

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Перелигін Б.В.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

СПЕКТРАЛЬНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ

ББК 73
П 27
УДК 551.501

*Разрешено использование в учебном процессе в электронном виде по решению
Методического совета ОГЭКУ (протокол № 2 от 26 мая 2011 года)*

Перелыгин Б.В.

Спектральные методы обработки информации: Конспект лекций. – Одесса, 2011. – 111 с.

В конспекте лекций кратко рассмотрены вопросы приближения функций и сигналов и применения рядов и преобразований Фурье для этих целей, рассматриваются вопросы двумерного Фурье-анализа, непрерывного и дискретного вейвлет-анализа, описаны базисные функции вейвлет-преобразования и частотный подход к вейвлет-анализу, изложены основы вейвлет-анализа и методика проведения одномерного и двумерного вейвлет-анализа с помощью систем компьютерной математики.

Конспект лекций предназначен для студентов и магистров, изучающих дисциплину „Спектральные методы обработки информации”.

© Одесский государственный
экологический университет, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Лекция 1. Приближение функций и сигналов.....	4
Лекция 2. Применение рядов и преобразований Фурье для приближения функций и сигналов.....	9
Лекция 3. Фурье – фильтрация.....	14
Лекция 4. Непрерывное вейвлет-преобразование.....	24
Лекция 5. Кратномасштабный анализ и синтез.....	30
Лекция 6. Базисные функции вейвлет-преобразования.....	36
Лекция 7. Частотный подход к вейвлет-анализу.....	45
Лекция 8. Основы вейвлет-анализа.....	51
Лекция 9. Одномерный вейвлет-анализ.....	61
Лекция 10. Двумерный вейвлет-анализ.....	81
Литература.....	110
Вопросы для самопроверки.....	111

ЛЕКЦИЯ 1

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ И СИГНАЛОВ

1.1 Понятие о функции и сигнале

Функция – зависимость одной величины, например, f или y , от другой величины – независимой переменной x или t . Функции обозначаются как $f(x)$, $f(t)$, $y(x)$ и т.д. Могут быть функции нескольких переменных, например, вида $f(x, y, z, \dots)$. Временные функции вида $s(t)$, $e(t)$, $f(t)$ и т.д., широко используемые в технике, принято именовать сигналами. Функции или сигналы, заданные в определённые моменты времени, называют **временными рядами**.

Всегда оговаривается, в каком интервале $[a, b]$ задаётся независимая переменная x или t , может ли она принимать в нём все виды численных значений в виде целых, рациональных, вещественных, иррациональных или комплексных чисел; характер зависимости зависимой переменной f или y от независимой переменной – в явном, неявном, итерационном виде или как-то иначе.

Если функция определена на отрезке от $x = a$ до $x = b$, то область определения функции записывается как $x \in [a, b]$, а если $a < x \leq b$, то область определения функции записывается как $x \in (a, b]$.

Определение функций в бесконечном интервале значений независимой переменной от $-\infty$ до $+\infty$ обычно обозначается как \mathbf{R} , т.е. $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, при этом, если x принадлежит \mathbf{R} , то это записывается как $x \in \mathbf{R}$. Функция $\sin(x)$ может являться примером функции, определённой в \mathbf{R} .

В научной и учебной литературе используется понятие носителя функции. **Носителем функции** фактически является её область определения. Если $f(x)$ определена при $x \in [a, b]$ и $f(x) = 0$ при $x < a$ и $x > b$ и при этом $(b - a)$ невелико, то говорят, что функция $f(x)$ имеет компактный носитель. Если $a = -\infty$ или $b = +\infty$ или имеет место и то и другое, то функция компактного носителя не имеет. Это понятие связано с возможностью замены бесконечных пределов интегрирования на конечные в преобразованиях Фурье и вейвлет-преобразованиях, что часто упрощает вычисления и делает математические преобразования корректными исходя из практических соображений.

В теории функций существует понятие множеств или пространств функций. Пространство $L^p[\mathbf{R}]$ означает, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty .$$

Например, для часто используемого гильбертова пространства $L^2[\mathbf{R}]$ условие для функции $f(x)$ выглядит так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty .$$

Существуют и иные пространства, например $L^2[0,2\pi]$, и это значит, что $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Практически можно полагать, что $f(x)$ – любая кусочно-непрерывная функция. Она может быть периодической. На периоде 2π периодической будет функция, удовлетворяющая равенству $f(x) = f(x \pm 2\pi)$. Множество функций из $L^2[0,2\pi]$ называют пространством 2π -периодических функций, интегрируемых с квадратом. Примером такой функции является комплексная синусоида $f(x) = e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$, где $i = \sqrt{-1}$. Она является функцией, периодически продолжаемой на всю вещественную ось x . Но пространству $L^2[\mathbf{R}]$ синусоида не принадлежит, т.к. по условию определения этого пространства следует, что принадлежащие ему функции должны затухать при $x \in \mathbf{R}$. Синусоида таким свойством не обладает.

Если две функции $f(t)$ и $g(t)$ определены в пространстве $L^2[a,b]$, то их **скалярное произведение** обозначается как

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) g^*(t) dt.$$

Знак * над функцией означает комплексное сопряжение для соответствующей функции (иногда это может быть чёрточка $\bar{}$ над именем функции).

Для функции f в пространстве $L^2[\mathbf{R}]$ существует понятие **нормы функции** – $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

В теории сигналов принято считать, что сигналы определены как векторы в некотором пространстве. Этим вектором может быть даже набор чисел, представляющий собой сигнал. **Базисом векторного пространства V** называют множество линейно независимых векторов, таких, что любой вектор из пространства V может быть записан в виде их линейной комбинации. У векторного пространства может быть один базис или много базисов, но число векторов во всех базисах одинаково и это число называется размерностью векторного пространства.

Два вектора v и w называются **ортгоналичными**, если $\langle v, w \rangle = \sum_n v_n w_n^* = 0$, т.е. если их скалярное произведение равно нулю.

Аналогично две функции являются ортгоналичными, если $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) g^*(t) dt = 0$.

Множество векторов называют **ортонормированными**, если все векторы попарно ортгоналичны и имеют единичную длину, что записывается, как $\langle v_m, w_n \rangle = \delta_{m,n}$. Гильбертово пространство всегда имеет ортонормированные базисы и для этого пространства всегда справедливо выражение

$$\|f\|^2 = \int |f(x)|^2 dx = \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2.$$

Аналогично множество функций называют ортонормированными, если $\int_a^b \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = 0, k \neq l$ и $\int_a^b \{\varphi_k(t)\}^2 dt = 1$, или короче $\int_a^b \varphi_k(t) \varphi_l(t) dt = \delta_{k,l}$, где $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, k = l \\ 0, k \neq l \end{cases}$ – функция Кронекера.

В гильбертовом пространстве могут быть и более общие семейства линейно независимых базисных векторов, называемых *базисом Рисса*. Для них действует условие $\alpha \|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \beta \|f\|^2$, где $\alpha > 0, \beta < \infty$. Эти базисы являются безусловными, т.е. в них порядок размещения векторов может быть произвольным. Вейвлеты часто принадлежат к базису Рисса, что облегчает доказательство полной реконструкции сигналов и функций на основе вейвлет-преобразований.

1.2 Задача приближения функций и сигналов

Некоторые формулы, описывающие важные физические явления и математические понятия, очень сложны и могут быть изложены в письменном виде на десятках и сотнях страниц (например, описание траектории полёта космического аппарата).

В связи с этим стоит задача представления сложных функций более простой функцией или набором (рядом) простых функций – *задача приближения функций* или *задача аппроксимации*. При этом желательно, чтобы аппроксимация была как можно более точной и вычислялась за малое время. Поэтому под простотой функции, прежде всего, понимается возможность простого и быстрого её вычисления.

Развитие науки и техники породило много простых по виду специальных математических функций (т.н. интегралов), представляющих решения дифференциальных уравнений определённого вида. Большинство из них вычисляется только в численном виде, и такие вычисления требуют значительных временных затрат. Существует множество таблиц подобных функций, но таблицы дают значение функций для вполне определённых дискретных значений x_i независимой переменной x . Точки, в которых они определены, называют узловыми. Из-за подобного представления функций возникает *задача интерполяции функций*, т.е. задача вычисления значений $f(x)$ в промежутках между узлами x_i . Эта задача тесно связана с *задачей аппроксимации*, поскольку подходящую аппроксимирующую функцию можно использовать для вычисления значений $f(x)$ в промежутках между узлами.

Вычисление функции за пределами узловых точек называется *экстраполяцией*. Экстраполяция возможна как вперёд, так и назад. Экстраполяцию вперёд называют *предсказанием* значений функции.

На практике данные могут иметь погрешности, иногда очень значительные. Сигналы нередко принимаются на фоне мешающих шумов, уровень которых может многократно превосходить уровень полезного сигнала. Поэтому возникает группа задач обработки таких сигналов и функций: *сглаживание данных* и *выделение полезного сигнала из шума*.

Проведение *аппроксимации с одновременной статистической обработкой* данных относят к регрессии или к *задачам регрессионного анализа*. При решении подобных задач широко используется оценка среднеквадратической погрешности для всех точек обрабатываемых данных, а сам метод подобного приближения и анализа функций называется *методом наименьших квадратов*.

Задача приближения произвольных функций и сигналов решалась неоднократно. В процессе её решения были созданы ставшие теперь классическими методы интерполяции, аппроксимации и регрессии (приближение функций рядом Тейлора, интерполяция и экстраполяция функций по Лагранжу, полиномиальная аппроксимация, сплайновая интерполяция, Эрмитова аппроксимация, Чебышевская аппроксимация, линейная регрессия, одномерная и многомерная полиномиальная регрессия, нелинейная регрессия, сглаживание данных и предсказание зависимостей и др.).

Однако описанный выше и хорошо известный аппарат приближения функций страдает рядом ограничений. Он плохо приспособлен для приближения периодических функций и функций с локальными особенностями. Этот аппарат страдает также *отсутствием единообразия и общности в представлении функций* и, особенно, сигналов и изображений.

В значительной мере от этих недостатков свободны *ряды Фурье* и *преобразование Фурье* и основанные на их применении методы приближения функций. С введением в обиход рядов Фурье появилась возможность однообразного представления произвольных (с некоторыми оговорками) функций и сигналов с помощью набора синусоид или, как их называют, гармоник, причём для периодических сигналов гармоника имеют кратные частоты. Оказалось, что эти гармоника являются объективно существующими элементами, они характеризуются спектром (набором) и имеют вполне объяснимое с физической точки зрения толкование. Применение математического аппарата преобразования Фурье позволило создать сложные технические аппараты – анализаторы спектра и синтезаторы сложных сигналов.

Однако продолжительное практическое применение преобразования Фурье показало, что выбор синусоиды для представления функций и сигналов с локальными особенностями (импульсные, цифровые, сигналы изображения) всё же неудачен. Бесконечное число членов в ряде Фурье недопустимо и нереально на практике, а попытка их ограничения приводит к большим погрешностям при проведении Фурье-анализа, а также и Фурье-синтеза. При этом при проведении Фурье-синтеза возникает эффект Гиббса в виде характерных колебательных процессов, отсутствующих у исходных функций, из-за формы частотного окна,

резко ограничивающего число используемых при спектральном синтезе гармоник.

В связи с этим для представления функций были введены в обращение ряды с *иными базовыми функциями* (Уолша, Хаара, Котельникова и др.), но и для них существуют ограничения в применении для тех же видов сигналов.

С середины 1980-х годов в практику были введены *вейвлеты*. Они представляют собой обширный класс функций, график которых имеет вид коротких волн, ограниченных во времени или в пространстве и способных к перемещению и масштабированию. Многие вейвлеты могут представлять абсолютно точно или приближённо произвольные функции, сигналы и изображения. Именно эти свойства и открыли перед ними возможности широкого применения для анализа функций, обработки сигналов и изображений.

ЛЕКЦИЯ 2

ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И СИГНАЛОВ

Кратко рассмотрим особенности рядов и преобразований Фурье с точки зрения их применимости для приближения функций и сигналов.

2.1 Ряды и одномерное преобразование Фурье

Ряды Фурье представляют собой тригонометрические многочлены, построенные на основе периодической базисной функции – синусоиды. Благодаря этому ряды Фурье способны приближать периодические функции без ограничения периодов их изменения. В рядах Фурье используются синусоиды и косинусоиды с кратными частотами, получившие название *гармоник*.

В виде сигнала синусоидальная функция записывается как функция времени t : $s(t) = A \cdot \sin(2\pi ft + \varphi)$, где A – амплитуда синусоиды, $f = 1/T$ – её частота (в Герцах), φ – фазовый сдвиг или фаза (в радианах), T – период одного колебания синусоиды.

Часто используется понятие круговой частоты $\omega = 2\pi f$, тогда синусоида запишется в виде: $s(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

Важнейшими свойствами синусоидальной функции являются её гладкость, периодичность, стационарность, бесконечность и из-за этого не интегрируемость в бесконечных пределах.

В *стационарном случае* параметры синусоиды неизменны и поэтому она никакой информации не несёт. Но поскольку синусоида характеризуется тремя параметрами (амплитудой, частотой и фазой), то для передачи информации их можно изменять во времени по закону передаваемой информации, т.е. модулировать. Это будет амплитудная, частотная и фазовая модуляция, а можно осуществить и комбинированную модуляцию. Однако *изменение во времени* любого *параметра синусоиды* означает, что нарушается условие её стационарности (постоянство амплитуды, частоты и фазы). Поэтому полученное в результате модуляции колебание уже не является синусоидальным и в некоторых случаях появляется возможность интегрировать его в бесконечных пределах.

Если выполнены условия Дирихле для функции $y(x)$ на промежутке $(-\pi, \pi)$ заключающиеся в том, что функция $y(x)$ должна быть непрерывна или иметь конечное число разрывов первого рода и промежуток $(-\pi, \pi)$ может быть разбит на конечное число таких промежутков, на которых функция меняется монотонно, то можно функцию $y(x)$ представить в виде ряда Фурье или, как ещё говорят, разложить в ряд Фурье:

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \right),$$

коэффициенты которого находятся по формулам Эйлера-Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(x) \cos(kx) dx \quad \text{и} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(x) \sin(kx) dx.$$

Часто периодические сигналы представляются функциями времени $y(t)$ на отрезке $[0, T]$ с периодом $T = 1/f_1$, где f_1 – частота первой гармоники. Тогда ряд Фурье будет иметь вид:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi k f_1 t) + b_k \sin(2\pi k f_1 t))$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos(2\pi k f_1 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \sin(2\pi k f_1 t) dt.$$

Также используется форма записи ряда Фурье, упрощающая его синтез:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos(2\pi k f_1 t + \varphi_k),$$

где

$$M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{и} \quad \varphi_k = -\arctan(b_k / a_k).$$

Разложение функции на гармонические составляющие, т.е. вычисление коэффициентов Фурье, называют **спектральным анализом**, а восстановление функции, представленной рядом Фурье, называют **спектральным синтезом** (**спектр** в переводе с греческого – **набор**).

Из приведённых формул видно, что спектр периодических сигналов дискретен – он содержит набор синусоид с фиксированными частотами.

Всё рассмотренное выше касалось периодических функций и сигналов. При анализе и синтезе **непериодических сигналов** переходят к **непрерывному преобразованию Фурье**.

Прямое преобразование Фурье позволяет получить в аналитическом виде функцию частоты $F(\omega)$ от произвольной временной функции $f(t)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Для этого случая спектр $F(\omega)$ становится непрерывным и уже нельзя вести речь об отдельных гармониках, а можно говорить о плотности энергии сигнала в некоторой стремящейся к нулю полосе частот, т.е. о спектральной плотности энергии.

Обратное преобразование Фурье задаётся следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

2.2 Применение рядов и преобразований Фурье для приближения функций и сигналов

Следует отметить, что на практике бесконечный предел суммирования членов ряда неосуществим. Это число всегда ограничено каким-то конечным значением N .

Известны из теории спектрального анализа и синтеза следующие общие закономерности для периодических функций:

- точная реставрация исходной временной функции из её спектра не достигается,
- при увеличении числа гармоник форма восстанавливаемой функции всё ближе к форме исходной функции,
- плавные функции требуют меньшего числа гармоник для удовлетворительного их представления результатами гармонического синтеза,
- при восстановлении функций всегда заметен эффект Гиббса,
- увеличение количества гармоник при восстановлении сигнала не устраняет эффект Гиббса, а лишь повышает частоту колебательных процессов,
- эффект Гиббса особенно сильно проявляется в местах разрыва функций и в точках с явными особенностями,
- из-за эффекта Гиббса интерполяционные возможности рядов Фурье плохие, т.к. точность интерполяции низкая,
- существуют функции, у которых часть фурье-коэффициентов равна нулю.

Из формулы прямого преобразования Фурье проистекает главный его недостаток при обработке сигналов в реальном времени – для получения спектра сигнала необходима интегральная оценка сигнала как в далёком прошлом ($-\infty$), что в принципе возможно, но трудно, так и в далёком будущем (∞), что в принципе невозможно.

Из формулы обратного преобразования Фурье также проистекает главный его недостаток – интегральная оценка всех частотных составляющих спектра вне зависимости от времени их существования. В результате возможны случаи, когда разные сигналы будут иметь одинаковый спектр.

Таким образом, с позиций точного представления преобразованием Фурье произвольных сигналов и функций можно отметить целый ряд его недостатков:

- неприменимость к анализу нестационарных сигналов, у которых определённые частотные компоненты существуют только в определённые промежутки времени или когда параметры сигналов меняются во времени,
- преобразование Фурье даже для одной заданной частоты требует знание сигнала не только в прошлом, но и в будущем, что является теоретической абстракцией,
- в условиях практически неизбежного ограничения числа гармоник или спектра колебаний точное восстановление сигнала после прямого и обратного преобразований Фурье теоретически и практически невозможно из-за наличия эффекта Гиббса,
- базисной функцией при разложении в ряд Фурье является гармоническое колебание, которое математически определено в бесконечном интервале времени и имеет неизменные во времени параметры,
- при численном интегрировании в бесконечных пределах при прямом и обратном преобразовании соответственно во временной и в частотной области возникают значительные вычислительные трудности,
- значительные особенности сигнала в виде разрывов или пиков вызывают незначительные изменения частотного образа сигнала во всём бесконечном интервале частот, которые „размазываются” по всей частотной оси, что делает их обнаружение в спектре практически невозможным,
- даже умозрительно понятно, что плавная синусоидальная базисная функция в принципе не может представлять перепады сигналов с бесконечной крутизной, хотя на практике подобные импульсные сигналы применяются очень широко,
- единственное приспособление к представлению быстрых изменений сигналов – это резкое увеличение числа гармоник, которые, однако, оказывают влияние на форму сигнала и за пределами локальных особенностей сигнала,
- по составу высших гармоник спектра практически невозможно оценить местоположение особенностей на временной зависимости сигнала и их характер,
- для нестационарных сигналов при прямом и обратном преобразовании Фурье существенно увеличивается вычислительная сложность.

Эти проблемы спектрального анализа и синтеза сигналов, ограниченных во времени, частично решаются переходом к т.н. **кратковременному** или **оконному преобразованию Фурье**.

Идея его проста. Временной интервал существования сигнала разбивается на ряд промежутков – временных окон – и в каждом промежутке вычисляется

свое преобразование Фурье.

Аналитически это выглядит следующим образом:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)w(t-b)e^{-i\omega t} dt .$$

В этом выражении величина $w(t-b)$ есть оконная функция, в которой параметр b окна задаёт его сдвиг на временной оси. Для простейшего прямоугольного окна функция $w(t-b)$ в пределах окна имеет значение равное 1, а вне окна равна 0. При этом для каждого окна вычисляется спектр, а набор спектров для всех положений окна даёт спектрограмму в осях время-частота, т.е. осуществляется переход к частотно-временному представлению сигналов, которое является особым разделом техники обработки сигналов. Этим способом осуществляется просмотр всего сигнала. Часто применяют не прямоугольное окно, а окна Гаусса (Фурье-преобразование с окном Гаусса называют *преобразованием Габора*) или иные окна, обеспечивающие малые искажения спектра из-за граничных явлений и уменьшающие проявление эффекта Гиббса.

Если в каком-то окне существовали частотные составляющие некоторого сигнала, то они будут присутствовать в спектре, а если нет – то будут отсутствовать. Поскольку каждое окно охватывает небольшой участок по времени, точность описания локальных изменений сигнала может быть повышена.

Сопоставляя обычное и оконное преобразование Фурье можно прийти к выводу о том, что последнее решило все проблемы с анализом и синтезом функций и сигналов. Но принцип неопределённости Гейзенберга, известный из курса физики, гласит о том, что невозможно одновременно получить высокое временное и частотное разрешение. Выбирая окно с малой шириной по времени, получим высокое временное разрешение и низкое частотное, выбирая окно с большой шириной по времени, получим высокое частотное разрешение и низкое временное. Оконное преобразование Фурье оперирует с окнами одинаковой ширины и потому данное противоречие для него неразрешимо. И, кроме того, в нём по-прежнему используется единственная базисная функция – синусоида – со всеми присущими ей и отмеченными ранее недостатками.

ЛЕКЦИЯ 3 ФУРЬЕ – ФИЛЬТРАЦИЯ

3.1 Двумерное преобразование Фурье

Преобразование Фурье возможно, если все функции, определенные на конечном интервале, являются периодическими в пространственной и частотно-пространственной областях. Периодические повторения, таким образом, должны иметь место как для пространственной функции изображения в направлениях x и y , так и для ее частотного описания вдоль частотных осей u и v . Дополнительным условием является абсолютная суммируемость $f(x, y)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty .$$

Прямое одномерное преобразование Фурье:

$$\widehat{F}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jux} dx ,$$

где $e^{-jux} = \cos ux - j \sin ux$ и $u = 2\pi f_x$.

При преобразовании в частотно-пространственной области вычисляется функция, описываемая с помощью гармонических колебаний с амплитудами, зависящими от частоты (стационарные колебания для случая периодических функций): $\widehat{F}(u) = A(u) - jB(u)$.

Обратное одномерное преобразование Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(u) e^{jux} du .$$

В общем случае эта функция может быть комплексной, но в случае изображения или какого-либо другого физического сигнала она всегда вещественна.

Положив $u = 2\pi f_x$ и $v = 2\pi f_y$, получим выражения соответственно для прямого и обратного двумерного преобразования Фурье:

$$\widehat{F}(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy ,$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(u, v) e^{j(ux+vy)} du dv .$$

При этом существует соответствие $f(x,y) \leftrightarrow \hat{F}(u,v)$.

Эти двумерные преобразования Фурье можно распространить и на дискретный случай, для этого x и y нужно заменить на $m x_A$ и $n y_A$, а интеграл – на сумму. Пределы суммирования при этом $M x_A$ и $N y_A$. Т.к. $f(x,y)$ и $f(m,n)$ периодически повторяются, то, и спектр $\hat{F}(k,l)$ тоже будет периодическим.

Таким образом, прямое двумерное ДПФ запишется в виде:

$$\hat{F}(k,l) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{k m}{M} + \frac{l n}{N} \right) \right],$$

где $0 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$ – индексы в пространственной области,
 $0 \leq k \leq M-1$, $0 \leq l \leq N-1$ – индексы в частотно-пространственной области,
а обратное двумерное ДПФ запишется в виде:

$$f(m,n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{F}(k,l) \exp \left[j2\pi \left(\frac{k m}{M} + \frac{l n}{N} \right) \right].$$

Соответствие также можно обозначить символически $f(m,n) \leftrightarrow \hat{F}(k,l)$.

3.2 Свёртка функций

Одномерная дискретная свертка

Если дискретный входной сигнал является импульсом с площадью, равной 1 в момент $k = 0$ и если вектор-столбец может быть описан как зеркально отраженный вектор-строка, т.е.

$$\{s_e\} = \{\delta_e\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} = (1, 0, 0, \dots)',$$

то выходной сигнал дискретной системы будет ее импульсным откликом:

$$\{h_j\} = (h_0, h_1, h_2, \dots)'$$

Любой произвольный входной сигнал для линейной системы $\{s_{ek}\}$ можно представить как наложение импульсов, смещенных во времени (пространстве) и перемноженных с коэффициентом s_{ek} :

$$(s_{e0}, s_{e1}, s_{e2}, \dots)' = s_{e0} (1, 0, 0, 0, \dots)' + s_{e1} (0, 1, 0, 0, \dots)' + s_{e2} (0, 0, 1, 0, \dots)' + \dots$$

Каждый импульс вызывает свой собственный импульсный отклик, и в результате выходной сигнал можно представить как

$$(s_{a0}, s_{a1}, s_{a2}, \dots)' = s_{e0} (h_0, h_1, h_2, h_3, \dots)' + s_{e1} (0, h_0, h_1, h_2, \dots)' + s_{e2} (0, 0, h_0, h_1, \dots)' + \dots,$$

или в другом виде

$$\begin{aligned} s_{a0} &= s_{e0}h_0; \\ s_{a1} &= s_{e0}h_1 + s_{e1}h_0; \\ s_{a2} &= s_{e0}h_2 + s_{e1}h_1 + s_{e2}h_0; \\ &\dots \end{aligned}$$

или в общем случае,

$$s_{ai} = \sum_{k=0}^i h(i-k)s_{ek} = \sum_{k=0}^i (i-k)h_k$$

где $i, k = 0, 1, 2 \dots$ и $s_e, s_a, t, h=0$ для $i, k < 0$.

В матричной форме свёртка может быть представлена как

$$\{s_{ai}\} = \{h_i\}_{Dr} \{s_{ek}\} = \{s_{ei}\}_{Dr} \{h_k\},$$

или в развёрнутом виде

$$\begin{pmatrix} s_{a0} \\ s_{a1} \\ s_{a2} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_{e0} \\ s_{e1} \\ s_{e2} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{e0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s_{e1} & s_{e0} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ s_{e2} & s_{e1} & s_{e0} & 0 & 0 & \dots \\ s_{e3} & s_{e2} & s_{e1} & s_{e0} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Символически может быть записана как

$$\{s_{ai}\} = \{h_k\} * \{s_{ei}\} = \{s_{ek}\} * \{h_i\}.$$

Глобальная свертка двумерных дискретных пространственных функций

Пусть даны две пространственные функции $f_0(m, n)$ на интервале $0 \leq m \leq M_f - 1$; $0 \leq n \leq N_f - 1$ и $h_0(m, n)$ на интервале $0 \leq m \leq M_h - 1$; $0 \leq n \leq N_h - 1$.

Примем $M_f + M_h - 1 \leq M - 1$; $N_f + N_h - 1 \leq N - 1$.

Пространственные функции $f_0(m, n)$ и $h_0(m, n)$ перенесем в новый формат $(M-1, N-1)$ с помощью добавления нулевых элементов:

$$f_0(m, n) \rightarrow f(m, n) \text{ и } h_0(m, n) \rightarrow h(m, n); \quad 0 \leq m \leq M-1; \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Для того чтобы можно было осуществить преобразование и аналогичные вычисления в частотно-пространственной области, будем считать пространственные функции $f(m, n)$, $h(m, n)$ в направлениях m и n также периодическими. Тогда можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f(m, n) &\leftrightarrow \hat{F}(k, l); \quad 0 \leq m, k \leq M-1; \\ h(m, n) &\leftrightarrow \hat{H}(k, l); \quad 0 \leq n, l \leq N-1. \end{aligned}$$

Глобальная свертка (рис.3.1) дискретных пространственных функций для

каждой пространственной координаты m и n может быть представлена как:

$$g(m, n) = f(m, n) * h(m, n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) h(m-i, n-j) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} h(i, j) f(m-i, n-j).$$

При этом выполняется соответствие

$$g(m, n) = f(m, n) * h(m, n) \leftrightarrow \widehat{G}(k, l) = \widehat{F}(k, l) \cdot \widehat{H}(k, l).$$

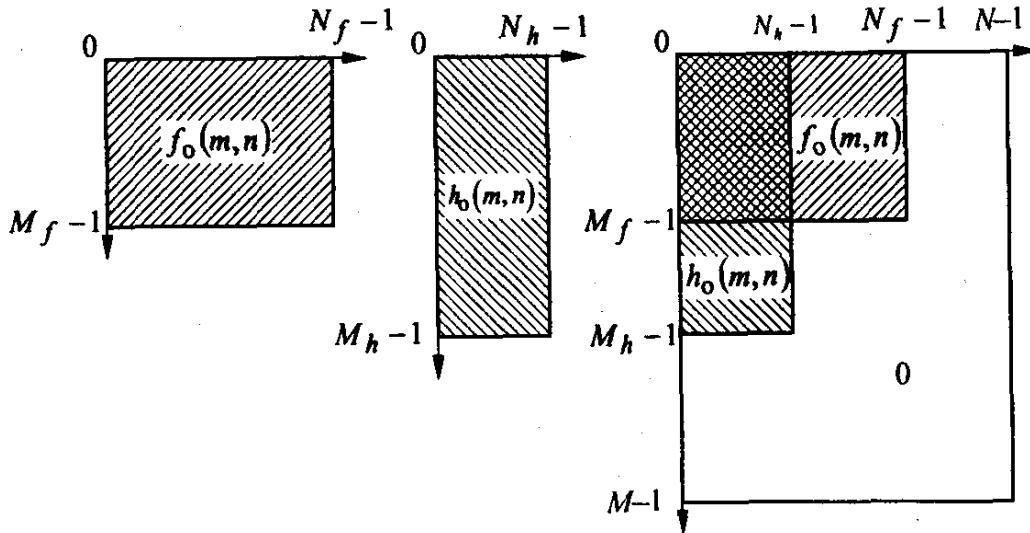


Рис. 3.1 – Преобразование пространственной области при глобальной свертке

Глобальная свертка спектров

Определяя условия и осуществляя переформатирование аналогично глобальной свертке двумерных дискретных пространственных функций для функций $\widehat{F}_0(k, l)$ $\widehat{H}_0(k, l)$ получим для дискретной глобальной свертки в спектральной области для каждой спектральной составляющей $\widehat{G}(k, l)$:

$$\widehat{G}(k, l) = \widehat{F}(k, l) * \widehat{H}(k, l) \leftrightarrow g(m, n) \cdot h(m, n),$$

$$\widehat{G}(k, l) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{F}(i, j) \cdot \widehat{H}(k-i, l-j) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{H}(i, j) \cdot \widehat{F}(k-i, l-j).$$

Глобальная свертка спектров соответствует перемножению в пространственной области. Это перемножение в общем случае предпочтительнее свертки спектров, поскольку выполняется проще и быстрее с технической точки зрения.

Локальная свертка в двумерном пространстве

Пусть дана пространственная дискретная функция $f(m, n)$ на интервале $0 \leq m \leq M-1$; $0 \leq n \leq N-1$, например изображение, записанное в памяти. Произведем свертку $f(m, n)$ с другой локальной пространственной функцией $h(i, j)$, заданной как функция окна с размерами L_i , L_j , т.е. определенной на интервале $0 \leq i \leq L_i-1$; $0 \leq j \leq L_j-1$.

Алгоритм свертки для каждой пространственной координаты m, n дает результат

$$g(m, n) = \sum_{i=0}^{L_i-1} \sum_{j=0}^{L_j-1} h(i, j) f(m-i, n-j) = \sum_{i=m-(L_i-1)}^m \sum_{j=n-(L_j-1)}^n h(m-i, n-j) f(i, j).$$

В случае симметричного оператора свертки с конечной длиной характеристики

$$g(m, n) = \sum_{i=-I}^{+I} \sum_{j=-J}^{+J} h(i, j) f(m-i, n-j).$$

При проведении свертки необходимо учитывать, что в области определения функции $(M-1, N-1)$ в матрице результатов $\{g(m, n)\}$ пограничные строки и столбцы будут содержать не полностью отфильтрованные (некорректные) данные, т.е. в откорректированной матрице результатов эти строки и столбцы должны быть исключены.

Взаимосвязь между $h(i, j)$ и $f(m, n)$ следующая:

$$g(m, n) = h(i, j) * f(m, n) \leftrightarrow \widehat{G}(k, l) = \widehat{H}(k, l) \cdot \widehat{F}(k, l).$$

Локальная свертка в двумерной спектральной области

Представленная локальная свертка может быть рассмотрена как свертка спектров.

Определим $\widehat{F}(k, l)$ на интервале $0 \leq k \leq M-1$; $0 \leq l \leq N-1$ и $\widehat{H}(s, t)$ на интервале $0 \leq s \leq S-1$; $0 \leq t \leq T-1$.

Необходимо построить локальную свертку спектров:

$$\widehat{G}(k, l) = \widehat{F}(k, l) * \widehat{H}(s, t) \leftrightarrow g(m, n) = f(m, n) \cdot h(m, n).$$

С учетом предыдущего соотношения

$$\widehat{G}(k, l) = \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{t=0}^{T-1} \widehat{H}(s, t) \widehat{F}(k-s, l-t).$$

Процесс свертки в двумерном пространстве можно продемонстрировать следующим образом.

Положим, что задана пространственная функция $f(m, n)$

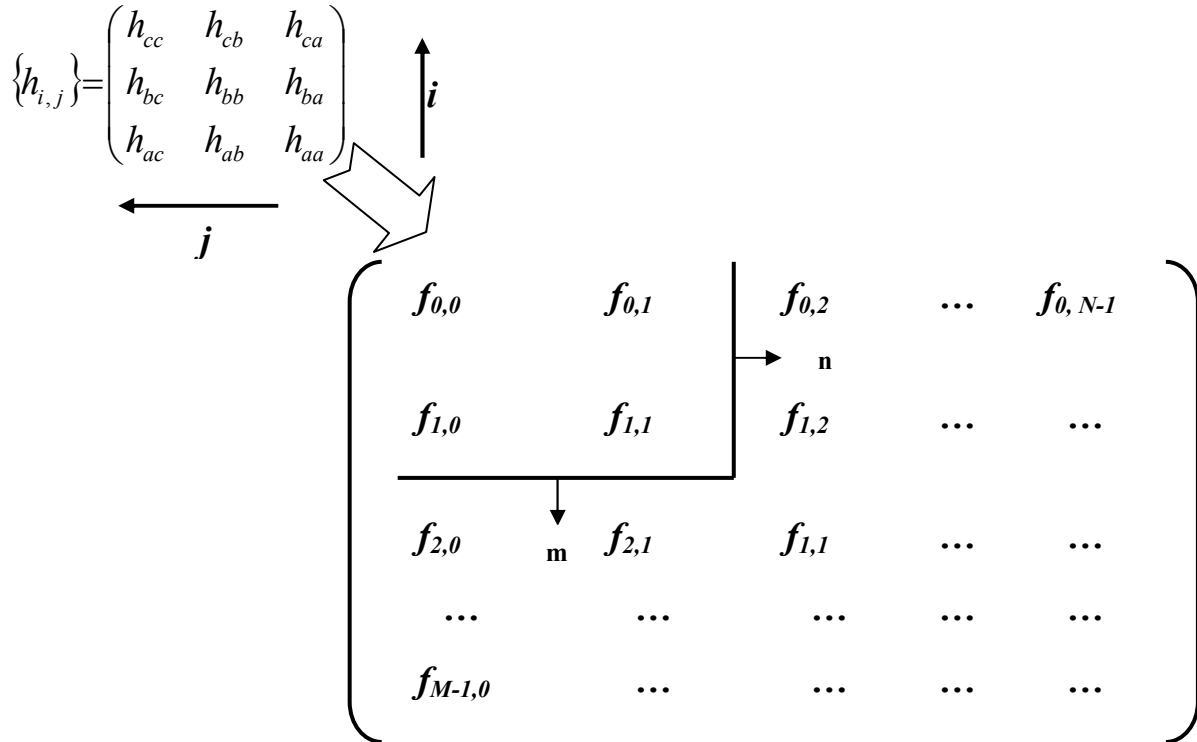
$$\{f_{m,n}\} = \begin{pmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} & \dots & f_{0,N-1} \\ f_{1,0} & f_{1,1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{M-1,0} & \dots & \dots & f_{M-1,N-1} \end{pmatrix}.$$

Необходимо произвести свертку ее с любой, в том числе несимметричной оконной функцией $h(i, j)$:

$$\{h_{i,j}\} = \begin{pmatrix} h_{aa} & h_{ab} & h_{ac} \\ h_{ba} & h_{bb} & h_{bc} \\ h_{ca} & h_{cb} & h_{cc} \end{pmatrix}.$$

Дискретная свертка образуется в случае, когда зеркальная к $h\{i, j\}$ матрица оконной функции $h\{-i, -j\}$ «перемещается» по матрице исходной функции и для

каждого положения (точки свертки) m, n вычисляется свертка:



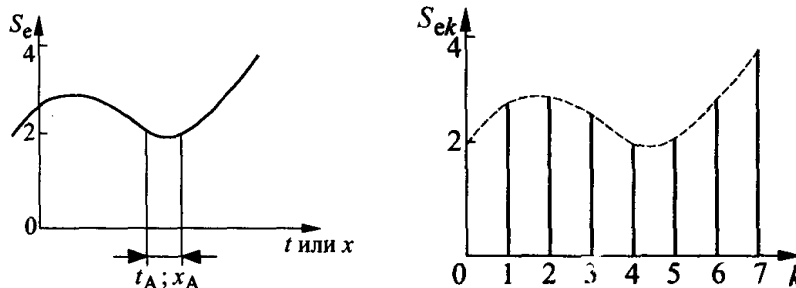
Например, для точки свертки $f_{m,n} = f_{22}$:

$$g_{22} = h_{cc}f_{00} + h_{cb}f_{01} + h_{ca}f_{02} + h_{bc}f_{10} + h_{bb}f_{11} + h_{ba}f_{02} + h_{ac}f_{20} + h_{ab}f_{21} + h_{aa}f_{22}$$

Преимущество локальной свертки по сравнению с глобальной состоит в меньшей потребности в объеме памяти для коэффициентов $h(i,j)$ вследствие меньших размеров окна $h\{i,j\}$.

3.3 Цифровая фильтрация

Цифровой фильтр реализует алгоритм свертки в дискретном пространстве или дискретно во времени.



Временной или пространственный непрерывный (аналоговый) сигнал

Временной или пространственный дискретный (цифровой) сигнал

Рис. 3.2 – Формирование последовательности импульсов из аналогового сигнала

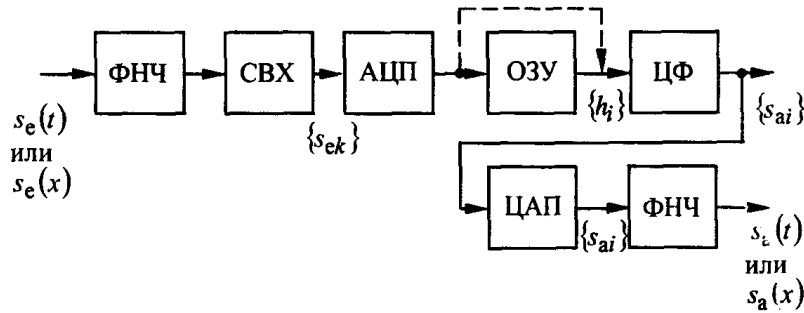


Рис. 3.3 – Цифровая фильтрация

Дискретизация непрерывного сигнала $s_e(t)$ или $s_e(x)$ осуществляется путем формирования его отсчетов в точках t_A или x_A , расположенных эквидистантно, при этом формируются дискретные во времени или пространстве значения сигнала $s_e(kt_A)$ или $s_e(kx_A)$:

$$s_e(t) \text{ или } s_e(x) \rightarrow \text{считывание} \rightarrow s_e(kt_A) \text{ или } s_e(kx_A)$$

Индекс k вычисляется как $k = t/t_A$ или $k = x/x_A$.

В терминах пространственных частот $f_A = 1/t_A$ или $f_{Ax} = 1/x_A$.

При формировании отсчетов во избежание наложения спектров следует выполнять условия теоремы Котельникова (теоремы отсчетов):

$$f_{max} \leq f_A/2; \quad f_{x\ max} \leq f_{Ax}/2.$$

Это означает, что частота формирования отсчетов должна, по крайней мере, в два раза превышать наивысшую частоту, содержащуюся в считываемом сигнале. Иными словами, полоса частот сигнала должна быть ограничена половиной частоты считывания. Ошибки, связанные с неточностями выполнения этих ограничений в дальнейшем не могут быть устранены. Эти ошибки с точки зрения формы и амплитуды могут быть значительными и приведут к искажению, а в ряде случаев и к неверному воспроизведению сигнала.

