

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ВЗВЕСИ В ВОДНОМ ПОТОКЕ

В статье рассмотрены различные конечно-разностные схемы при моделировании неустановившейся турбулентной диффузии взвеси в водном потоке в плоской постановке задачи. Выполнен анализ полученных решений, дана оценка погрешности расчетов и оптимизированы параметры сетки. Приводятся рекомендации для выполнения инженерных расчетов.

Ключевые слова: конечно-разностная схема, математическая модель, неустановившаяся турбулентная диффузия, взвесь.

Введение. Численный эксперимент широко применяется в настоящее время при различных изысканиях. Исследования турбулентной диффузии взвеси при дампинге грунтов не являются исключением. При моделировании этого процесса зачастую пользуются методом конечных разностей, который можно реализовать по явной, неявной и смешанной схемам. Упомянутые схемы обладают своими преимуществами и недостатками. Выполним анализ решений по этим схемам и выберем более подходящую схему.

Материалы и методы исследования.

Модель неустановившейся турбулентной диффузии взвеси в полярной системе координат с начальными и граничными условиями можно записать в виде [1, 2]:

$$\partial C/\partial t = D_T(\partial^2 C/\partial r^2) + D_T(\partial C/\partial r)/r - u(C/H), \quad (1)$$

$$C(t,r) = C_0, \text{ при } r \leq r_0 \text{ и } t = 0,$$

$$C(t,r) = 0, \text{ при } r > r_0 \text{ и } t = 0,$$

$$uC(t,r) - D_B(\partial C/\partial y) = 0, \text{ при } y = 0, t > 0,$$

$$\partial C/\partial y = 0 \text{ и } q_B = uC(t,r), \text{ при } y = H, t > 0,$$

где C – концентрация взвеси, г/м^3 ; t – время, отсчитываемое после сброса грунта, с; D_T и D_B – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$; r – радиус, расстояние от центра системы координат в горизонтальной плоскости до рассматриваемой точки, м; u – гидравлическая крупность частиц, м/с; H – глубина акватории, м; C_0 – значение концентрации взвеси в облаке в начальный момент времени, г/м^3 ; r_0 – начальный радиус пятна, м; q_B – вертикальный поток оседающей взвеси, $\text{г}/(\text{м}^2\text{с})$.

В этой модели пятно взвеси представлено в виде круга. Начало полярной системы координат постоянно находится в центре пятна и перемещается вместе с ним.

Решим модель (1) методом конечных разностей. Этот метод широко применяется при решении дифференциальных уравнений в частных производных и его использование не нуждается в каком-либо обосновании. Отметим лишь, что данным методом можно выполнить решение по явной, неявной или смешанной схемам [3, 4].

Рассмотрим сначала явную конечно-разностную схему (рис. 1).

На схеме индексом k обозначены срезы пятна взвеси от центра к периферии в различные моменты времени с шагом Δt . Индексом n обозначена нумерация колец от центра, шаг между кольцами – Δr . Среднее значение концентрации взвеси в k -й момент времени в пределах кольца с номером n расположено в его центре и обозначено $C_{k,n}$. Это значение находится на расстоянии $r_n = (2n-1)\Delta r/2$ от центра пятна.

Выразив все частные производные в уравнении (1) в виде разности значений сеточной функции по схеме на рис. 1 и решив его относительно $C_{k+1,n}$, получим [1]:

$$C_{k+1,n} = (1 - 2a - 2f)C_{k,n} + a(b_n C_{k,n+1} + d_n C_{k,n-1}), \quad (2)$$

при $(a + f) \leq 0,5$ и $n \geq 2$;

при $n = 1$

$$C_{k+1,1} = (1 - 2a - 2f)C_{k,1} + 2aC_{k,2}, \quad (3)$$

где $a = D_T \Delta t / \Delta r^2$; $f = u \Delta t / (2H)$; $b_n = 2n / (2n - 1)$; $d_n = (2n - 2) / (2n - 1)$.

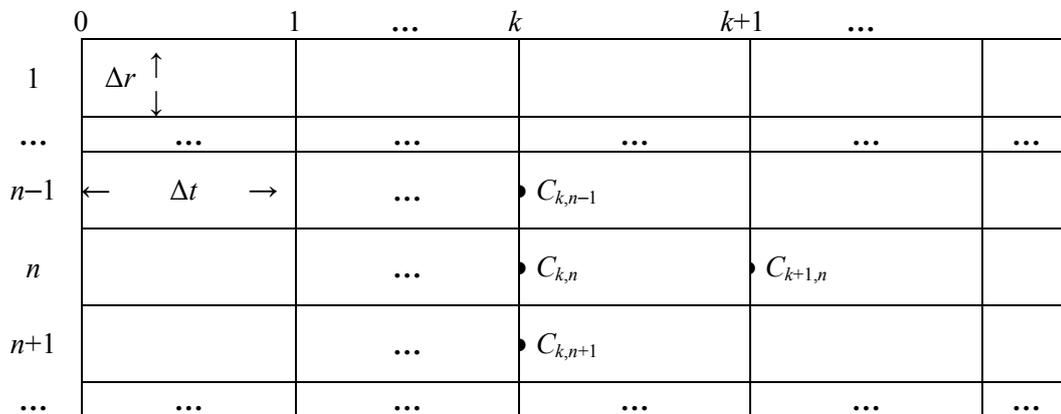


Рис. 1 – Явная конечно-разностная схема

Полученные уравнения (2) и (3) позволяют по значениям концентрации взвеси в пятне на k -м временном срезе рассчитать значения на следующем $(k+1)$ -м срезе. Расчет выполняется, начиная со среза $k=1$. На предшествующем для него срезе ($k=0$) распределение значений концентрации взвеси в пятне задается: в начальном количестве колец N_0 предполагается равномерное распределение (вообще говоря, можно задать любое распределение) взвеси с концентрацией C_0 . На каждом шаге во времени количество колец в пятне увеличивается на 1, поэтому на k -м временном срезе общее количество колец в пятне составляет $N=N_0+k$. При $n > N$ значения $C_{k,n}=0$.

По формулам (2) и (3) видно, что сумма коэффициентов при значениях концентрации взвеси равна $(1-2f)$. Это означает, что на $(k+1)$ -м временном срезе количество вещества в $(1-2f)$ раза меньше, чем на предыдущем k -м. Исходя из этого, можно записать условие проверки расчетов на каждом временном срезе, учитывая, что показатель количества взвеси в n -м кольце равен $(2n-1)C_{k,n}$, здесь $(2n-1)$ – относительная площадь кольца,

$$\sum_{n=1}^{N_0+k} (2n-1)C_{k,n} = (1-2f)^k \sum_{n=1}^{N_0} C_0 (2n-1) = C_0 N_0^2 (1-2f)^k, \quad (4)$$

где N_0 и C_0 – количество колец и значение концентрации взвеси в пятне на нулевом (начальном) временном срезе соответственно.

Явная конечно-разностная схема имеет преимущество в том, что решение на следующем временном срезе получается сразу по значениям сеточной функции на предыдущем срезе. Ее недостаток состоит в неустойчивости решения при $(a+f) > 0,5$.

Неявная конечно-разностная схема абсолютно устойчива. Однако решение по этой схеме требует использования метода прогонки. Рассмотрим это решение.

