МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для практичних занять

з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

розділ «Диференціальні рівняння»

для студентів І курсу денної форми навчання

Спеціальність: комп'ютерні науки

"Затверджено"
на засіданні групи
забезпечення спеціальності
Протокол № 13 від 20.05.21

Одеса 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для практичних занять

з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

розділ «Диференціальні рівняння»

для студентів І курсу денної форми навчання

Спеціальність: комп'ютерні науки

"Затверджено"
на засіданні групи забезпечення спеціальності
Протокол № 13 від 20.05.21
Голова групи
Мещеряков В.І.

"Затверджено"
на засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол № 13 від 14.05.21
Завідувач кафедри Глушков О.В.

Одеса 2021

ПЕРЕДМОВА

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямку комп'ютерні науки,яка спрямована на вивчення основних положень диференціального і інтегрального числення, функцій багатьох змінних, кратних та криволінійних інтегралів, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, рівнянь математичної фізики, теорії імовірності та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при розв'язанні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності. Вона відображує нові вимоги, що пред'являються до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для вирішення прикладних задач.

Розділ «Диференційні рівняння» – один з важливих галузей математичного аналізу, який використовується у фізиці, механіці, електротехніці та інших науках під час створення математичних моделей та при розв'язанні різноманітних задач.

Мета вивчення розділу - забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного та практичного курсу поданого розділу, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, комп'ютерних наук, взагалі інформаційних технологій тощо, навиків творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу, рівнянь знань та умінь при вивченні розділу визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання розділу «Диференційні рівняння» - навчити студентів: правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення цього розділу потребує від студентів знання таких розділів вищої математики, як диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.

Мета методичних вказівок. Роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даного розділу. Після вивчення розділу студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати – математичну символіку, визначення, основні теореми, передбачені програмою; вміти – влучно і стисло виражати математичну думку під час розв'язання конкретних задач, самостійно розв'язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього отримані під час вивчення даного розділу дисципліни знання, аналізувати отримані результати. Отримані у процесі навчання знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

1. Програма розділу «Диференційні рівняння»

Види найпростіших диференціальних рівнянь. Загальний та частинний розв'язки диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Диференційні рівняння другого порядку, що допускають пониження порядку. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Фундаментальна система розв'язку. Теорема про структуру загального розв'язку. Однорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів. Системи диференціальних рівнянь.

2. Базові знання та вміння

Після вивчення розділу «Диференційні рівняння» студент повинен:

засвоїти базові знання: основні види диференціальних рівнянь першого та другого порядку; основні методи рішення диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь;

вміти: використовувати отримані знання при розв'язанні конкретних задач, застосовувати ці знання для подальшого вивчення дисциплін професійноорієнтованого циклу, а також наукової роботи.

3. Загальні рекомендації студенту по вивченню курсу.

Основною формою навчання студента є аудиторна та самостійна робота над навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу по підручниках, розв'язання задач, самоперевірка, виконання практичних та модульних контрольних робіт.

За допомогою методичних вказівок, студент має можливість побачити та розв'язати приклади типових завдань. Матеріал методичних вказівок дозволяє виробити практичні навички в розв'язуванні та дослідженні диференціальних рівнянь та їх систем, що описують еволюційні процеси в різних областях.

Останнім етапом завершення вивчення розділу «Диференційні рівняння» є написання модульних контрольних робіт (теоретична та практична частини), що оцінюються згідно з робочим силлабусом дисципліни.

4. Методичні вказівки

4.1. Методичні вказівки до практичних занять та підготовки до виконання модульної контрольної роботи №1

4.1.1. Основні поняття диференціальних рівнянь

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.1]

Означення. *Звичайним диференціальним* рівнянням називається рівняння, що залежить від незалежної змінної x, шуканої функції і її похідних.

Символічно це записують так

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 .$$

Означення. Порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у диференціальне рівняння, називається *порядком* цього рівняння.

Наприклад:

а) - $x^2 y' + 5x\,y = y^2$ -диференціальне рівняння першого порядку.

б) - $y'' - 2y' + y - x^2 = 0$ -диференціальне рівняння другого порядку.

Означення. *Розв'язком* диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Найпростішим диференціальним рівнянням є рівняння виду $y' = f(x)$.

Щоб його розв`язати, досить взяти невизначений інтеграл

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C \,,$$

де *C*- довільна стала.

Означення. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння називається $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots)$ розв'язок, який містить стільки констант $C_1, C_2, \ldots$ який порядок цього рівняння.

