МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни
ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділи «Елементарна математика», «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»)
для студентів 1 року денної форми навчання спеціальності
103 „Науки про землю”
193 „Геодезія землеустрій”
РВО бакалавр

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності 103 “Науки про землю”,
Протокол №___від _______ Голова групи_________Шакірзанова Ж.Р.

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності 193 „Геодезія та землеустрій”
Протокол №___від _______ Голова групи__________Гриб О.М.

«Затверджено»
на засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №12від 01.06.2022 Зав. кафедри ________ Глушков О.В.

Одеса 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділи «Елементарна математика», «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»)

для студентів 1 року денної форми навчання РВО бакалавр спеціальності
103 „Науки про землю”
193 „Геодезія та землеустрій”

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності 103 “Науки про землю”,
Протокол №___від ______

«Затверджено»
на засіданні групи забезпечення спеціальності 193 „Геодезія та землеустрій”
Протокол №___від ______

Одеса 2022

Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни «Вища математика» (Розділи «Елементарна математика», «Лінійна алгебра та аналітична геометрія») для студентів 1 року денної форми навчання, РВО бакалавр, спеціальностей 103 „Науки про землю”, 193 „Геодезія та землеустрій”. Одеса, ОДЕКУ, 2022 р., 37 с., укр. мова.
Укладачі: Хецеліус О.Ю, д-р ф.-м. наук, проф., Сєрга І.М., канд. ф.-м. наук, доц.

ЗМІСТ

І ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Вища математика належить до однієї з основних дисциплін фундаментального циклу, яка спрямована на вивчення основних положень лінійної алгебри, диференціального і інтегрального числення, теорії поля, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, операційного числення, рівнянь математичної фізики та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни: забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичних курсів з вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни “Вища математика – навчити студентів:

- використовувати вивчені методи при вирішуванні задач в практичній діяльності;
- аналізувати результати математичних обчислень.

Елементарна математика, з одного боку, є самостійною областю математики, з іншого – базою для вивчення вищої математики.

Елементарна математика – саме та дисципліна, яка розвиває у студента логічне мислення, здатність чітко виділяти цілі і шляхи розв’язку поставленої задачі.

Розділи «Елементарна математика» і «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» вивчається на першому курсі навчання і передбачає лекційні та практичні заняття та самостійну роботу студентів.

Вивчення розділу «Елементарна математика» потребує від студентів знання основ математики в обсязі програми курсу середньої школи.

Вивчення розділу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» надасть студентам знання основ теорії матриць, визначників та систем лінійних рівнянь.

В результаті вивчення розділу студент повинен знати матеріал в обсязі програми та вміти використовувати отриманні знання при розв'язуванні задач відповідних розділів вищої математики.

Мета методичних вказівок - роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даної дисципліни.

В результаті вивчення цих розділів студент повинен:

знати –

основні визначення, теореми, форми запису, правила виконання алгебраїчних дій, застосування у різних розділах вищої математики, фізики;

визначення матриці, визначники другого та третього порядків, дії з ними, системи лінійних рівнянь.

вміти –

1. Виконувати арифметичні дії над натуральними числами, десятковими і звичайними дробами та виконувати тотожні перетворення многочленів, алгебраїчних дробів, виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції.

2. Будувати графіки лінійної, квадратичної, степеневої, показникової, логарифмічної, тригонометричних та обернених тригонометричних функцій.

3. Розв'язувати рівняння і нерівності першого і другого степеня, та їх системи; розв'язувати найпростіші рівняння і нерівності, що містять степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції.

4. Зображати геометричні фігури на площині і виконувати найпростіші побудови на площині.

5. Використовувати геометричні відомості при розв'язуванні алгебраїчних задач, з алгебри і тригонометрії — при розв'язуванні геометричних задач.

6. Обчислювати визначники, мінори, алгебраїчні доповнення.

7. Математичні операції з матрицями.

8. Застосовувати матричні обчислення для розв'язування систем лінійних рівнянь.

9. Використовувати теоретичні знання та навички при виконанні різноманітних практичних задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Обсяг вивчення розділу визначається силабусами, розробленими з урахуванням професійного спрямування потоків і окремих груп.

Вид контролю знань після вивчення зазначених розділів – модульна контрольна робота, опитування.

1.2 Зміст розділу «Елементарна математика»

Програма з елементарної математики складається з переліку основних математичних понять і фактів, якими повинен володіти студент (вміти правильно їх використовувати при розв'язанні задач, посилатися на них при доведенні теорем), переліку основних математичних вмінь та навичок, якими повинен володіти студент.

Мета та завдання даних методичних вказівок – допомогти засвоїти та повторити теоретичний матеріал та підготуватись до практичних занять за розділом «Елементарна математика» та до виконання модульної контрольної роботи(0-модуль,він є обов’язковим тільки для тих студентів,які написали вхідний контроль незадовільно для інших він необов’язковий)

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ, ФАКТИ ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ У РОЗДІЛУ

1. Тотожні перетворення алгебраїчних та числових виразів. Виконання арифметичних дій. Модуль числа.
2. Тотожні перетворення многочленів, алгебраїчних дробів, виразів, що містять степеневі, показникові, логарифмічні і тригонометричні функції.
3. Многочлени. Формули скороченого множення. Корінь многочлена (на прикладі квадратного тричлена). Квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.
4. Рівняння, нерівності та їх системи.
5. Степінь із натуральним і раціональним показником, основні властивості Арифметичний корінь, основні властивості.
6. Логарифми та їх властивості. Формули логарифма добутку, степеня, частки.
7. Поняття, способи задання, область визначення, область значень функції.
8. Означення, основні властивості та графіки функцій: степеневої $y=x^n$, *n є R* (зокрема $y=ax+b$, $y=\frac{k}{x}$, $y=ax^2+bx+c$, $y=\sqrt{x}$), показникової $y=\grave{a}^{\tilde{o}}$, *x є R* ($y=e^{\tilde{o}}$), логарифмічної $y=log_a x$, *x>0, a>0, a≠1,*

тригонометричних: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ñtgx$, обернених тригонометричних.

