліноми Лежандра. Знайдемо тепер рішення рівняння (6.5):

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0$$

Розкриваючи дужки, отримаємо

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0; \lambda = l(l + 1)$$

Шукатимемо рішення у вигляді $R = r^s$ Тоді $R' = sr^{s-1}$, $R'' = s(s - 1)r^{s-2}$

Підставляючи знайдені похідні до рівняння, отримаємо:

$$s(s - 1)r^{s-2}r^2 + 2rsr^{s-1} - \lambda r^s = 0$$

Після спрощення отримаємо вираз:

$$s(s + 1) = \lambda$$

Оскільки $\lambda = l(l + 1)$, то $s(s + 1) = l(l + 1)$, Отже, $s = l$.

Таким чином, рішення рівняння (6.5) можна записати в наступному вигляді:

$$R(r) = Cr^l \quad (6.17)$$

де C - деяка постійна.

З урахуванням отриманих рішень (6.11) та (6.14), можна зробити висновок, що рішенням рівняння (6.7) задовольняють функції:

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) A e^{im\varphi} \quad (6.18)$$

Функції виду (6.18) називаються сферичними функціями. Частинними рішеннями рівняння Лапласа згідно з формулою (6.3), є функції виду:

$$u_l^{(m)}(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) \quad (6.19)$$

Функції виду (6.19) називаються кульовими функціями. Таким чином, загальне рішення рівняння Лапласа у сферичних координатах має вигляд:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l C_{l,m} r^l P_l^{(m)}(\cos \theta) A e^{im\varphi} \quad (6.20)$$

6.2 Задача Діріхле

Задача Діріхле для кулі може бути сформульовано наступним чином: знайти функцію, що задовольняє рівняння Лапласа всередині кулі та крайовим умовам на границі кулі $u|_S = f$. Розв'язання цього завдання зводиться до розкладання функції, що задовольняє граничним умовам, в ряд за поліномами Лежандра (ряд Фур'є-Лежандра):

$$f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} a_l P_l^{(m)}(x)$$

коефіцієнти якого обчислюють за формулою

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^1 f(x) P_l^{(m)}(x) dx$$

6.3 Рівняння Лапласа у циліндричних координатах. Поняття про функції Бесселя

При розгляді фізичних процесів в областях з круговою та сферичною симетрією зручно рівняння Лапласа записувати в циліндричних координатах:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Його рішення зводиться до функцій Бесселя:

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

які є рішенням рівняння Бесселя:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Таким чином, аналогічно попередньому, розв'язок крайових задач в циліндричних координатах зводиться до розкладання функції, що задовольняє граничним умовам, в ряд за функціями Бесселя (ряд Фур'є-Бесселя):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_p(x)$$

6.4 Метод функцій Гріна

Метод функцій Гріна широко використовується в теоретичній фізиці, особливо в квантовій теорії поля та статистичній фізиці. Функція Гріна визначає поширення полів від джерел, що їх породжують.

Уявлення про метод функції Гріна можна отримати з аналізу розв'язання задачі про охолодження нескінченного стрижня. Як це вже було показано раніше, ця задача зводиться до розв'язання рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ за початкової умови $u(x, 0) = f(x)$.

У методі функції Гріна припускають, що вирішення цього завдання можна представити у вигляді:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t, s) f(s) ds$$

де s - змінна інтегрування, $G(x, t, s)$ - деяка характеристична функція-функція Гріна задачі, конкретний вид якої необхідно визначити шляхом розв'язку альтернативної задачі.

Фізичний зміст функції Гріна полягає в тому, що вона є вирішенням розглянутої задачі для «точкової» початкової умови. У розглянутій задачі вона показує як впливає точковий тепловий імпульс на розподіл температури у стрижні у різні моменти часу. Функція Гріна має бути такою, щоб рішення рівняння (6.1) відповідало початковим умовам. Зокрема, застосування методу функції Гріна для вирішення задачі Коші про охолодження нескінченного стрижня призводить до рішення виду (6.9), з якого і випливає конкретний вигляд відповідної функції Гріна.

6.5 Спеціальні функції математичної фізики

До спеціальних функцій відносяться розглянуті раніше сферичні функції, кульові функції, поліноми Лежандра, функції Бесселя та багато інших. Важливе значення при розв'язанні задач математичної фізики та її застосувань відіграють такі спеціальні функції, як поліноми Ерміта та функції Лагерра. Поліноми Ерміта, скажімо, визначаються формулою:

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \cdot \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}$$

а функції Лагерра - з формули:

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

Ці функції, зокрема, використовуються при вирішенні задач про рух електрона в кулонівському полі, про розподіл електромагнітних хвиль вздовж заданих напрямів, та деяких інших.

Спеціальним функціям притаманні властивості ортогональності. Ортогональними на інтервалі $[a, b]$ називаються функції, для яких виконується рівність:

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) p(x) dx = 0$$

де $p(x)$ - деяка вагова функція, $m \neq n$.

Ортогональність спеціальних функцій дозволяє при вирішенні широкого класу задач математичної фізики та її чисельних застосувань вдаватися до розкладання в ряди за цими функціями.

6.6 Контрольні запитання

1. У якому вигляді шукають розв'язання задачі Коші про коливання струни методом Даламбера?
2. У якому вигляді шукають розв'язання диференціального рівняння методом Фур'є?
3. У якому з методів рішення шукають у вигляді суперпозиції хвиль, що біжать?
4. У чому полягає фізичний сенс розв'язання задачі про коливання закріпленої струни методом Фур'є?
5. Як утворюються стоячі хвилі?
6. На які характеристики коливань струни впливають початкові умови?

7. Від яких величин залежить частота основної гармоніки коливань закріпленої струни?
8. Чи можна застосовувати метод Фур'є для вирішення завдання Коші про поширення тепла в нескінченному стрижні?
9. Яке рішення рівняння теплопровідності називають фундаментальним? У чому полягає його фізичний зміст?
10. У чому полягає фізичний сенс розв'язання задачі охолодження нескінченного стрижня?
11. Які функції називають гармонійними?
12. Що є узагальненням низки Фур'є для всієї числової прямої?
13. До розкладання до якого ряду зводиться рішення рівняння Лапласа в області зі сферичною симетрією?
14. Сформулюйте задачу Діріхле для кулі.
15. До розкладання до якого ряду зводиться рішення рівняння Лапласа в області із циліндричною симетрією?
16. У чому полягає ідея методу функції Гріна?
17. Наведіть приклади спеціальних функцій.
18. Які функції називають ортогональними?

7 ДЕЯКІ СТАЦІОНАРНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

7.1 Стаціонарний розподіл температури у шарі. Тепловий опір.

Розглянемо одновимірний варіант рівняння теплопровідності в стаціонарному режимі, коли в тілі температура перестає залежати від часу, але можливі стаціонарні теплові потоки, що виникають через взаємодію тіла з навколишнім середовищем або наявність джерел тепла в тілі. Покладемо $T = T(x)$ - температура в точках x не залежить від часу (стаціонарний режим, що встановився). Такий режим можливий, якщо граничні умови стаціонарні, внутрішні джерела тепла $f(x)$ $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{сек}}\right]$ не залежать від часу. Тоді рівняння розподілу температури у шарі має наступний вигляд

$$k \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x) + f(x) = 0$$

Або, за умови коли $f(x) = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x) = 0$$

Розглянемо простий випадок коли джерело тепла відсутнє $f(x) = 0$. Тоді загальний розв'язок стаціонарного рівняння має вигляд

$$T(x) = C_1 + x \cdot C_2$$

Для неоднорідних граничних умов 1 роду:

$$\begin{cases} T(x)|_{x=a} = T_1 \\ T(x)|_{x=b} = T_2 \end{cases}$$

отримуємо:

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{b - a}(x - a) \quad (7.1)$$