Выразив частные производные в уравнении (1) в виде разности значений сеточной функции по схеме на рис. 2, можно получить решение в следующем виде

$$\alpha C_{k+1,n} = \beta_n C_{k+1,n+1} + \gamma_n C_{k+1,n-1} + \delta_n, \quad (5)$$

где $\alpha = (1+2a+2f)$; $\beta_n = ab_n$; $\gamma_n = ad_n$; $\delta_n = C_{k,n}$.

Обозначения a, f, b_n и d_n прежние (см. (2)).

В нашем случае для любого временного среза выражение (5) представляет собой систему с N алгебраическими уравнениями. Матрица, соответствующая им, является трехдиагональной: по диагонали матрицы стоят коэффициенты α ; слева от них – γ_n ; справа – β_n ; остальные коэффициенты матрицы равны нулю. Такая система алгебраических уравнений решается методом прогонки.

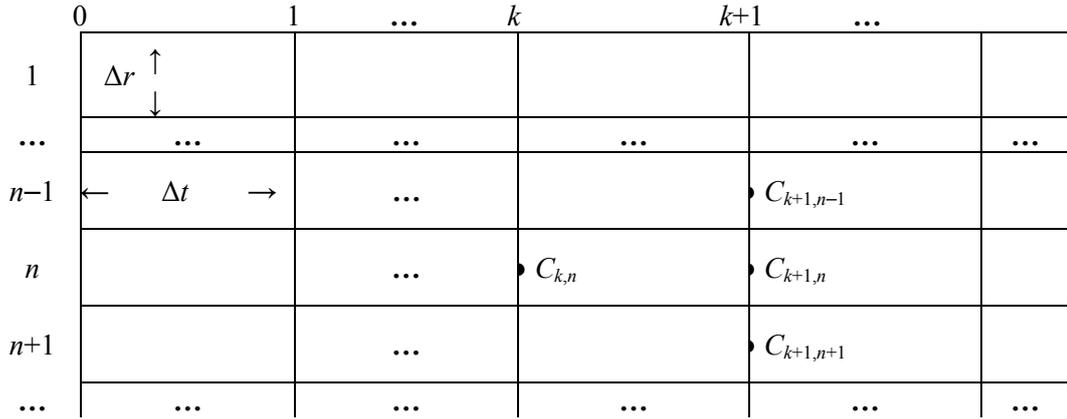


Рис. 2 – Неявная конечно-разностная схема

Суть метода состоит в том, что на $(k+1)$ -м временном срезе для прямого и обратного хода прогонки решение ищется в виде

$$C_n = P_n C_{n+1} + Q_n, \quad (6)$$

$$C_{n-1} = P_{n-1} C_n + Q_{n-1}, \quad (7)$$

где $P_n = \beta_n/\alpha$ и $Q_n = [\gamma_n C_{n-1} + \delta_n]/\alpha$. (8)

Для удобства в уравнениях (6) и (7) индекс времени $(k+1)$ убран.

Подставим в (5) вместо $C_{k+1,n-1}$ формулу (7), для удобства индекс времени тоже уберем, и решим полученное выражение относительно C_n

$$\alpha C_n = \beta_n C_{n+1} + \gamma_n [P_{n-1} C_n + Q_{n-1}] + \delta_n,$$

$$[\alpha - \gamma_n P_{n-1}] C_n = \beta_n C_{n+1} + [\gamma_n Q_{n-1} + \delta_n],$$

$$C_n = \beta_n C_{n+1} / [\alpha - \gamma_n P_{n-1}] + [\gamma_n Q_{n-1} + \delta_n] / [\alpha - \gamma_n P_{n-1}]. \quad (9)$$

При сопоставлении формул (6) и (9) видно, что для прогоночных коэффициентов P_n и Q_n получены следующие рекуррентные соотношения

$$P_n = \beta_n / [\alpha - \gamma_n P_{n-1}] \quad \text{и} \quad Q_n = [\gamma_n Q_{n-1} + \delta_n] / [\alpha - \gamma_n P_{n-1}]. \quad (10)$$

В начале рекуррентного процесса при $n=1$ значения прогоночных коэффициентов P_1 и Q_1 известны, они равны

$$P_1 = \beta_1/\alpha = 2a/(1+2a+2f) \quad \text{и} \quad Q_1 = \delta_1/\alpha = C_{k,1}/(1+2a+2f), \quad (11)$$

где $C_{k,1}$ – значение сеточной функции в первом кольце на предыдущем временном срезе.

На прямом ходу прогонки, используя значения P_1 и Q_1 , по (10) рассчитываются значения прогоночных коэффициентов P_n и Q_n .

В конце прямого хода при $n=N$ по уравнению (6) видно, что $C_N=Q_N$, поскольку $C_{N+1}=0$. С этого момента начинается обратный ход прогонки: зная C_N , по формуле (7) рассчитываются значения сеточной функции в кольце с номером $N-1$. Потом $N-2$ и так далее, до $n=1$.

Сумма коэффициентов α , β_n и γ_n в (5) равна $(1+2f)$, поэтому по аналогии с (4) выражение для проверки расчетов можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{n_0+k} (2n-1)C_{k,n} = C_0 N_0^2 (1+2f)^{-k}, \quad (12)$$

Численные эксперименты показали, что из-за наличия погрешностей при расчете значений сеточной функции по неявной схеме, значения правой и левой частей условия (12) не совпадают. Причем, погрешность зависит от исходных параметров модели: с увеличением начального количества колец в пятне N_0 , погрешность увеличивается. Этот недостаток отсутствует при расчетах по явной схеме: на любом временном срезе, при любых исходных параметрах модели, обеспечивающих устойчивость решения, значения правой и левой частей условия (4) совпадают при

любом количестве разрядов.

Явная и неявная схемы имеют первый порядок сходимости (точности) по времени и второй порядок сходимости по пространственной переменной. Они с разных сторон приближаются к аналитическому (истинному) решению. Смешанная схема имеет второй порядок сходимости по обоим переменным, т.е. у этой схемы сходимость по времени на порядок выше, чем у неявной и явной схем. В связи с этим далее решение по смешанной схеме используется при оценке погрешности расчетов.

Рассмотрим смешанную (неявно-явную) схему (рис. 3). Поиск решения по ней осуществляется по явной и неявной схемам с весовыми коэффициентами $(1-\sigma)$ и σ . Если $\sigma=0,5$, то такая схема называется схемой Кранка-Николсона. Она обладает абсолютной устойчивостью решения.

