МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕЩЕРЯКОВ В.І., ЧЕРЕПАНОВА К.В.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
«НЕВИЗНАЧЕНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

для студентів 3 курсу денної форми навчання
Рівень вищої освіти – «Бакалавр»
Напрям підготовки – «Комп'ютерні науки»

Одеса, 2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕЩЕРЯКОВ В.І., ЧЕРЕПАНОВА К.В.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
«НЕВИЗНАЧЕНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

для студентів 3 курсу денної форми навчання
Рівень вищої освіти – «Бакалавр»
Напрям підготовки – «Комп'ютерні науки»

Рекомендовано методичною радою Одеського державного екологічного університету Міністерства освіти і науки України як конспект лекцій (протокол №8 від 29.06.2017)

Одеса, 2017

Конспект лекцій з дисципліни «Невизначене програмування» для студентів 3 курсу денної форми навчання, напряму підготовки – комп’ютерні науки.

Укладачі:
МЕЩЕРЯКОВ В.І. – завідувач кафедри інформатики, професор
ЧЕРЕПАНОВА К.В. – асистент кафедри інформатики

ЗМІСТ

Передмова

Невизначена поведінка (англ. Undefined behaviour, в ряді джерел непередбачувана поведінка) – властивість деяких мов програмування (найбільш помітно в Сі), програмних бібліотек і апаратного забезпечення в певних маргінальних ситуаціях видавати результат, який залежить від реалізації компілятора (бібліотеки, мікросхеми) і випадкових факторів. Іншими словами, специфікація не визначає поведінку мови (бібліотеки, мікросхеми) в будь-яких можливих ситуаціях, а говорить: «за умови А результат операції Б не визначений». Допускати таку ситуацію в програмі вважається помилкою; навіть якщо на деякому компіляторі програма успішно виконується, вона не буде кросплатформеною і може відмовити на іншій машині, в іншій ОС або при інших налаштуваннях компілятора.

Невизначену поведінку не слід плутати з не точною поведінкою (unspecified behavior), при якій специфікація дозволяє не будь-яка поведінку, а тільки обмежену діапазоном варіантів реалізації.

Невизначене програмування – це уніфікований підхід до вирішення оптимізаційних задач в умовах невизначеності загального вигляду, який об'єднує стохастичне, нечітке і неточне (інтервальне) програмування. Для всіх видів невизначеного програмування цільова функція і обмеження задаються явно в аналітичному вигляді.

1 Загальні відомості про дисципліну

1.1 Мета дисципліни та її місце у навчальному процесі

Дисципліна “ Невизначене програмування ” входить до складу варіативної частини навчального плану підготовки бакалаврів у галузі знань “Інформатика та обчислювальна техніка”, спеціальності “Інформаційно-управляючи системи та технології ”, шифр 6.05010101.

Курс присвячений вивченню сучасного рівня моделювання і програмування процесів, які характеризуються невизначеністю у постановці задачі, вхідних даних і мети, тобто реальних задач управління сучасними об’єктами такими як управління системою реагування на надзвичайні ситуації за результатами моніторингу зовнішнього середовища.

Метою дисципліни є ознайомлення студентів з основними задачами математичного програмування, заснованих на принципах нечіткої логіки, обробки даних на базі нейронних мереж та генетичних алгоритмів.

Загальний обсяг навчального часу, що припадає на вивчення дисципліни, визначається навчальними планами.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання, він повинен:

ЗНАТИ:

- принципи нечіткого програмування
- принципи побудови нейронних мереж
- принципи генетичних алгоритмів

ВМІТИ:

- розробляти автоматичні пристрої на нечіткій логіці
- розробляти структури нейронних мереж
- проводити навчання простих нейронних мереж

Компетенції:

- здатність аналізувати первину задачу (технічне завдання) на предмет виявлення пріоритетних напрямів роботи, які обумовлюють здатність досягнення мети розробки,
- вміння виділити частини роботи, які можна використати з бібліотек існуючих програм, або представлених на ринку,
- спроможність використання методів і алгоритмів нечіткого програмування для вирішення конкретних задач управління розробкою інформаційних систем.

1.2. Вступ та структура навчальної дисципліни

В курсі “Невизначене програмування” викладаються основні математичні принципи невизначеного програмування, принципи моделювання і програмування покликані закласти фундамент у системі утворення у майбутнього фахівця з розробки та тестування програмного забезпечення того базису, на основі якого викладаються такі дисципліни програмістського блоку як “Безпека програм та даних”, “Проектування інформаційних систем”, дипломне проектування, готується теоретична база для магістерської підготовки.

Представлений в курсі теоретичний матеріал, служить двом основним цілям:

1. Підготувати необхідну теоретичну базу для наступного оволодіння різними методами програмування і обробки інформації нечіткими методами;
2. Дати необхідні навички для практичного програмування мовою високого рівня C#.

Дисципліна “Невизначене програмування” забезпечена електронними версіями навчальних посібників:

Основна:

1. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. – М.: БИНОМ, 2005, 416 с.
2. Дементьев Н.П. Нечеткое управление в технических системах. Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005. 200 с.
3. Блюмин С.Л., ШуйковаИ.А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности. Липецк: ЛЭГИ, 2001. 138 с.
4. Барский А.Б. Нейронные сети: распознавание, управление, принятие решений. М.: Финансы и статистика, 2004. 176 с.
5. Круглов В.В., Борисов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. М.: Горячая линия, 2002. – 382 с.
6. Хайкин С. Нейронные сети. М.: Вильямс, 2006. 1104 с.
7. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия, – Телеком, 2006. 452с.

Додаткова:

8. ПавловскаяТ .А. C#. Программирование на языке високого уровня. Учебник для вузов. СПб.: Питер, 2009. 432 с.
9. Фаронов В. Программирование на языке C#. Учебный курс. СПб.: Питер, 2007. 240 с.
10. Мак-Дональд М., Штушта М. Microsoft ASP.NET 2.0 с примерами на C# 2005 для программистов. М.: ООО “И.Д. Вильямс”, 2006. 1408 с.

11. Троелсен Э. Язык программирования C# 2005 и платформа .NET 2.0. М.: ООО “И.Д. Вильямс”, 2007. 1168 с.

2 Основи невизначеного програмування

2.1 Вступ. Форми подання множин. Функція приналежності. На шляху до невизначеного програмування

Поняття множини було введено в науковий обіг як частина системи математичних знань ще в 1872 році відомим німецьким математиком Георгом Кантором і посіла належне місце в загальній структурі цієї системи. Теорія множин не тільки істотно розширила можливості застосування математичних методів і допомогла постановки та вирішення нових класів важливих теоретичних і прикладних завдань, а й змусила певною мірою переглянути методологічні основи самої математики. Однак, на думку деяких математиків, поняття безлічі не сприяло успішному вирішенню жодної задачі, яка могла б бути вирішена в рамках традиційної постановки. Однак за допомогою теорії множин вдалося формалізувати, а отже, і забезпечити можливість вирішення багатьох завдань, які без такого уявлення взагалі не могли навіть розглядатися як об'єкти класичної математики.

Множина і способи її подання

Відповідно до відомих визначень множини, запропонованих групою французьких математиків, зазвичай виступають під колективним псевдонімом Н. Бурбак, *"безліч утворюється з n елементів, які мають деякі властивості і знаходяться в певному відношенні між собою або з елементами інших множин"*. Будучи, на думку Р. Фора, А. Кофмана і М. Дені-Папена, "абсолютно ясним для математиків, ця пропозиція викликає різку критику з боку логіків, які виступають проти використання антропологічного поняття властивості (якості)".

Той факт, що елемент x належить базовій множині X, прийнято позначати символом, тобто $x \in X$. Коли ж елемент x не належить безлічі У, цей факт позначається формулою $x \notin Y$. Наприклад, число 3 належить множині N натуральних чисел, тобто $3 \in N$. У той же час число 2,7 не належить цій безлічі, тобто $2{,}7 \notin N$. Можна уявити собі множину, до складу якої не входить жоден елемент. Наочним прикладом може служити множина двозначних чисел з інтервалу [1,9]. Така множина називається порожньою і зазвичай позначається символом 0.

Ті об'єкти, сутності або елементи, які утворюють дану безліч, заведено позначати малими латинськими буквами: a,b,c, ... або x, y, z або однією літерою з нижнім індексом: x_1, x_2, x_3 ... Множину зазвичай заведено позначати великими латинськими літерами: A, B, C, ..., Z. Якщо безліч містить кінцеве число елементів, її називають кінцевою, в іншому випадку безліч називають нескінченною. Деяка частина А безлічі X, утворена елементами, які мають ще одну властивість, відмінну від інших його елементів, називається підмножиною множиниX.

Отже, безліч $A \subseteq X$ як деяку підмножину базового безлічі X являє собою сукупність таких елементів цієї множини X, які об'єднуються наявністю у них деякої характеристичної властивості. Можна також уявити собі безліч, до складу якої не входить жоден елемент з базової безлічі X. Таку безліч, як було показано вище, прийнято називати порожньою і позначати символом $\emptyset$.

Перейдемо тепер до питань про форми і способи подання множин і про добре відомих булевих операціях над множинами. При цьому будемо вважати, що безліч визначає як самі елементи, так і порядок розташування елементів. У літературі зазвичай стверджується, що існує п'ять таких основних форм представлення множин:

1) простий перелік всіх елементів, які в своїй сукупності і утворюють відповідну безліч. Одним з наочних прикладів використання цього способу є список студентів в журналі деякої навчальної групи.

2) словесний або математичний опис множини за допомогою характеристичної властивості його загального елемента. Така форма є найбільш прийнятою для числових множин. Характеристична властивість зазвичай записується у вигляді певної формули або алгоритму, за якими здійснюється обчислення будь-якого елемента в залежності від його порядкового номера в множині. Прикладом може служити опис безлічі непарних чисел за допомогою формули x_n=2n-1, де число n = 1,2, ... визначає номер елемента в цій множині. Дійсно, першим з цих чисел є одиниця, оскільки при n=1 його можна обчислити як x_n = 2+1-1=1.

3) лінгвістичний (словесний) спосіб опису характеристичної властивості загального елемента множини, відповідно до якого його і відносять до цієїмножини. Прикладами можуть служити такі описи:

- "Безліч студентів третього курсу спеціальності" Програмне забезпечення автоматизованих систем управління ";
- "Безліч стільців, що знаходяться в даній аудиторії";
- "Безліч чисел, що діляться без залишку на три" і т.п.

4) графічне представлення множини за допомогою певної базової безлічі (існують різні варіанти використання цього способу). Найпростішим прикладом може служити графік, наведений на рис.2.1, який представляє безліч $B=\{x^2\}$, що містить квадрати чисел, які є елементами базовоїмножини дійсних чисел.

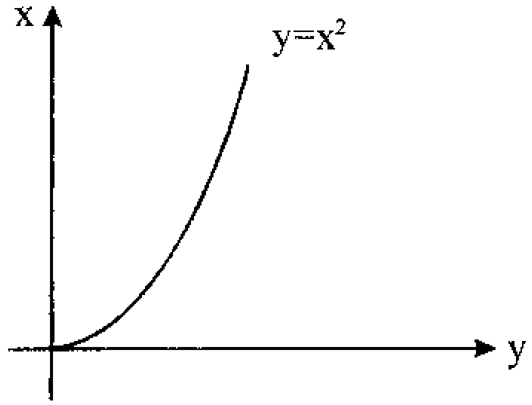

Рисунок 2.1 – Графічне забраження множини B={x^2}

5) опис множини за допомогою функції приналежності елемента до даної безлічі. Для ілюстрації цього способу представимо деяку універсальну безліч у вигляді X= {x_1,x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7}.

Нехай в ньому існує підмножина A, яку утворюють елементи універсальної множини, що мають непарний індекс. Іншими словами, A = {x_1, x_3, x_5, x_7}. Відповідно до запропонованого способу опису цю множину можна представити у вигляді всієї сукупності елементів універсальної множини X з відповідним значенням так званої функції приналежності, що дорівнює одиниці, якщо елемент x_i належить множині A, і нулю - в іншому випадку. Таким чином, для елементів з непарними індексами вона буде дорівнює одиниці, а з парними - нулю. Тоді безліч A набирає вигляду

$$A = \{(x_1, 1), x_2,0), (x_3,1), (x_4,0), (x_5,1), (x_6,0), (x_7,1)\}.$$

Цей спосіб представлення множин може здатися не зовсім звичайним і навіть дещо екзотичним і громіздким. Однак в реальній дійсності він є досить зручним.

Основна особливість і глибинна сутність цього способу полягає в своєрідному "маркуванні" саме тих елементів, які утворюють цю безліч A, що означає їх приналежність до нього. У реальному житті також існує досить багато подібних підходів. Наприклад, форма, в яку одягають військових чи працівників міліції, призначена для того, щоб виділяти представників цих соціальних інститутів з безлічі всіх інших людей.

Подальшим розвитком цієї "маркування" виступають знаки відмінності, відповідні військовим званням, емблеми роду військ і т.п., які як би виділяють окремі підмножини із загальних множин військових чи працівників міліції.

Саме цей спосіб і створює в подальшому зручні передумови для переходу до поняття нечітких множин.

2.2. Нечіткість опису задач автоматизованого управління і прийняття рішень

Невизначеності і нечіткості як в повсякденному житті людини, так і в багатьох сферах професійної діяльності мають настільки широке поширення, що представляється, ніби вони буквально пронизують усі сторони реальної дійсності. Більш того, такі невизначеності насправді є невід'ємним атрибутом реальності і однією з основних форм її відображення людською свідомістю. Однак протягом досить тривалого часу потужний апарат наукового пізнання і аналізу явищ зовнішнього світу базувався на створених певною мірою штучно закономірностях формальної логіки, на строгих описах складних об'єктів і феноменів за допомогою математичних абстракцій і на інших чітко визначених наукових принципах і положеннях.

Така ситуація знайшла своє відображення навіть у появі і широкому використанні спеціального терміна "точні науки". На противагу цим наукам всі інші галузі знання як би заздалегідь вважалися недостатньо точними і в чомусь навіть другорядним. Неабиякою мірою цьому сприяв і широко відома теза Ф. Енгельса про те, що будь-яка наука може вважатися наукою лише в тій мірі, в якій вона використовує математику.

Помилковість і однобічність такого підходу видається очевидною. Ми вже не говоримо про те, що він фактично відмовляє в праві вважатися науками і виключає з її сфери такі найважливіші галузі знання, як науки про людину і суспільство. Сьогодні не тільки філософи і соціологи, а й багато авторитетні представники тих самих точних і навіть технічних наук не тільки визнають об'єктивне існування різних нечітких і невизначеностей і необхідність їх обліку, а й активно розробляють відповідний математичний апарат, що дозволяє використовувати потужний арсенал математичних методів для постановки і вирішення багатьох важливих для практики задач, що містять суттєві невизначеності.

Ці завдання набули особливої актуальності у зв'язку з розробкою і широким використанням автоматизованих систем управління, які представляють собою складні людино машинні комплекси, в контурі управління яких на людину покладено безпосереднє виконання певної сукупності відповідальних функцій.

Іншою подібною сферою є теорія і практика прийняття рішень. Внаслідок суб'єктивного характеру сприйняття людиною кожної конкретної ситуації і відповідної індивідуальної манери реагування на неї і в системах автоматизованого управління, і в задачах прийняття рішень часто виникають невизначеності різної природи, суттєво ускладнюють ефективне вирішення цих завдань.

В даний час все більш усвідомлюється і визнається визначальна роль особистісного фактора в забезпеченні бажаного рівня ефективності суспільного виробництва. Цей фактор по праву вважається основним джерелом і резервом подальшого науково-технічного і соціального прогресу. Разом з тим, саме особистісний фактор стає одним з тих джерел, які вносять істотну невизначеність, неточність і нечіткість у опис і постановку безлічі важливих і відповідальних завдань. І це слід визнати неминучим, оскільки процес творчого людського мислення протікає в рамках нечітких категорій і образів, які не піддаються суворому опису за допомогою кількісних показників.

Добре відомо, що люди з розвиненим інтелектом в процесі мислення широко користуються далекими, на перший погляд іноді навіть несподіваними асоціаціями. Крім того, досить часто ефективні рішення виникають у людини на інтуїтивному, підсвідомому рівні. Такому мисленню не можуть повністю відповідати традиційні моделі, методи і алгоритми класичної математики з їх однозначної бінарної логікою "так-ні", "істина-брехня".

Для подолання такого становища в середині 1960-х рр. американський математик Л.А. Заде (L.A. Zadeh) запропонував принципово новий спосіб опису об'єктів, явищ і ситуацій, які можуть бути охарактеризовані лише порівняно неточно. Цей метод отримав назву теорії нечітких (розмитих) множин.

Апарат нечітких множин дозволив широко використовувати надійні і перевірені математичні підходи при вирішенні завдань, які раніше насилу підлягали математичному опису або взагалі не піддавалися формалізації. Тим самим виникла можливість з'єднання строгості і точності класичної математики з істотною невизначеністю і неоднозначністю багатьох практичних ситуацій, в тому числі суб'єктивно сприймаються і емоційно забарвлених в свідомості людини різних явищ реального світу.

Методи теорії нечітких множин знайшли відповідне відображення в програмі математичної підготовки майбутніх системних аналітиків. Однак їх засвоєння і успішне застосування при вирішенні важливих для практики задач вимагає від студентів певного рівня глибини розуміння, своєрідного "відчуття" природи невизначеностей, їх джерел і проявів.

Адже навіть від правильного розуміння сутності конкретної невизначеності і визначення характеру її природи значною мірою залежить можливість вдалого вибору найбільш адекватних математичних моделей і методів для вирішення завдання, в якій проявляється дана невизначеність. З іншого боку, фахівець-аналітик може при цьому забезпечити кваліфіковану інтелектуальну підтримку процесів підготовки і прийняття відповідальних управлінських рішень.

Неточність виступає характеристикою вживання терміна або поняття, який позначає недостатньо визначений або нечітко окреслене клас об'єктів. Вживання поняття, його інтерпретація передбачає знання його сенсу, або змісту, а також знання його денотації, тобто того класу об'єктів, до яких це поняття можна застосувати. У житті часто зустрічаються поняття, зміст яких виявляється недостатньо визначеним або взагалі розпливчастим. Їх прийнято називати неясними, а поняття, які застосовуються для позначення розпливчастих, погано специфіковані класів об'єктів, називають неточними. Вони виступають протилежністю точним понять, які належать до чітко визначених совокупностям об'єктів.

Поширеним прикладом неточного поняття може служити вираз "молода людина". Як відзначають А.А. Івін і А.Л. Никифоров, "в двадцять років людина визначено молодий, в сорок його вже не можна назвати молодим". На їхню думку, "десь між цими віковими межами лежить досить широка область невизначеності, коли не можна з упевненістю ні назвати людину молодим, ні сказати, що він уже немолодий. Межа класу людей, до яких застосовне поняття "молода людина", позбавлена чіткості".

Автори наводять і інші, не менш переконливі приклади наявності неточностей, відносячи до них такі емпіричні характеристики, як "високий", "великий", "віддалений" і т.п. Більш того, на їхнє переконання, неточним навіть поняття "будинок", "купа" і т.п., оскільки можливі ситуації, в яких не можна з упевненістю стверджувати, чи можна застосувати дане поняття чи ні. При цьому сумніви в можливості його застосування до конкретних об'єктів або явищ не усуває навіть ні залучення нової інформації, ні додатковий аналіз самого поняття. Наприклад, в процесі поступової розбирання будинку важко вказати момент, починаючи з якого залишився можна назвати не будинком, а руїнами.

Неясність є характеристику вживання терміна або поняття з недостатньо визначеним, розпливчастим змістом. Як вважають А.А. Івін і А.Л. Никифоров, "точне вживання і розуміння поняття передбачає знання його сенсу, або змісту, і виразне уявлення про класі тих об'єктів, до яких воно відноситься. Поняття, що відсилає до розмитого, нечітко пропонованого безлічі речей або до безлічі, межа якого невизначена, є неточним. Поняття з неясним змістом, розмитим і невизначеним змістом називається змістовно неясним або просто незрозумілим.

Як приклад порівняно точного, але змістовно неясного поняття автори наводять поняття "токсичну речовину". Вони нагадують, що п'ятдесят років тому в довідниках згадувалося близько сотні токсинів, тоді як зараз їх число наближається ж до ста тисяч. Це бурхливе зростання обумовлений не тільки появою нових речовин, несприятливо впливають на живі організми, але і дійсно неясність і постійною зміною уявлень про те, які саме речовини слід вважати токсинами.

Існують і багато понять звичайного мови, які одночасно є і неясними, і неточними, мають як би подвійну розпливчастість. Вона складається і в тому, що зміст цих понять позбавлене визначеності, і в тому, що вони відносяться до нечітко окресленого класу об'єктів. Таким прикладом автори розглядають поняття "гра". Вони вказують, зокрема, що зміст цього поняття настільки невизначено, що важко сказати, чи кожна гра має правила, у всякій чи грі є виграли і ті, хто програв і т.п. Крім того, поняття "гра" охоплює дуже широку і різнорідну область, межі якої також дуже невизначені. Торкаючись тільки ігор людини, до них можна віднести і футбол, і шахи, і дії актора на сцені, і дитячу біганину. Але ж відомо, що ігри характерні також ще і для поведінки тварин. У зв'язку з цим видаються вельми доречним думку знаменитої актриси Фаїни Раневської, що не визнавала слова "грати". Вона стверджувала, що "грати можна в карти, на скачках, в шашки. На сцені жити потрібно ".

Некоректність виступає характеристикою ситуації свідомо неправильного вживання певного поняття або правила дії. Оскільки некоректність вислову зазвичай служить проявом непрофесіоналізму, відповідні судження і пропозиції в процесі підготовки і прийняття рішень повинні бути виключені із сфери розгляду.

Нелогічність є свідоме чи несвідоме порушення законів правильного логічного мислення, в результаті чого, на думку Н.І. Кондакова, "навіть за умови істинних посилок виходить помилковий висновок". Проявами нелогічності можуть виступати непослідовність мислення людини і відповідних його висловлювань, необґрунтованість пропонованих рішень, двозначність, суперечливість міркувань, коли людина суперечить сам собі. Як і некоректність, прояви нелогічності вважаються неприпустимими і повинні бути виключені із сфери розгляду і аналізу.

Невизначеність характеризує типову ситуацію необхідності вибору з деякої множини альтернатив в умовах недостатньої інформації про ці альтернативи і можливих результатах варіантів вибору. За словами Н.І. Кондакова, "невизначеність виражає відношення всієї сукупності елементів або деякого підмножини даної множини до потужності відбираються елементів або підмножин".

2.3 Основні поняття теорії нечітких множин, операції над ними, геометрична інтерпретація

Для усвідомлення сутності поняття нечіткої множини візьмемо п'ятий спосіб представлення звичайних множин за допомогою так званої функції приналежності. Тобто коли який-небудь елемент x деякої універсальної множини X належить множині A, то у відповідність йому ставиться значення цієї функції, рівне одиниці, а коли він не належить цій безлічі, йому ставиться в відповідність її значення, рівне нулю. Виходячи з цього, Л. Заде запропонував так узагальнити розуміння функції приналежності, щоб вона могла приймати не тільки зазначені граничні значення 0 і 1, але і будь-які довільні значення з інтервалу [0, 1], відображаючи можливість приналежності якогось елементу x множини A з деяким ступенем, меншою одиниці. Таким чином і з'явилося поняття нечітких множин і почала розвиватися їх теорія. Розглянемо основні її поняття та положення.

З цією метою введемо в розгляд деяку універсальну безліч X_9, яку будемо позначати символом X = {x}, де x - її довільний елемент.

Визначення 1.*Нечіткою множиною* C на універсальній множині X називається сукупність пар виду C (x, $\mu_c(x)$), де x϶ x, а $\mu_c(x)$– функція приналежності елемента x нечіткій множині C, причому $\mu_c(x)$ ϵ [0, 1].

Чисельне значення функції $\mu_c(x)$ для кожного конкретного елемента x визначає ступінь приналежності цього елемента даній нечіткій множині C.

Як приклад можна привести безліч студентів певної групи третього курсу, серед яких є і такі, хто має академічну заборгованість за другий курс. Саме внаслідок цієї обставини їх фактична ступінь приналежності безлічі студентів третього курсу є меншою одиниці, причому, чим більше заборгованостей у студента, тим менше значення функції його приналежності цій безлічі. Видається очевидним, що одночасно цих студентів можна з деяким значенням функції приналежності $0 <\mu_c(x)<1$ вважати також і студентами другого курсу, принаймні до ліквідації ними наявної академічної заборгованості.

Ще одним показовим прикладом, який досить наочно пояснює сутність нечіткої множини і її природу, може служити безліч моментів часу доби, яка утворює день. При цьому під днем можна домовитися розуміти світлий час доби. Тут, по-перше, вже міститься суб'єктивність визначення, оскільки різні люди з різними мірками підходять до того, що слід вважати "світлим часом".

По-друге, початок і закінчення дня як світлого часу доби істотно залежать від погоди, оскільки в хмарний день темніє помітно раніше. По-третє, початок і закінчення дня виявляються в ще більш істотній залежності від пори року. Дійсно, в червні тривалість дня майже вдвічі більше, ніж в грудні.

Залишаючи трохи осторонь ці міркування, уявімо, що день починається о восьмій годині ранку і закінчується в вісімнадцять. Покажемо на рис. 2.2, як цьому часовому інтервалу відповідає постійне значення функції приналежності безлічі моментів часу, що відповідають дню, $\mu(t)$= 1. Будемо вважати також, що ніч починається в двадцять годин і закінчується о шостій годині ранку. Іншими словами, на тимчасових інтервалах від 0 до 6-ї години і від 20-ї до 24-ї години значення функції приналежності безлічі моментів часу, що відповідають дню, $\mu(t)= 0$. Від шостої ж до восьмої години ранку, як і від вісімнадцятої до двадцятої години значення функції приналежності відповідних моментів часу до безлічі "день" будуть лежати в інтервалі $0<\mu(t)<1$.