Покладемо, що: $T_2 \leq T_1$

Введемо наступні позначення : поточний температурний напір $\Delta T(x) = T(x) - T_2$, повний температурний напір $\Delta T_1 = T_1 - T_2$, товщина шару $\delta = b - a$ Тоді отримуємо

$$\Theta(x) = \frac{\Delta T(x)}{\Delta T_1} = 1 - \frac{x - a}{\delta}$$

$\Theta(x)$ - безрозмірний температурний напір. Напишемо закон Фур'є для стаціонарного рішення (7.1) (щільність потоку для стаціонарного рішення не залежить від координати):

$$I_x^Q(x) = -k \cdot \frac{\partial}{\partial x} T(x) = \frac{k}{\delta} \cdot \Delta T_1 = I_x^Q \quad (7.2)$$

З формули (7.2) випливає, що якщо щільність потоку через шар задана, то температура на правій стінці шару однозначно визначається через щільність потоку та температуру на лівій стінці шару. Визначимо: k / δ як теплову провідність стінки, δ / k – як термічний опір стінки Виразимо розподіл температури в стаціонарному режимі через щільність потоку тепла:

$$T(x) = T_1 - \frac{I_x^Q}{k} \cdot (x - a)$$

Через майданчик Σ , за час τ через стінку передається кількість теплоти, яка дається виразом

$$Q_\tau = I_x^Q \cdot \Sigma \cdot \tau = \frac{k}{\delta} \cdot \Delta T_1 \cdot \Sigma \cdot \tau$$

7.2 Неоднорідна стінка із шаровою структурою. Неоднорідні граничні умови 1 роду

Знайдемо розподіл температури у стаціонарних умовах у шаруватому середовищі. В цьому випадку щільність потоку через будь-який шар неоднорідного шаруватого середовища однакова. Розглянемо стінку, що складається з n однорідних шарів, що щільно прилягають один до одного, з параметрами $k_i, n_i, i = 1, 2, \dots$. Задаємо граничні умови 1 роду на лівій стінці першого шару і на $n + 1$ -ій правій стінці n -ого шару:

$$\begin{cases} T(x)|_{x=a} = T_1 \\ T(x)|_{x=b} = T_{n+1} \end{cases} \quad (7.3)$$

Позначимо температури на границях шарів як $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, а температурні напори на кожному шарі, як

$$\Delta T_1 = T_1 - T_2, \Delta T_2 = T_2 - T_3, \dots, \Delta T_n = T_n - T_{n+1},$$

Знайдемо тепер невідомі заздалегідь температури границь шарів T_2, T_3, \dots, T_n . Позначимо теплопровідності шарів наступним чином

$$\frac{k_i}{\delta_i} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

В стаціонарних умовах уздовж шарів іде загальний тепловий потік I_x^Q . Користуючись формулою (7.2), отримуємо систему рівнянь:

$$I_x^Q = \frac{k_1}{\delta_1} \Delta T_1 = \frac{k_2}{\delta_2} \Delta T_2 = \dots = \frac{k_n}{\delta_n} \Delta T_n$$

З якої маємо:

$$T_1 - T_{n+1} = I_x^Q \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{k_j} \quad (7.4)$$

Використовуючи граничні умови (7.3), отримуємо наступне співвідношення для визначення загального потоку теплоти

$$I_x^Q = (T_1 - T_{n+1}) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{k_j} \right)^{-1}$$

Повний термічний опір шаруватого середовища може бути записаний у вигляді:

$$\frac{\delta_\Sigma}{k_\Sigma} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{k_j}$$

де $\delta_\Sigma = b - a$ – повна товщина шаруватої стінки. Визначимо ефективний коефіцієнт теплопровідності для шаруватого середовища із товщиною δ_Σ :

$$k_\Sigma = \frac{\delta_\Sigma}{\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{k_j}}$$

За допомогою знайденого теплового потоку визначимо температуру на границях шарів:

$$T_p = T_1 - (T_1 - T_{n+1}) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{k_j} \right)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\delta_j}{k_j}, p = 2, 3, \dots, n + 1 \quad (7.6)$$

Ця формула означає, що якщо щільність потоку через шарувате середовище задана, то температура кожної стінці шару однозначно визначається через щільність потоку, температуру на лівій стінці шару і через параметри шарів. Це характеристики неоднорідних граничних умов першого роду.

7.3 Неоднорідні граничні умови 3 роду для шарової стінки

Шар (стінка) поділяє два рухомі середовища (рідина, газ). Тепловий потік у стаціонарних умовах передається від лівого середовища через стінку до правого середовища. Передачу тепла з одного нерухомого середовища до іншого через однорідну багат шарову тверду стінку називатимемо процесом теплопередачі. Будемо називати конвективним теплообміном перенесення тепла теплопровідністю та конвекцією. Будемо називати конвективною тепловіддачею передачу тепла від потоку рідини до твердого тіла. Граничні умови третього роду описують ці процеси. Для шару (стінки) граничні умови 3 роду мають вигляд:

$$\begin{cases} I_x^Q = \alpha_1 \cdot (T_{L1} - T(x)|_{x=a}) \\ I_x^Q = \alpha_2 \cdot (T(x)|_{x=b} - T_{L2}) \end{cases} \quad (7.7)$$

де: густина теплового потоку I_x^Q від рідини із температурою T_{L1} до лівої стінки із температурою $T(x)|_{x=a}$ та від стінки з температурою $T(x)|_{x=b}$ до рідини з температурою T_{L2} . Покладаємо $T_{L1} \geq T(x)|_{x=a}$ та $T(x)|_{x=b} \geq T_{L2}$, α_1 – коефіцієнт тепловіддачі лівої стінки, α_2 – коефіцієнт тепловіддачі правої стінки. Тоді, стаціонарна густина теплового потоку в стінці до правої її границі, як витікає із (7.2) дорівнює:

$$I_x^Q = \frac{k}{\delta} \cdot (T(x)|_{x=a} - T(x)|_{x=b}) \quad (7.8)$$

Невідомі заздалегідь температури границь шару визначаються за допомогою рівнянь (7.7) і (7.8):

$$T(x)|_{x=a} = T_1 = \frac{\alpha_2 \cdot T_{L2} + \alpha_1 \cdot \left(1 + \alpha_1 \cdot \frac{\delta}{k}\right) \cdot T_{L1}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\delta}{k}}$$

$$T(x)|_{x=b} = T_2 = \frac{\alpha_1 \cdot T_{L1} + \alpha_2 \cdot \left(1 + \alpha_1 \cdot \frac{\delta}{k}\right) \cdot T_{L2}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\delta}{k}}$$

Сформулюємо закон збереження теплового потоку у вигляді:

$$I_x^Q = K \cdot (T_{L1} - T_{L2})$$

де K - ефективний коефіцієнт теплопередачі стінки

$$K = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{k} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}$$

Визначимо термічний опір стінки як K^{-1} . Тоді, граничні умови типу 1 зводяться до граничних умов типу 3 (звісно, в стаціонарному випадку).

7.4 Завдання та запитання:

7.4.1 Розглянути багат шарову стінку та врахувати ефективний K^{-1} .

7.4.2 Знайти температури стінки при заданих температурах рідин

7.4.3 Знайти температуру кожному шарі у стінці.