*Розв`язати задачу Коші* - означає виділити із загального розв`язку частинний розв`язок, що задовольняє заданим початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \,, y''(x_0) = y_0'' \,, \ldots..$$

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots)$, в якому $C_1, C_2, \ldots$ приймають певні значення, які відповідають задачі Коші.

4.1.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.1]

Диференціальне рівняння

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy \qquad (1)$$

називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними*. Якщо $y=\varphi(x)$ його розв`язок, то маємо тотожність

$$f_1(x)dx = f_2(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Інтегруємо його

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(\varphi(x))\varphi'(x)dx + C. \qquad (2)$$

У правому інтегралі виконаємо заміну змінної, покладемо $y=\varphi(x)$, тоді рівність (2) набуде вигляду $\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C.$ Таким чином, щоб розв`язати рівняння (1), досить проінтегрувати обидві частини цієї рівності:

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C \quad \text{або} \quad F_1(x) = F_2(y) + C. \qquad (3)$$

Приклад 1. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y' = 2^{x+y}$.

Дивлячись на те, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, напишемо його у вигляді $2^{-y}dy = 2^x dx$

Беремо інтеграли $\int 2^{-y}dy = \int 2^x dx$, або $-\dfrac{2^{-y}}{\ln 2} = \dfrac{2}{\ln 2}^{x} + C$.

Приклад 2. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $x \cdot (y^2 - 4)dx + ydy = 0.$

Приведемо рівняння до рівняння з розділеними змінними:

$$x\,dx + \frac{ydy}{y^2 - 4} = 0.$$

Беремо інтеграли :

$$\int x\,dx + \int \frac{ydy}{y^2 - 4} = C.$$

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$ та

$$\int \frac{ydy}{y^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{2ydy}{y^2-4} = \begin{bmatrix} y^2-4=t \\ 2ydy=dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln|t| \ = \frac{1}{2}ln|y^2-4|$$

Отримаємо загальний розв'язок:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}ln|y^2-4| = \frac{C_1}{2}$$

або

$$x^2 + ln|y^2-4| = C_1$$

4.1.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.2]

Означення. Функція називається *однорідною функцією к-го порядку*, якщо $f(tx,ty) = t^k \cdot f(x,y)$.

Наприклад: $f(x,y) = 4x^3 + 7x^2y - 5xy^2 + 9y^3$ є однорідною функцією третього порядку, тут сумарний степінь змінних x і y в кожному доданку дорівнює трьом; функція $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} + \frac{y}{x}\ln\frac{x}{y} - 5$ - однорідна нульового порядку.

Означення. Диференціальне рівняння

$$f_1(x,y)dx = f_2(x,y)dy \qquad (4)$$

називається *однорідним* диференціальним рівнянням, якщо $f_1(x,y)$ і $f_2(x,y)$ - однорідні функції того самого порядку або, якщо диференціальне рівняння (4) можна розв'язати відносно y', тобто

$$y' = f(x,y), \qquad (5)$$

то $f\ (x,y)$ - однорідна функція нульового порядку.

Приклад 3. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $(x-y)dy = (x+y)dx$.

Запишемо це рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

Розділимо чисельник і знаменник правої частини на *x*: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$.

Покладемо $t=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=xt\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=t+x\dfrac{dt}{dx}$.

Підставляючи все це в рівняння, отримаємо $t+x\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1+t^2}{1-t}$. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1-t}{1+t^2}dt=\frac{dx}{x}.$$

Звідки

$$arctgt-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)=\ln x+C$$

або

$$arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y}{x^2}^2\right)=\ln x+C.$$

4.1.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Література: [1, р.7, п. 1-2], [2, гл.9, п.3]

Означення. *Лінійним* диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y'+p(x)\cdot y=q(x). \qquad (6)$$

Зробимо підстановку: $y=u(x)\cdot v(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ поки що довільні функції. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\dfrac{dv}{dx}$.

Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\frac{dv}{dx}+p(x)uv=q(x).$$

Покладаючи $u\cdot\dfrac{dv}{dx}+p(x)uv=0, u\neq 0$.

Зауваження. Якщо поставити $u=0$, отримаємо $y=0$ й $y'=0$. Лінійне рівняння втратить зміст.

Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \\ \dfrac{du}{dx} v = q(x). \end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \ln v = -\int p(x)dx. \quad v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Отримане значення $v(x)$ підставляємо в друге рівняння системи, і знаходимо:

$$u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C.$$

Шуканий розв`язок :

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C \right) e^{-\int p(x)dx}.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y' - 2xy = 2x^3$ - лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

Робимо заміну: $y = u \cdot v$, $y' = \dfrac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \dfrac{dv}{dx}$. Підставляємо в рівняння:

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} - 2xuv = 2x^3.$$

Покладемо

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} - 2xv = 0 \\ \dfrac{du}{dx} = 2x^3. \end{cases}$$

Розв`яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{dv}{v} = 2xdx \Rightarrow \ln v = x^2 \Rightarrow v = e^{x^2}.$$

Підставляємо в друге рівняння системи:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{x^2} = 2x^3 \Rightarrow du = 2x^3 dx \Rightarrow$$

$$u=\int 2x^3e^{-x^2}dx=\begin{bmatrix} t=-x^2 \\ dt=-2xdx \end{bmatrix}=-\int te^t dt=\begin{bmatrix} u=t; dv=e^t dt \\ du=dt; v=e^t \end{bmatrix}=$$

$$=-te^t+\int e^t dt=-te^t+e^t+C=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C.$$

Шуканий розв'язок

$$y=u\cdot v=\left(x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+C\right)e^{x^2}=x^2+1+C\,e^{x^2}.$$

4.1.5. Запитання для самоперевірки і підготовки до модульної контрольної роботи

1. Дайте означення диференціального рівняння I-го порядку.
2. Дайте означення загального та частинного розв'язку диференціального рівняння.
3. Дайте означення порядку диференціального рівняння.
4. Наведіть приклади задачі Коші для диференціального рівняння I-го порядку.
5. Сформулюйте теорему існування та єдності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння I-го порядку.
6. Опишіть вигляд диференціального рівняння з розділеними змінними та його розв'язок.
7. Опишіть вигляд диференціального рівняння з відокремлюваними змінними та метод його розв'язку.
8. Опишіть вигляд однорідного диференціального рівняння та метод його розв'язку.
9. Які функції називаються однорідними?
10. Опишіть вигляд лінійного диференціального рівняння та метод його розв'язку.

4.2. Методичні вказівки до практичних занять та підготовки до виконання модульної контрольної роботи № 2

4.2.1. Диференційні рівняння вищого порядку, що допускають пониження порядку

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.4]

У деяких випадках розв`язок диференціального рівняння другого порядку спрощується за рахунок пониження його порядку.

Диференціальне рівняння виду $y'' = f(x)$.

Інтегруємо по x обидві частини цієї рівності $y' = \int f(x)dx + C_1$, де C_1- стала інтегрування. Шуканий розв`язок

$$y = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' = \cos 2x$.

Розв`язок: $y' = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1,$

$y = \int \frac{1}{2}\sin 2xdx + C_1x + C_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2.$

Приклад 6. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y''' = \frac{x^2}{2}$

Розв`язок: $$y'' = \int \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{6} + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^3}{6} + C_1\right)dx = \frac{x^4}{24} + C_1x + C_2\ ,$$

$$y = \int \left(\frac{x^4}{24} + C_1x + C_2\right)dx = \frac{x^2}{120} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Диференціальне рівняння, що не містить явно шукану функцію y:

$$y'' = f(x, y').$$

Введемо нову невідому $p(x) = y'(x)$, тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. А рівняння звелося до рівняння першого порядку щодо шуканої функції $p = p(x, C_1)$. Загальний розв`язок даного рівняння $y = \int p(x, C_1)dx + C_2$.

Приклад 7. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$$

Покладемо $y' = p$. Тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$. Підставляємо в рівняння і розділяємо змінні

$$\frac{dp}{1+p^2}=-\frac{dx}{1+x^2}\Rightarrow arctg\,p=arctgC_1-arctgx.$$

Звідси (у відповідністю із формулою $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$), $p=\frac{C_1-x}{1+C_1x}$ або $y'=\frac{C_1-x}{1+C_1x}$. Остаточно маємо:

$$y=\int\frac{C_1-x}{1+C_1x}dx=-\frac{1}{C_1}\int dx+\left(C_1+\frac{1}{C_1}\right)\int\frac{dx}{1+C_1x}=-\frac{x}{C_1}+\frac{C_1+\frac{1}{C_1}}{C_1}\ln|1+C_1x|+C_2.$$

Диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну x:

$$y''=f(y,y').$$

Покладаємо $y'=p(x)$, тоді $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$.