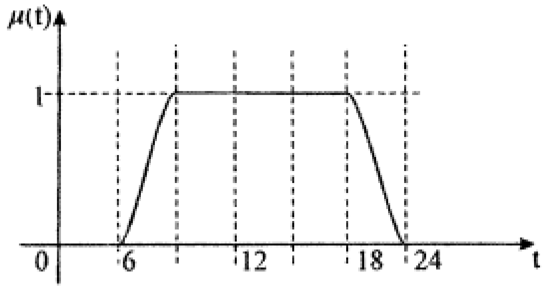

Рисунок 2.2 – Функція приналежності моментів часу доби безлічі "день"

Слідпідкреслити, що таке визначення має очевидне практичне призначення, наприклад, для регулювання систем автоматичного управління зовнішнім освітленням вулиць міста, дляорганізації роботи міського транспорту та для багатьох інших систем життєзабезпечення міста.

В якостічислового прикладу може служити нечітка множина А, що містить числа, близькі до п'яти. Графік функції приналежності цієї множини має вигляд, наведений на рис. 2.3

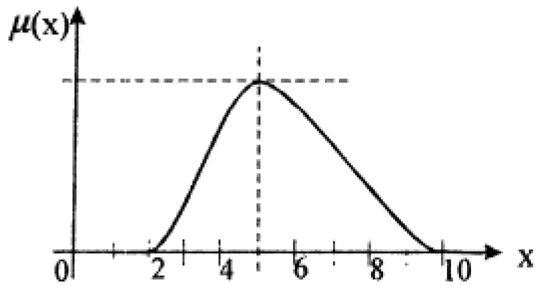

Рисунок 2.2 – Функція приналежності множини чисел, близьких до п'яти

Правда, і в цьому випадку слід розуміти, що визначення ступеня "близькості до п'яти" може бути різним у залежності як від конкретного змісту завдання, так і від суб'єктивного сприйняття цього ступеня.

Визначення 2. Нечітка безліч ∅ називається порожньою, якщо її функція приналежності дорівнює нулю на всій універсальній множині X. Іншими словами, нечітка множина буде порожною, якщо жоден з елементів множини X не належить нечіткій множині, яка розглядається, з позитивним значенням $\mu_\emptyset(x)$, тобто

$$\mu_\emptyset(x)= 0, \forall x\in X.$$

Скориставшись змістовним аспектом прикладу з попереднього визначення, зазначимо, що нечітка множина студентів даної групи третього курсу, які одночасно належать і до числа студентів другого курсу, перетворюється в порожню безліч, коли всі ці студенти ліквідують всі свої академічні борги за другий курс.

Визначення 3. Носієм *suppA* нечіткої множини А називається ***звичайна множина***, яка задовольняє такій умові:

$$suppA = \{x: \mu_A (x)> 0, x \in X\},$$

тобто носієм нечіткої безлічі А є така підмножина універсальної множини X, для елементів якої значення функції приналежності $\mu_A (x)> 0$.

Як приклад розглянемо універсальну безліч X можливих значень товщини листів металевого прокату в діапазоні від 9,8 до 11,2 мм. Тоді нечітка множина А, яка відповідає нечіткому поняттю "мала товщина листа", може бути представлено в наступному вигляді:

А = {(9,8; 1), (9,9; 0,9), (10,0; 0,8), ..., (10,7; 0,1), (10,8; 0) , (10,9; 0) ...}.

В цьому випадку його носієм виступає чітка безліч значень товщини листа прокату в діапазоні від 9,8 до 10,7 мм, тобто

$$suppA = \{9,8; 9,9; .. 10,7\}.$$

Як абстрактним прикладом розглянемо нечітку множину

$B = \{(x_1, 0,7), (x_2,0), (x_3, 0,4), (x_4,0,8), (X_5,0), (x_6,0,1), (x_7,0,9), (x_8, 0,2), (x_9,0), (X_{10}, 0)\}$.

Відповідно до визначення, його носієм буде звичайна безліч

$$supp\ B = \{x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8,\}$$

Визначення 4. Нечітка безліч А називається нормальною, якщо для її функції приналежності виконується така умова:

$$\sup_{x \in X} \mu A(x) = 1$$

В іншому випадку нечітку множину А прийнято вважати субнормальною. Для більш глибокого засвоєння цих понять приведемо геометричну ілюстрацію подібних множин. На рис. 2.3 максимальне значення функції приналежності $\mu_A(x)$ нечіткої множини A дорівнює одиниці, таким чином вона відповідає нормальній нечіткій множині A. У той же час значення функції приналежності $\mu_B(x)$ не досягає одиниці ні для яких елементів x, тобто вона відповідає субнормальній нечіткій множині B.

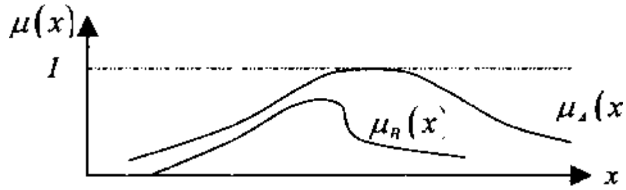

Рисунок 2.3 – Функції приналежності нормальної A і субнормальної B нечітких множин

Розглянемо тепер дві нечітких множини A і B на універсальній множині X. Нехай відповідні їх функції приналежності будуть $\mu_A(x)$і $\mu_B(x)$.

Визначення 5. Кажуть, що нечітка множина A *містить у собі* нечітку множину B, тобто $B \subseteq A$ чи $A \supseteq B$, якщо виконується нерівність $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$для будь-якого $x \in X$.

Поняття включення наочно можна проілюструвати за допомогою графіків функцій приналежності на рис. 2.4.

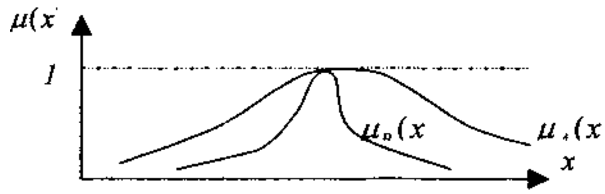

Рисунок 2.4 – Функції приналежності нечітких множин A і B за умови $B \subseteq A$

Відзначимо, що на відміну від чітких множин, де умовою включення безлічі B у безліч A виступала тільки приналежність всіх елементів B безлічі A, для нечітких множин цього недостатньо. Тут умова включення є більш суворим.

Операції над нечіткими множинами

Оскільки нечіткі множини за визначенням являють собою певне узагальнення поняття звичайних (чітких) множин, операції над ними також можуть розглядатися як відповідне узагальнення понять операцій над звичайними множинами. При цьому, природно, найбільш характерною відмінністю тут виступає необхідність визначення правил обчислення функції приналежності для результату кожної конкретної операції над нечіткими множинами по заданих функцій приналежності вихідних множин.

Для того, щоб ввести поняття операцій, в подальшому будемо розглядати дві нечітких множини A і B на універсальній множині X із заданими відповідно їх функціями приналежності, рівними відповідно $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$.

Об'єднанням нечітких множин A до B на універсальній множині X називається така нечітка множина $C = A \cup B$, функція приналежності якої має вигляд

$$\mu_C(x) = \mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Наочне уявлення про операції об'єднання нечітких множин і про спосіб обчислення функції приналежності дає її геометрична інтерпретація, представлена на рис.2.5

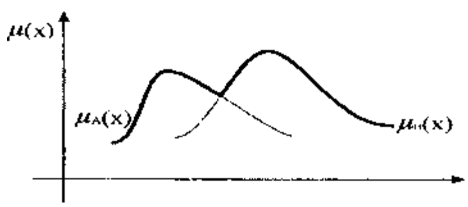

Рисунок 2.5 – Функція приналежності об'єднання нечітких множин

Вона свідчить про те, що графік функції приналежності нечіткої множини, що представляє собою результат об'єднання двох нечітких множин, можна отримати як верхню огинаючу графіків функцій приналежності вихідних множин.

Зауваження1. Операцію об'єднання нечітких множин неважко узагальнити на випадок довільного числа n цих множин A_i з функціями належності μ^i_A. Дійсно, для $C = A_1 \cup A_2 \cup A_n$ функція приналежності може бути отримана як

$\mu_C(x) = \max\{ \mu^1_A(x), \mu^2_A(x), \ldots M^n_A(x), \}$

Цілком очевидно, що графік цієї функції також буде представляти собою верхню огинаючу графіків функцій приналежності всіх n вихідних множин.

Зауваження 2. Поряд з наведеним вище визначенням операції об'єднання нечітких множин, в літературі зустрічається і іноді використовується і інший його варіант, відповідно до якого об'єднанням нечітких множин A і B на універсальній множині X називають нечітку множину $C = A \cup B$ з функцією приналежності, правило обчислення якої має наступній вигляд:

$$\mu_C(x) = \mu_{A\cup B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) + \mu_B(x), если \mu_A(x) + \mu_B(x) \le 1 \\ 1, если \mu_A(x) + \mu_B(x) \ge 1 \end{cases}$$

Відповідно до такого визначення, графік функції приналежності об'єднання нечітких множин має вигляд, представлений на рис. 2.6

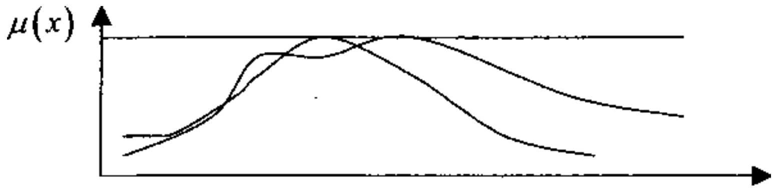

Рисунок 2.6 – Графік функції приналежності результату операції об'єднання нечітких множин згідно альтернативному її визначенню

Перетином нечітких множин A і B на універсальній множині X називається нечітка множина C=A⋂B з функцією приналежності, яка обчислюється у відповідності з наступним правилом:

$$\mu_C(x) = \mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Наочне уявлення про операції перетину нечітких множин A і B і про спосіб обчислення функції приналежності її результату C = A ⋂ B можна отримати за допомогою геометричної інтерпретації, представленої на рис. 2.7.

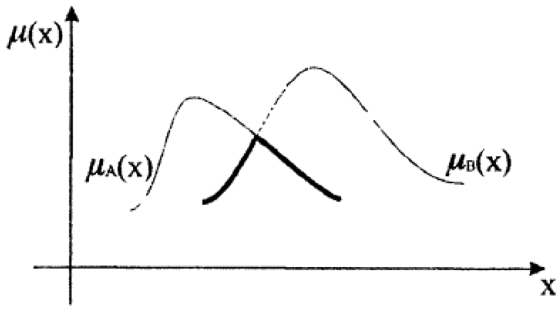

Рисунок 2.7 – Функція приналежності перетину нечітких множин

Цей малюнок переконливо свідчить про те, що графік функції приналежності нечіткої множини, що представляє собою результат перетину двох нечітких множин, може бути отриманий як нижня огинаюча графіків функцій приналежності вихідних множин.

Зауваження 1. Операцію перетину нечітких множин неважко узагальнити на випадок довільного числа n цих множин A_i з функціями належності μ^i_A. Дійсно, для C = $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ функція власності може бути отримана як

$$\mu_C(x) = \min(\mu^1_A(x), \mu^2_A(x), \ldots, \mu^n_A(x))$$

Цілком очевидно також, що графік цієї функції і в цьому випадку буде являти собою верхню огинаючу графіків всіх n функцій приналежності вихідних множин.

Зауваження 2. Як і для випадку операції об'єднання двох нечітких множин, поряд з наведеними вище визначенням перетину нечітких множин, в літературі іноді зустрічається і знаходить своє практичне застосування і інший його варіант, згідно з яким перетином нечітких множин A і B на універсальній множині X називають таку нечітку множину C = A ⋂ B, правило обчислення функції приналежності для якого має наступний вигляд:

$$\mu_C(x) = \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x)$$

Відповідно до такого альтернативного визначення операції перетину нечітких множин графік функції приналежності її результату має вигляд, наведений на рис. 2.8

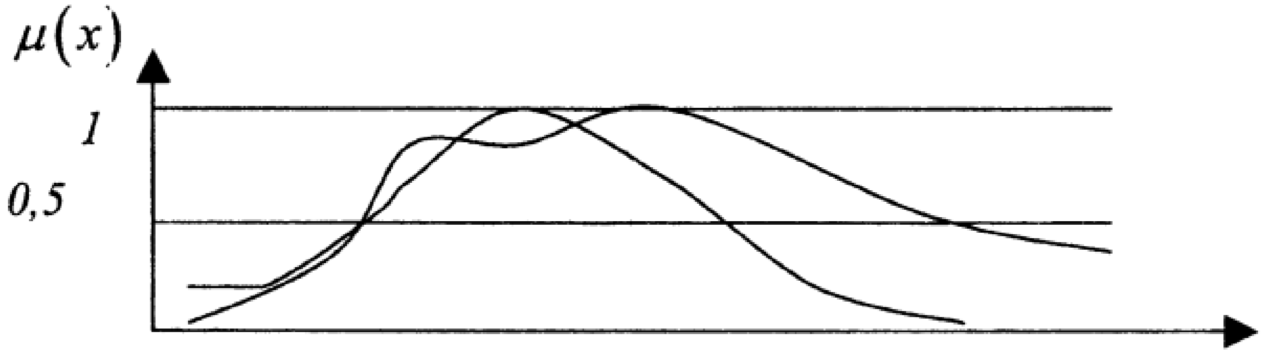

Рисунок 2.8 –Графік функції приналежності результату перетину нечітких множин згідно альтернативному її визначенню

Доповненням нечіткої множини A на універсальній множині X називається нечітка множина $\bar{A}$ з функцією приналежності, яка обчислюється у відповідності з наступним правилом:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in X$$

Якщо скористатися графіками функцій приналежності нечітких множин A і $\bar{A}$ як геометричною інтерпретацією операції доповнення, як це наведено на рис. 2.9, можна прийти до наступних двох цікавих висновків.

По-перше, графік функції приналежності $\mu_{\bar{A}}(x)$ доповнення $\bar{A}$ нечіткої множини A до універсальної множини X виявляється симетричним графіком вихідної функції приналежності $\mu_A(x)$ відносно горизонтальної прямої з ординатою y = 0,5.

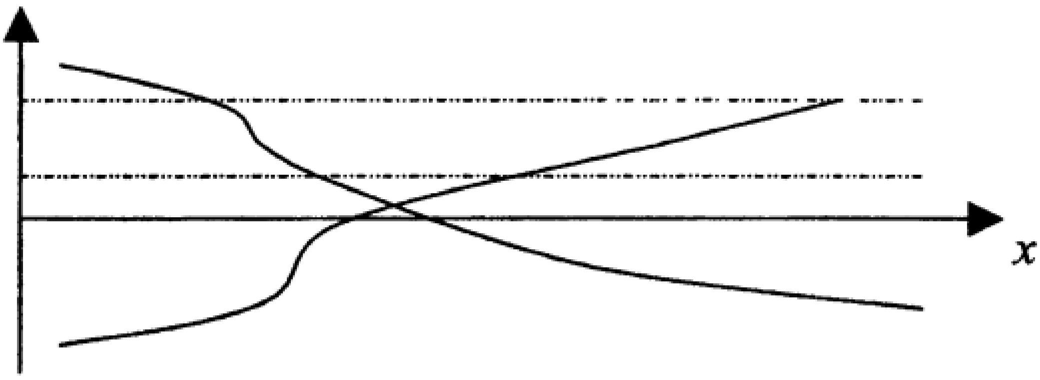

Рисунок 2.9 –Функція приналежності доповнення A нечіткого безлічі A.

По-друге, на відміну від звичайних множин, виявляється, що $A \cap \overline{A} \neq 0$, тобто **в універсальній множині X існують елементи, які одночасно належать і множині A, і його доповненню $\overline{A}$ до X**, і навіть значення функцій приналежності для деяких з них можуть бути однаковими, якщо вони рівні 0,5.

Різницею нечітких множин A і B на деякій універсальній безлічі X називається така нечітка безліч C = A\B, функція приналежності якої обчислюється відповідно до правила, яке має такий вигляд:

$$\mu_C(x) = \mu_{A\setminus B}(x) = \begin{Bmatrix} \mu_A(x) - \mu_B(x), если \mu_A(x) > \mu_B(x) \\ 0, если \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \end{Bmatrix}$$

Декартовим добуткомA_1* A_2*…* A_nнечітких множин A_1, A_2, ... A_n на множинах X_1, X_2, .. X_n називається нечітка множина A на декартовому добутку X = X_1*X_2* .. *X_n, елементами якого є набори (x_1, x_2, ...x_n), а функція їх приналежності має вигляд

$$\mu_A(x) = \min_{x \in X} \{\mu_{A1}(x), \mu_{A2}(x), \ldots, \mu_{An}(x)\}$$

Для двовимірного випадку графічна інтерпретація декартового добутку нечітких множин A_1 і A_2 на відповідних множинах X_1 і X_2 може бути представлена за допомогою рис. 2.10.

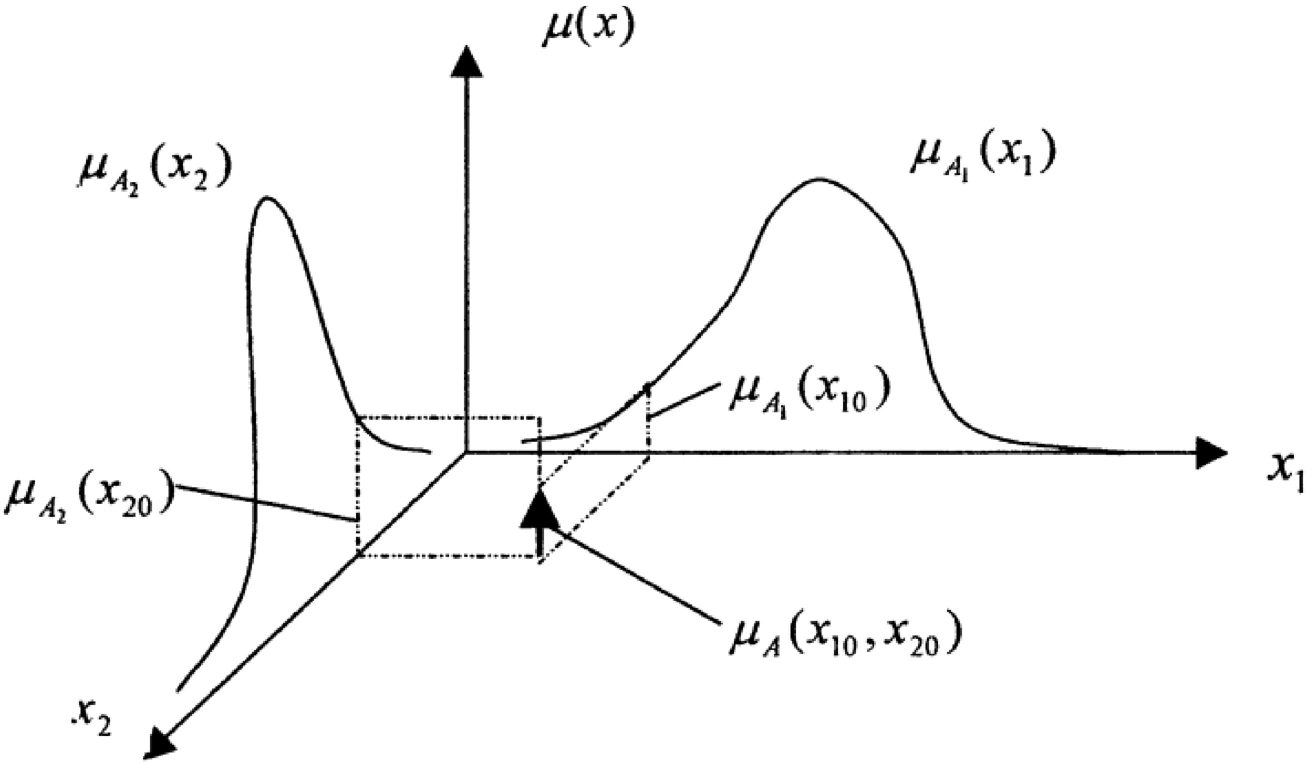

Рисунок 2.10 – Визначення функції належності декартового добутку нечітких множин

Сенс такого визначення функції належності декартового добуткунечітких множин полягає в тому, що фактична можливість прийняття рішення визначається найменшою з можливостей елементів даного набору.

Наприклад, якщо студент-трієчник одружується з дівчиною-відмінницею, то в ситуації, до якої категорії в сенсі успішності віднести їх сім'ю, оцінка буде здійснюватися за нижчим значенням одержуваних ними балів. І нікому не прийде в голову думка вважати їх відмінниками, як би це не було прикро для молодої дружини цього разгільдяя.

Інший приклад можна отримати в ситуації вибору оптимального варіанта необхідного людині товару, коли він в просторі параметрів "ціна-якість" зазвичай виходить з наявних фінансових ресурсів.

Опуклою комбінацією нечітких множин A_1, A_2, … A_n на безлічі X називается нечітка множина A, функція приналежності якого має вигляд

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_{Ai}(x), \text{ причому } \lambda_i > 0, \text{та} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Поняття опуклої комбінації нечітких множин використовується в задачах прийняття рішень в умовах декількох нечітких обмежень. Слід зазначити, що для звичайних множин поняття опуклою комбінації не має сенсу.

Операції **концентрування** CON і **розтягування** DIL нечіткої множини A визначаються наступним чином:

$$CON\ A = A^{\alpha};$$
$$DIL\ A = A^{1/\alpha}$$

деα> 1 - коефіцієнт концентрації (або, відповідно, розтягування), а функції приналежності відповідних нечітких множин мають вигляд

$$\mu_{A^{\alpha}}(x) = \mu_A^{\alpha}(x) = (\mu_{A^{\alpha}}(x))^{\alpha};$$
$$\mu_{A^{1/\alpha}}(x) = \mu_A^{1/\alpha}(x) = (\mu_{A^{\alpha}}(x))^{1/\alpha}.$$

Графічний зміст цих операцій можна продемонструвати за допомогою рис 2.11.

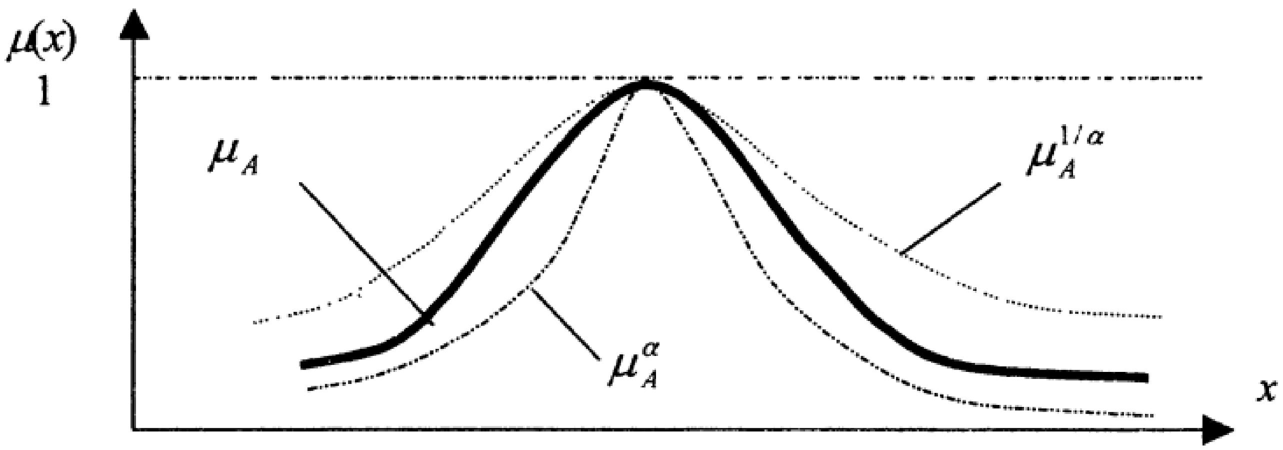

Рисунок 2.11 –Геометричний сенс операцій концентрування і стиснення нечітких множин

Цей зміст полягає в тому, що операція концентрування CON A знижує ступінь нечіткості опису безлічі A, а операція розтягування DIL A підвищує ступінь його нечіткості. В реальних задачах прийняття рішень застосування операції концентрування може означати, що в розпорядження експерта або особи, що приймає рішення, надійшла деяка додаткова інформація про ситуацію, і ця інформація дозволяє частково зняти наявну невизначеність і дає можливість більш чітко описати дане нечітку множину можливих альтернатив.

Операція стиснення, навпаки, використовується для моделювання ситуацій пов'язаних з втратою інформації або відсутністю своєчасного її поновлення, що збільшує ступінь нечіткості ситуації, а отже, і невизначеності прийняття рішення.

2.4 Нечіткі відносини, операції над нечіткими відносинами. Нечіткі відображення

Нечіткі відносини являють собою природне узагальнення важливого математичного і логічного поняття звичайних відносин на випадок, коли ступінь виконання цих відносин не є обов'язково повної або абсолютної. Іншими словами, нечіткість виникає, коли вказане відношення між певними об'єктами має місце лише частково, причому міра цієї частковості може носити як об'єктивний характер, обумовлений зовнішніми обставинами, так і визначається переважно суб'єктивно.

У зв'язку з цим можна стверджувати, що нечіткі відносини виступають специфічним математичним і логічним поняттям. Нечіткі відносини, з одного боку, істотно розширюють можливості людини по дослідженню цілого класу задач, які раніше вважалися важко формалізуються або взагалі не піддавалися формалізації. Вони полегшують можливість формалізації, а отже і успішного вирішення подібних завдань автоматизованого управління і прийняття рішень, які часто можуть виникати в умовах інформаційної невизначеності або внаслідок суб'єктивного характеру людиною оцінки відносин між розглянутими об'єктами.

Прикладами останніх можуть служити надзвичайно поширені в науково-технічній практиці і в повсякденному житті нечіткі відносини переваги на множині альтернатив. Кожній людині добре відомо, що стосовно порівняльної оцінки яких би то ні було явищ або об'єктів практично завжди має місце розбіжність у думках. Дійсно, спробуйте, наприклад, визначити найкрасивішу пісню, найталановитішого або просто улюбленого артиста, найсмачнішу страву або напій. Швидше за все навіть в межах однієї групи студентів ви не отримаєте в цих питаннях одностайних оцінок. І такий стан слід вважати цілком природним.