7.5. Неоднорідні змішані граничні умови 4 роду для шарової стінки

Розглянемо стаціонарне рішення задачі для граничних умов змішаного типу:

$$\begin{cases} T(x)|_{x=a} = T_1 \\ I_x^Q = \alpha_2 \cdot (T(x)|_{x=b} - T_{L2}) \end{cases} \quad (7.9)$$

В стаціонарному випадку густина потоку дорівнює

$$I_x^Q = \frac{k}{\delta} (T_1 - T(x)|_{x=b}) \quad (7.10)$$

З рівнянь (7.9), (7.10) знаходимо температуру правої стінки:

$$T(x)|_{x=b} = T_2 = \frac{T_1 + \alpha_2 \cdot \frac{\delta}{k} \cdot T_{L2}}{1 + \alpha_2 \cdot \frac{\delta}{k}}$$

Величину густини потоку визначаємо за формулою (7.10). Розглянемо розподіл температур у шаруватому середовищі, що складається з n однорідних шарів у стаціонарному випадку для граничних умов 4 роду. Граничні умови мають вигляд (7.9), де точка b розташована на $n + 1$ границі. Рівняння (7.10) для багатошарового середовища замінюється на

$$I_x^Q = (T_1 - T(x)|_{x=b}) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{k_j} \right)^{-1} \quad (7.11)$$

Розв'язуючи узгоджено рівняння (7.9), (7.11) знайдемо температуру $T(x)|_{x=b}$ на $n + 1$ границі

$$T(x)|_{x=b} = T_{n+1} = \frac{T_1 + \alpha_2 \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{k_j} \cdot T_{L2}}{1 + \alpha_2 \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{k_j}}$$

Для шаруватої стінки гранична температура (див.(7.6)) дорівнює

$$T_p = T_1 - I_x^Q \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{k_j}, p = 2, 3 \dots, n + 1$$

7.6 Завдання та запитання:

7.6.1 Вивчити розподіл температур на поверхнях шарів багатошарової стінки у стаціонарному наближенні для змішаних граничних умов наступного виду

$$\begin{cases} I_x^Q = \alpha_1 \cdot (T_{L1} - T(x)|_{x=a}) \\ T(x)|_{x=b} = T_2 \end{cases}$$

7.6.2. Визначити потужність втрат тепла через цегляну стінку розміром 5×3 метри, товщиною 250 мм. Температури поверхонь стінки $T_1 = 20^\circ\text{C}$, $T_2 = -30^\circ\text{C}$

7.6.3 Визначити коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки, якщо при тепловому напорі $\Delta T_1 = T_1 - T_2 = 30^\circ\text{C}$ і $\delta = 30$ мм, щільність теплового потоку дорівнює $q = 100$ Вт/м².

7.6.4 Чавунна стінка товщиною 10 мм і алюмінієва стінка товщиною 20 мм покладені один на одного таким чином, що між ними є повітряний прошарок товщиною 0.01 мм. Визначити загальний термічний опір цієї багатошарової стінки. Порівняти з термічним опором без наявності повітряного прошарку, зробити висновок.

7.6.5 Обчислити щільність теплового потоку через плоску стінку, товщиною 30 мм, з температурою поверхонь Стінка виконана з: а) сталі, б) бетону, в) цегли.

7.6.6 Тепловий потік із щільністю $q = 20$ ккал/(сек · м²). проходить через стінку завтовшки $\delta = 30$ мм. Знайти градієнт температури на стінці, виконаної з: а) латуні; б) цегли; в) пробки.

7.6.7 Визначити теплову потужність, що передається через стінку розміром 5×4 метра, товщиною $\delta = 30$ мм, з температурою поверхонь $T_1 = 100^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$ для: а) графіту, б) заліза, в) дерева.

7.6.8 Визначити коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки, товщиною $\delta = 10$ мм, якщо температури поверхонь дорівнюють $T_1 = 100^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$, для теплового потоку: а) $q = 20$ ккал/(сек · м²), б) $q = 20$ Дж/(сек · м²), в) $q = 30$ ккал/(сек · м²).

7.6.9. Стіни сушильної камери виконані з цегли товщиною $\delta = 250$ мм та поролону завтовшки δ . Тепловий потік через стінку дорівнює $q = 100$ Дж/сек · м². Температура на зовнішній поверхні цегли $T_1 = 110^\circ\text{C}$, на зовнішній поверхні поролону $T_2 = 20^\circ\text{C}$. Знайти: а) температуру між шарами; б) товщину шару поролону.

7.6.10. Цегляна стінка розміщена у середовищі з коефіцієнтом тепловіддачі лівої поверхні $\alpha_1 = 23$ Вт/(м² · °C) і правої поверхні $\alpha_2 = 12$ Вт/(м² · °C) Температура газів з лівого боку $T_{L1} = 700^\circ\text{C}$, температура газів з правого боку $T_{L2} = 30^\circ\text{C}$. Знайти: а) щільність потоку тепла через стінку q , б) температуру T_1 і T_2 на поверхні стінки.

7.6.11. Сталева стінка парового котла товщиною $\delta = 12$ мм, нагрівається газами з температурою $T_{L1} = 1000^\circ\text{C}$ (коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_1 = 100$ Вт/(м² · °C)) та киплячою водою (коефіцієнт тепловіддачі

$\alpha_1 = 5000 \text{ Вт/ (м}^2 \cdot \text{°С)}$). Знайти: а) щільність потоку тепла через стінку q , б) температуру T_1 і T_2 на поверхні стінки.

7.6.12 Температура лівої поверхні стінки з цегли дорівнює $T_1 = 300^\circ\text{С}$ Права стінка омивається рідиною з температурою $T_2 = 20^\circ\text{С}$ (коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_2 = 5000 \text{ Вт/ (м}^2 \cdot \text{°С)}$) Знайти товщину стінки, якщо щільність теплового потоку дорівнює $q = 1000 \text{ Дж/ (сек} \cdot \text{м}^2)$.

7.7 Стаціонарна теплопровідність радіатора

Прямокутне ребро, що є шаром товщиною h шириною b і висотою L , розташоване на стінці, що підтримується при температурі T_W . Направимо вісь z перпендикулярно стіні. Розмір ребра вздовж осі z позначимо L . Осі x та y розташовані в площині стінки. Уздовж осі y розмір ребра позначимо b , уздовж осі x розмір ребра позначимо h . За умови $L, b \gg h$ можна покласти, що стаціонарна температура ребра змінюється лише вздовж осі z . Нехтуємо тепловим потоком через вузькі грані ребра. Тепловий потік надходить від стінки в ребро і витікає назовні через площу ребра вздовж осі x . Коефіцієнт тепловіддачі через широкі грані ребра у навколишнє середовище позначимо α . Вважатимемо, що α не залежить від координат. Граничну умову на широких гранях запишемо у вигляді

$$I_x^Q(z) = \alpha \cdot (T(z) - T_L)$$

Тут T_L - температура навколишнього середовища, $I_x^Q(z)$ - компонента густини теплового потоку вздовж осі x (перпендикулярно широким граням радіатора). Компонента $I_x^Q(z)$ залежить від координати z (температури ребра залежить лише від координати z). Отримаємо диференціальне рівняння теплопровідності ребра. Розглянемо всередині ребра два сусідні шари, розташованих у точках z і $z + dz$. Запишемо рівняння теплового балансу шару, розташованого між цими точками. Потік тепла через перетин ребра Σ , розташований у точці з координатою z від стінки, дорівнює

$$J_Q(z) = -I_z^Q(z) \cdot \Sigma$$

Потік тепла через перетин ребра $\Sigma = h \cdot b$, розташований у точці з координатою $z + dz$ від стінки дорівнює

$$J_Q(z + dz) = I_z^Q(z + dz) \cdot \Sigma$$

Всередині елемента об'єму ребра $dV = \Sigma \cdot dz$ за одиницю часу виділяється кількість тепла

$$J_Q(z) = (I_z^Q(z) - I_z^Q(z + dz)) \cdot \Sigma$$

В умовах рівноваги це тепло має витекти через поверхню ребра вздовж осі x через два майданчики з площею $2b \cdot dz$. Відповідно до граничних умов, маємо

$$dJ_Q(z) = \alpha \cdot (T(z) - T_L) \cdot 2 \cdot b \cdot dz$$

При цьому, умова балансу тепла має вигляд

$$(I_z^Q(z) - I_z^Q(z + dz)) \cdot h \cdot b = \alpha \cdot (T(z) - T_L) \cdot 2 \cdot b \cdot dz$$

В границі $dz \rightarrow 0$ отримуємо:

$$\frac{d}{dz} I_z^Q(z) = -\frac{\alpha}{h} \cdot (T(z) - T_L)$$

$$I_z^Q(z) = -k \cdot \frac{d}{dz} T(z)$$

Використовуючи закон Фур'є отримуємо рівняння теплопровідності у випадку реберної структури в стаціонарних умовах

$$\frac{d^2}{dz^2} T(z) = \frac{\alpha}{h \cdot k} \cdot (T(z) - T_L)$$

Граничні умови природно вибрати у вигляді

$$T(z)|_{z=0} = T_W$$

$$\frac{d}{dz}T(z)|_{z=L} = 0$$

Неважко переконатися, що розв'язок сформульованої вище задачі має наступний вигляд

$$T(z) = T_L + (T_W - T_L) \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{h \cdot k}} \cdot L\right)^{-1} \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{h \cdot k}} \cdot (z - L)\right)$$

7.8 Завдання та запитання:

7.8.1 Знайти потужність розсіювання тепла на ребрі та порівняти з потужністю розсіювання через площину основи ребра без радіатора. Дати коментар щодо оптимального вибору геометричних розмірів ребра.