Підставляємо у вихідне рівняння $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)\Rightarrow p=p(y,C_1)$ або $\frac{dy}{dx}=p(y,C_1)$. Розділяємо змінні $\frac{dy}{p(y,C_1)}=dx.$

Загальний розв\`язок диференціального рівняння знайдемо із співвідношення

$$x=\int\frac{dy}{p(y,C_1)}+C_2.$$

Приклад 8. Знайти загальний розв\`язок диференціального рівняння $y''=2y\,y'$.

$y'=p\Rightarrow y''=p\frac{dp}{dx}$.

Підставляємо в рівняння $p\frac{dp}{dx}=2yp$ або $p\left(\frac{dp}{dx}-2y\right)=0$.

1. $p=y'=0\Rightarrow y=C\,(const)$.
2. $\frac{dp}{dy}=2y\Rightarrow dp=2ydy\Rightarrow\frac{dy}{dx}=p=y^2+C_1$

а) $C_1 = 0$, тоді $\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x + C_2}$;

б) $C_1 > 0$. Так як стала довільна, покладемо $C_1^2 = 0$, маємо

$$\frac{dy}{C_1^2 + y^2} = dx \Rightarrow x = \frac{1}{C_1} arctg \frac{y}{C_1} + C_2.$$

в) $C_1 < 0$. Якщо $\left(-C_1^2\right)$, маємо: $\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = dx$, а розв'язок

$$x = \frac{1}{2C_1} \ln \frac{y - C_1}{y + C_1} + C_2.$$

4.2.2. Лінійне однорідне диференційне рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.5]

Означення. Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно лінійне щодо шуканої функції і її похідних:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (7)$$

де a_i (i=1,2,3…,n) - або постійні, або неперервні функції.

Означення. Диференціальне рівняння (7) називається *неоднорідним*, якщо $f(x) \neq 0$, і *однорідним*, якщо $f(x) = 0$.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \qquad (8)$$

Теорема 1. Якщо y_1 і y_2 - розв`язки рівняння (8), то і їхня сума $y_1 + y_2$ також є розв`язком цього рівняння.

Теорема 2. Якщо y_0 є розв`язком рівняння (8), тоді і $Cy_0$ також є розв`язком цього рівняння, де C = const.

Означення. Два розв`язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (8) називаються *лінійно незалежними* на відрізку $[a, b]$, якщо $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \alpha = const$, і *лінійно залежними*, якщо $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \alpha.$

***Теорема** про загальний розв`язок лінійного однорідного диференціального рівняння:* Якщо $y_1$ і $y_2$ - лінійно незалежні розв`язки рівняння (8), то загальний розв`язок цього рівняння запишеться у вигляді:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Означення. Лінійне однорідне диференціальне (ЛОДР) рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0\,, \tag{9}$$

де коефіцієнти p і q - постійні дійсні числа.

Розв`язки рівняння шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$, тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи в рівняння, отримаємо $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$

Тому що $e^{kx} \neq 0,$ маємо

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{10}$$

Назвемо цей вираз характеристичним рівнянням. Воно являє собою квадратне рівняння відносно k. Корені квадратного рівняння

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Розглянемо три випадки:

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку розв`язки $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно незалежні, тому що відношення $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$. І загальний розв`язок рівняння запишеться у вигляді $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$

Приклад 9. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 9y' + 14y = 0.$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 9k + 14 = 0, k_1 = 2, k_2 = 7.$

Відповідь: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{7x}.$

2. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:* $k_1 = k_2$.

За теоремою Вієта $k_1 + k_2 = -p.$ Але $k_1 = k_2$. Тому $2k_1 + p = 0$ і $k_1 = -\dfrac{p}{2}$. Один частинний розв`язок $y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$. Другий, лінійно незалежний із цим, отримаємо із співвідношення $y_2(x) = y_1(x)\displaystyle\int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2}dx.$

Маємо

$$y_2 = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-\int p dx}}{\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right)^2} dx = e^{-\frac{p}{2}x} \int \frac{e^{-px}}{e^{-px}} dx = x\, e^{-\frac{p}{2}x},$$

а загальний розв`язок рівняння $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \cdot x$.

Приклад 10. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 8y' + 16y = 0.$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 8k + 16 = 0, k_1 = k_2 = 4.$

Відповідь: $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} x.$

3. *Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені*: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

У цьому випадку можна покласти $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}$, $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$.

Теорема. Якщо розв`язком диференціального рівняння (10) є комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x),$, то розв`язками рівняння (9) будуть його дійсна $u(x)$та уявна $v(x)$ частини.