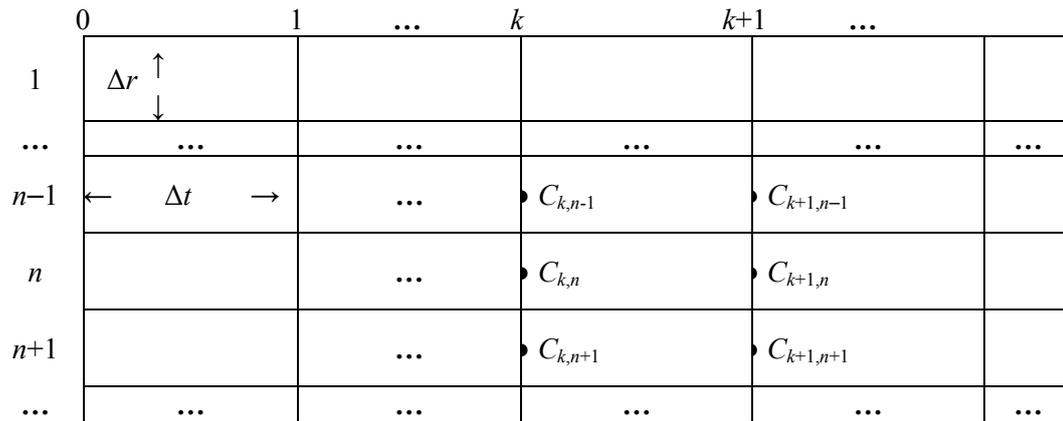


Рис. 3 – Смешанная (неявно-явная) конечно-разностная схема

После подстановки в уравнение (1) частных производных, выраженных через разности сеточной функции по схеме на рис. 3 с коэффициентом 0,5, можно записать выражение аналогичное выражению (5), полученному по неявной схеме,

$$\alpha^{(1)}C_{k+1,n} = \beta_n^{(1)}C_{k+1,n+1} + \gamma_n^{(1)}C_{k+1,n-1} + \delta_n^{(1)}, \quad (13)$$

где $\alpha^{(1)} = (1+a+f)$; $\beta_n^{(1)} = ab_n/2$; $\gamma_n^{(1)} = ad_n/2$; $\delta_n^{(1)} = C_{k,n}(1-a-f) + \beta_n^{(1)}C_{k,n+1} + \gamma_n^{(1)}C_{k,n-1}$.

Обозначения a, f, b_n и d_n прежние.

Решение (13) на $(k+1)$ -м временном срезе выполняется методом прогонки по следующим соотношениям для прямого и обратного хода:

$$C_n = P_n C_{n+1} + Q_n, \quad (14)$$

$$C_{n-1} = P_{n-1} C_n + Q_{n-1}, \quad (15)$$

где $P_n = \beta_n^{(1)}/\alpha^{(1)}$ и $Q_n = [\gamma_n^{(1)}C_{n-1} + \delta_n^{(1)}]/\alpha^{(1)}$. (16)

Рекуррентные соотношения для прямого хода прогонки при поиске прогоночных коэффициентов P_n и Q_n следующие

$$P_n = \beta_n^{(1)}/[\alpha^{(1)} - \gamma_n^{(1)}P_{n-1}] \text{ и } Q_n = [\gamma_n^{(1)}Q_{n-1} + \delta_n^{(1)}]/[\alpha^{(1)} - \gamma_n^{(1)}P_{n-1}]. \quad (17)$$

Последовательность и условия расчета такие же, как для неявной схемы:

при $n=1$ значения прогоночных коэффициентов P_1 и Q_1 равны

$$P_1 = \beta_1^{(1)}/\alpha^{(1)} = a/(1+a+f) \text{ и } Q_1 = \delta_1^{(1)}/\alpha^{(1)} = [(C_{k,1}(1-a-f) + aC_{k,2})]/(1+a+f); \quad (18)$$

при $n=N$ значение C_N равно Q_N .

Сумма коэффициентов $\alpha^{(1)}$, $\beta_n^{(1)}$ и $\gamma_n^{(1)}$ равна $(1+f)$, а коэффициентов, входящих в $\delta_n^{(1)}$, составляет $(1-f)$. В этом случае условие проверки расчетов будет иметь следующий вид

$$\Sigma (2n-1)C_{k,n} = C_0 N_0^2 (1-f)^k (1+f)^{-k}. \quad (19)$$

Эксперименты показали, что условие (19) выполняется с некоторой погрешностью, которая меньше, чем в неявной схеме.

Среди рассмотренных конечно-разностных схем явная схема более

предпочтительна в силу однозначности вывода при невыполнении условия проверки расчетов: если условие (4) не выполняется – необходимо искать ошибку в алгоритме расчета. В других схемах это несовпадение заложено изначально. Оно вызвано погрешностями расчета значений концентрации взвеси на каждом временном срезе, и сюда же могут добавиться погрешности, вызванные ошибками в алгоритме расчета.

Для реализации явной схемы необходимо примерно в три раза меньше машинной памяти. Полученные решения имеют физический смысл. Например, равенство (2) показывает, что количество взвеси $C_{k+1,n}$ в кольце с номером n на $(k+1)$ -м временном срезе формируется за счет того, что часть взвеси $C_{k,n}$ с коэффициентом $(1-2a-2f)$ остается в этом кольце (переходит с предыдущего k -го среза) и за счет турбулентной диффузии с коэффициентами ab_n и ad_n переносится из соседних колец $C_{k,n+1}$ и $C_{k,n-1}$.

При невыполнении условия устойчивости схемы ($a+f > 0,5$) теряется физический смысл: в равенстве (2) первое слагаемое становится отрицательным (количество вещества, остающегося в пределах контрольной поверхности, не может быть с отрицательным знаком). Дальнейшие вычислительные эксперименты показали, что при неустойчивости решения по явной схеме, результаты расчета по неявной и Кранка-Николсона схемам могут существенно выделяться среди выполненных ранее расчетов.

Результаты исследования и их анализ. Оценим погрешность расчетов значений концентрации взвеси выбранным методом и оптимизируем параметры сетки. Для этого рассмотрим максимальное значение концентрации взвеси в контрольном створе (C_{MAX}). Функцию C_{MAX} в плоской постановке задачи можно представить в следующем виде

$$C_{MAX}/C_0 = \varphi(T, D_T, \Delta t, \Delta r, u, H, R_0), \quad (20)$$

где C_0 – начальная концентрация взвеси; T – время переноса облака до контрольного створа; D_T – горизонтальный коэффициент турбулентной диффузии; Δt и Δr – параметры сетки; u – гидравлическая крупность взвеси; H – глубина акватории; R_0 – начальный радиус пятна.

Все переменные в выражении (20) можно сгруппировать в 4 безразмерных параметра:

$$k_{KC} = T/\Delta t, \quad a = D_T \Delta t / \Delta r^2, \quad f = u \Delta t / (2H), \quad N_0 = R_0 / \Delta r. \quad (21)$$

Особенность конечно-разностных схем состоит в том, что значение рассматриваемой величины, полученное в результате расчета, зависит от параметров сетки. В случае плоской постановки задачи C_{MAX} через некоторое время T после сброса зависит от шага Δr (начального количества колец в пятне загрязнения N_0) и от шага Δt (количества шагов k_{KC} до рассматриваемого момента T). При этом, чем больше N_0 и k_{KC} (меньше Δr и Δt), тем ближе оценка к аналитическому (истинному) значению величины.

Однако, увеличение начального количества колец влечет за собой увеличение объема вычислений. Очень большое количество расчетов не имеет практического смысла, поскольку, начиная с некоторого момента, погрешность между оценкой и истинным значением становится достаточно малой (приемлемой с практической точки зрения). Попытка дальнейшего снижения погрешности становится неоправданной из-за значительного увеличения количества расчетов.

