

ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ INFORMATION RESOURCES AND MATHEMATICAL MODELING

УДК 502/504

Oleg I. Gerasymov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Academy of High School of Ukraine, Head at the Department of General and Theoretical Physics

ORCID ID: 0000-0003-2999-9834 *e-mail*: gerasymovoleg@gmail.com

Liudmyla M. Sidletska, graduate student of the Department of General and Theoretical Physics

ORCID ID: 0000-0002-1458-011X *e-mail*: milapolonskaa@gmail.com

Odesa State Environmental University, Odesa, Ukraine

HYDROSTATIC PRESSURE IN GRANULAR ENVIRONMENT

Summary. The problem is that to date there is no general theory of the granular state of matter in a closed form. However, there are some well-developed models that use, for example, the representation of a continuous environment. Typical bulk material is a large conglomeration of micro-mechanical particles of different sizes and shapes that interact with each other and the walls contain containers by mainly repulsive forces in direct mechanical contact (by nature it is forces of electromagnetic origin – dry and viscous friction forces, as well as traction).

In the proposed work to study the pressure in a multiparticle micro-mechanical system, a model of a lattice gas in a gravitational field is considered. Analysis of the determination of free energy and entropy allowed us to establish the corresponding equilibrium density profile, which is described by a Fermi-type function. The Fermi profile in the form of a density field was used to find the vertical hydrostatic pressure for which the analytical expression was obtained. Hydrostatic pressure was different from the known relations derived from the theory of condensed matter. The obtained results are confirmed by experimental observations, which indicate a complex, anisotropic significantly different from the known from the theory of condensed matter distribution of even vertical pressure in large conglomerations of discrete micro-mechanical particles. Which really repeats the Fermi distribution. The obtained results stimulate the revision of typical ratios of hydrostatics of continuous media, such as Pascal's laws. Torricelli, Archimedes and Bernoulli in the case of discrete micro-mechanical (granular) systems. The conclusions of the work can be significant in the design and evaluation of operating parameters of storage, release and transportation of bulk cargo, which consist of discrete micro-mechanical conglomerations with different degrees of compaction and compaction.

Keywords: conical slot hopper (silo); pressure in granular systems; lattice gas in gravitational field; density field; configuration entropy; hydrostatics of granular medium

О.І. Герасимов, Л.М. Сідлецька

Одеський державний екологічний університет, м. Одеса, Україна

ГІДРОСТАТИЧНИЙ ТИСК В ГРАНУЛЬОВАНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

***Анотація.** Проблема на сьогодні, що загальної теорії гранульованого стану речовини в замкнутому вигляді не існує. Тим не менш, існують і досить розвинені деякі моделі, що використовують, наприклад, уявлення суцільного середовища. Типовий сипкий матеріал являє собою велику конгломерацію мікромеханічних частинок різної величини і форми, що взаємодіють між собою і стінами вміщаючої ємності за допомогою головним чином сил відштовхування при прямому механічному контакті (за природою це сили електромагнітного походження – сили сухого і в'язкого тертя, а також зчеплення).*

У пропонуваній роботі для вивчення тиску у багаточастинковій мікромеханічній системі розглянута модель граткового газу у гравітаційному полі. Аналіз визначення вільної енергії та ентропії дозволив встановити відповідний рівноважний профіль густини, який описується функцією типу Фермі. Знайдений результат у вигляді Фермі-профілю поля густини було використано для знаходження вертикального гідростатичного тиску, для якого отримано аналітичний вираз. Гідростатичний тиск виявився відмінним від відомих співвідношень, які впливають з теорії конденсованого стану. Отримані результати підтверджуються експериментальними спостереженнями, які свідчать про складний, анізотропний, суттєво відмінний від відомих з теорії конденсованих систем розподіл навіть вертикального тиску у великих конгломераціях дискретних мікромеханічних частинок, який дійсно повторює риси розподілу Фермі. Отримані результати стимулюють перегляд типових співвідношень гідростатики суцільних середовищ, таких, наприклад, як закони Паскаля, Торрічеллі, Архімеда та Бернуллі у випадку дискретних мікромеханічних (гранульованих) систем. Висновки роботи можуть бути суттєвими при конструюванні і оцінці робочих параметрів ємностей збереження, вивільнення та транспортування сипучих вантажів, які складаються з дискретних мікромеханічних конгломерацій із різними ступенями ущільнення та компактності.