9. Тригонометрія. Основні тригонометричні формули.
10. Похідні елементарних функцій.
11. Означення первісної. Невизначений і визначений інтеграл.
12. Зображення геометричних фігур на площині.
13. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їх властивості. Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника. Чотирикутник: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорди, довжина дуги кола.
14. Формули площ геометричних фігур: трикутника, прямокутника, паралелограма, квадрата, ромба, трапеції. Площа круга й сектора.
15. Многогранники. Вершини, ребра, грані, діагоналі многогранника. Призма, піраміда, паралелепіпед. Площі поверхні та об’єму.
16. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери і кулі. Формули площі поверхні й об'єму.

1.3 Зміст розділу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»

Програма з лінійної алгебри та аналітичної геометрії складається з основних положень, що надають можливості засвоїти студентами базові дії над векторами, здійснювати різноманітне матричні обчислення з використання визначників, мінорів тощо; поняття можливих розміщень векторів у просторі з визначенням дозволених подальших операцій з ними; та які відносяться до переліку основних математичних знань, якими повинен володіти студент (вміти правильно їх використовувати при розв'язанні задач, посилатися на них при доведенні теорем),

Мета та завдання даних методичних вказівок – допомогти засвоїти та повторити теоретичний матеріал та підготуватись до практичних занять за розділом «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» та до виконання модульної контрольної роботи після вивчення розділу.

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ У РОЗДІЛУ

1. Визначники.
2. Вектори, виконання дій над векторами.

3. Скалярний, векторний та мішаний добуток.
4. Матриці.
5. Дії над матрицями.
6. Системи лінійних рівнянь.
7. Пряма на площині.
8. Різні види рівнянь.
9. Пряма та площина у просторі.

1.4 Перелік навчальної та методичної літератури

До розділу «Елементарна математика»:

Один автор:

2. Мерзляк А.М.і ін.. Математика, 10-11 клас. – Харків „Гімназія", 2018.
3. Бондаренко М.Ф. и др. Математика для поступающих в вузы: Учебное пособие – Харьков, 1999.
4. Алексєєв В.М. Элементарна математика. Розв'язок задач: Учебное пособие – М., Вища школа, 1998.

Два автори:

1. Шкиль Н.І., Слепкань З.І. Алгебра і начала аналізу, 10-11 клас. – Київ, «Зодиак-Эко», 2002.
5. Вірченко Н.О., Ляшко І.І. Графіки елементарних функцій: Довідник – Київ, Наукова думка, 1996.

До розділу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»:

Два автори:

6. Бугров Л.С., Никольский С.М. "Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии". М.; Наука, 1980.
7. Клетенник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.; Наука, 1980.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1,2-М.; "Высшая школа", 1986.
9. Сборник задач по математике. Под ред.. Ефимова А.В., Демидовича Б.П., Т.1,2 – М. "Наука", 1986.
10. М.І. Шкіль, Т.В.Колесник, „Вища математика у трьох книгах". Київ, „Либідь", 1994.

II МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

2.1 Загальні поради

Робота над навчальним матеріалом складається з наступних елементів: вивчення матеріалу на основі лекційних занять, рішення задач на практичних заняттях, самостійна робота, самоперевірка, виконання завдань модульного контролю. Студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації. Завершальним етапом вивчення розділу є виконання модульної контрольної роботи.

У методичних вказівках наведено розв’язання типових завдань з поясненнями алгоритму рішень. На практичних заняттях та у модульній контрольній роботі розглядаються основні розділи елементарної математики і використовуються наступні рекомендації по розв’язанню завдань. Перелік завдань наведений у п. 2.5.

2.2 Методичні вказівки та загальні рекомендації студенту по роботі над розділом «Елементарна математика»

Література: [1], гл.III, §8, [2], гл.XVII, §1-6, [3], гл.IV, §1-3, вправи 1-6, 21-25, 38-42, 50-53, 59-62, 65-69, 73, 74, 83; §5,6,7, вправи 137, 138, 144-146, 150, 172, 176, 177; §9(2), вправи 264, 265, 268, 269, 271, [4], гл.XI, §1-5; гл.XII, §1.

Довідковий матеріал та розв’язування типових завдань:

Приклад 1

Спростити: $$\frac{a^2-ac^2+2c^2-4}{a^2+2a+2c^2-c^4}-\frac{a^2-4a+4}{a^2+ac^2-2a-2c^2}$$

Насамперед варто звернути увагу на формули скороченого множення.

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; 2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, 3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; 5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
6. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; 7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Розв'язок. Перетворимо перший дріб:

$$\frac{a^2-ac^2+2c^2-4}{a^2+2a+2c^2-c^4}=\frac{(a^2-4)+(2c^2-ac^2)}{(a^2-c^4)+(2a+2c^2)}=\frac{(a-2)(a+2)+c^2(2-a)}{(a-c^2)(a+c^2)+2(a+c^2)}=$$

$$=\frac{(a-2)(a+2-c^2)}{(a+c^2)(a-c^2+2)}=\frac{a-2}{a+c^2}$$

Виконаємо перетворення другого дробу:

$$\frac{a^2-4a+4}{a^2+ac^2-2a-2c^2}=\frac{(a-2)^2}{(a^2+ac^2)-(2a+2c^2)}=\frac{(a-2)^2}{a(a+c^2)-2(a+c^2)}=$$

$$=\frac{(a-2)^2}{(a+c^2)(a-2)}=\frac{a-2}{a+c^2}$$

Отже, $\dfrac{a-2}{a+c^2}-\dfrac{a-2}{a+c^2}=0$

Відповідь: 0.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}2x+3y=8\\3x+2y=7\end{cases}$

Розв'язок. Розв'язати систему лінійних рівнянь можна способом підстановки, який полягає в тому, що з будь-якого рівняння системи виражають одне невідоме через інші невідомі, а потім підставляють значення цього невідомого в інші рівняння.