Підставляємо $y = u(x) + iv(x)$ в рівняння (9)

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) = 0$$

або, у силу властивостей похідних,

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + q) = 0 .$$

Відомо, що комплексне число дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини. Тому маємо

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0 \text{ і } v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0 .$$

У відповідності із формулами Ейлера, записані вище розв`язки рівняння (9) подаємо у вигляді $y_1 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$, $y_2 = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$.

В силу доведеної теореми розв`язками рівняння (9) зручніше взяти їх дійсну й уявну частини $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Вони лінійно незалежні $\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = ctgx \neq const.$

Загальний розв`язок набуде вигляду

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)).$$

Приклад 11. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 20y = 0.$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 20 = 0,$

$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 20} = 2 \pm 4i.$

Відповідь: $y = e^{2x}(C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x))$.

4.2.3. Лінійне неоднорідне диференційне рівняння ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.6]

Лінійне неоднорідне диференційне рівняння ІІ-го порядку має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{11}$$

Теорема. (Структура загального розв\`язку рівняння (11)). Загальний розв\`язок рівняння (11) являє собою суму загального розв\`язку відповідного йому однорідного рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{12}$$

і деякого частинного розв\`язку $y_ч$ неоднорідного рівняння (11)

$$y = y_{одн} + y_ч.$$

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння вигляду:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

права частина якого має спеціальний вигляд, що дозволяє знайти його частинний розв'язок за допомогою невизначених коефіцієнтів

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}, \tag{13}$$

де $P_n(x)$- багаточлен *n*- го порядку.

Візьмемо функцію $y = Q(x)e^{\lambda x}$, де

$$Q(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

- багаточлен *n*- го порядку з невизначеними коефіцієнтами, і підставимо в рівняння (5.9). Після очевидних перетворень отримаємо

$$Q_n''(x) + (2\lambda + p)Q_n'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q_n(x) = P_n(x). \tag{14}$$

Відзначимо, що, якщо $Q_n(x)$ - багаточлен *n*- го порядку, то $Q_n'(x)$ - (*n*-1)- го, а $Q_n''(x)$- (*n*-2)- го порядку.

а. Нехай λ - дійсне число, що не є коренем характеристичного рівняння. Тоді ліва і права частини рівності (14) є багаточлени *n* -го порядку. Частинний розв\`язок неоднорідного рівняння потрібно шукати у вигляді

$$y_ч = Q_n(x)e^{\lambda x}.$$

(15)

б. Нехай λ - дійсний однократний корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку в правій частині рівності (14) залишиться багаточлен n -го порядку, а в лівій – (n-1)- го, тому що $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Частинний розв`язок

$$y_ч = xQ_n(x)e^{\lambda x}. \qquad (16)$$

в. λ - дійсний дворазовий корінь характеристичного рівняння. У рівності (14) не тільки $\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$ але і у силу теореми Вієта $2\lambda + p = 0.$ Частинний розв`язок

$$y_ч = x^2 Q_n(x)e^{\lambda x}. \qquad (17)$$

Запишемо праву частину рівняння (5.9) так

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda_1 x} + Q_n(x)e^{\lambda_2 x}, \qquad (18)$$

де $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - комплексні числа, що не є коренями характеристичного рівняння. Повторюючи міркування, наведені для однорідних рівнянь у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння, отримаємо

$$y_ч = U_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + V_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x). \qquad (19)$$

Можна також показати, що якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ є однократними коренями характеристичного рівняння, то

$$y_ч = x\left[U_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + V_n(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x).\right] \qquad (20)$$

Нехай тепер

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x). \qquad (21)$$

Покажемо, що рівність (21) можна записати у вигляді (18). Дійсно, застосовуючи формули Ейлера, запишемо

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) + \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha+\beta i)x} + \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) - \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Тут у кожній із квадратних дужок багаточлен степені $n = \max(n_1, n_2)$.

Зауваження. Якщо $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$

Приклад 12. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$y''-y'=x+2+9xe^{2x}+e^x\cos x. \qquad (22)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Відповідне йому однорідне рівняння

$$y''-y'=0.$$

(23)

Характеристичне рівняння $k^2-k=0, k_1=0, k_2=1.$

Загальний розв`язок рівняння (23)

$$y_{одн}=C_1+C_2e^x.$$

Подамо праву частину рівняння (22) у вигляді

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x),$$

де $f_1(x)=x+2;$ $f_2(x)=9xe^{2x}$; $f_3(x)=e^x\cos x.$

Шукаємо частинний розв`язок неоднорідного рівняння (22).