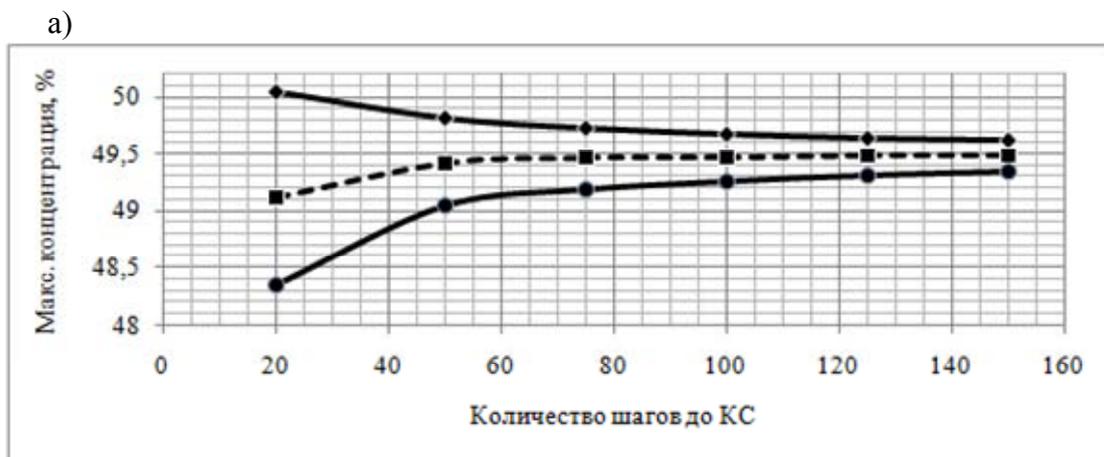
Для оценки погрешности результатов численных экспериментов были выполнены расчеты по неявной, Кранка-Николсона и явной схемам при различных N_0 и k_{KC} , начиная с $N_0=4$ и $k_{KC}=20$. Результаты помещены в табл. 1 – 3 и показаны на рис. 4 – 6. В таблицах помещены значения C_{MAX} , полученные по неявной, Кранка-Николсона и явной схемам, а также относительное отклонение C_{MAX} , полученной по явной схеме, от C_{MAX} , полученной по схеме Кранка-Николсона.

В табл. 1 и на рис. 4 приведены результаты расчетов распространения взвеси при

$u=0$; в табл. 2 и на рис. 5 – при $u=0,32$ см/с; в табл. 3 и на рис. 6 – при $u=1,38$ см/с. Значения гидравлической крупности частиц 0,32 и 1,38 см/с взяты из материалов изысканий Черноморниипроекта как одни из характерных значений для Северо-Западного шельфа Черного моря.

Таблица 1 – Значения C_{MAX} в контрольном створе по неявной, Кранка-Николсона (смешанной) и явной схемам при $u=0$

a	f	N_0	$k_{КС}$	$C_{MAX}, \%$			Относ. отклон., %
				неявная	смешанная	явная	
0,2962	0,0000	4	20	50,05	49,11	48,35	1,57
0,1185	0,0000	4	50	49,82	49,42	49,04	0,78
0,0790	0,0000	4	75	49,74	49,46	49,19	0,55
0,0592	0,0000	4	100	49,68	49,48	49,27	0,42
0,0474	0,0000	4	125	49,65	49,48	49,31	0,34
0,0395	0,0000	4	150	49,63	49,49	49,34	0,29
0,6664	0,0000	6	20	48,76	47,95	–	–
0,4443	0,0000	6	30	49,10	48,60	48,51	0,19
0,2666	0,0000	6	50	49,31	49,01	48,82	0,39
0,1777	0,0000	6	75	49,37	49,15	48,97	0,37
0,1333	0,0000	6	100	49,38	49,20	49,05	0,32
0,1066	0,0000	6	125	49,37	49,23	49,09	0,28
0,0889	0,0000	6	150	49,37	49,24	49,12	0,24
0,4739	0,0000	8	50	48,76	48,55	48,72	-0,35
0,3159	0,0000	8	75	49,03	48,89	48,89	-0,01
0,2369	0,0000	8	100	49,14	49,02	48,97	0,10
0,1896	0,0000	8	125	49,18	49,08	49,02	0,13
0,1580	0,0000	8	150	49,21	49,12	49,05	0,14
0,7405	0,0000	10	50	48,10	47,95	–	–
0,4936	0,0000	10	75	48,63	48,56	49,35	-1,60
0,3702	0,0000	10	100	48,86	48,81	48,93	-0,26
0,2962	0,0000	10	125	48,98	48,93	48,98	-0,11
0,2468	0,0000	10	150	49,05	49,00	49,01	-0,03
0,3554	0,0000	12	150	48,86	48,85	48,99	-0,28
0,4838	0,0000	14	150	48,65	48,68	48,98	-0,61



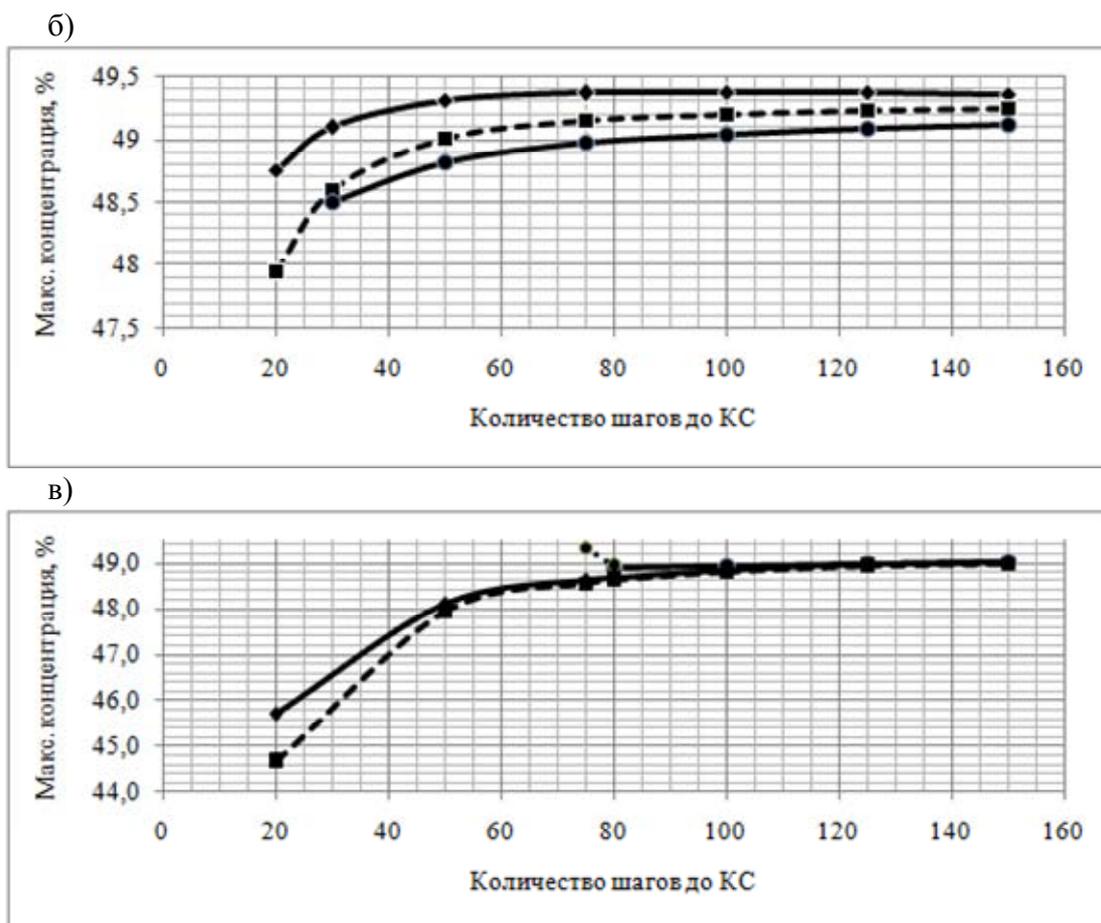


Рис. 4 – Значения C_{MAX} по неявной (маркер ромб), Кранка-Николсона (пунктир) и явной (маркер круг) схемам в зависимости от $k_{КС}$ при $u=0$: а) $N_0 = 4$; б) $N_0 = 6$; в) $N_0 = 10$