7.9. Тривимірні стаціонарні рівняння теплових, хвильових та дифузійних процесів

Прикладами рівнянь еліптичного типу є рівняння Лапласа

$$\operatorname{div}(\nabla U(\mathbf{r})) = \Delta U(\mathbf{r}) = 0$$

І неоднорідне рівняння Пуассона

$$\Delta U(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

Ці рівняння виникають під час вирішення стаціонарних задач математичної фізики. Стаціонарні рівняння теплопровідності в одновимірному випадку тонкого шару вивчалися вище. Розглянемо тепер стаціонарні рівняння у просторі більшої розмірності. Як перший приклад розглянемо закон збереження заряду в однорідному провідному середовищі. У стаціонарному випадку це рівняння набуває вигляду

$$\operatorname{div}(\mathbf{I}_e(\mathbf{r})) = 0$$

Густина струму не залежить від часу. Використовуючи закон Ома для стаціонарного електричного поля $E(\mathbf{r})$ отримуємо

$$\mathbf{I}_e(\mathbf{r}) = \sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

У стаціонарному випадку поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ безвихрове та потенційне, тобто існує електричний потенціал $\varphi(\mathbf{r})$, з яким поле пов'язане співвідношенням

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$$

З отриманих співвідношень випливає рівняння Лапласа для потенціалу

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 0$$

Розглядаючи два рівняння з системи стаціонарних рівнянь Максвелла:

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}(\mathbf{r})) = 4 \cdot \pi \cdot \rho_e(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Отримуємо рівняння Пуассона для потенціалу електричного поля в однорідному середовищі

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{4 \cdot \pi}{\varepsilon} \cdot \rho_e(\mathbf{r})$$

Також вкажемо в якості прикладу на рівняння стаціонарних теплопровідності та дифузії, які в трьохвимірному випадку мають, відповідно, наступний вигляд:

$$\Delta T(\mathbf{r}) = 0$$

$$\Delta T(\mathbf{r}) = -\frac{1}{k} f(\mathbf{r})$$

$$\Delta\rho(\mathbf{r}) = 0$$

$$\Delta\rho(\mathbf{r}) = -\frac{1}{D}f(\mathbf{r})$$

Розглянемо обсяг середовища V з поверхнею Σ , орієнтованою зовнішньою (або внутрішньою) нормаллю $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Знайдемо функцію $\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in V$, що задовольняє рівнянню Лапласа або Пуассона та граничним умовам, що виглядають наступним чином:

1. Задача Діріхле (перша крайова задача)

$$\varphi(\mathbf{r})|_{r \in \Sigma} = \varphi_1(\mathbf{r})$$

2. Задача Неймана (друга крайова задача)

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{n}(\mathbf{r})|_{r \in \Sigma} = \varphi_2(\mathbf{r})$$

3. Третя крайова задача

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}), \mathbf{n}(\mathbf{r})|_{r \in \Sigma} + \frac{\alpha}{k} \cdot \varphi(\mathbf{r})|_{r \in \Sigma} = \frac{\alpha}{k} \cdot \varphi_3(\mathbf{r})$$

7.10 Теплообмін через циліндричну стінку

Розглянемо стаціонарний режим теплопровідності циліндричної стінки з внутрішнім радіусом r_1 і із зовнішнім радіусом r_2 . Рівняння теплопровідності в стаціонарних умовах, у відсутності джерел, в циліндричній системі координат r, z, φ , має вигляд:

$$\Delta T(r, z, \varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T(r, z, \varphi) = 0$$

Нехтуємо залежністю рішення від кутової змінної φ . Припустимо, що циліндр має велику довжину. В цьому випадку можна знехтувати залежністю температури від довжини z . Отримуємо одновимірне стаціонарне завдання з граничними умовами першого типу (задача Діріхле):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) T(r) = 0, \\ T(r)|_{r=r_1} = T_1, \\ T(r)|_{r=r_2} = T_2. \end{array} \right.$$

Введемо нову невідому функцію $U(r)$, за допомогою якої можна зменшити порядок диференціального рівняння:

$$U(r) = \frac{d}{dr} T(r)$$

Для знаходження цієї функції маємо рівняння

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) U(r) = 0$$

Розділяючи в ньому змінні

$$\frac{dU(r)}{U(r)} = - \frac{dr}{r}$$

Отримуємо його перший інтеграл

$$\ln(U(r)) + \ln(r) = \ln(C_1)$$

Звідки випливає, що

$$U(r) = \frac{C_1}{r}$$

Для знаходження температури, відповідно маємо рівняння

$$\frac{d}{dr} T(r) = \frac{C_1}{r}$$

Знову, розділивши в ньому змінні

$$dT(r) = C_1 \cdot \frac{dr}{r}$$

Отримуємо загальний розв'язок

$$T(r) = C_1 \cdot \ln(r) + C_2$$

Довільні сталі C_1, C_2 із використанням граничних умов:

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)}$$

$$C_2 = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{\ln(r)}{\ln(r_1) - \ln(r_2)}$$

З урахуванням знайдених співвідношень отримуємо:

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_1) - \ln(r_2)} \cdot (\ln(r) - \ln(r_1))$$

Тепловий потік при цьому через зовнішню стінку, площа якої дорівнює $2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot L$, де L – висота циліндра, дається наступним виразом

$$J_Q(r) = -k \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot L \cdot \frac{\partial}{\partial r} T(r)|_{r=r_2} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln(r_2) - \ln(r_1)} \cdot (T_1 - T_2)$$

Потік на одиницю довжини залежить від відношення радіусів і не залежить від площі зовнішньої поверхні.

7.11 Завдання та запитання:

7.11.1 Вирішити завдання Діріхле про розподіл температури в стаціонарних умовах для циліндричної стінки

7.11.2 Розв'язати завдання Неймана про розподіл температури у стаціонарних умовах для циліндричної стінки

7.11.3 Змійовик паронагрівача виконаний із сталеві труби із співвідношенням діаметрів $D_1/D_2 = 32/42$ мм. Температури зовнішньої поверхні $T_2 = 580^\circ\text{C}$, внутрішньої поверхні $T_1 = 450^\circ\text{C}$. Знайти питомий тепловий потік у розрахунку на одиницю довжини труби.