З іншого ж боку, поняття нечітких відносин дозволяє успішно формулювати, будувати і аналізувати математичні моделі багатьох реальних задач теорії і практики автоматизованого управління і прийняття рішень, а також плідно застосовувати математичні методи в найрізноманітніших прикладних областях, які без цього в принципі не піддавалися математичному моделюванню . Використання апарату нечітких відносин дозволило ставити завдання і отримувати на кількісному рівні їх вирішення або цілком прийнятні оцінки для багатьох складних і важливих прикладних проблем не тільки з області техніки, а й політики, соціології, психології та інших соціально-гуманітарних наук.

Характер відносини між елементами певної множини альтернатив або будь-яких інших об'єктів (які узагальнено також можна вважати альтернативами) в подібних завданнях зазвичай виявляється шляхом консультацій з особою, яка приймає рішення, або з експертами, у яких може не існувати чіткого судження про цьому відношенні. У таких ситуаціях саме нечітке відношення виявляється більш зручною і більш адекватної реальної дійсності формою подання необхідної інформації, ніж звичні чіткі відносини. Тим більше, що фактично в поданні людей відносини між багатьма об'єктами найчастіше дійсно мають нечіткий характер.

Загальні поняття відносин

Відповідно до визначення, наведеного в математичної енциклопедії, **відношення** являє собою математичне поняття, яке визначає деяку підмножину кінцевого декартового ступеня A^n = A* A* A* ... * A даної безлічі A, тобто підмножина систем або наборів (a_1, a_2,. .., a_n) з n елементів кожної конкретної безлічі A.

Поняття відносини є досить широким, оскільки може відображати найрізноманітніші залежності математичного, логічного і іншого характеру між елементами безлічі A. Їх прикладами можуть відносини рівності, кількісних і якісних залежностей, порядку проходження і т.п. Ставлення є, як справедливо зазначає Н.І. Кондаков в "Логічному словнику-довіднику", "одну з форм, один з необхідних моментів загального взаємозв'язку всіх предметів, явищ, процесів в природі, суспільстві і мисленні".

Відносини предметів один до одного, за його словами, "виключно різноманітні: підстави і наслідок, причина і наслідок, частина і ціле, відносини між частинами всередині цілого, підпорядкування і супідрядність, аргумент і функція, проходження в часі і т.д.". До цього можна було б додати і взаємне розташування предметів в просторі.

За Кондаковим, в математиці і логіці досліджують переважно такі види відносин, як "... більше, ніж ...", "... укладено в ...", "... брат ...", ".. .тягне ... "і т.д. За його словами, "в центрі уваги математичної логіки знаходиться вивчення таких відносин, як симетричність і антісиметричність, рефлексивність і антирефлексивність, транзитивність і еквівалентність, функціональне відношення, відношення порядку, одно-однозначне і багато-однозначна відповідність і ін.". Особливо підкреслюючи істотне світоглядне і методологічне значення поняття відносин, автор зазначає, що "відносини речей зафіксувалися в логічних формах. Поза обліком відносини речей неможливо вирішити проблему істинності.

Підмножину $R \subseteq A^n$ зазвичай прийнято називати n-місцевим, або n–арним відношенням на безлічі A. Число n при цьому називають рангом, або типом відношення R. Підмножина $R \subseteq A^n$ називається також n-місцевим, або n-арним, предикатом на безлічі A. Запис R $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ означає, що $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in R$.

При цьому одномісні, або унарні відносини прийнято називати ще властивостями. Двомісні відносини носять назви *бінарних*, тримісні – *трінарних* і т.п. Безлічі A^nі $\emptyset$ називають відповідно універсальним відношенням і нуль-ставленням рангу n на безлічі A.

Діагональ безлічі A^n, тобто безліч $\Delta = \{(a, a, ..., a)| \in A\}$ називається відношенням рівності на множині A.

Якщо дві відносини R і S являють собою n-місцеві відносини на безлічі A, то n-місцевими ж відносинами виступатимуть також і результати операцій над ними, тобто такі підмножини в A^n:

- Об'єднання відносин R і S, тобто відношення R U S;
- Перетин відносин R і S, тобто відношення $R \cap S$;
- Доповнення R’ до S на безлічі A^n, тобто відношення $R' = A^n \setminus S$;
- Різниця відносин R і S, тобто відношення $R \setminus S$.

Особливий клас відносин утворюють надзвичайно важливі для практики, в тому числі для інженерних додатків, бінарні відносини, під якими іноді мають на увазі підмножина R безлічі A*A упорядкованих пар (a, b) елементів заданої множини A.

Нехай бінарна множина $R \subseteq A*A$. Якщо пара $(a, b) \in R$, то кажуть, що елемент a знаходиться в бінарному відношенні R з елементомb. При цьому часто замість запису $(a, b) \in R$ використовується позначення aRb.

Діагональ безлічі A x A, тобто безліч $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$ є відношенням рівності, або одиничне бінарне відношення в безлічі A.

Розглянемо в деякій множині A бінарні відносини R_1і R_2. Крім звичайних теоретико-множинних операцій об'єднання R_1 U R_2, перетину $R_1 \cap R_2$ та доповнення $R' = (A*A) \setminus R$, для бінарних відносин розглядається також *операція звернення*

$$aR^{-1}b \Leftrightarrow bRa,$$

де бінарне відношення R^{-1} називається *зворотним* щодо даного відношенняR, а також операція множення або композиції

$$R_1 \circ R_2 = \{(a,b) \mid (\exists c \in A)(aR_1 c та cR_2 b)\}$$

Розглянемо, наприклад, відношення R(a, b) = (a>=b). Тоді цілком природно стверджувати, що зворотним щодо R відношенням буде відношення R^{-1} (a<=b), оскільки в такому випадку дійсно $(b, a) \in R$.

Операція множення бінарних відносин є асоціативною, однак, взагалі кажучи, не є комутативною.

Введемо визначення деяких властивостей бінарних відносин.

Бінарне відношення R в A називається:

а) *рефлексивним*, якщо $\Delta \subseteq R$;

б) *транзитивним*, якщо $R°R \subseteq R$;

в) *симетричним*, якщо $R^{-1} \subseteq R$

г) *антисиметричним*, якщо $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$.

Важливо відзначити, що в тому випадку, коли певному бінарному відношенню R притаманне будь-яка з наведених тут властивостей а), б), в), г), то відповідним властивістю одночасно володіє також і зворотне до нього відношення R-l.

Бінарне відношення $R \subseteq A*A$ називається функціональним, якщо R-l $°R \subseteq \Delta$.

Найбільш важливими для практики і поширеними типами бінарних відносин виступають відносини *еквівалентності*, *порядку* (лінійні і часткові) і функціональні відносини.

Введемо два дуже важливих поняття *проекції і перетину* відношення. Нехай c = (a, b) - елемент безлічі $R \subseteq A*B$. При цьому елемент a є **проекцією** елемента c відносини R на безліч A. Якщо $R \subset A * B$, то проекцією E відносини R на безліч A прийнято називати сукупність тих елементів з безлічі A, які є проекціями елементів з R на A.

Перетином x = a безлічі R прийнято називати безліч тих елементів $y \in B$, для яких $(a, y) \in R$.

Для ілюстрації змісту і сенсу цих понять наведемо такий приклад. Розглянемо безлічі $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ і$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Уявімо, як це показано на рис. 2.11, графічне зображення їх добутку, тобто безлічі C = A* B, елементи якого позначимо через $c_{11}, c_{21}, c_{31}, ..., c_{34}$.

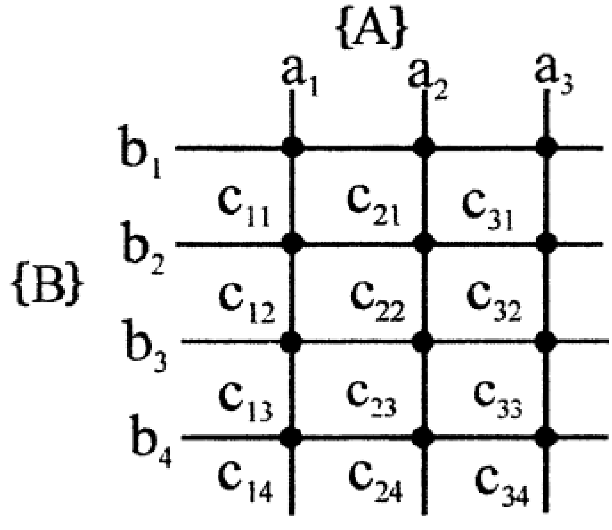

Рисунок 2.12– Графічна ілюстрація добутку множин і проекції елемента цього добутку на безліч

Аналізуючи малюнок, можна прийти до висновку, що проекцією елемента $c_{23} = (a_2,b_3)$ добутку C = A*B на безліч A буде елемент a_2 цієї безлічі.

Нехай тепер на безлічі C = A*B задано відношення R⊂ A * B, графічне представлення якого наведено на рис. 2.13. Елементи цього відношення зображуються точками c_{ij} на перетині відповідних елементів a_i безлічі A і елементів b_j, безлічі B:

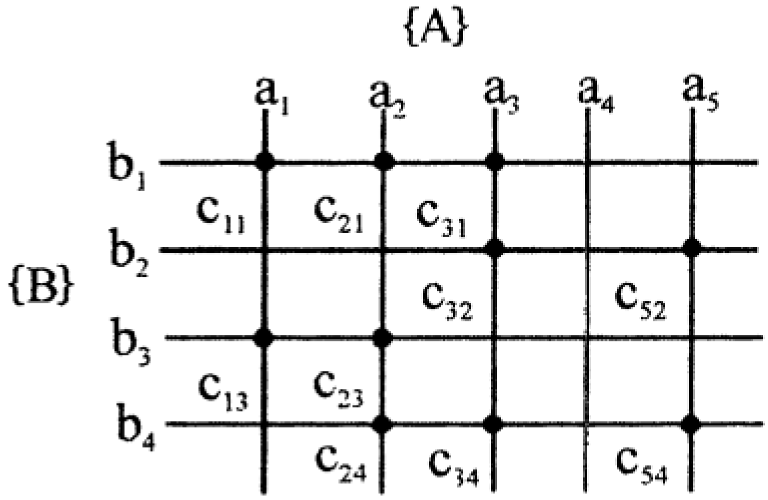

Рисунок 2.13 – Графічна ілюстрація відношенняR⊂ A * B, його проекції на безліч A і його перетину x = a_1

Підкреслимо, що на відміну від елементів добутку C=A*B множин, елементи цього відношення об'єднують не всі точки перетину, а тільки ті, для яких справедливо розглядається відношення

$$R=\{c_{11}, c_{21}, c_{31}, c_{32}, c_{52}, c_{13}, c_{23}, c_{24}, c_{34}, c_{54}\}$$

Проекцією відношення R на A є множина$R_A=\{a_1, a_2, a_3, a_5,\}$, а його перетином x=$a_1$ є множина Ra1={b1,b3}

Відношення R⊂ A *A французькі математики Р. Фор, А. Кофман і М. Дені-Папен називають функціональним, якщо для кожного x ∊ A перетин відносини R по x містить не більше одного елемента. При цьому вони підкреслюють, що в строгому сенсі все більшу підтримку отримує ідея про те, що замість «не більше одного елемента "слід говорити" один і тільки один елемент ".

Поняття про нечіткі відношення

Визначення 1. Нечітким ставленням R на безлічі елементів (об'єктів, альтернатив і т.п.) X називається нечітка підмножина декартового добутку X * X, яке характеризується функцією приналежності

$$\mu_R: X*X \to [0;1]$$

Іншими словами, нечіткість тут визначає характер відношення R між будь-якими об'єктами або альтернативами $x, y \in X$ в тих випадках, коли щодо них не існує чіткого судження про цьому відношенні або ступеня його справедливості його виконання. Наприклад, для різних людей, в тому числі і для експертів, визначення переваги одного з двох або більшого числа близьких за своїми якостями альтернативних варіантів рішення зазвичай являє собою досить непросту проблему раціонального вибору.

Тому конкретне числове значення функції приналежності $\mu_R(x, y)$ відношення R по своїй суті і виступає певним показником суб'єктивної оцінки справедливості відносини xRy для даної пари (x, y) або оцінки ступеня його виконання з особистої точки зору кожного окремого експерта з урахуванням його загальної культури, ерудиції, рівня професійної компетентності, освіти, досвіду і навіть смаку.

Як наочний приклад наведемо порівняння звичайного відносини $R_1 = (\geqslant)$, яке відображає той факт, що одні елементи будь-якого безлічі не є меншими, ніж деякі інші його елементи, і *нечіткої відносини* $R_2 = (\gg)$, яке свідчить про те, що деякі елементи розглянутої множини є набагато більшими інших його елементів. Нечіткість його полягає вже в тому, що слово "набагато", по-перше, для різних людей може мати різний зміст і зміст, а по-друге, навіть для одного і того ж людини воно по-різному буде сприйматися в різних обставинах.

Так, якщо порівнювати дітей трирічного віку з шестирічними, три роки вікової різниці, справді, дозволяють вважати, що діти другої групи є набагато старшими, ніж діти першої групи. Коли ж мова йде про семідесятирічних і семідесятитрьохлітніх людей, така ж різниця в три роки взагалі буде виглядати досить малою.

Для наочного порівняння характеру згаданих звичайного $R_1 = (\geqslant)$ і нечіткого $R_2 = (\gg)$ відносин виявляється дуже зручним скористатися можливістю геометричного їх подання на безлічі пар (x, y) в області, обмеженою для конкретності одиничним квадратом. Так, на рис. 2.14 приведена геометрична ілюстрація звичайної відносини $x R_1 y$, яке відповідно може бути записано у вигляді нерівності $x \geqslant y$.

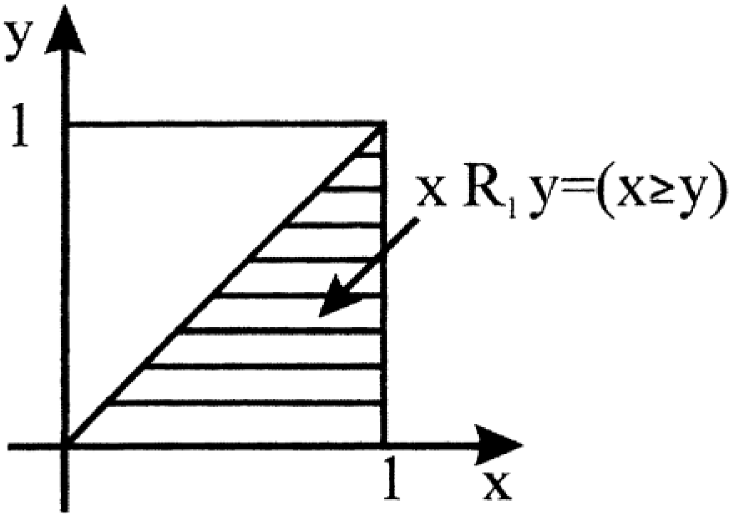

Рисунок 2.14 –Геометрична інтерпретація відношення $xR_1y=(x\geqslant y)$

Геометрична область, в якій цей показник виконується, розташована праворуч від діагоналі квадрата (з такою ж справедливістю можна стверджувати, що вона розташована нижче цієї діагоналі). Вона містить всі точки, включаючи і саму діагональ, і показана на малюнку за допомогою рівномірної горизонтальної штрихування.

На відміну ж від звичайної відносини xR_1y, на рис. 2.14 наведена геометрична інтерпретація нечіткої відносини $xR_2y = (x>>y)$, тобто відношення "х набагато більше у".

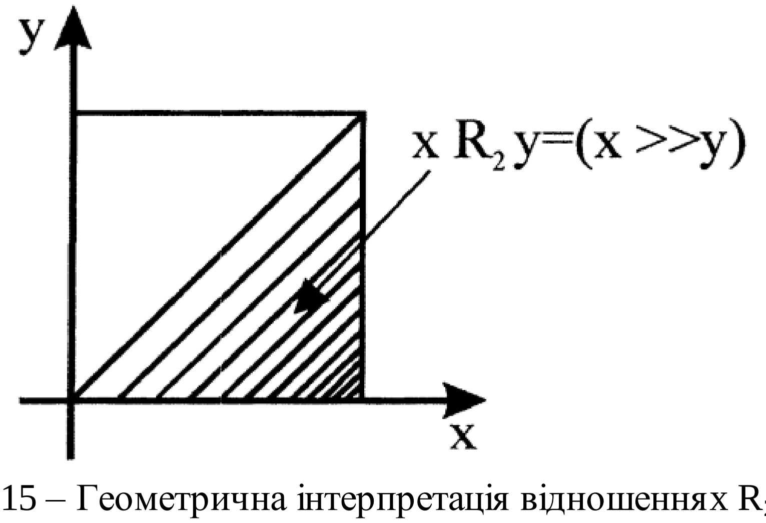

Рисунок 2.15 – Геометрична інтерпретація відношенняx $R_2y = (x>>y)$

Є цілком зрозумілим, що відповідна область площині х0у, для точок якої виконується це відношення, також розташована праворуч від діагоналі одиничного квадрата, однак її характер виявляється набагато складнішим. Дійсно, по-перше, точки на самій діагоналі квадрата вже ніяк не можуть входити до складу цієї області, оскільки вони відповідають відношенню рівності х = у, яке суперечить відношенню “х набагато більше у“. По-друге, чим ближче до діагоналі розташована точка (х , у), то менше повинна вважатися міра виконання відносини R2"х набагато більше у", а чим далі від діагоналі розташована ця точка, тим з більшим ступенем воно виконується.

Тому рідкісні штрихування поблизу діагоналі квадрата і відповідає тим парам (х, у), для яких це відношення виконується з малим значенням функції приналежності μ_{R2} (х, у), а поступове збільшення інтенсивності штрихування в міру віддалення від діагоналі виступає свідченням зростання числового значення функції приналежності до μ_{R2} (х, у) –>1 включно в правому нижньому кутку квадрата.

У тих випадках, коли безліч X, на якому задано нечітке відношення R, є кінцевим, функція приналежності μ_R цієї відносини є квадратною матрицю, елементами якої служать числа з інтервалу [0,1]. Так, якщо якийсь з елементів матриці r_{ij} = a, це означає, що ставлення $x_i R y_1$ виконується зі ступенем, що дорівнює α.

Введемо тепер деякі поняття, зміст та суть яких видається цілком ясним, оскільки вони вже розглядалися для нечітких множин, а нечітке відношення являє собою особливий вид такої безлічі, заданої на декартовомудобутку Х*Х.

Визначення 2. Носієм supp R нечіткого відношення R на множині X називається підмножина декартового добутку Х*Х, що має такий вигляд:

$$supp\ R = \{(x,y):(x,y) \in X \times X; \mu_R(x,y) > 0\}.$$

Підкреслимо, що *supp R*, як і у випадку з поняттям носія нечіткої множини, являє собою вже звичайне, тобто чітке ставлення. Фактично носій нечіткого відносини може розглядатися як звичайне відношення на множині X, яке пов'язує ті пари {х, у), для яких значення функції приналежності відносини R більше нульових, тобто μ_k (х, у)> 0.

Визначення 3. Множиною рівня α нечіткого відношення R на множині X називається підмножина декартового добутку Х*Х, яке має наступний вигляд

$$R_\alpha = \{(x,y):(x,y) \in X \times X, \mu_R \geq \alpha\ \}.$$

Іншими словами, безліч рівня α нечіткого відношення R на множині X являє собою **звичайне** відношення на X, яке пов'язує всі пари (х, у), для яких відношення R виконується зі ступенем, не меншою, ніж величина α.

Якщо безліч X є кінцевою, то матрицю носія нечіткого відношення R, і матрицю його безлічі рівня а можна легко отримати, замінивши в матриці функції приналежності μ_Rнечіткого відношення R одиницею відповідно всі елементи, більші від нуля, при визначенні носія цієї відносини, і всі елементи, не менші, ніж α - при визначенні його множини рівня α.

Нехай, наприклад, на кінцевій множині X = {x_1, x_2, x_3} задано нечітке відношення R з функцією приналежності

$$\mu_R(x, y) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді, в відповідно до наведеного визначення, його носієм буде чітке ставлення, матриця функції приналежності якого набуває вигляду:

$$supp\ R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

а безліччю рівня α = 0,5 цієї відносини буде ставлення, матриця функції приналежності якої набуває вигляд:

$$R_{0,5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поняття носія нечіткого відносини і його безлічі рівня використовуються в цілому ряді задач автоматизованого управління і прийняття рішень.

Операції над нечіткими відносинами

Нехай на деякій універсальній множині X задано два нечітких відношення A і B, кожне з яких представляє собою нечітку множину на декартовому добутку X * X, і нехай їх елементами є пари (x, y), а функціями належності відповідно виступають μ_A (x, y) і μ_B(x, y).

Розглянемо основні операції, які визначаються над цими відносинами. Оскільки, як уже зазначалося вище, нечіткі відносини являють собою особливий вид нечітких множин, видається цілком природним, що операції над ними визначаються за аналогією з відповідними операціями над нечіткими множинами, розглянутими в попередньому розділі.

Визначення 1. Об'єднанням нечітких відносин A і B на множині X називається нечітке відношення C = A U B, функція приналежності якого має вигляд

$$\mu_C(x, y) = \max\{\mu_A(x, y), \mu_B(x, y)\}$$

для будь-якої пари (x, y) $\in$ X.

Визначення 2. Перетином нечітких відносин А і В на множині X називається нечітке відношення D=A $\cap$ B, функція приналежності якого має вигляд

$$\mu_D(x,y) = \min\{\mu_A(x,y), \mu_B(x,y)\}$$

для будь-якої пари (x, y) $\in$ X

***Визначення* 3.** Кажуть, що нечітке відношення В **включає** в себе нечітке відношення А (або, що те ж, що нечітке відношення А міститься в нечіткому відношенні В), якщо для відповідних нечітких множин А і В виконується умова A$\subseteq$B і при цьому для функцій приналежності цих множин нерівність

$$\mu_A(x, y) <= \mu_B(x, y)$$

є справедливим для будь-яких x, y € X.

Наочну геометричну ілюстрацію цього умови дає рис. 2.16, на якому наведені графіки функцій приналежності обох нечітких відносин. З цих графіків дійсно можна зробити висновок про те, що μ_A (x, y) <=μ_B(x, y)для всієї множини пар (x, y).

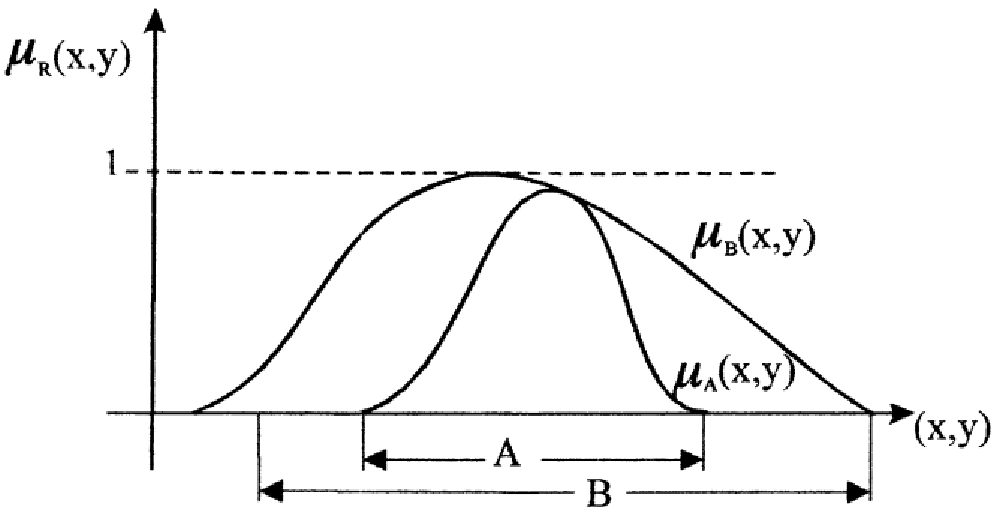

Рисунок 2.16 – Геометрична ілюстрація операції включення нечіткого відносини А в нечітке відношення В

Вважаємо за необхідне особливо підкреслити, що на відміну від звичайних відносин, навіть за умови умова A$\subseteq$B У нечітке відношення В може не включати (не містити в собі) нечіткої відносини А, якщо порушується умова μ_A (x, y) <=μ_B(x, y), як це, наприклад, приведено на рис. 2.17.В цьому факті чітко проявляється одна з принципових відмінностей між звичайними і нечіткими відносинами, як, втім, і між звичайними і нечіткими множинами взагалі.

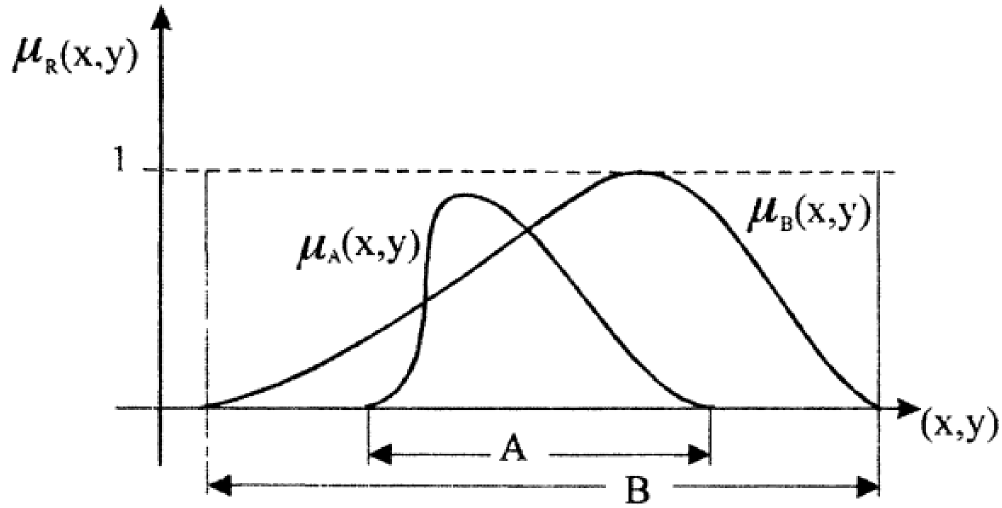

Рисунок 2.17 – Невиконання факту включення нечіткого відносини A в нечітке відношення B внаслідок порушення умови μ_A (x, y) <=μ_B(x, y).