Таблица 2 - Значения C_{MAX} в контрольном створе по неявной, Кранка-Николсона и явной схемам при $u=0,32$ см/с

a	f	N_0	$k_{КС}$	$C_{MAX}, \%$			Относ. отклон., %
				явная	смешанная	неявная	
0,2962	0,0103	4	20	33,82	32,58	31,47	3,51
0,1185	0,0041	4	50	33,30	32,79	32,29	1,54
0,0790	0,0027	4	75	33,16	32,82	32,48	1,05
0,0592	0,0021	4	100	33,09	32,83	32,57	0,79
0,0395	0,0014	4	150	33,01	32,83	32,66	0,54
0,6664	0,0103	6	20	32,99	31,81	–	–
0,4443	0,0068	6	30	32,99	32,24	31,78	1,47
0,2666	0,0041	6	50	32,96	32,51	32,15	1,14
0,1777	0,0027	6	75	32,92	32,61	32,33	0,87
0,0889	0,0014	6	150	32,84	32,67	32,51	0,49
0,4739	0,0041	8	50	32,60	32,21	32,07	0,45
0,3159	0,0027	8	75	32,70	32,44	32,28	0,49
0,2369	0,0021	8	100	32,72	32,52	32,37	0,47
0,1896	0,0016	8	125	32,73	32,56	32,42	0,43
0,1580	0,0014	8	150	32,73	32,59	32,46	0,39
0,4936	0,0027	10	75	32,43	32,22	33,01	-2,39
0,4628	0,0026	10	80	32,46	32,26	32,28	-0,05
0,3702	0,0021	10	100	32,54	32,38	32,35	0,11

Продолжение табл. 2

a	f	N_0	$k_{КС}$	$C_{MAX}, \%$			Относ. отклон., %
				неявная	смешанная	явная	
0,2962	0,0016	10	125	32,60	32,46	32,40	0,19
0,2468	0,0014	10	150	32,62	32,51	32,44	0,22
0,3554	0,0014	12	150	32,50	32,41	32,42	-0,03
0,4838	0,0014	14	150	32,36	32,30	32,42	-0,36
0,6319	0,0014	16	150	32,21	32,16	–	–

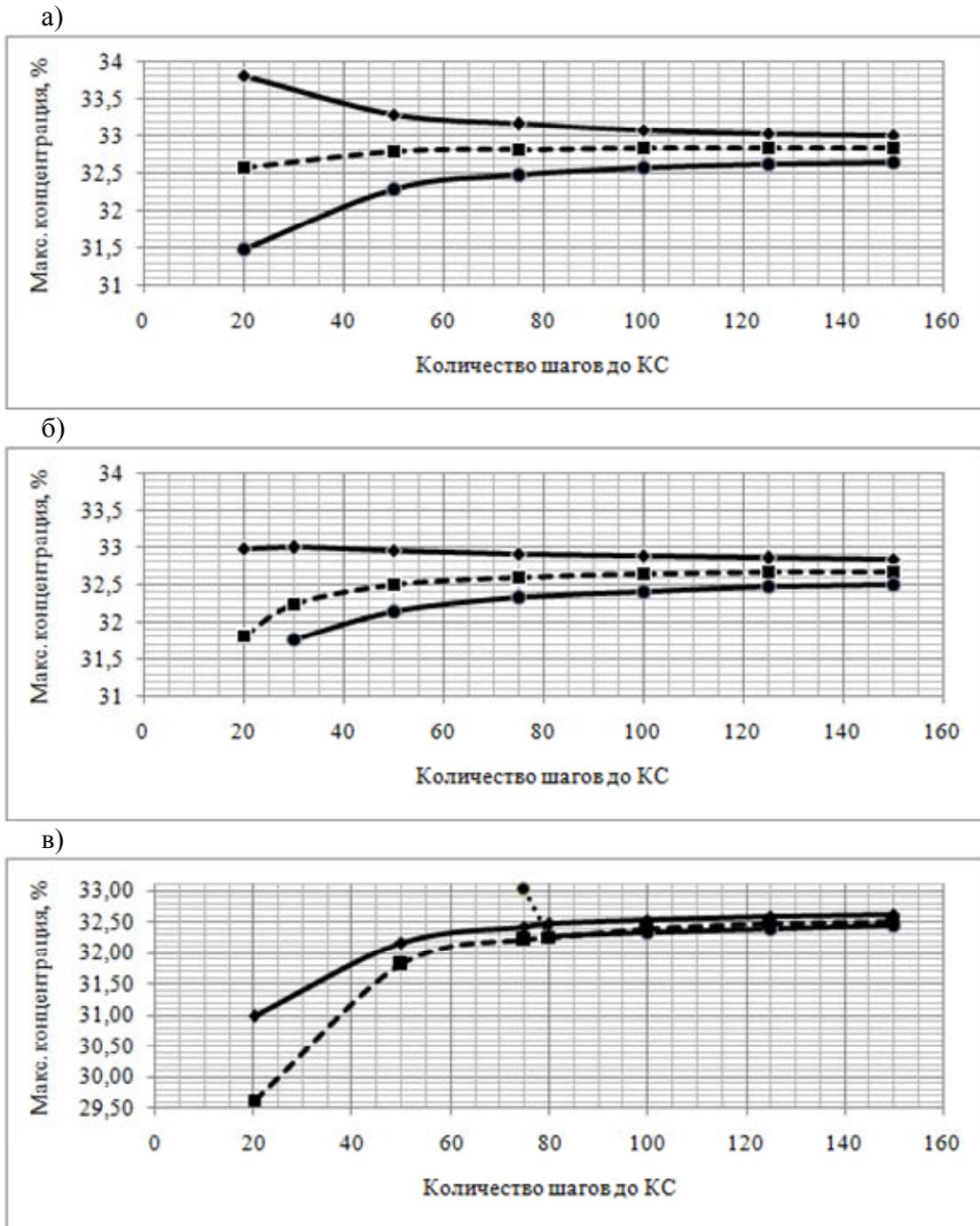
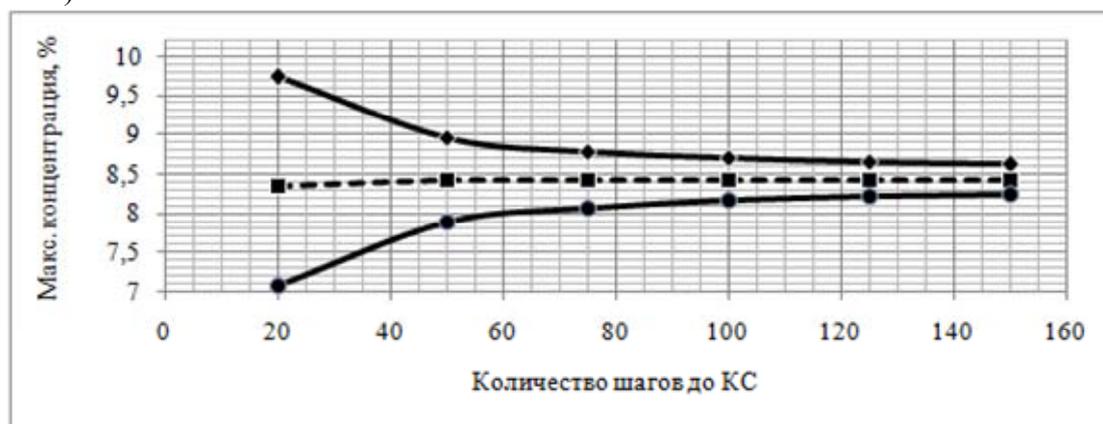