7.12 Теплообмін крізь кульову стінку

Розглянемо стаціонарне рівняння теплопровідності – рівняння Лапласа – у сферичних координатах r, θ, φ . Оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta T(r) = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \cdot T(r, \theta, \varphi) = 0$$

Оператор градієнта у сферичних координатах має вигляд

$$\nabla T(r) = \left(\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) T(r, \theta, \varphi)$$

де $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ – ортонормований базис сферичної системи координат. Розглянемо порожню кулю із внутрішнім радіусом r_1 і зовнішнім радіусом r_2 . Обмежимося пошуком рішення, за умов, коли температура змінюється лише вздовж радіусу стінки. На цьому шляху отримуємо рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) T(r) = 0$$

Двічі інтегруючи, приходимо до загального розв'язку у вигляді

$$T(r) = C_2 - \frac{C_1}{r}$$

Постійні інтегрування C_1 і C_2 визначимо із використанням граничних умов третього роду. Припустимо, шар заповнений рідиною з температурою T_{L1} , і внутрішня стінка має коефіцієнт тепловіддачі α_1 . Поза кулею

знаходиться рідина з температурою T_{L2} та з коефіцієнтом тепловіддачі α_2 .
 Гранична умова на внутрішній стінці має вигляд (тут зовнішня нормаль $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_r$):

$$-\frac{\partial}{\partial r} T(r)|_{r=r_1} = \frac{\alpha_1}{k} \cdot (T_{L1} - T(r)|_{r=r_1})$$

Гранична умова на зовнішній стінці має вигляд(де зовнішня нормаль $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_r$):

$$\frac{\partial}{\partial r} T(r)|_{r=r_2} = \frac{\alpha_2}{k} \cdot (T_{L2} - T(r)|_{r=r_2})$$

Використовуючи вищенаведені граничні умови, знаходимо сталі C_1 і C_2

$$-\frac{C_1}{r_1^2} = \frac{\alpha_1}{k} \cdot \left(T_{L1} - C_2 + \frac{C_1}{r_1} \right)$$

$$\frac{C_1}{r_2^2} = \frac{\alpha_2}{k} \cdot \left(T_{L2} - C_2 + \frac{C_1}{r_2} \right)$$

$$C_1 = \frac{1}{k} \frac{T_{L2} - T_{L1}}{\frac{1}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{\alpha_2 r_2^2} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

$$C_2 = \frac{T_{L1} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_2 r_2^2} - \frac{1}{k \cdot r_2} \right) + T_{L2} \left(\frac{1}{\alpha_1 r_1^2} - \frac{1}{k \cdot r_1} \right)}{\frac{1}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{\alpha_2 r_2^2} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

Відповідно, потік теплоти крізь зовнішню стінку має наступний вигляд

$$\begin{aligned} J_Q|_{r=r_2} &= -k \cdot 4\pi \cdot r_2^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} T(r)|_{r=r_2} = -k \cdot 4\pi \cdot r_2^2 \cdot \frac{1}{r_2^2} \cdot C_1 = \\ &= 4\pi \cdot K_B \cdot (T_{L1} - T_{L2}) \end{aligned}$$

де коефіцієнт теплопередачі шарової стінки дається співвідношенням

$$K_B = \left(\frac{1}{\alpha_1 r_1^2} + \frac{1}{\alpha_2 r_2^2} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right)^{-1}$$

7.13 Завдання та запитання:

7.13.1 Розв'язати задачу Діріхле про розподіл температури в стаціонарних умовах для кульової стінки (у радіальному наближенні).

7.13.2 Розв'язати задачу Неймана про розподіл температури у стаціонарних умовах для кульової стінки (у радіальному наближенні).

7.14 Теплообмін через випромінювання

Окрім передачі теплової енергії шляхом теплопровідності та конвекції, існує ще один механізм теплопередачі – передача тепла через випромінювання.

Будь-які нагріті тіла є джерелами випромінювання. Вони випромінюють електромагнітні хвилі, або, як впливає із законів квантової фізики – фотони (кванти електромагнітного випромінювання), які переносять енергію. Хвилі (фотони) можуть перебувати в термодинамічній рівновазі з речовиною, яка їх випромінює. В цьому випадку в середовищі виникає рівноважна об'ємна спектральна щільність енергії випромінювання, яка залежить від довжини хвиль (частоти) випромінювання та температури.

Закон розподілу об'ємної спектральної щільності енергії за частотами (розподіл Планка) має наступний вигляд

$$\rho_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

В термінах довжин хвиль він записується у наступній формі

$$\rho_\lambda(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{\lambda^5} \left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right)^{-1}$$

Тут частота ν та довжина хвилі λ випромінювання пов'язані співвідношенням $\nu = c \cdot \lambda^{-1}$. У наведених формулах $c = 3 \cdot 10^{10}$ см · сек⁻¹ – швидкість світла (у вакуумі), $h = 6.626 \cdot 10^{-27}$ г · см² · сек⁻¹ – постійна Планка, $k = 1.38 \cdot 10^{-16}$ ерг · °К⁻¹ – постійна Больцмана. Розмірності, відповідно $\rho_\nu(T)$ ерг · см⁻³ · сек та $\rho_\lambda(T)$ ерг · см⁻⁴

Рівноважне випромінювання у об'ємі поширюється ізотропно. Введемо вектор спектральної густини потоку рівноважного випромінювання, що припадає на одиницю тілесного кута

$$I_\nu(T) = \rho_\nu(T) \cdot \frac{c}{4\pi} \cdot \boldsymbol{\eta}$$

Тут $\boldsymbol{\eta}$ – одиничний вектор, що показує напрямок поширення теплової енергії. Спектральною інтенсивністю випромінювання називають щільність потоку, що припадає на одиницю тілесного кута:

$$I_\nu(T) = |I_\nu(T)| = \rho_\nu(T) \cdot \frac{c}{4\pi}$$

Елементом $d\Omega$ тілесного кута називають відношення майданчика площею $d\Sigma$ на сфері радіусу r до квадрату радіуса сфери. У сферичній системі координат маємо

$$d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$$

Виділимо з обсягу майданчик із вектором зовнішньої нормалі \boldsymbol{n} . Розрахуємо спектральну щільність потоку $B_\nu^0(T)$, що витікає з майданчика з одиничною площею з половини сфери у напрямку нормалі \boldsymbol{n} . Для цього проінтегруємо $I_\nu(T)$ за тілесним кутом :

$$\begin{aligned} B_\nu^0(T) &= \int_{2\pi} (I_\nu(T), \boldsymbol{n}) d\Omega = \\ &= \rho_\nu(T) \cdot \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cdot (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{n}) d\theta = \rho_\nu(T) \cdot \frac{c}{4} = \pi \cdot I_\nu(T) \end{aligned}$$

Позначимо, як β - кут між нормаллю до майданчика та вектором η . Також визначимо проекцію вектору $I_v(T)$ на напрямок нормалі, як

$$I_{v,\beta}(T) = (I_v(T), \mathbf{n}) = I_v(T) \cdot \cos(\beta)$$

Отримуємо формулу закону випромінювання-формулу Ламберта, яка справедлива для рівноважного випромінювання Планка:

$$I_{v,\beta}(T) = I_{v,0}(T) \cdot \cos(\beta)$$

Розглянемо інтегральний (за частотою) закон випромінювання Стефана Больцмана. Інтегральна щільність потоку з напівсфери дорівнює

$$B^0(T) = \int_0^{\infty} B_v^0(T) dv = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

де стала випромінювання абсолютно чорного тіла

$$c_0 = 5.67 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot (\text{°К})^{-4}$$

Зауважимо, що так зване сіре тіло визначають, вводячи ступінь чорноти ε (інтегральний коефіцієнт випромінювання), за формулою

$$B(T) = \varepsilon \cdot B^0(T)$$

Спектральний коефіцієнт випромінювання в цьому випадку має вигляд

$$B_v(T) = \varepsilon_v \cdot B_v^0(T)$$

Як впливає з експерименту, нагріті тіла обмінюються тепловою енергією. Говорять, що між такими тілами діє променистий теплообмін. Відповідно до закону Кірхгофа, променистий теплообмін характеризується такими інтегральними коефіцієнтами, характерними для кожного тіла: A – поглинальна здатність тіла, R – відбивна здатність тіла, D – пропусчна здатність тіла. Коефіцієнти задовольняють закону збереження потоку

$$A + R + D = 1$$

У випадку твердих тіл, що приймають участь у теплообміні можна покласти: $D = 0$.