$f_1(x)=x+2$ можна записати в такому вигляді $f_1(x)=(x+2)e^{0x}$. А так як серед коренів характеристичного рівняння є $k=0$, то розв`язок $y_{ч_1}$ шукаємо у вигляді $y_{ч_1}=(Ax+B)x=Ax^2+Bx$. Знаходимо $y'_{ч_1}=2Ax+B,$ $y''_{ч_1}=2A$ і і підставляємо в рівняння $2A-2Ax-B=x+2$.

Прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x ліворуч і праворуч

$$\left.\begin{array}{l} x\,|\,2A=1 \\ x^0\,|\,2A-B=2 \end{array}\right\} \quad A=\frac{1}{2},\ B=-1.\ \ y_{ч_1}=\frac{1}{2}x^2-x.$$

Частинний розв`язок

$$y_{ч_2}=(Ax+B)e^{2x} \quad \Rightarrow y'_{ч_2}=[2Ax+(A+2B)]e^{2x},$$
$$y''_{ч_2}=[4Ax+(4A+4B)]e^{2x}.$$

Підставляємо в рівняння (22)

$$[4Ax+(4A+4B)]e^{2x}-[2Ax+(A+2B)]e^{2x}=9xe^{2x} \quad \text{або}$$
$$2Ax+(3A+2B)=9x.$$

$$\left.\begin{array}{l} x\,|\,2A=9 \\ x^0\,|\,3A+2B=0 \end{array}\right\} \quad A=4.5,\ B=-6.75.\ \ y_{ч_2}=(4.5x-6.75)e^{2x}.$$

Частинний розв`язок

$$y_{чз} = e^{x}\left(A\cos x + B\sin x\right) \Rightarrow$$

$$y'_{чз} = e^{x}\left(\left(A+B\right)\cos x + \left(B-A\right)\sin x\right), y''_{чз} = \left[2B\cos x - 2A\sin x\right]e^{x}.$$

Підставляємо в рівняння (22)

$$\left[2B\cos x - 2A\sin x - \left(A+B\right)\cos x - \left(B-A\right)\sin x\right]e^{x} = e^{x}\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(B-A\right)\cos x + (-A-B)\sin x = \cos x.$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x\,|B-A=1 \\ \sin x|-A-B=0 \end{array}\right\} \quad A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2}.\ \ y_{чз} = \left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)e^{x}.$$

Загальний розв`язок рівняння (22)

$$y = y_{одн} + y_{ч} = C_1 + C_2 e^{x} + \frac{1}{2}x^2 - x + \left(4.5 - 6.75\right)e^{2x} +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)e^{x}.$$

4.2.4. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Література: [1, р.7, п.3-4], [2, гл.9, п.7]

Розглянемо систему рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y) \end{cases}, \qquad (24)$$

де t - незалежна змінна, x і y - шукані функції.

Система, у лівій частині якої знаходяться похідні шуканих функцій першого порядку, а праві не містять похідних, називається *нормальною*. Розв`язувати систему будемо зведенням її до рівняння другого порядку щодо однієї з невідомих функцій.

Диференціюємо по t перше рівняння системи

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Замінюючи $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{dy}{dt}$ на $f_1(t,x,y)$ і $f_2(t,x,y)$ отримаємо $\frac{d^2x}{dt^2} = F(t,x,y)$. Припускаючи, що y можна виразити через t, x і $\frac{dx}{dt}$ із системи $\left(y = \varphi(t, x, \frac{dx}{dt})\right)$ отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Розв`язуючи це рівняння, знаходимо $x = \varepsilon(t, C_1, C_2)$. Невідому функцію *y* знайдемо із співвідношення $y = \varphi(t, x, \frac{dx}{dt}) = \varphi(t, C_1, C_2)$.

Зауваження. Система n диференціальних рівнянь із n невідомими функціями зводиться до диференціального рівняння n –го порядку.

Приклад 13. Знайти загальний розв`язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

Диференціюємо перше рівняння: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial x}{\partial t} + 4\frac{\partial y}{\partial t}$. Робимо заміну у відповідності із другим рівнянням системи: : $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial x}{\partial t} + 4(2x + 3y)$.

Виражаємо $y = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial x}{\partial t} - x\right)$ з першого рівняння системи і підставляємо в останню рівність $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial x}{\partial t} + 8x + 3\frac{\partial x}{\partial t} - 3x$ або $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{\partial x}{\partial t} - 5x$.