3.4 Фурье–фильтрация сигналов изображений

Свертка в пространственной области двумерным фильтром с конечной импульсной характеристикой

Типичной задачей обработки изображений является свертка функции изображения $f(m,n)$ с неким локальным оператором, заданным в виде окна $h(i,j)$ и удовлетворяющим определенным условиям симметричности. Этот «фильтр» и есть двумерный фильтр с конечной импульсной характеристикой, который содержит нечетное число строк и столбцов. Размер окна обычно бывает 3×3 ; 5×5 ; 7×7 ; ... 15×15 . Равное число строк и столбцов условие не обязательное, но встречается наиболее часто. Условия применения видов симметрии задаются свойствами системы, которые требуется реализовать.

Различают следующие **формы симметрии**:

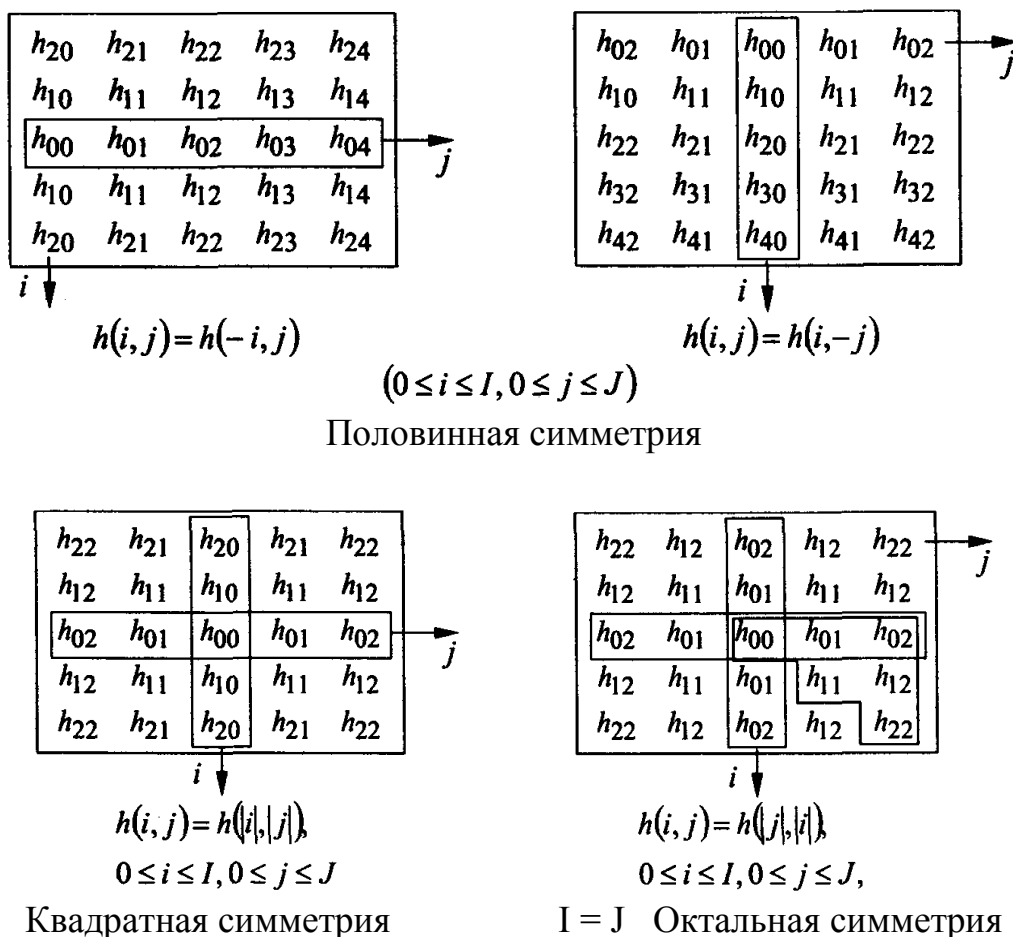


Рис. 3.4 – Формы симметрии окна

Передаточная функция двумерного фильтра, имеющего $(2I+1)$ строк и $(2J+1)$ столбцов, в области пространственных частот имеет вид:

$$\hat{H}(f_x, f_y) = \sum_{i=-I}^I \sum_{j=-J}^J h(i, j) \exp \left[-j2\pi \left(i \frac{f_x}{f_{Ax}} + j \frac{f_y}{f_{Ay}} \right) \right],$$

где f_x, f_y – отсчеты двумерной пространственной частоты;

$\hat{H}(f_x, f_y)$ – передаточная функция;

f_{Ax}, f_{Ay} – частота взятия отсчетов в направлениях x и y ;

$h(i, j)$ – коэффициенты фильтра i -той строки и j -го столбца, в пределах окна размером $(2I+1) \times (2J+1)$.

Если изображение задано на интервале $0 \leq m \leq M-1$; $0 \leq n \leq N-1$ и задан локальный оператор с размером окна $2I+1$ в направлении строк и $2J+1$ в направлении столбцов, обладающий квадрантной или октальной симметрией, то область свертки изображения уменьшается за счет обрамляющих строк I, J (рис. 3.5).

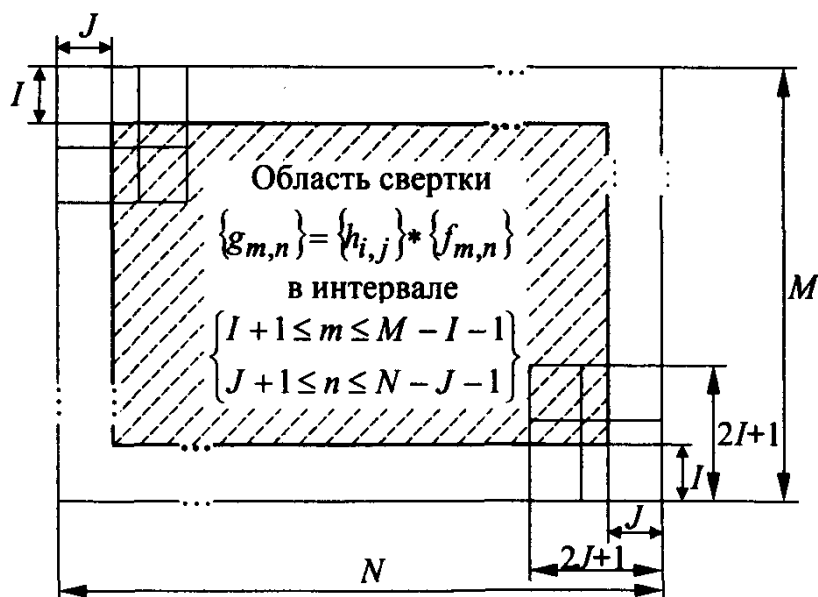


Рис. 3.5 – Формирование действующей области изображения при использовании локального оператора

Уравнения для сумм свертки каждого элемента изображения $g(m,n)$ на интервале $I+1 \leq m \leq M-I-1$, $J+1 \leq n \leq N-J-1$ получим, используя условия квадрантной симметрии оператора окна:

$$g(m,n) = h(0,0)f(m,n) + \sum_{i=1}^I h(i,0)[f(m+i,n) + f(m-i,n)] + \\ + \sum_{j=1}^J h(0,j)[f(m,n+j) + f(m,n-j)] + \\ + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J h(i,j)[f(m+i,n+j) + f(m+i,n-j) + f(m-i,n+j) + f(m-i,n-j)]$$

При октальной симметрии оператора получим для $I = J$:

$$g(m,n) = h(0,0)f(m,n) + \sum_{j=1}^J h(0,j)[f(m,n+j) + f(m,n-j) + f(m+j,n) + f(m-j,n)] + \\ + \sum_{j=1}^J h(j,j)[f(m+j,n+j) + f(m+j,n-j) + f(m-j,n+j) + f(m-j,n-j)] + \\ + \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=i+1}^J h(i,j)[f(m+i,n+j) + f(m+j,n+i) + f(m-i,n-j) + f(m-j,n-i) + \\ + f(m+i,n-j) + f(m+j,n-i) + f(m-i,n+j) + f(m-j,n+i)]$$

Отсюда хорошо виден принцип формирования составляющих свертки – все элементы изображения, относящиеся к одному и тому же коэффициенту, суммируются на текущей позиции свертки и только затем перемножаются с этим коэффициентом.

Фильтрация в частотно-пространственной области

Свертка дискретной пространственной функции $f(m,n)$ в локальном окне с оператором $h(i,j)$ соответствует перемножению их спектров в частотно-пространственной области:

$$g(m, n) * h(i, j) \leftrightarrow \widehat{G}(k, l) = \widehat{F}(k, l) \cdot \widehat{H}(k, l).$$

Дискретная функция изображения $f(m, n)$ в границах $(M-1) \times (N-1)$ имеет спектр также в границах $(M-1) \times (N-1)$. Локальный оператор, например обладающий квадрантной или октальной симметрией КИХ-фильтр $h(i, j)$, имеет спектр, ограниченный рамкой $(2I+1) \times (2J+1)$; обычно в границах $(M-1) \times (N-1)$. Прежде чем использовать спектры совместно, необходимо выполнить согласование формата фильтра $h(i, j)$ в пространственной области с периодической структурой изображения $f(m, n)$. Это производится путем добавления нулей, причем при удачном позиционировании изначального фильтра в рамках $(M-1) \times (N-1)$ можно достичь выполнения условий симметрии для преобразования Фурье. Например, создание четной пространственной функции $h(m, n)$ из $h(i, j)$ даст все $B(k, l) = 0$ и спектр будет состоять из вещественных $A(k, l)$ составляющих.

При построении частотно-пространственного спектра надо учитывать типичные повторяющиеся структуры спектральных компонент $A(k, l)$ и, кроме того, изменение знака мнимых элементов $B(k, l)$. Применяя правила перемножения комплексных чисел, получим для каждой отдельной позиции k, l в частотно-пространственной области произведение $\widehat{G}(k, l) = \widehat{F}(k, l) \widehat{H}(k, l)$.

Фильтрация есть взвешивание спектра изображения спектром фильтра:

$$\begin{aligned} \widehat{G}(k, l) &= A_G(k, l) - jB_G(k, l) = [A_F(k, l) - jB_F(k, l)][A_H(k, l) - jB_H(k, l)] = \\ &= [A_F(k, l)A_H(k, l) - B_F(k, l)B_H(k, l)] + j[A_F(k, l)B_H(k, l) + B_F(k, l)A_H(k, l)]. \end{aligned}$$

Упрощенная запись для каждой позиции k, l будет иметь вид

$$A_G = A_F A_H - B_F B_H, \quad B_G = A_F B_H + B_F A_H.$$

Если фильтрация спектра $\widehat{F}(k, l)$ осуществляется со спектром $\widehat{H}(k, l) = A_H(k, l)$, имеющим только вещественные компоненты, изображение $g(m, n)$, обратно трансформированное из спектра $\widehat{G}(k, l)$, не будет иметь пространственного сдвига относительно $f(m, n)$. Если же имеются мнимые составляющие $B_H(k, l)$, то, приводя к сдвигу по фазе в частотно-пространственной области, они приведут к сдвигу и в пространственной области.

ЛЕКЦИЯ 4 НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

4.1 Идея и понятие вейвлет-преобразования

На основании понятия о векторном пространстве общепринятым подходом к анализу сигналов $s(t)$ стало их представление в виде взвешенной суммы простых составляющих – базисных функций $\psi_k(t)$, умноженных на коэффициенты C_k :

$$s(t) = \sum_k C_k \psi_k(t).$$

Поскольку базисные функции $\psi_k(t)$ предполагаются заданными как функции вполне определённого вида, то только коэффициенты C_k содержат информацию о конкретном сигнале.

Например, ряд Фурье $s(t) = \sum_k C_k e^{itk}$ использует в качестве базисной функции синусоиды $e^{itk} = \cos(tk) + i \sin(tk)$, $i = \sqrt{-1}$. Они предельно локализованы в частотной области и вообще не локализованы во временной области.

Прямо противоположный пример – ряд Шеннона $s(t) = \sum_k C_k \delta_k(t)$, в котором используется в качестве базисной функции функция Кронекера $\delta_k(t) = \begin{cases} 1, k = t \\ 0, k \neq t \end{cases}$, которая хорошо локализована во времени, но не несёт никакой информации о частоте и потому плохо приспособлена для представления медленноменяющихся сигналов на заданном отрезке времени и, тем более, периодических сигналов.

Таким образом, возникла настоятельная необходимость в создании класса функций свободных от указанных недостатков. Ими стали вейвлеты и вейвлет-преобразование. Вейвлеты занимают промежуточное положение между приведенными выше базисными функциями – синусоидой и функцией Кронекера.

Приближённо можно представить вейвлеты как некоторые волновые функции, способные осуществлять преобразование Фурье не по всей временной оси, а локально по месту своего расположения. Для этого кроме изменения „средней частоты” путём масштабирования они должны перемещаться к тому месту сигнала или функции, в котором должно осуществляться „локальное преобразование Фурье”.

Базисными функциями вейвлетов могут быть самые различные функции, в том числе напоминающие модулированные синусоиды, функции со скачками уровня и т.д. Это обеспечивает различное представление сигналов с локальными скачками и разрывами наборами вейвлетов того или иного типа и открывает простор в подборе наиболее подходящих вейвлетов, исходя из

условий решаемых задач.

4.2 Прямое непрерывное вейвлет-преобразование

Прямое непрерывное вейвлет-преобразование (ПНВП) означает разложение (декомпозицию) произвольного входного сигнала по базису вейвлетов, которые характеризуются четырьмя основными свойствами:

- имеют вид коротких, локализованных во времени или в пространстве

волновых пакетов с нулевым значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$,

- обладают возможностью сдвига по времени,
- способны к масштабированию, т.е. к сжатию и растяжению,
- имеют ограниченный или локальный частотный спектр.

Если базис ортогональный, то анализ существенно облегчается, появляется возможность восстановления (реконструкции) сигнала и реализации алгоритмов быстрых вейвлет-преобразований.

Но существуют и не ортогональные вейвлеты (почти базисные вейвлеты), которые, тем не менее, полезны в задачах анализа и выявления локальных особенностей сигналов и функций.

Число используемых при разложении сигнала вейвлетов задаёт **уровень разложения** или **уровень декомпозиции** сигнала. За нулевой (высший) уровень принимается сам сигнал, а последующие уровни разложения образуют дерево разложения (декомпозиции) или вейвлет-дерево. Точность представления сигнала по мере перехода на более низкие уровни разложения снижается, но появляется возможность вейвлет-фильтрации сигналов, устранения шумов из смеси сигнал+шум, сжатия (компрессии) сигналов, т.е. становится возможной их вейвлет-обработка.

Также в основе ПНВП лежит использование двух непрерывных и интегрируемых по всей оси t (или x) функций:

- вейвлет-функция $\psi(t)$ с нулевым значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$,

определяющая детали сигнала и порождающая детализирующие коэффициенты,

- масштабирующая (аппроксимирующая или скейлинг-) функция $\varphi(t)$ с

единичным значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$, определяющая грубое

приближение сигнала и порождающая аппроксимирующие коэффициенты.

Аппроксимирующие функции $\varphi(t)$ присущи только ортогональным вейвлетам.

Функция $\psi(t)$ создаётся на основе той или иной базисной функции $\psi_0(t)$, которая, как и $\psi(t)$, определяет тип вейвлета. Базисная функция $\psi_0(t)$ должна

удовлетворять всем тем требованиям, которые относятся к $\psi(t)$, а именно:

- сдвиг по оси времени $t - \psi_0(t-b)$ при $b \in \mathbf{R}$,
- масштабирование $-\frac{1}{\sqrt{a}}\psi_0\left(\frac{t}{a}\right)$ при $a > 0$ и $a \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$.

Параметр a задаёт ширину функции, а параметр b – его положение на оси t . Эти свойства отражаются при следующей записи функции $\psi(t)$:

$$\psi(t) \equiv \psi(a, b, t) = a^{-1/2} \psi_0\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Для заданных a и b функция $\psi(t)$ и есть вейвлет. Вейвлеты, обозначаемые подобным образом, называют ещё отцовскими или материнскими вейвлетами, поскольку они порождают целый ряд вейвлетов определённого рода.

Вейвлеты являются вещественными функциями времени t и колеблются вокруг оси t (или оси x – если вейвлеты – функции пространства). Параметр b задаёт положение вейвлетов, а параметр a – его масштаб. Коэффициент $a^{-1/2}$ обеспечивает нормирование энергии при изменении масштаба. В частотной области малые значения a соответствуют высоким частотам, а большие – низким частотам.

Пусть энергия сигнала $s(t)$ равна $\int_R s^2(t) dt$ и она $< \infty$.

Прямое непрерывное вейвлет-преобразование сигнала $s(t)$ задаётся по аналогии с преобразованием Фурье путём вычисления вейвлет-коэффициентов по формуле:

$$C(a, b) = \langle s(t), \psi(a, b, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.$$

С учётом ограниченной области определения сигналов и $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$:

$$C(a, b) = \int_R s(t) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt.$$

Таким образом, ПНВП можно рассматривать как разложение сигнала $s(t)$ по всем возможным сдвигам и по растяжениям (сжатиям) сигнала $s(t)$ или некоторой произвольной функции. При этом параметры a и b могут принимать любые значения в пределах областей их определения.

Следует отметить важное обстоятельство.

ПНВП обладает большой избыточностью, что ведёт к неоправданно большим затратам машинного времени. Но, кроме того, избыточность ещё может быть и опасна при анализе результатов вейвлет-преобразования. При отображении спектрограмм штатными средствами систем компьютерной математики локальные особенности сигнала могут отображаться по-разному. Это может привести к ошибочной интерпретации рентгеновских или томографических снимков, к ошибкам геологоразведки и т.п.

4.3 Обратное непрерывное вейвлет-преобразование

Обратное непрерывное вейвлет-преобразование (ОНВП) осуществляется по формуле реконструкции во временной области, которая имеет целый ряд форм, зависящих от математического стиля записи и от определения областей существования сигнала.

Один из вариантов:

$$f = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dad b}{a^2} \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b},$$

где

$$\psi^{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \text{и} \quad C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\omega|^{-1}} d\omega.$$

Если ψ является вещественной функцией, то справедливо следующее выражение:

$$f = C_{\psi}^{-1} \int_0^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b}.$$

где

$$C_{\psi} = 2\pi \int_0^{\infty} d\xi |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} = 2\pi \int_{-\infty}^0 d\xi |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} < \infty.$$

Существуют и иные варианты записи ОНВП. Практический интерес представляют те формулы реконструкции, которые реально используются в системах компьютерной математики при ПНВП и ОНВП. Например,

$$s(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{R^+ - \{0\}} \int_R C(a,b) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2}.$$

4.4 Частотно-временная локализация

Реальный сигнал, как правило, принадлежит пространству $L^2(\mathbf{R})$. Преобразование Фурье сигнала $f(t)$ с конечной энергией представляет собой спектр этого сигнала:

$$F(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

В некоторых случаях физическая интерпретация с помощью этой формулы бывает затруднительна. Так, чтобы получить спектральную информацию на выбранной частоте, необходимо иметь и прошлую, и будущую временную информацию; к тому же формула не учитывает, что частота может

эволюционировать со временем. Преобразование Фурье, например, не отличает сигнал, представляющий собой сумму двух синусоид с разными частотами, от сигнала, состоящего из тех же синусоид, включающихся последовательно одна за другой.

Кроме того, известно, что частота сигнала обратно пропорциональна его продолжительности. Поэтому для получения высокочастотной информации с хорошей точностью важно извлекать ее из относительно малых временных интервалов, а не из всего сигнала; и наоборот – низкочастотную спектральную информацию извлекать из относительно широких временных интервалов сигнала.

Часть описанных трудностей снимается при использовании оконного преобразования Фурье. Однако бесконечно осциллирующая базисная функция (синусоидальная волна) не позволяет получать по-настоящему локализованную информацию.

Элементом базиса вейвлет-преобразования является хорошо локализованная функция, быстро стремящаяся к нулю вне небольшого интервала, что позволяет провести „локализованный спектральный анализ”. Иными словами, вейвлет-преобразование автоматически обладает подвижным частотно-временным окном, узким на малых масштабах и широким на больших масштабах.

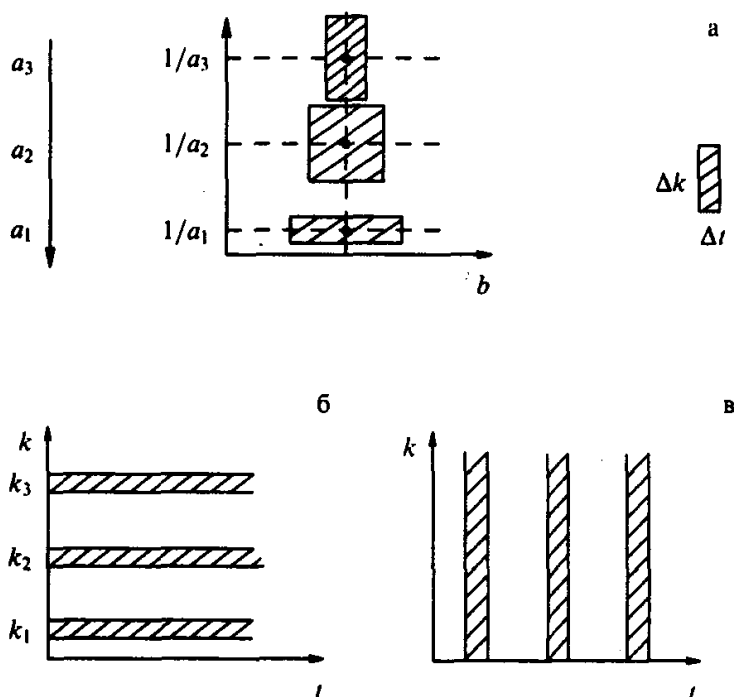


Рис. 4.1 – Частотно-временная локализация преобразований с разными анализаторами
 а – вейвлеты, б – гармоники Фурье, в – функции Шеннона

Из рис. 4.1 видно, что преобразование Фурье хорошо локализует частоту,

но без временного разрешения; преобразование Шеннона не обладает частотной локализацией при отличной временной; вейвлет-преобразование имеет подвижное окно, локализованное около выбранного момента времени и расширяющееся с ростом масштаба, что и является наиболее желательным при получении спектральной информации.

Таким образом, базисные функции оконного преобразования Фурье имеют одно и то же разрешение по времени и частоте для всех точек плоскости преобразования, в то время как базисные функции вейвлет-преобразования имеют уменьшающееся с масштабом разрешение по времени и увеличивающееся с масштабом разрешение по частоте. Это свойство вейвлет-преобразования дает ему большое преимущество при анализе сигналов, так как быстрые вариации сигналов (высокочастотные характеристики) хорошо локализованы, а для выявления медленно меняющихся характеристик достаточно хорошего низкочастотного разрешения. Т.е. вейвлет-преобразование, обладающее подвижным частотно-временным окном, одинаково хорошо выявляет и низкочастотные, и высокочастотные характеристики сигналов.

ЛЕКЦИЯ 5 КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ

5.1 Ортогональные вейвлеты

В ортонормированном пространстве есть много классических ортогональных базисов и многочленов – Фурье, Эрмита, Лагерра и др. Например, на промежутке 2π ряд Фурье обладает свойством ортогональности – интеграл от произведения любых двух функций этого ряда равен нулю. Именно это свойство и лежит в основе того факта, что ряд Фурье способен представлять с заданной погрешностью любой сигнал $s(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле.

Среди вейвлетов также заметное место занимают ортогональные и биортогональные вейвлеты, которые обладают рядом положительных качеств:

- возможностью восстановления не только локальных особенностей произвольного сигнала $s(t)$, но и сигнала в целом,
- возможностью осуществления быстрых вейвлет-преобразований.

Вейвлет представляет собой функцию аргумента, определённую в области \mathbf{R} , которая, подвергаясь операциям сдвига и двухэлементного растяжения, порождает ортогональный базис $L^2(\mathbf{R})$. В дискретном представлении это означает, что функция $\psi_{jk} = 2^{k/2}\psi(2^k-j)$, $j, k \in \mathbf{Z}$ образует полную ортонормированную систему для $L^2(\mathbf{R})$. Ограничения, представленные условием $j, k \in \mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z} = \{\dots -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – множество целых чисел, диктуются практическими соображениями.

Таким образом, функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется ортогональным вейвлетом, если семейство $\{\psi_{jk}\}$, определяемое формулой

$$\psi_{jk} = 2^{k/2}\psi(2^k-j), j, k \in \mathbf{Z},$$

является ортонормированным базисом в пространстве $L^2(\mathbf{R})$, т.е.

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \cdot \delta_{km}, j, k, l, m \in \mathbf{Z},$$

где $\delta_{jk}(t) = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$ – функция Кронекера,

причём любая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть представлена рядом

$$f(x) = \sum_{j, k = -\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(x),$$

который сходится в $L^2(\mathbf{R})$.

Простейший пример ортогонального вейвлета – функция Хаара (рис. 5.1).

Масштабирующая функция $\varphi(t)$ имеет значение 1 в интервале от 0 до 1 и значение 0 за пределами этого интервала. Детализирующая функция $\psi(t)$ имеет вид прямоугольных импульсов – меандра – со значением 1 в интервале от 0 до 0,5 и со значением -1 в интервале от 0,5 до 1. Вейвлеты Хаара хорошо локализованы в пространстве. Но они плохо локализованы в частотной области из-за того, что меандр имеет очень широкий спектр частот.

И. Добеши предложила ортогональные вейвлеты, сосредоточенные на конечном интервале времени и имеющие хорошую локализацию в частотной области. Однако у них отсутствует симметрия.

Существуют симлеты и койфлеты – усовершенствованные вейвлеты Добеши – имеющие лучшую симметрию.

Все приведенные вейвлеты не имеют аналитического выражения и описываются итерационными формулами.

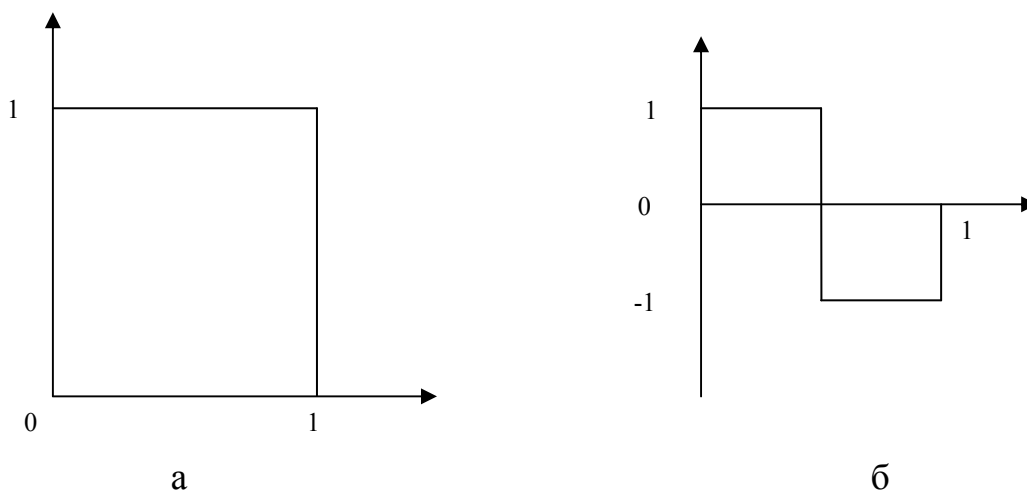


Рис. 5.1 – Функция Хаара

а – масштабирующая (аппроксимирующая) функция $\varphi(t)$,

б – детализирующая функция $\psi(t)$

5.2 Диадное вейвлет-преобразование непрерывных сигналов

Непрерывное вейвлет-преобразование требует больших вычислительных затрат. Поэтому для практического его применения необходима дискретизация значений a и b . Во избежание избыточности вейвлет-преобразования можно задавать дискретные значения a и b на некотором множестве $Z = \{\dots -1, 0, 1, 2, \dots\}$ равные $a = 2^j$ и $b = k \cdot 2^j$, где j и k – целые числа. Возможны и иные способы задания дискретных значений a и b . Параметр j , иногда обозначаемый как m , называется параметром масштаба.

Описанная дискретизация является наиболее распространённой, а сетка дискретизации называется **диадической**. Соответственно и это преобразование принято называть **диадным** вейвлет-преобразованием.

Важной особенностью диадного вейвлет-преобразования является исключение перекрытия носителей вейвлетов, т.е. устранение избыточности в

ходе вейвлет-преобразований.

Выделение диадного вейвлет-преобразования в отдельный класс оправдано ещё и тем, что и непрерывное вейвлет-преобразование на практике используется в том или ином дискретном варианте, но при этом не накладывается особых ограничений на характер дискретизации параметров a и b . Дискретизация может быть и иной, например, часто используется равномерный ряд значений a и b .

В отличие от дискретного вейвлет-преобразования непрерывных сигналов, имеющего большую избыточность, диадное преобразование такой избыточности не имеет. Это означает, что компактные носители вейвлетов плотно укладываются на оси t (или оси x) не перекрываясь.

Таким образом, при дискретных значениях a и b вейвлет-функция может быть представлена в виде:

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j}t - k).$$

Условие, что множество $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$ образует ортонормированную систему, означает, что любая функция $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть представлена рядом:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

и это выражение можно рассматривать как наложение вейвлетов $\psi_{j,k}$, создающее функцию f .

Внешне последнее выражение напоминает разложение в ряд Фурье для функции $f \in L^2(\mathbf{R})$ по экспоненциальным функциям. Но экспоненциальная функция имеет глобальный носитель, и все члены разложения Фурье зависят от значения f в точке x .

Вейвлеты же имеют компактный носитель или экспоненциальный порядок убывания на бесконечности, и только члены этого разложения, соответствующие $\psi_{j,k}$ с $j, 2^{-k}$ в окрестности точки x , вносят наибольший вклад в функцию в этой окрестности. Поэтому последнее разложение локально.

Таким образом, **прямое дискретное вейвлет-преобразование** (ПДВП) сводится к уже известному вычислению коэффициентов $C(a,b)$

$$C(a,b) = \int_{\mathbf{R}} s(t) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

с подстановкой дискретных значений a и b .

И тогда окончательно:

$$C(j, k) = d_{j, k} = \int_R s(t) a^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - k) dt,$$

где $C(j, k) = d_{j, k}$ – детализирующие коэффициенты для вейвлет-декомпозиции сигнала уровня k , причём коэффициенты дискретны, т.е. вычисляются для заданных j и k .

Обратное дискретное вейвлет-преобразование (ОДВП) для непрерывных сигналов задаётся формулой

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} C(j, k) a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - k).$$

При нормировке базовых функций в частотной области добиваются того, что $C_\psi = 1$. Тогда окончательно формула реконструкции сигнала примет вид:

$$s(t) = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} C(j, k) \psi_{j, k}(t).$$

Известно, что для ортогональных вейвлетов возможно точное восстановление сигнала после прямого и обратного дискретного вейвлет-преобразования с использованием дополнительной аппроксимации сигнала с помощью φ функции. В ином случае восстановление даёт близкий к исходному сигналу $s(t)$ приближённый сигнал, причём близость понимается в смысле обеспечения минимума среднеквадратической погрешности восстановления.

В итоге видно, что диадное вейвлет-преобразование имеет иерархическую структуру в виде дерева. При фиксированном индексе разрешения j вейвлеты имеют одинаковые масштабы и лишь дискретно сдвигаются во времени. При увеличении разрешения на 1 величина сдвига уменьшается вдвое, и вейвлеты сжимаются.

Диадное вейвлет-преобразование часто называют дискретным. Но подобная формулировка не совсем корректна. Правильнее говорить о диадном преобразовании как о разновидности непрерывного вейвлет-преобразования, позволяющей устранить избыточность последнего.

Стоит упомянуть ещё один **особый тип вейвлетов – фреймы**. Вейвлет-фреймы используют кратное двум масштабирование, но непрерывные сдвиги. Таким образом, они сохраняют избыточность присущую непрерывному преобразованию, но в гораздо меньшей степени, чем при этом преобразовании. Т.е. вейвлет-фреймы занимают промежуточное положение между диадным и непрерывным вейвлет-преобразованиями. Но следует отметить, что в системах компьютерной математики они применения не нашли.

5.3 Кратномасштабный анализ и синтез

Теперь понятно, что возможно представление сигнала на основе суммирования его грубого представления с детализирующими представлениями в его разных местах. Для этого есть ортогональные вейвлеты. Их можно создать, основываясь на представлении пространства сигналов V в виде вложенных подпространств V_j , отличающихся друг от друга только перемасштабированием независимой переменной. Основанный на этом анализ и называют кратномасштабным или многомасштабным анализом.

Он базируется на следующих исходных предположениях:

- пространство сигналов V может быть разбито на иерархически вложенные подпространства V_j , которые не пересекаются и объединение которых в пределе даёт $L^2(\mathbf{R})$,
- для любой функции $s(t) \in V_j$ её сжатая версия принадлежит пространству V_{j-1} ,
- существует такая функция $\varphi(x) \in V_0$, для которой её сдвиги $\varphi_{0,i}(t) = \varphi(t-k)$ при $k \in \mathbf{Z}$ образуют ортонормированный базис пространства V_0 .

Т.к. функции $\varphi_{0,k}(t)$ образуют ортонормированный базис пространства V_0 , то функции

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k)$$

образуют ортонормированный базис пространства V_j .

Таким образом, функции $\varphi_{j,k}$ называются масштабирующими именно потому, что они создают свои масштабированные версии в пространстве сигнала. Именно их ещё называют отцовскими или материнскими вейвлетами. При этом сигнал $s(t)$ может быть представлен множеством последовательных приближений $s_j(t)$ в подпространствах V_j . Поэтому j и называется масштабным коэффициентом и всегда можно сказать, что сигнал $s(t)$ есть предел аппроксимации $s_j(t) \in V_j$ при $j \rightarrow -\infty$, т.е. $s(t) = \lim_{j \rightarrow -\infty} s_j(t)$. В соответствии с этим при больших j получаются грубые приближения сигнала, а при малых – точные. Приближение сигнала соответствует итерационной формуле:

$$s(t) = \sum_j C(j, k) \varphi_{j,k}(t),$$

при этом

$$\varphi_{0,0}(t) = 2 \sum_k h_k \varphi(2t - k),$$

где h_k – некоторая последовательность.

В итоге сумма приближенной и детализирующей компонент даёт исходный сигнал с тем или иным приближением. В качестве начального значения часто берут $j=0$, но можно и с других начинать итерационный процесс приближения.

В качестве примера можно привести передачу изображения, когда сначала передаётся грубый образ изображения в виде функции $\varphi(t)$, а потом оно уточняется с помощью вейвлет-коэффициентов и принимает привычный вид. Причём процесс уточнения всегда можно приостановить, если, например, достигнута максимальная разрешающая способность устройства отображения и больше нет необходимости в уточнении изображения или погрешность преобразования достигла уровня погрешности машинных расчётов.

Таким образом, в общем случае реконструкция сигнала на n -том уровне разрешения j_n задаётся выражением:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n, k} \varphi_{j_n, k}(t) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j, k} \psi_k(t),$$

где a – коэффициенты аппроксимации, d – коэффициенты детализации.

Из теории кратномасштабного анализа известно, что в ходе прямого и обратного диадного вейвлет-преобразования возможно полное восстановление сигнала, если для целых k существуют такие коэффициенты $\{h_k\}$, которые удовлетворяют решению уравнения масштабирования или уравнения уточнения:

$$\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(t - k).$$

Например, для функции Хаара они равны $h_1 = h_2 = 2^{-1/2}$. Они также вычислены и для других ортогональных вейвлетов.

ЛЕКЦИЯ 6 БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

До сих пор термином „вейвлет” обозначалась некая солитоноподобная функция, вводились связанные с нею понятия и описывались некоторые ее свойства. Систематизируем все понятия и введём понятие вейвлета.

6.1 Определение вейвлета

Любая локализованная \mathbf{R} -функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется \mathbf{R} -вейвлетом или просто вейвлетом, если для нее существует функция $\psi^* \in L^2(\mathbf{R})$ (ее пара, двойник) такая, что семейства $\{\psi_{jk}\}$ и $\{\psi_{jk}^*\}$, построенные в соответствии с

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j}t - k)$$

и

$$\psi_{j,k}^*(t) = a_0^{-j/2} \psi^*(a_0^{-j}t - k),$$

являются парными базисами функционального пространства $L^2(\mathbf{R})$.

Каждый, определенный подобным образом вейвлет ψ , независимо от того, ортогональный он или нет, позволяет любую функцию $f \in L^2(\mathbf{R})$ представить в виде ряда

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t),$$

коэффициенты которого определяются интегральным вейвлет-преобразованием f относительно ψ^* .

Вейвлет-двойник ψ^* — единственный и сам является \mathbf{R} -вейвлетом. Пара (ψ, ψ^*) симметрична в том смысле, что ψ в свою очередь является двойником для ψ^* .

Если \mathbf{R} -вейвлет ψ обладает свойством ортогональности, то $\psi^* \equiv \psi$, и $\{\psi_{jk}\} \equiv \{\psi_{jk}^*\}$ — ортогональный базис.

Для многих практических целей достаточно, чтобы вейвлет ψ обладал свойством полуортогональности, т.е. чтобы его базис Рисса $\{\psi_{jk}\}$ удовлетворял условию $\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = 0$ при $j, k, l, m \in I$.

\mathbf{R} -вейвлет называется неортогональным, если он не является полуортогональным вейвлетом. Однако, будучи \mathbf{R} -вейвлетом, он имеет

двойника, и пара (ψ, ψ^*) дает возможность сформировать семейства $\{\psi_{jk}\}$ и $\{\psi_{jk}^*\}$, удовлетворяющие условию биортогональности $\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$, $j, k, l, m \in I$ и позволяющие построить полноценный ряд по вейвлетам и реконструкционную формулу.

С необходимостью иметь обратное вейвлет-преобразование (или реконструкционную формулу) связано большинство ограничений, накладываемых на вейвлет.

6.2 Признаки вейвлета

Локализация. Вейвлет-преобразование в отличие от преобразования Фурье использует локализованную базисную функцию. Вейвлет должен быть локализован и во временном пространстве, и по частоте.

Нулевое среднее. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$. Часто оказывается необходимым, чтобы

не только нулевой, но и все первые m моментов были равны нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0.$$

Такой вейвлет называется вейвлетом m -го порядка. Обладающие большим числом нулевых моментов вейвлеты позволяют, игнорируя наиболее регулярные полиномиальные составляющие сигнала, анализировать мелкокомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка.

Ограниченность. $\int |\psi(t)|^2 dt < \infty$. Оценка хорошей локализации и

ограниченности может быть записана в виде $|\psi(t)| < (1 + |t|^n)^{-1}$ или

$$|\hat{\psi}(\omega)| < (1 + |k - \omega_0|^n)^{-1}$$

здесь ω_0 – доминантная частота вейвлета, число n должно быть возможно большим.

Автоподобность базиса. Характерным признаком базиса вейвлет-преобразования является его самоподобие. Все вейвлеты данного семейства $\psi_{ab}(t)$ имеют одинаковое число осцилляций с базисным вейвлетом $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований и сдвигов. Благодаря этому вейвлет-преобразование с успехом применяется для анализа фрактальных сигналов.

6.3 Классификация вейвлетов

Выбор вейвлетов довольно обширен. Широко используются около

полтора десятков базовых типов вейвлетов и множество вариантов для ряда базовых типов вейвлетов. Однако необоснованное применение того или иного типа вейвлета может привести к получению ожидаемого результата.

Обилие классов вейвлетов и их конкретных реализаций в каждом классе позволяет легко использовать для решения каждой практической задачи наиболее подходящий тип вейвлета. В настоящее время создание новых типов вейвлетов рационально только при решении новых и довольно специфических задач и при условии, что для этого не удастся подобрать подходящий тип вейвлета из числа описанных.