З першого рівняння виражаємо: $x=\dfrac{8-3y}{2}$.

Підставляємо цей вираз в друге рівняння та одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x=\dfrac{8-3y}{2}\\3\cdot\dfrac{8-3y}{2}+2y=7\end{cases};$$

З другого рівняння одержуємо $y=2$. З урахуванням цього з першого рівняння $x=1$.

Відповідь. (1; 2).

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2x^2+5x-1=0$.

Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де a, b, c — деякі числа, $a\neq 0$; x — змінна, називається квадратним рівнянням. Для рішення квадратного рівняння слід обчислити дискримінант $D=b^2-4ac$.

Якщо $D=0$, то квадратне рівняння має однакові корені: $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

Якщо $D>0$, то квадратне рівняння має два різних корені:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\ x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\ .$$

Якщо $D<0$, то квадратне рівняння не має дійсних коренів.

Якщо один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то квадратне рівняння можна розв'язувати, не обчислюючи дискримінанта:

1) $b=0;\ c\neq 0;\ \frac{c}{a}<0;$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

2) $b\neq 0;\ c=0;$

$$x_1=0;\ x_2=-\frac{b}{a}$$

За теоремою Вієта: якщо квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ має корені x_1 і x_2, то виконуються співвідношення

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Розв'язок. Обчислимо дискримінант та корені рівняння:

$$D=25-4\cdot 2\cdot(-1)=33>0;$$

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{33}}{4};x_2=\frac{-5-\sqrt{33}}{4}$$

Відповідь: $\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$.

Приклад 4. Знайти корені рівняння $x^2+4x-21=0.$

Розв'язок. Обчислимо дискримінант

$D=4^2-4\cdot 1\cdot(-21)=16+84=100>0.$ $x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{100}}{2}$; $x_1=3$, $x_2=-7.$

Відповідь: $x_1=3$, $x_2=-7.$

Приклад 5. Скоротити дріб $\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}$.

Чисельник дробу містить квадратний тричлен. Квадратний тричлен (тричлен другого степеня) — це вираз виду :

ax^2+bx+c, де a, b, c — дійсні числа, причому $a\neq 0$, а x — незалежна змінна.

Корінь квадратного тричлена — це значення x, при якому значення квадратного тричлена дорівнює нулю.

Дискримінантом квадратного тричлена називається дискримінант відповідного йому квадратного рівняння. Для квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, дискримінант $D = b^2 - 4ac$.

Часто виникає необхідність розкласти квадратний тричлен на лінійні множники. Якщо квадратний тричлен має розв'язки, то його можна розкласти на множники за формулою :

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 — корені тричлена.

Необхідність у розкладанні на лінійні множники квадратного тричлена виникає, наприклад, коли треба скоротити дробово-раціональний вираз, чисельник або знаменник якого містить квадратний тричлен. Щоб скоротити дріб, його чисельник і знаменник треба розкласти на множники.

Розкладемо на множники чисельник даного дробу, для чого знайдемо корені рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$. За теоремою Вієта знаходимо: $x_1 = -6, \quad x_2 = 1$. Тоді маємо $x^2 + 5x - 6 = (x+6)(x-1)$.

Знаменник набуває вигляду $x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$.

$$\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 36} = \frac{(x+6)(x+1)}{(x-6)(x+6)} = \frac{x+1}{x-6}.$$

Відповідь: $\frac{x+1}{x-6}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$|x + 5| - |x - 3| = 8.$$

Щоб розв'язати рівняння, що містить змінну під знаком модуля, треба звільнитися від знаку модуля, використовуючи його означення:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

На практиці:

1) знаходять критичні точки, тобто значення змінної, при яких вирази, що знаходяться під знаком модуля, обертаються в нуль;

2) розбивають область припустимих значень змінної на проміжки, на кожному з яких вирази, що знаходяться під знаком модуля, зберігають знак;

3) на кожному зі знайдених проміжків розв'язують рівняння без знака модуля.

Сукупність (об'єднання) рішень зазначених проміжків і складає всі рішення розглянутого рівняння.

Розв'язок. Знайдемо критичні точки:

$$x + 5 = 0 \quad \text{чи} \quad x - 3 = 0;$$
$$x = -5 \quad \text{чи} \quad x = 3.$$

Розв'яжемо задачу на кожному проміжку:

1) $x < -5,\ -x-5-(-x+3)=8,\ -x-5+x-3=8;\ -8=8$ – невірно. На розглянутому проміжку рішень немає.

2) $-5 \le x < 3,\ x+5-(-x+3)=8;\ x+5+x-3=8;\ 2x=6;\ x=3$ (не входить у розглянутий проміжок).

3) $x \ge 3,\ x+5-(x-3)=8;\ x+5-x+3=8;\ 8=8$ – вірно. Рівняння виконується для всіх значень змінної x з розглянутого проміжку.

Відповідь: $[3; \infty)$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$\log_2(2x+1) - \log_2 x = \log_4 64.$$

Логарифмом числа b за основою a називається показник степеня x, до якого слід піднести основу a, щоб одержати число b, де $a>0,\ a\neq 1,\ b>0$:

$$log_a b = x$$

Якщо основа дорівнює 10, то такий логарифм називається десятковим і позначається

$$lgb = x$$

без вказання основи.