Для ілюстрації розглянемо наступний приклад. Нехай є нечітке відношення R_1 = (>>)"набагато більше"і звичайне відношення R_2 = (≥)"не менш". У цьому випадку дійсно можна стверджувати, що $R_1 \subseteq R2$, оскільки

μ_{R1} (x, y) $\leq \mu_{R2}$ (x, y)

Визначення 4. Доповненням нечіткого відношення R на множині X називається нечітке відношення R', функція приналежності якого визначається з виразу

$\mu_{R'}$ (x, y) =1-μ_R (x, y)

для будь-яких пар (x, y) ∈ X.

Визначення 5. Зворотним щодо нечіткого відношення R називається нечітке відношення R^{-1} на безлічі X, яке визначається наступним чином:

$$xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx : (x, y) \in X \ ;$$

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R(y, x) : (x, y) \in X \ .$$

Сутність зворотного щодо R нечіткого відношення R^{-1} полягає в тому, що воно виражає такий взаємозв'язок між елементом x безлічі X і його елементом y, яка визначається відношенням R між елементом y і елементом x. Якщо, наприклад, розглядати нечітке відношення yRx= ("y не гірше x"), то зворотним буде відношення R^{-1}= ("x не гірше y"). Для нечіткого відношення yRx= (y>>x), тобто "y набагато більше, ніж x", зворотним буде нечітке відношення R^{-1}="y набагато менше, ніж x".

Одночасно з метою продемонструвати принципову відмінність між доповненням R' до нечіткого відношення R і зворотним до нього ставленням R^{-1} наведемо приклад доповнення R' до даного нечіткого відношення R = (y >> x), яке в нашому випадку буде мати вигляд R'= "y не є набагато більшим, ніж x".

Для нечітких відносин вводяться також **операції добутку** або **композиції**. Розглянемо три поширені варіанти подібних композицій. При цьому виходимо з того, що на безлічі X задані нечіткі відносини A і B з їх функціями належності відповідно μ_A (x, y) та μ_B (x, y)

Визначення 6. Максимінним добутком (максимінною композицією) нечітких відносин A і B на множині X є нечітке відношення A ° B з функцією приналежності, яка має такий вигляд

$$\mu_{A\circ B}(x,y)=\sup_{z\in X}\min\{\mu_A(x,z),\mu_B(z,y)\}.$$

Визначення 7. Мінімаксним добутком (мінімаксною композицією) нечітких відносин A і B на множині X є нечітке відношення A• B з функцією приналежності, яка має такий вигляд

$$\mu_{A\bullet B}(x,y)=\inf_{z\in X}\max\{\mu_A(x,z),\mu_B(z,y)\}.$$

Визначення 8. Максмультіплікативним добутком (максмультіплікативною композицією) нечітких відносин A і B на множині X є нечітке відношення A * B з функцією приналежності, яка має такий вигляд

$$\mu_{A*B}(x,y)=\sup_{z\in X}\{\mu_A(x,z)\cdot\mu_B(z,y)\}.$$

Розглянемо кінцеву безліч X тобто таку, яка складається з кінцевого числа N елементів. Будемо вважати, що на цій множині задані два нечітких відносини A і B. Тоді їх функції приналежності μ_A (x, y) та μ_B (x, y)будуть являти собою квадратні матриці, елементи яких відповідно a_{ij} і b_{ij} відображають ступінь виконання відповідних нечітких відносин $x_{ij}Ay_{ij}$ і $x_{ij}By_{ij}$ між елементами x_{ij} і y_{ij}. В такому випадку функції приналежності показаних вище композицій даних нечітких відносин повинні обчислюватися за такими формулами.

Для максимінной композиції:

$$\mu_{A\circ B}(x,y)=\max_{k\in N}\min\{\mu_A(a_{ik},k),\mu_B(k,b_{kj})\}\ ,i,j,k\in N\ ;$$

Для мінімаксної композиції:

$$\mu_{A\bullet B}(x,y)=\min_{k\in N}\max\{\mu_A(a_{ik},k),\mu_B(k,b_{kj})\}\ ,i,j,k\in N\ ;$$

Для максмультіплікатівной композиції:

$$\mu_{A*B}(x,y)=\max_{k\in N}\{a_{ik}\times b_{kj}\},i,j,k\in N.$$

Приклад. Нехай функції приналежності нечітких відносин A і B на безлічі X мають наступні числові значення:

$$\mu_A(x,y)=\begin{bmatrix}0,2 & 0,6\\ 0,5 & 0,8\end{bmatrix} \text{ и } \mu_B(x,y)=\begin{bmatrix}0,5 & 0,7\\ 0,3 & 1\end{bmatrix}$$

Розглянемо докладніше алгоритми обчислення матриць функцій приналежності для всіх трьох згаданих композицій даних відносин.

Для ***максимінної композиції*** даних нечітких відносин функція приналежності обчислюється таким чином. Спочатку відповідно до формального правила множення матриць кожен елемент композиції відшукується шляхом порівняння елементів відповідного рядка матриці функції приналежності μ_A (x, y)нечіткого відношення A і елементів відповідного стовпця матриці функції приналежності μ_B (x, y)нечіткого відношення B.

Наприклад, для елемента a_{11} ця процедура буде виглядати таким чином. Порівнюючи між собою числові значення першого елемента першого рядка матриці μ_A (x, y), що дорівнює 0,2,і першого елемента першого стовпця μ_B (x, y), що дорівнює 0,5, вибираємо мінімальне з них, тобто величину 0,2. Порівнюючи потім значення другого елемента першого рядка матриці μ_A(x, y), рівне 0,6, і значення другого елементу першого стовпчика матриці μ_B (x, y), що дорівнює 0,3, вибираємо мінімальне з них, тобто величину 0,3. Тепер з отриманої сукупності мінімальних значень, тобто з чисел 0,2 і 0,3, остаточно вибираємо найбільше, яким є величина 0,3. Ця величина і є шукане значення елемента a_{11}. Таким чином, a_{11} = 0,3.

Для знаходження елемента a_{12} будемо порівнювати значення чисел, які утворюють перший рядок матриці μ_A(x, y)функції приналежності нечіткого відношення A зі значеннями чисел, що утворюють другий стовпець матриці μ_B(x, y)ів) функції приналежності нечіткого відношення B. Тоді в результаті порівняння першого елемента першого рядка матриці μ_A(x, y), рівного 0,2 і першого елемента другого стовпця матриці μ_B(x, y), рівного 0,7, виберемо мінімальне значення з них, тобто 0,2. Потім шляхом порівняння другого елемента першого рядка матриці μ_A(x, y), рівного 0,6, і другого елементу другого стовпця матриці μ_A(x, y), рівного 1, вибираємо мінімальне з цих чисел, яке дорівнює 0,6. З цих отриманих двох чисел (0,2 і 0,6) вибираємо найбільше, тобто 0,6, яке і буде являти собою шукане значення елемента a_{12}= 0,6.

Далі, для знаходження елемента a_{21} шуканої матриці функції приналежності $\mu_{A\circ B}$(x, y) максимінної композиції нечітких відношень A і B використовуємо описану процедуру, порівнюючи між собою значення елементів другого рядка матриці μ_A(x, y)функції приналежності відносини A зі значеннями елементів першого стовпчика матриці μ_B(x, y)функції приналежності відношення B. В такому випадку перша порівнювана пара (перший елемент другого рядка матриці $\mu_A(x, y)$і перший елемент першого стовпця матриці $\mu_B(x, y)$виявиться тою, що складається з однакових чисел 0,5, значення якого і залишається для подальшого розгляду. Порівнюючи другий елемент другого рядка матриці $\mu_B(x, y)$з другим елементом першого стовпчика матриці $\mu_B(x, y)$, з пари 0,8 і 0,3 вибираємо найменше з цих чисел, тобто 0,3. Потім з відібраних чисел 0,5 і 0,3 вибираємо найбільше, яким є 0,5. Воно і буде шуканим значенням елемента a_{21} матриці $\mu_{A\circ B}(x, y)$ функції приналежності максимінной композиції даних нечітких множин.

Нарешті, для визначення елемента a_{22} цієї матриці порівнюємо значення елементів другого рядка матриці $\mu_A(x, y)$з елементами другого стовпця матриці $\mu_B(x, y)$. Так, з першої пари чисел 0,5 і 0,7 залишимо найменше 0,5, а з другої пари чисел, тобто з 0,8 і 1 - найменше 0,8. З отриманих чисел 0,5 і 0,8 значенням шуканого елемента a22 буде найбільше з них, тобто 0,8.

Таким чином, значення матриці $\mu_{A\circ B}(x,y)$ функції приналежності максимінной композиції $A \circ B$ розглянутих нечітких відносин A і B на безлічі X в даному випадку остаточно матиме такий вигляд:

$$\mu_{A\circ B}(x, y) = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Для мінімаксної композиції A●B нечітких відносин A і B на множині X процедура знаходження елементів матриці $\mu_{A\circ B}(x,y)$функції приналежності буде подібною, проте за результатами перших порівнянь елементів матриць $\mu_A(x,y)$і $\mu_B(x,y)$заданих функцій приналежності відносин A і B для подальшого розгляду залишаються найбільші з чисел порівнюваних пар, що утворюють собою елементи відповідних рядків і стовпців, а з отриманої таким чином сукупності вибирається найменше число.

Наприклад, в розглянутому прикладі при порівнянні елементів першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$і елементів першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, отримаємо, що з двох чисел 0,2 і 0,5 найбільшим буде 0,5, а з двох чисел 0,6 і 0,3 найбільшим буде 0,6. З отриманої таким чином пари 0,5 і 0,6 вибираємо найменше, тобто число 0,5, яке і буде являти собою відповідний елемент a_{11} шуканої матриці.

В результаті порівняння елементів першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і другого стовпчика матриці $\mu_B(x,y)$встановлюємо, що з двох чисел 0,2 і 0,7 найбільшим є 0,7, а з двох чисел 0, 6 і 1 найбільшою буде одиниця. З отриманої таким чином пари чисел 0,7 і 1 вибираємо найменше, тобто 0,7, яке і буде являти собою значення відповідного елемента a_{11} шуканої матриці $\mu_{A\bullet B}(x,y)$.

На основі результатів порівняння елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$встановлюємо, що з двох однакових чисел 0,5 і

0,5 вибирати нема чого, іншими словами, залишається для подальшого розгляду 0,5. З двох же інших чисел, тобто 0,8 і 0,3 найбільшим буде 0,8. таким чином, з отриманої пари чисел 0,5 і 0,8 вибираємо найменше, тобто 0,5, яке і буде являти собою значення відповідного елемента a_{21} шуканої матриці матриц і$\mu_{A\bullet B}(x,y)$ мінімаксної композиції відношень A і B .

Нарешті, в результаті порівняння елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$і другого стовпчика матриці $\mu_B(x,y)$можна встановити, що з чисел 0,5 і 0,7 найбільшим буде 0,7, тому його і залишаємо для подальшого розгляду. З чисел же 0,8 і 1 найбільшою виявляється одиниця. З отриманої таким чином пари чисел 0,7 і 1 вибираємо найменше, тобто 0,7, яке і являє собою значення елемента a_{22} шуканої матриці $\mu_{A\bullet B}(x,y)$. Таким чином, остаточно матриця функції приналежності $\mu_{A\bullet B}(x,y)$ мінімаксної композиції A • B нечітких відносин A і B на множині X буде мати наступний вигляд:

$$\mu_{A\bullet B}(x,y)=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}7\\ 0{,}5 & 0{,}7\end{bmatrix}.$$

Для **максмультіплікатівной композиції** A * B нечітких відношень A і B на безлічі X процедуру знаходження елементів матриці $\mu_{A\bullet B}(x,y)$ функції приналежності до певної міри можна вважати подібної описаним, проте вона має ще більшу аналогію зі звичайною операцією множення матриць. Дійсно, при формуванні, наприклад, значення елемента a_{11} спочатку обчислюються твори відповідних елементів першого рядка матриці $\mu_A(x,y)$ і першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, а потім вибирається максимальне з отриманих добутків. У нашому випадку ними відповідно будуть 0,2 x 0,5 = 0,1 і 0,6 x 0,3 = 0,18, причому останнє, як максимальне з них, і буде представляти собою значення шуканого елемента a_{11} матриці $\mu_{A\bullet B}(x,y)$.

Для елемента a_{12} обчислюємо добутки елементів першого рядка $\mu_A(x,y)$ і другого стовпчика матриці $\mu_B(x,y)$, які виявляються рівними відповідно 0,2*0,7 = 0,14 і 0,6 *1 = 0,6. Останній з цих добутків, як найбільший з них, і виступає в якості шуканого значення елемента a_{12}.

Для обчислення елемента a_{21} шуканої матриці $\mu_{A\bullet B}(x,y)$знаходимо величини добутків елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$і першого стовпця матриці $\mu_B(x,y)$, які складають відповідно 0,5 x 0,5 = 0,25 і 0,8 x 0,3 = 0,24. Значення найбільшого з них, тобто число 0,25, і має бути присвоєно цьому елементу матриці. Нарешті для знаходження елемента a_{22} обчислюємо величини добутків елементів другого рядка матриці $\mu_A(x,y)$і другого стовпчика матриці $\mu_B(x,y)$, які виявляються рівними відповідно 0,5*0,7 = 0,35 і 0,8*1 = 0,8 . Найбільше з отриманих творів, тобто число 0,8, і буде представляти собою шукане значення цього елемента.

Таким чином, остаточне значення матриці $\mu_{A\bullet B}(x,y)$ функції приналежності максмультіплікатівної композиції А * В заданих нечітких відносин А і В на множині Х буде мати наступний вигляд:

$$\mu_{A\bullet B}(x,y)=\begin{bmatrix}0{,}18 & 0{,}6\\ 0{,}25 & 0{,}8\end{bmatrix}.$$

Відзначимо, що поняття композиції нечітких відносин виявляється корисним в процесі вирішення деяких класів важливих прикладних задач автоматизованого управління і прийняття рішень, особливо в умовах інформаційної невизначеності.

Нечіткі відображення.

Загальні поняття про відображення

Відповідно до визначення, наведеного в математичної енциклопедії, **відображенням**, або **однозначним відображенням** прийнято називати певний закон, за яким кожному елементу деякої заданої множині Х ставиться у відповідність цілком певний елемент іншої заданої множини У (при цьому, взагалі кажучи, безліч Х може збігатися з безліччю Y). Таке взаємовідношення або взаємозв'язок між елементами $x\in X$ і $y\in У$ прийнято записувати у вигляді $y = f(x)$, $y = fx$ або $y = y(x)$. Крім того, іноді використовуються також позначення f: Х –>У і при цьому говорять, що відображення f діє з Х в У або відображає множину Х в безліч У.

Безліч Х називають при цьому *областю визначення відображення f*, а безліч $\{y=f(x),\ x\in X\} \subset Y$ - *безліччю значень цього відображення*. Саме відображення f: X –>Y називають ще відображенням безлічі Х в безліч Y (або на безліч Y за умови, якщо $\{y=f(x),\ x\in X) =Y$). Цілком логічно зробити висновок, що в значній мірі зміст поняття відображення збігається зі змістом таких відомих математичних понять, як *функція, оператор, перетворення*.

Відображення f: Х –> У породжує множину

$$Gr_f=\{x,f(x)\,|\,x\in X\}\subset X\times Y\ ,$$

яку зазвичай заведено називати *графіком* цього відображення. І навпаки, безліч $M\subset X*У$ визначає однозначне відображення тоді й тільки тоді, коли для будь-яких $u\in X$ існує $v\in Y$, причому тільки одне і таке, що $(u, v)\subset M$. У такому випадку $f_M(u)=v$.

Два відображення f і g називаються <u>рівними</u>, якщо області їх визначення збігаються, і $f(x) = g(x)$ для будь-якого $x\in X$. В такому випадку збігаються і області значень цих відображень.

Відображення f на X цілком природно називається постійним, якщо $f(x) = a$ для будь-якого $x \in X$, де a =const.

Звуженням відображення $f: X \to Y$ на підмножину $A \subset X$ прийнято називати відображення φ, яке задається на безлічі A за допомогою рівності $\varphi(x) = f(x)$, $\forall x \in A$. Це звуження позначається як f_A.

Розширенням відображення (або його продовженням) на безліч $E \supset X$ називають відображення F, яке визначено на E і задовольняє рівності $F(x) = f(x)$ для будь-яких $\forall x \in E$.

Якщо задані три безлічі X,Y,Z, причому на безлічі X визначено відображення f зі значеннями в безлічі Y, а на Y задано відображення g зі значеннями в безлічі Z, то існує таке відображення h з областю визначення X, яке приймає значення в Z і визначається рівністю $h(x)=g[f(x)]$. Це відображення називається **композицією відображень** f і g, а самі відображення f і g називаються відповідними відображеннями.

Композиція відображень є надзвичайно важливим і корисним поняттям. Зазвичай вона позначається символом $h = g \circ f$. Характерно, що порядок запису грає при цьому дуже істотну роль, оскільки операція композиції не має властивість комутативності.

Відображення f яке визначено на безлічі X і приймає значення в множині Y, породжує нове відображення, яке задано на підмножині множини X і значеннями якого виступають підмножини безлічі Y. Так, якщо $A \subset X$, то

$$f(A) = \{y \overset{def}{=} f(x), x \in A\}.$$

Безліч $f(A)$ при цьому називається *образом безлічі* A. Якщо покласти $A = \{x\}$, то отримаємо вихідне відображення $f(x)$. Таким чином, $f(A)$ являє собою розширення відображення $f(x)$ з безлічі X на безліч F(X) всіх підмножин множини X, якщо ототожнювати одноелементну безліч з тим елементом, який його складає.

У разі Y=X безліч X називається *інваріантною підмножиною* відображення f, якщо $f(A) \subset A$, а точка x називається *нерухомим елементом* відображення f, якщо $f(x) = x$. Інваріантні підмножини і нерухомі елементи грають важливу роль при вирішенні функціональних рівнянь виду $f(x) = a$ або $x - f(x) = a$.

Відзначимо також, що кожне відображення $f: X \to Y$ породжує нове відображення, яке задано на підмножинах безлічі $f(X)$. Як значення цього відображення виступають підмножини безлічі X. Власне, для кожної безлічі $B \subset f(X)$ за допомогою $f^{-1}(B)$ позначається безліч $\{x, f(x) \in B\}$, яке називається повним прообразом безлічі B. Якщо відображення $f^{-1}(y)$ для будь-якого $y \in f(X)$ складається всього з одного елемента, то f^{-1} являє собою відображення елемента, визначеного на f(X), яке називається **зворотним відображенням** відносно f. Існування зворотного відображення еквівалентно умові можливості розв'язання рівняння f(x) = y, y ∈ (X).

Відомі французькі математики Р. Фор, А. Кофман і М. Дені-Папен вводять поняття відображення в такий спосіб. Вони розглядають відношення R⊂A*B і називають його *функціональним*, якщо для кожного елемента x∈ A перетин відношення R по *x* містить не більше одного елемента. При цьому для будь-якого функціонального відношення, взаємно однозначного чи ні, вони визначають функцію, пов'язану з цим ставленням, як функцію, перетин якої по кожному x∈A є або порожньою безліччю ∅, або тим елементом безлічі B, яка є елементом R(x).

Перетин R(x) безлічі R по x∈A називають *образом* аргументу *x* для функції f і позначають символом f(x). Аргумент називають також *змінною*, а величину f(x) - *значенням функції*.

Перетин R^{-1}(y) безлічі R по y∈B зазвичай називають *прообразом* y для функції f.

Безліч x∈ A, таких, що існує f(x) (в разі, коли безліч R(x) не є порожньою), являє собою *область визначення* функції, пов'язаної з R. Якщо f є всюди певною функцією, тобто її область визначення збігається з A, то говорять, що f являє собою *відображення* безлічі A в безліч B (рис. 2.18).

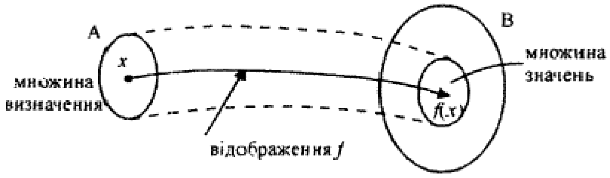

Рисунок 2.18 – Відображення множини A в множину B

Якщо образ всієї множини A дорівнює B (або збігається з B), іншими словами, якщо кожен елемент з безлічі B являє собою образ щонайменше одного елемента з безлічі A, то кажуть, що має місце відображення A **на** B (рис. 2.19).

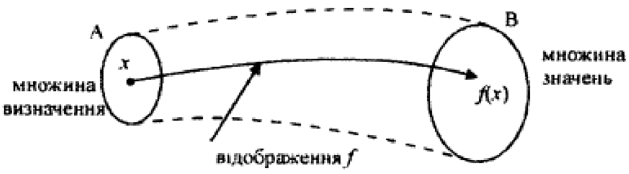

Рисунок 2.19 – Відображення множини A **на** множину B

У такому випадку зображення f називають ще сюр'єктівним відображенням або сюр'єктівной функцією.

2.5 Задачі математичного програмування при нечітких початкових умовах і нечітких критеріях.

Поняття завдання математичного програмування

Завдання, в яких відносини переваги, які використовуються при виборі можливих альтернатив описані в формі функції мети або функції корисності, яку, в залежності від конкретного контексту, необхідно максимізувати або мінімізувати, прийнято називати **завданнями математичного програмування**. Вони отримали досить широке поширення при модельному описі транспортних завдань, завдань оптимального вибору раціону харчування або годування тварин, оптимального розкрою листових заготовок і т.п. Завдання в подібній же постановці зустрічаються і при дослідженні, проектуванні і експлуатації систем автоматизованого управління та прийняття рішень.

***Раціональним рішенням завдань математичного програмування і є вибір такої допустимої альтернативи (або деякого підмножини альтернатив), на якій функція корисності приймає, по можливості, найбільше значення*.**

Найбільш розробленими є методи розв'язання задач лінійного математичного програмування, в яких і цільова функція, і обмеження, що визначають область допустимих значень шуканих змінних, описуються системами лінійних алгебраїчних рівнянь або нерівностей. Змістовно постановка типової задачі лінійного програмування має такий вигляд.

Необхідно визначити, при яких значеннях змінних x_1, x_2, ..., x_n з деякої їх множини цільова функція, що представляє собою лінійну залежність від своїх аргументів

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to \max$$

досягає максимального значення з урахуванням обмежень на безліч допустимих рішень, також мають вигляд системи лінійних рівнянь або нерівностей виду

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i x_i - c_i) \geq 0.$$

При цьому спільність постановки не змінюється і в разі необхідності вирішення завдань, конкретний фізичний чи економічний сенс яких зводиться не до максимізації, а до мінімізації цільової функції y(x). Адже дійсно, в таких випадках нескладно в якості нової формальної цільової функції використовувати функціюy$_1$(x), яка виходить, наприклад, за допомогою одного з наступних перетворень:

$$y_1(x)=-y(x) \text{ або } y_1(x)=1/y(x)$$

У найбільш простому двовимірному випадку розв’язання задачі максимізації функції вигляду $y = a_1x_1 + a_2x_2$ при заданих лінійних обмеженнях покажемо на наступному простому прикладі.

Нехай необхідно максимізувати цільову функцію, що має вигляд

$y = 2x_1 + x_2$

при наступних обмеженнях:

$$0 \le x_1 \le 4,$$
$$0 \le x_2 \le 3,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

Графічно ці обмеження будуть визначати необхідність вибору рішення у вигляді пари чисел (x_1,x_2), яка визначає деяку точку або деяку підмножину точок з області допустимих значень, показаної штрихуванням на рис. 2.20

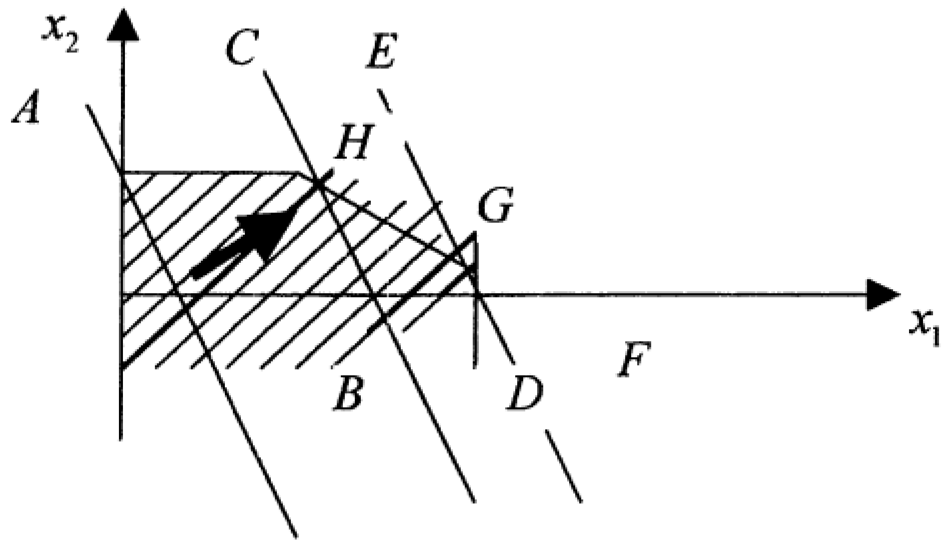

Рисунок 2.20– Графічне рішення задачі лінійного математичного програмування

Перетворимо для зручності цільову функцію до вигляду

$$x_2 = y - 2x_1$$

Відзначимо, що при різних чисельних значеннях функції y(x) її графічною інтерпретацією служитиме деяке сімейство взаємно паралельних похилих прямих з негативним кутовим коефіцієнтом, дві з яких AB і CD показані на малюнку.