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k - 5 = 0,$$

де $k_1 = -1, k_2 = 5$.

Розв`язок системи

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t} \\ y = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial x}{\partial t} - x\right) = \dfrac{1}{4}(-C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t} - C_1e^{-t} - C_2e^{5t}) = C_2e^{5t} - \dfrac{1}{2}C_1e^{-t}. \end{cases}$$

4.2.5. Запитання для самоперевірки і підготовки до модульної контрольної роботи

1. Яке диференціальне рівняння називається таким, що припускає зниження порядку? Які класи таких рівнянь ви знаєте?
2. Яка заміна змінної використовується в диференціальних рівняннях, що припускає зниження порядку?
3. Запишіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння n-го порядку.

4. Які розв’язки диференціальних рівнянь називаються лінійно незалежними?
5. Які розв’язки диференціальних рівнянь називаються лінійно залежними?
6. Які розв’язки диференціальних рівнянь називаються лінійно незалежними?
7. Теорема про загальний розв`язок лінійного однорідного диференціального рівняння.
8. Вигляд загального розв`язку лінійного однорідного диференціального рівняння (3 випадки).
9. Яка структура загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку?
10. У чому полягає метод виключення для розв’язання лінійних систем диференціальних рівнянь I порядку?

5. Приклади завдань для модульного контролю

5.1. Типові завдання для модульної контрольної роботи №1

Варіант №1

1. Знайти загальне рішення рівняння $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - y/x = x^2$, $y(1) = 0$.

Варіант №2

1. Знайти загальне рішення рівняння $x\sqrt{1+y^2} + y\,y'\sqrt{1+x^2} = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x\,y' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x$, $y(\pi/2) = 0$.

Варіант №3

1. Знайти загальне рішення рівняння $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$.

Варіант №4

1. Знайти загальне рішення рівняння $\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x\,y' = \sqrt{x^2+y^2} + y$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,\ \ y(\pi/4) = 1/2$.

Варіант №5

1. Знайти загальне рішення рівняння $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2 y\,dy - 3x y^2\,dx$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ \ y(-1) = 3/2$.

Варіант №6

1. Знайти загальне рішення рівняння $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x\,y' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(x+1),\ \ y(0) = 1$.

Варіант №7

1. Знайти загальне рішення рівняння $\left(e^{2x}+5\right)dy + y e^{2x}\,dx = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - y/x = x\sin x,\ \ y(\pi/2) = 1$.

Варіант №8

1. Знайти загальне рішення рівняння $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x\,y' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + y/x = \sin x,\ \ y(\pi) = 1/\pi$.

Варіант №9

1. Знайти загальне рішення рівняння $6\,x\,dx - 6\,y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2\,x\,y^2\,dx$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $3\,y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$.

Варіант №10

1. Знайти загальне рішення рівняння $x\sqrt{5 + y^2}\,dx + y\sqrt{4 + x^2}\,dy = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x\,y' = \dfrac{3y^3 + 6\,y\,x^2}{2\,y^2 + 3x^2}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{2x}{1 + x^2}\,y = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$, $y(0) = \dfrac{2}{3}$.

Варіант №11

1. Знайти загальне рішення рівняння $y\left(4 + e^x\right)dy - e^x\,dx = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{x^2 + x\,y - y^2}{x^2 - 2\,x\,y}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - \dfrac{2x - 5}{x^2}\,y = 5$, $y(2) = 4$.

Варіант №12

1. Знайти загальне рішення рівняння $\sqrt{4 - x^2}\,y' + x\,y^2 + x = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $x\,y' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x + 1}{x}e^x$, $y(1) = e$.

Варіант №13

1. Знайти загальне рішення рівняння $2\,x\,dx - 2\,y\,dy = x^2 y\,dy - 2\,x\,y^2\,dx$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

Варіант №14

1. Знайти загальне рішення рівняння $x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $xy' = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$, $y(1) = 4$.

Варіант №15

1. Знайти загальне рішення рівняння $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $xy' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -5/6$.

Варіант №16

1. Знайти загальне рішення рівняння $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + y/x = 3x$, $y(1) = 1$.

Варіант №17

1. Знайти загальне рішення рівняння $6x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - 3xy^2\,dx$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 3$.

Варіант №18

1. Знайти загальне рішення рівняння $y\ln y + xy' = 0$.

2. Знайти загальне рішення рівняння $xy' = \dfrac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$.

3. Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 1$.