Якщо основа логарифма дорівнює числу е, то логарифм називається натуральним і записується

$$lnb = x$$

Основна логарифмічна тотожність

$$b = a^{log_a b},\ b > 0.$$

Властивості логарифму:

1. $log_a a = 1$
2. $log_a 1 = 0$
3. $log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c$
4. $log_a(b/c) = log_a b - log_a c$
5. $log_a x^p = p \cdot log_a x$
6. $log_a x = log_b x / log_b a$ *(формула переходу до нової основи)*

7. $log_a b = 1 / log_b a$
8. $log_{a^\alpha} b^\beta = (\beta/\alpha) \cdot log_a b$

Найпростіше логарифмічне рівняння має вигляд:

$$\log_a x = b \text{ , де } a > 0; a \neq 1.$$

Область визначення $x > 0$, рівняння має рішення $x = a^b$.

Логарифмічне рівняння вигляду $log_a\ f(x) = b$, де $a > 0;\ a \neq 1$, область припустимих значень x якого задається нерівністю $f(x) > 0$, еквівалентне рівнянню $f(x) = a^b$.

Логарифмічне рівняння вигляду $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$, де $a > 0; a \neq 1$, має область припустимих значень *x*, що задаються системою нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases},$$

Дане рівняння еквівалентне рівнянню $f(x) = \varphi(x)$.

Розв’язок. Запишемо різницю логарифмів у лівій частині рівняння у вигляді логарифма частки, а праву частину спростимо:

$$\log_2 \frac{2x+1}{x} = 3.$$

Отримане рівняння еквівалентне рівнянню

$$\frac{2x+1}{x} = 2^3; \quad \frac{2x+1}{x} = 8$$

на області визначення вихідного рівняння, тобто на області припустимих значень x, що задається системою нерівностей:

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

Останнє рівняння легко розв’язати:

$$\frac{2x+1}{x} = 8;\ 2x+1 = 8x;\ 6x = 1;\ x = \frac{1}{6}.$$

Відповідь: 1/6.

Приклад 8. Обчислити $tg\alpha$, якщо $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ і $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1,$$

$$tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}, \quad ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}, \quad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}, \quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$$

Формули додавання:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}.$$

Формули кратних аргументів. Формули подвійного та половинного аргументів.

$$sin\,2\alpha = 2\,sin\alpha\,cos\alpha, \quad cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 1 - 2\,sin^2\alpha = 2\,cos^2\alpha - 1,$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Використовуючи формули подвійного аргументу, можна записати:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Вибір знаків «+» чи «-» у цих формулах залежить від того, у якій чверті знаходиться кут $\frac{\alpha}{2}$.

Добуток тригонометричних функцій. Сума тригонометричних функцій:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta));$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Використовуючи формули перетворення добутку в суму, одержуємо:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Розв'язок. Якщо назвати кут 2α аргументом, то кут α варто назвати половинним аргументом. Скориставшись формулою $\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$, замість вихідного рівняння будемо мати: $\frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = -\frac{5}{13}$.

Звідси $tg^2\alpha = \frac{9}{4}$, тобто $tg\alpha = \frac{3}{2}$ чи $tg\alpha = -\frac{3}{2}$.

З урахуванням того, що $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, маємо $tg\alpha = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Відповідь: 1,5.

Приклад 9. Знайти область визначення функції

$y = \sqrt{10x - 24 - x^2} + \sqrt{4 - x}$.

Залежність між змінними *x* та *y*, в якій кожному значенню змінної x із деякої множини D відповідає єдине значення змінної *y*, називається функціональною залежністю, або функцією.

Змінну *x* називають аргументом даної функції, чи незалежною змінною. Змінну *y* називають функцією від *x*, чи залежною змінною.

Область визначення функції – це множина всіх значень змінної x, при яких функція має зміст.

З'ясуємо, як знайти область визначення деяких функцій, заданих формулою.

1. Якщо функція — многочлен, то вона існує при будь-яких значеннях аргумента, тобто її область визначення — всі дійсні числа.
2. Якщо функція задана формулою, яка містить аргумент у знаменнику дробу, то до області визначення функції входять всі дійсні числа, крім тих, які перетворюють знаменник в нуль.

Якщо функція задана формулою, яка містить арифметичний квадратний корінь, то до області її визначення входять всі дійсні числа, при яких підкореневий вираз набуває невід'ємних значень.

В даному прикладі функція має зміст, коли виконується умова

$$\begin{cases} 10x - 24 - x^2 \geq 0; \\ 4 - x \geq 0 \end{cases}$$

Знайдемо корені рівняння $10x - 24 - x^2 = 0$:

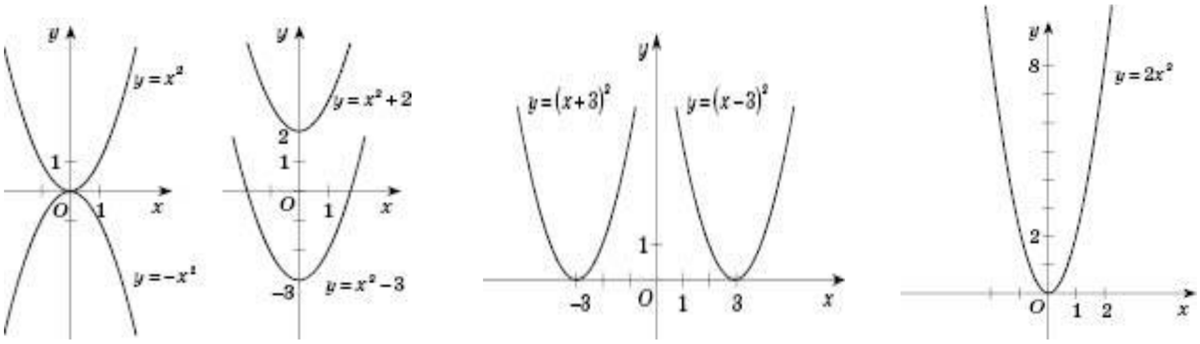
$$x^2 - 10x + 24 = 0; \quad x_1 = 6; \quad x_2 = 4.$$

Тоді $10x - 24 - x^2 \geq 0$ при $x \in [4,\ 6]$. Умова $4 - x \geq 0$ виконується при $x \leq 4$.