Вибираючи тепер довільну пару чисел, наприклад $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, що означають точку на прямій AB, і обчислимо значення цільової функції в цій точці. Воно виявляється рівним $y = 3$. Виберемо тепер точку $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, що лежить на прямій CD, і обчислимо значення цільової функції в цій точці. Воно виявляється рівним $y = 7$.

Оскільки цільова функція y (x_1, x_2) у безперервний спосіб залежить від своїх аргументів, на основі отриманого результату можна стверджувати, що з пересуванням прямий AB вправо значення цільової функції зростає, що показано на малюнку за допомогою жирної стрілки. Продовжуючи ці міркування, приходимо до висновку, що максимального значення цільова функція досягає в точці G (4,2), оскільки подальшій рух прямий вправо виводить її за межі області допустимих значень. Таким чином, рішенням вихідної задачі є пара чисел $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, для якої максимальне значення функції дорівнює 10.

Основні підходи до вирішення завдань математичного програмування

При постановці, аналізі та вирішенні завдань нечіткого математичного програмування будемо спиратися на основні ідеї наступних двох найбільш поширених підходів до знаходження їх вирішення. Обидва ці підходи представляються логічно цілком обґрунтованими і раціональними з точки зору суті забезпечуваних ними результатів.

Сутність першого підходу полягає в тому, що вихідна задача нечіткого математичного програмування формулюється у вигляді завдання досягнення певної нечітко визначеної мети. Ця мета G(x) повинна досягатися на деякій множині альтернатив $x \in X$. При цьому рішенням завдання є знаходження перетину цього нечіткого безлічі цілей G(x) і нечіткої множини наявних при цьому обмежень C(x), як це показано на рис. 2.21 для двовимірного випадку.

При цьому в якості обмежень тут зазвичай виступають допустимі альтернативи x, під якими можуть розумітися, наприклад, різні види наявних ресурсів, необхідних для досягнення бажаної мети, або певне їх співвідношення.

У процесі виконання завдання на основі цього підходу в принципі не виключений випадок, коли ці безлічі виявляються непересічними, тобто $G(x) \cap C(x) = \emptyset$. Іншими словами, завдання при обраних цілях і існуючих обмеженнях не має рішення (рис. 2.22). Це може бути наслідком як завищених цілей, недосяжних при даних умовах, так і досить жорстких обмежень.

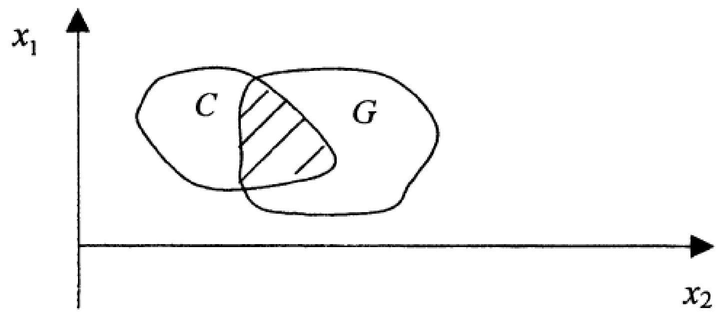

Рисунок 2.21 – Перетин нечітких множин мети G(x) і наявних обмежень C(x)

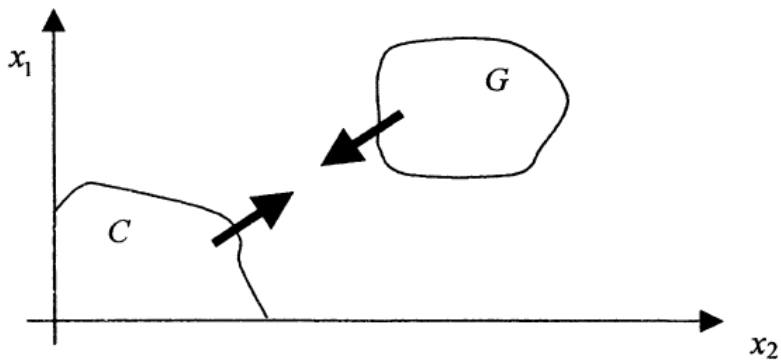

Рисунок 2.22–Ситуація, в якій безліч цілей G(x) і безліч обмежень C(x) в задачі математичного програмуванняне перетинаються

Для подолання такої ситуації необхідно взаємно "підтягнути" один до одного області цілей і обмежень. Це можна зробити як шляхом певного зниження бажаних цілей, так і шляхом деякого пом'якшення наявних обмежень. Правда, якщо ці обмеження мають ресурсний характер, і їх пом'якшити не вдається, слід переглядати цілі. Такий процес поступового "зближення" множин необхідно продовжувати до тих пір, поки не утвориться деяка область з перетину.

Другий підхід до вирішення завдань нечіткого математичного програмування заснований на ідеї, що використовує уявлення цих завдань таким чином, що їх рішення вибираються подібно до того, як це зазвичай робиться в задачах багатокритеріальної оптимізації. При цьому вважається, що в рішенні вихідної завдання повинні бути присутніми тільки ті альтернативи (не порівнянні між собою в рамках даного завдання), які не домінують строго ніякими іншими альтернативами.

Під суворим домінуванням тут розуміється таке ставлення переваги між альтернативами з розглянутого їх безлічі, при якому одна якась альтернатива (або кілька альтернатив) є суттєво кращими по відношенню до деякій підмножині інших, які в силу цього свідомо не можуть з нею (або з підмножиною таких альтернатив) конкурувати.

При такому розумінні рішення задачі нечіткого математичного програмування особа, яка приймає рішення (ОПР), отримує в своє розпорядження можливість в більшій мірі використовувати свої суб'єктивні судження або думки про деяку реальну ситуацію, які не могли бути формалізовані в традиційній математичній постановці вихідної завдання математичного програмування. Отже, в процесі вирішення завдань подібного роду ЛПР, оперуючи методами теорії нечітких множин, може з їх допомогою цілком керуватися своїми суб'єктивними судженнями нарівні з іншого розташовується інформацією про досліджуваний об'єкт або системі.

Особливий клас завдань, що зустрічаються в теорії автоматизованого управління і прийняття рішень, утворюють так звані ігрові завдання, в яких результат вибору і реалізації конкретного варіанту управління або, відповідно, результат прийняття рішення, визначаються не тільки вибором самої особи, яка приймає рішення, а й вибором його партнерів. Звичайно, слово "партнер" тут вжито умовно і в досить загальному сенсі, оскільки в переважній більшості випадків воно відноситься скоріше до опонента, а то і до супротивника ЛПР.

Типовим прикладом такого завдання в управлінні є дії льотчика під час повітряного бою. Не менш типовим прикладом завдання ігрового характеру в процесі прийняття управлінського рішення може служити ситуація підготовки умов відповідального контракту, коли ви, як продавець, маючи на меті найбільш вигідного продажу, повинні також передбачати можливі дії покупця вашої продукції, яка прагне до максимального забезпечення своїх власних інтересів.

Математична постановка задач такого класу визначається закладеними в них принципами прийняття рішень.

Завдання досягнення нечітко визначеної мети (підхід Беллмана-Заде)

Розглянемо випадок вирішення завдання з нечітко визначеною метою. При цьому будемо вважати, що мета, яку переслідує особа, яка приймає рішення, і безліч альтернатив, наявних в його розпорядженні, є деякі рівноправні за своєю значимістю нечіткі підмножини деякого універсальної множини альтернатив. Описуваний підхід отримав свою назву по імені відомих математиків Р. Беллман, який розробляв методи вирішення задач математичного програмування, і Л. Заде, який поширив їх на випадок нечіткого опису мети.

Нехай X являє собою це універсальну множину альтернатив $x \in X$. Нечіткою метою в множині X нехай є деяка нечітка підмножина цієї множини $G \subset X$. Як завжди, нечітка підмножина описується функцією приналежності μ_G: X–> [0,1], що означає ступінь приналежності кожній конкретній альтернативи цьому підмножині, в даному випадку підмножині мети G(x).

Нехай, наприклад, X являє собою деяку числову вісь. Тоді нечіткою метою прийняття рішення можуть виступати такі нечіткі множини, як "величина x повинна бути приблизно дорівнює п'яти" або "величина x повинна ненабагато відрізнятися від шести". Будемо вважати, що при цьому використовуються нечіткі поняття цілком чітко описані функціями приналежності, відповідними даними нечітким множинам. Це означає, зокрема, що чим більше ступінь приналежності $\mu_G(x)$ будь-якої альтернативи x нечіткій множині мети G(x), тобто чим більшим буде значення $\mu_G(x)$, тим вищим буде ступінь досягнення цієї мети при виборі даної альтернативи x в якості рішення задачі.

У цьому сенсі нечіткий опис мети в рамках підходу Беллмана-Заде можна одночасно вважати і функцією корисності в звичайній задачі нечіткого математичного програмування, якщо нормувати до одиниці значення цієї функції.

Нечіткі обмеження, що представляють собою, по суті, безліч допустимих альтернатив, також описуються деякими нечіткими підмножинами C з тієї ж універсальної безлічі X.

Нехай універсальна множина $X \to R^1$, тобто являє собою числову вісь. В цьому випадку нечіткі обмеження можуть мати такий вигляд: "x не повинен бути надто великим" або "x повинен бути набагато більше нуля". Передбачається, що ці смислові поняття досить чітко описані функціями належності відповідних нечітких множин, які будемо позначати μ_c.

Більш загальною слід вважати таку постановку задачі, при якій нечіткі цілі і нечіткі обмеження являють собою підмножини різних універсальних множин X_1 і X_2.

Нехай X являє собою деяку універсальну множину альтернатив і нехай задано однозначне його відображення φ: X –> Y в іншу універсальну множину Y. У цьому випадку елементи множини Y можна інтерпретувати як відгуки або реакції системи на вхідні дії (управління) X в завданні автоматизованого управління, або як деякі оцінки або певний ефект (результат) вибору відповідних альтернатив з безлічі X в завданню прийняття рішень.

Нечітко описана мета при цьому задається в вигляді деякої нечіткої підмножини G універсальної множини реакцій і оцінок Y, іншими словами, G, тобто у вигляді функції приналежності μ_G:Y–> [0,1]. З урахуванням того, що можна ввести в розгляд перетворення y = φ(x), отримаємо $\mu_G(y) = \mu_G((\varphi(x))$. Таким чином, вихідна задача може розглядатися як завдання досягнення нечітко визначеної мети μ_G при заданих нечітких обмеженнях $\mu_C(x)$.

Нехай деяка альтернатива x забезпечує досягнення бажаної мети G(x) зі ступенем $\mu_G(x)$ і задовольняє наявним обмеженням C(x) зі ступенем $\mu_C(x)$. В цьому випадку є всі підстави вважати, що ступінь приналежності цієї альтернативи до вирішення вихідної задачі дорівнює найменшому з цих чисел. Нагадаємо, що за визначенням найменше зі значень двох функцій $\mu_C(x)$ нечітких множин G(x) і C(x) відповідає функції приналежності їх перетину.

Таким чином, нечітким рішенням завдання досягнення нечіткої мети при заданих обмеженнях виявляється нечітка множина, яке представляє собою перетин нечітких множин мети G і обмежень C, тобто нечітка множина D = G ∩ C, і в цьому випадку його функцією приналежності буде величина

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}.$$

Звісно ж цілком очевидним, що при наявності *декількох цілей* $G_1, G_2, ..., G_n$і декількох обмежень $C_1, C_2, ..., C_m$, різних за ступенем своєї значущості, доцільно ввести в розгляд відповідні вагові коефіцієнти λ_1, i=1,...,n і v_k, k = l, ..., m, з урахуванням яких функція приналежності рішення задачі набуває такого вигляду

$$\mu_D(x) = \min\{\lambda_1\mu_{G1}(x), ..., \lambda_n\mu_{Gn}(x), \nu_1\mu_{C1}(x), ..., \nu_m\mu_{Cm}(x)\}.$$

У розглянутому вище випадку, коли задано відображення φ: X–>Y безлічі альтернатив X в безліч реакцій Y системи, а нечітка мета G(x) і задана в цій множині Y, сформулюємо наступне, еквівалентне наведеному, визначення нечіткого рішення задачі досягнення нечітко визначеної мети .

Нехай G і C - нечіткі множини відповідно до мети в Y та наявних обмежень в X. Тоді нечітким рішенням завдання досягнення мети G при заданих обмеженнях C називають максимальну по відношенню вкладеності нечітку множина D, яка має властивості $D \subseteq C$, $\varphi(D) \subseteq G$.

Приклад. Нехай на числовій множині альтернатив X = {1,2, ..., 10} задані нечітка мета G і два нечітких обмеження C_1 і C_2. Для зручності розгляду і більшої його наочності представимо значення відповідних їх функцій приналежності $\mu_G(x)$, $\mu_{C1}(x)$і$\mu_{C2}(x)$ у вигляді такої таблиці 1.

Таблиця 1.

Значення функцій приналежності цілі та обмежень

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_G	0	0,1	0.4	0,8	1,0	0,7	0,4	0.2	0	0
μ_{C_1}	0,3	0,6	0,8	1,0	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0
μ_{C_2}	0	0.1	0,6	0,7	0,9	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2

Аналіз таблиці дозволяє зробити висновок про те, що мета G(x) полягає в тому, щоб x було якомога ближчим до п'яти, в той час як обмеження C_1 означає, що величина x повинна бути по можливості якомога ближче до чотирьох, а обмеження C_2 вимагає, щоб x було якомога ближчим до шести. Розглянемо процес знаходження вирішення поставленого завдання в умовах таких суперечливих вимог.

Відповідно до визначення, функція приналежності рішення D вихідної задачі буде дорівнювати

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_{C_1}(x), \mu_{C_2}(x)\}.$$

Для знаходження рішення поставленого завдання побудуємо його функцію приналежності у вигляді таблиці 2, ставлячи у відповідність кожній альтернативі $x \in X$, відповідно до визначення, найменше з представлених в таблиці 1 значень функцій приналежності цілі μ_Gі обмежень μ_{c1} і μ_{c2}, Отримані результати наведені в таблиці 2:

Таблиця 2

Значення функції належності рішення

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

Аналіз отриманої таблиці дозволяє зробити остаточне введення про те, що в якості рішення задачі необхідно вибрати альтернативу х = 5. Дійсно, саме це значення в найбільшою мірою відповідає меті, згідно з якою х повинен бути близький до п'яти. Одночасно це ж значення х в максимально можливій мірі задовольняє обом взаємно суперечливим вимогам, відповідно до першого з яких х повинен бути близький до чотирьох, а відповідно до другого - близький до шести.

Слід звернути особливу увагу на той факт, що факт нечіткості отриманого рішення є наслідком нечіткості самої вихідної задачі. У таких випадках цілком природно виникає проблема з вибором способу виконання заданої нечіткої інструкції. Іншими словами, при аналізі завдання нечіткого вибору мети природним чином постає питання про те, яку ж альтернативу з допустимого їх безлічі слід вибрати?

Один поширених з підходів полягає у виборі такої альтернативи, яка має найбільшу числове значення функції приналежності $\mu_D(x)$, тобто найбільший ступінь приналежності нечіткій рішенням. Тоді рішенням завдання буде та альтернатива х, для якої значення функції приналежності визначається з умови

$$\max_{x\in X}\mu_D(x)=\max_{x\in X}\min\{\mu_G\{x\},\mu_C\{x\}\}.$$

По суті, саме такий підхід і був використаний в розглянутому вище прикладі.

Класифікація задач нечіткого математичного програмування

При вирішенні завдань нечіткого математичного програмування важливо попередньо визначити, до якого з типових класів завдань вона відноситься, оскільки від цього суттєво залежить вибір оптимального способу вирішення. У зв'язку з цим розглянемо основні види завдань нечіткого математичного програмування. Будемо розглядати стандартну задачу математичного програмування в наступному вигляді:

$$f(x)\to\max,$$
$$\varphi_i(x)\ge 0, i=\overline{1,m}. \quad (1)$$

При цьому відразу ж підкреслимо, що в процесі моделювання в такій формі реальних завдань автоматизованого управління або прийняття рішень часто в розпорядженні дослідника-математика можуть виявитися лише нечіткі описи функцій $f(x)$ і $\varphi_i(x)$. У практиці нерідкі випадки, коли нечітко можуть бути описані параметри, від яких залежать ці функції. Наприклад, задаються тільки певні інтервали, в яких можуть знаходитися значення зазначених параметрів.

Нечітко може бути описана і сама множина X. Взагалі, нечіткий опис системи автоматизованого управління або системи прийняття рішень може, наприклад, відображати недостатність інформації про ці системи або виступати певною формою наближеного опису системи, достатнього для вирішення поставленого завдання.

У деяких випадках навіть точно описані безліч обмежень або безліч допустимих альтернатив можуть виступати тільки деяким наближеним відображенням реальності. Цю тезу слід розуміти в тому сенсі, що в реальній дійсності зустрічаються ситуації, коли деякі альтернативи, що знаходяться поза даної безлічі, тобто повинні вважатися неприпустимими. Однак саме вони в тій чи іншій мірі можуть бути більш бажаними або навіть кращими для ЛПР, ніж окремі (або навіть всі) альтернативи, які знаходяться в складі вихідного безлічі.

Як приклад можна навести таку задачу, нехай безліччю допустимих альтернатив є деяка сукупність способів різного розподілу ресурсів. При цьому наявність чіткої межі безлічі може привести до того, що ресурси, що лежать за її межами і здатні дати переважує загальний ефект, випадуть з розгляду. В цьому випадку результат вибору будь-якого варіанту з розглянутого безлічі альтернатив виявиться менш бажаним для ЛПР, і найкраще рішення не буде знайдено.

Тільки широта погляду керівника, його загальна культура і ерудиція, та ще розвинена інтуїція можуть підказати йому необхідність вибору рішення за межами розглянутого безлічі альтернатив. Однак за допомогою математичної постановки задачі вибору подібне раціональне рішення цілком може бути отримано шляхом застосування методів теорії нечітких множин.

Таким чином, застосування нечіткого опису безлічі альтернатив може виявитися більш адекватним дійсності і більш ефективним, ніж традиційно поширений чіткий підхід. У зв'язку з цим все більшого поширення набувають підходи з використанням завдань нечіткого математичного програмування. Наведемо їх класифікацію в залежності від форми опису нечіткої інформації.

Задача 1.

Завдання полягає в максимізації звичайної (чіткої) цільової функції $\varphi(x)$, яка задана на множині l: $X \to R^1$, тобто на деякій нечіткій множині допустимих альтернатив X, яке характеризується своєю функцією приналежності $\mu_C(x)$: $X \to [0,1]$.

Аналітично ця задача може бути представлена в такому вигляді:

$$f(x) \to \max;$$

$$\varphi_1(x) \geq$$

Для вирішення такого завдання пропонується здійснити нормування функції $f(x)$, яку максимізуємо, до одиниці. Це дозволить розглядати її в подальшому як якусь функцію приналежності нечіткої множини цілей ОПР. Іншими словами, завдання зводиться до введення в розгляд нової функції

$$g(x)=\frac{f(x)}{\sup\limits_{x\in\operatorname{supp}\mu_C(x)} f(x)}$$

Де $\operatorname{supp}\mu_C(x)$ є носієм вихідної множини $\mu_C(x)$. Тоді чисельні значення нової цільової функції g(x) для кожного значення аргументу x можуть розглядатися як показники ступеня досягнення мети при виборі відповідної альтернативи $x \in X$.

У такій постановці завдань розглянутого класу до їх вирішення виявляється можливим безпосереднє застосування описаного вище підходу Беллмана-Заде.

При цьому раціональним може вважатися вибір такої альтернативи x, яка має максимальну ступінь приналежності нечіткому рішенню. Іншими словами, вибір альтернативи, для якої

$$\max_{x\in X}\min\{g(x),\mu_C(x)\}$$

Саме ж завдання пошуку подібної альтернативи x може бути в цьому випадку сформульовано таким чином:

Необхідно максимізувати величину λ, тобто $\lambda \to \max$, при обмеженнях $g(x)\geq\lambda$; $\mu_C(x)\geq\lambda$. Фактично це означає, що для кожної альтернативи x відшукується максимально можливе число λ, таке, щоб і значення функції приналежності $\mu_C(x)$цієї альтернативи безлічі X, і значення нормованої функції мети g(x) перевищували цю величину λ. Цілком очевидно, що при цьому ми приходимо до типової задачі математичного програмування.

Задача 2.

Завдання такого роду являють собою нечіткий варіант першої, стандартизованої задачі математичного програмування виду (1). Подібний нечіткий її варіант можна бути отримати, якщо в попередній задачі пом'якшити задані обмеження. Іншими словами, існує можливість зробити ці обмеження нестрогими в тому сенсі, що можна допустити можливість певного їх порушення з тієї чи іншої допустимої ступенем.

Відзначимо, що практично кожна людина в тій чи іншій мірі часто прагне до порушення встановлених заборон або обмежень. Так, майже кожен, хоч раз в житті, прагнув безкоштовно проїхати в міському транспорті. Багато студентів прагнуть отримати оцінку, вищу, ніж її заслуговують їх знання або відповідь на іспиті.

У завданнях розглянутого класу, крім максимізації цільової функції $f(x)$, можна прагнути до досягнення нею деякого заданого значення. При цьому різним значенням відхилень функції $f(x)$ від цієї заздалегідь встановленої величини можна приписувати різні ступені допустимості. Цілком природним видається, що чим більшим виявиться значення відхилення функції від бажаної її величини, тим меншою повинна бути ступінь допустимості цього відхилення.

У такому трактуванні подібного класу завдання нечіткого математичного програмування можна записати в такому вигляді:

$$f(x) \geq z_0;$$
$$\varphi(x) \leq 0;$$
$$x \in X. \quad (2)$$

Розглянемо один з підходів до вирішення цього завдання.

Будемо вважати, що z_0 - обрана величина функції мети,яку бажано досягти при заданих обмеженнях. Введемо два граничних значення a і b, такі, що нерівності $f(x) < z_0 - a$ і $\varphi(x) > b$ означатимуть сильне порушення вихідних нерівностей $f(x) \geq z_0$ і $\varphi(x) \leq 0$.

Введемо тепер нечіткі множини цілей і обмежень в такий спосіб. Нехай функція приналежності нечіткої множини цілей визначається за таким правилом:

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } f(x) < z_0 - a \\ \mu(x,a), \text{ если } z_0 - a \leq f(x) < z_0 \\ 1, \text{ если } f(x) \geq z_0, \end{cases}$$

а функція приналежності нечіткої множини обмежень нехай визначається відповідно до правила

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi(x) > b \\ \nu(x,b), \text{ если } 0 < \varphi(x) \leq b \\ 1, \text{ если } \varphi(x) \leq 0, \end{cases}$$

де μ і v – деякі функції своїх аргументів, що відображають безліч X в інтервалі [0,1] і описують ступінь виконання відповідних нерівностей з точки зору особи, що приймає рішення.

В результаті вихідна задача виявляється сформульованої у вигляді завдання досягнення нечітко поставленої мети, до вирішення якої цілком можна застосувати описаний вище підхід Беллмана-Заде.

Задача 3.

Нехай потрібно вирішити задачу математичного програмування, в якій нечітко описана сама функція, яку максимізуєм $\mu_f(x)$: $X^x R^1$–> [0, l], де X - універсальна множина, а R^1 - числова вісь. У цьому випадку значення $\mu_f(x_0.r)$ для кожної фіксованою альтернативи $x_0 \in X$ буде мати свою функцію розподілу. Фактично в цьому випадку ми будемо мати нечіткий опис оцінки результату вибору альтернативи x_0, якщо вирішується завдання прийняття рішення, або опис нечітко задається реакції системи на обраний варіант управління x_0. Крім цього, для вирішення завдання повинна бути задана також нечітка множина G допустимих альтернатив або допустимих управлінь (рис. 2.23) з відповідною функцією приналежності μ_G (x):X–>[0,1].

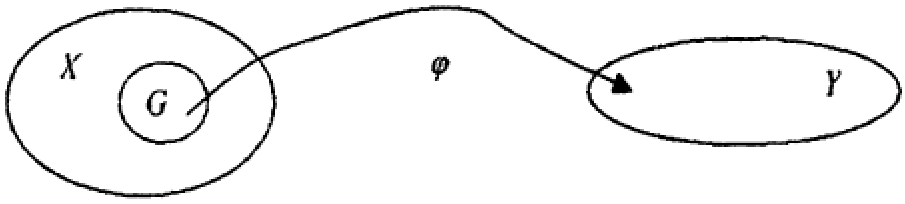

Рисунок 2.23 – До рішення задачі 3

Задача 4

Нехай задані звичайна цільова функція f: X –>R^1, яку необхідно максимізувати, і деяка система обмежень вигляду $\varphi_i(x) \geq b$, в якій недостатньо чітко визначені параметри задані в формі нечітких множин. Наприклад, якщо система обмежень лінійна, тобто має вигляд

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i$$

то нечіткими їх параметрами можуть виступати величини коефіцієнтів a_{ij} іb_i. Відзначимо, що сама нечіткість може бути наслідком, наприклад, інтервального завдання діапазонів допустимого їх зміни типу

$$\underline{a_{ij}} \leq a_{ij} \leq \overline{a_{ij}}\ ;\ \underline{b_i} \leq b_i \leq \overline{b_i}\ ,$$

як це досить часто зустрічається в практиці, коли відомі не точні значення будь-яких параметрів, а тільки інтервали, в яких вони можуть набирати різних числових значень.

Рішення задач такого роду можна здійснювати таким чином. Для кожного з множин розглянутих параметрів вводяться функції приналежності $\mu_{aij}(x)$ і $\mu_{bj}(x)$ і знаходиться функція приналежності g(x) їх перетину. Порівняння значень x, в яких g(x) досягає бажаного, по можливості, якомога більшого значення і значень x, в яких цільова функція досягає допустимого, також по можливості якомога більшої значення, шляхом прийнятного компромісу вибирається рішення $x_{компромісне}$ (Рис 2.24).