Рис. 5 – Значения C_{MAX} по неявной (маркер ромб), Кранка-Николсона (пунктир) и явной (маркер круг) схемам в зависимости от $k_{КС}$ при $u=0,32$ см/с: а) $N_0 = 4$; б) $N_0 = 6$; в) $N_0 = 10$

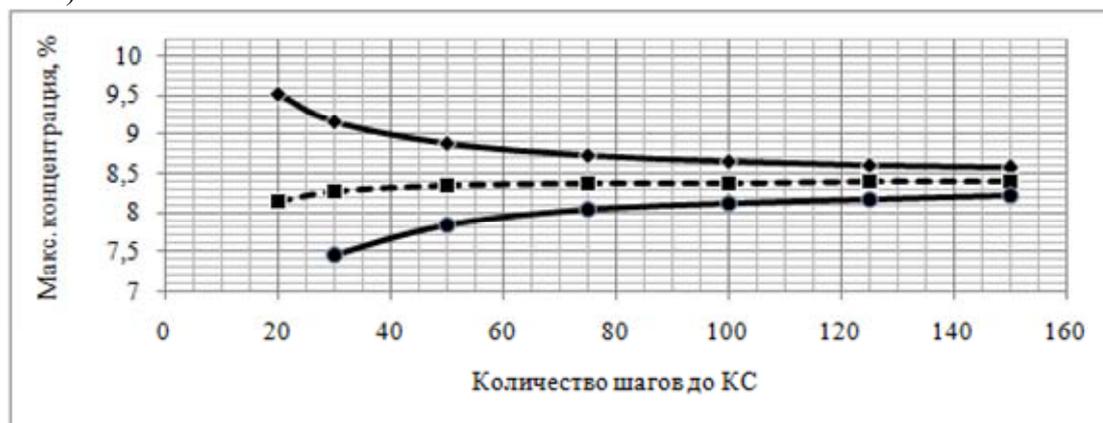
Таблица 3 – Значения S_{MAX} в контрольном створе по неявной, Кранка-Николсона и явной схемам при $u=1,38$ см/с

a	f	N_0	$k_{КС}$	$S_{MAX}, \%$			Относ. отклон., %
				неявная	смешанная	явная	
0,2962	0,0442	4	20	9,74	8,34	7,09	17,72
0,1185	0,0177	4	50	8,97	8,42	7,89	6,71
0,0790	0,0118	4	75	8,79	8,43	8,07	4,42
0,0592	0,0088	4	100	8,71	8,43	8,16	3,30
0,0474	0,0071	4	125	8,65	8,43	8,22	2,63
0,0395	0,0059	4	150	8,62	8,44	8,25	2,19
0,4443	0,0295	6	30	9,17	8,27	7,47	10,73
0,2666	0,0177	6	50	8,88	8,35	7,86	6,30
0,1777	0,0118	6	75	8,73	8,38	8,04	4,24
0,1333	0,0088	6	100	8,65	8,39	8,13	3,20
0,1066	0,0071	6	125	8,61	8,39	8,18	2,57
0,0889	0,0059	6	150	8,57	8,39	8,22	2,15
0,4739	0,0177	8	50	8,79	8,27	7,85	5,41
0,3159	0,0118	8	75	8,67	8,33	8,02	3,85
0,2369	0,0088	8	100	8,61	8,35	8,11	2,97
0,1896	0,0071	8	125	8,57	8,37	8,17	2,42
0,1580	0,0059	8	150	8,55	8,37	8,20	2,04
0,4936	0,0118	10	75	8,61	8,28	11,01	-24,84
0,4628	0,0111	10	80	8,60	8,29	8,04	3,09
0,3702	0,0088	10	100	8,57	8,32	8,11	2,61
0,2962	0,0071	10	125	8,54	8,34	8,16	2,18
0,2468	0,0059	10	150	8,52	8,35	8,20	1,87

а)



б)



в)

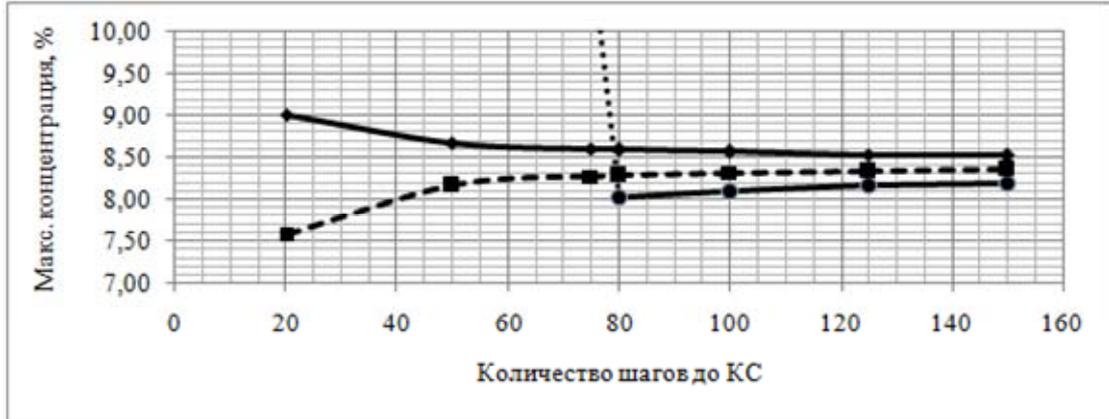


Рис. 6 – Значения C_{MAX} по неявной (маркер ромб), Кранка-Николсона (пунктир) и явной (маркер круг) схемам в зависимости от $k_{КС}$ при $u = 1,38$ см/с: а) $N_0 = 4$; б) $N_0 = 6$; в) $N_0 = 10$

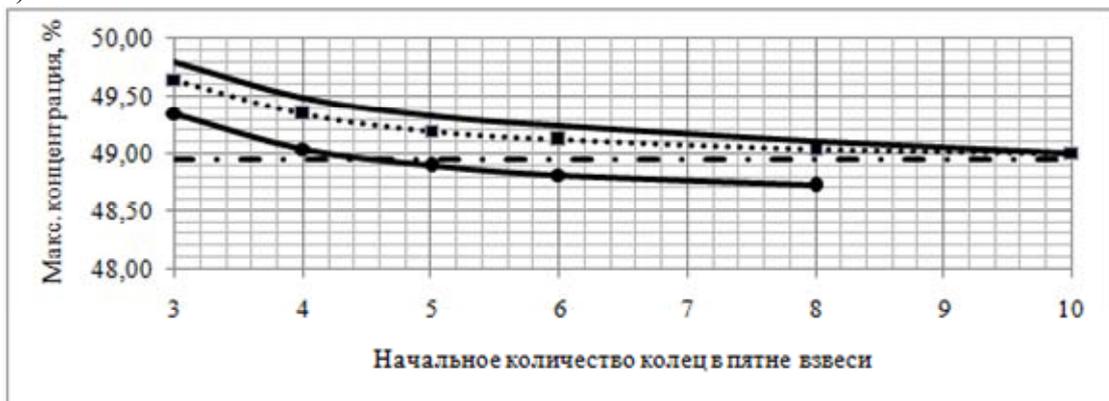
На рис. 4–6 видно, что при различных u и N_0 расхождение результатов экспериментов, полученных по разным схемам, быстро уменьшается с увеличением $k_{КС}$ (уменьшением Δt) примерно до 60–70 шага. После 70–80 шага сближение результатов становится менее интенсивным.