Маємо $\begin{cases} 4 \leq x \leq 6; \\ x \leq 4 \end{cases}$, тому $x = 4$ – єдина точка, яка входить в область визначення функції. **Відповідь:** 4.

Приклад 10. Побудувати графіки функцій:

а) $y = x^2 + 2,\quad y = x^2 - 3,\quad y = (x-3)^2,\quad y = (x+3)^2,\quad y = 2x^2$.



Щоб побудувати графік функції $y=kf(x)$, треба графік функції $y=f(x)$ розтягнути від осі x в k разів, якщо $k>1$, або стиснути його в k разів до осі x, якщо $0<k<1$.

Щоб отримати графік функції $y=f(x)+n$, треба графік функції $y=f(x)$ перенести на n одиниць в напрямі осі y, якщо $n>0$ або в протилежному напрямі, якщо $n<0$.

Щоб отримати графік функції $y=f(x-m)$, досить графік функції $y=f(x)$ перенести на m одиниць в напрямі осі x, якщо $m>0$ або на $-m$ одиниць в протилежному напрямі, якщо $m<0$.

Графік парної функції симетричний відносно осі y. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

2.3 Питання для самоперевірки

1. Означення модуля числа.
2. Властивості алгебраїчних дробів.
3. Властивості степенів.
4. Формули скороченого множення.
5. Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

6. Методи розв’язання рівнянь.
7. Методи розв’язання нерівностей.
8. Арифметичний корінь, основні властивості.
9. Логарифми та їх властивості. Формули логарифма добутку, степеня, частки.
10. Поняття, способи задання, область визначення, область значень функції.
11. Означення, основні властивості та графіки степеневої $y = x^n$, *n є R* (зокрема $y = ax + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sqrt{x}$)функції.
12. Означення, основні властивості та графіки показникової $y = \grave{a}^{\tilde{o}}$, *x є R* ($y = e^{\tilde{o}}$), логарифмічної $y = log_a x$, *x>0, a>0, a≠*1функції
13. Означення, основні властивості та графіки тригонометричних функцій : $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = \tilde{n}tgx$, обернених тригонометричних.
14. Основні тригонометричні формули.
15. Похідні елементарних функцій.
16. Означення первісної. Невизначений і визначений інтеграл.
17. Зображення геометричних фігур на площині.
18. Трикутник. Медіана, бісектриса, висота трикутника, їх властивості. Види трикутників. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника.
19. Чотирикутник: паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція.
20. Коло і круг. Центр, діаметр, радіус, хорди, довжина дуги кола.
21. Формули площ геометричних фігур: трикутника, прямокутника, паралелограма, квадрата, ромба, трапеції. Площа круга й сектора.
22. Многогранники. Вершини, ребра, грані, діагоналі многогранника. Призма, піраміда, паралелепіпед. Площі поверхні та об’єму.
23. Тіла обертання: циліндр, конус, сфера, куля. Центр, діаметр, радіус сфери і кулі. Формули площі поверхні й об'єму.

2.4 Типові приклади контрольних завдань

1. Спростити $n^3 \cdot \left(n^2\right)^6$.

2. Розв’язати систему $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x + 3y = 12. \end{cases}$

3. Розв'язати рівняння $2x^2-5x+2=0$.

4. Спростити $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-25}$;

5. Спростити $tg\alpha\cdot\left(1-sin^2\alpha\right)$.

6. Знайти область визначення функції $y=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{x+2}$.

7. Обчислити $log_7 196-2log_7 2$

8. Спростити $\left(m^3\right)^4\cdot m^5$.

9. Розв'язати систему $\begin{cases} x+y=1, \\ 3x-2y=8. \end{cases}$

10. Розв'язати рівняння $3x^2-10x+3=0$.

11. Спростити $\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-12x+36}$;

12. Спростити $1+sin^2\alpha+cos^2\alpha$.

13. Знайти область визначення функції $y=log_3\left(6-2x\right)$.

14. Обчислити $log_2 24-log_2 3$.

15. Спростити $\dfrac{a^3\cdot a^4}{a^5}$.

16. Розв'язати систему $\begin{cases} x+y=5, \\ 3x-y=11. \end{cases}$

17. Розв'язати рівняння $7x^2-9x+2=0$.

18. Спростити $\dfrac{x^2-16}{x^2-x-12}$;

19. Спростити $ctg\alpha\cdot\left(1-cos^2\alpha\right)$.

20. Знайти область визначення функції $y=\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$.

21. Обчислити $log_6 3+log_6 12$

22. Спростити $\dfrac{b^4 \cdot b^7}{b^6}$.

23. $\begin{cases} x - y = 4, \\ 5x + y = 14. \end{cases}$

24. Розв’язати рівняння $5x^2 - 7x + 2 = 0$.

25. Спростити $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 8x + 16}$;

26. $1 - sin^2\alpha - cos^2\alpha$.

27. Знайти область визначення функції $y = ln(2 - 2x)$.

28. Обчислити $log_6 60 - log_6 10$.

29. Спростити $\dfrac{12x^5 \cdot y^2}{6x^4 y^8}$.

30. $\begin{cases} 5x - y = 1, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$

31. Розв’язати рівняння $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

32. Спростити $\dfrac{x^2 + 7x + 6}{x^2 - 1}$;

33. $cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha + sin^2\alpha \cdot ctg^2\alpha$.

34. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{7 - x}$.

35. Обчислити $log_3 18 + log_3 \dfrac{1}{18}$.

36. Спростити $\dfrac{4a^3 \cdot b^7}{8a^5 b^2}$.

37. $\begin{cases} 3y + x = 7, \\ y - 5x = 5. \end{cases}$

38. Розв’язати рівняння $3x^2 - 11x - 4 = 0$.