***Ключові слова:** тиск в гранульованих системах; гратковий газ в гравітаційному полі; поле густини; конфігураційна ентропія*

DOI: <https://doi.org/10.32347/2411-4049.2022.2.86-95>

Вступ

Гранульовані матеріали (ГМ) використовуються в промисловості, в технологіях із різних галузей промисловості, а також і в побуті майже в тих самих глобальних масштабах, як і рідини. Прикладом таких матеріалів є звичайний пісок з його різноманітним практичним застосуванням. Вражає, що незважаючи на масштабне прикладне значення, властивості (фізичні, механічні, структурні) гранульованих матеріалів до недавнього часу системно практично не вивчалися. Але, вже приблизно років 20–30 тому, фізики "раптом" усвідомили, що звичайний пісок є абсолютно вражаючим, з точки зору його незвичайних властивостей, матеріалом. А саме, за деяких умов він може поводитися і як тверде тіло, і як рідина, і як газ [1–4]. Причому кожна, умовно кажучи, "фаза" має унікальні властивості, що суттєво відрізняють

гранульовані матеріали від відомих агрегатних станів конденсованої речовини. Уявімо собі, є контейнер з піском, який збурюється зовнішнім полем, скажімо, віброприскорювань незначної амплітуди. Енергія цього руху передається через границі контейнеру окремим частинкам-гранулам. В результаті при досягненні певного рівня збудження вся маса гранульованого матеріалу приходить до стану руху і починає розвивати власну специфічну динаміку. Якщо гранульований матеріал розмістити на похилій площині, при деякому куті нахилу речовина починає текти, демонструючи, так би мовити, властивості рідини. При цьому взаємодії гранул між собою мають абсолютно відмінну від випадку рідини природу. Між гранулами взагалі не діють сили притягання, а сили відштовхування, які спрацьовують лише при контактах частинок, в загальному випадку, є непружними (дисипативними і нелінійними за природою, як, наприклад, сила тертя).

Серед багатьох специфічних властивостей, які показують гранульовані матеріали, помітне місце займає розподіл тиску в них. Це питання, зокрема, відіграє важливу роль в технологіях конічних бункерів зберігання та дозування ГМ (навантаження та розвантаження), так званих силосів, які широко використовуються в технічних галузях. При конструюванні різного виду таких пристроїв необхідно знати розподіл тиску, як вздовж їхніх стінок (горизонтальний тиск), так і в напрямку випускного отвору (вертикальний тиск). Для розробки відповідних технічних засобів маніпулювання ГМ та технологій їх використання важливо мати разом із чисельними розв'язками задачі також і її аналітичний розв'язок.

Наразі проблема полягає в тому, що досі не існує послідовної теорії ГМ, яка б дозволила провести необхідні розрахунки і здійснити оцінки відповідних параметрів гранульованих (сипучих) середовищ. Тому розгляд аналітичних моделей формування тиску в таких системах залишається актуальною задачею.

На теперішній час поширеною у використанні моделлю розподілу тиску у сипучих середовищах прийнято вважати відому модель Янсена [1]. Детальний аналіз цього підходу, який базується на феноменологічному визначенні вертикального і горизонтального тиску та їх постульованої пропорційності, наведений, наприклад, в [2]. В нашій роботі ми зосередимося на визначенні вертикального тиску в мікромеханічних системах з невеликим профілем поля густини. З цією метою буде використана модель ґраткового газу у гравітаційному полі, яка дозволяє отримати відповідний профіль поля густини в аналітичному вигляді.