Закономерно результаты эксперимента по смешанной (Кранка-Николсона) схеме находятся между результатами, полученными по неявной и явной схемам, т.к. (см. ранее) у этой схемы сходимость по времени на порядок выше. В данном случае, при неизвестном аналитическом решении, будет логичным в качестве ориентира при оценке погрешности численных экспериментов использовать результаты, полученные по смешанной схеме.

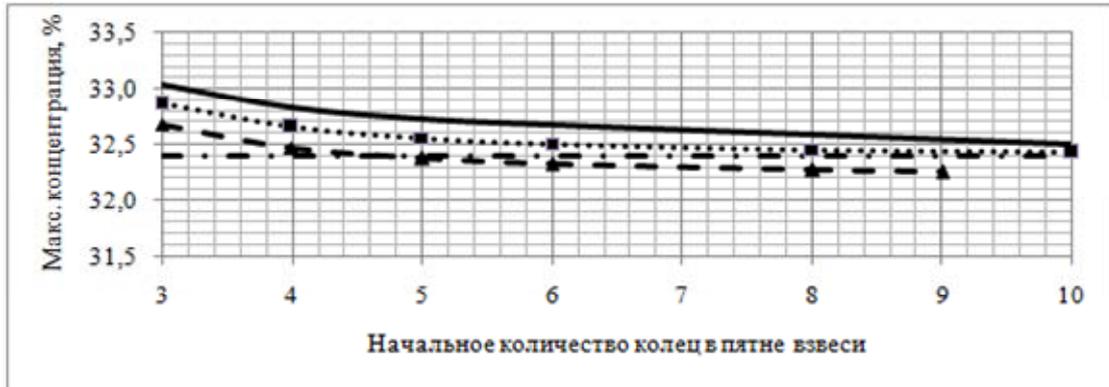
Анализ полученных результатов (табл. 1–3) показал, что при условии сходимости явной схемы отклонение C_{MAX} по этой схеме от C_{MAX} по схеме Кранка-Николсона в плоской постановке задачи не будет превышать 4–5% при $N_0 \geq 4$, $k_{КС} \geq 75$ и $(a+f) < 0,49$. При $0,49 \leq (a+f) < 0,5$ отклонение резко возрастает (см. рис. 4-в, 5-в и 6-в обозначено точечными отрезками) и становится непредсказуемым. Увеличение $k_{КС}$ до 100 приводит к снижению отклонения до 3–4%.

На рис. 7 показано изменение C_{MAX} , рассчитанной по явной схеме, в зависимости от N_0 и $k_{КС}$ при различных u . Верхняя огибающая линия без маркеров показывает изменение C_{MAX} , рассчитанной по схеме Кранка-Николсона при $k_{КС} = 150$.

а)



б)



в)



Рис. 7 – Зависимость C_{MAX} , рассчитанной по явной схеме, от N_0 и k_{KC} (маркер круг сплошная линия – $k_{KC} = 50$; треугольник пунктир – $k_{KC} = 75$; квадрат точечная – $k_{KC} = 150$), верхняя линия без маркеров – C_{MAX} по схеме Кранка-Николсона при $k_{KC} = 150$: а) $u = 0$; б) $u = 0,32$ см/с; в) $u = 1,38$ см/с

По рис. 7 видно, что оценка C_{MAX} с ростом N_0 имеет тенденцию к снижению. Поэтому при $u \leq 0,35$ см/с, $N_0 = 3-8$ и $k_{KC} = 50$ (рис. 7-а) результат расчета по явной схеме очень близок к аналитическому решению. Верхняя огибающая на рис. 7-а стремится к значению примерно 49,0 (на рисунке обозначено осевой линией), а значения C_{MAX} при $N_0 = 3-8$ и $k_{KC} = 50$ (нижняя кривая с маркером круг) изменяются от 49,4 до 48,7.

На рис. 7-б аналогично: ожидаемое аналитическое значение составляет примерно 32,4 (на рисунке обозначено осевой линией), при $k_{KC} = 75$ и $N_0 = 3-9$ значения C_{MAX} изменяются от 32,7 до 32,2. При $u = 1,38$ см/с (рис. 7-в) упомянутая выше тенденция выражена слабее. Однако видно, что при $k_{KC} = 75$ (пунктир с маркером треугольник) и $N_0 = 3-8$ значения C_{MAX} изменяются от 8,1 до 8,0, эти значения отклоняются от ожидаемого аналитического решения, равного примерно 8,3, не более чем на 4%.

Оценим теперь погрешность алгоритмов расчета по рассматриваемым схемам.

В условиях проверки расчетов (4), (12) и (19) правые и левые части характеризуют количество взвеси в пятне. Правая часть выражений представляет собой аналитическую зависимость массы взвеси в пятне от времени для данной схемы. Левая часть является результатом расчета по схеме. Обе части содержат погрешность метода, т.е. погрешность представления частных производных в виде разности значений сеточной функции. Левая часть дополнительно может содержать погрешность алгоритма расчета.

Для явной схемы условие (4) выполняется абсолютно (при любом количестве разрядов). Таким образом, в явной схеме отсутствует погрешность алгоритма расчета.

Для неявной и Кранка-Николсона схем условия (12) и (19) выполняются с некоторой погрешностью, зависящей прямо пропорционально от N_0 и обратно

пропорционально от $k_{КС}$. Причем, эта погрешность, начиная с первых шагов, быстро возрастает и при $k \geq 10$ стабилизируется (при отсутствии ошибок в алгоритме расчета).

На рис. 8 показано изменение погрешности левой части условий (12) и (19) в % от значения правой части при $N_0=8$ и $k_{КС}=70$ по неявной (сплошная линия) и смешанной (пунктир) схемам в зависимости от k . В данном случае погрешность алгоритма расчета по неявной схеме составляет 2,3%, по Кранка-Николсона – 1,5%. Рассматриваемая погрешность может изменяться в довольно широком диапазоне.