Поэтому возникает необходимость провести классификацию вейвлетов по определённым признакам. Это позволит подбирать наиболее подходящие типы вейвлетов для решения конкретных задач обработки сигналов и изображений. Но и подобный выбор надо рассматривать как предварительную операцию. При решении сложных задач в области обработки сигналов и изображений необходимо применение хотя бы нескольких типов вейвлетов с последующим сравнением результатов и выбором наилучших из них.

Пример классификации приведён в таблице 1.

6.4 Примеры вейвлетов

Выбор анализирующего вейвлета, как правило, определяется характером информации, которую необходимо извлечь из сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности во временном и в частотном пространстве, поэтому иногда с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала.

По аналогии с микроскопом можно сказать, что параметр сдвига b фиксирует точку фокусировки микроскопа, масштабный коэффициент a – увеличение и базисный вейвлет ψ определяет оптические качества микроскопа.

Вещественные базисы часто конструируются на основе производных функции Гаусса:

$$\psi_m(t) = (-1)^m \partial_t^m e^{-t^2/2},$$

для которых образ Фурье:

$$\hat{\psi}_m(k) = m(ik)^m e^{-k^2/2},$$

(здесь $\partial_t^m = \partial^m[\dots]/\partial t^m$, $m \geq 1$). Более высокие производные имеют больше нулевых моментов и позволяют извлечь информацию об особенностях более высокого порядка, содержащихся в сигнале.

На рисунках 6.1а,б показаны вейвлеты, полученные при $m=1$ и $m=2$ соответственно. Из-за их формы первый называют обычно WAVE-вейвлет,

Классификация и основные свойства вейв-летов

Таблица 1

Тип вейв-летов	Грубые вейв-леты или предвейв-леты	Бесконечные регулярные вейв-леты	Ортogonalные вейв-леты с компактным носителем	Бигортogonalные парные вейв-леты с компактным носителем	Комплексные вейв-леты
Основные свойства вейв-летов					
симметричность	да	да	Добеш и койфлеты – нет симлеты – да	да	да
функция ψ имеет аналитическое выражение	да	нет	нет	да	да
функция ϕ имеется	нет	да	да	да	нет
функция ϕ имеет аналитическое выражение	-	нет	нет	да	-
анализ является ортogonalным	нет	да	да	нет – бигортogonalный	нет
функция ψ имеет компактный носитель	нет	нет	да	да	нет
функция ϕ имеет компактный носитель	-	нет	да	да	-
возможность реконструкции гарантирована	нет	да	да	нет	нет
возможны быстрые алгоритмы преобразований	нет	нет	да	да	нет
наличие нулевых моментов (моментов исчезновения)	нет	нет	да	да	нет
представители	Гаусса, Морле, „мексиканская шляпа“	Мейера	Добеш, симлеты и койфлеты	<i>B</i> -сплайновые бигортogonalные	Гаусса, Морле, Шеннона, частотные <i>B</i> -сплайновые

второй – МНАТ-вейвлет, или „Mexican hat–Мексиканская шляпа” (похож на сомбреро).

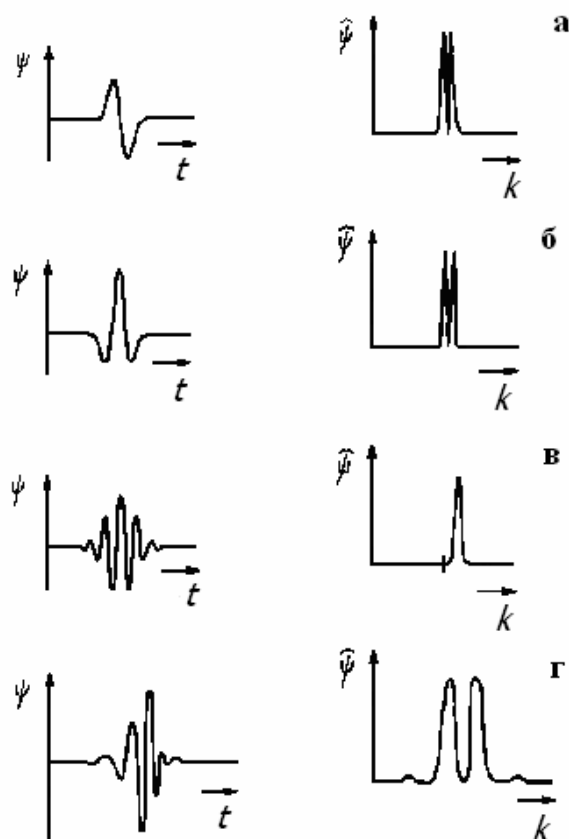


Рис. 6.1 – Вейвлеты (левая колонка) и их образы Фурье (правая колонка)
а–WAVE, б–МНАТ, в–Морле, г–Добеши

МНАТ-вейвлет, имеющий узкий энергетический спектр и два равных нулю момента (нулевой и первый), хорошо приспособлен для анализа сложных сигналов. Обобщенный на двумерный случай МНАТ-вейвлет часто используется для анализа изотропных полей. Если же производная берется лишь в одном направлении, получается неизотропный базис с хорошей угловой избирательностью. Для построения такого базиса к масштабным преобразованиям и сдвигам базисного вейвлета необходимо добавить его вращение. При этом „микроскоп” (вейвлет-преобразование) приобретает дополнительное качество поляризатора с углом поляризации, пропорциональным углу поворота вейвлета.

Пример комплексного вейвлета приведён на рис. 6.1в (показана действительная составляющая). Наиболее часто используемый комплексный базис строится на основе хорошо локализованного в k - и r -пространстве вейвлета Морле:

$$\psi(r) = e^{ik_0 r} e^{-r^2/2},$$

для которого образ Фурье:

$$\widehat{\psi}(k) = \Theta(k) e^{-(k-k_0)^2/2},$$

это плоская волна, модулированная гауссианом единичной ширины. На рисунке вейвлет Морле показан для $k_0=6$. С увеличением k_0 возрастает угловая избирательность базиса, но ухудшается пространственная.

Представленный комплексный вейвлет является *прогрессивным*. Так называются вейвлеты, имеющие нулевые коэффициенты Фурье при отрицательных значениях волновых чисел. Они хорошо приспособлены для анализа сигналов, для которых важен принцип причинности: эти вейвлеты сохраняют направление времени и не создают паразитной интерференции между прошлым и будущим.

Вейвлеты принято называть по виду и особенностям образующей функции $\psi_0(t)$ или по имени учёного, впервые предложившего тот или иной вейвлет (рис. 6.1г).

6.5 Представление и свойства вейвлет-преобразования

Одномерное преобразование Фурье дает также одномерную информацию об относительном вкладе (амплитудах) разных временных масштабов (частот).

Результатом вейвлет-преобразования одномерного ряда является двумерный массив амплитуд вейвлет-преобразования – значений коэффициентов $W(a,b)$. При анализе комплексного одномерного сигнала или при использовании комплексного анализирующего вейвлета в результате вейвлет-преобразования получаются двумерные массивы значений модуля коэффициентов и фазы:

$$W(a,b) = |W(a,b)| \exp[i\Phi(a,b)],$$

т.е. два двумерных массива – для модуля и фазы.

Распределение этих значений в пространстве (a,b) = (временной масштаб, временная локализация) дает информацию об эволюции относительного вклада компонент разного масштаба во времени и называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования, (частотно-) масштабно-временным спектром или вейвлет-спектром (time-scale spectrum, или wavelet spectrum в отличие от single spectrum преобразования Фурье).

Представление результатов вейвлет-преобразования

Спектр $W(a,b)$ одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Способы визуализации этой информации могут быть различными. Вместо изображения поверхностей часто представляют их проекции на плоскость ab с изолиниями или изоуровнями, позволяющими

проследить изменение интенсивности амплитуд вейвлет-преобразования на разных масштабах и во времени, а также картины линий локальных экстремумов этих поверхностей (т.н. *skeleton*), четко выявляющие структуру анализируемого процесса. Термин „скелет” или „скелетон” хорошо отражает характер картин линий локальных экстремумов.

Чем резче выражена особенность сигнала, тем сильнее она выделяется на спектрограмме и тем выше уровень вейвлет-коэффициентов. Вейвлет-спектрограммы отчётливо выделяют такие особенности сигнала, как небольшие разрывы, изменения знаков первой и второй производных, изменение частоты составляющих сигнала во времени и т.д. Это именно те особенности сигнала, которые плохо выделяются на Фурье-спектре.

Различия между Фурье- и вейвлет-спектрограммами носят принципиальный характер.

Фурье-спектрограммы удобны для выявления периодической стационарной компоненты сигнала. Если такой компонентой является гармонический сигнал, то для его представления достаточно всего одна гармоника ряда Фурье.

При вейвлет-анализе даже гармонического сигнала придётся использовать множество вейвлетов, перекрывающих всю ось времени. Это может показаться неоправданным усложнением для данного частного случая, когда сигнал – простая синусоида. Но если сигнал имеет локальные особенности, если он не периодичен и не стационарен, то вейвлет-анализ становится именно тем инструментом для его исследования, к которому классический Фурье-анализ не применим. Большие уровни вейвлет-коэффициентов характерны только для области, располагающейся вблизи той или иной локальной особенности функции или сигнала. Это позволяет легко определять местоположение локальных особенностей, что практически невозможно при Фурье-спектральном анализе, т.е. вейвлет-спектрограммы дают представление об исследуемом процессе в амплитудно-временной области.

Можно отметить, что значение анализируемой функции в точке t_0 влияет на значения коэффициентов преобразования в растущих с масштабом временных диапазонах в так называемом углу влияния (рис. 6.2а).

В свою очередь, коэффициент $W(a,b)$ в точке (a_0, b_0) зависит от значений части ряда из определяемого тем же углом влияния временного диапазона (диапазона интегрирования) около b_0 (рис. 6.2б), и диапазон этот тем больше, чем больше масштаб a_0 , т.е. высокочастотная (или мелкомасштабная) информация вычисляется на основе малых отрезков ряда, а низкочастотная – на основе больших.

Максимальный угол влияния (угол достоверности) отмечает область достоверности – область, вне которой коэффициенты $W(a,b)$ вычисляются уже по отрезкам, выходящим за границы ряда (по дополненному ряду). Поскольку анализируемый ряд всегда конечен, и необходимо получить максимум информации, полученные вне максимального угла влияния (с некоторой

ошибкой) приближенные значения коэффициентов часто сохраняются. Для уменьшения ошибки ряд дополняется с учетом его поведения (средним значением, известным временным ходом и т.д.).

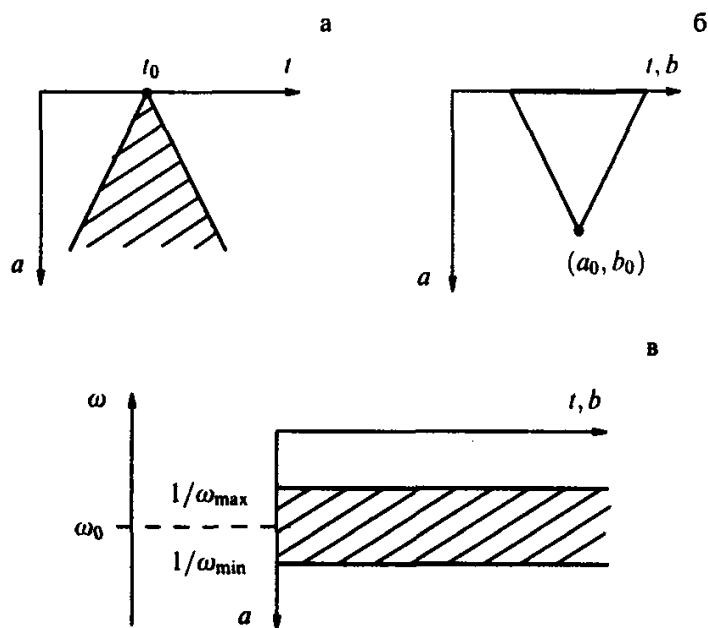


Рис. 6.2 – Угол влияния или достоверности (а, б) и полоса влияния или достоверности (в)

Свойства вейвлет-преобразования

Коэффициенты вейвлет-преобразования содержат комбинированную информацию об анализирующем вейвлете и анализируемом сигнале. Несмотря на это, вейвлет-анализ позволяет получить и объективную информацию об анализируемом сигнале, так как некоторые свойства вейвлет-преобразования не зависят от выбора анализирующего вейвлета. Независимость от анализатора делает эти простые свойства преобразования очень важными.

Основными элементарными свойствами вейвлет-преобразования функции $f(t)$ являются: (при этом будем использовать обозначение $W[f] = W(a, b)$).

Линейность.

$$W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha W[f_1] + \beta W[f_2] = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b).$$

Отсюда, в частности, следует, что вейвлет-преобразование векторной функции есть вектор с компонентами, представляющими собой вейвлет-преобразование каждой из компонент анализируемого вектора в отдельности.

Инвариантность относительно сдвига.

$$W[f(t - b_0)] = W(a, b - b_0).$$

Из этого свойства следует коммутативность дифференцирования, в частности,

$\partial_t W[f] = W[\partial_t f]$ (здесь $\partial_t = \partial/\partial t$). Вместе с первым свойством это означает перестановочность и для производных векторного анализа.

Инвариантность относительно растяжения (сжатия).

$$W\left[f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right] = \frac{1}{a_0} W\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right).$$

Это свойство позволяет, в частности, определять наличие и характер особенностей анализируемой функции.

Кроме трех описанных не зависящих от выбора анализирующего вейвлета элементарных свойств вейвлет-преобразование обладает еще несколькими важными и полезными свойствами.

Частотно-временная локализация и наличие частотно-временного окна и угла влияния.

Правильнее было бы говорить о масштабно-временной локализации.

Дифференцирование.

$$W[\partial_t^m f] = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \partial_t^m \left[\left(\psi_{ab}^*(t) \right) \right] dt.$$

Таким образом, чтобы проигнорировать, например, крупномасштабные полиномиальные составляющие и проанализировать особенности высокого порядка или мелкомасштабные вариации функции f , безразлично, дифференцировать ли нужное число раз анализирующий вейвлет или саму функцию. Это очень полезное свойство, если учесть, что часто функция f представляет собой ряд чисел, а анализирующий вейвлет задан формулой.

Для вейвлет-преобразования существует ***аналог теоремы Парсеваля*** и выполняется равенство

$$\int f_1(t) f_2^*(t) dt = C_{\psi}^{-1} \int \int W_1(a, b) W_2^*(a, b) \frac{dadb}{a^2},$$

откуда следует, что энергия сигнала может быть вычислена через амплитуды (коэффициенты) вейвлет-преобразования подобно тому, как она вычисляется через амплитуды преобразования Фурье:

$$E_f = \int f^2(t) dt = \int |A(\omega) - iB(\omega)|^2 d\omega.$$

ЛЕКЦИЯ 7 ЧАСТОТНЫЙ ПОДХОД К ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗУ

7.1 Частотный подход к вейвлет-преобразованиям

При анализе сигналов с помощью вейвлет-преобразований пользуются временными функциями – вейвлетами, но они применяются скорее для демонстрации сущности вейвлет-декомпозиции и реставрации сигнала, чем для практической работы по обработке и представлению реальных сигналов. Использование вейвлет-преобразований базируется на особой их трактовке в частотной области и позволяет использовать хорошо разработанный аппарат частотной фильтрации и методы быстрого вейвлет-преобразования (БВП), основанного на пирамидальном алгоритме Малла и прореживании спектра вейвлетов по частоте.

В соответствии с частотным подходом к вейвлет-преобразованиям, частотная область вейвлетов может быть разбита на две части – низкочастотную составляющую и высокочастотную составляющую. Их частота раздела равна половине частоты дискретизации сигнала. Для их разделения достаточно использовать два фильтра с одинаковой граничной частотой – низкочастотный LoD и высокочастотный HiD, к входам которых подключается сигнал $s(t)$. Важно помнить, что каждому ортогональному вейвлету соответствуют 4 фильтра:

- $\{h_n\}$ – низкочастотный фильтр декомпозиции (разложения) LoD,
- $\{g_n\}$ – высокочастотный фильтр декомпозиции (разложения) HiD,
- $\{\tilde{h}_n\}$ – низкочастотный фильтр реконструкции (восстановления) LoR,
- $\{\tilde{g}_n\}$ – высокочастотный фильтр реконструкции (восстановления) HiR.

Фильтр LoD дает частотный образ для аппроксимации (грубого приближения) сигнала, а фильтр HiD – для его детализации. Полосы частот пропускания фильтров полагают равными, что соответствует делению общей полосы частот сигнала на 2. Полагают в теории вейвлет-преобразований (вейвлет-фильтрации) что вейвлет-коэффициенты соответствуют коэффициентам передаточной характеристики этих фильтров. Другими словами, коэффициенты фильтров HiD и LoD и есть детализирующие коэффициенты вейвлет-декомпозиции сигналов и их коэффициенты аппроксимации.

Однако LoD фильтр можно, в свою очередь, также разложить на два фильтра. Это означает изменение уровня декомпозиции. Таким образом, может быть сформирована система вейвлет-фильтров, которые реализуют операцию декомпозиции сигнала того или иного уровня.

Подобные операции сокращают спектр соответствующих компонентов сигнала, что лежит в основе приближенного представления сигнала на разных уровнях декомпозиции сигнала. Операция последовательной разбивки LoD фильтров и постепенного огрубления сигнала известна как алгоритм Малла.

Но почему именно низкочастотный фильтр удостоен операции деления? Можно сказать, что это следствие устоявшейся практики применения радиотехнических сигналов – основные частотные компоненты их расположены обычно в низкочастотной области спектра. Считается, что именно она несет больше информации, чем высокочастотная (уточняющая) область. Принимать это за абсолютную истину не стоит – существуют виды сигналов, где это допущение неверно. Поэтому возможно деление полос и высокочастотных фильтров, порождающее особые, так называемые „пакетные” вейвлеты.

7.2 Основы вейвлет-фильтрации

Для обоснования частотного подхода весьма важным является понятие квадратурных фильтров. Кратномасштабный анализ основан на двух хорошо известных методах обработки сигналов, заимствованных из теории фильтрации сигналов:

- разложение сигнала по поддиапазонам с помощью квадратурных зеркальных фильтров,
- пирамидальное представление обработки.

Первый метод возник из потребностей обработки звуковых сигналов, а второй – из обработки сигналов изображения.

Пусть имеется некий обобщенный сигнал в виде последовательности чисел $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$. Для сглаживания сигнала, подавления шума и других целей часто используют фильтры, базирующиеся на операции свертки:

$$y_n = \sum_k h_k x_{n-k} .$$

Сигнал $y = \{y_n\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ получается „локальным усреднением” сигнала x с помощью набора „весов” $h = \{h_k\}$. Используя понятия частотного анализа, можно записать $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$.

Транспонированный фильтр h^* состоит из тех же коэффициентов, что и фильтр h , но переставленных в обратном порядке. В частотной области транспонированный фильтр записывается как $\bar{H}(\omega)$. Коэффициенты всех сигналов и фильтров предполагаются вещественными. Величина $|X(\omega)|$ характеризует распределение энергии сигнала по частотам $\omega \in (-\pi, \pi)$.

Фильтры, которые позволяли бы разложить сигнал на две частотные компоненты – высокочастотную и низкочастотную с прореживанием, а затем точно восстановить по этим данным исходный сигнал, известны из теории фильтрации. Это и есть квадратурные зеркальные фильтры. Основные их свойства следующие:

$$|H(\omega)|^2 + |G(\omega)|^2 \equiv 2,$$

$$\bar{H}(\omega)H(\omega + \pi) + \bar{G}(\omega)G(\omega + \pi) = 0.$$

Понятие о них широко используется в технике вейвлет-преобразований и составляет основу быстрого вейвлет-преобразования (БВП).

Теперь вполне очевидно, что каждый ортогональный вейвлет имеет свой Фурье-образ $\hat{\psi}(\omega)$ и его можно представить реализацией двух фильтров – низкочастотного $H(\omega)$ и согласованного с ним высокочастотного $G(\omega) = -e^{i\omega} \bar{H}(\omega + \pi)$. При этом Фурье образ вейвлета имеет вид $\hat{\psi}(2\omega) = G(\omega)\hat{\phi}(\omega)$.

7.3 Быстрое вейвлет-преобразование

Для ортогональных вейвлетов существует быстрое вейвлет-преобразование, называемое также *алгоритмом Малла*. Оно реализует основанный на фильтрации итерационный алгоритм, причём число итераций N может быть произвольным.

Быстрое вейвлет-преобразование можно осуществлять, вычисляя аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты в известной формуле реконструкции по формулам:

$$a_{j+1,k} = \sum_m h_m a_{j,2k+m} \quad \text{и} \quad d_{j+1,k} = \sum_m g_m a_{j,2k+m},$$

при

$$a_{0,k} = \int f(t)\varphi(t - k)dt.$$

Однако классическая схема Малла предполагает рекурсивное применение процедуры декомпозиции и реконструкции сигнала в частотной области без явного вычисления a и d .

Первый шаг алгоритма Малла:

сигнал s подаётся на фильтры декомпозиции низких и высоких частот, после чего с помощью операции децимации (уменьшения числа частотных составляющих вдвое $\downarrow 2$) можно получить коэффициенты аппроксимации на выходе фильтра нижних частот и детализирующие коэффициенты на выходе фильтра высоких частот,

второй шаг алгоритма Малла:

с полученными аппроксимирующими коэффициентами первого уровня разложения вместо сигнала s проводится операция первого шага,

последующие шаги алгоритма Малла:

с полученными аппроксимирующими коэффициентами всё более глубокого уровня разложения вместо сигнала s проводится операция первого шага.

В результате получается набор аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов, вплоть до уровня декомпозиции $j+1$. Это быстрая **вейвлет-декомпозиция (разложение)** сигнала. По этому набору коэффициентов строится вейвлет-спектрограмма сигнала для оценки его особенностей.

При быстрой **вейвлет-реконструкции (восстановлении)** сигнала производится операция обратная децимации (увеличение числа частотных составляющих вдвое $\uparrow 2$ за счёт добавления нулевых компонентов попеременно с имеющимися) и фильтрация с помощью фильтров реконструкции высоких и низких частот. Это понизит уровень декомпозиции. Проведя подобную операцию многократно можно получить постепенное приближение к исходному сигналу.

7.4 Фильтры вейвлетов

Таким образом, в технике вейвлет-преобразования весьма успешным оказался частотный подход, основанный на особенностях квадратурных фильтров. В системах компьютерной математики для обработки данных создаются вейвлет-фильтры низких и высоких частот. Каждый из фильтров представляет собой пару наборов коэффициентов разного уровня – аппроксимирующих коэффициентов, грубо представляющих сигнал, и детализирующих коэффициентов:

- LoD – низкочастотный фильтр декомпозиции (разложения),
- HiD – высокочастотный фильтр декомпозиции (разложения),
- LoR – низкочастотный фильтр реконструкции (восстановления),
- HiR – высокочастотный фильтр реконструкции (восстановления).

Но из теории фильтрации сигналов хорошо известно, что если одни и те же фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) используются и для разложения и для восстановления, то симметричное и точное восстановление сигнала невозможно. Исключением в этом случае является фильтр Хаара.

Для ортогонального вейвлета одно из фундаментальных соотношений – это соотношение со сдвоенным масштабом:

$$\frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n \varphi(x - n).$$

Все фильтры, используемые при прямом дискретном вейвлет-преобразовании и при обратном дискретном вейвлет-преобразовании, тесно

связаны с последовательностью $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Если функция φ имеет компактный носитель, то последовательность (w_n) конечна и может рассматриваться как КИХ-фильтр, т.е. фильтр с конечной импульсной характеристикой.

Для некоторых вейвлет-фильтров для дискретного случая представим характеристики в виде линейчатых диаграмм коэффициентов и в виде частотных характеристик и отобразим их на рисунках.

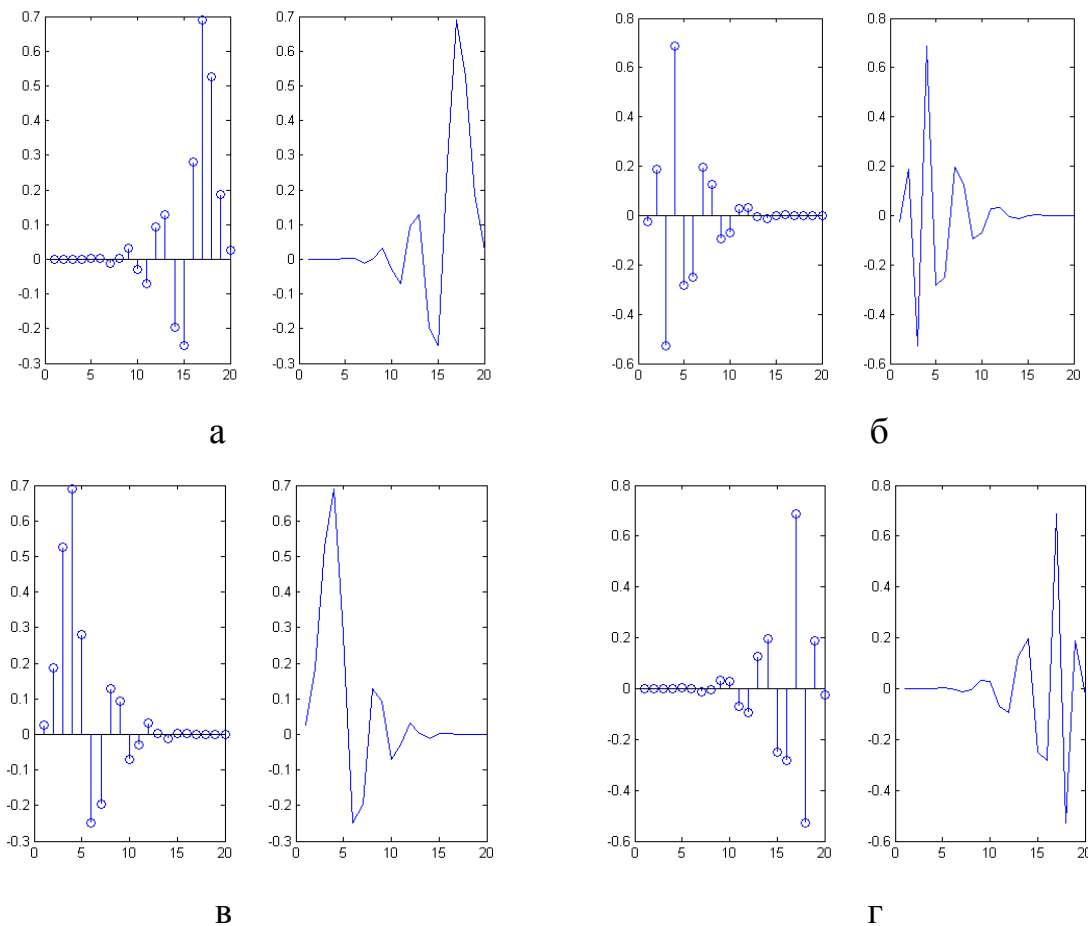


Рис. 7.1 – Линейчатые диаграммы коэффициентов и частотные характеристики вейвлет-фильтров разложения и восстановления ортогонального вейвлета

Добеши (db10):

а – LoD, б – HiD, в – LoR, г – HiR

С биортогональными фильтрами используются два вейвлета вместо одного:

– один вейвлет ψ используется в анализе и коэффициенты сигнала s

следующие:
$$c_{j,k} = \int s(k) \psi_{j,k}(x) dx ;$$

– другой вейвлет $\tilde{\psi}$ используется при синтезе:
$$s = \sum_{j,k} c_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k} .$$

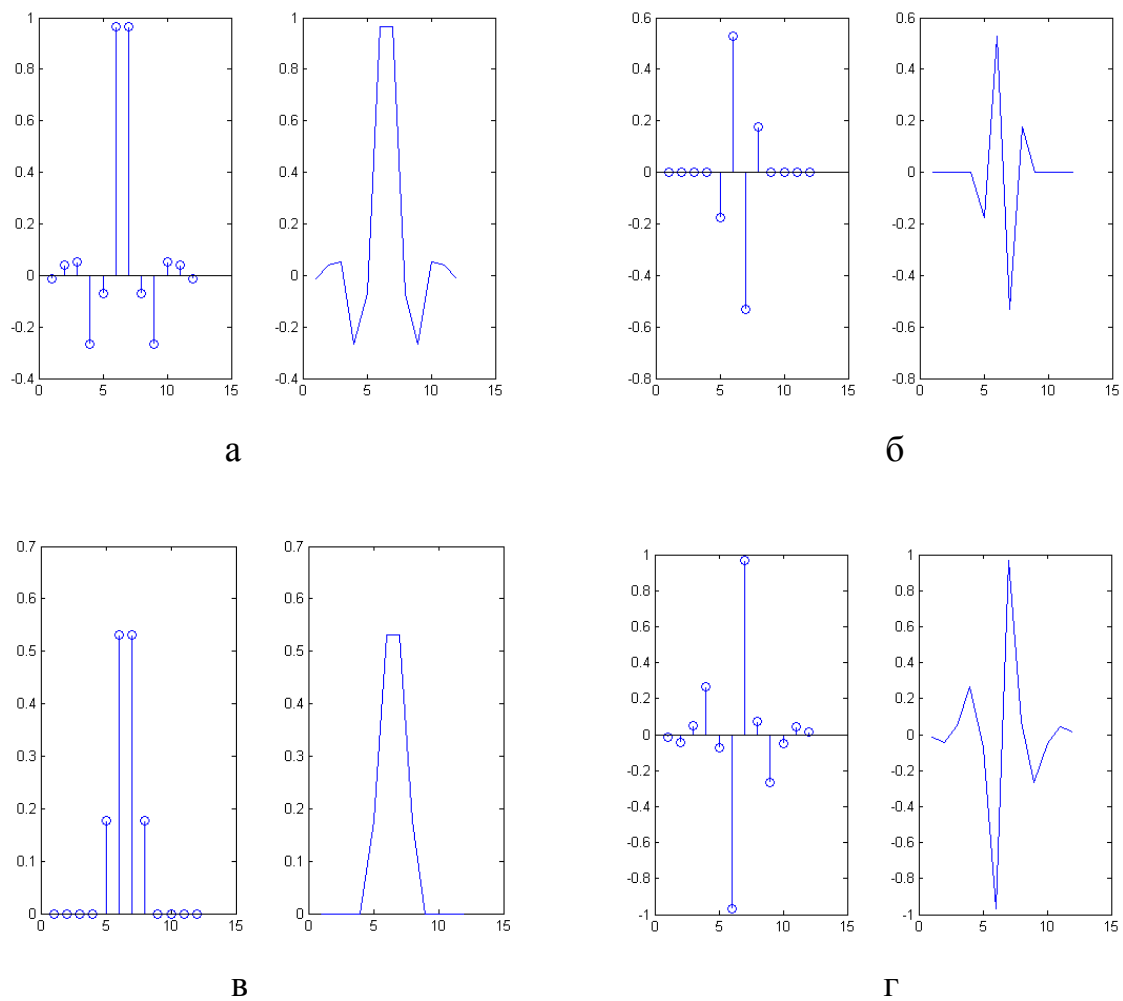


Рис. 7.2 – Линейчатые диаграммы коэффициентов и частотные характеристики вейвлет-фильтров разложения и восстановления биортогонального вейвлета (bior3.5)
а – LoD, б – HiD, в – LoR, г – HiR

ЛЕКЦИЯ 8 ОСНОВЫ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

8.1 Вейвлет-разложение

Фурье–анализ состоит из двух *основных этапов*. Сначала находится разложение функции $f(x)$, т. е. нахождение коэффициентов Фурье c_n и их анализ, а затем производится восстановление функции $f(x)$ по, может быть, измененным коэффициентам c_n .

Пусть $\{x_n\}$, $n \in Z$ – некоторый сигнал. В целях анализа **в соответствии с частотным подходом** выделим его низкочастотную $\{x_n^H\}$ и высокочастотную $\{x_n^G\}$ части.

При разложении сигнала получаем обе компоненты $x(t) = x^H(t) + x^G(t)$.

Низкочастотная компонента $x^H(t)$ сигнала после фильтрации отличается от функции $x(t)$ всего сигнала тем, что её преобразование Фурье $\hat{x}(\omega)$ имеет носитель на промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$. При разложении $A(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ фильтр h из последовательности $\{x_n\}$ производит последовательность $\{a_n\}$ средних арифметических

$$a_n = \sum_{k \in Z} h_k x_{n-k} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} x_{n-1}$$

сглаживая колебания последовательности $\{x_n\}$, т.е. низкочастотный фильтр сглаживает колебания.

Высокочастотная компонента $x^G(t)$ выделяется вне промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$ с помощью фильтра g . Его передаточная функция подавляет низкие частоты (близкие к нулю) и пропускает высокие. Поэтому в области значений действие этого фильтра $D(\omega) = G(\omega)X(\omega)$ дает новый сигнал

$$d_n = \sum_{k=0}^1 g_k x_{n-k} = \frac{x_n - x_{n-1}}{2}$$

который имеет смысл первой конечно-разностной производной сигнала x , (точнее, ее половины). Новый сигнал $\{d_n\}$ отражает колебания последовательности $\{x_n\}$.

Таким образом, при анализе сигнала получим

$$x_n = a_n + d_n.$$

Это означает, что сигнал $\{x_n\}$ разложен на сглаженную часть $\{a_n\}$ и высокочастотную компоненту $\{d_n\}$.

По теореме Котельникова-Шеннона функция $x^H(t)$ может быть

восстановлена по её чётным значениям $x^H(2n) = x_{2n}^H$. Следовательно, значения $x_{2n+1}^H = x^H(2n+1)$ с нечетными номерами полностью определяются четными элементами $\{x_{2n}^H\}$. Поэтому при анализе нечетные значения из последовательности $\{x_n^H\}$ могут быть без ущерба удалены (децимация $2\downarrow$). Обычно так и делается в целях экономии. Высокочастотная компонента $x^G(t)$ сигнала после фильтрации также в соответствии с теоремой Котельникова-Шеннона может быть подвергнута операции децимации.

Вейвлет-разложение сигнала производится по изложенной выше схеме, но многократно.

К сигналу $x = \{x_n\}$ применяется низкочастотный фильтр разложения $\{h_n\}$ с децимацией для получения сглаженной составляющей $A = \{A_k\}$. Затем применяется высокочастотный фильтр разложения $\{g_n\}$ с децимацией для получения деталей $D = \{D_k\}$, которые были потеряны при сглаживании. Коэффициенты $A = \{A_k\}$ называются коэффициентами аппроксимации первого уровня разложения и обозначаются $A_1 = \{A_{1,k}\}$. Коэффициенты $D = \{D_k\}$ называются детализирующими коэффициентами первого уровня разложения и обозначаются $D_1 = \{D_{1,k}\}$.

Далее процедура разложения применяется к набору коэффициентов A_1 и получаются коэффициенты второго уровня разложения $A_2 = \{A_{2,m}\}$ и $D_2 = \{D_{2,m}\}$ (рис. 8.1).

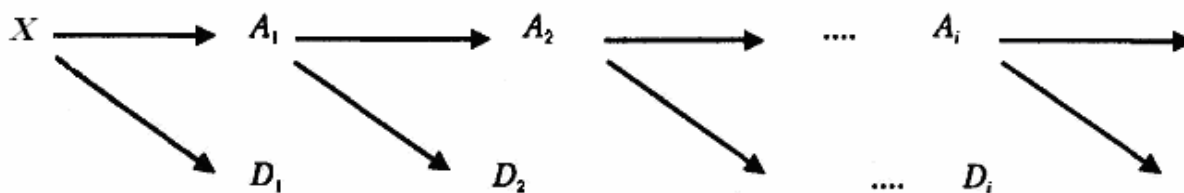


Рис. 8.1 – Схема вейвлет-разложения сигнала

После каждого шага количество и аппроксимирующих коэффициентов A и детализирующих коэффициентов D уменьшается в два раза.

Повторяя необходимое число j раз процедуру разложения сигнала, получим вместо сигнала $x = \{x_n\}$ серию коэффициентов

$$(A_j, D_j, D_{j-1}, D_{j-2}, \dots, D_1).$$

По этому набору коэффициентов можно строить вейвлет-спектрограмму сигнала для оценки его особенностей.

Итак, **вейвлет-разложением** функции x называется нахождение спектра её вейвлет-коэффициентов

$$(A_j, D_j, D_{j-1}, D_{j-2}, \dots, D_1),$$

а **вейвлет-анализ** сигнала заключается теперь в изучении и обработке полученных коэффициентов разных уровней.

Таким образом, собственно **вейвлет-анализ** состоит из следующих шагов:

- выбирается достаточно высокий уровень разрешения j , такой, что аппроксимация $P_j(x)$ достаточно точно отражает функцию $f(x)$.

Практически здесь проблем не возникает, поскольку функция $f(x)$ обычно задается массивом значений. Эти значения и берутся за начальное приближение $P_j(f)$,

- выбирается глубина разложения N и находятся коэффициенты разложения $(A_N, D_N, D_{N-1}, D_{N-2}, \dots, D_1)$, эти коэффициенты анализируются и изменяются в случае необходимости,
- восстанавливается функция $f(x)$, с использованием возможно измененных коэффициентов разложения:

$$f(x) \approx \sum_{k \in Z} a_{j-N,k} \varphi_{j-N,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j-N,k} \psi_{j-N,k}(x) + \dots + \sum_{k \in Z} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x).$$

В итоге, для вейвлет-преобразования функции $f(x)$ необходимо вычислить серию коэффициентов $(A_N, D_N, D_{N-1}, D_{N-2}, \dots, D_1)$, причём каждый коэффициент находится интегрированием

$$a_{j-N,k} = \langle f, \varphi_{j-N,k} \rangle = \int_R f(x) \overline{\varphi_{j-N,k}}(x) dx,$$

$$d_{j-m,k} = \langle f, \psi_{j-m,k} \rangle = \int_R f(x) \overline{\psi_{j-m,k}}(x) dx,$$

где $m=1, 2, \dots, N$, поэтому отсюда и возникает проблема вычисления большого количества интегралов с необходимой точностью. БВП позволяет решить эту проблему.

8.2 Вейвлет-восстановление

Кроме процедуры разложения, должна быть еще предусмотрена и процедура синтеза (восстановления, реконструкции) сигнала $\{x_n\}$ по его компонентам.

Из уравнения $x_n = a_n + d_n$ также следует, что подобным несложным образом может быть осуществлено восстановление (реконструкция) сигнала $\{x_n\}$.

Из теории фильтров известно, что при восстановлении сигналов в операции суммирования коэффициентов фильтров участвуют только чётные коэффициенты. Таким образом, восстановление сигнала $x(t)$ по низкочастотным компонентам $x^H(t)$ и высокочастотным компонентам $x^G(t)$ производится в следующем порядке:

- добавляются нечётные нулевые значения в массивы $\{x^H(t)\}$ и $\{x^G(t)\}$ (операция обратная децимации $2\uparrow$),
- к полученным массивам $\{x^H(t)\}$ и $\{x^G(t)\}$ применяется фильтрация с помощью фильтров восстановления $\{\tilde{h}_n\}$ и $\{\tilde{g}_n\}$.

Таким образом, при вейвлет-разложении используются сопряженные

фильтры $\bar{H}(\omega)$ и $\bar{G}(\omega)$ вейвлетов, а для вейвлет-восстановления используются фильтры $H(\omega)$ и $G(\omega)$ вейвлетов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

8.3 Вейвлет-пакетная обработка

При обычном алгоритме Малла на каждом шаге „отрезается” половина низкочастотной части диапазона сигнала. Реализация этого алгоритма исходит из общего представления о большей информативности низкочастотной части спектра сигнала, что для многих видов сигнала (например, цифровых) не всегда справедливо.

Поэтому вполне естественно применить процедуру разложения не только к аппроксимирующим коэффициентам A_j , но и к детализирующим коэффициентам D_j . Тогда коэффициенты разложения изображаются в виде дерева, наверху которого находится анализируемый сигнал $x=\{x_n\}$. Все ветви, идущие влево, указывают на аппроксимирующие коэффициенты, а все ветви, идущие вправо, указывают на детализирующие коэффициенты предыдущего узла. Узлы, в которых находятся коэффициенты разложения, удобно нумеровать так, как показано на рис. 8.2 или на рис. 8.3.