1 Гідростатичний тиск в гранульованих системах

У даній роботі під гранульованим матеріалом будемо розуміти речовину, що складається з великої конгломерації дискретних частинок різних розмірів і форми, які взаємодіють між собою і стінами ємності за допомогою електромагнітних та сил сухого і в'язкого тертя. Якщо ж електромагнітні та сили в'язкого тертя відсутні, а проявляються лише сили сухого тертя, то такий стан речовини будемо називати ідеальним станом гранульованого матеріалу.

Розглянемо насип ідеального гранульованого матеріалу, деякої висоти H , що знаходиться в циліндричній ємності, як показано на рис. 1.

В цьому випадку можна виділити два умовних характерних напрямки: вертикальний, що збігається з напрямком дії сили тяжіння, і горизонтальний, перпендикулярний до сили тяжіння.

Під рівноважним станом гранульованого матеріалу будемо розуміти такий, в якому всі його частини знаходяться в рівновазі і спокої (імпульс будь-якого виділеного елемента дорівнює нулю). Під стаціонарним станом будемо розуміти такий стан, при якому всі його частини рухаються з постійною швидкістю, залишаючись при цьому в рівновазі із оточенням (імпульс будь-якого виділеного елемента не залежить від часу).

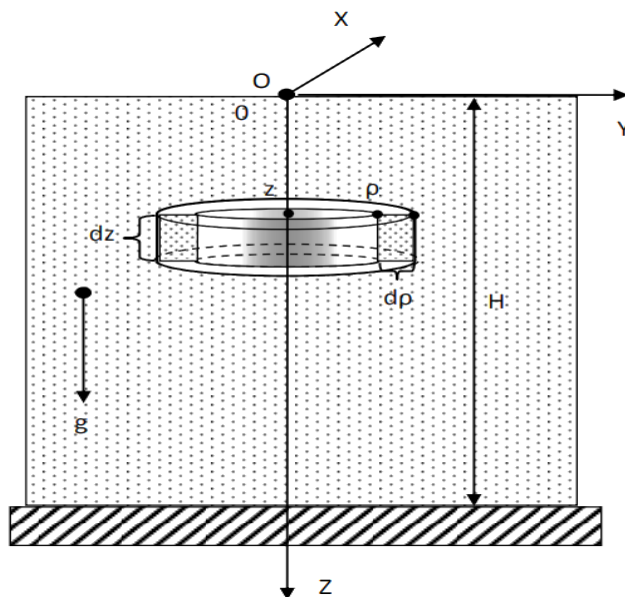


Рис. 1. Скетч-схема визначення параметрів задачі

Згідно із конструкцією задачі, в масі гранульованого матеріалу існує розподіл тиску на вертикальну і горизонтальну компоненти P_z і P_p , які у випадку гранульованого матеріалу априорі не дорівнюють один одному, як у випадку ідеальної рідини (закон Паскаля). Ми сфокусуємося нижче на розгляді компонент тиску, які залежать від координат z і не залежать від координати φ .

Більше століття тому була запропонована елегантна модель для опису розподілу тиску у вертикальному контейнері, заповненому гранульованим матеріалом, який знаходиться у стані спокою. Скорочено опишемо модель, запропоновану в [1]. Знову розглянемо вертикальний циліндр радіусом R , заповнений частинками-гранулами у стані спокою (див. рис. 1). Метою є визначення тиску всередині матеріалу, який викликаний дією сили тяжіння, в залежності від глибини x (де вісь x – вісь циліндра, орієнтована вертикально донизу). Зауважимо, що визначення «тиску» у гранульованому середовищі є саме по собі складною задачею (див., наприклад, [2]). Рефракційна техніка подвійного заломлення дозволяє здійснювати спостереження за розподілом сил в об'ємі стиснутого гранульованого матеріалу. За допомогою такого інструментарію встановлено, що розподіл тиску є вельми складним і суттєво неоднорідним. В [1] було запропоновано ввести модель, яка оперує двома характерними тисками, які діють у вертикальному та у горизонтальному

напрямах (між двома горизонтальними та вертикальними площинами, відповідно). Спростуючи задачу, було зроблено припущення, що ці два тиски пропорційні один одному. Зосередимося на визначенні тиску, який діє між двома горизонтальними площинами. Для цього можна розглянути баланс сил, які діють на тонкий шматочок речовини товщиною dx і на глибині x , який перебуває у стані спокою. При визначенні таких сил зазвичай щільність системи покладається постійною. Між іншим, у випадку гранульованого середовища ця умова, як вже згадувалося вище, вочевидь порушується.