Дійсно, цільова функція f(x) досягає свого максимального значення в точці x_2, проте в цій точці значення функції приналежності g(x) виявляється неприпустимо малим. Функція ж g(x) досягає максимуму в точціх$_1$, де значення f(x) недостатньо велике. У точці же $X_{компромісне}$ значення обох функцій виявляються хоча і не максимальними, проте цілком прийнятними.

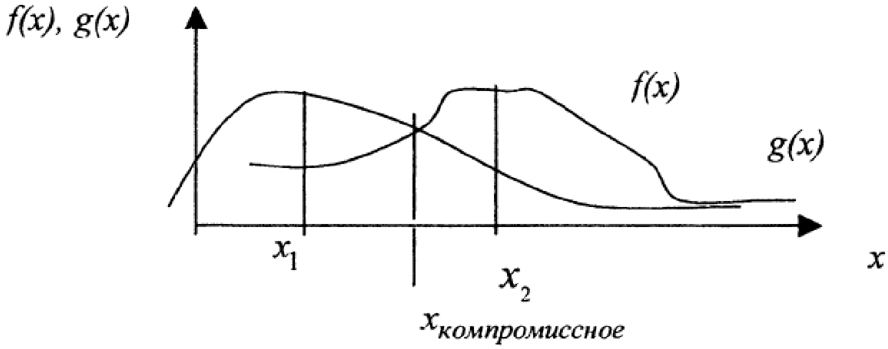

Рисунок 2.23 –Компромісне рішення в завданні 4

Задача 5.

Являє собою найбільш загальний випадок, оскільки до цього класу відносять завдання, в яких нечітко описані як параметри функцій, що визначають обмеження $\varphi_i(x) \geq b_i$, як в завданні 4, так і сама функція, яку максимізуємо f: X –>R^1, як в завданні 3.

Завдання математичного програмування на нечіткому безлічі обмежень

Нехай X- деяка універсальна множина альтернатив і нехай на неї задана цільова функція f за допомогою якої здійснюється оцінка результатів вибору тієї чи іншої альтернативи x, з безлічі X. Крім того, нехай на множині X задана нечітке підмножина $C \subseteq X$ з функцією приналежності

$$\mu_c(x) : X \to [0,1]$$

яке назвемо нечіткою безліччю допустимих альтернатив. По суті, воно і визначає обмеження при вирішенні задачі. В результаті отримуємо стандартну задачу нечіткого математичного програмування, що складається в максимізації функції $f(x)$ на нечіткій безлічі $\mu_c(x)$.

Це завдання можна розуміти двояко.

По-перше, під максимізацією можна розуміти *вибір нечіткої підмножини* деякої множини $\mu_c(x)$, якій відповідає *в деякому заздалегідь обумовленому сенсі оптимальне значення функції* f. Підкреслимо, що уявлення рішення задачі в формі нечіткої множини має сенс тільки в тих випадках, коли таке формулювання змістовно зрозуміла особі, що приймає рішення (ОПР).

По-друге, якщо ОПР не сприймає нечіткого опису рішення задачі, то під максимізацією функції f будемо розуміти раціональний вибір конкретної альтернативи або деякого підмножини альтернатив. При цьому раціональність розуміється в тому сенсі, що ЛПР виходить з необхідності компромісу між бажанням отримати якомога більшого значення цільової функції $f(x)$ і бажанням вибрати в якості найкращої таку альтернативу x, для якої функція приналежності $\mu_c(x)$ буде приймати якомога більшого значення.

Розглянемо два підходи до вирішення цього завдання.

Перший підхід до її вирішення базується на тому, що процес вирішення спирається на використання поняття безлічі рівня для нечіткої множини обмежень. Сутність аналізованого підходу полягає в тому, що вихідна нечітка задача математичного програмування представляється у вигляді деякої сукупності звичайних завдань максимізації функції f на сукупності множин рівня як на звичайних множини допустимих альтернатив.

Якщо альтернатива $x_0 \in X$ є рішенням задачі максимізації функції f на деякій множині рівня λ, будемо вважати, що λ є ступінь приналежності $\mu(x_0)$ альтернативи x_0 нечіткій множині рішень вихідної задачі нечіткого математичного програмування. Перебираючи подібним чином різні значення λ і знаходячи для кожного з них відповідне значення x, на якому функція досягає максимального значення, можна отримати функцію приналежності нечіткого рішення.

Розглянемо більш докладно опис цього підходу. Для цього введемо деяку множину рівня λ вихідної нечіткої безлічі μ_c

$$C_\lambda(x) = \{x : x \in X, \mu_c(x) \geq \lambda\}$$

для будь-якого $\lambda \geq 0$, такого, що $C_\lambda \neq \emptyset$. Крім того, введемо в розгляд безліч

$$N_\lambda = \left\{x : x \in X, f(x) = \sup_{x^1 \in C_\lambda} f(x^1)\lambda\right\}$$

яка представляє собою безліч тих точок x, на яких значення функції fна безлічі C_λ досягає максимуму. Іншими словами, N_λ є безліч рішень звичайного завдання максимізації функції f(x) на безлічі тих альтернатив x, які зі ступенем, неменшою λ, вважаються допустимими або прийнятними у вихідній задачі нечіткого математичного програмування.

Для побудови функції приналежності нечіткої безлічі рішень необхідно кожній альтернативі X_0 приписати відповідний ступінь приналежності даній безлічі. Ступенем приналежності альтернативи x_0 нечіткій множині рішень будемо вважати верхню межу з чисел λ, для яких $x_0 \in N_\lambda$.

Визначення. Рішенням 1 завдання нечіткого математичного програмування називається таке нечітка підмножина безлічі μ_c, яка описується функцією приналежності виду

$$\mu^1(x) = \sup_{\lambda : x \in N(\lambda)} \lambda, \text{ где } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \lambda_n.$$

Висловимо ***рішення 1*** в більш простій формі, скориставшись для цього його геометричній інтерпретацією за допомогою рис. 2.24. Для цього доведемо таке положення: якщо

$$x \in \operatorname{supp}\mu^1(x), \text{ то } \mu^1(x) = \mu_C(x)$$

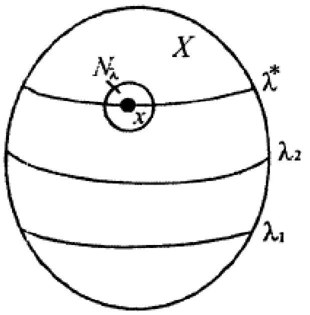

Рисунок 2.24 –До визначення рішення 1

Припустимо спочатку, що $x \in \operatorname{supp}\ \mu^1(x)$ і$\mu^1(x) < \mu_c(x)$. Це припущення, по суті, еквівалентно твердженням, що $\sup\lambda > \mu_c(x)$.Отже, знайдеться таке значення λ, яке було б більше ніж $\mu_c(x)$за умови, що $x \in N\ (\tilde{\lambda})$. Однак за визначенням $x \in C\tilde{\lambda}$, а якщо це так, то значення $\mu_c(x) \geq \tilde{\lambda}$, що суперечить попередній нерівності. Тепер припустимо, що $x \in \operatorname{supp}\mu^1(x)$ і $\mu^1(x)\mu_c(x)$, що відповідає умові $\sup\limits_{\lambda:x\in N(\lambda)}\lambda < \mu_C(x)$. Покладемо, що $\mu_c(x) = v$, оскільки граничне значення $\sup\limits_{\lambda:x\in N(\lambda)}\lambda < \mu_C(x)$ то і будь-якеλ виявиться меншою за величину $\mu_c(x)$. Звідси безпосередньо випливає, що для будь-якої λ, такої що $x \in N(v)$ виконується, що $x \in C_V$ і тоді $C_v \subset C_\lambda$

Наведені міркування показують, що з одного боку $\mu_c(x) \geq \tilde{\lambda}$, а з іншого $\mu^1(x) < \mu_c(x) \leq \tilde{\lambda}$.

Таким чином, виявляється, що $\mu^1(x) = \mu_c(x)$

З визначення рішення 1 і доведеної пропозиції випливає, що рішення 1 має такий вигляд:

$$\mu^1(x) = \mu_c(x)\text{, если } x \in \bigcup_{\lambda>0} N(\lambda),$$

і $\mu^1(x) = 0$ в інших випадках.

Вирішенню завдання нечіткого математичного програмування відповідає деякий нечітке підмножина в безлічіY. Тут $\mu_f(x)$являє собою образ нечіткої множини $\mu^1(x)$при відображенні f

$$\mu_f(r) = \sup_{r\in f^{-1}(x)} \mu^1(x) = \sup_{r\in f^{-1}(x)} \sup_{\lambda:x\in N(\lambda)} \lambda, \text{ где } f^{-1}(x) = \{x : x \in X, f(x) = r\}$$

як це показано на рис. 2.25.

При цьому будемо припускати (без доведення), що функція монотонно убуває на безлічі supp μ_f.

Перейдемо тепер до способу вибору особою, яка приймає рішення, конкретної альтернативи $x \in X$ для вирішення завдання.

Відзначимо, що такий вибір повинен спиратися не тільки на ступінь λ приналежності цієї альтернативи нечіткій множині $\mu_c(x)$, а й на відповідне значення функції $f(x)$.

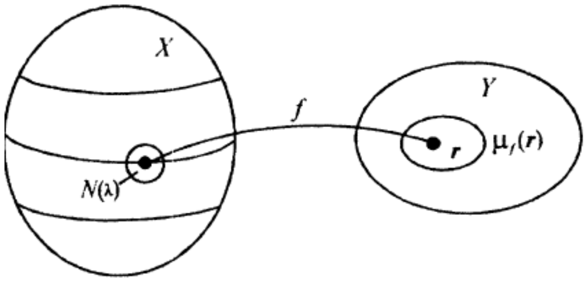

Рисунок 2.25–Знаходження $\mu_f(r)$ як способу $\mu^1(x)$при відображенні f

Виходячи з умови спадання функції, слід зазначити, що чим більше значення величини r, тим менший ступінь приналежності безлічі $\mu_c(x)$тієї альтернативи, яка дає значення функції, рівне $f(x) = r$. Тому ЛПР повинен спочатку звернутися до нечіткого значенням μ_f (r) функції $f(x)$ і вибрати таку пару(r_0, μ_f (r_0)), яка узгоджується з його бажанням отримати якомога більшого значення r_0 і в той же час як можна більшу ступінь λ приналежності обраного r_0 безлічі μ_f (r). Після того,як відповідна пара буде обрана, має сенс вибрати таку альтернативу $x_0 = f_1(r_0)$, яка б відповідала найбільшою мірою її приналежності безлічі $\mu_c(x)$.

Відзначимо, що цей підхід незручний в двох аспектах:

по-перше, в отриманому рішенні при виборі раціональних альтернатив недостатньо явно враховується необхідність компромісу між значеннями максимізуємої функції $f(x)$ і значеннями αступеня допустимості обраної альтернативи;

по-друге, таке рішення є недостатньо алгоритмічним. І тому незручно для обчислень і застосування сучасних комп'ютерних технологій, в тому числі в системах підтримки прийняття рішень.

У зв'язку з цим розглянемо ***другий підхід*** до вирішення завдання нечіткого математичного програмування, який позбавлений зазначених недоліків і, в принципі, еквівалентний отриманню рішення 1.

При використанні цього підходу враховується, що ЛПР в процесі вибору альтернатив повинен керуватися бажанням отримати якомога більшу значення максімізіруємої функції $f(x)$ при можливо більшому значенні функції приналежності альтернативи x, на якій досягається ця максимізація, нечіткій множині допустимих альтернатив.

З цією метою в процес визначення рішення включаються лише ті альтернативи $x \in X$, які в задачах багатокритеріальної оптимізації прийнято називати ефективними або оптимальними по Парето.

Якщо альтернатива $x_0 \in X$ є ефективною для функцій $f(x)$ і $\mu_c(x)$, то отже, в даній задачі неможливо знайти деяку іншу альтернативу $x_1 \in X$, яка одночасно покращувала б значення і$f(x)$, і $\mu_c(x)$ по відношенню до значення $f(x_0)$ і $\mu_c(x_0)$

Далі будемо розглядати P- безліч ефективних альтернатив для завдання нечіткого математичного програмування з двома критеріями $f(x)$ і $\mu_c(x)$.

Визначення. Рішенням 2 завдання нечіткого математичного програмування будемо називати нечітку множину, яка має функцію приналежності виду $\mu^2(x) = \mu_c(x)$, якщо $x \in P$, і $\mu^2(x) = 0$ в інших випадках.

Таким чином, ЛПР повинен використовувати у своєму рішенні лише ті альтернативи з розглянутого універсальної множини X, які дають одночасно покращувані значення функцій $f(x)$ і $\mu_c(x)$.

Відповідно до визначення рішення 2, нечітка функція f записується через функцію приналежності у вигляді

$$\mu_f^2(x) = \sup_{x \in f^{-1}(r)} \mu^2(x)$$

Відзначимо, що при деяких припущеннях рішення 1 повністю відповідає рішенню 2. Сформулюємо, зокрема, без доведення наступну теорему.

Теорема. Якщо безліч X звичайно, функція $f(x)$ неперервна на X, а функція $\mu_c(x)$ напів безперервна зверху на X, то прибудь-якому r $\in R_1$ виконується рівність

$$\mu_f^1(x) = \mu_f^2(x)$$

Таким чином, розглянуті тут підходи до вирішення завдань математичного програмування при нечітких вихідних умовах повинні розглядатися лише як деякі загальні орієнтири як для представників конкретних предметних областей або відповідних наукових дисциплін, так і для системних аналітиків.

Завдання та запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняття безлічі.
2. Наведіть основні способи та форми подання множин.
3. Покажіть сутність, особливості та можливості подання безлічі за допомогою функції приналежності до нього окремих елементів універсальної множини.
4. Дайте визначення операції об'єднання множин і поясніть її зміст за допомогою діаграми Ейлера-Венна.
5. Дайте визначення операції перетину множин і поясніть її зміст за допомогою діаграми Ейлера-Венна.
6. Сформулюйте визначення порожньої безлічі і розкрийте її сутність. Наведіть реальний приклад порожньої безлічі.
7. Сформулюйте визначення доповнення до даної безлічі, заданої на деякій універсальній безлічі.
8. Розкрийте сутність поняття підмножини даної множини. Наведіть приклади підмножин деяких відомих множин.
9. Поясніть, в чому полягає сенс основних властивостей операцій над множинами: комутативності, асоціативності, ідемпотентності, дистрибутивності і інволюції.
10. У чому полягають сенс і значення діаграм Ейлера-Венна і які переваги їх використання при вивченні операцій над множинами і виявленні властивостей цих операцій?
11. Розкрийте сутність поняття різниці множин і покажіть її геометричний сенс.
12. Розкрийте сутність поняття диз'юнктивної суми множин і покажіть її геометричний сенс.
13. Наведіть приклади реальних завдань, які зумовлюють необхідність введення поняття нечіткої множини.
14. Сформулюйте визначення нечіткої множини і поясніть його основний зміст.
15. У чому полягає принципова відмінність нечітко множинного опису певної ситуації від її ймовірного опису?
16. Розкрийте зміст і сутність функції приналежності як основну характеристику нечіткої множини.
Наведіть загальне визначення поняття відношення, використовуваного в математиці і логіці.
17. У чому полягає сутність поняття рангу відношення? Як в залежності від рангу називаються відношення?
18. Які відносини називаються бінарними? Які приклади бінарних відношеньви могли б навести?
19. Які операції визначаються для бінарних відношень?
20. Наведіть основні властивості бінарних відношень.

21. Що являють собою проекція відношення і його перетин?
22. Дайте визначення нечіткого відношення і наведіть приклади нечітких відношень.
23. Покажіть, в чому полягають принципові відмінності між звичайним відношеннях> у і нечітким відношенням х >>у.
24. Дайте геометричну інтерпретацію звичайного відношеннях> у і нечіткого відношеннях >>у.
25. Розкрийте сутність поняття носія нечіткого відношення.
26. Розкрийте сутність поняття безлічі рівня нечіткого відношення.

3 Нейронні мережі та генетичні алгоритми

3.1 Штучні нейронні мережі. Персептрон Розенблата. Архітектура нейронних мереж

<u>*Що таке нейронні мережі*</u>

Дослідження відносно штучних нейронних мереж (далі–нейронні мережі) пов'язані з тим, що спосіб обробки інформації людським мозком в корені відрізняється від методів, які застосовують звичайні цифрові комп'ютери. Мозок представляє собою надзвичайно складний, нелінійний, паралельний комп'ютер (систему обробки інформації). Він має здатність організовувати свої структурні компоненти, які звуть нейронами (neuron), так, щоб вони мали виконувати конкретні завдання (такі як розпізнавання образів, обробку сигналів органів почуттів, моторні функції) у багато разів швидше, ніж можуть дозволити надшвидкодіючі сучасні комп'ютери. Прикладом такого завдання обробки інформації може служити звичайний зір (humanvision). У функції зорової системи входить створення уявлення навколишнього світу в такому вигляді, який забезпечує можливість взаємодії (interact) з цим світом.

Більш точно, мозок послідовно виконує ряд завдань розпізнавання (наприклад, розпізнавання знайомої особи в незнайомому оточенні). На це у нього йде близько 100 – 200 мілісекунд, в той час як виконання аналогічних завдань навіть меншою складності на комп'ютері може зайняти кілька днів.

Другим прикладом може служити локатор (sonar) кажана, який представляє собою систему активної ехолокації. Крім надання інформації про відстані до необхідного об'єкта (наприклад, мошки) цей локатор надає інформацію про відносну швидкість об'єкта, про його розміри і розміри його окремих елементів, а також про азимут і висоту руху об'єкта. Для виділення цієї інформації з отриманого сигналу крихітний мозок летючої миши проводить складні нейронні обчислення. Ехолокація кажана за своїми характеристиками якості і швидкодії перевершує найскладніші прибори, створені інженерами.

Що ж дозволяє мозку людини або кажана домогтися таких результатів?

При народженні мозок має досконалу структуру, що дозволяє будувати власні правила на підставі того, що ми називаємо "досвідом". Досвід накопичується з плином часу, і особливо масштабні зміни відбуваються в перші два роки життя людини. У цей період формується кістяк загальної структури. Однак розвиток на цьому не припиняється, він триває до останніх днів життя людини.

Поняття розвитку нейронів пов'язане з поняттям пластичності (plasticity) мозку, здатності настройки нервової системи відповідно до навколишніх умов. Саме пластичність має найважливішу роль в роботі нейронів в якості одиниць обробки інформації в людському мозку. Аналогічно, в штучних нейронних мережах робота проводиться з штучними нейронами. У загальному випадку нейронна мережа (neuralnetwork) являє собою машину, що моделює спосіб обробки мозком конкретного завдання. Ця мережа зазвичай реалізується за допомогою електронних компонентів або моделюється програмою, яка виконується на цифровому комп'ютері

Таким чином, можна дати таки визначення нейронних мереж, які виступають в ролі адаптивної машини!

Нейронна мережа – це величезний розподілений паралельний процесор, який складається з елементарних одиниць обробки інформації, що накопичують експериментальні знання і надають їх для подальшої обробки. Нейронна мережа подібна з мозком двох точок зору

Знання надходять в нейронну мережу з навколишнього середовища і використовуються в процесі навчання.

Для накопичення знань застосовуються зв'язки між нейронами, звані синоптичними вагами.

Процедура, яка використовується для процесу навчання, називається алгоритмом навчання (learning algorithm). Ця процедура вибудовує в певному порядку синоптичні ваги нейронної мережі для забезпечення необхідної структури взаємозв’язків нейронів.

Структура і властивості штучного нейрона

Нейрон є складовою частиною нейронної мережі. На рис. 2.26 показана його структура Він складається з елементів трьох типів: помножувачів (синапсів), суматора і нелінійного перетворювача.

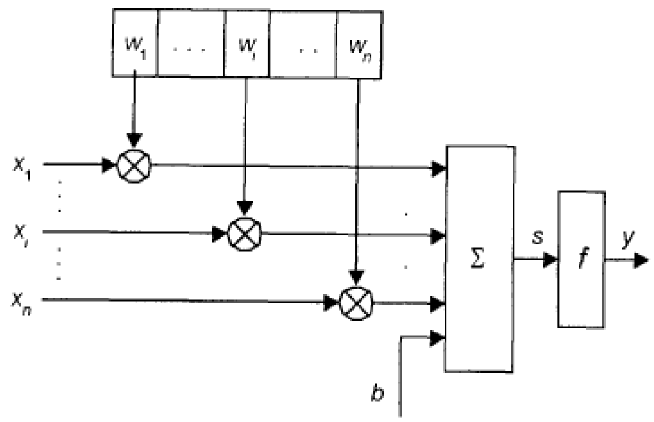

Рисунок 2.26–структура штучного нейрона

Синапси здійснюють зв'язок між нейронами, множать вхідний сигнал на число, що характеризує силу зв'язку, (вага синапсу). Суматор виконує додавання сигналів, що надходять по синаптичним зв'язкам від інших нейронів, і зовнішніх вхідних сигналів. Нелінійний перетворювач реалізує нелінійну функцію одного аргументу - виходу суматора. Ця функція називається функцією активації або передавальною функцією нейрона. Нейрон в цілому реалізує скалярну функцію векторного аргументу. Математична модель нейрона:

$$S = \sum_{t=1}^{n} w_i x_i + b_i, \quad 1.1$$

$$y = \mathrm{f}(s) \quad 1.2$$

де w_i – вага (weight) синапсу, i = 1..n; b - значення зміщення (bias), s - результат підсумовування (sum); x_i - компонент вхідного вектора (вхідний сигнал), i = 1..n; у - вихідний сигнал нейрона; n - число входів нейрона; f - нелінійне перетворення (функція активації).

У загальному випадку вхідний сигнал, вагові коефіцієнти і зміщення можуть приймати дійсні значення, а в багатьох практичних завданнях - лише деякі фіксовані значення. Вихід (у) визначається видом функції активації і може бути як дійсним, так і цілим.

Синоптичні зв'язки з позитивною вагою називають збудливими, з негативною вагою - гальмуючими.

Описаний обчислювальний елемент можна вважати спрощеною математичною моделлю біологічних нейронів. Щоб підкреслити відмінність нейронів біологічних і штучних, другі іноді називають нейроноподібнимі елементами або формальними нейронами.

<u>Класифікація нейронних мереж і їх властивості</u>

Нейронна мережа являє собою сукупність нейроподібних елементів, певним чином з'єднаних один з одним і з зовнішнім середовищем за допомогою зв'язків, що визначаються ваговими коефіцієнтами Залежно від функцій, які виконуються нейронами в мережі, можна виділити три їх типу

• *вхідні нейрони*, на які подається вектор, який кодує вхідний вплив або образ зовнішнього середовища; в них зазвичай не здійснюється обчислювальних процедур, а інформація передається з входу на вихід шляхом зміни їх активації;

• *вихідні нейрони*, вихідні значення яких представляють виходи нейронної мережі; перетворення в них здійснюються за виразами (1.1) і (1.2);

• *проміжні нейрони*, що становлять основу нейронних мереж, перетворення в яких виконуються також за виразами (1.1) і (1.2).

У більшості нейронних моделей тип нейрона пов'язаний з його розташуванням в мережі. Якщо нейрон має тільки вихідні зв'язку, то це вхідний нейрон, якщо навпаки - вихідний нейрон. Однак можливий випадок, коли вихід топологічно внутрішнього нейрона розглядається як частина виходу мережі. У процесі функціонування мережі здійснюється перетворення вхідного вектора у вихідний, деяка переробка інформації. Конкретний вид виконуваного мережею перетворення даних обумовлюється не тільки характеристиками нейроподібних елементів, але і особливостями її архітектури, а саме топологією міжнейронних зв'язків, вибором певних підмножин нейроподібних елементів для введення і виведення інформації, способами навчання мережі, наявністю або відсутністю конкуренції між нейронами, напрямком і способами управління і синхронізації передачі інформації між нейронами.

З точки зору топології можна виділити три основні типи нейронних мереж:

• повнозв'язні (рис. 2.27, а);

• багатошарові або шаруваті (рис. 2.27, б);

• слабозв'язаних (з локальними зв'язками) (рис. 2.27, в).

У повнозв'язних нейронних мережах кожен нейрон передає свій вихідний сигнал іншим нейронам, в тому числі і самому собі. Всі вхідні сигнали подаються всім нейронам. Вихідними сигналами мережі можуть бути всі або деякі вихідні сигнали нейронів після кількох тактів функціонування мережі.

У багатошарових нейронних мережах нейрони об'єднуються в шари. Шар містить сукупність нейронів з єдиними вхідними сигналами Число нейронів в шарі може бути будь-яким і не залежить від кількості нейронів в інших шарах. У загальному випадку мережа складається з Q шарів, пронумерованих зліва направо. Зовнішні вхідні сигнали подаються на входи нейронів вхідного шару (його часто нумерують як нульовий), а виходами мережі є вихідні сигнали останнього шару. Крім вхідного і вихідного шарів в багатошаровій нейронної мережі є один або кілька прихованих шарів. Зв'язки від виходів нейронів деякого шару q до входів нейронів наступного шару (p + 1) називаються послідовними.

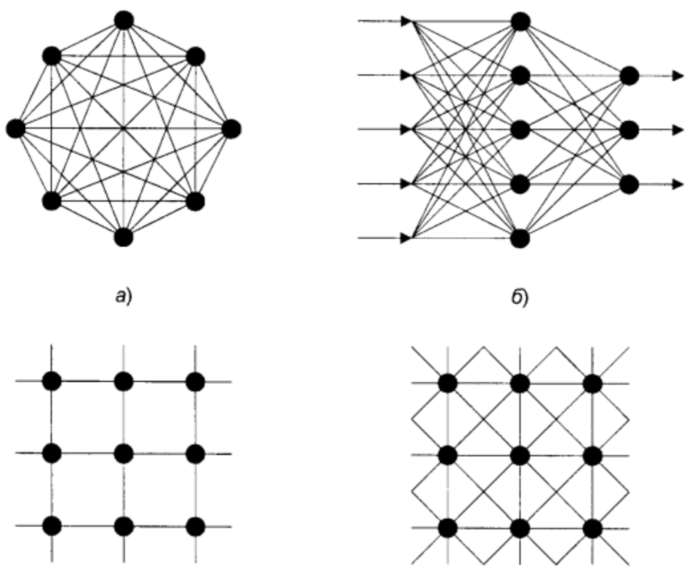

Рисунок 2.27–Архітектури нейронних мереж.
а - повнозв'язана мережа, б - багатошарова мережа з послідовними зв'язками, в - слабозв'язані мережі

У свою чергу, серед багатошарових нейронних мереж виділяють наступні типи.