39. Спростити $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12}$;

40. Спростити $sin\beta \cdot ctg\beta - cos\beta$.

41. Знайти область визначення функції $y = log_5(8-2x)$.

42. Обчислити $log_2 5 + log_2 \frac{8}{5}$.

43. Спростити $\frac{7^4 \cdot 7^5}{7^7}$.

44. Розв'язати систему: $\begin{cases} x + y = 7, \\ 5x - 2y = 14. \end{cases}$

45. Розв'язати рівняння $4x^2 - 5x + 1 = 0$.

46. Спростити $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 16}$;

47. $\frac{1 - cos^2\alpha}{1 - sin^2\alpha}$.

48. Знайти область визначення функції $y = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$.

49. Обчислити $log_3 2 + log_3 \frac{9}{2}$.

50. Спростити $\frac{9^6 \cdot 9^4}{9^8}$.

51. Розв'язати систему: $\begin{cases} x - y = 3, \\ 3x - 2y = 11. \end{cases}$

52. Розв'язати рівняння $4x^2 - 3x - 1 = 0$.

53. Спростити $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 3x - 10}$;

54. Спростити $(1 - sin\beta)\cdot(1 + sin\beta) + (1 + cos\beta)\cdot(1 - cos\beta)$.

55. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

56. Обчислити $log_5 45 - log_5 9$.

57. Спростити $(a^7)^4 \div a^{14}$.

58. Розв’язати систему: $\begin{cases} x+y=8, \\ 2x-y=4. \end{cases}$

59. Розв’язати рівняння $3x^2-10x+7=0$.

60. Спростити $\dfrac{x^2-10x+9}{x^2-2x+1}$;

61. Спростити $\dfrac{(sin\,\alpha+cos\,\alpha)^2}{1+sin\,2\alpha}$.

62. Знайти область визначення функції $y=ln(8-4x)$.

63. Обчислити $log_{0.3}3-log_{0.3}10$.

64. Спростити $\left(x^6\right)^4 \div x^{12}$.

65. Розв’язати систему: $\begin{cases} x-y=7, \\ 3x+y=9. \end{cases}$

66. Розв’язати рівняння $2x^2-7x+5=0$.

67. Спростити $\dfrac{x^2-16x+64}{x^2-7x-8}$;

68. Спростити $cos^2\,\alpha-4\,sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

69. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{1-x}$.

70. Обчислити $log_2 12+log_2 3$.

71. Спростити $\dfrac{a^2\cdot a^6}{a^5}$.

72. Розв’язати систему: $\begin{cases} 2x+5y=9, \\ 3x-5y=1. \end{cases}$

73. Розв’язати рівняння $x^2-4x+21=0$.

74. Спростити $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-25}$;

75. Спростити $sin(-x)+cos(-x)\cdot tg(-x)$.

76. Знайти область визначення функції $y=\dfrac{5}{\sqrt{9-x}}$.

77. Обчислити $log_5 45 - log_5 9$.

78. Спростити $\dfrac{b^5 \cdot b^4}{b^6}$.

79. Розв’язати систему: $\begin{cases} 5x-4y=11, \\ 2x+4y=10. \end{cases}$

80. Розв’язати рівняння $x^2+4x-21=0$.

81. Спростити $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2-4x-12}$.

82. $ctg(-x) \cdot tg(-x) - sin^2(-x)$.

83. Знайти область визначення функції $y = lg(5x-10)$.

84. Обчислити $lg\,40 - lg\,4$.

85. Спростити $m^5 \cdot \left(m^2\right)^6$.

86. Розв’язати систему: $\begin{cases} x-y=2, \\ 2x+3y=19. \end{cases}$

87. Розв’язати рівняння $6x^2+x-7=0$.

88. Спростити $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$.

89. Спростити $\dfrac{(1+cos\,2\alpha)\cdot cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$.

90. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{2x-8}$.

91. Обчислити $log_2 9 + log_2 4$.

2.5 Методичні вказівки та загальні рекомендації студенту по роботі над розділом «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»

Література: [6], гл.III, §9, [7], гл. 3., §2-4, [8], гл.VI, §2-3, §5,7; §11, [9], гл.VII, §6-9; гл.II, §4.

Довідковий матеріал та розв'язування типових завдань:

Приклад 1. Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$. Їх довжини відповідно $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$. Обчислити кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Розв'язок. Косинус шуканого кута:

$$cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=60^\circ$$

Відповідь. $(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$

Приклад 2.Обчислити кут між векторами $\vec{a}=(1;\sqrt{3})$ і $\vec{b}=(1;0)$.

Розв'язок. Косинус шуканого кута:

$$cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{1\cdot 1+\sqrt{3}\cdot 0}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=arccos\frac{1}{2}=60^\circ$.

Приклад 3.Обчислити кут між векторами $\vec{a}=(1;3)$ і $\vec{b}=(2;1)$.

Розв'язок. Косинус шуканого кута:

$$cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{1\cdot 2+3\cdot 1}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=45^\circ$.

Приклад 4. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}=(3;-1)$ і $\vec{b}=(-2;7)$

Розв'язок.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot(-2)+(-1)\cdot 7=-6-7=-13.$

Відповідь. -13.

Приклад 5. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх довжини відповідно дорівнюють 2 і 3, а кут між ними 60°

Розв'язок. З умови $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ і $\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right) = 60^\circ$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 2 \cdot 3 \cdot cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Відповідь. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.

Приклад 6. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a} = (6;7;10)$ і $\vec{b} = (8;5;9)$.

Розв'язок. Складаємо визначник й обчислюємо його:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 7 & 10 \\ 8 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(7 \cdot 9 - 5 \cdot 10\right) -$$

$$- \vec{j}\left(6 \cdot 9 - 8 \cdot 10\right) + \vec{k}\left(6 \cdot 5 - 8 \cdot 7\right) = 13\vec{i} + 26\vec{j} - 26\vec{k} = (13;26;-26)$$

Відповідь. $\vec{a} \times \vec{b} = (13;26;-26)$.