Покладемо, що вертикальна компонента тиску P_z і, відповідно, градієнт цієї компоненти вздовж осі OZ залежать від радіуса. Отже, на сусідні елементарні кільця (рис. 1) по вертикалі будуть діяти різні сили. Це призведе до того, що, наприклад, сусіднє до визначеного зовнішнє елементарне кільце буде зміщуватися вниз, а сусіднє внутрішнє кільце буде зміщуватися (щодо розглянутого елементарного кільця) вгору.

Тому сили сухого тертя, що діють на внутрішню і зовнішню бічну поверхню розглянутого елементарного кільця, будуть спрямовані в різні боки і результуюча сила буде визначатися градієнтом компоненти тиску P . На підставі вищенаведених нехай і якісних міркувань можна зробити висновок про те, що в сипучих (гранульованих) матеріалах, зокрема, не виконується закон Паскаля, який є типовим для звичайних рідин.

2 Впакування гранульованих матеріалів

Велику кількість своїх специфічних властивостей ГМ здатні показувати, зокрема, завдяки можливості зменшувати об'єм, який вони займають при зовнішніх збуреннях. Ущільнення ГМ, яке відбувається завдяки різноманітним зовнішнім впливам, надійно спостерігається як у чисельних експериментах, так і у теоретичних дослідженнях [3, 4]. Збурення гранульованих систем може призводити не тільки до ущільнення, тобто до зменшення об'єму, який займає система, а також до симетризації розподілу частинок у системі. Приклади такої симетризації наведені на рис. 2 (цитовано з [2]).

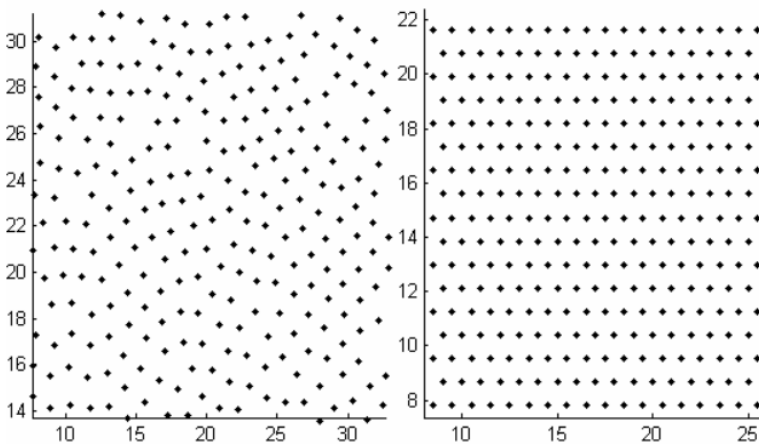


Рис. 2. Структуризація у двовимірних системах твердих дисків під впливом зовнішніх збурень (точками показані центри дисків). Ліворуч – неупорядкована структура; праворуч – структура із характерними ознаками симетризації та ущільнення [2]

На рис. 3 представлені структури, які зображені на рис. 2 та параметризовані в термінах так званих побудов Вороного (див. [3]). Метод Вороного, як бачимо, також дозволяє, окрім оцінки ступеня ущільнення, наочно спостерігати симетризацію у розподілі частинок, як про це свідчать дані, наведені на рис. 3.