Обычное вейвлет-разложение и соответствующие коэффициенты выделены утолщёнными линиями слева на рис. 8.2. Таким образом, появляется гораздо больше возможностей для разложения – от „минимального” вейвлет-разложения до полного **пакетного разложения** на всех уровнях.

Схеме на рис. 8.3 можно дать истолкование применительно к вейвлетам. В этом случае происходит замена вейвлета $\psi(t)$ два новых вейвлета:

$$\psi_1(t) = \sum h_n \psi(t - n) \quad \text{и} \quad \psi_2(t) = \sum g_n \psi(t - n),$$

и так далее. Новые вейвлеты тоже локализованы во времени (пространстве), но на вдвое более широком отрезке, чем исходный вейвлет. Этому бинарному дереву разложения соответствует набор подпространств с базисами, построенными аналогичным образом. Функции, порождающие эти базисы, называются **вейвлет-пакетами**.

Преобразование с помощью вейвлет-пакетов является адаптивным вейвлет-преобразованием, поскольку оно легко приспособливается к особенностям сигнала и может успешно использоваться для компрессии сигналов, очистки их от шумов. В частности, имеется возможность отсечения некоторых ветвей детализирующих коэффициентов дерева.

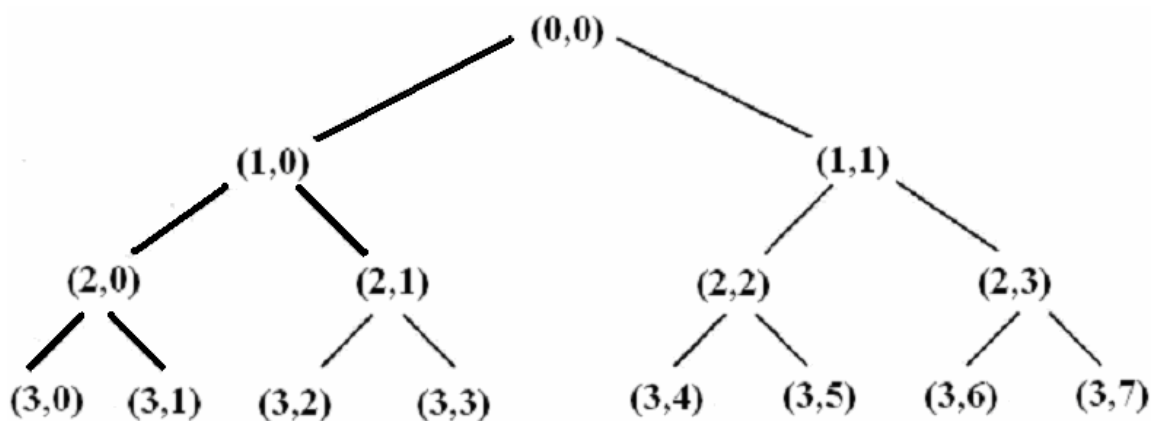


Рис. 8.2 – Схема пакетного разложения сигнала

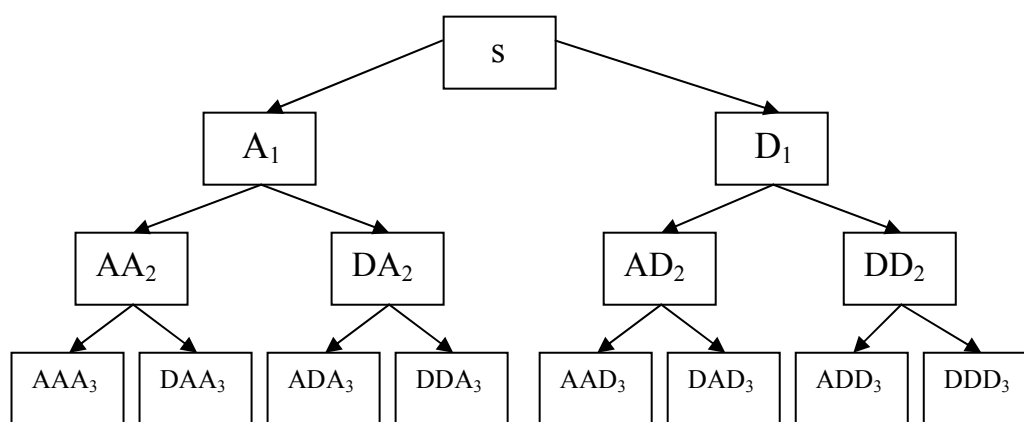


Рис. 8.3 – Структура вейвлет-представления сигнала для пакетных вейвлетов

Достоинством, а в какой-то мере и недостатком, вейвлет-пакетов и адаптивных алгоритмов их реализации является отсутствие необходимости в обучении системы (характерном, например, для систем на основе нейронных сетей) и даже в оценке статистических характеристик сигналов. Все, что нужно, – это ввести оценку стоимости вейвлет-коэффициентов, мерой которой может служить энтропия – концентрация числа вейвлет-коэффициентов, требующихся для описания сигнала с некоторой заданной точностью (или погрешностью).

Существует много вариантов базисов разложения сигнала. Из большого числа представителей нужно выбрать тот вариант базиса, разложение по которому представляет сигнал наиболее эффективно. Под „эффективным” подразумевается то, что сигнал должен быть представлен *небольшим количеством коэффициентов разложения*. Т.е. базис для разложения должен быть таким, что большие коэффициенты были бы сконцентрированы на небольшом количестве элементов вейвлет-пакетного базиса, а большая часть коэффициентов была бы близка к нулю.

В этом случае в качестве критерия для выбора самого эффективного или наилучшего базиса для данного сигнала также используется *критерий*

минимальности энтропии.

Энтропия характеризует усреднённость, „размазанность” сигнала или концентрацию числа вейвлет-коэффициентов, требующихся для описания сигнала с некоторой заданной точностью. Энтропия должна обладать свойством аддитивности (объединения) по отношению к сигналам.

Существует несколько вариантов определения энтропии.

Рассмотрим в качестве примера энтропию Шеннона.

Пусть s – сигнал и s_i – его значения. Полагаем сигнал нормализованным $\sum_i s_i^2 = 1$. Энтропия Шеннона определяется формулой $E(s) = -\sum_i s_i^2 \log_2(s_i^2)$ при следующем соглашении: $0 \cdot \log 0 = 0$. Использование суммы обеспечивает свойство аддитивности по отношению к объединению массивов, задающих сигналы.

Лучший базис – это тот базис, который даёт **наименьшее количество энтропии**. Энтропия, определённая выше, даёт критерий того, сколько эффективных компонент необходимо, чтобы представить сигнал в определённом базисе. Например, если в некотором базисе при разложении получаем все нулевые коэффициенты, кроме одного (т.е. сигнал совпадает с базисной функцией), тогда энтропия достигает своего минимального значения – нуля. С другой стороны, если в некотором базисе коэффициенты разложения все одинаково важны и $s_i = 1/\sqrt{N}$, где N является длиной сигнала, энтропия в этом случае принимает максимальное значение, равное $\log_2 N$. Любое другое разложение находится между этими двумя крайними случаями. Таким образом, **чем меньше энтропия, тем меньше существенных коэффициентов нужно для представления сигнала.**

Практически для выбора оптимального базиса критерий энтропии используется следующим образом: если при разложении коэффициентов некоторого узла сумма энтропий, полученных при разложении компонент, меньше, чем энтропия коэффициентов в исходном узле, то разложение применяется, в противном случае коэффициенты вместе с базисными функциями остаются без изменения.

8.4 Возможности вейвлет-анализа

Имея вейвлет-спектры, можно вычислить полезные характеристики изучаемого процесса и проанализировать многие его свойства. Рассмотрим подробнее некоторые возможности анализа особенностей сигнала и его энергетических характеристик.

Анализ локальной регулярности

Рассмотрим некоторые следствия свойства масштабной инвариантности.

Вейвлет-преобразование так устроено, что $W(a,t)$ – регулярная функция даже при нерегулярной $f(t)$. Вся информация о возможной особенности $f(t)$

(локализация t_0 , интенсивность c , показатель α) заключена в асимптотическом поведении коэффициентов $W(a, t_0)$ при малых a . Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, то f имеет особенность в t_0 . Если они, напротив, близки к нулю в окрестности t_0 на малых масштабах, то f в точке t_0 регулярна.

Описанное свойство часто и успешно используется при анализе фрактальных и мультифрактальных сигналов. Типичным свойством фрактальных множеств является их асимптотическое самоподобие. Анализ мультифрактального множества позволяет определить спектр показателей и спектр размерностей.

Можно отметить, что анализ локальной регулярности в некотором смысле универсален – он не зависит от выбора анализирующего вейвлета.

Энергетические характеристики

Из существования для вейвлет-преобразования аналога равенства Парсевала следует, что в пространстве действительных функций полная энергия сигнала f может быть записана через амплитуды вейвлет-преобразования в виде

$$E_f = \int f^2(t) dt = C_\psi^{-1} \iint W^2(a, b) \frac{da db}{a^2}.$$

Плотность энергии сигнала $E_W(a, b) = W^2(a, b)$ характеризует энергетические уровни исследуемого сигнала $f(t)$ в пространстве $(a, b) = (\text{масштаб}, \text{время})$.

Вейвлет спектр может отражать тот факт, что энергия неравномерно распределена по масштабам – могут оказаться выделенные масштабы, он может демонстрировать стационарную или нестационарную структуру анализируемого процесса с элементами квазипериодичности, с эволюционирующими частотами и с диапазонами локальных периодичностей на разных масштабах.

Локальный спектр энергии

Одной из основных особенностей вейвлет-преобразования является возможность получать локализованные характеристики и изучать локальные свойства процессов. Природа вейвлет-преобразования такова, что термин „локальный энергетический спектр” имеет право на существование.

Зная плотность энергии $E_W(a, b)$, можно с помощью окна определить локальную плотность энергии в точке b_0 (или t_0):

$$E_\xi(a, t_0) = \int E_W(a, b) \xi\left(\frac{b - t_0}{a}\right) dt.$$

Оконная функция ξ „поддерживает” диапазон около t_0 и удовлетворяет равенству

$$\int \xi(b) db = 1.$$

Если в качестве ξ выбрать функцию Кронекера, то локальный спектр энергии

примет вид

$$E_{\delta}(a, t_0) = W^2(a, t_0).$$

Эта характеристика позволяет проанализировать временную динамику передачи энергии процесса по масштабам – обмен энергией между составляющими процесс компонентами разного масштаба в любой заданный момент времени.

Глобальный спектр энергии

Полная энергия распределена по масштабам в соответствии с глобальным спектром энергии коэффициентов вейвлет-преобразования

$$E_W(a) = \int W^2(a, b) db = \int E_W(a, b) db.$$

Его называют также шкалограммой (scalogram) или дисперсией вейвлет-преобразования.

На рисунке 8.4а представлены спектр мощности $E_F(\omega)$ потока ионов солнечного ветра и шкалограмма E_W – глобальный спектр энергии коэффициентов вейвлет-преобразования того же сигнала. Спектры достаточно хорошо согласуются, но спектр, вычисленный по коэффициентам вейвлет-преобразования, – гораздо более гладкая кривая. Причина заключается в том, что вейвлет-спектр энергии сигнала E_W соответствует сглаженному спектру мощности E_F . Это можно показать, выразив спектр энергии $E_W(a)$ через спектр энергии сигнала в пространстве Фурье $E_F(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$:

$$E_W(a) = \int E_F(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega.$$

Легко видеть, что шкалограмма E_W соответствует спектру мощности E_F , сглаженному на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего вейвлета.

Вейвлет-преобразование, предоставляющее как бы временную развертку спектра, позволяет получить и более локализованную энергетическую информацию. На рис. 8.4б представлены четыре шкалограммы $E_W(a)$, полученные сверткой не по всей длине ряда, а отдельно для каждой четвертой его части. На том же рисунке для сравнения приведен глобальный спектр (на рис. 8.4а он показан в зависимости от частоты, на рис. 8.4б шкалограммы показаны в зависимости от масштаба, который растет вверх). Шкалограммы, полученные по диапазонам, позволяют проследить эволюцию распределения энергии по масштабам.

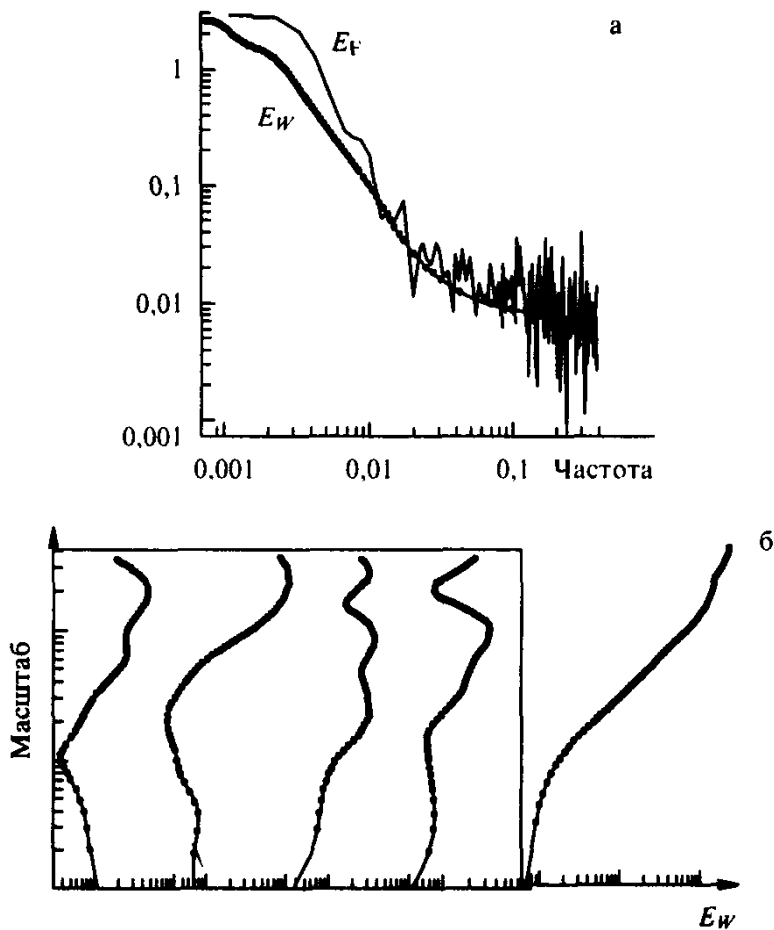


Рис. 8.4 – Энергетические спектры потока ионов солнечного ветра
 а–спектр мощности E_f и шкалограмма E_w в зависимости от частоты,
 б–шкалограммы для четырех временных диапазонов (в рамке) и полная
 шкалограмма в зависимости от масштаба

Энергия сигнала определяется через спектр энергии равенством

$$E_f = C_{\psi}^{-1} \int E_w(a) \frac{da}{a^2}.$$

Таким образом, величина E_f пропорциональна площади под кривой $E_w(a)/a^2$, а шкалограмма отражает относительный вклад различных масштабов в полную энергию и выявляет распределение энергии процесса по масштабам.

Анализируемая функция имеет конечную энергию, а анализирующий вейвлет – нулевое среднее значение, вследствие чего спектр энергии $E_w(a)$ должен стремиться к нулю на обоих концах шкалы масштабов и должен иметь, по крайней мере, один максимум. Положение подобных максимумов (пиков) спектра Фурье $E_f(\omega)$ привычно связывается с частотами и соответствующими характерными модами анализируемого сигнала, несущими в себе основную энергию процесса. Максимумы энергетического спектра $E_w(a)$

интерпретируются аналогично – они определяют масштабы процесса, вносящие основной вклад в полную энергию E_f .

Распространяя результат на произвольный сигнал, даже негармонический, предполагаем, что положение максимума спектра $E_W(a)$ (т.е. выявленный масштаб) можно интерпретировать как среднюю продолжительность элементарного события (событий), вносящего основной вклад в энергию анализируемого процесса.

Мера локальной перемежаемости

$$I_W(a, t) = \frac{E_W(a, t)}{\langle E_W(a, t) \rangle_t}$$

– мера локальных отклонений от среднего поля спектров на каждом масштабе; она позволяет определить степень неравномерности распределения энергии по масштабам (угловыми скобками обозначено усреднение).

Равенство $I_W(a, t) = 1$ при всех a и t означает, что энергия распределена равномерно и все локальные спектры энергии одинаковы; $I_W(a, t_0) = \alpha$ означает, что вклад компоненты масштаба a в точке t_0 в α раз превосходит усредненный по всем t .

Мера контрастности

$$C_W(a, t) = \frac{E_W(a, t)}{E'_W(a, t)}, \text{ где } E'_W(a, t) = \int_{a'=0}^{a'=0} E_W(a', t) da',$$

позволяет определять даже малые изменения в сигнале, когда необходимо, например, выявить структурированность слабого сигнала или слабые вариации на фоне крупной структуры (встроенные структуры).

ЛЕКЦИЯ 9 ОДНОМЕРНЫЙ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ

9.1 Дискретный одномерный вейвлет-анализ

Одноуровневый дискретный одномерный вейвлет-анализ

При проведении одноуровневого дискретного одномерного вейвлет-анализа используются **прямое и обратное** одноуровневое дискретное одномерное вейвлет-преобразование.

При **совершении прямого дискретного вейвлет-преобразования** вычисляются аппроксимирующие коэффициенты cA и детализирующие коэффициенты cD первого уровня вейвлет-преобразования сигнала, заданного вектором s . Коэффициенты получаются свёрткой сигнала s с фильтром разложения нижних частот LoD для аппроксимации и с фильтром разложения высоких частот HiD для детализации, а затем сопровождаются двоичной децимацией. Структурная схема такого анализа приведена на рис. 9.1.

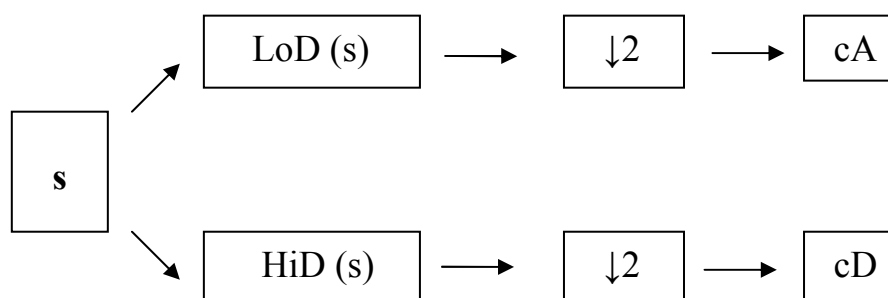


Рис. 9.1 – Структурная схема одноуровневого дискретного одномерного вейвлет-анализа

Применение фильтров к сигналам конечной длины может привести к тому, что граничные значения выходного сигнала могут быть не определены или искажены. Тогда крайние элементы нового массива не определены, поскольку отсутствуют значения x_{-1} и x_{N+1} , необходимые для вычисления y_0 и y_N . Если фильтр несимметричный, то неопределённость может возникнуть на одном конце. Проблема решается добавлением нулей в нужном количестве, либо расширением массива x по периодичности. Можно также корректировать значения выходного массива y . В существующих системах компьютерной математики проблема эта решается следующими способами:

- симметричное, относительно граничного значения, дополнение,
- дополнение нулями,
- гладкое дополнение первого порядка (экстраполяция первой производной),
- непрерывное продолжение (постоянное продолжение первого значения – влево и последнего значения – вправо),

- периодическое продолжение значений.

При совершении **обратного одноуровневого дискретного одномерного вейвлет-преобразования** по известным аппроксимирующим коэффициентам cA и детализирующим коэффициентам cD первого уровня вычисляются значения сигнала s с использованием прямого вычисления либо фильтров реконструкции LoR, HiR, т.е. восстановление производится в обратном порядке. В коэффициенты cA и cD добавляются нули на нечётные места, и далее производится свёртка полученных массивов с фильтрами реконструкции LoR и HiR или прямое вычисление. Можно осуществить восстановление и по одному типу коэффициентов – только по аппроксимирующим коэффициентам или только по детализирующим коэффициентам.

Многоуровневый дискретный одномерный вейвлет-анализ

При проведении многоуровневого дискретного одномерного вейвлет-анализа возможно выполнение нескольких различных операций:

- многоуровневое одномерное вейвлет-разложение,
- многоуровневое одномерное вейвлет-восстановление,
- вычисление аппроксимирующих коэффициентов одномерного сигнала,
- вычисление детализирующих коэффициентов одномерного сигнала,
- одноуровневая реконструкция одномерного вейвлет-разложения,
- восстановление сигнала по одной ветви вейвлет-коэффициентов,
- прямое восстановление сигнала из коэффициентов,
- прямое и обратное дискретное вейвлет-преобразование стационарного сигнала.

Проведение **многоуровневого одномерного вейвлет-разложения** сигнала s до уровня (глубины) N предусматривает вычисление аппроксимирующих коэффициентов cA_N и детализирующих коэффициентов cD_1, \dots, cD_N .

Алгоритм этого преобразования следующий: по массиву значений сигнала s вычисляются два набора коэффициентов – коэффициенты аппроксимации cA_1 и детализирующие коэффициенты cD_1 . Эти векторы получаются свёрткой сигнала s с фильтром нижних частот LoD для аппроксимации и с фильтром высоких частот HiD для детализации, а затем подвергаются двоичной децимации. На следующем шаге раскладываются коэффициенты аппроксимации cA_1 на две части, используя ту же схему с заменой s на cA_1 и производя cA_2 и cD_2 и т.д. по схеме, приведённой на рис. 9.2.

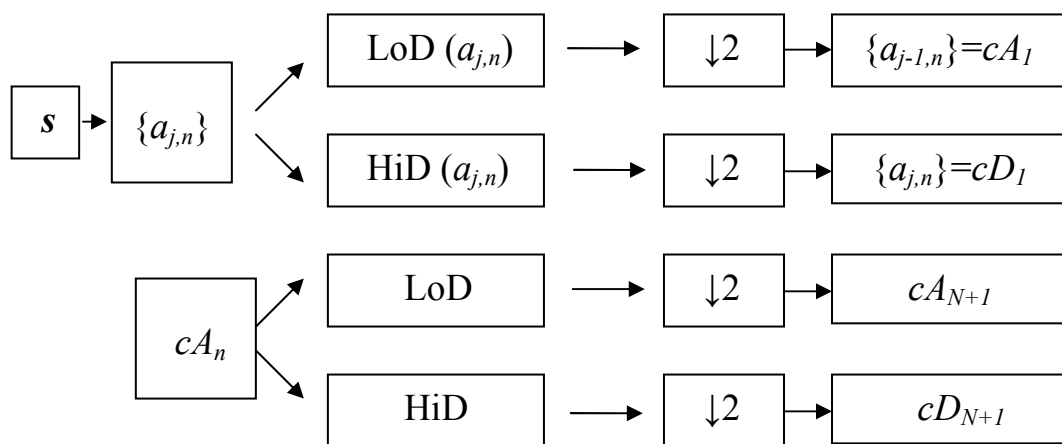


Рис. 9.2 – Структурная схема многоуровневого одномерного вейвлет-разложения

Удобно также графически изображать результаты разложения $s \rightarrow cA_0 \rightarrow \{cA_1, cD_1\} \rightarrow \{cA_2, cD_2, cD_1\} \rightarrow \dots \rightarrow \{cA_N, cD_N, cD_{N-1}, \dots, cD_1\}$ в виде дерева, изображённого на рис. 9.3.

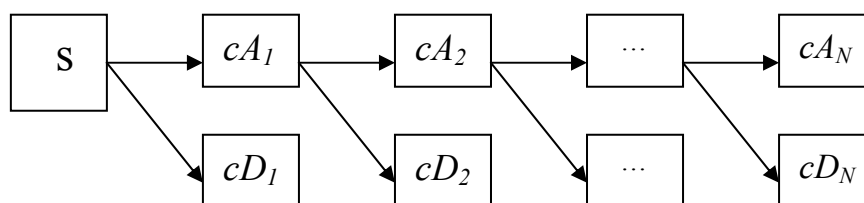


Рис. 9.3 – Дерево многоуровневого одномерного вейвлет-разложения

Таким образом, многоуровневое одномерное вейвлет-разложение сигнала s , проведённое до уровня N , является вектором $[C]$, который имеет структуру $[cA_N, cD_N, \dots, cD_1]$.

В СКМ предусмотрено отображение коэффициентов одномерного дискретного вейвлет-разложения в виде спектрограмм с цветным или яркостным отображением значений вейвлет-коэффициентов.

Проведение *многоуровневого одномерного вейвлет-восстановления* сигнала s с использованием полученных ранее векторов многоуровневого разложения до уровня (глубины) N осуществляется обратно схеме разложения.

Вычисление аппроксимирующих коэффициентов одномерного сигнала задаваемого уровня N производится с использованием полученных ранее векторов многоуровневого разложения $[C, L]$. Если найдены векторы C и L разложения сигнала до уровня N_0 , то $N_0 = \text{length}(L) - 2$ и вектор C имеет структуру $C = [cA_{N_0}, cD_{N_0}, \dots, cD_1]$.

Если $N = N_0$, тогда производится простое извлечение cA_{N_0} ; если $N < N_0$, тогда аппроксимирующие коэффициенты вычисляются с использованием обратного вейвлет-преобразования.

Вычисление детализирующих коэффициентов одномерного сигнала задаваемого уровня N производится с использованием полученных ранее векторов многоуровневого разложения $[C,L]$. Если найдены векторы C и L разложения сигнала до уровня N_0 и $0 \leq N \leq N_0$ и $N_0 = \text{length}(L) - 2$, то вектор C имеет структуру $C = [cA_{N_0}, cD_{N_0}, \dots, cD_1]$.

Сначала извлекаются детализирующие коэффициенты последнего уровня N_0 . Если N – вектор целых чисел, такой, что $1 \leq N(j) \leq N_0$, то извлекается массив ячеек коэффициентов, в котором содержатся коэффициенты уровня $N(j)$.

Одноуровневая реконструкция одномерного вейвлет-разложения проводится, если заданы векторы разложения $[C,L]$ уровня разложения N_0 . В этом случае можно найти векторы вейвлет-разложения $[NC,NL]$ уровня $N_0 - 1$, т.е. на один уровень выше.

Восстановление сигнала по одной ветви вейвлет-коэффициентов проводится, если известны векторы разложения $[C,L]$ уровня разложения N_0 . В этом случае возможно восстановление сигнала по одной ветви вейвлет-коэффициентов (аппроксимирующих или детализирующих) на уровне разложения $N \leq N_0$.

При **прямом восстановлении сигнала из вейвлет-коэффициентов** восстанавливается вектор s из коэффициентов X заданного уровня N путём применения N раз процедуры обратного вейвлет-преобразования, причём, если массив X полагается детализирующими коэффициентами, то аппроксимирующие коэффициенты берутся нулевыми, и наоборот.

Дискретный вейвлет-анализ стационарного сигнала. Обычное вейвлет-преобразование осуществляется исходя из предпосылки о не стационарности сигнала. Можно сигнал s рассматривать как случайный процесс с дискретным временем t . Этот сигнал $s(t)$ с конечной дисперсией будет стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание постоянно $M[s(t)] = m_s$, а ковариационная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$. К такому сигналу также применимы прямое и обратное дискретное вейвлет-преобразование, однако их применение имеет особенности:

- в отличие от одноуровневого вейвлет-преобразования делается многоуровневое вейвлет-преобразование,
- в отличие от обычного алгоритма вейвлет-преобразования после применения фильтров декомпозиции двоичная децимация не производится, поэтому коэффициенты cA_i и cD_i имеют ту же длину, что и исходный сигнал s . Далее к cA_i применяется аналогичная процедура,
- длина сигнала должна быть кратной 2^N , где N – уровень разложения,
- результатом вычислений могут являться: матрица AD , содержащая векторы коэффициентов в качестве строк – для $1 \leq i \leq N$ строки будут содержать детализирующие коэффициенты уровня i , а для строк $N+1$ и далее содержимым будут аппроксимирующие коэффициенты уровня N , или две матрицы – первая – матрица A аппроксимирующих коэффициентов всех уровней от 1 до N , где строками являются коэффициенты в соответствии со

своими номерами, а вторая – матрица D , состоящая из строк детализирующих коэффициентов.

9.2 Непрерывный одномерный вейвлет-анализ

Непрерывный вейвлет-анализ проводится с использованием *прямого непрерывного вейвлет-преобразования* в результате которого вычисляются вейвлет-коэффициенты одномерного сигнала.

Если сигнал $s(t)$ является дискретным, заданным выборкой значений $\{s_k\}$, то в качестве $s(t)$ можно взять кусочно-постоянную функцию, определённую следующим образом: $s(t) = s(k\Delta t) = s_k$, при $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$. Параметр b пробегает с шагом Δt значения, соответствующие длине сигнала s , т.е. $b = 1:ls$, где $ls = length(s)$. В этом случае значения масштабного параметра a также дискретны и составляют масштабный вектор la или SCALES, а коэффициенты непрерывного вейвлет-преобразования составят вектор COEFFS.

Процедура *обратного непрерывного вейвлет-преобразования* реализуется с использованием формулы обращения.

Комплексный непрерывный вейвлет-анализ осуществляется аналогично. При этом вычисляется матрица, содержащая комплексные коэффициенты в различных масштабах, причём каждая строка матрицы соответствует отдельному масштабу. Для изображения коэффициентов в этом случае необходимы два графика. Это могут быть при алгебраическом представлении графики вещественных и мнимых частей, либо – при представлении в показательной форме – графики модулей и углов.

9.3 Пакетный одномерный вейвлет-анализ

Идея пакетного вейвлет-анализа состоит в том, чтобы раскладывать не только аппроксимирующие, но также и детализирующие коэффициенты, используя тот же самый метод разложения. Эта процедура обогащает анализ, в результате появляется двоичное дерево T коэффициентов разложения, начинающееся с исходного сигнала $s(0,0)$.

При вейвлет-пакетном анализе могут выполняться следующие основные операции:

- пакетное вейвлет-разложение одномерного сигнала,
- построение дерева пакетного вейвлет-разложения,
- нумерация узлов дерева,
- вычисление коэффициентов пакетного вейвлет-преобразования,
- одномерное пакетное вейвлет-восстановление сигнала,
- восстановление сигнала по коэффициентам пакетного преобразования,
- расщепление узла вейвлет-пакетного дерева,
- обрезание пакетного дерева,
- отрезание отдельных ветвей дерева,

- определение терминальных узлов,
- запись или считывание значений в терминальные узлы дерева,
- вычисление энтропии сигнала,
- замена функции энтропии в пакетном анализе,
- построение наилучшего дерева пакетного вейвлет-разложения,
- построение дерева пакетного вейвлет-разложения наилучшего уровня.

При **пакетном вейвлет-разложении** одномерного сигнала находится полное дерево T пакетного разложения до уровня N .

Дерево пакетного вейвлет-разложения до 3 уровня этого сигнала с помощью вейвлета Хаара с использованием функции энтропии Шеннона приведено на рис.

Нумерация узлов дерева разложения возможна двумя способами: нумерация по порядку или нумерация по глубине разложения и положению на данном уровне разложения. Начальный номер исходного сигнала – 0. При нумерации по порядку всем узлам дерева присваиваются номера в виде столбца (средняя колонка чисел табл.). При втором способе нумерации образуется 2 столбца, индексы узлов – это строки, первый индекс – номер уровня, а второй – положение узла на рассматриваемом уровне, причём крайний левый узел на данном уровне всегда имеет нулевой номер.

Вычисление коэффициентов пакетного вейвлет-преобразования осуществляется в указанном узле N дерева.

Одномерное пакетное вейвлет-восстановление сигнала является обратным его пакетному вейвлет-разложению. При этом восстанавливается вектор сигнала по полному вейвлет-пакетному дереву коэффициентов T .

Восстановление сигнала по коэффициентам пакетного преобразования производится в узле N дерева разложения. При этом полагается, что коэффициенты в остальных узлах этого дерева равны нулю.

Расщепление узла вейвлет-пакетного дерева может проводиться как для одномерного вейвлет-анализа, так и для двумерного вейвлет-анализа. В этом случае к уже найденному дереву T добавляется вейвлет-разложение коэффициентов узла N .

При расщеплении узла будет выведена информация о дереве и рассчитанные значения аппроксимирующих коэффициентов cA для 10 узла, а также рассчитанные значения детализирующих коэффициентов cD для узла.

Обрезание пакетного дерева подразумевает формирование нового дерева $T1$ за счёт обрезания всех ветвей дерева T на уровне L с формированием вектора, содержащего индексы RN узлов перестроенного дерева.

Отрезание отдельных ветвей дерева T производится в узле N . При этом дополнительно устанавливаются индексы RN узлов нового дерева.

Определение терминальных (конечных) узлов дерева может проводиться с учётом разных способов нумерации узлов.

Запись (считывание) значений в терминальные узлы дерева может производиться либо в терминальный узел $NODE$ дерева и при этом

записываются какие-то иные коэффициенты COEFS в конечный узел NODE дерева, либо в терминальные узлы $N1, N2, \dots$ дерева и при этом записываются какие-то иные коэффициенты CFS1, CFS2, ... соответственно в конечные узлы $N1, N2, \dots$ дерева.

Записываемые коэффициенты обязательно должны иметь размер, соответствующий прежним коэффициентам.

После записи новых значений в конечные узлы дерева, вычисляется новое дерево $T1$ с восстановленными коэффициентами во всех узлах с учётом внесённых изменений.

Вычисление энтропии сигнала осуществляется при выборе оптимального пакетного вейвлет разложения.

Полное дерево пакетного вейвлет-разложения содержит много коэффициентов. Изучение всех полученных коэффициентов пакета затруднительно из-за их большого количества. Кроме того, некоторые из коэффициентов могут быть малоинформативными. Поэтому важно при анализе получить не всё дерево, а некоторое поддерево оптимальной величины в смысле числа коэффициентов и их информативности. Таким образом, возникает задача нахождения оптимального разложения относительно некоторого, достаточно удобного критерия.

Ранее отмечалось, что энтропия может служить оценкой информативности во многих прикладных областях, в том числе и при обработке сигналов. Поэтому для оценки дерева разложения вполне естественно использовать классические критерии на основе энтропии. Эти критерии обладают свойством аддитивности (объединения) по отношению к сигналам и дают количественные информационные оценки сигнала.

В системах компьютерной математики наиболее часто используются четыре критерия энтропии:

- энтропия Шеннона – $E_1(s) = - \sum_i s_i^2 \log(s_i^2)$, при условии $0 \cdot \log(0) = 0$,
- энтропия норма пространства l^p , $p \geq 1$ – $E_2(s) = \sum_i |s_i|^p = \|s\|_p^p$,
- энтропия логарифм энергии – $E_3(s) = \sum_i \log(s_i^2)$,
- энтропия пороговая – $E_4(s) = 1$, если $|s_i| > \varepsilon$ и 0 – в противном случае, тогда $E_4(s)$ есть число элементов сигнала, величина которых больше порогового значения ε .

Во всех приведённых случаях s является сигналом, а s_i являются отсчётами сигнала.

Могут использоваться и иные, заданные исследователем, критерии энтропии, да и не только энтропии.

Замена функции энтропии в пакетном анализе проводится при необходимости.

Построение наилучшего дерева пакетного вейвлет-разложения проводится, если получено первоначальное дерево T . Для этого дерева T могут

быть найдены наилучшее дерево пакетного вейвлет-разложения при заданной функции энтропии.

Коэффициенты вейвлет-разложения являются проекциями сигнала на базисные функции $\varphi_{jn}(x)$ и $\psi_{jn}(x)$. Энтропия характеризует усреднённость (размазанность) сигнала по базисным направлениям. Энтропия мала, когда большая часть сигнала сосредоточена на малом числе базисных направлений. Именно в этом случае коэффициентов становится меньше и информация о сигнале может быть сокращена (сжата).

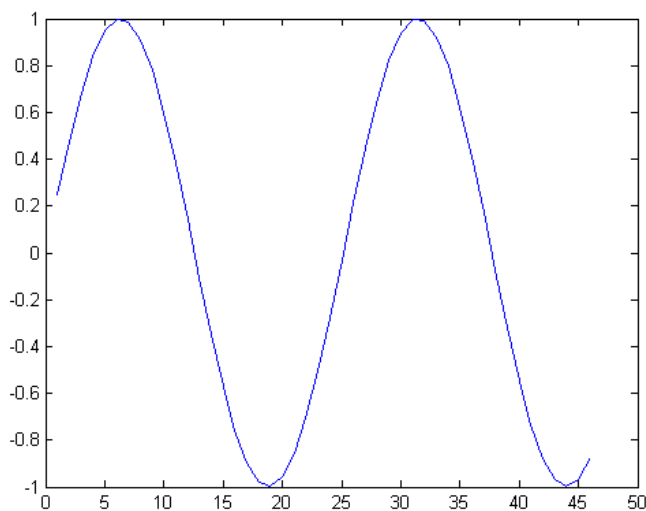
Для одномерного случая, начиная с корневого узла лучшее дерево можно найти исходя из следующего соображения:

- узел N разбивается на два узла $N1$ и $N2$ тогда и только тогда, когда сумма энтропии узлов $N1$ и $N2$ меньше, чем энтропия узла N .

Этот критерий является локальным критерием, основанным лишь на информации об узле N .

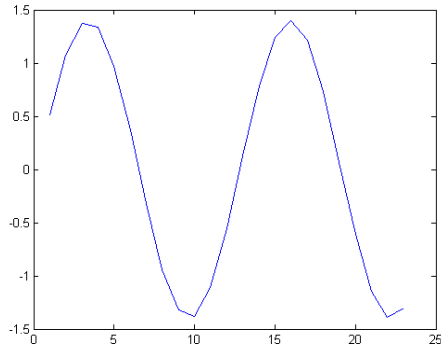
Построение дерева пакетного вейвлет-разложения наилучшего уровня отличается от построения наилучшего дерева пакетного вейвлет-разложения в том, что оптимальное дерево ищется среди полных поддеревьев начального дерева разложения, а не среди всех поддеревьев и при этом также находится полное поддерево $T1$ первоначального дерева относительно критерия энтропии. Найденное оптимальное дерево будет полным, но может иметь меньшую глубину, чем начальное.