Явище теплообміну завдяки випромінюванню – це складний процес багаторазових обмінів енергією. Розглянемо спрощений випадок обміну енергією двох твердих тіл, поверхні яких плоскі та паралельні одна одній. Обміном з будь-якими третіми тілами будемо нехтувати. Позначимо температури, поглинальні здібності та щільності потоків, що виходять з поверхонь тіл, через: T_1, A_1, B_1 та T_2, A_2, B_2 . В якості сценарію хвильового теплообміну розглянемо наступну низку процесів. Тіло 1 посилає потік із щільністю B_1 у бік тіла 2, яке поглинає частину енергії випромінювання у кількості $A_1 \cdot B_1$. Друге тіло відбиває частину потоку кількістю $(1 - A_2) \cdot B_1$ у бік тіла 1.

Від цієї частки потоку перше тіло поглинає $A_1 \cdot (1 - A_2) \cdot B_1$ і відбиває $(1 - A_1) \cdot (1 - A_2) \cdot B_1$. У подальшому, друга поверхня знову відбиває кількість потоку $A_2 \cdot (1 - A_1) \cdot (1 - A_2) \cdot B_1$ і поглинає у кількості $(1 - A_1) \cdot (1 - A_2)^2 \cdot B_1$ і так далі до нескінченності. Аналогічні співвідношення отримуємо при розгляді процесів з другою поверхнею, у цьому випадку достатньо зробити заміну індексів $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$. Знайдемо результуючу густину потоку B_{12} , яку перша поверхня передає другій поверхні. Для цього із щільності потоку B_1 віднімемо ту щільність потоку, яка повертається і знову поглинається:

$$(1 + P + P^2 \dots) \cdot (1 - A_2) \cdot A_1 \cdot B_1 = \frac{(1 - A_2) \cdot A_1}{1 - P} \cdot B_1,$$

$$P = (1 - A_1) \cdot (1 - A_2)$$

Віднімемо також щільність потоку, яка поглинається першою поверхнею, із випромінювання з другої поверхні:

$$A_1 \cdot (1 + P + P^2 \dots) \cdot B_2 = \frac{A_1}{1 - P} \cdot B_2$$

В результаті отримуємо

$$B_{12} = B_1 - \frac{(1 - A_2) \cdot A_1}{1 - P} \cdot B_1 - \frac{A_1}{1 - P} \cdot B_2 = \frac{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}$$

В умовах теплообміну за рахунок випромінювання поглинальна здатність тіла та інтегральний ступінь чорноти ε співпадають одна з одною: $A_1 = \varepsilon_1, A_2 = \varepsilon_2$. З урахуванням вищенаведеного, отримуємо

$$B_{12} = \varepsilon_r \cdot c_0 \cdot \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right)$$

Де приведена ступінь чорноти ε_r дорівнює

$$\varepsilon_r = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)^{-1}$$

Для зниження ефективності теплообміну використовують екрани між тілами. Помістимо тонкостінний екран між двома паралельними поверхнями двох тіл. Для спрощення припустимо, що коефіцієнти чорноти тіл і екрана однакові. Променистий теплообмін 1 та 2 тіла розраховується за допомогою вищенаведеними формулами. Внаслідок стаціонарності завдання та закону збереження щільність потоку від тіла 1 до тіла 2 має збігатися із щільністю потоку від 1 тіла до екрану та від екрану до 2 тіла. Отже

$$B_{1e} = \varepsilon_r \cdot c_0 \cdot \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_e}{100} \right)^4 \right) = B_{2e} = \varepsilon_r \cdot c_0 \cdot \left(\left(\frac{T_e}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right)$$

Звідки випливає, що в стаціонарних умовах температура екрану має дорівнювати

$$\left(\frac{T_e}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right)$$

Звідки отримуємо

$$B_{1e} = B_{2e} = \frac{1}{2} \cdot B_{12}$$

Отже, за наявності одного екрана щільність потоку променевої енергії, що передається, зменшується в два рази.

7.15 Завдання та запитання:

7.15.1 Знайти формулу передачі щільності променистого потоку між двома тілами, якщо між тілами розташовані n екранів. Ступені чорноти тіл та екранів покласти однаковими.

7.15.2 Перевірити, що відношення щільності променистого потоку тепла для системи двох тіл з n однаковими екранами B_e до щільності потоку між двома тілами без екранів B_{12} дорівнює:

$$\frac{B_e}{B_{12}} = \left(1 + n \cdot \frac{2 - \varepsilon_e \varepsilon}{2 - \varepsilon \varepsilon_e} \right)^{-1}$$

Тут $\varepsilon, \varepsilon_e$ – ступені чорноти тіл та екранів.

7.15.3 Необхідно знизити променистий теплообмін між тілами у 10 разів. Які ступені чорноти екранів і тіл, і скільки екранів слід вибрати для вирішення цього завдання?

7.15.4 Для зберігання льоду використовують дерев'яний ящик із кришкою, температура якої 20°C . Знайти густину променистого теплового потоку від кришки до льоду.

7.15.5 У скільки разів зміниться щільність променистого теплового потоку від кришки до льоду (завдання 4), якщо між кришкою та льодом прокласти шар: а) алюмінієвої фольги; в) паперу.

7.15.6 Між цегляною та дерев'яною стінками проклали шар тирси та бавовняної тканини. Температура дерева 30°C , температура цегли 30°C . Знайти променистий тепловий потік від дерев'яної стінки до цегляної стінки

7.16 Метод функції джерела для рівняння Лапласа

Існує інтегральне представлення рішень граничної задачі для рівняння Лапласа, яке ми напишемо без доказів. Цей вираз називається основною інтегральною формулою Гріна:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{\partial}{\partial n'} U(\mathbf{r}') - U(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \right] d\Sigma'$$

Де $U(\mathbf{r})$ задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta U(\mathbf{r}) = 0$ у об'ємі V з поверхнею Σ , $\frac{\partial}{\partial n'}$ – похідна за напрямом зовнішньої нормалі.

$$R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Це формальне рішення, так як під інтегралом по поверхні стоїть невідома функція та її нормальна похідна. Одночасно задати ці граничні дані неможливо. Але це рішення можна перетворити за допомогою методу функції джерела. Для цього розглянемо довільну гармонічну функцію $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ за змінними \mathbf{r}, \mathbf{r}' і запишемо другу формулу Гріна для цих функцій:

$$\begin{aligned} \iiint_V (U(\mathbf{r}') \cdot \Delta V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \Delta U(\mathbf{r}')) dV' = \\ = \iint_{\Sigma} \left(U(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} U(\mathbf{r}') \right) d\Sigma' = 0 \end{aligned}$$

Складаючи ці дві формули отримуємо рівняння для визначення функції джерела:

$$U(\mathbf{r}) = \iint_{\Sigma} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} U(\mathbf{r}') - U(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\Sigma'$$

Таким чином, функція джерела виглядає як

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} + V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

Розглянемо тепер для прикладу задачу Діріхле с граничними умовами виду

$$U(\mathbf{r}')|_{r' \in \Sigma} = f(\mathbf{r}')$$

Вибираємо функцію $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ виходячи з умови:

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r' \in \Sigma} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \Big|_{r' \in \Sigma}$$

Отримуємо функцію джерела задачі Діріхле, яка задовольняє граничним умовам на поверхні Σ :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r' \in \Sigma} = 0$$

Користуючись наведеними вище формулами отримуємо розв'язок задачі Діріхле, який містить функцію джерела:

$$U(\mathbf{r}) = - \iint_{\Sigma} \left[f(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] d\Sigma'$$

Таким чином, фактично, для отримання функції джерела треба розв'язати задачу Діріхле для функції $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$\begin{cases} \Delta V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \\ V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r' \in \Sigma} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \Big|_{r' \in \Sigma} \end{cases}$$

За допомогою цього рішення знаходимо необхідну нам функцію Гріна і користуючись її властивостями, отримуємо рішення відповідної задачі Діріхле. Наведемо приклад такого рішення в електростатиці. У цьому випадку функція джерела є потенціал у точці спостереження $\mathbf{r}(x, y, z)$, від точкового джерела, розташованого в точці $\mathbf{r}'(x', y', z')$, всередині заземленої поверхні провідника Σ . Така задача у електростатиці, зазвичай, вирішується методом зображень. Знайдемо функцію джерела для напівпростору, границя якого є площиною $z' = 0$.