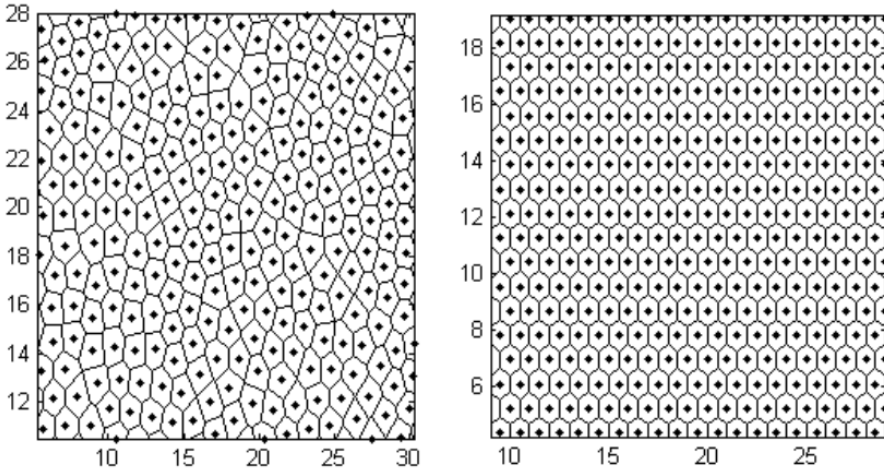


Рис. 3. Побудови Вороного для структур, які спостерігаються у гранульованих системах під впливом зовнішніх збурень. Ліворуч – початковий невпорядкований стан; праворуч – кінцевий симетризований стан, сформований в околі максимального впакування

Наведені на рис. 2 і 3 дані нашої роботи наводять на думку про можливість використання ґраткових моделей для вивчення, зокрема, поля густини (тиску) у гранульованих матеріалах. Теоретичний аналіз таких моделей та визначення шляхів їх застосування до параметризації феноменологічних даних про розподіл статичного тиску в природно анізотропних мікромеханічних (гранульованих) матеріалах становить, як вже згадувалося вище, нашу задачу.

3 Вільна енергія, ентропія і профіль густини в ґратковому газі у гравітаційному полі

В рамках квазістатистичного підходу (див. [3]) запишемо загальний вираз для вільної енергії системи, яка буде об’єктом розгляду у вигляді функціоналу:

$$F(p) = E(p) - \beta^{-1} S(p), \tag{1}$$

де енергія системи в гравітаційному полі $E(p)$ дається виразом:

$$E(p) = mg \int_{(V)} zp(\vec{r}) d\vec{r}, \tag{2}$$

тут z – вертикальна координата, β^{-1} – зворотний масштаб енергії, p – густина, S – ентропія системи. З урахуванням викладеного в розд. 2, в якості виразу для $S(p)$ скористаємося відомим співвідношенням для ентропії ґраткового газу ([4]):

$$S(p) = - \int_{(V)} dr \left\{ \frac{p}{p_0} \ln \frac{p}{p_0} + \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \ln \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \right\}, \quad (3)$$

тут p_0 – максимальна густина системи.

Розрахунок варіаційної похідної $\frac{\delta F(p)}{\delta p}$ з (1)–(3) породжує рівноважний профіль густини у формі розподілу, який описується функцією Фермі:

$$p(z) = \frac{p_0}{1 + e^{\gamma z}}, \quad \gamma = \frac{mgp_0}{\beta}, \quad (4)$$

де β – визначає масштаб енергії в системі.

Нижче ми проаналізуємо вертикальний тиск, який здійснює стовпчик гранульованої речовини, густина якої описується отриманим співвідношенням (4) для моделі ґраткового газу у гравітаційному полі.

4 Вертикальний гідростатичний тиск в системах з Фермі-профілем густини

Вертикальний тиск P в системі з Фермі-профілем густини $p(z)$ описується функцією (4), яка трансформується в (5):

$$p = \frac{p_0 mgz}{1 + e^{\gamma z}}. \quad (5)$$

Рівняння (5) визначає вертикальний тиск, який створюється над стовпчиком гранульованої речовини висотою z із Фермі-розподілом густини.

Таким чином, в розглянутій моделі тиск асимптотично зменшується із збільшенням вертикальної координати z за законом:

$$\sim p_0 mgze^{-\gamma z}, \quad (6)$$

який вочевидь є відмінним від відомого барометричного закону:

$$p = p_0 mge^{-\gamma z}. \quad (7)$$

Зауважимо, що розподіл (5) містить типову для Фермі-систем деталь, а саме, мілкомасштабну стадію зростання тиску (густини) для $z < z_0$, де z_0 – корінь трансцендентного рівняння

$$-\log(\gamma z_0 - 1) = \gamma z_0. \quad (8)$$

Експериментальні дослідження розподілу тиску в гранульованих матеріалах (див. огляд в [5]) достовірно фіксують відхилення, зокрема у розподілі тиску, від класичних законів броунівського руху (у розріджених станах).