Иллюстративный материал к лекции 9:

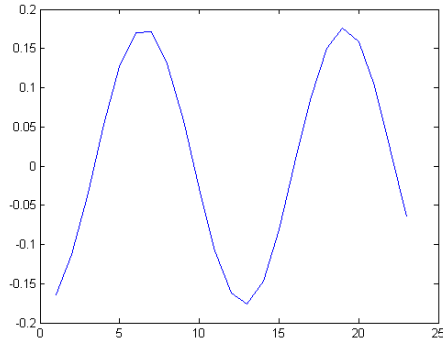


Исходный гармонический сигнал

```
[cA1,cD1]=dwt(signal2,'haar');
```



а

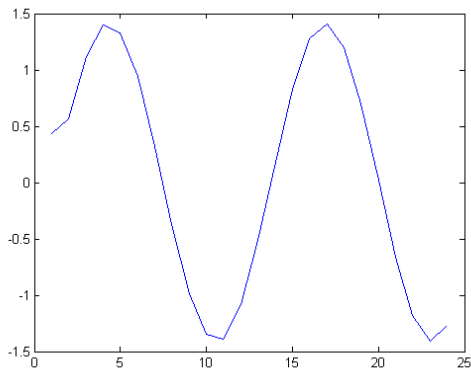


б

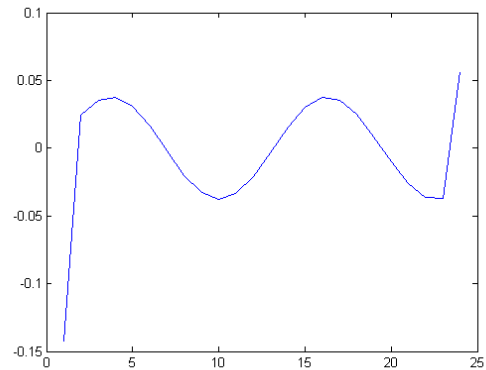
Коэффициенты вейвлет-преобразования гармонического сигнала с помощью вейвлета Хаара (haar)

а – аппроксимирующие cA, б – детализирующие cD

```
[cA2,cD2]=dwt(signal3,'db2');
```



а



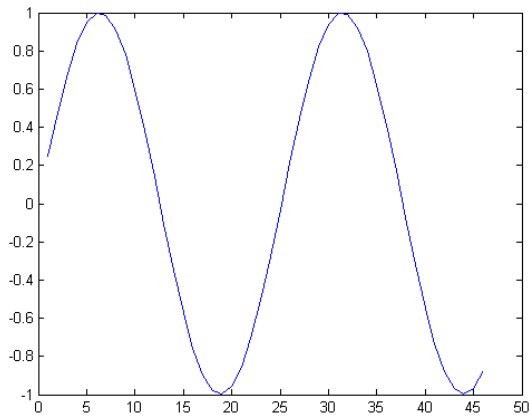
б

Коэффициенты вейвлет-преобразования гармонического сигнала с помощью вейвлета Добеши (db2)

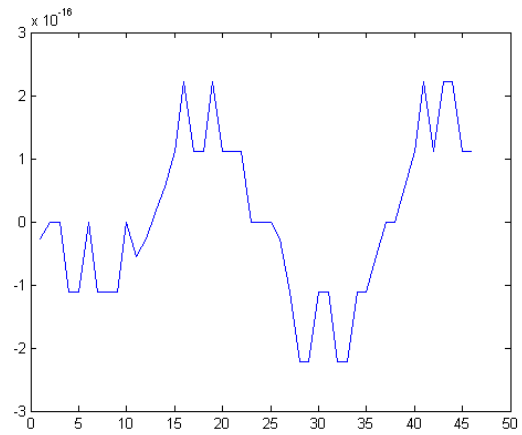
а – аппроксимирующие cA, б – детализирующие cD

Видна существенная разница в коэффициентах, полученных с использованием разных вейвлетов.

```
si2=idwt(cA1,cD1,'haar');  
razn2=signal2-si2; err2=norm(razn2)
```



а

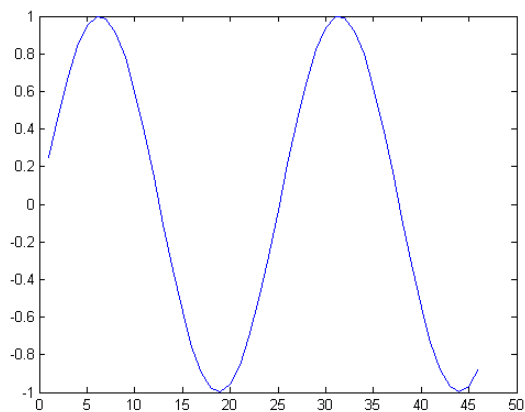


б

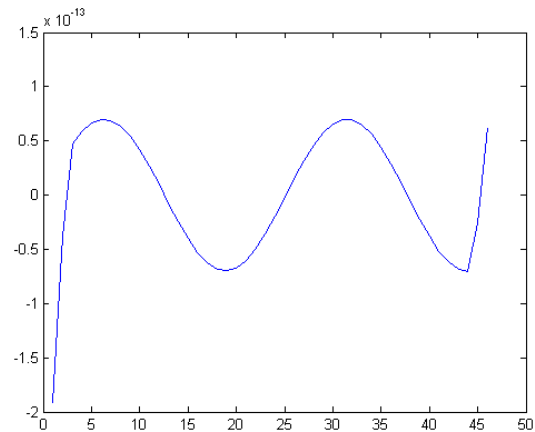
Гармонический сигнал (а), восстановленный обратным одноуровневым дискретным одномерным вейвлет-преобразованием с помощью вейвлета Хаара и график (б) его абсолютной ошибки восстановления

Максимальная суммарная абсолютная ошибка восстановления $err2=8.3969e-016$

```
[cA2,cD2]=dwt(signal3,'db2'); si3=idwt(cA2,cD2,'db2');  
razn3=signal3-si3; err3=norm(razn3)
```



а

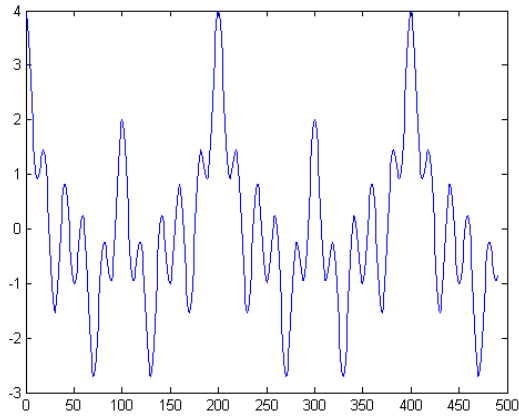


б

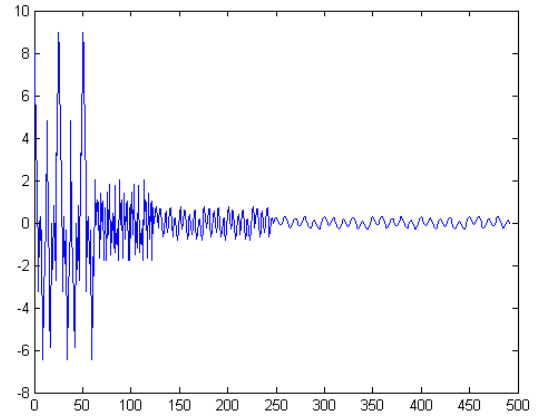
Гармонический сигнал (а), восстановленный обратным одноуровневым дискретным одномерным вейвлет-преобразованием с помощью вейвлета Добеши (db2) и график (б) его абсолютной ошибки восстановления

Максимальная суммарная абсолютная ошибка восстановления составила $err3=3.8974e-013$

```
ssumar=(s11+s12+s13+s14); [C,L]=wavedec(ssumar,3,'db1');
```



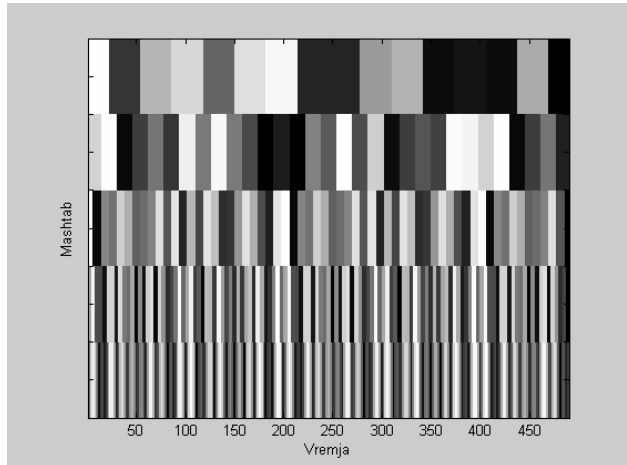
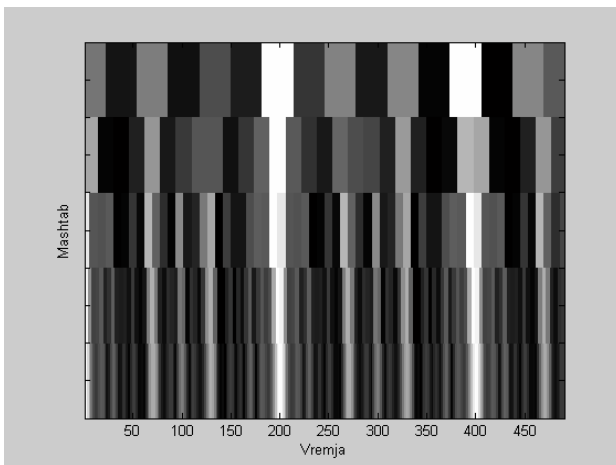
а



б

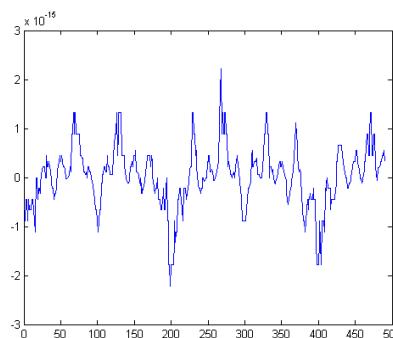
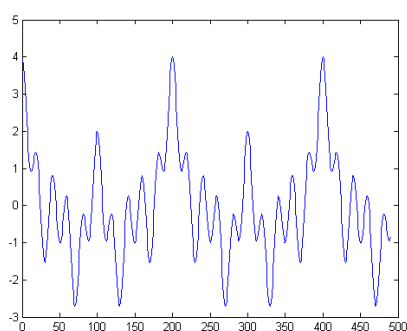
Результат одномерного вейвлет-разложения сигнала (а) до 3 уровня с помощью вейвлета Добеши (db1)

(б – коэффициенты разложения от начала координат соответственно cA_3 – 62 значения, cD_3 – 62 значения, cD_2 – 123 значения, cD_1 – 245 значений)

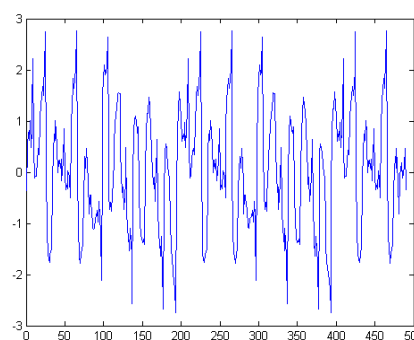
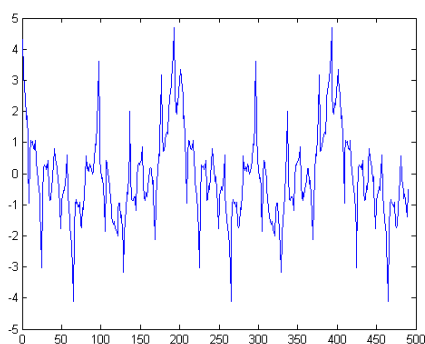


Отображение коэффициентов одномерного дискретного вейвлет-разложения в виде спектрограмм с яркостным отображением значений вейвлет-коэффициентов

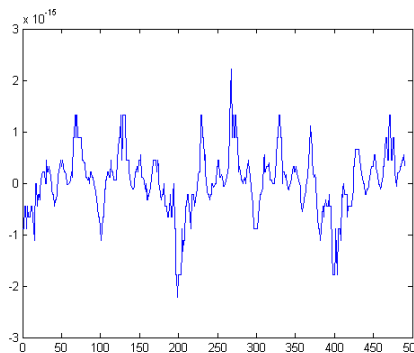
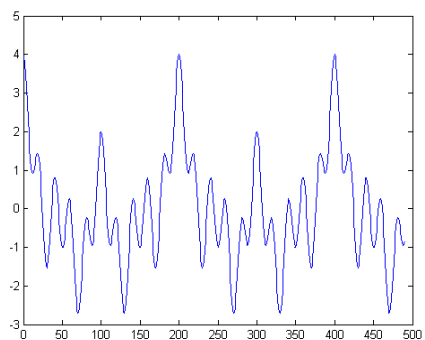
```
[C,L]=wavedec(ssumar,5,'db1'); s4=waverec(C,L,'db1');
razn4=ssumar-s4; err4=norm(razn4)
```



а



б



в

Результаты пятиуровневого одномерного вейвлет-восстановления сигнала с помощью различных вейвлетов (рисунки слева) и оценка точности восстановления сигнала различными вейвлетами (рисунки справа) а – вейвлетом Добеши (db1), б – вейвлетом Добеши (db2), б – вейвлетом Хаара (haar)

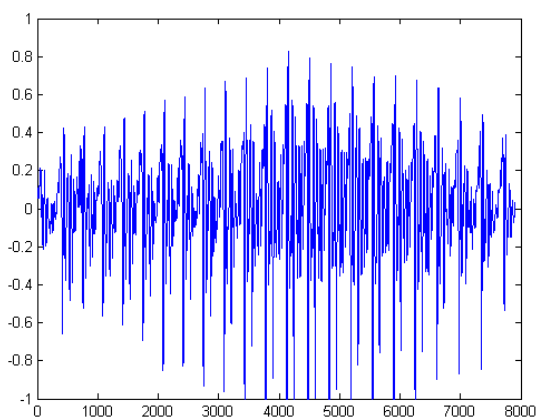
Максимальная суммарная абсолютная ошибка восстановления сигнала вейвлетом Добеши (db1) составила 1.3317e-014, вейвлетом Добеши (db2) – 25.3465 и вейвлетом Хаара (haar) – 1.3317e-014.

Сравнение результатов восстановления показывает важность правильного выбора вейвлета, для чего и требуется оценивать точность восстановления.

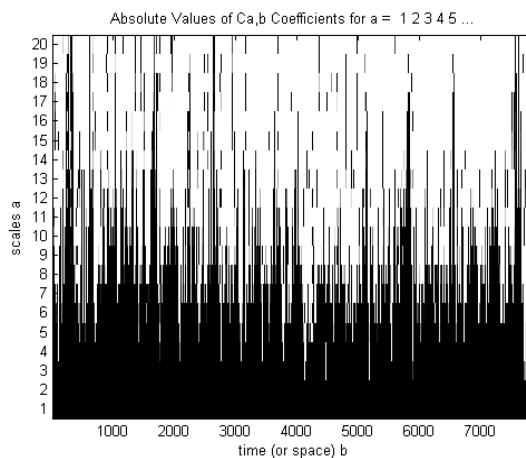

```

Astereo=wavread('pe1.wav', [26000,33900]);
Amono=Astereo(:,1);
coefs=cwt(Amono,1:1:20,'sym4','abs1v1',[10000,Ls]);
coefscompl=cwt(Amono,1:1:20,'cgau4','plot');

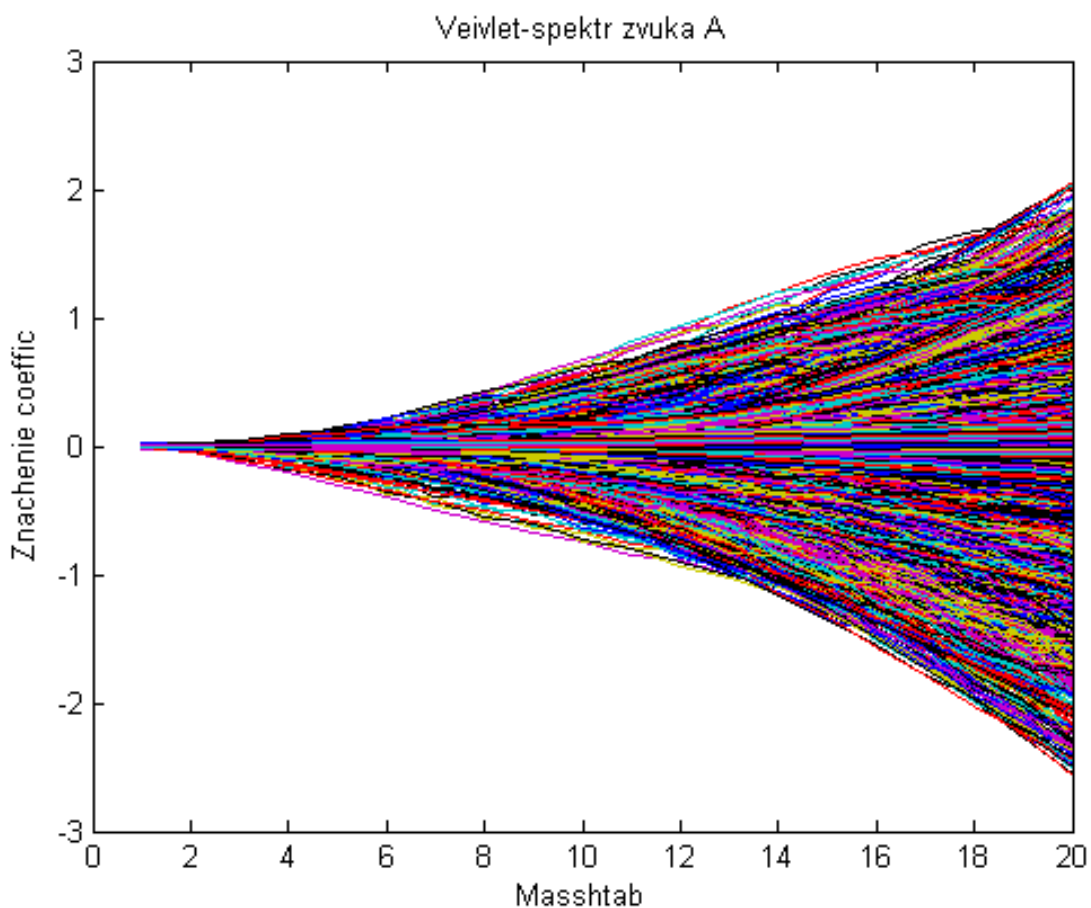
```



а

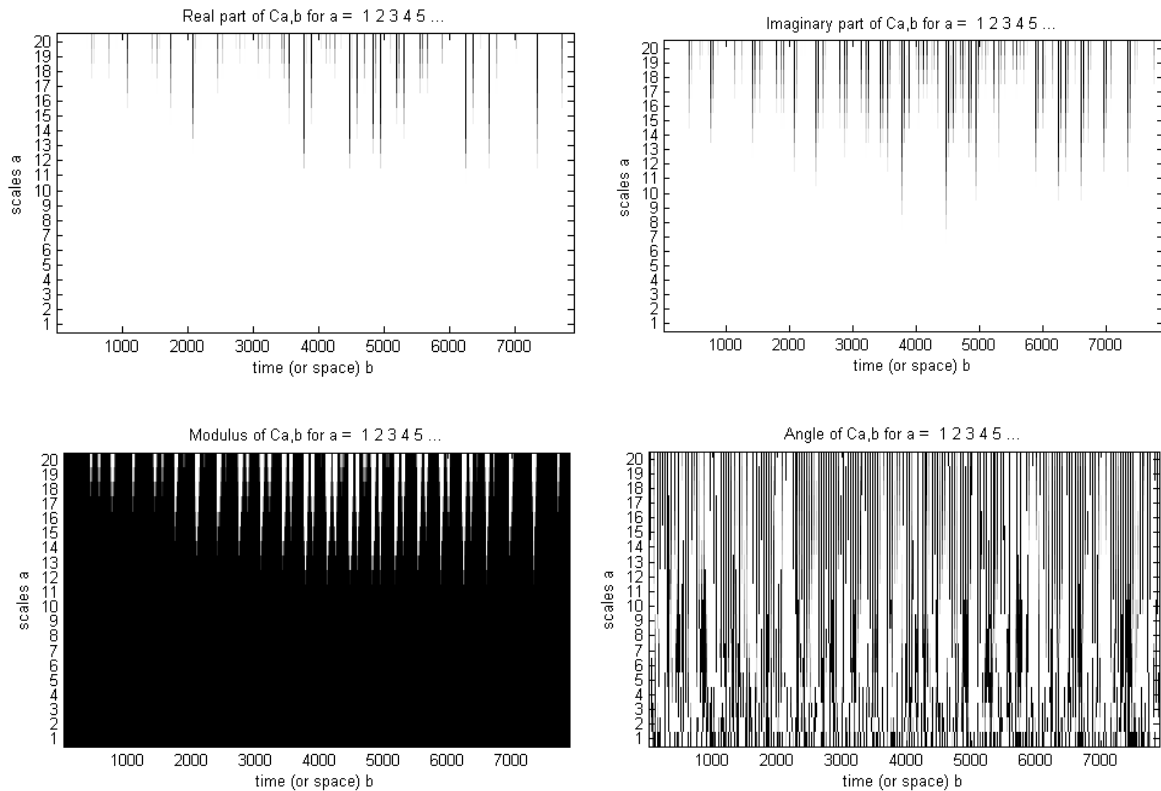


б



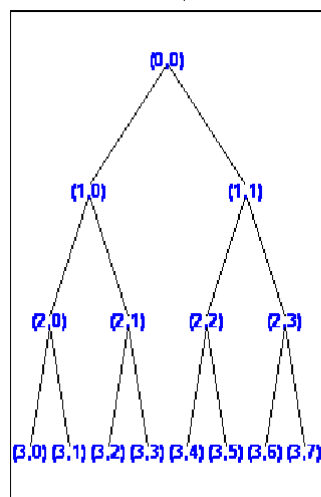
в

Результат разложения звукового сигнала (а) в спектр вейвлет-коэффициентов (б) значения которых отображены на графике (в)

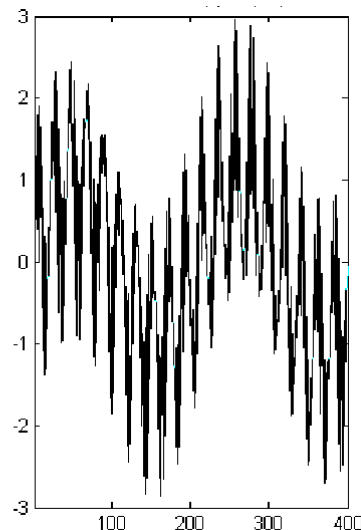


Графики вещественных и мнимых частей (вверху) и графики модулей и углов (внизу) коэффициентов вейвлет-разложения до уровня 20 звукового сигнала при комплексном непрерывном вейвлет-анализе

```
signal=sumsin(1:400);
T=wpdec(signal,3,'haar','shannon');
```



а



б

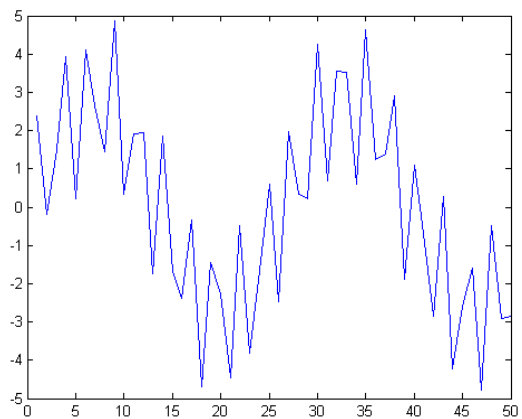
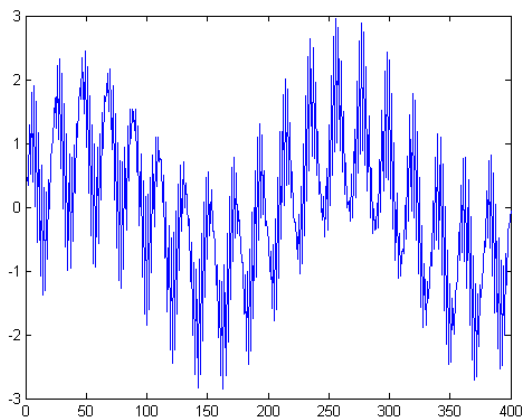
Сигнал (б) в виде суммы двух синусоид, отличающихся по амплитуде и частоте и подвергающийся вейвлет-пакетному анализу и его полное дерево T пакетного разложения до уровня 3 (а)

`N=allnodes (T)` `N1=allnodes (T, 'deppos')`

Нумерация узлов дерева разложения и соответствие нумерации узлов разными способами

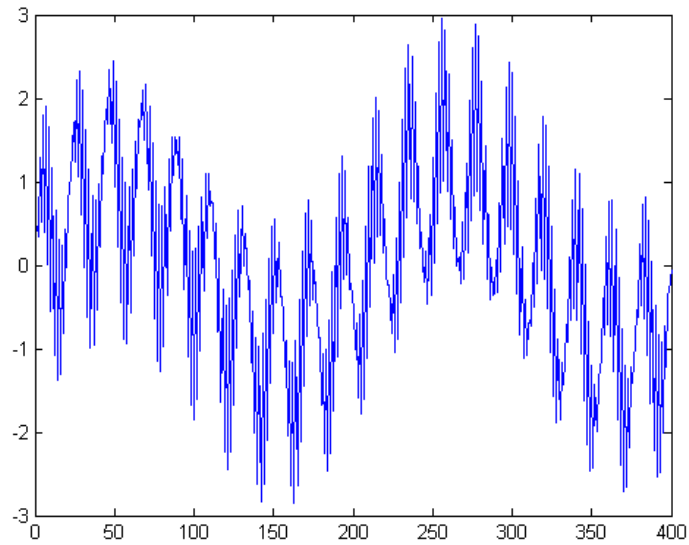
№№ п/п	Нумерация и соответствие нумерации узлов разными способами	
1	0	00
2	1	10
3	2	11
4	3	20
5	4	21
6	5	22
7	6	23
8	7	30
9	8	31
10	9	32
11	10	33
12	11	34
13	12	35
14	13	36
15	14	37

`coef=wpcoef (T, 0 или 7) ;`



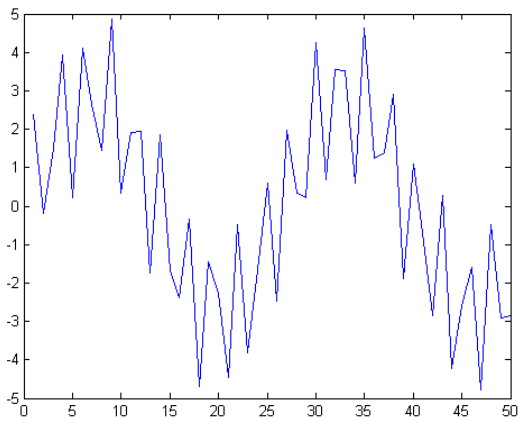
Коэффициенты пакетного вейвлет-преобразования сигнала `sumsin` для 0 и 7 узлов

`vosstsignalA=wprec(T);`

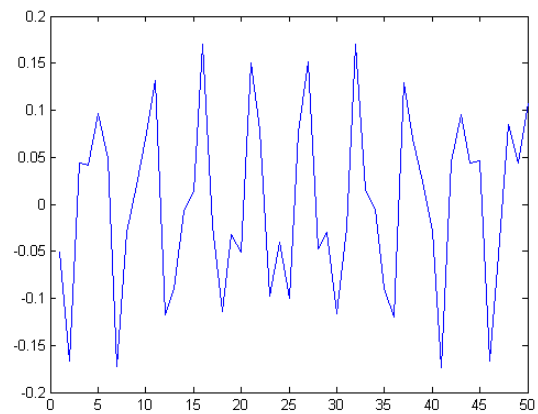


Результат процедуры одномерного пакетного вейвлет-восстановления сигнала `sumsin`

`vosstsignalB=wpccoef(T,7 или 14);`



а



б

Результат процедуры одномерного пакетного вейвлет-восстановления сигнала `sumsin` по коэффициентам пакетного преобразования в узле 7 (а) и в узле 14 (б)

```
[T1, cA, cD]=wpsplt(T,10);
```

При расщеплении узла будет выведена информация о дереве в виде

```
Wavelet Packet Object Structure
=====
Size of initial data      : [1 400]
Order                    : 2
Depth                   : 4
Terminal nodes           : [7 8 9 21 22 11 12
                          13 14]
-----
Wavelet Name             : haar
Low Decomposition filter : [ 0.7071 0.7071]
High Decomposition filter: [-0.7071 0.7071]
Low Reconstruction filter: [ 0.7071 0.7071]
High Reconstruction filter: [ 0.7071 -0.7071]
-----
Entropy Name             : shannon
Entropy Parameter        : 0
-----
```

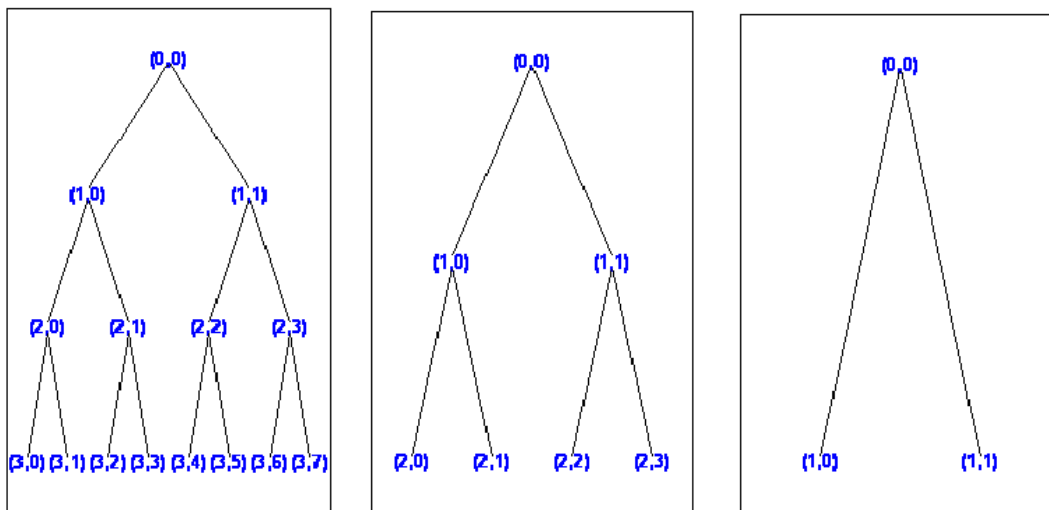
и рассчитанные значения аппроксимирующих коэффициентов *cA* для 10 узла:

```
-0.13179 -0.22311 0.098057 0.21788 -0.069268
-0.23026 0.0099403 0.24032 0.040269 -0.23612
-0.057649 0.23279 0.09865 -0.19889 -0.14578 0.16518
0.17525 -0.15918 -0.20685 0.12291 0.21457
-0.069377 -0.21884 0.032561 0.24909,
```

а также рассчитанные значения детализирующих коэффициентов *cD* для 10 узла:

```
-0.50415 0.29576 0.55973 -0.19278 -0.60226 0.093098
0.61764 0.0067244 -0.60918 -0.11813 0.58494
0.22929 -0.5511 -0.32341 0.50186 0.4036 -0.42557 -
0.47604 0.33368 0.54117 -0.24263 -0.58988 0.14724
0.60928 -0.04106.
```

```
T=wpdec(signal,3,'haar','shannon');
[T1,RN1]=wpcuttree(T,2); [T2,RN2]=wpcuttree(T,1);
```

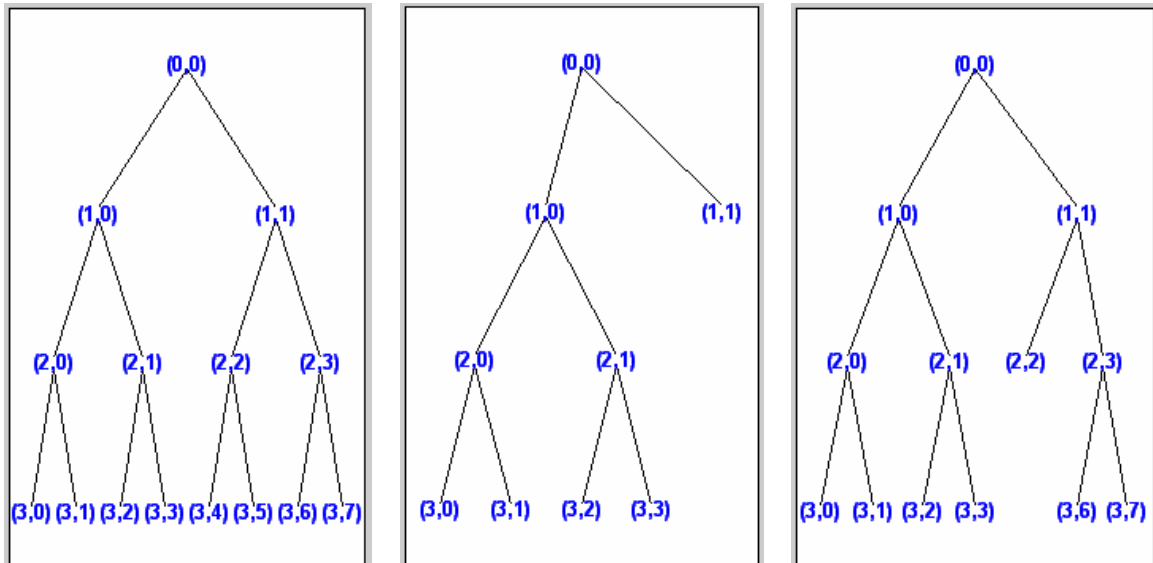


а б в

индексы векторов <i>RN</i>	3 4 5 6	1 2
-------------------------------	------------------	--------

Результат процедуры обрезания пакетного дерева разложенного до 3 уровня (а) до уровня 2 (б) и до уровня 1 (в) и соответствующие им индексы векторов *RN*

```
T=wpdec(signal,3,'haar','shannon');
[T1,RN1]=wpjoin(T,2); [T2,RN2]=wpjoin(T,5);
```

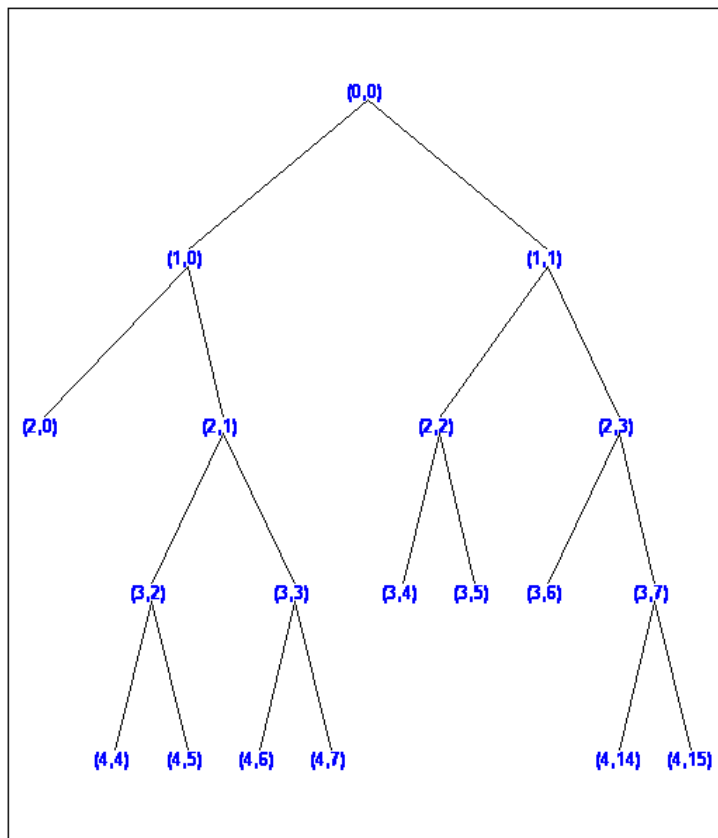


а б в

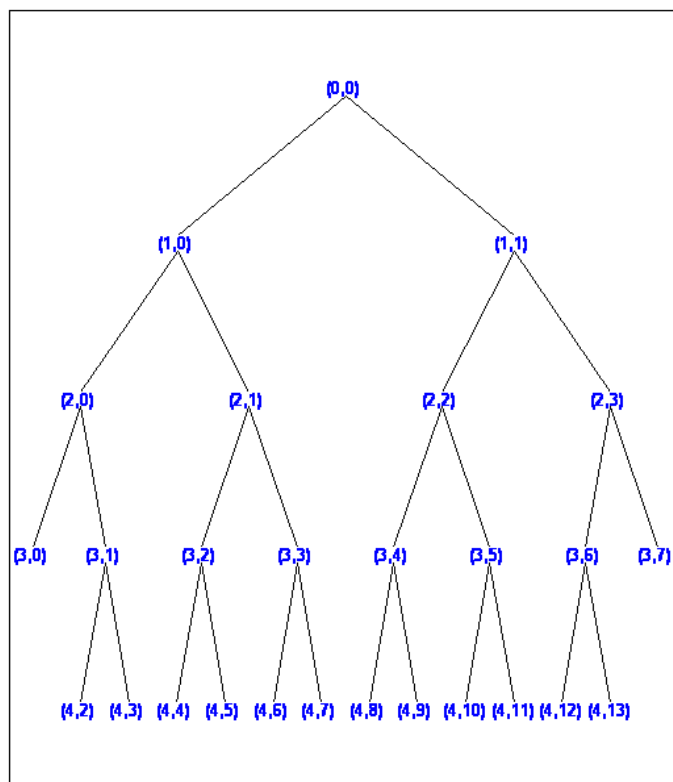
Результат процедуры отрезания ветвей во 2 (б) и в 5 (в) узле дерева (а) разложения 3 уровня

N= tnodes (T) ;	N= tnodes (T, 'deppos') ;	[N,K]=	
		N	K
7	3 0	3 0	1
8	3 1	3 1	2
9	3 2	3 2	3
10	3 3	3 3	4
11	3 4	3 4	5
12	3 5	3 5	6
13	3 6	3 6	7
14	3 7	3 7	8

```
T=wpdec(signal,4,'haar','log energy');
T=wpdec(signal,4,'haar','shannon');
[T1,E,N]=besttree(T);
```

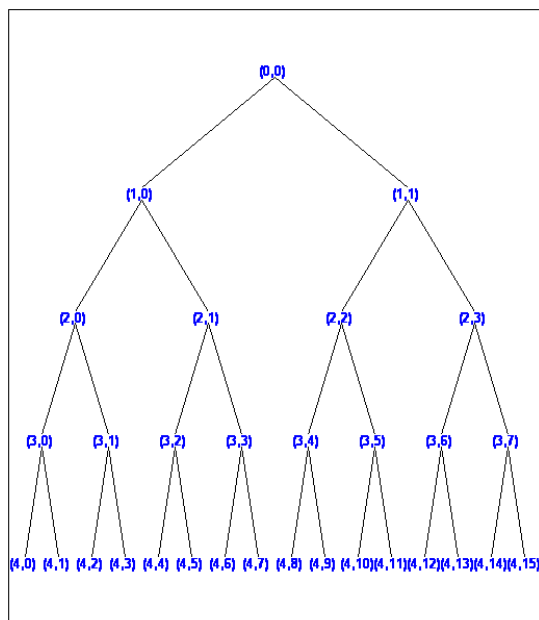


Наилучшее дерево пакетного вейвлет-разложения для функции `sumsin` с использованием энтропии логарифм энергии

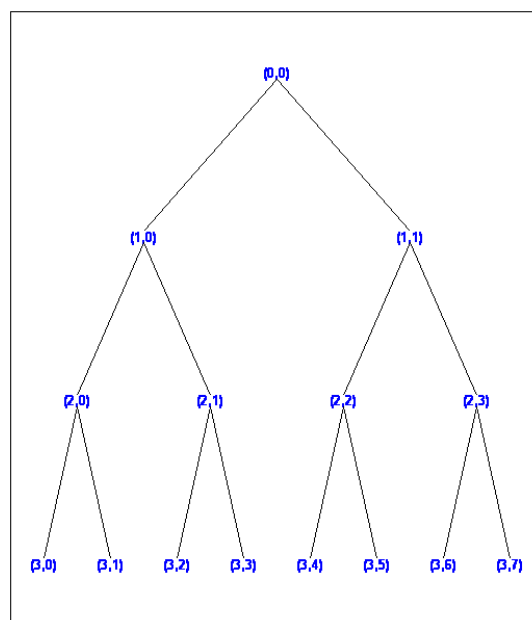


Наилучшее дерево пакетного вейвлет-разложения для функции `sumsin` с использованием энтропии Шеннона

```
T=wpdec(signal,4,'haar','shannon');
[T1,E]=bestlevt(T);
```



а



б

Исходное дерево разложения (а) и дерево пакетного вейвлет-разложения наилучшего уровня (б)

ЛЕКЦИЯ 10 ДВУМЕРНЫЙ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ

10.1 Двумерные вейвлеты

На практике необходимо анализировать сигналы (т.н. изображения), которые представляют собой функции двух переменных. Тогда многомасштабный анализ должен строиться в пространстве $L^2(\mathbf{R}^2)$ функций двух переменных. Существует несколько способов обобщить изложенные ранее рассуждения на функции двух переменных. Самый простой и широко распространенный путь – это тензорное произведение одномерных вейвлетов. Он основан на том факте, что пространство $L^2(\mathbf{R}^2)$ является тензорным произведением пространств $L^2(\mathbf{R})$ функций одной переменной:

$$L^2(\mathbf{R}^2) = L^2(\mathbf{R}) \otimes L^2(\mathbf{R}).$$

По аналогии с одномерным кратномасштабным анализом, пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ порождают ортогональный кратномасштабный анализ пространства $L^2(\mathbf{R})$:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

Сдвиги $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x-n)$, $n \in \mathbf{Z}$ функции $\varphi(x)$ образуют ортонормированный базис пространства V_0 . Остальные пространства V_j являются масштабированными версиями V_0 , в частности, V_j имеет в качестве ортонормированного базиса систему функций $\varphi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - k)$.