1) *Монотонні.*

Це окремий випадок шаруватих мереж з додатковими умовами на зв'язку і нейрони. Кожен шар крім останнього (вихідного) розбитий на два блоки: збудливий і гальмуючий. Зв'язки між блоками теж поділяються на ті, які гальмують і збуджують. Якщо від нейронів блоку А до нейронів блоку В ведуть тільки збуджуючі зв'язки, то це означає, що будь-який вихідний сигнал блоку є монотонною не спадною функцією будь-якого вихідного сигналу блоку А якщо ж ці зв'язки тільки гальмують, то будь-який вихідний сигнал блоку В є не зростаючою функцією будь-якого вихідного сигналу блоку А. Для нейронів монотонних мереж необхідна монотонна залежність вихідного сигналу нейрона від параметрів вхідних сигналів

2) *Мережі без зворотних зв'язків.* У таких мережах нейрони вхідного шару отримують вхідні сигнали, перетворюють їх і передають нейронам першого прихованого шару, і так далі аж до вихідного, який видає сигнали для інтерпретатора і користувача. Якщо не зазначено протилежне, то кожен вихідний сигнал g-го шару подається на вхід всіх нейронів (g + 1) -го шару; проте можливий варіант сполуки q-го шару з довільним (g + p) -м шаром

Серед багатошарових мереж без зворотних зв'язків розрізняють повнозв'язані (вихід кожного нейрона q-го шару пов'язаний з входом кожного нейрона (д + 1) -го шару) і частково повнозв'язані. Класичним варіантом шаруватих мереж є повнозв'язані мережі прямого поширення (рис. 1.5).

3) *Мережі зі зворотними зв'язками.* У мережах із зворотними зв'язками інформація з наступних шарів передається на попередні. Серед них, в свою чергу, виділяють наступні:

• шарувато-циклічні, що відрізняються тим, що шари замкнуті в кільце, останній шар передає свої вихідні сигнали першого; всі верстви рівноправні і можуть як отримувати вхідні сигнали, так і видавати вихідні;

• шарувато-повнозв'язані складаються з шарів, кожен з яких представляє собою повнозв'язну мережу, а сигнали передаються як від шару до шару, так і всередині шару; в кожному шарі цикл роботи розпадається на три частини, прийом сигналів з попереднього шару, обмін сигналами всередині шару, вироблення вихідного сигналу і передача до подальшого шару,

• повнозв'язані-шаруваті, за своєю структурою аналогічні шарувато-повнозв'язаним, але функціонують по-іншому: в них не розділяються фази обміну всередині шару і передачі наступному, на кожному такті нейрони всіх верств приймають сигнали від нейронів як свого шару, так і наступних.

Як приклад мереж із зворотними зв'язками на рис. 2.28 подано частково-рекурентні мережі Елмана і Жордана.

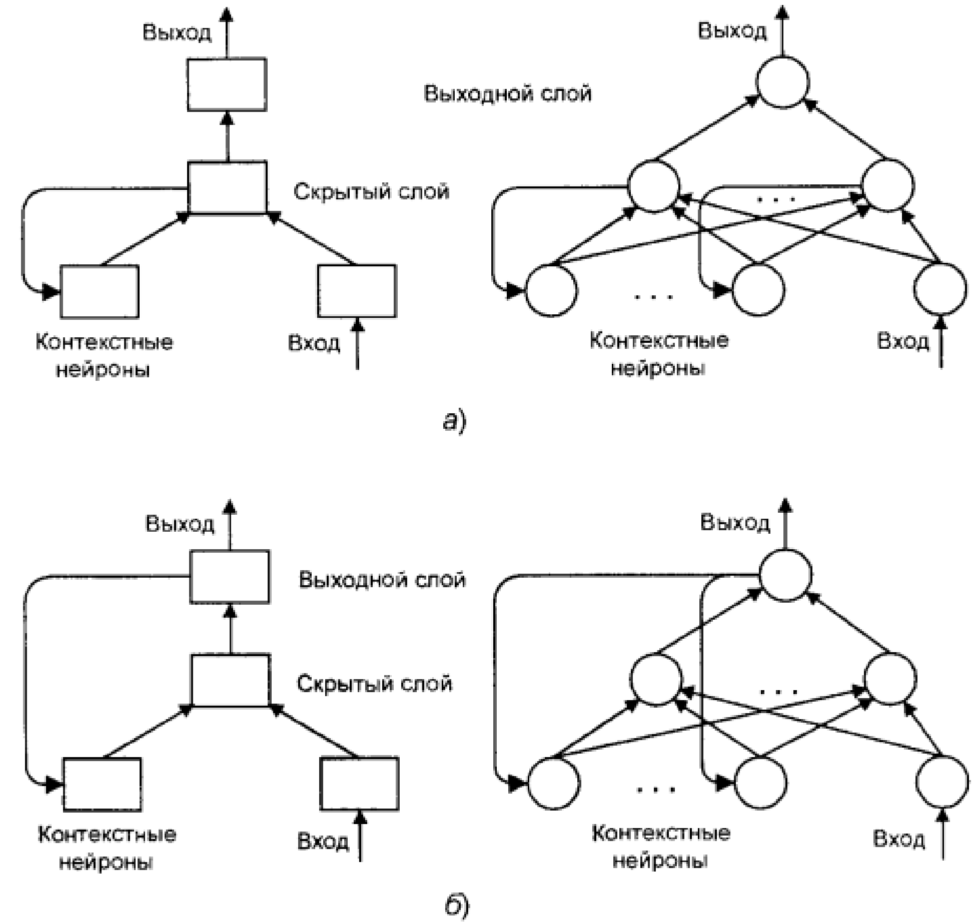

Рисунок 2.27– Частково-рекурентні мережі
а - Елмана, б –Джордана

У слабозв'язаних нейронних мережах нейрони розташовуються у вузлах прямокутної або гексагональної решітки Кожен нейрон пов'язаний з чотирма (околиця фон Неймана), шістьма (околиця Голея) або вісьмома (околиця Мура) своїми найближчими сусідами.

Відомі нейронні мережі можна розділити за типами структур нейронів на гомогенні (однорідні) і гетерогенні. Гомогенні мережі складаються з нейронів одного типу з єдиною функцією активації, а в гетерогенну мережу входять нейрони з різними функціями активації.

Існують бінарні і аналогові мережі. Перші з них оперують тільки двійковими сигналами, і вихід кожного нейрона може приймати значення або логічного нуля (загальмований стан) або логічної одиниці (збуджений стан).

Ще одна класифікація ділить нейронні мережі на синхронні і асинхронні. У першому випадку в кожен момент часу лише один нейрон змінює свій стан, у другому - стан змінюється відразу у цілої групи нейронів, як правило, у всього шару. Алгоритмічно хід часу в нейронних мережах задається ітераційним виконанням однотипних дій над нейронами Далі будуть розглядатися тільки синхронні мережі

Мережі можна класифікувати також за кількістю шарів. Теоретично число шарів і число нейронів в кожному шарі може бути довільним, однак фактично воно обмежене ресурсами комп'ютера або спеціалізованих мікросхем, на яких зазвичай реалізується нейронна мережа. Чим складніше мережу, тим складніші завдання вона може вирішувати.

Вибір структури нейронної мережі здійснюється відповідно до особливостей і складністю завдання. Для вирішення окремих типів завдань вже існують оптимальні конфігурації, описані в додатку. Якщо ж завдання не може бути зведена до жодного з відомих типів, доводиться вирішувати складну проблему синтезу нової конфігурації. При цьому необхідно керуватися такими основними правилами:

• можливості мережі зростають зі збільшенням числа нейронів мережі, щільності зв'язків між ними і числом шарів;

• введення зворотних зв'язків поряд зі збільшенням можливостей мережі піднімає питання про динамічну стійкість мережі;

• складність алгоритмів функціонування мережі, введення декількох типів синапсів сприяє посиленню потужності нейронної мережі.

Питання про необхідні і достатні властивості мережі для вирішення завдань того чи іншого роду є цілим напрямом нейрокомп'ютерної науки. Так як проблема синтезу нейронної мережі сильно залежить від розв'язуваної задачі, дати загальні докладні рекомендації важко. В більшості випадків оптимальний варіант виходить на основі інтуїтивного підбору, хоча в літературі наведено докази того, що для будь-якого алгоритму існує нейронна мережа, яка може його реалізувати.

Персептрони Розенблатта

Однією з перших штучних мереж, здатних до перцепції (сприйняття) і формування реакції на сприйнятий стимул, з'явився PERCEPTRON Розенблатта (F.Rosenblatt, 1957). Персептрон розглядався його автором не як конкретний технічно обчислювальний пристрій, а як модель роботи мозку. Потрібно зауважити, що після кількох десятиліть досліджень сучасні роботи по штучних нейронних мереж рідко переслідують таку мету.

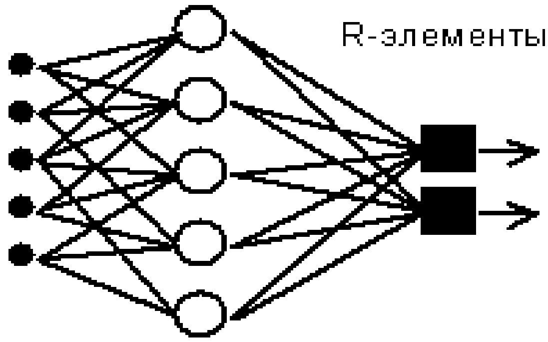

Рисунок 2.28– Елементарний персептрон Розенблатта

Найпростіший класичний персептрон містить нейроподібні елементи трьох типів (див. Рис. 2.28), призначення яких в цілому відповідає нейронам рефлекторної нейронної мережі, розглянутої в попередній лекції. S-елементи формують сітківку сенсорних клітин, що беруть виконавчі сигнали від зовнішнього світу. Далі сигнали надходять в шар асоціативних або А-елементів (для спрощення зображення частина зв'язків від вхідних S-клітин до А-клітинам не відображено). Тільки асоціативні елементи, що представляють собою формальні нейрони, виконують нелінійну обробку інформації і мають змінювані ваги зв'язків. R-елементи з фіксованими вагами формують сигнал реакції персептрона на вхідний стимул.

Розенблатт називав таку нейронну мережу тришаровою, однак за сучасною термінологією представлена мережа зазвичай називається одношаровою, так як має тільки один шар нейропроцесорних елементів. Одношаровий персептрон характеризується матрицею синаптичних зв'язків W від S- до А-елементів. Елемент матриці відповідає зв'язку, що веде від i-го S-елемента до j-го А-елемента.

У Корнельській авіаційної лабораторії була розроблена електротехнічна модель персептронаMARK-1, яка містила 8 вихідних R-елементів та 512 А-елементів, які можна було з'єднувати в різних комбінаціях. На цьому персептрони була проведена серія експериментів з розпізнавання букв алфавіту і геометричних образів.

У роботах Розенблатта був зроблений висновок про те, що нейронна мережа розглянутої архітектури буде здатна до відтворення будь-якої логічної функції, однак, як було показано пізніше М. Минская і С. Пейпертом (M.Minsky, S.Papert, 1969), цей висновок виявився неточним. Були виявлені принципові непереборні обмеження одношарових персептронов, і в подальшому став в основному розглядатися багатошаровий варіант персептрона, в якому є кілька шарів процесорних елементів.

З сьогоднішніх позицій одношаровий персептрон представляє швидше історичний інтерес, однак на його прикладі можуть бути вивчені основні поняття і прості алгоритми навчання нейронних мереж.

Архітектура нейронних мереж

Структура нейронних мереж тісно пов'язана з використовуваними алгоритмами навчання. Класифікація алгоритмів навчання буде приведена в наступному розділі, а питання їх побудови будуть вивчені в наступних розділах. В даному розділі ми зосередимо увагу на архітектурі мереж (структурах).

У загальному випадку можна виділити три фундаментальні класи нейромережевих архітектур.

Одношарові мережі прямого поширення

У багатошаровій нейронної мережі нейрони розташовуються по шару. У найпростішому випадку в такій мережі існує вхідний шар (inputlayer) вузлів джерела, інформація від якого передається на вихідний шар (outputlayer) нейронів (обчислювальні вузли), але не навпаки. Така мережа називається мережею прямого поширення (феедфорвард) або ациклічності мережею (acyclic). На рис. 2.29 показана структура такої мережі для випадку чотирьох вузлів в кожному з шарів (вхідному і вихідному). Така нейронна мережа називається одношаровою (single-layernetwork), при цьому під єдиним шаром мається на увазі шар обчислювальних елементів (нейронів). При підрахунку числа шарів ми не беремо до уваги вузли джерела, тому що вони не виконують ніяких обчислень.

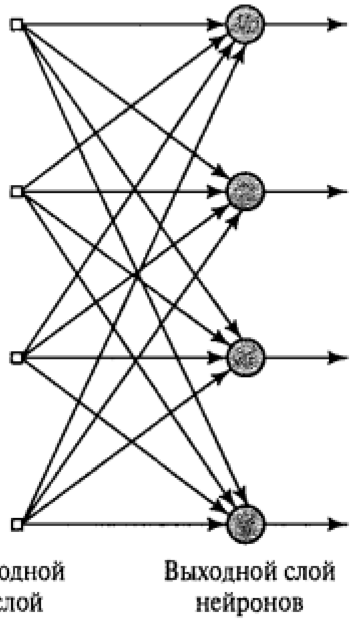

Рисунок 2.28–Мережа прямогопоширення з одним шаром шар нейронів

Багатошарові мережі прямого поширення

Інший клас нейронних мереж прямого поширення характеризується наявністю одного або декількох прихованих шарів (hiddenlayer), вузли яких називаються прихованими нейронами (hiddenneuron), або прихованими елементами (hiddenunit). Функція останніх полягає в посередництві між зовнішнім вхідним сигналом і виходом нейронної мережі. Додаючи один або кілька прихованих шарів, ми можемо виділити статистики високого порядку. Така мережа дозволяє виділяти глобальні властивості даних за допомогою локальних з'єднань за рахунок наявності додаткових синоптичних зв'язків і підвищення рівня взаємодії нейронів. Здатність прихованих нейронів виділяти статистичні залежності високого порядку особливо істотна, коли розмір вхідного шару досить великий.

Вузли джерела вхідного шару мережі формують відповідні елементи шаблону активації (вхідний вектор), які складають вхідний сигнал, що надходить на нейрони (обчислювальні елементи) другого шару (тобто першого прихованого шару). Вихідні сигнали другого шару використовуються в якості вхідних для третього шару і т.д. Зазвичай нейрони кожного з шарів мережі використовують в якості вхідних сигналів вихідні сигнали нейронів тільки попереднього шару. Набір вихідних сигналів нейронів вихідного (останнього) шару мережі визначає загальний відгук мережі на даний вхідний образ, сформований вузлами джерела вхідного (першого) шару. Мережа, показана на рис. 2.29, називається мережею 10-4-2, так як вона має 10 вхідних, 4 прихованих і 2 вихідних нейрона. У загальному випадку мережа прямого поширення з т входами, hi нейронами першого прихованого шару, h2 нейронами другого прихованого шару і q нейронами вихідного шару називається мережею т - hi - h2 - q.

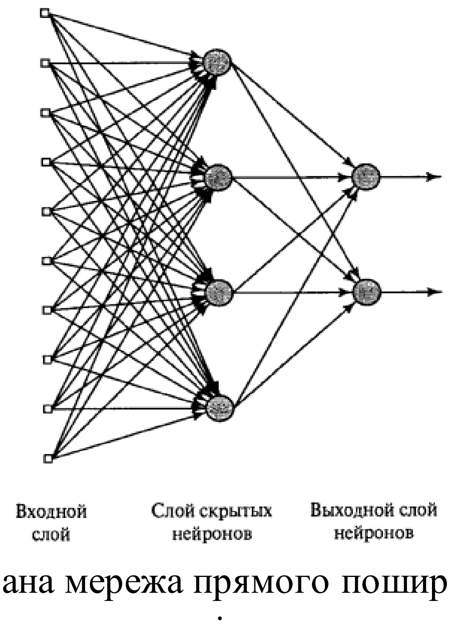

Рисунок 2.29 –Повнозв'язана мережа прямого поширення з одним прихованим і одним вихідним шаром

Нейронна мережа, показана на рис. 2.29, вважається повною (fullyconnected) в тому сенсі, що всі вузли кожного конкретного шару з'єднані з усіма вузлами суміжних шарів. Якщо деякі з синаптичних зв'язків відсутні, така мережа називається неповнозв'язаною (partiallyconnected).

Рекурентні мережі

Рекурентна нейронна мережа (recurrentnetwork) відрізняється від мережі прямого поширення наявністю принаймні одного зворотного зв'язку (feedbackloop). Наприклад, рекурентна мережа може складатися з єдиного шару нейронів, кожен з яких спрямовує свій вихідний сигнал на входи всіх інших нейронів шару.

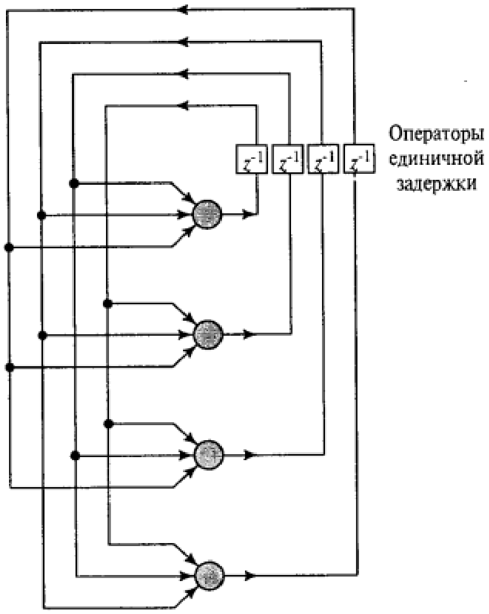

Рисунок 2.30 –Рекурентна мережу без прихованих нейронів і зворотних зв'язків нейронів з самими собою

Архітектура такої нейронної мережі показана на рис. 2.30. Зверніть увагу, що в наведеній структурі відсутні зворотні зв'язки нейронів з самими собою. Рекурентна мережу, показана на рис. 2.30, не має прихованих нейронів. На рис. 2.31 показаний інший клас рекурентних мереж - з прихованими нейронами. Тут зворотні зв'язки виходять як з прихованих, так і з вихідних нейронів.

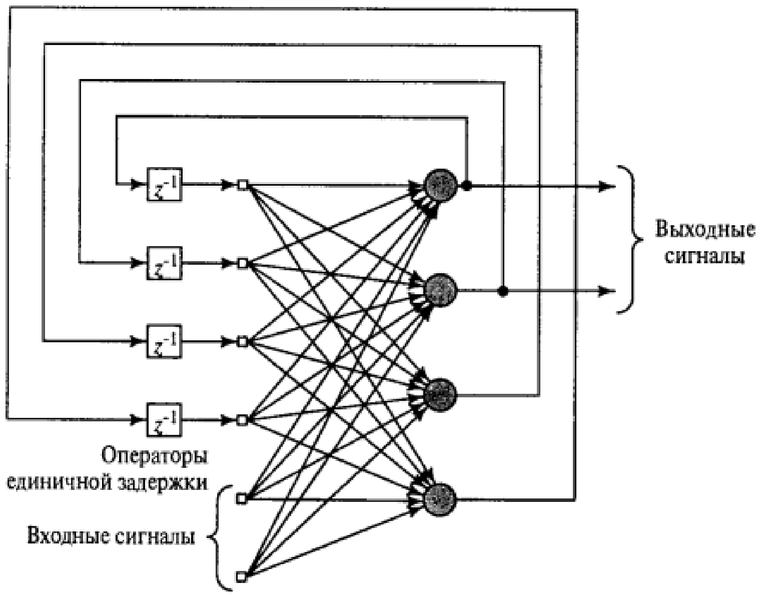

Рисунок 2.31 –Рекурентна мережа зі скритими нейронами

Наявність зворотного зв'язку в мережах, показаних на рис. 2.30 і 2.31, безпосередньо впливає на здатність таких мереж до навчання і на їх продуктивність. Більш того, зворотний зв'язок має на увазі використання елементів одиничної затримки (unit-delayelement) (вони позначені як z ~ l), що призводить до нелінійного динамічного поведінки, якщо, звичайно, в мережі містяться нелінійні нейрони.

3.2 Процеси навчання нейронних мереж. Використання нейронних мереж для вирішення нечітких задач

Найважливішою властивістю нейронних мереж є їх здатність навчатися (learn) на основі даних навколишнього середовища і в результаті навчання підвищувати свою продуктивність. Підвищення продуктивності відбувається з часом відповідно до певних правил. Навчання нейронної мережі відбувається за допомогою інтерактивного процесу коригування синоптичних ваг і порогів. В ідеальному випадку нейронна мережа отримує знання про навколишнє середовище на кожній ітерації процесу навчання.

З поняттям навчання асоціюється досить багато видів діяльності, тому складно надати цьому процесу однозначне визначення. Більш того, процес навчання залежить від точки зору на нього. Саме це робить практично неможливим появу будь-якого точного визначення цього поняття. Наприклад, процес навчання з точки зору психолога докорінно відрізняється від навчання з точки зору шкільного вчителя.

Навчання – це процес, в якому вільні параметри нейронної мережі настроюються за допомогою моделювання середовища, в яку ця мережа вбудована. Тип навчання визначається способом підстроювання цих параметрів.

Це визначення процесу навчання передбачає наступну послідовність подій.

Вищевказаний список чітких правил вирішення проблеми навчання називається алгоритмом навчання (learning algorithm). Нескладно здогадатися, що не існує універсального алгоритму навчання, відповідного для всіх архітектур нейронних мереж. Існує лише набір засобів, представлений безліччю алгоритмів навчання, кожен з яких має свої переваги. Алгоритми навчання відрізняються один від одного способом налаштування синоптичних ваг нейронів. Ще однією відмінною характеристикою є спосіб зв'язку навченою нейромережі із зовнішнім світом. У цьому контексті говорять про парадигму навчання (learning paradigm), пов'язаної з моделлю навколишнього середовища, в якому функціонує ця нейронна мережа

3.3 Класичний генетичний алгоритм. Функція пристосованості. Відбір, схрещування, мутація

Природний відбір в природі

Відповідно до еволюційної теорії кожен біологічний вид цілеспрямовано розвивається і змінюється для того, щоб найкращим чином пристосуватися до навколишнього середовища. Еволюція в цьому сенсі являє процес оптимізації всіх живих організмів. Природа вирішує цю задачу оптимізації шляхом природного відбору. Його суть полягає в тому, що більш пристосовані особини мають більше можливостей для виживання і розмноження і, отже, приносять більше потомства, ніж погано пристосовані особини. При цьому завдяки передачі генетичної інформації (генетичному спадкуванню) нащадки успадковують від батьків основні їх якості. Таким чином, нащадки сильних особин також будуть відносно добре пристосованими, а їх частка в загальній масі особин зростатиме. Після зміни кількох десятків або сотень поколінь середня пристосованість особин цього виду помітно зростає.

Дамо коротку довідку про те, як влаштовані механізми генетичного успадкування. У кожній клітині будь-якої тварини міститься вся генетична інформація даної особини. Ця інформація записана у вигляді набору молекул ДНК, кожна з яких представляє собою ланцюжок, що складається з молекул нуклеотидів чотирьох типів, які охоплюють A, T, C і G. Власне інформацію несе порядок проходження нуклеотидів в ДНК. Таким чином, генетичний код особини - це довга рядок, де використовуються лише 4 символи. У тваринній клітині кожна молекула ДНК оточена оболонкою, таке утворення називається хромосомою.

Кожне вроджена якість особини (колір очей, спадкові хвороби, тип волосся і т. Д) кодується певної частини хромосоми, яка називається геном цього властивості. Наприклад, ген кольору очей містить інформацію, що кодує певний колір очей. Різні значення гена називаються його алелями.

При розмноженні особин відбувається злиття двох батьківських статевих клітин, і їх ДНК взаємодіють, утворюючи ДНК нащадка. Основний спосіб взаємодії – кросовер (схрещування). При кросовері ДНК предків діляться на дві частини, а потім обмінюються своїми половинками.

При успадкування можливі мутації, в результаті яких можуть змінитися деякі гени в статевих клітинах одного з батьків. Змінені гени передаються нащадку і надають йому нові властивості. Якщо ці нові властивості корисні, вони, швидше за все, збережуться в даному виді. При цьому відбудеться стрибкоподібне підвищення пристосованості виду.

<u>Що таке генетичний алгоритм</u>

Нехай дана деяка складна цільова функція, що залежить від декількох змінних, і потрібно вирішити задачу оптимізації, т. Е. Знайти такі значення змінних, при яких значення функції максимально або мінімально.

Це завдання можна вирішити, застосовуючи відомі біологічні еволюційні підходи до оптимізації. Будемо розглядати кожен варіант (набір значень змінних) як особина, а значення цільової функції для цього варіанту - як пристосованість даної особини. Тоді в процесі еволюції пристосованість особин буде зростати, а значить, будуть з'являтися все більше v більш оптимальні варіанти. Зупинивши еволюцію в певний початок і обравши найкращий варіант, можна отримати досить хороше вирішення завдання.

Генетичний алгоритм (ГА) – це послідовність керуючих дій та операцій, що моделює еволюційні процеси на основі аналогів механізмів генетичного успадкування і природного відбору. При цьому зберігається біологічна термінологія в спрощеному вигляді.

Хромосома – вектор (послідовність) з нулів і одиниць, кожна позиція (біт) якого називається геном.