Приклад 7. Обчислити об'єм піраміди, побудований на векторах $\vec{a} = (2;3;5)$, $\vec{b} = (1;4;4)$, $\vec{c} = (3;5;7)$.

Розв'язок. Обчислимо зменшений добуток заданих векторів. Для цього складемо визначник, по рядкам якого запишемо координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

.

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 7 = -4$$

$$V_{nip} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right| = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

Відповідь. $V_{nip} = \frac{2}{3}$.

Приклад 8. Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку такого визначника:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання.

$$M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\ M_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \ldots,\ M_3^1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 9. Обидві матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ Знайти їх суму.

Розв’язання.

$$C = \begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 10. Знайти добуток матриці на число $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = -2$;

Розв’язання. $C = \alpha A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Приклад 11. Розв'язати систему методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Розв'язання. Третє рівняння перепишемо першим і виключимо невідоме x_1, із решти рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1,\\ 6x_3 + \ x_4 &= 5,\\ x_2 + \ \ x_3 + \ x_4 &= 0,\\ x_2 + \ 7x_3 + 2x_4 &= 5,\\ 2x_3 - 2x_4 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

З третього рівняння виключимо x_2 і перепишемо систему так:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1,\\ x_2 + 7x_3 + 2\,x_4 &= 5,\\ 6x_3 + \ \ x_4 &= 0,\\ 6x_3 + \ \ x_4 &= 5,\\ x_3 - \ \ x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Маємо два однакових рівняння (третє та четверте). Виключимо невідоме x_3 із останнього рівняння, маємо:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1,\\ x_2 + 7x_3 + 2\,x_4 &= 5,\\ 6x_3 + \ \ x_4 &= 5,\\ -2x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Остання система еквівалентна першій системі і з неї послідовно знизу вгору знаходимо: $x_4 = -1;\ x_3 = -1;\ x_2 = 0;\ x_1 = -2$. Тобто, система сумісна і визначена.

Приклад 12. Розв'язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 = 3,\\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8,\\ \qquad 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3\\ 3 & 4 & -5\\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 21 + 20 = 79$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3\\ -8 & 4 & -5\\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 84 + 85 + 48 + 304 - 56 + 30 = 395;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -112 - 153 - 63 + 170 = -158;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 136 + 18 + 51 + 32 = 237;$$

$x_1 = \Delta x_1 / \Delta_3 = 395/79 = 5;\ x_2 = \Delta x_2 / \Delta_3 = -158/79 = -2;$
$x_3 = \Delta x_3 / \Delta_3 = 237/79 = 3.$

Система має рішення: $x_1 = 5;\ x_2 = -2;\ x_3 = 3.$

Приклад 13. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 3, \\ x - 5y + 3z &= -1, \\ x - y + z &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Розв’язання.

Запишемо розширену матрицю системи і визначимо її ранг.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad rang\,\overline{A} = 3.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 - 12 - 1 + 5 + 4 + 6 = -8 \neq 0$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ - є невиродженою. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Знайдемо матрицю A^{-1}. Транспонуємо матрицю A:

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -5 & -1\end{vmatrix}=4;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -1\end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -5\end{vmatrix}=-6.$$

Тут ураховано *(-1)*$^{i+j}$.

$$A^{-1}=-1/8\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}.$$

Таким чином

$$X=-1/8\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=-1/8\begin{pmatrix}-2\cdot 3+3\cdot(-1)-7\cdot 1,\\ 2\cdot 3+1\cdot(-1)-5\cdot 1,\\ 4\cdot 3-2\cdot(-1)-6\cdot 1,\end{pmatrix}=$$

$=-1/8\cdot\begin{pmatrix}-16\\ 0\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, тобто *x = 2, y = 0, z = –1* – розв'язок системи трьох лінійних рівнянь.

Приклад 14. Розв'язати систему однорідних рівнянь;

$$\begin{cases}3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,\\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.\end{cases}$$

Розв’язання.

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & -4 & 5\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=36-5+8+8-6-30=11.$$

Оскільки $\Delta_3\neq 0$, система має тривіальний розв'язок: $x_1=x_2=x_3=0.$

Приклад 15. Розв'язати систему однорідних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0,\\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0,\\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Розв’язання.

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & -3 & 5\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}=-36+80-1-12-16-15=0.$$

Оскільки $\Delta_3=0$ - система сумісна, але невизначена. Ранг цієї системи дорівнює двом. Одне з рівнянь можна виключити. Тоді

$$\left.\begin{aligned}3x_1+4x_2-\ x_3&=0,\\ x_1-3x_2-5x_3&=0,\end{aligned}\right\}$$

Виразимо x_1 і x_2 через x_3:

$$\left.\begin{aligned}3x_1+4x_2&=\ x_3,\\ x_1-3x_2&=-5x_3,\end{aligned}\right\}$$

Розв'яжемо останню систему за формулами Крамера:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-9-4=-13;$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}x_3 & 4\\ -5x_3 & -3\end{vmatrix}=-3x_3+20x_3=17x_3;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}3 & x_3\\ 1 & -5x_3\end{vmatrix}=-15x_3-x_3=-16x_3.$$

Звідси: $x_1 = (-17/13)x_3$; $x_2 = (16/13)x_3$. Нехай $x_3 = 13k$, де $k\in R$, тоді розв'язок початкової системи:

2.6 Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення вектора.
2. Дайте визначення лінійних операцій над векторами.
3. Дайте визначення напрямних косинусів і довжини вектора.
4. Прямокутна декартова система координат. Розкладання вектора по ортах осей координат.
5. Дайте визначення скалярного добутку векторів і сформулюйте його властивості.
6. Сформулюйте умову ортогональності двох векторів.
7. Як обчислити довжину вектора та кут між двома векторами?
8. Дайте визначення векторного добутку двох векторів і сформулюйте його властивості.
9. Сформулюйте умову колінеарності двох векторів.
10. Дайте визначення визначників другого і третього порядків, їх властивостей.
11. Дайте визначення алгебраїчного доповнення і мінора.