Пространство вейвлетов W_0 определяется как ортогональное дополнение к V_0 в подпространстве V_1 . В пространстве W_0 ортонормированный базис образует сдвиги $\psi_{0,n}(x) = \psi(x-n)$, $n \in \mathbf{Z}$ функции $\psi(x)$, и, поэтому, пространства вейвлетов W_j являются масштабированными версиями W_0 , в частности W_j имеет ортонормированный базис из функций $\psi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k)$.

В двумерном случае определим пространство V_0^2 как тензорное произведение пространств V_0 функций одной переменной:

$$V_0^2 = V_0 \otimes V_0.$$

Другими словами, пространство V_0^2 есть замыкание линейной оболочки, порожденной сдвигами $\varphi_{0,k,n}(x, y) = \varphi(x-k)\varphi(y-n)$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

Эти функции образуют ортонормированный базис пространства V_0 , а пространства $V_j^2 = V_j \otimes V_j$ являются масштабированными версиями пространства V_0^2 .

Поскольку $V_1 = V_0 \oplus W_0$, то для тензорного произведения имеем следующее ортогональное разложение:

$$\begin{aligned} V_1^2 &= V_1 \otimes V_1 = (V_0 \oplus W_0) \otimes (V_0 \oplus W_0) = \\ &= (V_0 \otimes V_0) \oplus (V_0 \otimes W_0) \oplus (W_0 \otimes V_0) \oplus (W_0 \otimes W_0). \end{aligned}$$

Здесь $V_0 \otimes V_0 = V_0^2$. Поэтому остальные три пространства в сумме образуют пространство W_0^2 двумерных вейвлетов. При этом:

- пространство $V_0 \otimes W_0$ порождено сдвигами функции $\psi^H(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$,
- пространство $W_0 \otimes V_0$ порождено сдвигами функции $\psi^V(x, y) = \psi(x)\varphi(y)$,
- пространство $W_0 \otimes W_0$ порождено сдвигами функции $\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y)$.

Обозначим эти пространства следующим образом:

$$W_0^H = V_0 \otimes W_0, \quad W_0^V = W_0 \otimes V_0, \quad W_0^D = W_0 \otimes W_0.$$

Их сумма дает все пространство вейвлетов W_0^2 . Тогда получаем следующее ортогональное разложение:

$$V_1^2 = V_0^2 \oplus W_0^2 = V_0^2 \oplus W_0^H \oplus W_0^V \oplus W_0^D.$$

Соответствующее разложение получается для любого $j \in \mathbf{Z}$.

$$V_{j+1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2 = V_j^2 \oplus W_j^H \oplus W_j^V \oplus W_j^D.$$

Системы функций, которые образуют ортонормированные базисы в указанных выше пространствах, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k,n}(x, y) &= 2^j \varphi(2^j x - k) \varphi(2^j y - n), \\ \psi_{j,k,n}^H(x, y) &= 2^j \varphi(2^j x - k) \psi(2^j y - n), \\ \psi_{j,k,n}^V(x, y) &= 2^j \psi(2^j x - k) \varphi(2^j y - n), \\ \psi_{j,k,n}^D(x, y) &= 2^j \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - n). \end{aligned}$$

10.2 Двумерное вейвлет-преобразование

Для системы функций, которые образуют четыре ортонормированных базиса, соответственно, и вейвлет-коэффициенты сигнала $f(x, y)$ будут четырех типов. Коэффициенты

$$cA_1 = \langle f, \varphi_{j,k,n} \rangle = 2^j \int_{R^2} f(x, y) \overline{\varphi(2^j x - k) \varphi(2^j y - n)} dx dy$$

называются аппроксимирующими.

Остальные коэффициенты – детализирующие коэффициенты трёх типов.

При нахождении детализирующих вейвлет-коэффициентов функции $f(x, y)$

$$cH_1 = \langle f, \psi_{j,k,n}^H \rangle = 2^j \int_{R^2} f(x, y) \overline{\varphi(2^j x - k) \psi(2^j y - n)} dx dy,$$

по переменной x происходит интегрирование с масштабирующей функцией $\varphi(x)$, а это, как известно, вызывает сглаживание сигнала $f(x, y)$ по переменной x . Интегрирование по переменной y производится с участием вейвлета $\psi(y)$ – это дает коэффициенты, которые учитывают изменения функции по переменной y . В результате получается сигнал cH_1 , в котором больше отражены изменения по вертикали. Будут выделяться горизонтальные полосы. Поэтому такие коэффициенты cH_1 называются горизонтальными.

Аналогичный смысл и название имеют и другие вейвлет-коэффициенты.

Коэффициенты cV_1 – вертикальные,

$$cV_1 = \langle f, \psi_{j,k,n}^V \rangle = 2^j \int_{R^2} f(x, y) \overline{\psi(2^j x - k) \varphi(2^j y - n)} dx dy,$$

по переменной y происходит интегрирование с масштабирующей функцией $\varphi(y)$, а это вызывает сглаживание сигнала $f(x, y)$ по переменной y . Интегрирование по переменной x производится с участием вейвлета $\psi(x)$ – это дает коэффициенты, которые учитывают изменения функции по переменной x . В результате получается сигнал cV_1 , в котором больше отражены изменения по горизонтали. Будут выделяться вертикальные полосы.

Коэффициенты cD_1 – диагональные,

$$cD_1 = \langle f, \psi_{j,k,n}^D \rangle = 2^j \int_{R^2} f(x, y) \overline{\psi(2^j x - k) \psi(2^j y - n)} dx dy,$$

интегрирование по переменной x производится с участием вейвлета $\psi(x)$ – это дает коэффициенты, которые учитывают изменения функции по переменной x . Интегрирование по переменной y производится с участием вейвлета $\psi(y)$ – это дает коэффициенты, которые учитывают изменения функции по переменной y . В результате получается сигнал cD_1 , в котором больше отражены изменения как по оси x , так и по оси y , т.е. по диагонали. Будут выделяться диагональные полосы. При этом сглаживание по обеим осям отсутствует.

Таким образом, схема разложения сигнала \mathbf{S} может быть изображена в виде:

$$\mathbf{S} \rightarrow (cA_1, cH_1, cV_1, cD_1) \rightarrow (cA_2, cH_2, cV_2, cD_2, cH_1, cV_1, cD_1) \rightarrow \dots$$

Практически входной сигнал задаётся матрицей S . При разложении этого сигнала получают указанные четыре типа коэффициентов следующим образом.

Например, горизонтальные детализирующие коэффициенты cH_1 получают свёрткой строк матрицы S с низкочастотным фильтром вейвлета и децимацией, а затем свёрткой столбцов полученной матрицы с высокочастотным фильтром и децимацией.

Другие коэффициенты разложения получают аналогичным образом.

Поскольку массив начальных коэффициентов двумерный, то естественно графически схему разложения сигнала S изобразить в виде плоской картины:

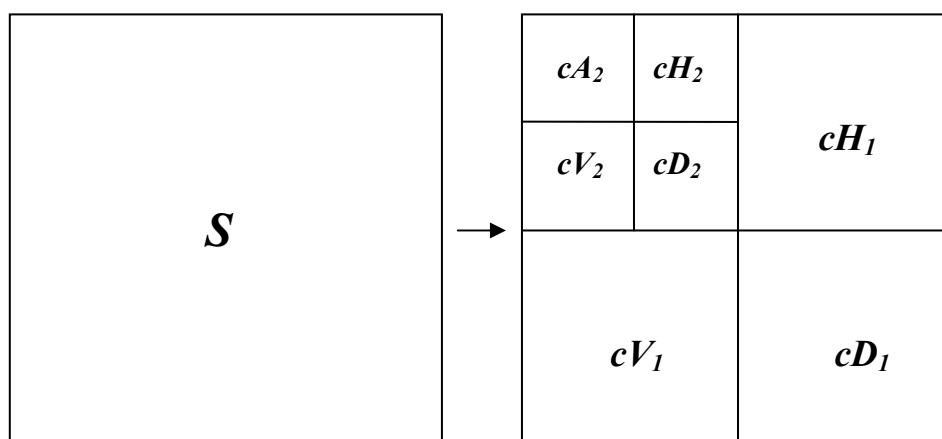


Рис. 10.1 – Схема разложения двумерного сигнала

Следует отметить, что эта схема отражает и изменение размеров массивов коэффициентов разложения. Если сигнал S имеет размерность $n \times n$, то коэффициенты первого уровня разложения cA_1 , cH_1 , cV_1 , cD_1 будут иметь размерность $n/2 \times n/2$ и т.д.

Двумерное вейвлет-разложение можно применять не только к аппроксимирующим коэффициентам cA_j , но и ко всем остальным. Тогда появляются пакетные вейвлеты. Их схему разложения принято изображать в виде дерева, аналогичного дереву пакетных одномерных разложений.

10.3 Двумерный вейвлет-анализ

При двумерном вейвлет-анализе могут выполняться следующие основные операции:

- одноуровневое прямое дискретное двумерное вейвлет-преобразование,
- одноуровневое обратное дискретное двумерное вейвлет-преобразование,
- многоуровневое двумерное вейвлет-разложение,
- многоуровневое двумерное вейвлет-восстановление,

- нахождение коэффициентов аппроксимации,
- нахождение детализирующих коэффициентов,
- восстановление сигнала по одной ветви коэффициентов,
- прямое восстановление из двумерных вейвлет-коэффициентов,
- одноуровневая реконструкция двумерного вейвлет-разложения,
- дискретное прямое стационарное двумерное вейвлет-преобразование,
- обратное стационарное двумерное вейвлет-преобразование,
- пакетное вейвлет-разложение,
- пакетное вейвлет-восстановление.

При **одноуровневом прямом дискретном двумерном вейвлет-преобразовании** для входной матрицы S вычисляются аппроксимирующие коэффициенты cA и детализирующие коэффициенты первого уровня трёх типов: горизонтальные cH , вертикальные cV и диагональные cD , с использованием для этого тензорного произведения $w(x)w(y)$ вейвлета $w(x)$. Все полученные коэффициенты образуют матрицы размером в два раза меньше, чем исходная матрица S .

При **одноуровневом обратном дискретном двумерном вейвлет-преобразовании** по всем известным аппроксимирующим (cA) коэффициентам и детализирующим (cH, cV, cD) коэффициентам вычисляются значения сигнала S , с использованием либо вейвлета, либо фильтров реконструкции. Возможно восстановление только по аппроксимирующим коэффициентам или только по детализирующим, как отдельно, так и совместно.

При **многоуровневом двумерном вейвлет-разложении** матрица сигнала S раскладывается до уровня N с применением вейвлета или его фильтра. В результате получается вектор разложения C и соответствующая матрица учёта U .

Вектор коэффициентов разложения устроен следующим образом:

$$C=[A(N), H(N), V(N), D(N), H(N-1), V(N-1), D(N-1), \dots, H(1), V(1), D(1)],$$

где A, H, V, D строки векторов соответственно коэффициентов аппроксимации, детализирующих горизонтальных, детализирующих вертикальных, детализирующих диагональных.

Каждый вектор есть вектор столбцеобразного хранения матрицы.

Матрица учёта размерностей U порядка $(N+2) \times 2$ имеет следующее построение:

- два числа первой строки $U(1,:)$ – это размер $[p,q]$ матрицы $p \times q$ аппроксимирующих коэффициентов уровня N ,
- следующие строки $U(i,:)$ – это размеры матриц детализирующих коэффициентов уровней $N-i+2$ для $i = 2, \dots, N+1$,
- последняя строка $U(N+2,:) = \text{size}(S)$ – размер $[n,m]$ матрицы исходного сигнала.

Алгоритм разложения изображений аналогичен тому, что применяется в

одномерном случае. Особенностью двумерного случая является то, что при разложении аппроксимирующих коэффициентов уровня j получаются четыре компоненты: аппроксимация на уровне $j+1$ и детали в трёх ориентациях (горизонтальной, вертикальной и диагональной).

При **многоуровневом двумерном вейвлет-восстановлении** восстанавливается матрица сигнала S на основе имеющейся структуры вейвлет-разложения $[C, U]$.

Нахождение коэффициентов аппроксимации и детализирующих коэффициентов можно осуществлять функционально, для чего не требуется помнить положение всех коэффициентов в матрице C .

Одноуровневая реконструкция двумерного вейвлет-разложения проводится также при известной структуре разложения $[C, U]$ некоторого уровня разложения $N0$. При этом находится новое вейвлет разложение $[NC, NU]$ уровня разложения $N0-1$, т.е. на один уровень выше, и извлекаются последние аппроксимирующие коэффициенты sA , т.е. уровня $N0$.

Если известно вейвлет-разложение $[C, U]$ некоторого уровня разложения $N0$, то можно осуществить **восстановление сигнала по одной ветви вейвлет коэффициентов** на уровне разложения $N \leq N0$.

При проведении **прямого восстановления из двумерных вейвлет-коэффициентов** осуществляется восстановление матрицы Y из коэффициентов S заданного уровня разложения N . Для этого N раз применяется процедура обратного вейвлет-преобразования. При этом если S считаются аппроксимирующими коэффициентами, то детализирующие коэффициенты берутся нулевыми и наоборот, далее вычисляется N -шаговая реконструкция матрицы S и при этом берётся центральная часть размера U .

Дискретное прямое и обратное стационарное двумерное вейвлет-преобразование имеет некоторые особенности. При этом разложении матрица S раскладывается до уровня $N > 0$ с использованием ортогонального вейвлета или фильтра его разложения. Размеры матрицы по обеим осям должны быть кратны 2^N .

Выходной трёхмерный массив коэффициентов разложения $[A, H, V, D]$ имеет структуру:

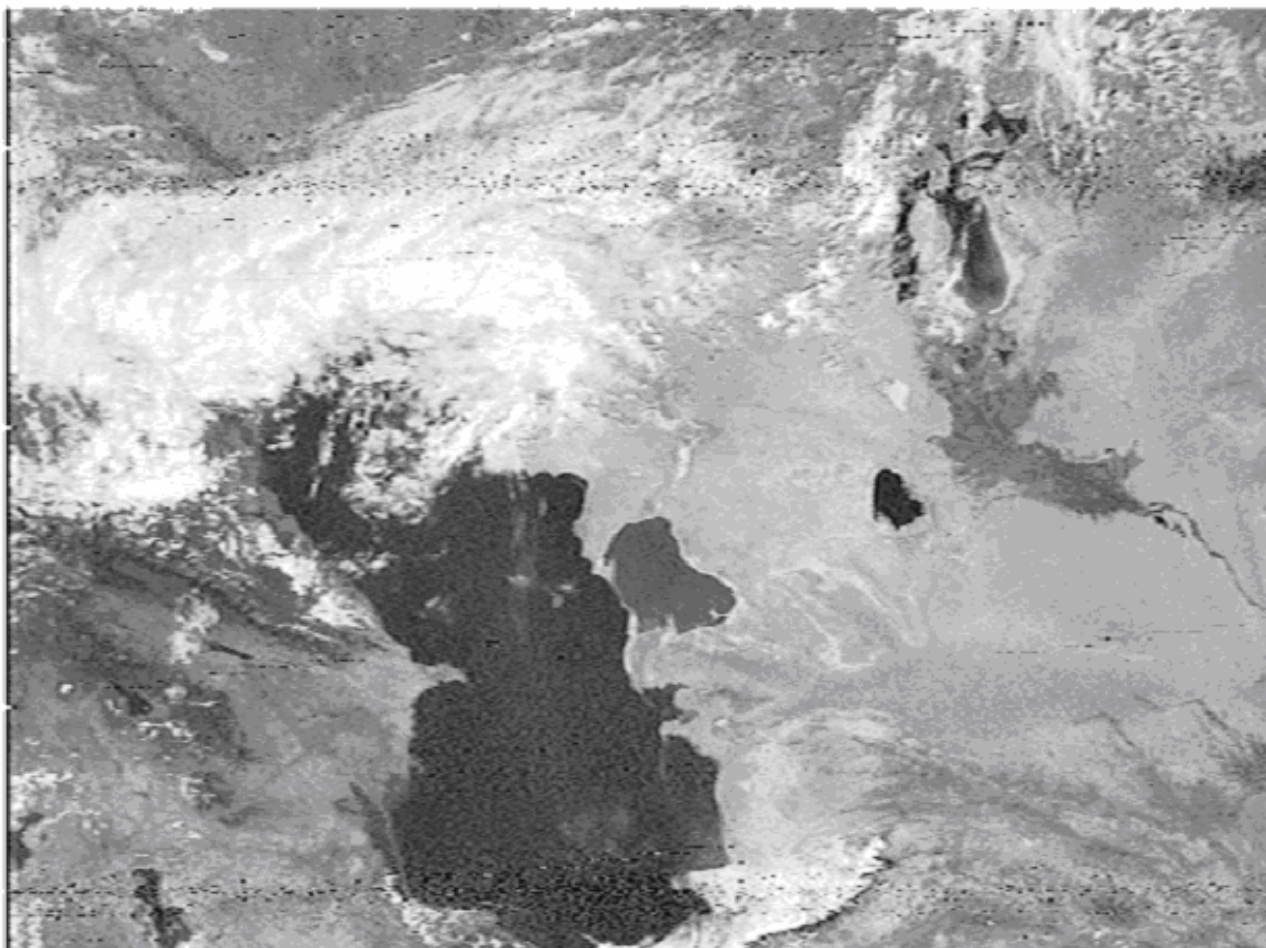
- для $1 \leq i \leq N$ выходная матрица $A(:, :, i)$ содержит аппроксимирующие коэффициенты уровня i ,
- выходные матрицы $H(:, :, i)$, $V(:, :, i)$, $D(:, :, i)$ содержат детализирующие соответственно горизонтальные, вертикальные и диагональные коэффициенты уровня i .

Двумерные **пакетное вейвлет-разложение и пакетное вейвлет-восстановление** проводятся аналогично одномерному. При этом находится пакетное дерево T , соответствующее пакетному разложению матрицы сигнала S до уровня N с использованием требуемого вейвлета. При двумерном пакетном разложении также можно управлять разложением, используя энтропийный показатель эффективности разложения. Пакетное вейвлет-восстановление осуществляет восстановление матрицы сигнала, соответствующей вейвлет-

пакетному дереву *T*.

Иллюстративный материал к лекции 10:

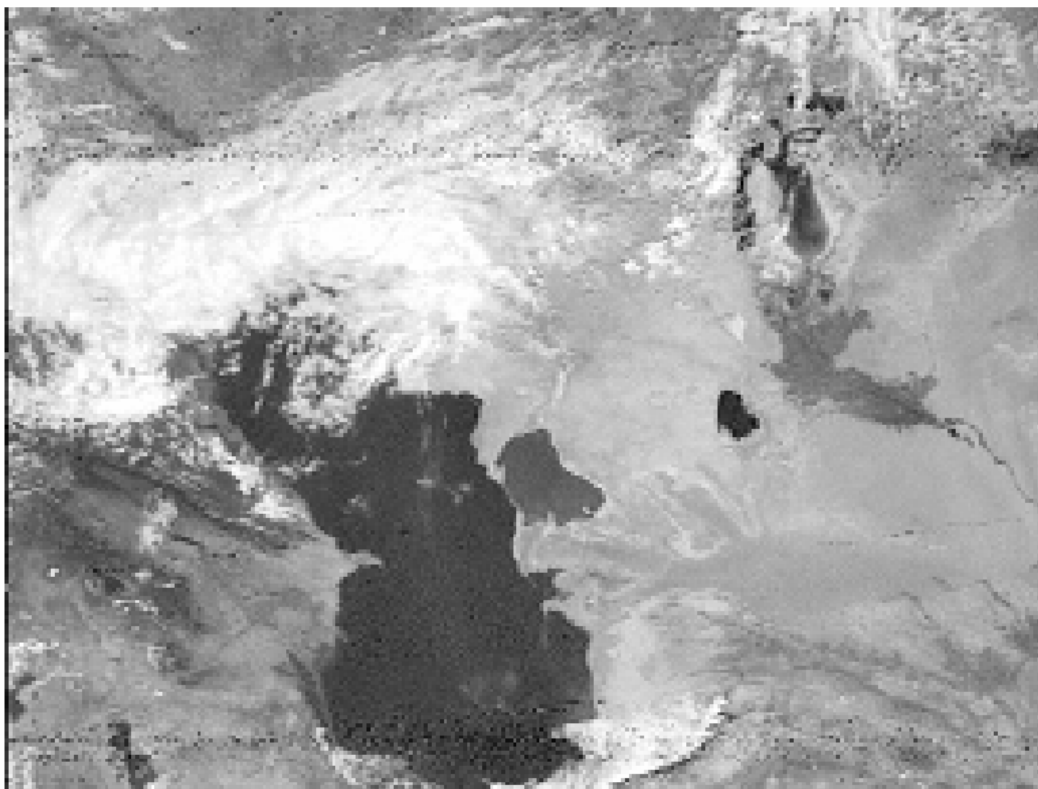
ИСХОДНЫЙ СПУТНИКОВЫЙ СНИМОК ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ



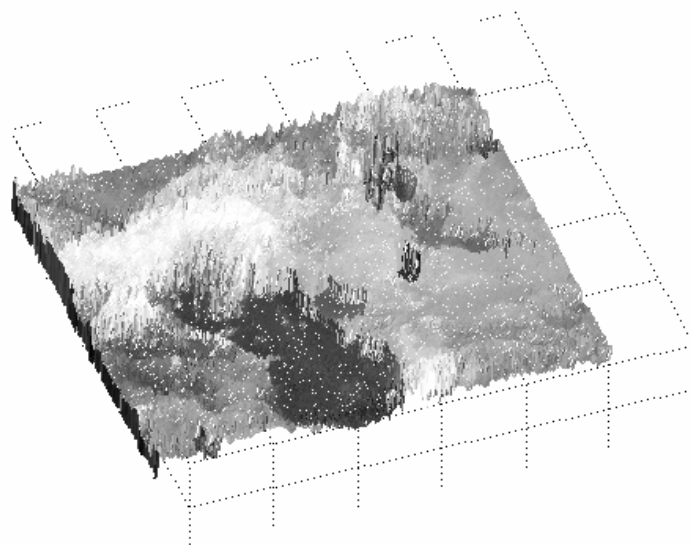
Размер снимка 405×541 пикселей

ОТОБРАЖЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОУРОВНЕВОГО ДВУМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯ В ВИДЕ ЯРКОСТНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ И ТРЁХМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

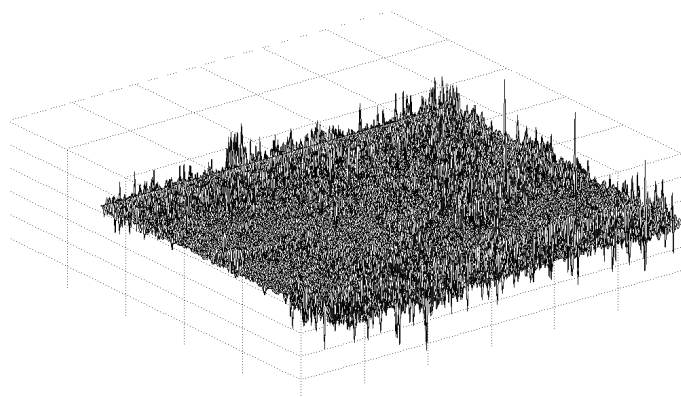
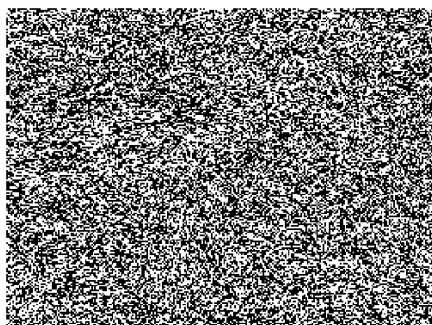
```
[cA1, cH1, cV1, cD1]=dwt2(S, 'haar');  
imshow(mat2gray(wcodemat(cA1, razm))); mesh(cA1);  
imshow(cH1);mesh(cH1);imshow(cV1);mesh(cV1);imshow(cD1);mesh(cD1);
```



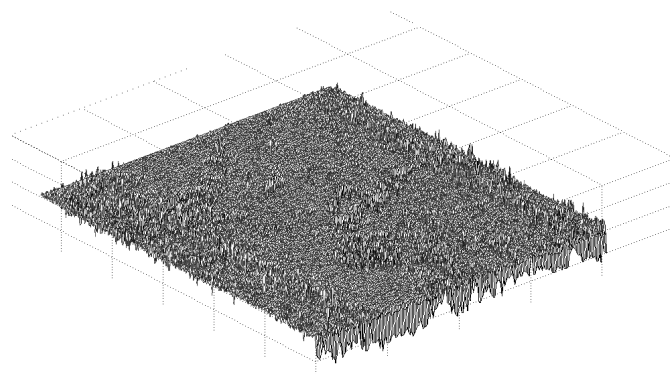
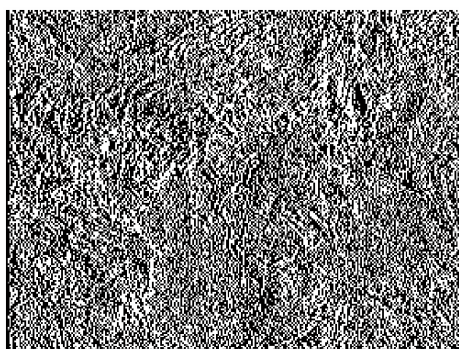
Яркостное изображение аппроксимирующих коэффициентов cA_1 одноуровневого прямого дискретного двумерного вейвлет-преобразования



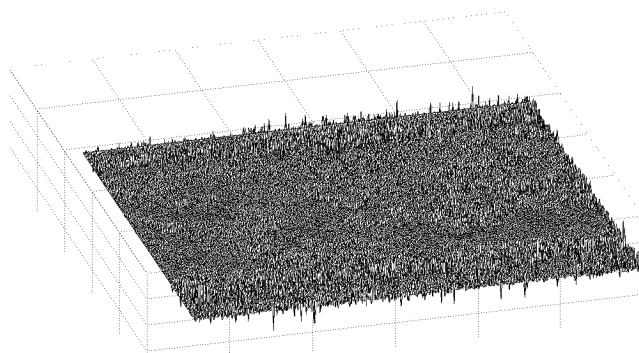
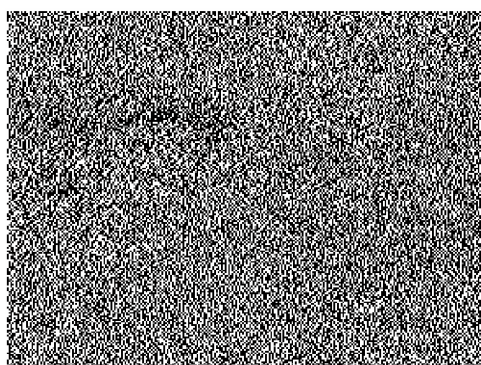
Амплитудное изображение аппроксимирующих коэффициентов cA_1 одноуровневого прямого дискретного двумерного вейвлет-преобразования



Яркое (слева) и амплитудное (справа) изображение детализирующих коэффициентов c_{H_1} одноуровневого прямого дискретного двумерного вейвлет-преобразования



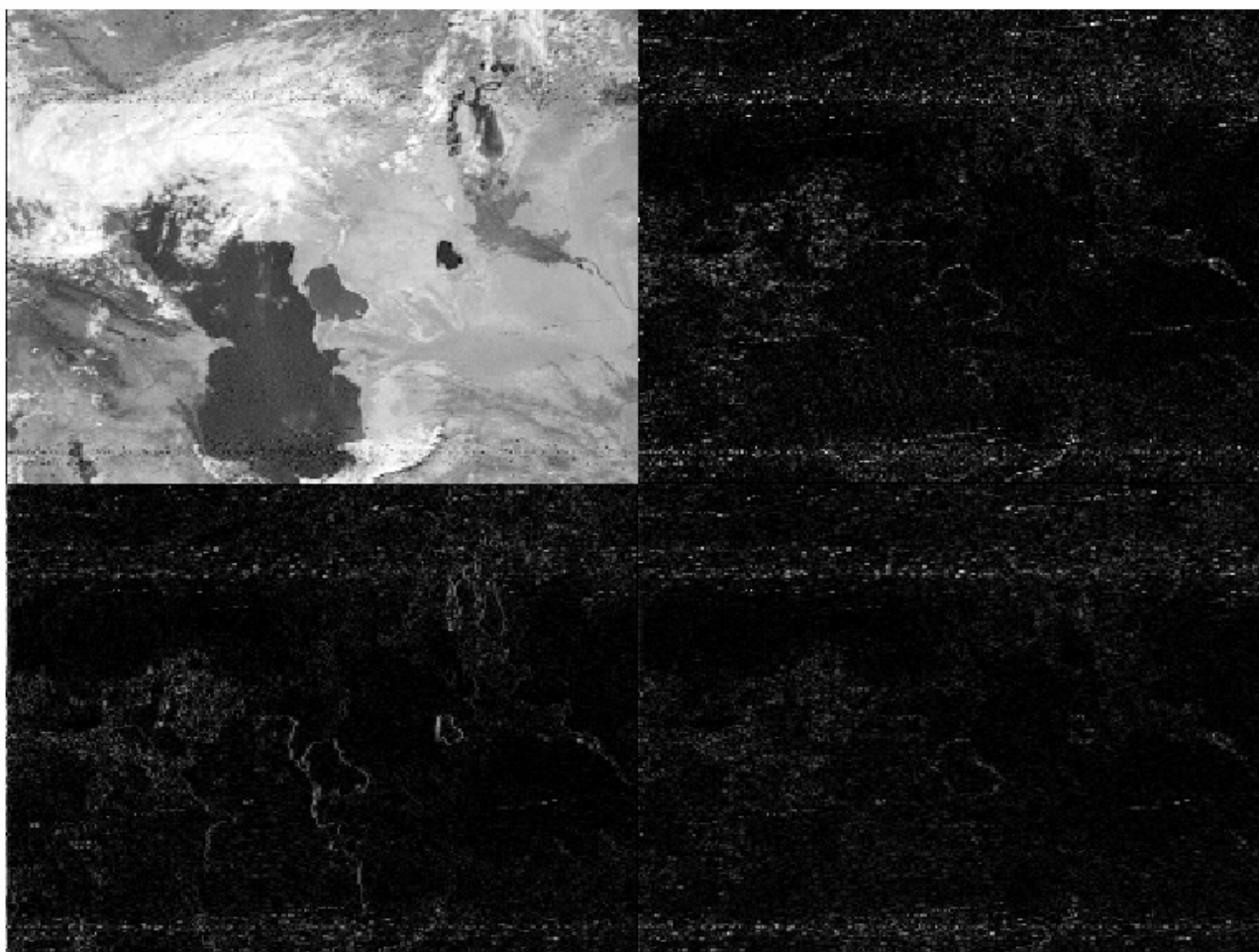
Яркое (слева) и амплитудное (справа) изображение детализирующих коэффициентов c_{V_1} одноуровневого прямого дискретного двумерного вейвлет-преобразования



Яркое (слева) и амплитудное (справа) изображение детализирующих коэффициентов c_{D_1} одноуровневого прямого дискретного двумерного вейвлет-преобразования

ОТОБРАЖЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОУРОВНЕВОГО ДВУМЕРНОГО ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЯ В ВИДЕ ЯРКОСТНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ С НОРМИРОВАННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ РАЗЛОЖЕНИЯ

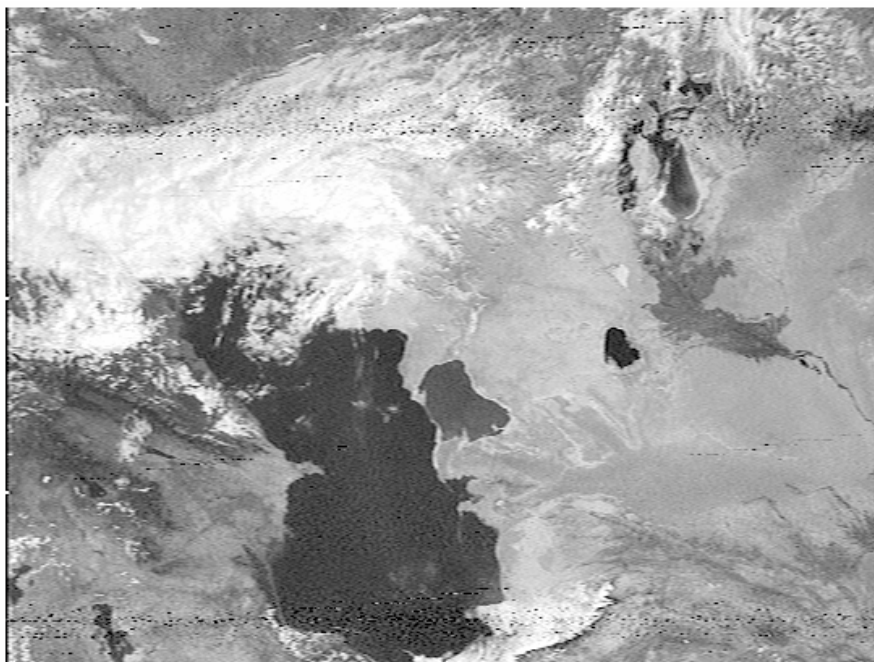
```
[cA1, cH1, cV1, cD1]=dwt2(S, 'haar');  
cod_cA1=wcodemat(cA1, razm); cod_cH1=wcodemat(cH1, razm);  
cod_cV1=wcodemat(cV1, razm); cod_cD1=wcodemat(cD1, razm);  
dec2d=[cod_cA1, cod_cH1; cod_cV1, cod_cD1];  
R=mat2gray(dec2d); imshow(R);
```



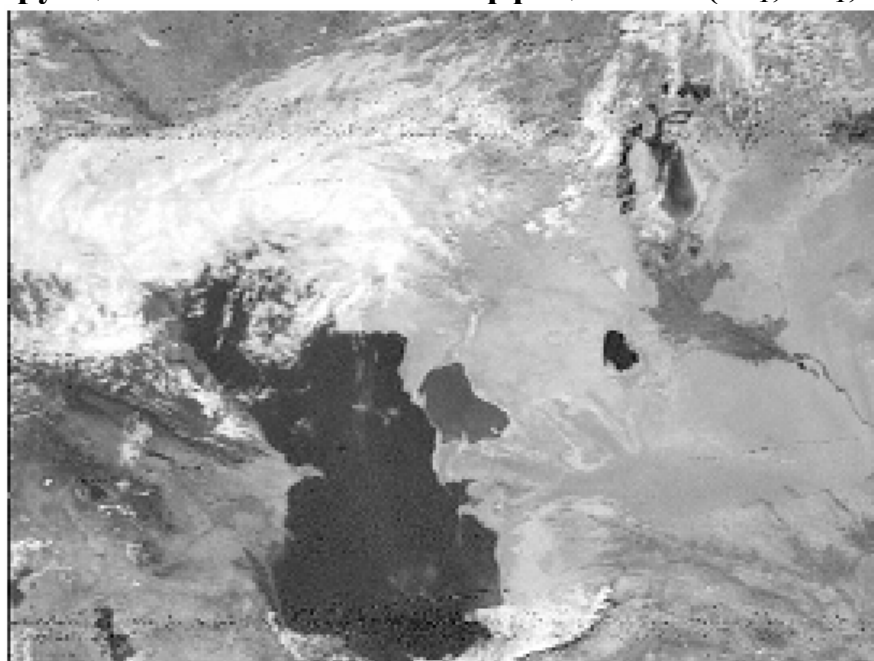
Коэффициенты одноуровневого прямого дискретного двумерного вейвлет-преобразования (слева вверху – cA_1 , справа вверху – cH_1 , слева внизу – cV_1 , справа внизу – cD_1)

ОДНОУРОВНЕВАЯ ДВУМЕРНАЯ ВЕЙВЛЕТ-РЕКОНСТРУКЦИЯ

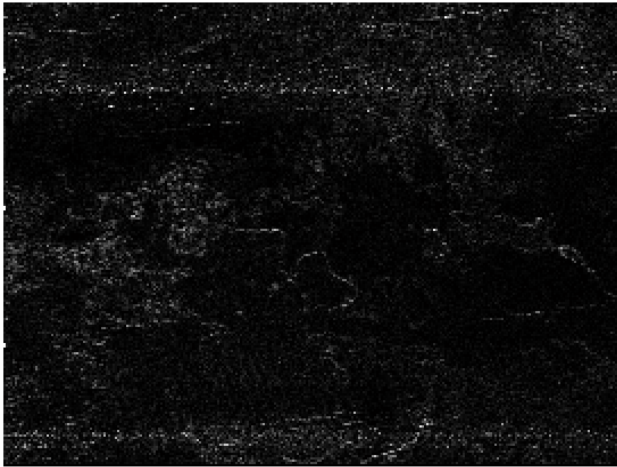
```
[cA1, cH1, cV1, cD1]=dwt2(S, 'haar');  
recS=idwt2(cA1, cH1, cV1, cD1, 'db1');  
recSapp=idwt2(cA1, [], [], [], 'db1');  
recShor=idwt2([], cH1, [], [], 'db1');  
recSvert=idwt2([], [], cV1, [], 'db1');  
recSdiag=idwt2([], [], [], cD1, 'db1');  
recSdet=idwt2([], cH1, cV1, cD1, 'db1');
```



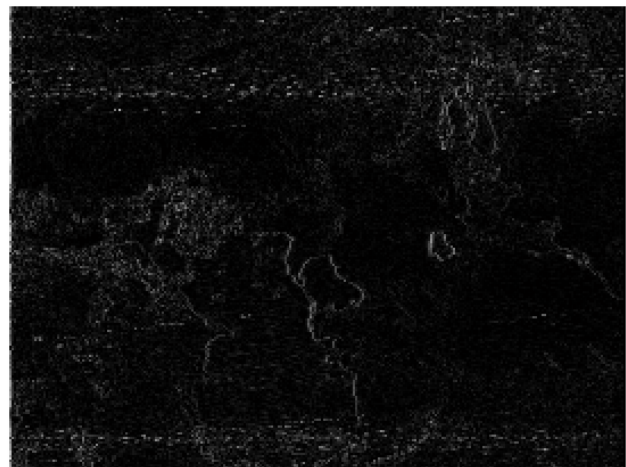
Реконструкция снимка по всем коэффициентам (cA_1, cH_1, cV_1, cD_1)



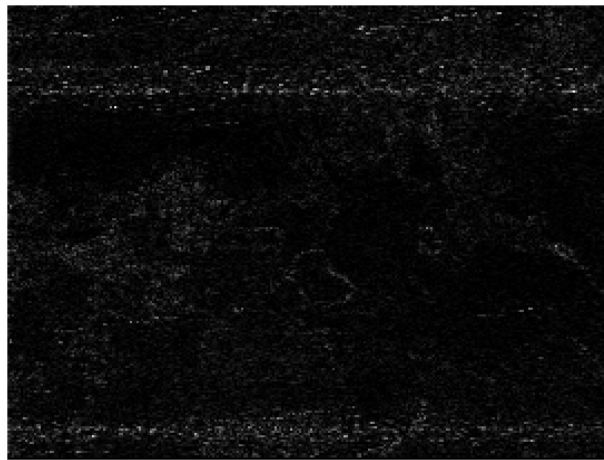
Реконструкция снимка по аппроксимирующим коэффициентам cA_1