Як вже згадувалося, збуджене, скажімо, внаслідок вібраційного впливу гранульоване середовище (ГМ) демонструє велику кількість інтригуючих

фізичних властивостей [3, 4]. Причому, так як енергія впливу постійно додається в систему, в такій нерівноважній системі досягається стаціонарний стан [3, 4]. В [5] досліджені спектральні властивості вібраційно збудженого ГМ під дією сили тяжіння. Показано, що в режимі слабкого збудження динаміку частинок-гранул неможливо описати як простий рух броунівських частинок в достатньо розрідженому стані. На підставі останнього автори роблять висновок про те, що для того, щоб описати кооперативну дисипативну динаміку гранульованої конгломерації частинок, необхідно розвивати альтернативні підходи, наприклад, за допомогою концепції узагальнених частинок Ланжевена.

В експерименті [5] вертикальний розподіл 2-міліметрових куль зі стабілізованого оксиду цирконію досліджувався за допомогою лазерного обладнання у полі дії сили тяжіння. Відповідні вертикальні зміщення $z(t)$ вимірювалися від верхньої частини контейнера шляхом налаштування вікна вимірювання в напрямку дії сили тяжіння. Було встановлено, що відповідна статистика (параметризована в термінах функції конфігураційного розподілу N частинок – ϕ) задовольняє закону Фермі (див. рис. 4 з [5]).

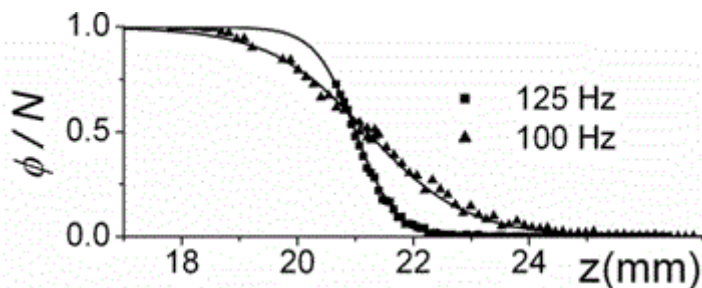


Рис. 4. Результат експериментального дослідження розподілу за вертикальними положеннями частинок гранульованої конгломерації висотою $h = 21$ mm і інтенсивністю збудження $\Gamma = 10$

Дані, наведені на рис. 4, наочно свідчать про Фермі-характер вертикального розподілу частинок-гранул у розрідженій системі і, таким чином, про порушення закону броунівського руху.

Ентропійний аналіз ґраткової моделі гранульованої системи, проведений вище, свідчить про те, що розподіл Фермі є також типовим і для густо упакованої гранульованої конгломерації, що порушує також відомі закони гідростатики (наприклад, закон Паскаля).

Тому розроблений вище теоретичний підхід є підґрунтям для подальшого поглибленого вивчення питання про розподіл тиску і встановлення аналогів гідростатичних законів в гранульованих середовищах.

Висновки та перспективи подальших досліджень

За допомогою аналізу вільної енергії та ентропії у квазістатичному наближенні для моделі ґраткового газу у гравітаційному полі, яка моделює найпростішу мікромеханічну систему, знайдений вертикальний Фермі-профіль поля густини, який є відмінним від відомого больцманівського.

Використовуючи знайдений вираз, для поля густини розрахований вертикальний гідростатичний тиск, який має відмінності від класичного закону Паскаля у фізиці конденсованого стану.

Отримані результати дозволяють враховувати вищеописаний ефект в конструкціях ємностей збереження та дозування сипучих матеріалів, а також в технологіях геоморфологічного моніторингу мікромеханічних (гранульованих) середовищ [6].