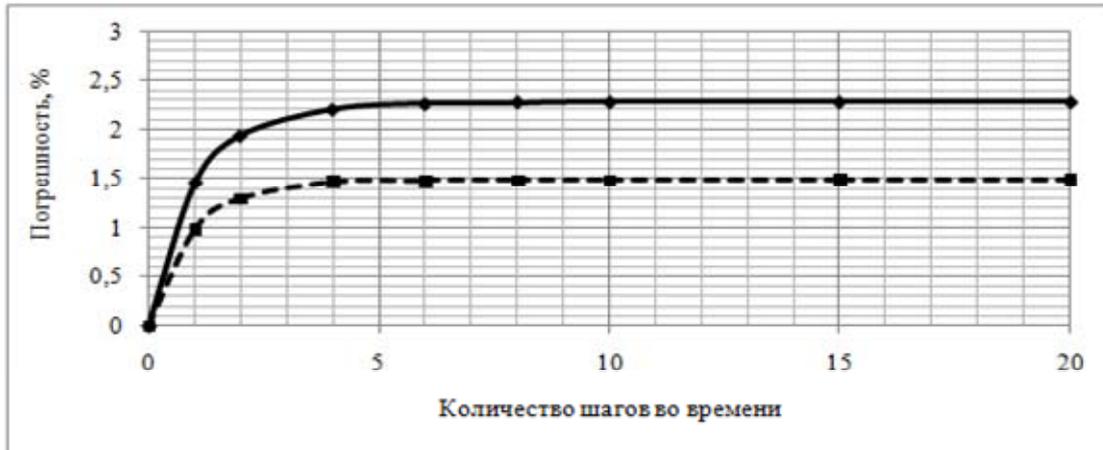


Рис. 8 – Зависимость погрешности алгоритма расчета от номера шага k : маркер ромб – неявная схема; маркер квадрат – схема Кранка-Николсона

Результаты расчетов по неявной и смешанной схемам могут содержать большую погрешность в области неустойчивости явной схемы и удаляться от аналитического решения (рис. 4-в, 5-в, 6-в и 9).

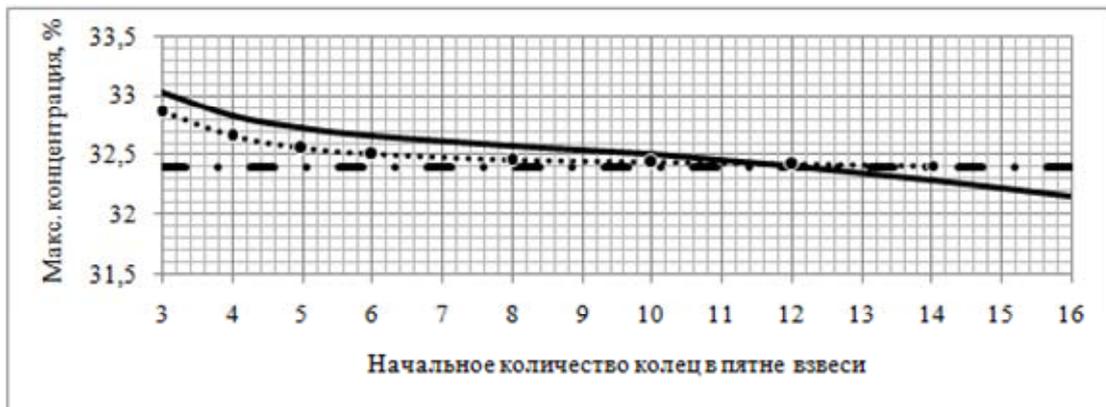


Рис. 9 – Зависимость C_{MAX} от N_0 при $k_{КС}=150$: точечная линия с маркером круг – явная схема, сплошная линия без маркера – схема Кранка-Николсона, осевая линия – ожидаемое аналитическое решение

На рис. 9 видно, что решение по явной схеме при N_0 от 8 до 14 практически сливается с осевой линией (с ожидаемым аналитическим решением). Значение N_0 равное 14 в данном случае является пределом устойчивости явной схемы ($a+f=0,484$). При $N_0 \geq 15$ эта схема неустойчива ($a+f > 0,5$). Смешанная схема Кранка-Николсона при $N_0 \geq 15$ устойчива, однако решение по ней на пределе устойчивости ($N_0=14$) и в области неустойчивости ($N_0 \geq 15$) явной схемы уже меньше, чем ожидаемое аналитическое решение. С увеличением N_0 решение по смешанной схеме удаляется от ожидаемого аналитического решения. Аналогичный результат наблюдается и по неявной схеме.

На рис. 4-в, 5-в и 6-в видно, что в области неустойчивости явной схемы ($k_{KC} < 75$) результат эксперимента по неявной или смешанной схеме может содержать достаточно большую погрешность.

Таким образом, область численного эксперимента по конечно-разностным схемам при исследовании неустановившейся турбулентной диффузии взвеси на небольших интервалах времени желательно ограничить условием $a + f < 0,5$. Это ограничение делает ненужным главное преимущество неявной и смешанной схем, которое заключается в абсолютной устойчивости решений по ним. Если к этому добавить необходимость использования большого объема машинной памяти (примерно в 3 раза больше, чем для явной схемы), то вполне обоснованно можно рекомендовать явную схему при решении упомянутой в начале данного абзаца задачи.

Однако постановка численного эксперимента по явной схеме при исследовании неустановившейся диффузии взвеси на больших интервалах времени может оказаться весьма затруднительной из-за ограничения шага во времени для обеспечения устойчивости схемы, что может повлечь чрезмерно большое количество расчетов. Тогда более предпочтительными могут оказаться неявная или смешанная схемы. В этом случае необходимо выполнить исследования по оценке погрешности расчетов для рассматриваемых условий.

Выводы.

1. Численное моделирование неустановившейся турбулентной диффузии взвеси для небольших временных интервалов методом конечных разностей целесообразно выполнять с применением явной схемы.

2. Погрешность результатов эксперимента не будет превышать 4-5% при $N_0 = 3 \div 8$ и $k_{KC} \geq 70$.

3. В дальнейшем необходимо выполнить анализ конечно-разностных схем при моделировании неустановившейся турбулентной диффузии на больших интервалах времени.

Список литературы

1. Юрасов С.Н., Горун В.В. Математическая модель неустановившейся турбулентной диффузии взвеси в водном потоке // Метеорологія, кліматологія та гідрологія: Межвід. наук. збірник України / Голов. ред. С.М.Степаненко. – Одеса: Вид. «ТЕС», 2010. – Вип. 51. – С. 189-199.

2. Горун В.В., Юрасов С.Н. Оптимизация параметров математической модели неустановившейся турбулентной диффузии взвеси в водной среде // Вісник Одеського державного екологічного університету: Науковий журнал / Голов. ред. Є.Д.Гопченко. – Одеса: «Екологія», 2012. – Вип. 14. – С. 28-35.

3. Гильманов А. Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. – М.: Наука, 2000. – 248 с.

4. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – М.: Мир, 1991. – 367 с.

Використання кінцево-різницевої схеми при моделюванні несталого турбулентного дифузії зависі у водному потоці. Юрасов С.М. Горун В.В.

У статті розглянуті різні кінцево-різницеві схеми при моделюванні несталого турбулентного дифузії зависі у водному потоці в плоскій постановці завдання. Виконаний аналіз отриманих рішень, дана оцінка погрешності розрахунків і оптимізовані вихідні параметри моделі. Приводяться рекомендації для виконання інженерних розрахунків.

Ключові слова: кінцево-різницева схема; математична модель, нестала турбулентна дифузія, завись.

Using of eventual-difference charts for the design of the unset turbulent diffusion of dredge in a water-course. Urasov S.M. Gorun V.V.

In the article different eventual-difference charts are considered at the design of the unset turbulent diffusion of dredge in a water-course in the flat raising of task. The analysis of the got decisions is executed, the estimation of error of calculations is given and the initial parameters of model are optimized. Led recommendation for implementation of engineering's calculations.

Keywords: eventual-difference chart; mathematical model, unset turbulent diffusion, dredge.