а

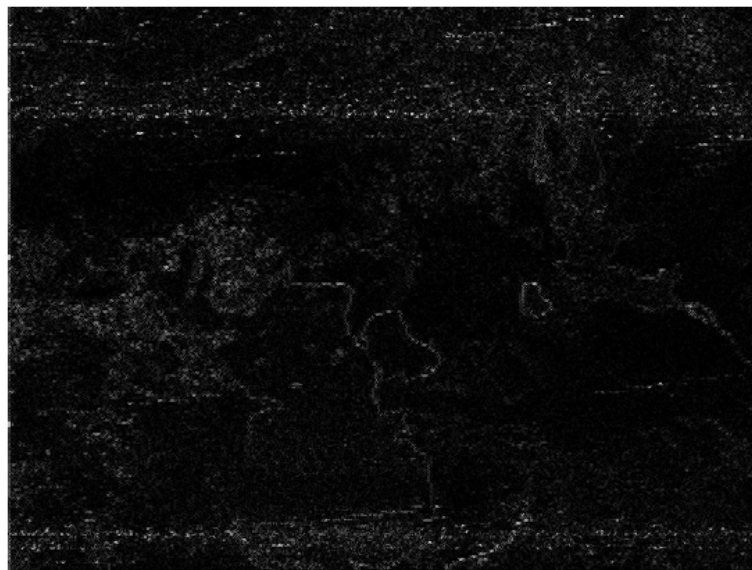


б



в

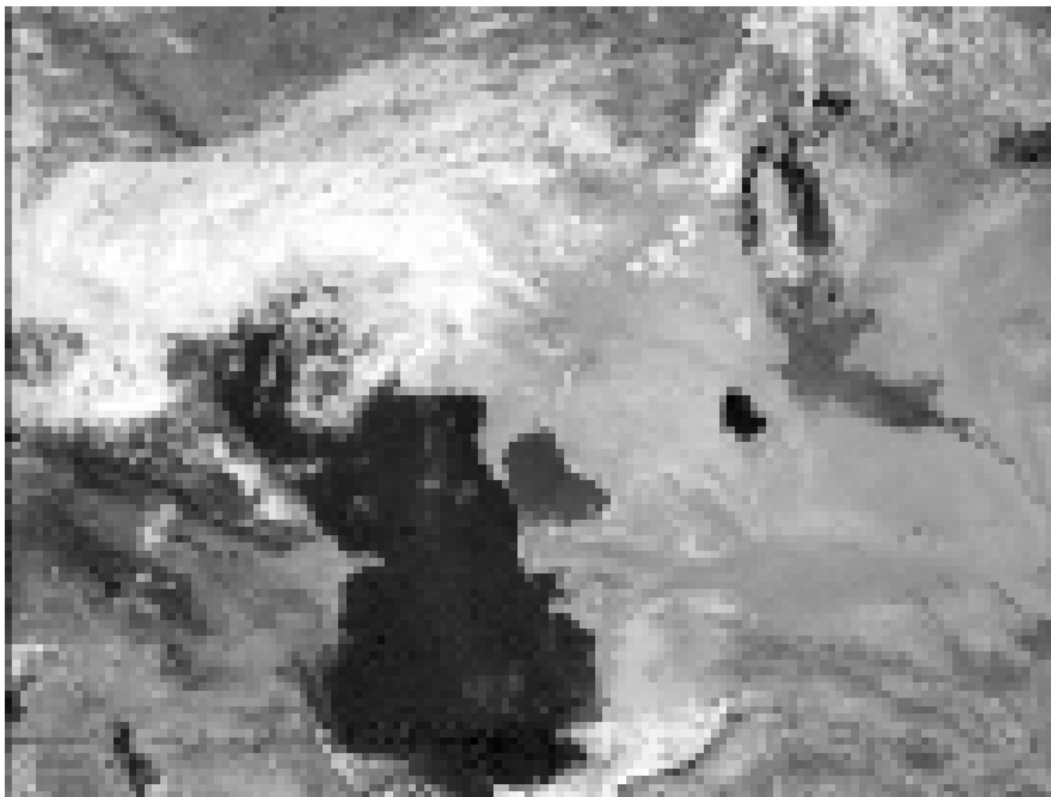
**Реконструкция снимка по детализирующим коэффициентам
(а – по cH_1 , б – по cV_1 , в – по cD_1)**



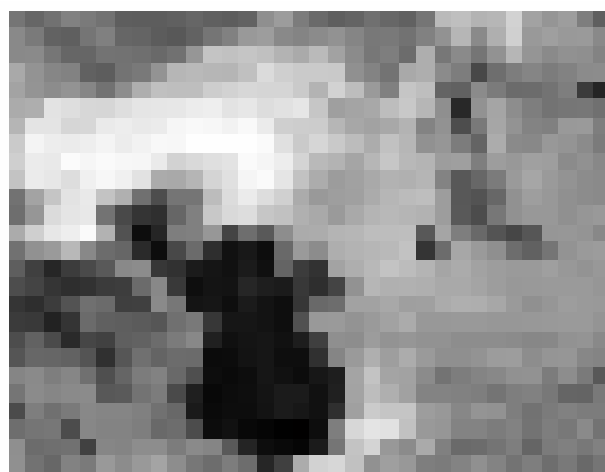
**Реконструкция снимка по всем детализирующим коэффициентам
(cH_1, cV_1, cD_1)**

МНОГОУРОВНЕВОЕ ДВУМЕРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЕ И ВЕЙВЛЕТ-ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПО ВСЕМ КОЭФФИЦИЕНТАМ

```
[C,U]=wavedec2(S,2,'haar');  
S1=C(1:(102*136)); S1=reshape(S1,102,136);
```

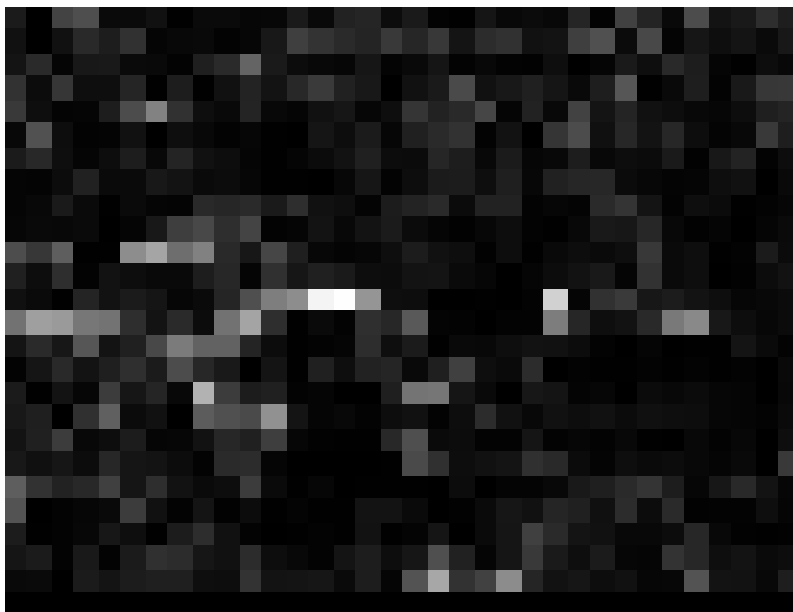


Яркое изображение аппроксимирующих коэффициентов второго уровня sA_2 разложения двумерного вейвлет-преобразования



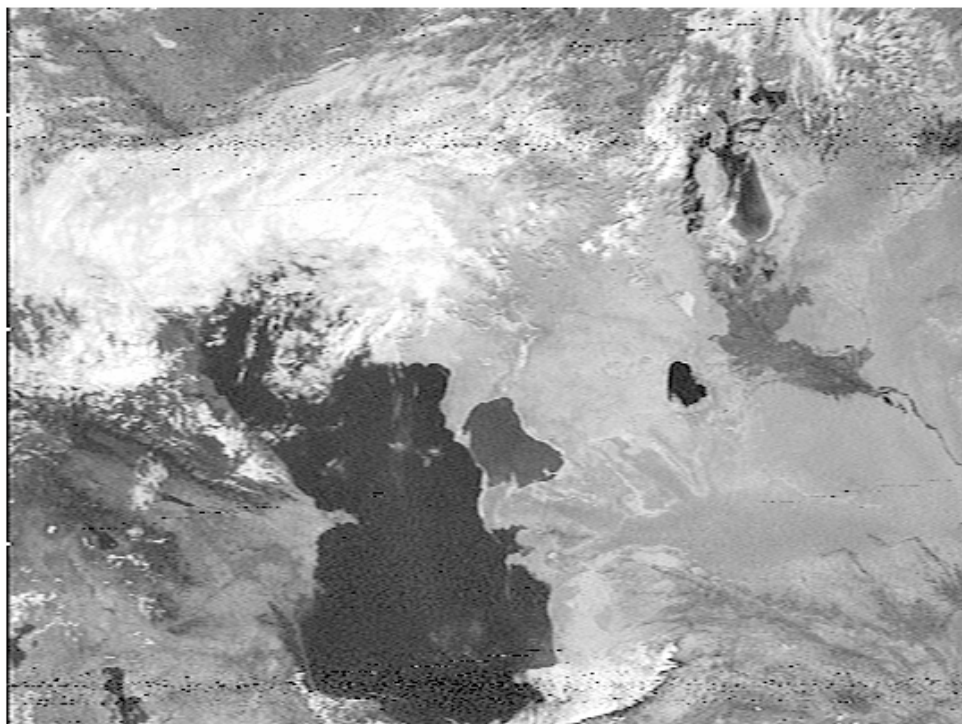
Яркое изображение аппроксимирующих коэффициентов третьего уровня sA_3 (слева) и четвёртого уровня sA_4 (справа) разложения двумерного вейвлет-преобразования

```
[C,U]=wavedec2(S,4,'haar');  
S1=C((26*34+1):(26*34*2)); S1=reshape(S1,26,34);
```



Яркостное изображение горизонтальных детализирующих коэффициентов четвёртого уровня sH_4 разложения двумерного вейвлет-преобразования спутникового снимка

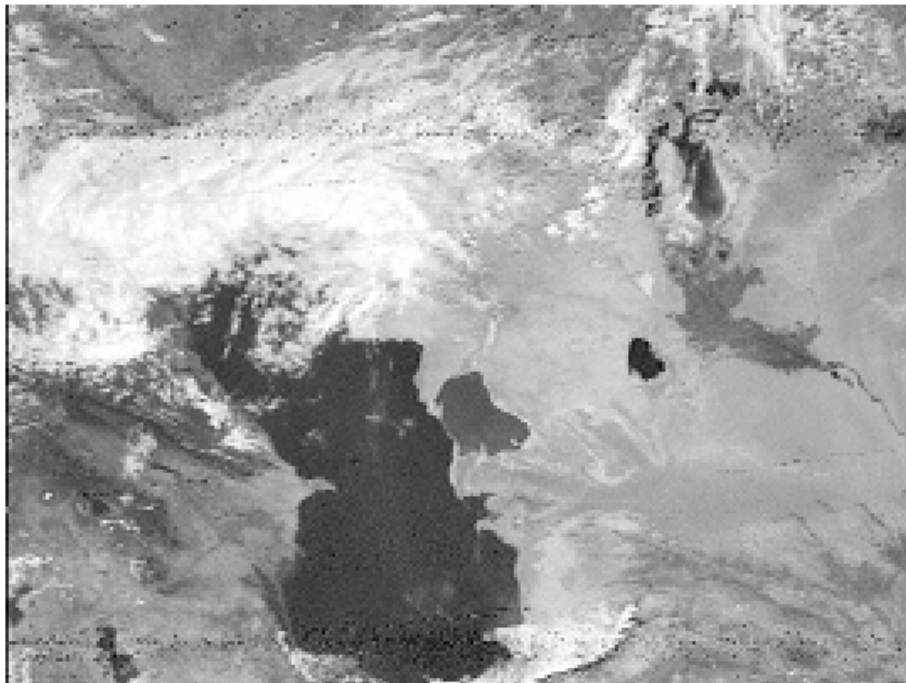
```
[C,U]=wavedec2(S,2,'haar');  
recS=waverec2(C,U,'db1');
```



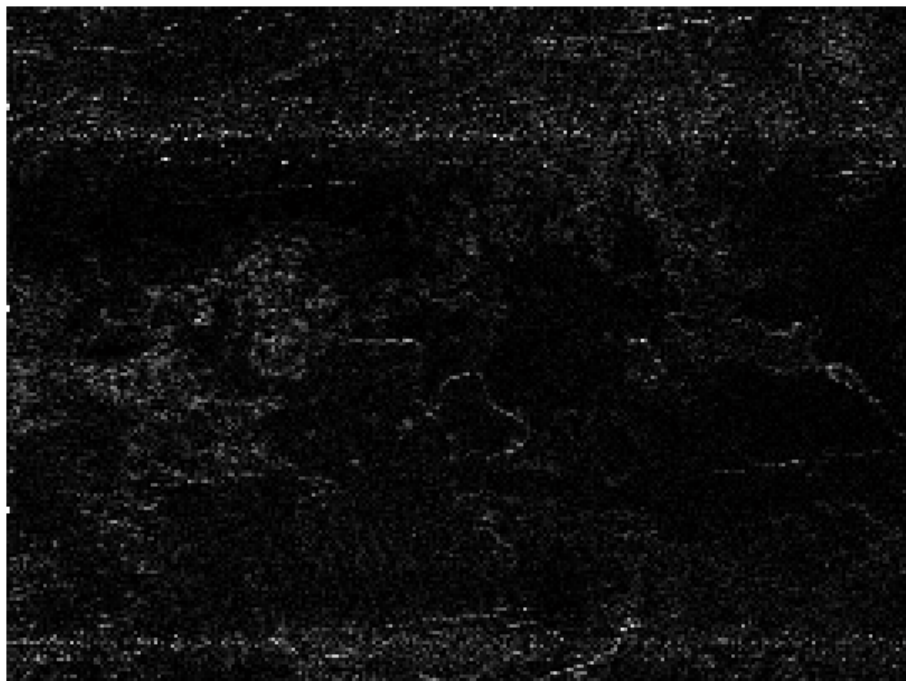
Восстановленный по всем коэффициентам с помощью вейвлета Добеши (db1) разложенный до второго уровня с помощью вейвлета Хаара спутниковый снимок

ВЕЙВЛЕТ-РЕКОНСТРУКЦИЯ ПО ОДНОЙ ВЕТВИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

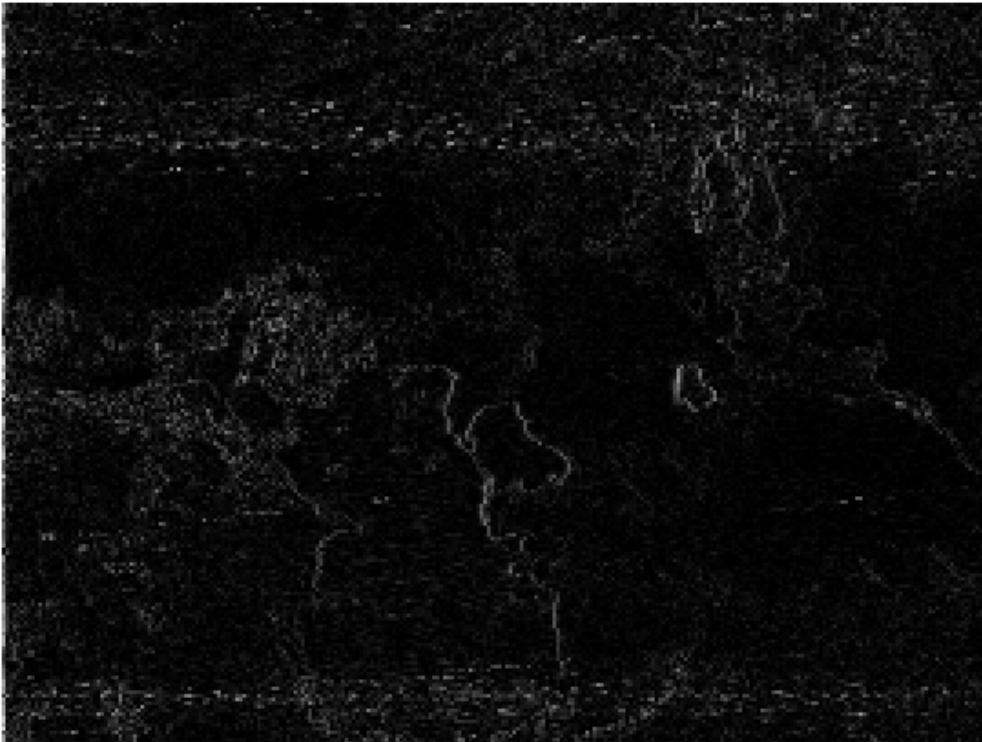
```
[C,U]=wavedec2(S,3,'haar');  
recS=wrcoef2('a',C,U,'db1',1);  
recS=wrcoef2('h',C,U,'db1',1);  
recS=wrcoef2('v',C,U,'db1',1);  
recS=wrcoef2('d',C,U,'db1',1);
```



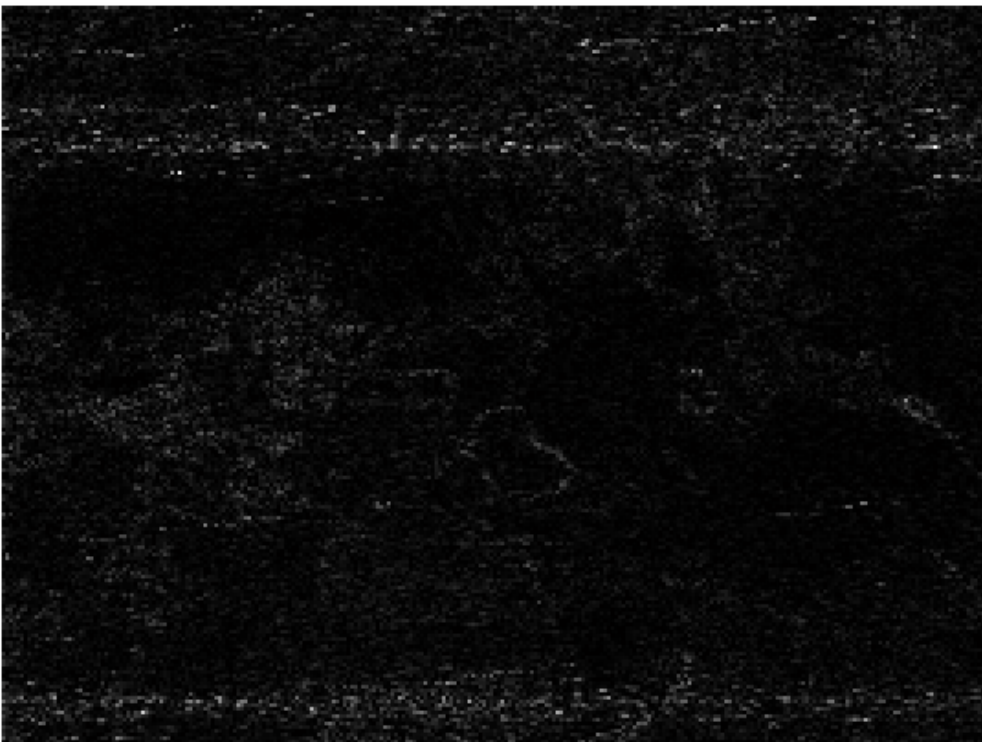
Восстановленный с помощью аппроксимирующих коэффициентов до первого уровня разложенный до третьего уровня спутниковый снимок



Восстановленный с помощью горизонтальных детализирующих коэффициентов до первого уровня разложенный до третьего уровня спутниковый снимок



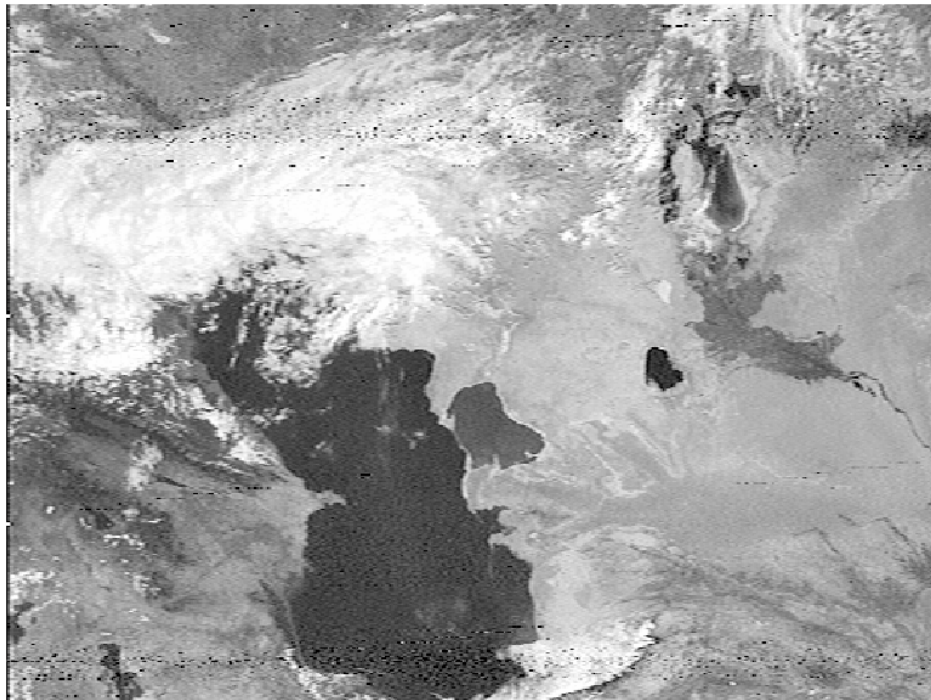
Восстановленный с помощью вертикальных детализирующих коэффициентов до первого уровня разложенный до третьего уровня спутниковый снимок



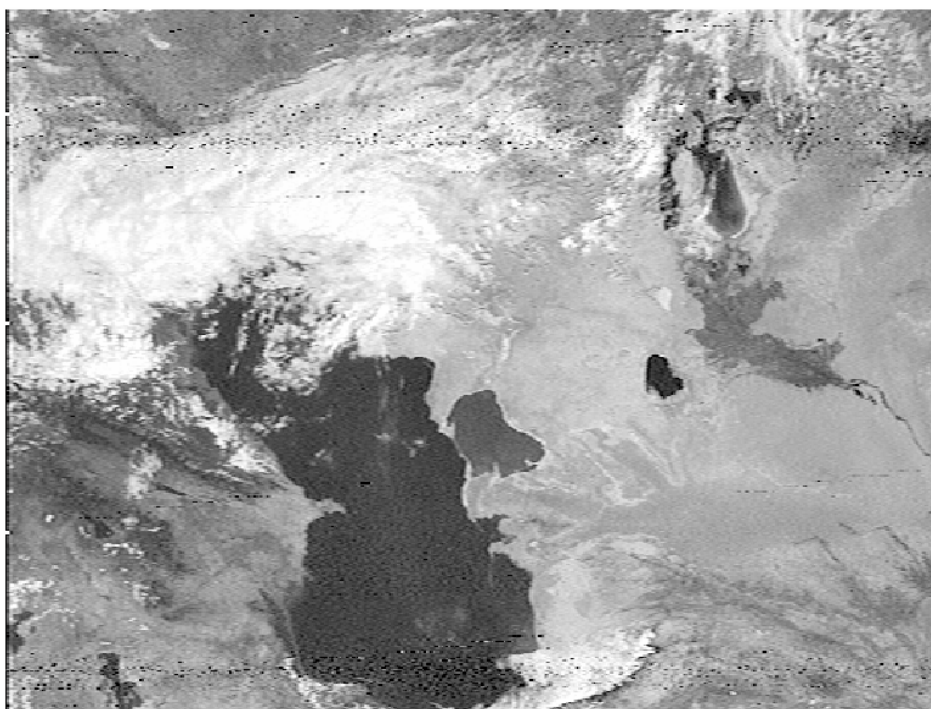
Восстановленный с помощью диагональных детализирующих коэффициентов до первого уровня разложенный до третьего уровня спутниковый снимок

ПРЯМАЯ ВЕЙВЛЕТ-РЕКОНСТРУКЦИЯ ИЗ ДВУМЕРНЫХ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ

```
[C,U]=wavedec2(S,3,'haar');  
Y=upcoef2('a',S,'db1',3);  
Y=upcoef2('d',S,'db1',3);
```



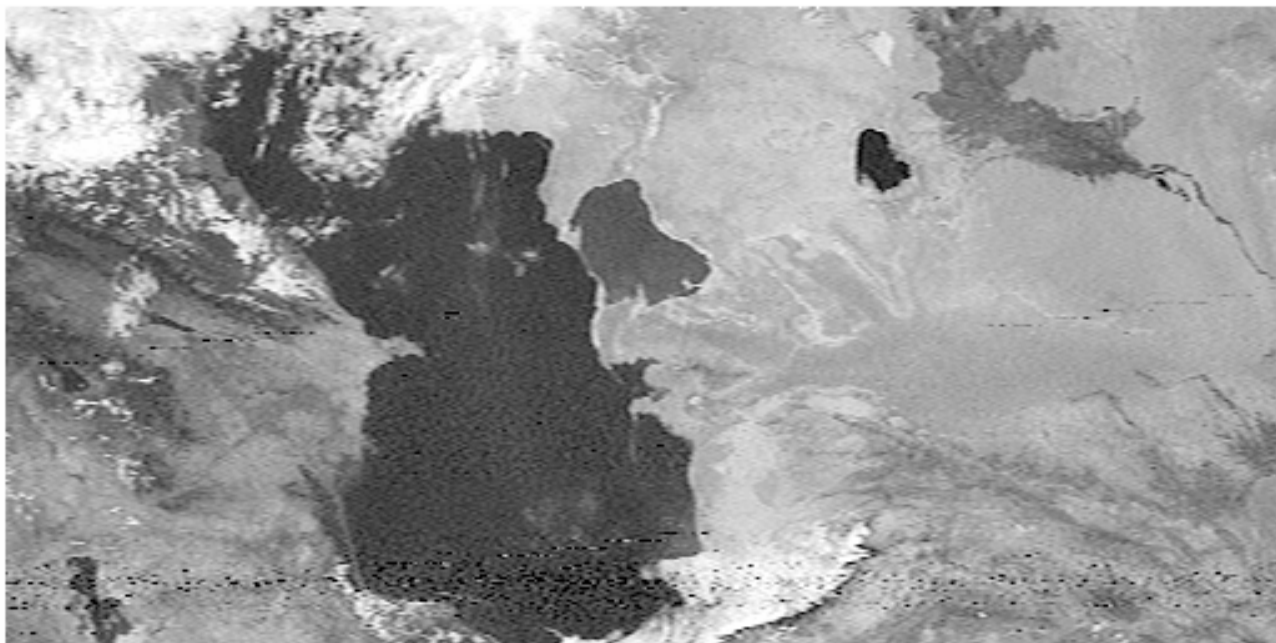
Спутниковый снимок, восстановленный прямым восстановлением из аппроксимирующих вейвлет-коэффициентов



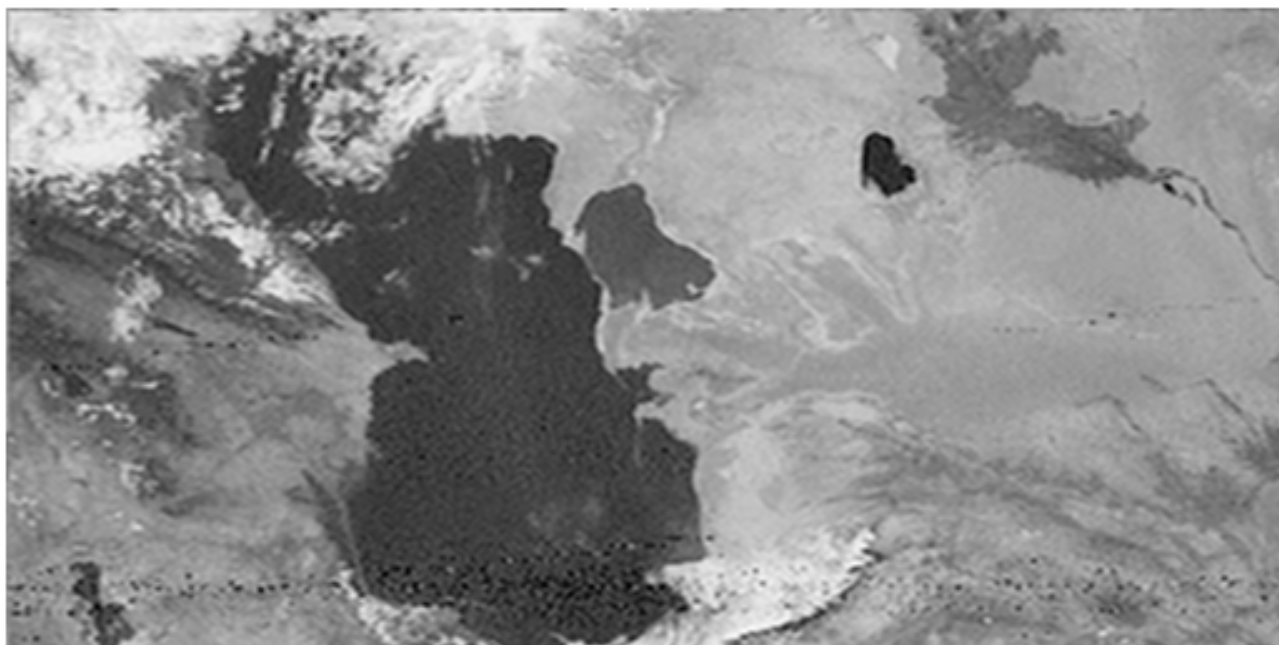
Спутниковый снимок, восстановленный прямым восстановлением из диагональных детализирующих вейвлет-коэффициентов

ПРЯМОЕ И ОБРАТНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ДВУМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

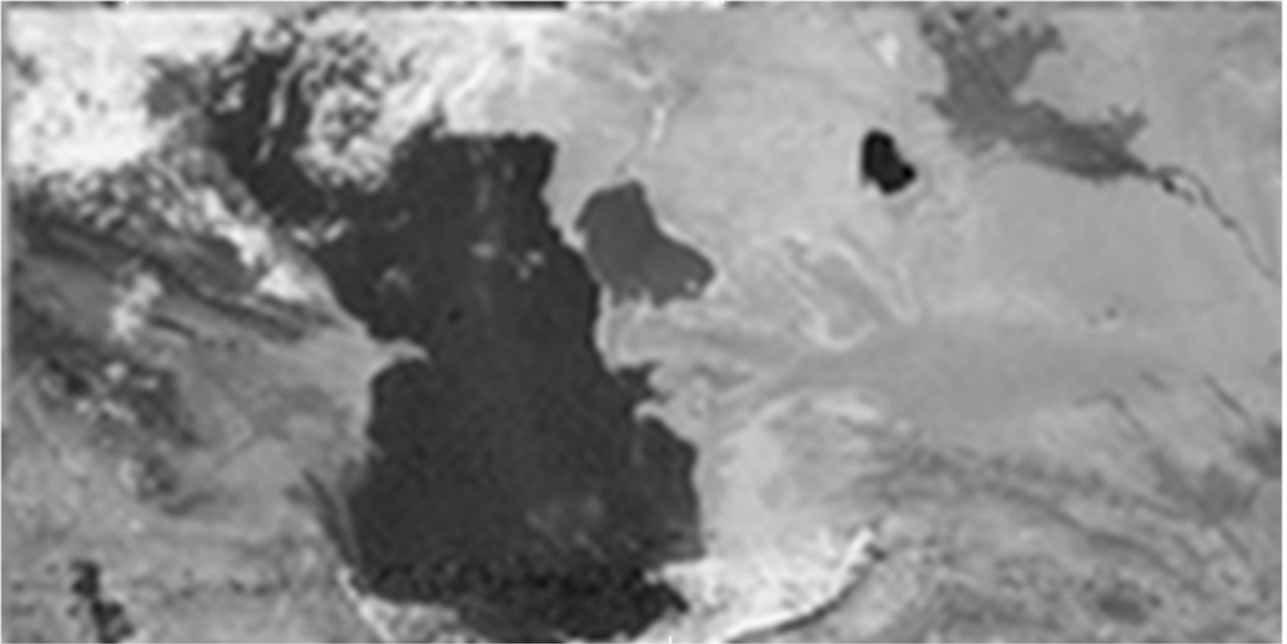
```
S=S(150:405,30:541); % 256×512 пикселей  
[A,H,V,D]=swt2(S,4,'coif2');
```



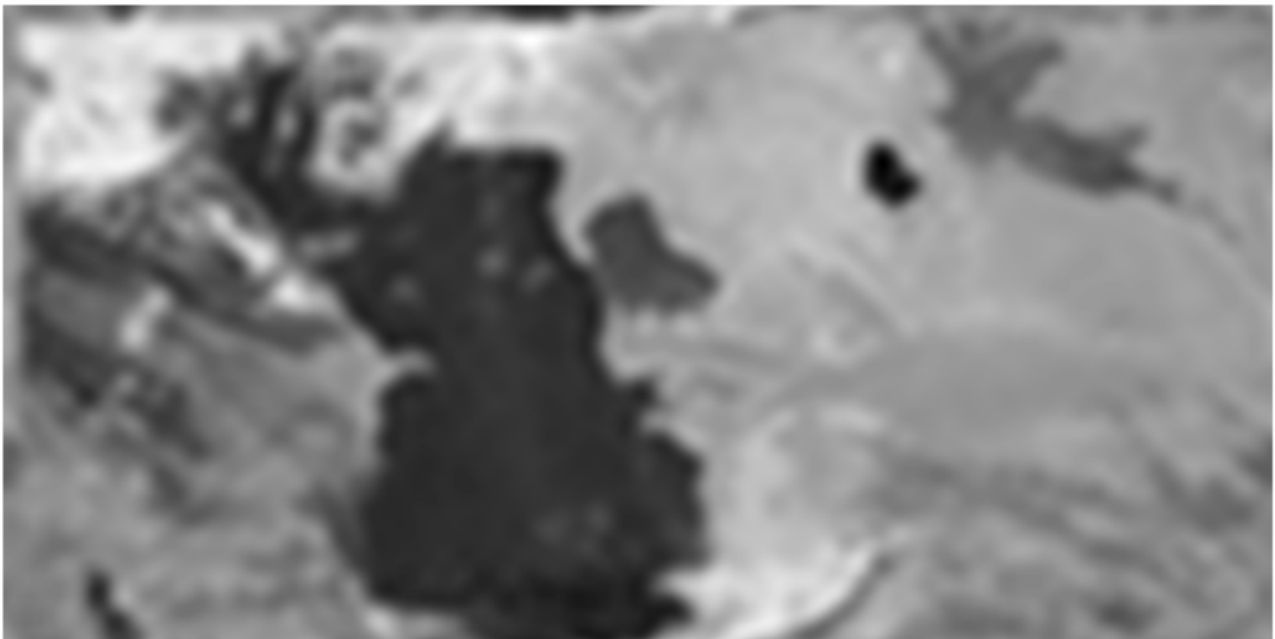
Трансформированный по размерности исходный спутниковый снимок



**Отображение аппроксимирующих коэффициентов первого уровня
стационарного разложения спутникового снимка**



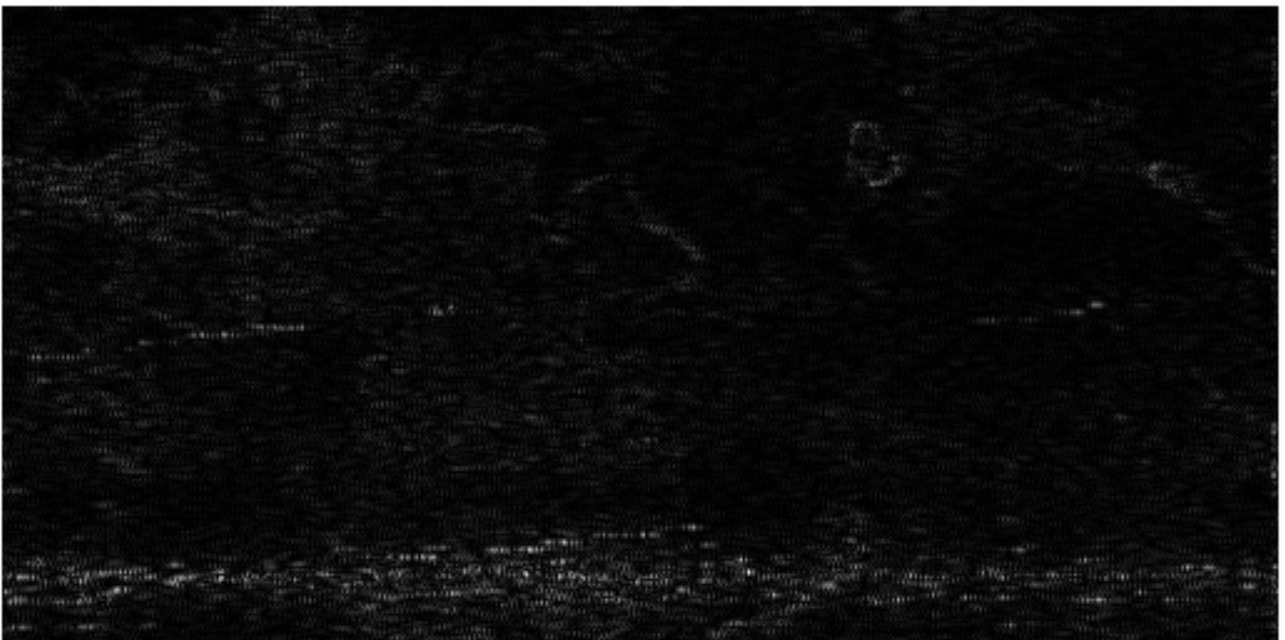
Отображение аппроксимирующих коэффициентов второго уровня стационарного разложения спутникового снимка



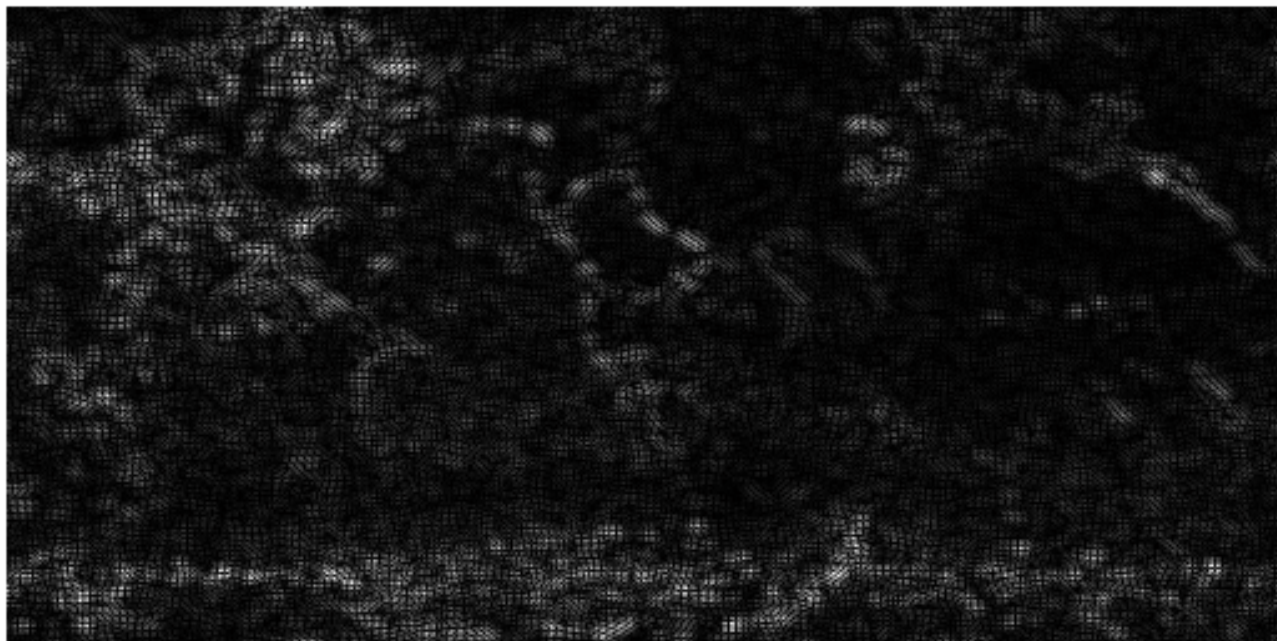
Отображение аппроксимирующих коэффициентов третьего уровня стационарного разложения спутникового снимка