Помістимо в точку з координатами $\mathbf{r}'_1(x', y', -z')$, одиничний негативний заряд – дзеркальне зображення точкового заряду $\mathbf{r}'(x', y', z')$. У точці спостереження потенціал від цього додаткового заряду дорівнює

$$-\frac{1}{4\pi R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{1}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)}$$

Покладемо, що

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_1} \frac{1}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)}$$

Неважко переконатися, що рівняння Лапласа для обраної функції $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ задовольняється. Звідки випливає, що функція джерела, яка відповідає завданним граничним умовам дорівнює

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_1} \frac{1}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)} - \frac{1}{4\pi R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_1} \frac{1}{R(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1)}$$

7.17 Завдання та запитання:

7.17.1 Знайти нормальну похідну функції джерела.

7.17.2 Побудувати функцію джерела для нескінченного плоского шару.

7.18 Стаціонарні рівняння гідродинаміки – гідростатика, рівняння Бернуллі

Запишемо відоме рівняння Ейлера

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)} \cdot \nabla P(\mathbf{r}, t) + \mathbf{g}$$

у стаціонарному варіанті для нерухомої рідини

$$\nabla P(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}$$

де $v(r, t), P(r, t)$,відповідно, визначають поля швидкостей та тисків. Це рівняння описує механічну рівновагу рідини. За відсутності зовнішніх сил отримуємо його просте рішення

$$\rho(\mathbf{r}) = \text{const}$$

Якщо знехтуємо стисливістю рідини (тобто вважатимемо постійною об'ємну щільність $\rho(\mathbf{r}) = \text{const}$), отримуємо стаціонарне рішення (прискорення $\mathbf{g} = g \cdot \mathbf{e}_z$ спрямовано вздовж осі z :

$$p(z) = -\rho \cdot g \cdot z + \text{const}$$

Вважаючи, що на висоті $z = h$ до зовнішньої горизонтальної поверхні рідини прикладений однорідний тиск p_0 , отримуємо рішення:

$$p(z) = \rho \cdot g \cdot (h - z) + p_0$$

З отриманого рішення випливає, що якщо рідина рівноважна у полі тяжкості з прискоренням, спрямованому уздовж осі z , то тиск і щільність можуть залежати тільки від координати z . В іншому випадку в рідині почався б рух елементів об'єму в площині, перпендикулярної осі z . Але оскільки тиск і щільність у рівноважних станах визначають температуру, то звідси випливає, що й температура має залежати лише від координати z .

Розглянемо стаціонарний рух рідини за умови сталості швидкості за часом

$$\frac{\partial}{\partial t} v(\mathbf{r}) = 0$$

Зручно ввести питому величину

$$w = \varepsilon + p \cdot v$$

і записати відоме рівняння Гіббса в стані локальної рівноваги для системи із постійною концентрацією $dc = 0$

$$dw = T \cdot ds + v \cdot dp$$

Для ізоентропічної течії та питомого об'єму $v = \rho^{-1}$ отримуємо

$$dw = \frac{1}{\rho} \cdot dp$$

або

$$\nabla w(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p(\mathbf{r})$$

Рівняння Ейлера перепишемо у наступному вигляді:

$$(\mathbf{v}(\mathbf{r}), \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\nabla w(\mathbf{r}) + \mathbf{g}$$

Використовуючи векторну тотожність

$$\frac{1}{2} \nabla v(\mathbf{r})^2 = [\mathbf{v}(\mathbf{r}) \otimes \text{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{r}))] + (\mathbf{v}(\mathbf{r}), \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

запишемо об'ємну силу тяжіння в термінах градієнта потенціалу притягання:

$$\mathbf{g} = g \cdot \mathbf{e}_z = -\nabla(g \cdot z)$$

Отримуємо рівняння Ейлера для стаціонарної течії в полі тяжіння

$$[\mathbf{v}(\mathbf{r}) \otimes \text{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{r}))] = \nabla \left(\frac{v(\mathbf{r})^2}{2} + w(\mathbf{r}) + g \cdot z \right)$$

Стаціонарна швидкість частинок рідини $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в різних точках об'єму залежить від координат. Визначимо лінії струму рідини, такі, що стаціонарний одиничний вектор дотичний до лінії струму $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ збігається у напрямку зі швидкістю $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в даній точці. Помножимо отримане рівняння Ейлера скалярно на $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ і одержимо

$$\left(\mathbf{s}(\mathbf{r}), \nabla \left(\frac{v(\mathbf{r})^2}{2} + w(\mathbf{r}) + g \cdot \mathbf{z} \right) \right) = 0$$

Тобто уздовж лінії струму маємо інтеграл руху

$$\frac{v(\mathbf{r})^2}{2} + w(\mathbf{r}) + g \cdot \mathbf{z} \Big|_{\mathbf{s}(\mathbf{r})} = const$$

Це відоме рівняння Бернуллі. Відзначимо, що ліва частина рівняння постійна на вибраній лінії струму, але це постійне значення буде різним на різних лініях струму. Цю рівність називають першим інтегралом рівняння руху чи інтегралом Бернуллі. Якщо значення постійної Бернуллі відоме в будь-якій точці потоку, це рівняння дозволяє обчислити швидкість і тиск в будь-якій іншій точці на лінії струму.

7.19 Завдання та запитання:

7.19.1 Рідина витікає з бака по трубі. Знайти швидкість витікання рідини з труби, що знаходиться на висоті $h = 0$, якщо рівень рідини у баку знаходиться на висоті h . Рідина нестислива з об'ємною щільністю ρ . Перетин бака набагато більший за переріз труби. Тиск зовні атмосферний.

7.19.2 Через греблю заввишки z_1 рідина переливається по лінії струму. Знайти швидкість рідини на висоті $z_2 < z_1$, якщо рідина нестислива з щільністю ρ . Швидкість рідини в точці 1 набагато менше швидкості точці 2.

7.19.3 Крило обтікають дві лінії струму, що починається в точці з тиском p_0 і швидкістю v_0 далеко від крила зліва. У двох точках 1 та 2 на крилі, що знаходяться на відстані h одна від одної, швидкості потоку дорівнюють v_1 (верх крила) і $v_2 < v_1$ (знизу крила). Знайти підйомну силу крила, якщо його площа $S = 20 \text{ м}^2$. Покласти $v_1 = 200 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$, $v_2 = 180 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

Основні

1. Мартиненко М.А., Легеза В.П. Інженерні задачі математичної фізики : навч. пос. Київ : НУХТ, 2008. 389 с. ISBN 978-966-612-077-2
2. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики : монографія. Київ : Інрес : Воля, 2006. 332 с. ISBN 966-8329-25-2
3. Герасимчук В.С. Методи математичної фізики. Части 1. Вступ до теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних : навч. пос. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 25 с.
URL <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46092> (дата звернення: 31.03.2024)

Додаткові

1. Parthasarathy H. Developments in Mathematical and Conceptual Physics. Concepts and Applications for Engineers. Springer Singapore, 2020. 427 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-15-5058-4>
2. Riley K. F., Hobson M. P., Bence S. J. Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide. Published by Cambridge University Press, 2006. 1363 p. ISBN 10: 0521679710 / ISBN 13: 9780521679718
3. Blenow M. Mathematical Methods for Physics and Engineering. Publisher: CRC Press, 2018. 736 p. ISBN 9781351676076
4. Fox H., Bolton W. Mathematics for Engineers and Technologists. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2002. 337 p. ISBN 978-0-7506-5544-6. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-5544-6.X5000-0>
5. Xin-She Yang. Engineering Mathematics with Examples and Applications. Publisher : Academic Press, 2017. 400 p. ISBN 978-0-12-809730-4
6. Paola Lecca, Angela Re Theoretical physics for biological systems. Publisher : CRC Press : Taylor & Francis Group, 2019. 160 p. ISBN 9781138552418
7. Бобик О.І., Бобик І.О., Литвин В.В. Рівняння математичної фізики : навч. пос. Львів : «Новий Світ – 2000», 2020. 256 с. ISBN: 978-966-418-122-5