12. Дайте визначення матриці. Основні властивості матриць.
13. Сформулюйте поняття оберненої матриці.
14. Дайте характеристику алгебраїчних операцій над матрицями.
15. Системи двох і трьох лінійних рівнянь.
16. Матричний запис системи лінійних рівнянь.
17. Сформулюйте правило Крамера.
18. Система n лінійних рівнянь з n невідомими.
19. Сформулюйте метод Гауса.
20. Дайте визначення перетворення оберненої матриці методом Гауса.

2.7 Типові приклади контрольних завдань

1. Дані точки: A(1;2;1); B(3;0;-4); C(-2;3;5); D(2;1;-1). [4], гл.2, с.44-52
   а) Знайти кут між векторами AB та CD
   б) Обчислити площу трикутника BCD
   в) Перевірити, чи належать точки A,B,C,D до однієї площини.

2. Дана матриця A= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю B=A•A^{T}

3. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ x + y + z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

   а) за правилом Крамера;
   б) засобами матричного числення.

4. Дані точки: A(2;5;-1); B(4;1;-2); C(3;3;1); D(4;-1;-2).
   а) Чи є серед векторів AB ,CD , AD взаємно перпендикулярні?
   б) Чи є серед векторів AC, BD, BA колінеарні?
   в) Перевірити, чи утворюють вектори BA, BC, BD праву трійку.

5. Дана матриця A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю B=A•A^{T}

6. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 1 \\ x - y - z = -3 \\ 3x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) засобами матричного числення.

7. Дані точки: A(3;-1;-2); B(2;3;4); C(5;0;-1); D(-1;2;1).
а) Знайти $Пр_{AB}$ CD
б) Обчислити площу паралелограма, що побудований на векторах BC та BA.
в) Перевірити компланарність векторів AC, BC,AD.

8. Дана матриця A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю B=A•A^T

9. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 13 \\ 2x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) засобами матричного числення.

10. Дані точки: A(4;0;2); B(3;-1;1); C(2;5;-4); D(5;-3;-1).
а) Знайти значення виразу: (3AB-2СД)(AC+2BD);
б) Знайти одиничний вектор, що перпендикулярний до векторів AB та AD;
в) Знайти об'єм паралелепипеду, що побудований на векторах AB, AC, AD.

11. Дана матриця A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю B=A•A^T

12. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 3 \\ 4x - 3y - z = 4 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) засобами матричного числення.

13. Дані точки: A(1;2;3); B(-1;3;2); C(7;-3;5); D(0;1;1).

а) Знайти кут між векторами AB та CD;
б) Обчислити площу трикутника BCD;
в) Знайти об'єм тетраедра ABCD.

14. Дана матриця A=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю   B=A•A^T

15. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) засобами матричного числення.

16. Дані точки: A(3;1;0); B(2;6;-1); C(4;0;0); D(-1;-1;-2).
а) Чи є серед векторів AB ,CD , AD взаємно перпендикулярні?
б) Чи є серед векторів AC, BD, BA колінеарні?
в) Перевірити, чи утворюють вектори BA, BC, BD ліву трійку.

17. Дана матриця A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю   B=A•A^T

18. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = -5 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) засобами матричного числення.

19. Дані точки: A(2;5;1); B(4;4;-2); C(2;-3;1); D(4;-2;-1).
а) Знайти $Пр_{AB}$ CD
б) Знайти площу паралелограма, що побудований на векторах BC та BA.
в) Перевірити компланарність векторів AC, BC, AD.

20. Дана матриця A=$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю   B=A•A^T

21. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 6 \\ 3x - 4y - 2z = -2 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) засобами матричного числення.

22. Дані точки: A(3;-2;2); B(2;3;4); C(5;0;1); D(-1;2;4).
а) Знайти значення виразу: AB(2CD-3AD+AC);
б) Знайти одиничний вектор, що перпендикулярний до векторів AB та AD;
в) Знайти об'єм паралелепипеду, що побудований на векторах AB, AC, AD.

23. Дана матриця $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$

24. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -3 \\ 4x + y + 2z = 7 \\ x - 2y - 3z = -3 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) засобами матричного числення.

25. Дані точки: A(4;2;2); B(3;-1;2); C(2;5;-4); D(5;-3;0).
а) Знайти кут між векторами AB та CD;
б) Обчислити довжину вектора AB x (CD+AD) ;
в) Знайти об'єм тетраедра ABCD.

25. Дана матриця $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$

26. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 5 \\ 3x - 3y - 4z = -1 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) засобами матричного числення.

27. Дані точки: A(4;2;3); B(-1;-3;2); C(0;-9;5); D(0;1;0).
а) Чи є серед векторів AB ,CD , AD взаємно перпендикулярні?
б) Знайти площу трикутника ABD;
в) Перевірити, чи належать точки A,B,C,D до однієї площини.

28. Дана матриця $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю $B=A\bullet A^T$

29. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+2z=11 \\ 3x+2y-2z=-2 \end{cases}$$

а) за правилом Крамера;
б) засобами матричного числення.

Методичні вказівки

до практичних робіт з дисципліни

"ВИЩА МАТЕМАТИКА"

Укладачі: Хецеліус О.Ю, д-р ф.-м. наук, проф.,
Сєрга І.М., канд. ф.-м. наук, доц.

Підп. до друку	Формат	Папір
Умовн. друк. арк.	Тираж	Зам. №

Надруковано з готових оригінал – макетів

Одеський державний екологічний університет

65015, Одеса, вул. Львівська, 15