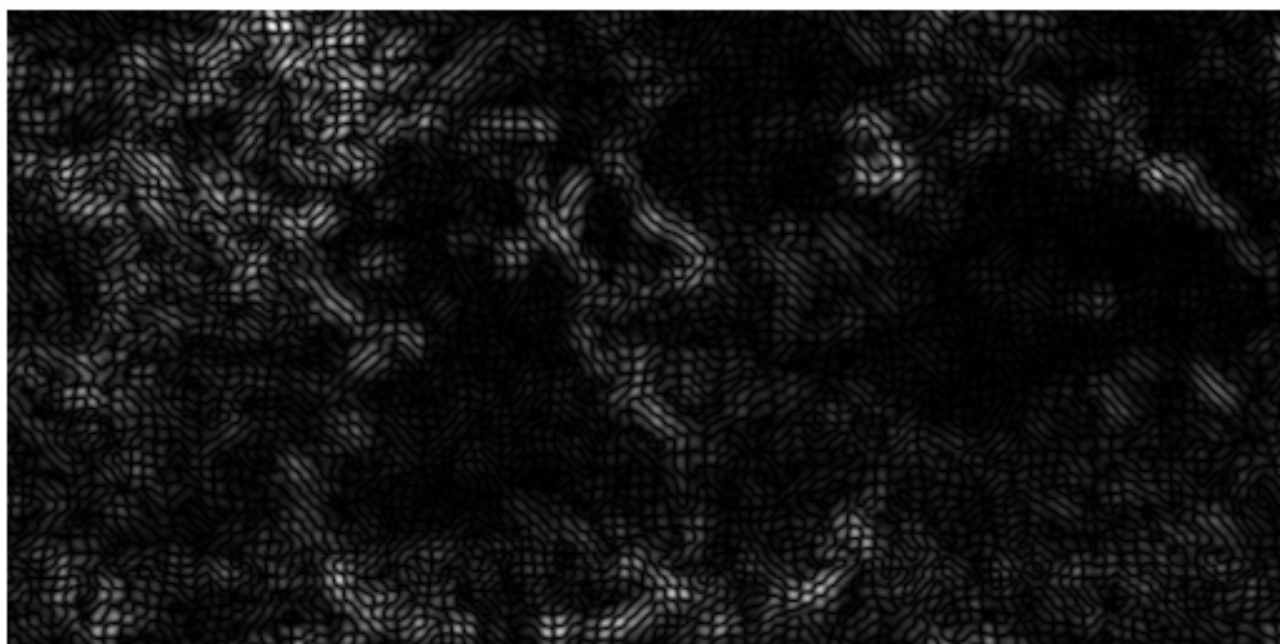
Отображение аппроксимирующих коэффициентов четвёртого уровня стационарного разложения спутникового снимка



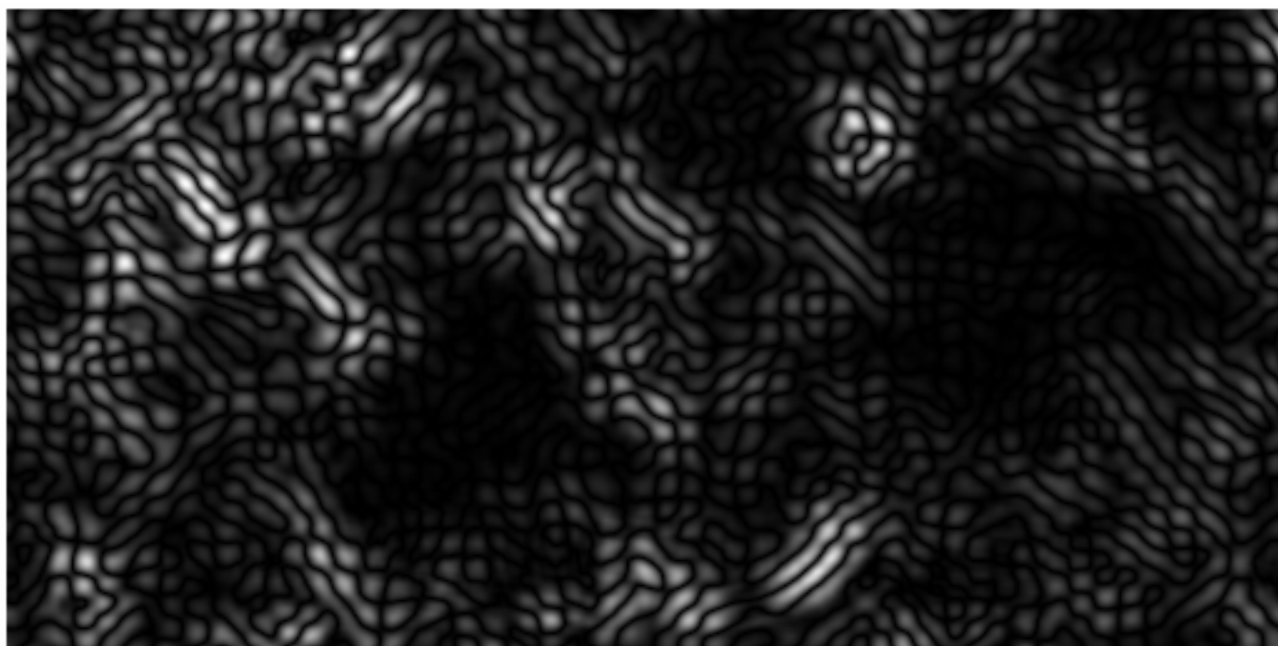
Отображение диагональных детализирующих коэффициентов первого уровня стационарного разложения спутникового снимка



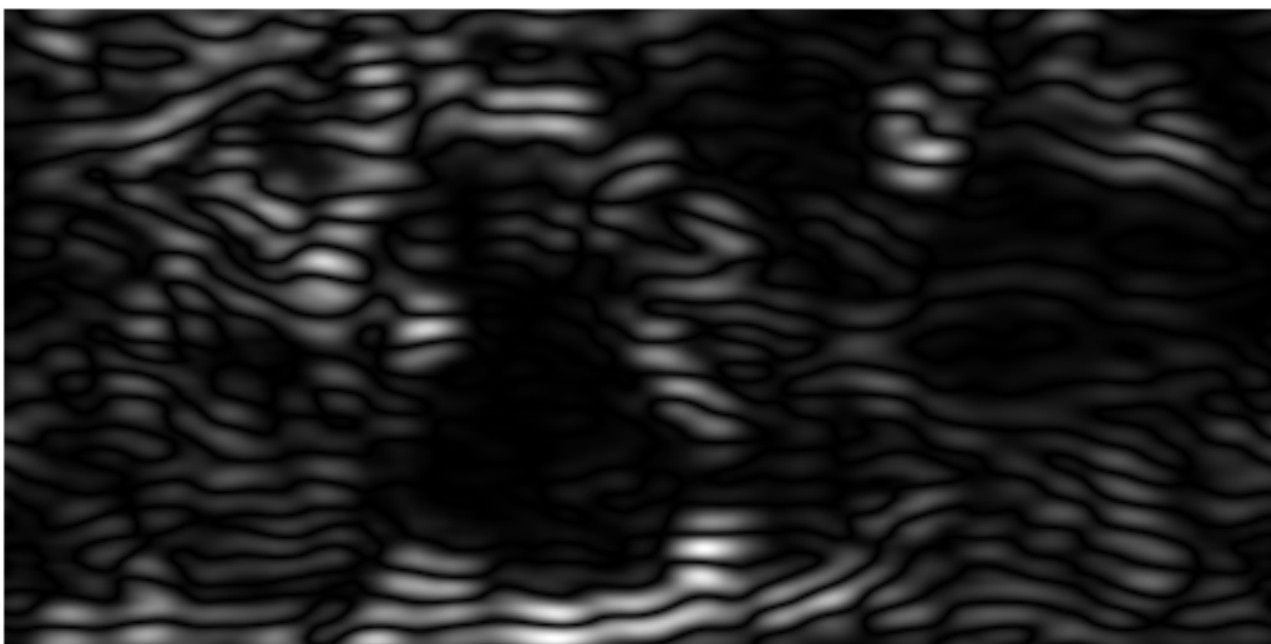
Отображение диагональных детализирующих коэффициентов второго уровня стационарного разложения спутникового снимка



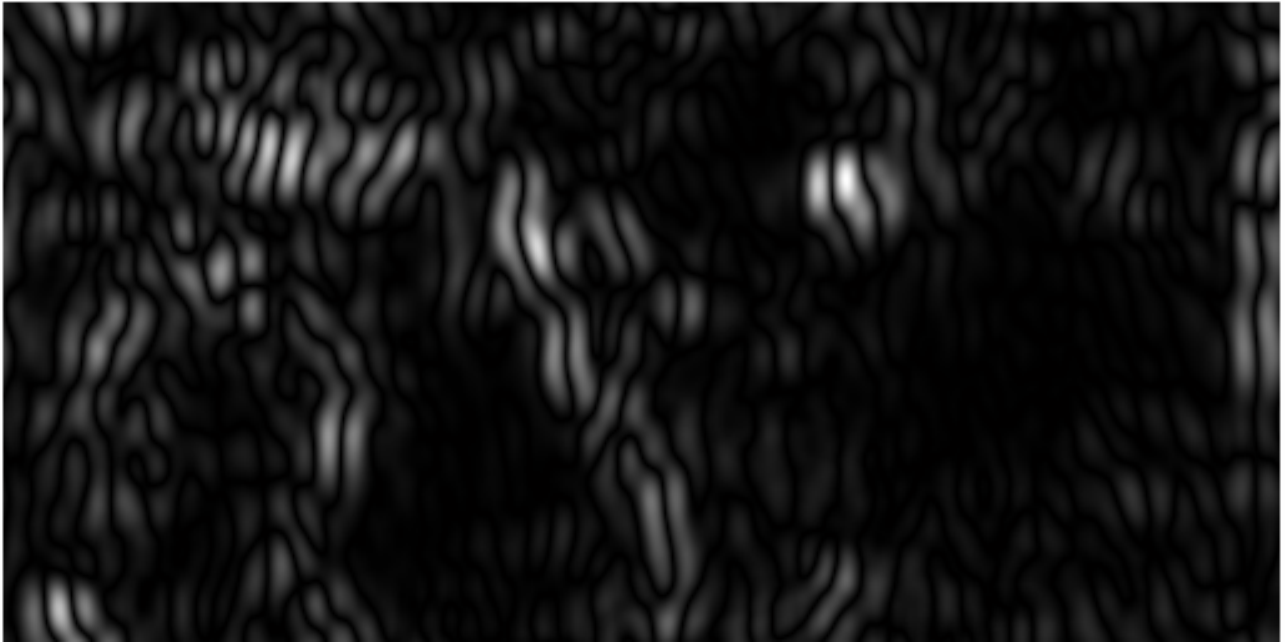
Отображение диагональных детализирующих коэффициентов третьего уровня стационарного разложения спутникового снимка



Отображение диагональных детализирующих коэффициентов четвёртого уровня стационарного разложения спутникового снимка

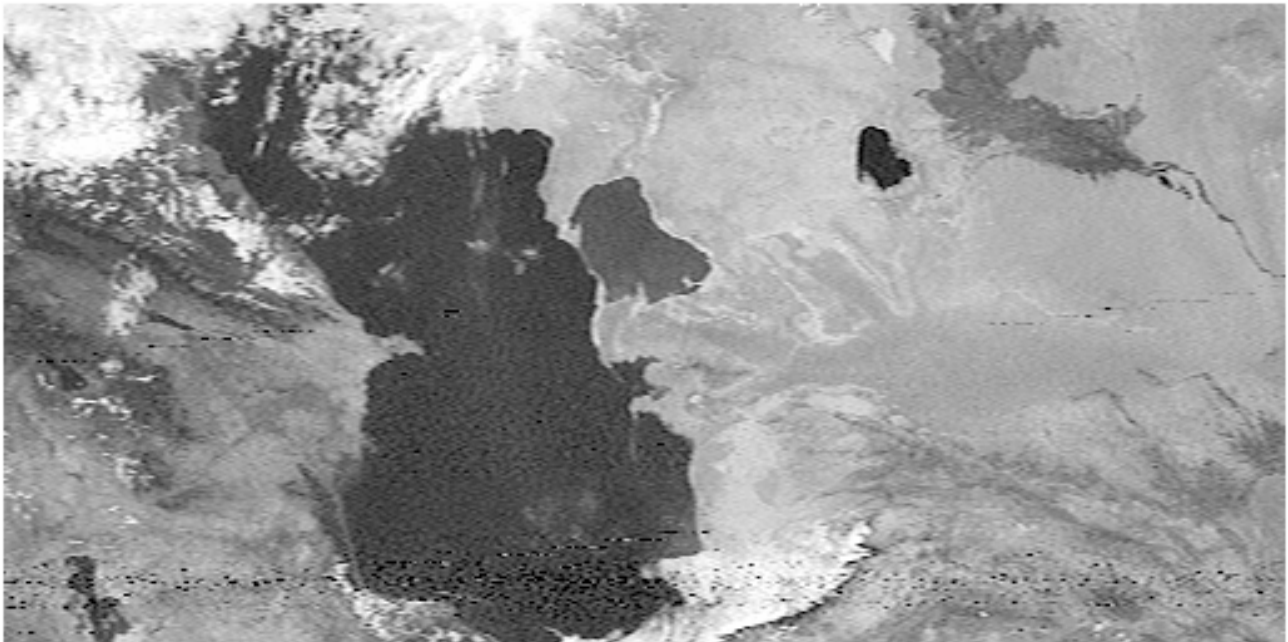


Отображение горизонтальных детализирующих коэффициентов четвёртого уровня стационарного разложения спутникового снимка



Отображение вертикальных детализирующих коэффициентов четвёртого уровня стационарного разложения спутникового снимка

```
[A,H,V,D]=swt2(S,4,'coif2');  
recS=iswt2(A,H,V,D,'coif2');
```

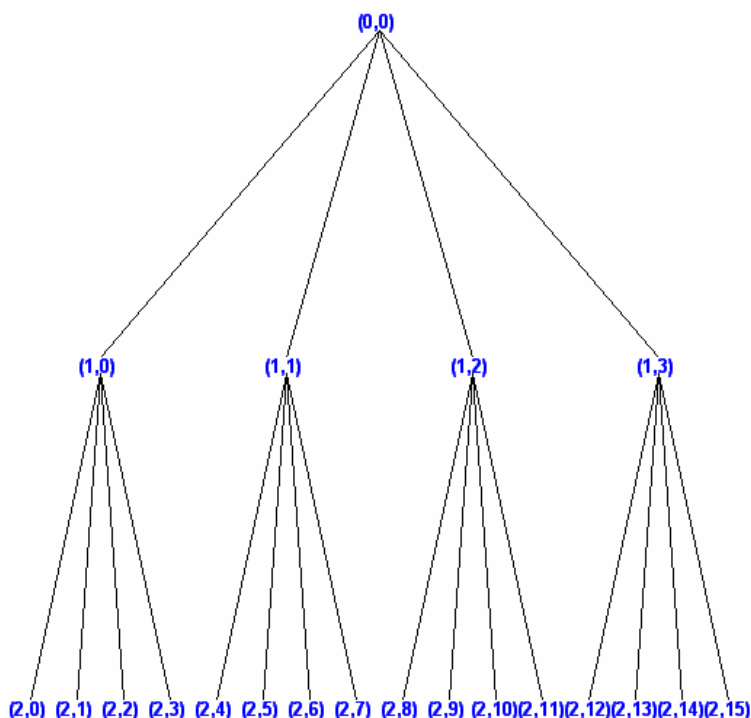


Результат восстановления исходного спутникового снимка обратным стационарным двумерным вейвлет-преобразованием после его разложения до четвёртого уровня

ДВУМЕРНОЕ ПАКЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ-РАЗЛОЖЕНИЕ И ПАКЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ВОССТАНОВЛЕНИЕ

`T=wpdec2(S,2,'haar','shannon');`

Дерево разложения

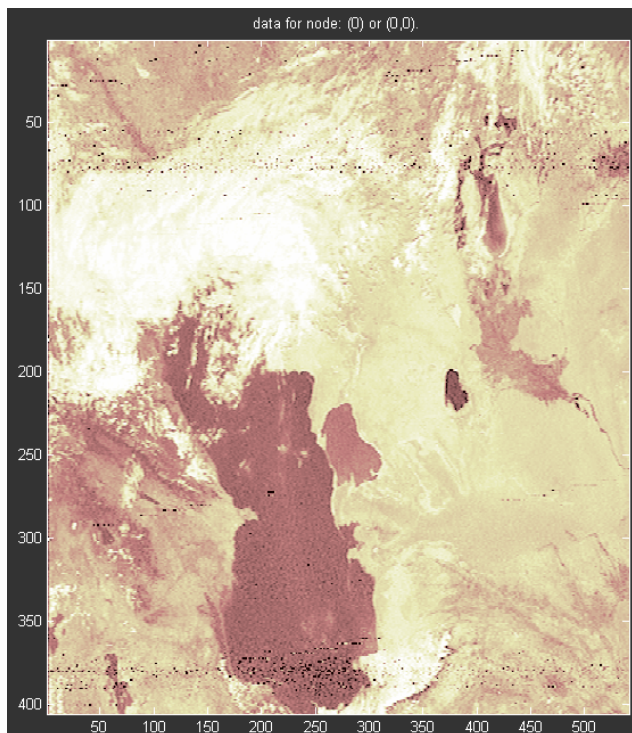


- Узел (0,0) – исходный сигнал,
- Узел (1,0) – коэффициенты A_1 ,
- Узел (1,1) – коэффициенты H_1 ,
- Узел (1,2) – коэффициенты V_1 ,
- Узел (1,3) – коэффициенты D_1 ,
- Узел (2,0) – коэффициенты A_2 для коэффициентов A_1 ,
- Узел (2,1) – коэффициенты H_2 для коэффициентов A_1 ,
- Узел (2,2) – коэффициенты V_2 для коэффициентов A_1 ,
- Узел (2,3) – коэффициенты D_2 для коэффициентов A_1 ,
- Узел (2,4) – коэффициенты A_2 для коэффициентов H_1 ,
- Узел (2,5) – коэффициенты H_2 для коэффициентов H_1 ,
- Узел (2,6) – коэффициенты V_2 для коэффициентов H_1 ,
- Узел (2,7) – коэффициенты D_2 для коэффициентов H_1 ,
- Узел (2,8) – коэффициенты A_2 для коэффициентов V_1 ,
- Узел (2,9) – коэффициенты H_2 для коэффициентов V_1 ,
- Узел (2,10) – коэффициенты V_2 для коэффициентов V_1 ,
- Узел (2,11) – коэффициенты D_2 для коэффициентов V_1 ,
- Узел (2,12) – коэффициенты A_2 для коэффициентов D_1 ,
- Узел (2,13) – коэффициенты H_2 для коэффициентов D_1 ,
- Узел (2,14) – коэффициенты V_2 для коэффициентов D_1 ,
- Узел (2,15) – коэффициенты D_2 для коэффициентов D_1 .

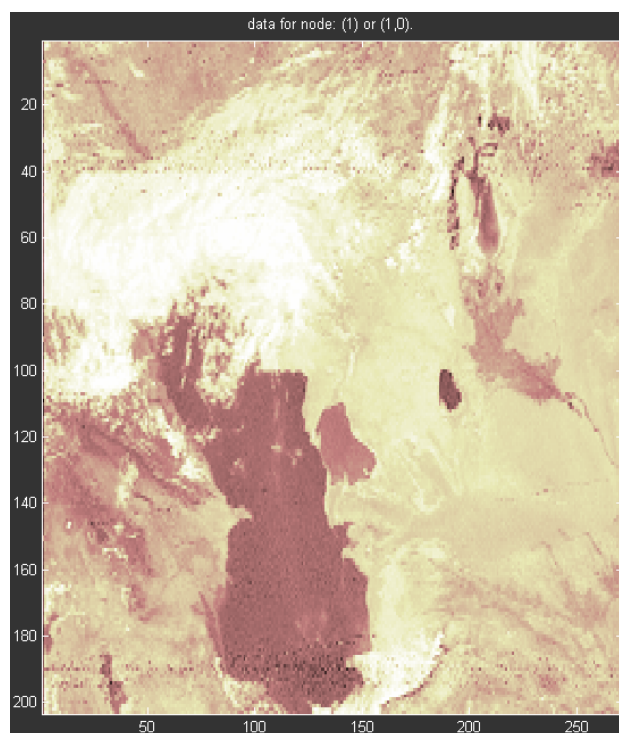
О дереве разложения

```
Wavelet Packet Object Structure
=====
Size of initial data      : [405 541]
Order                    : 4
Depth                   : 2
Terminal nodes           : [5 6 7 8 9 10 11
12 13 14 15 16 17 18 19 20]
-----
Wavelet Name             : haar
Low Decomposition filter : [ 0.7071 0.7071]
High Decomposition filter: [-0.7071 0.7071]
Low Reconstruction filter: [ 0.7071 0.7071]
High Reconstruction filter: [ 0.7071 -0.7071]
-----
Entropy Name            : shannon
Entropy Parameter       : 0
-----
```

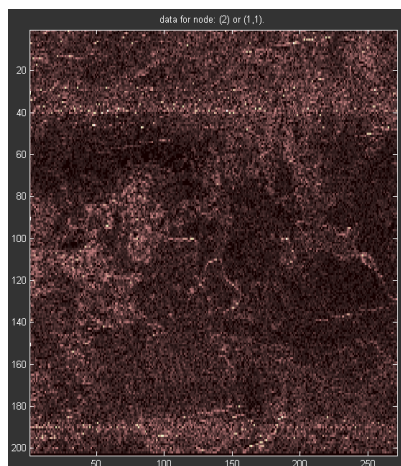
Изображения коэффициентов в узлах дерева разложения



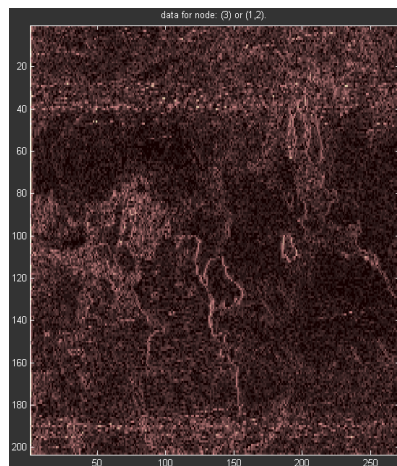
а



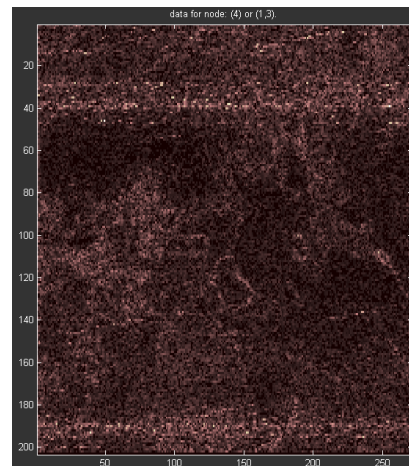
б



в



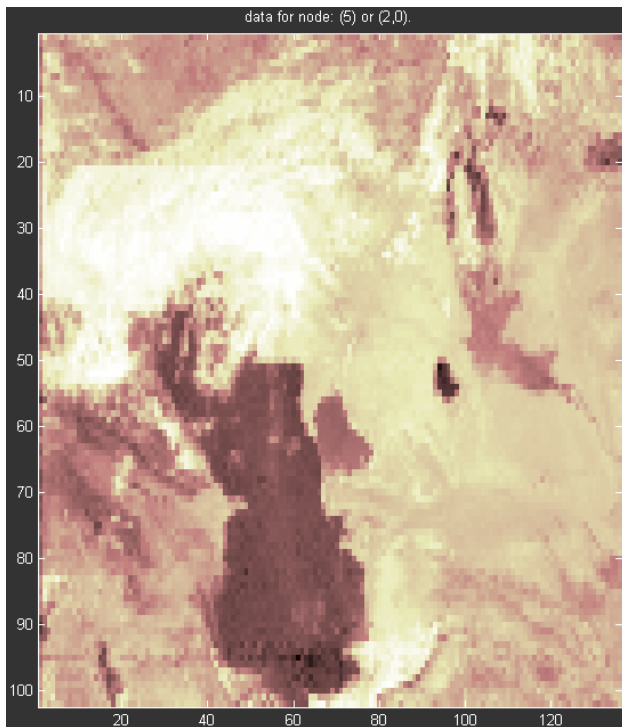
г



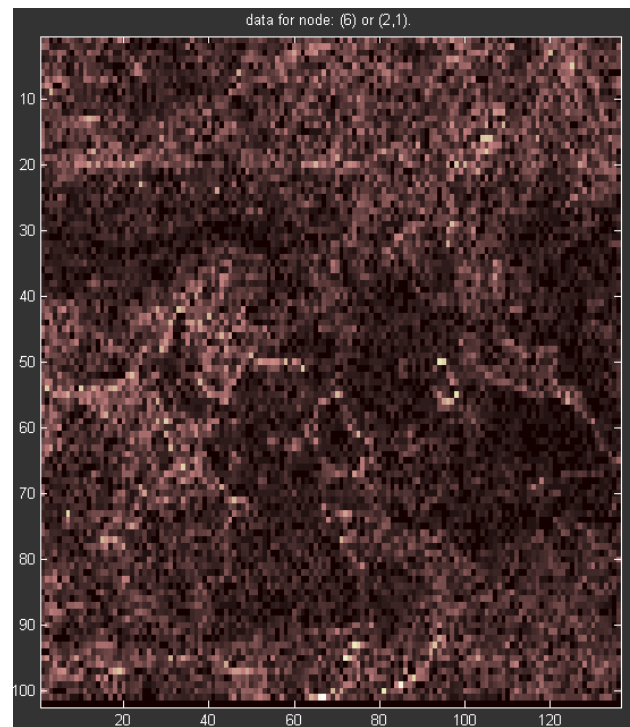
д

Изображения коэффициентов в узлах дерева разложения спутникового снимка

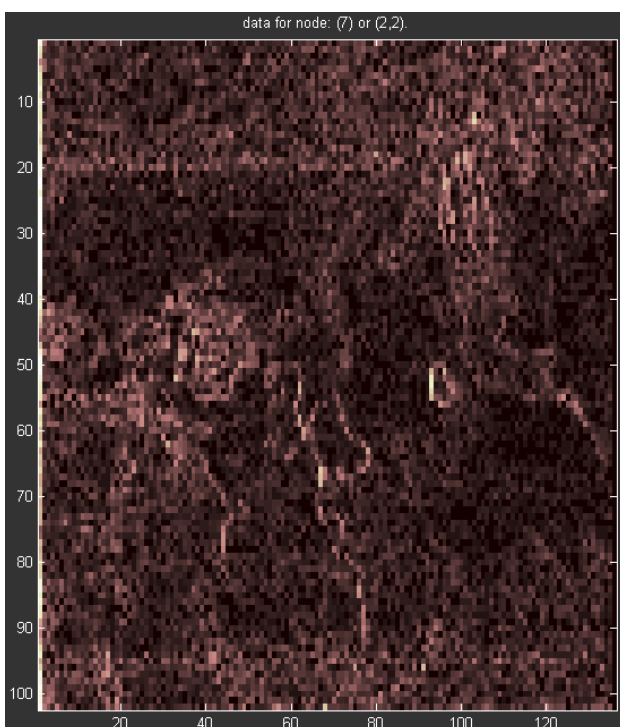
а – в узле 0,0 (собственно сигнал – спутниковый снимок), **б** – в узле 1,0 (аппроксимирующие коэффициенты 1 уровня разложения), **в** – в узле 1,1 (горизонтальные детализирующие коэффициенты 1 уровня разложения), **г** – в узле 1,2 (вертикальные детализирующие коэффициенты 1 уровня разложения), **д** – в узле 1,3 (диагональные детализирующие коэффициенты 1 уровня разложения)



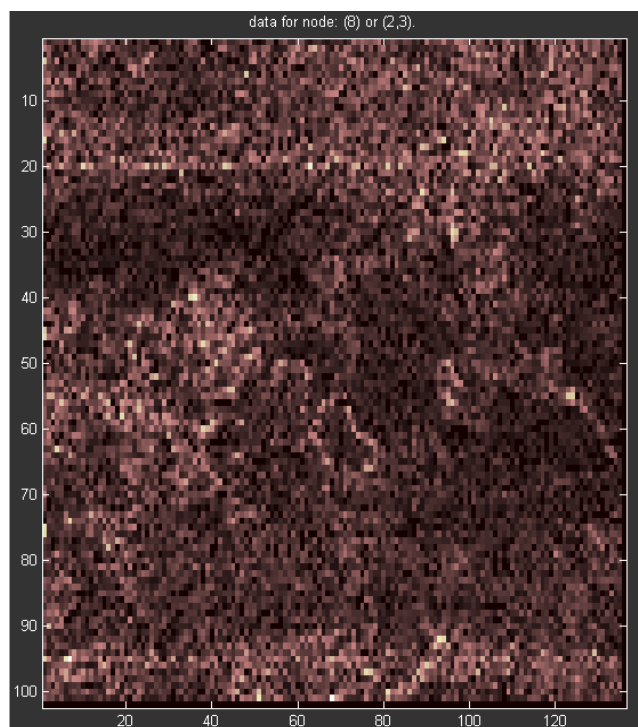
а



б



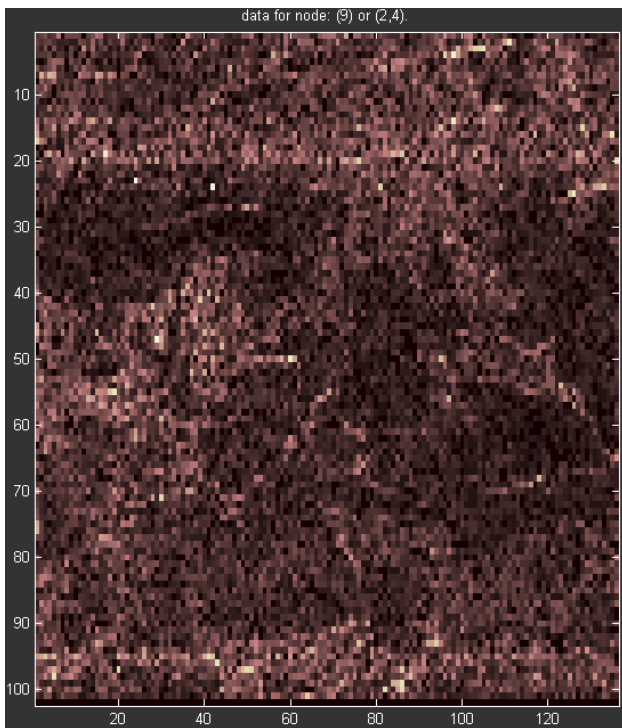
в



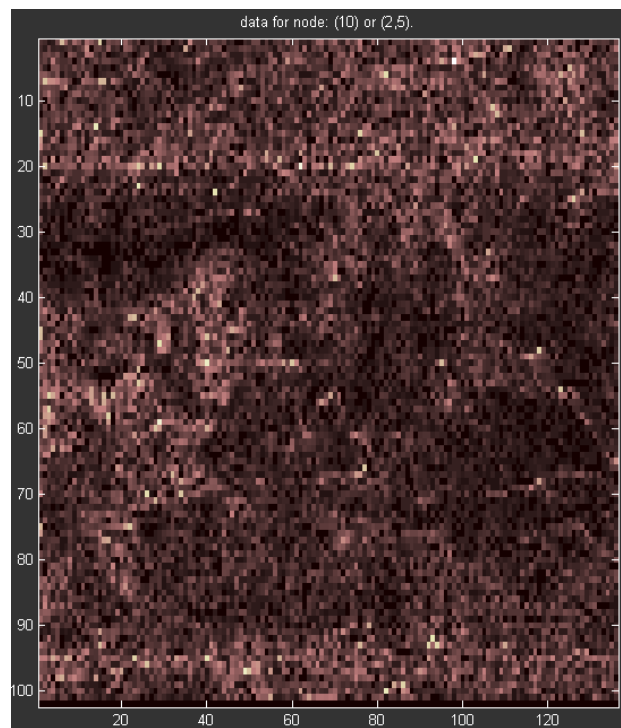
г

Изображения коэффициентов в узлах дерева разложения спутникового снимка

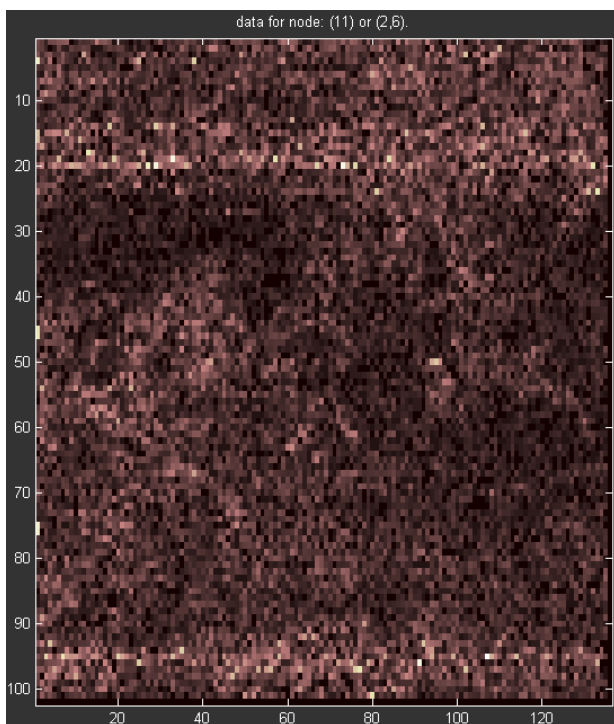
а – в узле 2,0, б – в узле 2,1, в – в узле 2,2, г – в узле 2,3



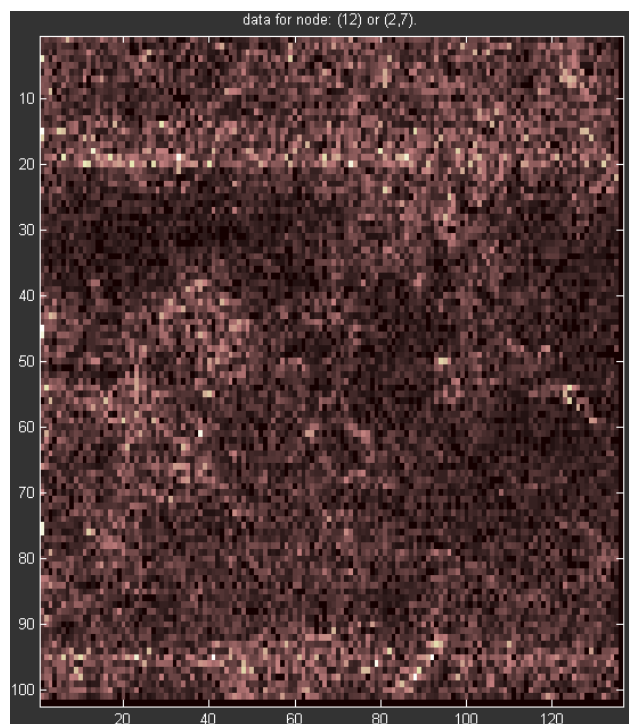
а



б



в

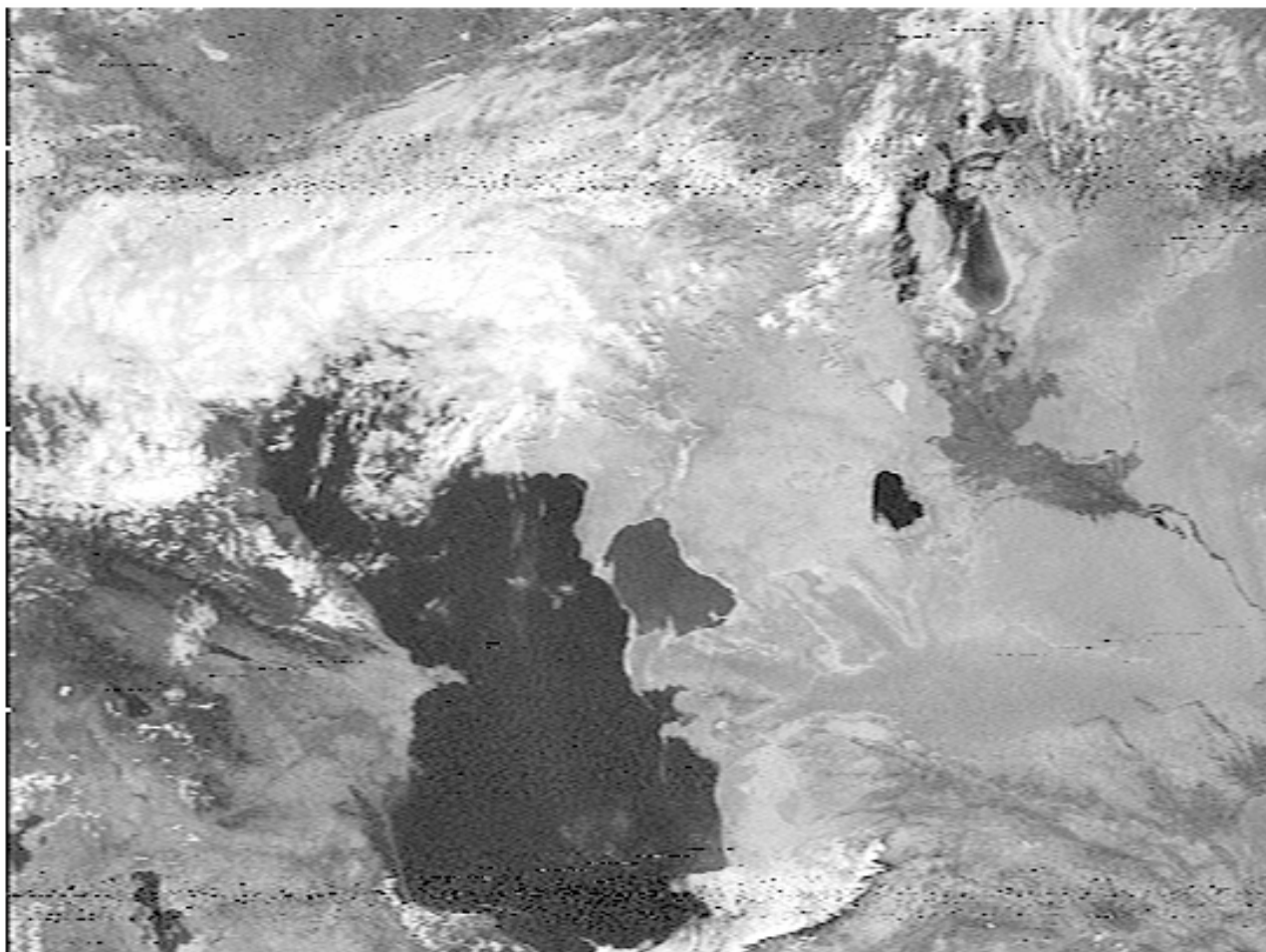


г

Изображения коэффициентов в узлах дерева разложения спутникового снимка

а – в узле 2,4, б – в узле 2,5, в – в узле 2,6, г – в узле 2,7

```
T=wpdec2(S,2,'haar','shannon');  
recS=wprec(T);
```



**Восстановленный после вейвлет-пакетного разложения спутниковый
снимок**

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Солон-Пресс, 2004. – 400 с.
2. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
3. Быков Р.Е., Фраер Р., Иванов К.В., Манцетов А.А. Цифровое преобразование изображений: Учеб. пособие для вузов / Под. ред. проф. Р.Е. Быкова – М.: Горячая линия-Телеком, 2003. – 228 с.
4. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 496 с.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Понятие о функции и сигнале
2. Область определения и носитель функции
3. Задача аппроксимации функций
4. Представление функций в виде ряда Фурье
5. Одномерное преобразование Фурье
6. Применение рядов и преобразования Фурье для приближения функций и сигналов
7. Оконное преобразование Фурье
8. Двумерное преобразование Фурье
9. Глобальная свёртка двумерных дискретных пространственных функций
10. Локальная свёртка в двумерном пространстве
11. Понятие о цифровой фильтрации
12. Фурье фильтрация сигналов изображений
13. Идея вейвлет-преобразования
14. Прямое непрерывное вейвлет-преобразование
15. Обратное непрерывное вейвлет-преобразование
16. Частотно-временная локализация
17. Ортогональные вейвлеты
18. Диадное вейвлет-преобразование
19. Кратномасштабный анализ и синтез
20. Определение вейвлета
21. Признаки вейвлета
22. Классификация вейвлетов
23. Способы представления результатов вейвлет-преобразования
24. Частотный подход к вейвлет-анализу
25. Свойства вейвлет-преобразования
26. Быстрое вейвлет-преобразование
27. Вейвлет-разложение
28. Вейвлет-восстановление
29. Вейвлет-пакетная обработка
30. Возможности вейвлет-анализа
31. Двумерные вейвлеты
32. Одномерный вейвлет-анализ
33. Двумерный вейвлет-анализ