Порівняння отриманих результатів з даними експериментів [5] з дослідження вертикальних розподілів частинок в розріджених гранульованих конгломераціях спонукають до попереднього висновку про універсальний характер розподілу вертикальної густини (тиску) у вигляді Фермі-розподілу для різних ступенів впакування дискретних мікромеханічних систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Janssen H. A. (1895) Versuch über Getreidedruck in Silozellen, *Zeitschrift des vereins Deutscher Ingenieure*. V. 39, N. 35. P. 1045–1049.
2. Boutreux, T., Raphaël E., and De Gennes P. G. (1997) Propagation of a pressure step in a granular material: The role of wall friction. *Physical Review E* vol. 55, N. 5 doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.5759>.
3. Герасимов О.І. Фізика гранульованих матеріалів. Одеса: ТЕС, 2016. 264 с.
4. Герасимов О.І., Співак А.Я. Окремі задачі фізики м'якої матерії : монографія / Одеськ. держ. еколог. ун-т. Одеса: Видавничий дім "Гельветика", 2020. 200 с.
5. Jorge E. Fiscina, Manuel O. Cáceres (2005) Fermi-like behavior of weakly vibrated granular matter. *Phys. Rev. Lett.* 95, 108003.
6. Gerasymov O.I., A. Ya. Spivak Parameterization of the local structure of micro-mechanical systems (granular materials). In: *The Bogolyubov Kyiv Conference "Problems of theoretical and mathematical physics"*, Kyiv, Ukraine, September 24–26, 2019 p. 73.
7. Samchenko, D. N., Kochetov G. M., & Vasiliev, A. (2020). Енергоощадна технологія переробки гальванічних шламів з одержанням радіопоглинаючих матеріалів. *Екологічна безпека та природокористування*, 35(3), 30–43. doi: <https://doi.org/10.32347/2411-4049.2020.3.30-43>.

Стаття надійшла до редакції 11.02.2022 і прийнята до друку після рецензування 17.05.2022

REFERENCES

1. Janssen, H. A. (1895). Versuch über Getreidedruck in Silozellen. *Zeitschrift des vereins Deutscher Ingenieure*, 39(35), 1045-1049.
2. Boutreux, T., Raphaël, E., & De Gennes, P. G. (1997). Propagation of a pressure step in a granular material: The role of wall friction. *Physical Review E*, 55(5) doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.5759>.
3. Gerasymov, O.I. (2016). *Physics of granular materials*. Odessa: TES [in Ukrainian].
4. Gerasymov, O.I., & Spivak, A. Ya. (2020). Some problems of soft matter physics. Odessa: Helvetica Publishing House [in Ukrainian].
5. Fiscina, Jorge E., & Cáceres, Manuel O. (2005). Fermi-like behavior of weakly vibrated granular matter. *Phys. Rev. Lett.* 95, 108003.
6. Gerasymov, O.I., & Spivak, A. Ya. (2019). Parameterization of the local structure of micro-mechanical systems (granular materials). In *The Bogolyubov Kyiv Conference "Problems of theoretical and mathematical physics"*, (p. 73). Kyiv, Ukraine.

7. Samchenko, D. N., Kochetov G. M., & Vasiliev, A. (2020). Energy-saving technology for processing of galvanic sludge with obtaining of radio-absorbing materials. *Environmental Safety and Natural Resources*, 35(3), 30–43. doi: <https://doi.org/10.32347/2411-4049.2020.3.30-43>.

The article was received 11.02.2022 and was accepted after revision 17.05.2022

Герасимов Олег Іванович

доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України, завідувач кафедри загальної та теоретичної фізики Одеського державного екологічного університету

Адреса робоча: Україна, 65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

ORCID ID: 0000-0003-2999-9834 **e-mail:** gerasymovoleg@gmail.com

Сідлецька Людмила Михайлівна

аспірант кафедри загальної та теоретичної фізики Одеського державного екологічного університету

Адреса робоча: Україна, 65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

ORCID ID: 0000-0002-1458-011X **e-mail:** milapolonskaa@gmail.com