Особина (індивідуум) = генетичний код - набір хромосом = варіант вирішення завдання.

Кросовер – операція, при якій дві хромосоми обмінюються своїми частинами.

Мутація – випадкова зміна однієї або декількох позицій у хромосомі.

Генетичні алгоритми являють собою скоріше підхід, ніж єдині алгоритми. Вони вимагають змістовного наповнення для вирішення кожного конкретного завдання.

На рис. 3.20 показаний один з варіантів структури генетичного алгоритму. Спочатку генерується випадкова популяція - декілька особин з випадковим набором хромосом (числових векторів). Генетичний алгоритм імітує еволюцію цієї популяції як циклічний процес схрещування особин, мутації і зміни поколінь (відбору).

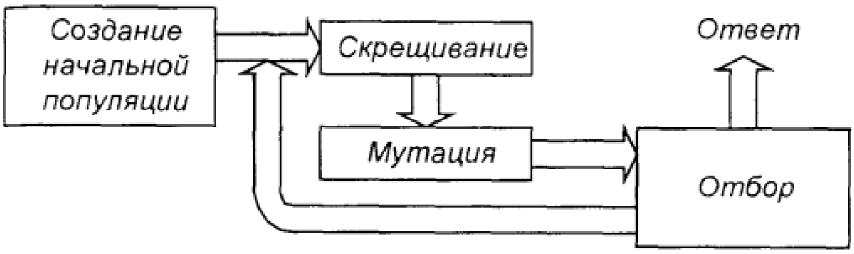

Рисунок 2.32 –Варіант структури генетичного алгоритму

Протягом життєвого циклу популяції, т. Е. В результаті декількох випадкових схрещувань (у вигляді кроссоверу) і мутацій, до неї додається якась кількість нових варіантів. Далі відбувається відбір, в результаті якого зі старої популяції формується нова, після чого стара популяція гине. Після відбору до нової популяції знову застосовуються операції кросовера і мутації, потім знову відбувається відбір, і так далі.

Відбір в генетичному алгоритмі тісно пов'язаний з принципами природного відбору наступним чином:

• пристосованість особини відповідає значенню цільової функції на заданому варіанті;

• виживання найбільш пристосованих особин відповідає тому, що популяція наступного покоління варіантів формується з урахуванням цільової функції. Чим пристосовані особини, тим більша ймовірність її участі в кросовері, т. Е в розмноженні.

Таким чином, модель відбору визначає, як слід будувати популяцію наступного покоління. Як правило, ймовірність участі особини в схрещуванні береться пропорційної її пристосованості. Часто використовується так звана стратегія елітизму, при якій кілька кращих особин переходять в наступне покоління без змін, не беручи участь в кросовері і відборі. У будь-якому випадку кожне наступне покоління буде в середньому краще від попереднього. Коли пристосованість особин перестає помітно збільшуватися, процес зупиняють і як рішення задачі оптимізації беруть найкращий зі знайдених варіантів.

Навчання нечітких нейронних мереж на основі генетичних алгоритмів

Однією з найбільш затребуваних областей застосування генетичних алгоритмів є завдання навчання нейронних мереж, в тому числі і нечітких, шляхом підбору адекватних параметрів. Спільними етапами такого навчання є наступні:

КРОК 1. Виділення керуючих параметрів завдання навчання.

КРОК 2. Отримання рішення при фіксованих значеннях параметрів.

КРОК 3. Визначення неузгодженості отриманого і необхідного рішень.

КРОК 4. Вибір нових значень параметрів на основі роботи генетичного алгоритму.

КРОК 5. Зупинка в разі отримання задовільної неузгодженості рішення, інакше - перехід до кроку 2.

В якості керуючих параметрів навчання нечітких нейронних мереж, що впливають на якість рішення, можуть бути обрані параметри функцій приналежності, а також різна формалізація логічних правил.

Особливості генетичних алгоритмів

Генетичні алгоритми - не єдиний спосіб вирішення завдань оптимізації. Крім нього існують два основних підходи для вирішення таких завдань - переборний і локально-градієнтний, кожен з яких має свої переваги і недоліки.

Порівняємо стандартні підходи з генетичними алгоритмами на прикладі завдання комівояжера (TSP–Travelling Sales man Problem), суть якої полягає в знаходженні найкоротшого замкнутого шляху обходу міст, заданих своїми координатами.

Вже для 30 міст пошук оптимального шляху являє собою складну задачу, що спонукала розвиток нових методів (в тому числі нейронних мереж і генетичних алгоритмів).

Кожен варіант рішення (для 30 міст) - це числова рядок, де на у-і місці стоїть номер у-го по порядку обходу міста. Таким чином, в цьому завданні 30 параметрів, причому, не всі комбінації значень допустимі.

Переборний метод найбільш простий в програмуванні. Для пошуку оптимального рішення (максимуму цільової функції) потрібно послідовно обчислити значення цільової функції у всіх можливих точках, запам'ятовуючи максимальне з них. Недоліком методу є велика обчислювальна складність: потрібно прорахувати довжини понад Ю30 варіантів шляхів, що абсолютно нереально. Однак, якщо перебір всіх варіантів за розумний час можливий, то знайдене рішення є оптимальним.

Другий підхід заснований на методі градієнтного спуску. Спочатку вибираються деякі випадкові значення параметрів, а потім ці значення поступово змінюють, домагаючись найбільшої швидкості росту цільової функції. При досягненні локального максимуму такий метод зупиняється, тому для пошуку глобального оптимуму потрібні додаткові заходи.

Градієнтні методи працюють швидко, але не гарантують оптимальності знайденого рішення. Вони ідеальні для застосування в так званих унімодальних завданнях, де цільова функція має єдиний локальний максимум (він же - глобальний). Однак завдання комівояжера таким не є.

Практичні завдання, як правило, мультимодальні та багатовимірні, т. Е. Містять багато параметрів. Для них не існує універсальних методів, що дозволяють досить швидко знайти абсолютно точні рішення. Комбінуючи переборний і градієнтний методи, можна отримати наближені рішення, точність яких буде зростати зі збільшенням часу розрахунку.

Генетичний алгоритм являє собою саме такий комбінований метод. Механізми схрещування і мутації в якомусь сенсі реалізують переборну частина методу, а відбір кращих рішень - градієнтний спуск. На рис. 2.33 показано, що таке поєднання забезпечує стійко хорошу ефективність генетичного пошуку для будь-яких типів оптимізаційних задач.

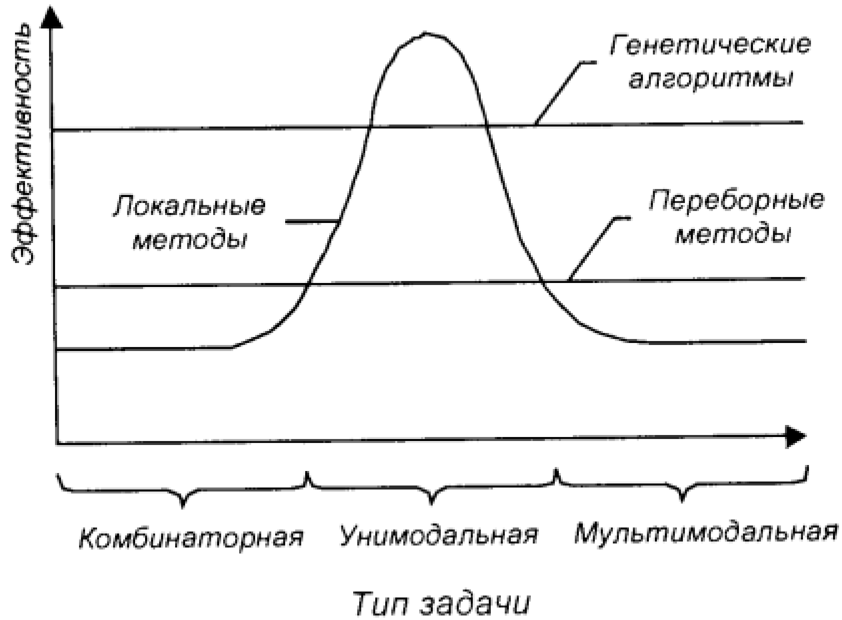

Рисунок 2.33 – Ефективність генетичних алгоритмів

Таким чином, якщо на деякій множині задана складна функція від декількох змінних, то генетичний алгоритм за розумний час знаходить значення функції достатню близьке до оптимального. Ставлячи час розрахунку, можна отримати одне з кращих рішень, які реально отримати за цей час.

4 Нечіткі моделі та нечітке програмування

4.1 Нечіткі моделі очікуваного значення

Приймемо, що x - вектор рішень, ξ - деякий нечіткий вектор, $f(x,\xi)$ - функція доходу, а g_j (x, ξ) - функції-обмеження, j = 1,2, ..., p. Проаналізуємо таку задачу «нечіткого програмування»:

(2.9.1)
$$\begin{cases} \max f(x,\xi) \\ \text{при ограничениях:} \\ \quad g_j(x,\xi) \leqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,p. \end{cases}$$

Аналогічно тому, як це має місце в стохастичному програмуванні, дана модель не є цілком певною внаслідок того, що (i) не можна максимізувати нечітку функцію доходу $f(x,\xi)$ (точно так само, як не можна максимізувати випадкову функцію доходу), і (ii) обмеження g_j (x, ξ) ≤0, y = 1,2…,p, не породжують будь-якої чіткої (crisp) безлічі можливих значень.

На жаль, завдання нечіткого програмування подібного виду часто зустрічається в літературі. Нечітке програмування являє собою один з класів математичних моделей. Незалежно від смаків і від того, яким чином отримана модель, розуміння однієї і тієї ж моделі у всіх має бути одним і тим же. Іншими словами, деяка розглянута математична модель повинна мати ту чи іншу недвозначну, точно виражену трактування. Запис у формі (2.9.1) не має математичного сенсу, оскільки не має єдиної інтерпретації.

<u>Загальні моделі</u>

Щоб отримати рішення, що забезпечує максимум очікуваного значення доходу, можна скористатися наступною однокритерійною нечіткою EVM-моделлю

$$\begin{cases} \max E[f(x,\xi)] \\ \text{при ограничениях:} \\ \quad E[g_j(x,\xi)] \leqslant 0, \quad j = 1,2,\ldots,p, \end{cases}$$
2.9.2.

де x -певний вектор рішень, ξ - деякий нечіткий вектор, $f(x,\xi)$ - функція доходу, а g_j (x, ξ) - функції-обмеження, j = 1,2, ..., p.

У ряді випадків доводиться мати справу з набором функцій доходу (критеріїв). Відповідно, в такому випадку має місце задача багатокритеріального програмування з нечітким очікуваним значенням:

$$\begin{cases} \max\ [E[f_1(x,\xi)], E[f_2(x,\xi)], \ldots, E[f_m(x,\xi)]] \\ \text{при ограничениях:} \\ \quad E[g_j(x,\xi)] \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \end{cases} \qquad 2.9.3$$

де $f(x,\xi)$ – функція доходу, $i = 1, 2, \ldots m$.

Для того щоб забезпечити отримання компромісного рішення при багатьох конфліктуючих показниках, можна ввести наступну модель цільового програмування з нечіткими очікуваними значеннями:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{l} P_j \sum_{i=1}^{m} (u_{ij} d_i^+ + v_{ij} d_i^-) \\ \text{при ограничениях:} \\ \quad E[f_i(x,\xi)] + d_i^- - d_i^+ = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ \quad E[g_j(x,\xi)] \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \\ \quad d_i^+, d_i^- \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases} \qquad 2.9.4$$

Де P_j- задані певним чином коефіцієнти переважного пріоритету, що виражають відносну важливість різних цілей, $P_j >> P_{j+1}$, для всіх j; u_{ij} - вагові коефіцієнти, що відповідають позитивному відхиленню для мети i з приписаним їй пріоритетом j; v_{ij} -вагові коефіцієнти, що відповідають негативному відхиленню для мети i з приписаним їй пріоритетом j; d^+_i - позитивне відхилення від призначеного рівня i-ї мети, що визначається як

$$d_i^+ = [E[f_i(x,\xi)] - b_i] \vee 0, \qquad 2.9.5$$

d^{-}_i - негативне відхилення від призначеного рівня i-ї мети, що визначається як:

$$d_i^- = [b_i - E[f_i(x,\xi)]] \vee 0, \qquad 2.9.6$$

f_i – деяка функція в цільових обмеженнях; g_j - деяка функція в реальних обмеженнях; b_i - призначений рівень, що відповідає i-й мети; l - число пріоритетів; m - число цільових обмежень; p - число реальних обмежень.

Гібридний алгоритм

Для того щоб вирішувати завдання з використанням EVM-моделі, потрібно підготувати безліч вхід-вихідних даних для E[f (x, ξ)]. Потім для апроксимації невизначеною функції E[f (x, ξ)]проводиться навчання нейронної мережі. Навчена мережа вбудовується в генетичний алгоритм, що призводить до отримання потужного гібридного алгоритму, основні кроки якого можуть бути описані в такий спосіб.

<u>Гібридний алгоритм</u>

Крок 1. Для функцій, що містять невизначеність, сформувати навчальний набір пар «вхід-вихід» виду

$$\boldsymbol{U}: \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{E}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})]$$

з використанням нечіткого моделювання.

Крок 2. Провести з використанням отриманого набору даних навчання нейронної мережі, яка буде апроксимувати функції, що містять невизначеність.

Крок 3. Ініціалізувати pop_size хромосом, допустимість яких може бути перевірена з використанням навченої нейронної мережі.

Крок 4. Модифікувати хромосоми за допомогою операцій кросинговеру і мутації, за допомогою навченої нейронної мережі перевірити допустимість нащадків.

Крок 5. Розрахувати цільові значення для всіх хромосом, використовуючи навчену нейронну мережу.

Крок 6. Обчислити пристосованість кожної з хромосом за допомогою функції оцінки, заснованої на ранжируванні, використовуючи знайдені цільові значення.

Крок 7. Провести селекцію хромосом, використовуючи випадковий вибір.

Крок 8. Повторити кроки з четвертого по сьомий заданий число раз.

Крок 9. Видати найкращу з хромосом в якості оптимального рішення.

Розглянемо тепер кілька чисельних прикладів, щоб проілюструвати процедуру отримання рішення з використанням моделі очікуваних значень і гібридного алгоритму.

Розглянемо тепер кілька чисельних прикладів, щоб проілюструвати процедуру отримання рішення з використанням моделі очікуваних значень і гібридного алгоритму.

Приклад 9.1. Розглянемо спочатку наступну EVM-модель:

$$\begin{cases} \max E\left[\sqrt{|x_1 - \xi_1| + |x_2 - \xi_2| + |x_3 - \xi_3|}\right] \\ \text{при ограничениях:} \\ \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 10, \end{cases}$$

де ξ_1, ξ_2 і ξ_3 - трикутні нечіткі величини (1,2,3), (2,3,4) і (3,4,5), відповідно.

Для того щоб вирішити завдання з використанням цієї моделі, сформуємо спочатку набір вхід-вихідних пар для функції, що містить невизначеність

$$U : x \rightarrow E\left[\sqrt{|x_1 - \xi_1| + |x_2 - \xi_2| + |x_3 - \xi_3|}\right]$$

з використанням нечіткого імітаційного моделювання. Потім проведемо навчання нейронної мережі (3 нейрона у вхідному шарі, 5 нейронів в прихованому шарі, 1 нейрон у вихідному шарі), щоб апроксимувати функцію U(x).

Після цього, навчена мережа вбудовується в генетичний алгоритм, щоб отримати необхідний гібридний алгоритм.

Запуск даного гібридного алгоритму (6000 циклів процесу імітаційного моделювання, 2000 пар даних в навчальному наборі для нейронної мережі, 1000 поколінь в генетичному алгоритмі) призводить до оптимального рішення виду

$X^*_1 = -1.7809$, $X^*_2 = -1.8632$, $X^*_3 = -1.8322$,

для якого значення цільової функції дорівнює 3.77.

Приклад 2. Розглянемо наступну задачу цільового програмування на основі EVM-моделі:

$$\begin{cases} \operatorname{lexmin}\{d_1^-, d_2^-, d_3^-\} \\ \text{при ограничениях:} \\ \quad E[|x_1 - \xi_1|] + d_1^- - d_1^+ = 3, \\ \quad E[|x_2 - \xi_2|] + d_2^- - d_2^+ = 2, \\ \quad E[|x_3 - \xi_3|] + d_3^- - d_3^+ = 6, \\ \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 10, \\ \quad d_i^+, d_i^- \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

де ξ_1, ξ_2 і ξ_3 - трикутні нечіткі величини (0,1,2), (1,2,3) і (2,3,4), відповідно.

Використовуємо спочатку нечітке моделювання для того, щоб сформувати набір вхід-вихідних пар (навчальний набір) для невизначеною функції U: x $\rightarrow$\{U_1(x), U_2(x), U3(x)), де

$$U_1(x) = E[|x_1 - \xi_1|], \quad U_2(x) = E[|x_2 - \xi_2|], \quad U_3(x) = E[|x_3 - \xi_3|].$$

Тоді відхилення обчислюються слідуючим чином:

$$d_1^- = [3 - U_1(x)] \vee 0, \quad d_2^- = [2 - U_2(x)] \vee 0, \quad d_3^- = [6 - U_3(x)] \vee 0.$$

Навчимо нейронну мережу (3 нейрона у вхідному шарі, 10 нейронів в прихованому шарі, 3 нейрона у вихідному шарі) для апроксимації функції U. Потім вбудуємо навчену мережу в генетичний алгоритм і отримаємо опцію гібридного алгоритму.

Запуск цього гібридного алгоритму (5000 циклів процесу імітаційного моделювання, 2000 пар даних для навчання нейронної мережі 1000 поколінь в генетичному алгоритмі) призводить до оптимального рішення виду

$$x^*_1 = -2.0073, x^*_2 = -0.0965, x^*_3 = -2.4416,$$

яке задовольняє першим двом цілям, але відхилення для третьої мети становить 0.57.

4.2 Оптимізація резервування

Хоча для вирішення завдань оптимізації резервування з успіхом використовуються методи стохастичного програмування, є багато завдань, при вирішенні яких доводиться залучати судження суб'єктивного характеру через відсутність необхідних об'єктивних даних, або через крайню складності даної системи. Ця обставина спонукає до спроб застосування моделей нечіткого програмування для вирішення задач оптимізації резервування, в яких час життя елементів системи трактується через нечіткі величини.

Розглянемо чотириступінчасту систему, показану на рис.

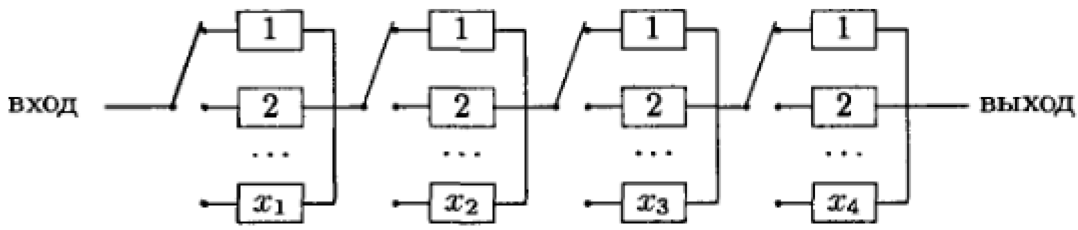

Рисунок 2.34 - Чотириступінчаста система

Припустимо, що для кожного з компонентів системи існує єдиний тип елемента. Приймемо також, що час напрацювання 4 типів елементів описується трапецеїдальними нечіткими величинами (100,108,112,120), (158,164,168,173), (165,172,177,185), (150,160,165,178). Вектор рішень тут - $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, де x_iпозначають номери i-х обраних елементів, i =1,2,3,4, відповідно.

Якщо ціни цих 4 типів елементів суть 46, 55, 50 і 60, а повний обсяг доступних коштів становить 400, тоді отримуємо обмеження на вартість виду

$46x_1 + 55x_2 + 50x_3 + 60x_4 \leq 400$.

Будемо вважати, що система виду, показаного на рис. 2.34, працездатна тоді і тільки тоді, коли існує певний шлях, що складається з працездатних елементів, який веде від входу системи до її виходу. Отже, функцію, що описує структуру системи, можна записати у вигляді

$$\Psi(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_2 y_3 y_4,$$

де y_i - стан компонентів і, і = 1,2,3,4, відповідно.

Для такого роду системи, що використовує резервування заміщенням, якщо потрібно максимізувати очікуване напрацювання системи E [T (x, ξ)], має місце наступна EVM-модель:

$$\begin{cases} \max E[T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})] \\ \text{при ограничениях:} \\ \qquad 46x_1 + 55x_2 + 50x_3 + 60x_4 \leqslant 400, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geqslant 1, \ \text{целочисленный вектор.} \end{cases}$$

Щоб отримати рішення за допомогою цієї моделі, сформуємо навчальний набір даних для невизначеною функції

$$U: x \to E\,[T\,(x, \xi)]$$

з використанням нечіткого моделювання. Навчимо тепер нейронну мережу (4 нейрона у вхідному шарі, 12 нейронів в прихованому шарі, 1 нейрон у вихідному шарі) для апроксимації функції U(x). Потім вбудуємо навчену мережу в генетичний алгоритм і отримаємо гібридний алгоритм, відповідний розв'язуваної задачі.

Запуск цього гібридного (15000 циклів процесу імітаційного моделювання, 5000 пар даних ддя навчання нейронної мережі, 300 поколінь в генетичному алгоритмі) призводить до оптимального рішення виду

$$x^* = (2,2,2,1),$$

для якого очікуване значення напрацювання системи складає E [T (x*, ξ)]= 189.7, а загальна вартість дорівнює 362.

4.3 Складання розкладу для паралельно діючих машин

Звернемося знову до задачі планування роботи паралельно діючих машин. Нехай є 10 робіт і 3 машини. Нечіткі величини тривалості виконання робіт і передбачених термінів їх завершення наведені в таблиці.

Таблиця. Нечіткі значення часу виконання і термінів завершення

Работы	Нечеткое время выполнения			Срок завершения
	Машина 1	Машина 2	Машина 3	
1	(10, 11, 12, 13)	(12, 13, 14, 15)	(14, 15, 16, 17)	30
2	(12, 13, 14, 15)	(11, 12, 13, 14)	(12, 13, 14, 15)	150
3	(13, 14, 15, 16)	(12, 13, 14, 15)	(14, 15, 16, 17)	105
4	(20, 21, 22, 23)	(21, 22, 23, 24)	(22, 23, 24, 25)	130
5	(10, 12, 13, 14)	(13, 14, 15, 16)	(10, 12, 13, 14)	90
6	(13, 14, 15, 16)	(14, 15, 16, 17)	(15, 16, 17, 18)	30
7	(10, 11, 12, 13)	(10, 11, 12, 13)	(10, 11, 12, 13)	75
8	(15, 16, 17, 18)	(14, 15, 16, 17)	(13, 14, 15, 16)	45
9	(10, 12, 13, 14)	(10, 11, 12, 14)	(10, 11, 13, 14)	60
10	(10, 11, 12)	(11, 12, 13)	(12, 13, 14)	25

На першому рівні пріоритетів очікуване запізнення E [f_1 (x, y, ξ)] має бути якомога меншим. У зв'язку з цим отримуємо наступне цільове обмеження

$$E[f_1(x, y, \xi)] + d_1^- - d_1^+ = 0,$$

в якому потрібно мінімізувати d^+_1.

На другому пріоритетному рівні очікувана величина часу виконання роботи E[f_2(x, y, ξ)] не повинна перевищувати значення 52, що дає таке цільове обмеження:

$$E[f_2(x, y, \xi)] + d_2^- - d_2^+ = 52,$$

в якому треба мінімізувати d^+_2.

На третьому пріоритетному рівні очікуваний простий E[f3(x, y, £)] не повинен перевищувати заданого значення 5. Звідси випливає цільове обмеження

$$E[f_3(x, y, \xi)] + d_3^- - d_3^+ = 5,$$

в якому повинна мінімізуватися величина d^+_3.

Тоді маємо наступну нечітку модель вирішення задачі складання розкладу роботи для паралельно діючих машин

$$
\begin{cases}
\operatorname{lexmin}\{d_1^+, d_2^+, d_3^+\} \\
\text{при ограничениях:} \\
\qquad E[f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\xi})] + d_1^- - d_1^+ = 0, \\
\qquad E[f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\xi})] + d_2^- - d_2^+ = 52, \\
\qquad E[f_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\xi})] + d_3^+ - d_3^+ = 5, \\
\qquad 1 \leqslant x_i \leqslant 10, \; i = 1, 2, \ldots, 10, \\
\qquad x_i \neq x_j, \; i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, 10, \\
\qquad 0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant 10, \\
\qquad x_i, y_j, \; i = 1, 2, \ldots, 10, \; j = 1, 2, \; \text{целые}, \\
\qquad d_i^+, d_i^- \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{cases}
$$

Виконання гібридного алгоритму (10000 циклів нечіткого імітаційного моделювання, 500 поколінь в генетичному алгоритмі) дає в якості результату наступний оптимальний план:

Машина 1: 10 → 1 → 8 → 9,

Машина 2: 4 → 5 → 7,

Машина 3: 6 → 2 →3,

який може задовольнити першим двом цілям, але значення третього показника дорівнює 1.091.

Література

1. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. – М.: БИНОМ, 2005, – 416 с.
2. Пономарьов О.С. Нечеткие множества в задачах автоматизированного управления и принятия решения: Навчальний посібник. — Харків: НТУ "ХП1", 2005. - 232 с.
3. Дементьев Н.П. Нечеткое управление в технических системах. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005. – 200 с.
4. Блюмин С.Л., Шуйкова И.А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности. – Липецк: ЛЭГИ, 2001. – 138 с.
5. Барский А.Б. Нейронные сети: распознавание, управление, принятие решений. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 176 с.
6. Круглов В.В., Борисов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. – М.: Горячая линия, 2002. – 382 с.
7. Хайкин С. Нейронные сети. – М.: Вильямс, 2006. – 1104с.
8. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия, – Телеком, 2006. – 452с.