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЗЧИК

| | | | |
|-------------------|----|----------------------|----|
| Бернуллі рівняння | 87 | Лапласа рівняння | 52 |
| Бесселя функції | 57 | Лежандра поліноми | 55 |
| Гамільтона | 12 | Лінія рівня | 9 |
| оператор | | | |
| Годограф | 13 | Метод функції | 84 |
| | | джерела | |
| Гradient | 8 | Момент інерції | 17 |
| Граничні умови | 64 | Остроградського | 19 |
| 3 роду | | теорема | |
| Гріна функції | 58 | Похідна за напрямком | 15 |
| Даламбера метод | 36 | Скалярне поле | 8 |
| Діріхле задача | 56 | Стокса теорема | 21 |
| Ерміта поліноми | 58 | Тензор | 18 |
| Крайові задачі | 33 | Тепловий опір | 61 |
| Ламе | 52 | Теплопровідності | 46 |
| коефіцієнти | | рівняння | |
| Лапласа | 12 | Фур'є метод | 39 |
| оператор | | | |

ДОДАТКИ

Таблиця 1 – Теплові властивості твердих тіл

| Тверде тіло | Коефіцієнт теплопровідності k ($Вт/м \cdot C^\circ$) | Коефіцієнт температуропровідності κ ($м^2/с$) | Питома теплоємність c ($Дж/кг \cdot C^\circ$) | Об'ємна щільність ρ ($г \cdot см^3$) |
|-------------|--|--|---|---|
| Цегла | 0.5 | $5.2 \cdot 10^{-7}$ | 750 | 1.8 |
| Корок | 0.047 | $2.78 \cdot 10^{-7}$ | 1884 | 0.24 |
| Алюміній | 220 | $8.4 \cdot 10^{-5}$ | 920 | 2.7 |
| Чавун | 52.3 | $1.7 \cdot 10^{-5}$ | 550 | 7.0 |
| Бетон | 1.75 | $5.56 \cdot 10^{-7}$ | 880 | 2.3 |
| Мармур | 2.77 | 808 | 2.7 | |
| Мідь | 401 | $1.11 \cdot 10^{-4}$ | 380 | 8.9 |
| Сталь | 50 | $1.17 \cdot 10^{-5}$ | 460 | 7.8 |
| Вольфрам | 162.8 | $6.3 \cdot 10^{-5}$ | 125.6 | 19.3 |
| Пороло | 0.03 | | | |
| Латунь | 100 | $3.4 \cdot 10^{-5}$ | 380 | 8.5 |
| Графіт | 1500 | | | |
| Залізо | 92 | $2.3 \cdot 10^{-5}$ | 460 | 7.8 |
| Дерево | 0.15 | $8.2 \cdot 10^{-8}$ | 2700 | 0.4 |
| Свинець | 35.3 | $2.4 \cdot 10^{-5}$ | 120 | 11.3 |
| Азбест | 0.022 | 0.576 | | |
| Стекло | 0.814 | 837 | 2.71 | |
| Повсть | 0.058 | 0.33 | | |
| Срібло | 418.7 | $1.7 \cdot 10^{-4}$ | 251.2 | 10.52 |

Таблиця 2 – Теплові властивості рідин

| Рідина | Коефіцієнт теплопровідності k (Вт/м·С°) | Коефіцієнт температуропровідності κ , (м ² /с) | Питома теплоємність c (Дж/кг·С°) | Об'ємна щільність ρ , (г·см ³) |
|---------|---|--|------------------------------------|---|
| Вода | 0.6 | $0.143 \cdot 10^{-6}$ | 4200 | 1.0 |
| Керосин | 2140 | 0.8 | | |

Таблиця 3 – Теплові властивості газів

| Газ | Коефіцієнт теплопровідності k (Вт/м·С°) | Коефіцієнт температуропровідності κ , (м ² /с) | Питома теплоємність c (Дж/кг·С°) | Об'ємна щільність ρ , (г·см ³) |
|--------------|---|--|------------------------------------|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Вуглекислота | 0.016 | $0.83 \cdot 10^{-5}$ | 830 | 1.98 |
| Аміак | 0.027 | $0.17 \cdot 10^{-4}$ | 2100 | 0.65 |
| Гелій | 0.174 | $1.9 \cdot 10^{-4}$ | 5200 | 0.18 |
| Повітря | 0.025 | $1.9 \cdot 10^{-4}$ | 1000 | 1.29 |
| Азот | 0.025 | $1.6 \cdot 10^{-5}$ | 1000 | 1.25 |
| Хлор | 3.21 | | | |
| Водень | 0.186 | $11 \cdot 10^{-5}$ | 14000 | 0.081 |

Таблиця 4 – Пружні властивості речовин

| Речовина | Модуль Юнга E (10^{10} Н/м ²) | Коефіцієнт Пуассона |
|----------|--|---------------------|
| Сталь | 21 | 0.293 |
| Алюміній | 7.05 | 0.345 |
| Золото | 7.8 | 0.44 |
| Мідь | 12.98 | 0.343 |
| Стекло | 6.0 | 0.2 |
| Резина | 0.0002 | 0.47 |
| Свинець | 1.62 | 0.441 |

Таблиця 5 – Дифузія речовини А в речовині В

| Середа, де проходить процес дифузії А | Дифундуюча речовина | Коефіцієнт дифузії, D (м ² /с) |
|---------------------------------------|---------------------|---|
| Гелій | Аргон | 0.7 |
| Повітря | Водень | 0.64 |
| Азот | Кисень | 0.2 |
| Повітря | Етиловий спирт | 0.1 |
| Водень | Метиловий спирт | 0.5 |
| Повітря | Оцтова кислота | 0.11 |
| Кисень | Бензол | 0.18 |
| Кремній | Водень | 0.0094 |
| InAs | In | $\square \cdot 10 \square$ |
| Se | Fe | 10- \square |
| H ₂ O | HCl | $2.23 \cdot 10^{-2}$ |
| H ₂ O | NH ₃ | $1.21 \cdot 10^{-2}$ |

Таблиця 6 – Коефіцієнти випромінювання (ступеню чорноти) поверхонь

| Матеріал стінки | Ступень чорноти, D, ε |
|-------------------|-----------------------|
| Алюмінієва фольга | 0.04 |
| Папір | 0.55 |
| Бетон | 0.85 |
| Вода | 0.96 |
| Дерево | 0.91 |
| Цегла | 0.9 |
| Лід | 0.97 |
| Тирса | 0.75 |
| Стекло | 0.92 |
| Бавовняна тканина | 0.77 |

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж}$$

Для вільної конвекції коефіцієнт тепловіддачі повітря $5 \leq \alpha \leq 25$ (Вт/м·К°), вода $20 \leq \alpha \leq 100$ (Вт/м·К°)

Для вимушеної конвекції коефіцієнт тепловіддачі повітря $10 \leq \alpha \leq 200$ (Вт/м·К°), вода $50 \leq \alpha \leq 10000$ (Вт/м·К°)

Навчальне електронне видання

ГЕРАСИМОВ Олег Іванович

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ І ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ В
ЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Підручник

Видавець і виготовлювач

Одеський державний екологічний університет

вул. Львівська, 15, м. Одеса, 65016

тел./факс: (0482) 32-67-35

E-mail: info@odeku.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

ДК № 5242 від 08.11.2016