Варіант №19

1. Знайти загальне рішення рівняння $\left(1+e^{x}\right)y' = y e^{x}$.
2. Знайти загальне рішення рівняння $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$.
3. Знайти рішення задачі Коші $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$.

Варіант №20

1. Знайти загальне рішення рівняння $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$.
2. Знайти загальне рішення рівняння $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$.
3. Знайти рішення задачі Коші $y' + 2xy = -2x^3$, $y(1) = e^{-1}$.

5.2. Типові завдання для модульної контрольної роботи №2

Варіант №1

1. Розв'язати рівняння a) $2x^2 y y' + y^2 = 2$; c) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$;
   b) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$; d) $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x)$.
2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{cases}$.

Варіант №2

1. Розв'язати рівняння a) $\left(1+x^2\right)y' + 1 + y^2 = 0$; c) $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$;
   b) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; d) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.
2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$.

Варіант №3

1. Розв'язати рівняння a) $x\dfrac{dx}{dt}+t=1$; c) $y'''-y'=x^2+x$;

b) $y''x\ln x=y'$; d) $y''+2y'=-2e^x(\sin x+\cos x)$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y\end{cases}$.

Варіант №4

1. Розв'язати рівняння a) $\left(xy^2+y^2\right)dx+\left(x^2-x^2y\right)dy=0$;

c) $y^{\mathrm{IV}}-3y'''+3y''-y'=2x$;

b) $yy''+y'^2=0$;

d) $y''+y=2\cos 7x+3\sin 7x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y\end{cases}$.

Варіант №5

1. Розв'язати рівняння a) $y'-y=2x-3$; c) $y^{\mathrm{IV}}-y'''=5(x+2)^2$;

b) $y''\operatorname{tg} y=2(y')^2$; d) $y''+2y'+5y=-\sin 2x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=4x-y\end{cases}$.

Варіант №6

1. Розв'язати рівняння a) $x^2y^2y'+1=y$; c) $y^{\mathrm{IV}}-2y'''+y''=2x(1-x)$;

b) $xy''-y'=e^x\cdot x^2$; d) $y''-4y'+8y=e^x(5\sin x-3\cos x)$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-3x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+y\end{cases}$.

Варіант №7

1. Розв'язати рівняння a) $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$; c) $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$;

b) $y'' + 2xy'^2 = 0$; d) $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$.

Варіант №8

1. Розв'язати рівняння a) $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \cdot y' = 0$; c) $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3$;

b) $(1+x^2)y^2 + 2xy' = x^3$; d) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$.

Варіант №9

1. Розв'язати рівняння a) $(\sin x + \cos x)dy = (\sin y + \cos y)dx$; c) $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$;

b) $y'' y^3 = 1$;

d) $y'' + 6y' + 13y = e^{-2x} \cos 4x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$.

Варіант №10

1. Розв'язати рівняння a) $x + xy + y'(y + xy) = 0$; c) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$;

b) $2yy'' = (y')^2$;

d) $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$.

Варіант №11

1. Розв'язати рівняння a) $xy' = y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$; c) $y''' + y'' = 5x^2 - 1$;

b) $ts''+s'+t=0$; d) $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -7x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 8y \end{cases}$.

Варіант №12

1. Розв'язати рівняння a) $xy' - 3y = x^2$; c) $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$;

b) $2yy'' = 1 + (y')^2$; d) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 6y \end{cases}$.

Варіант №13

1. Розв'язати рівняння a) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$; c) $7y''' - y'' = 12x$;

b) $y'' tg\, x = y' + 1$; d) $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}$.

Варіант №14

1. Розв'язати рівняння a) $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$;

c) $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$;

b) $x'' = e^{2t}$; d) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 5x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -10y - x \\ \frac{dy}{dt} = y + x \end{cases}$.

Варіант №15

1. Розв'язати рівняння a) $(2x+1)y'+y=x$; c) $y'''-y'=3x^2-2x+1$;

b) $s''=(as)^{-1/2}$; d) $y''+y=2\cos 5x+3\sin 5x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y \end{cases}$.

Варіант №16

1. Розв'язати рівняння a) $x^2y^2y'+yx^3=1$; c) $y'''-y''=4x^2-3x+2$;

b) $y''=\sin^2 x$; d) $y''+2y'+5y=-17\sin 2x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-4x-6y \\ \dfrac{dy}{dt}=-4x-2y \end{cases}$.

Варіант №17

1. Розв'язати рівняння a) $\left(y^3+2x^2y\right)dx-\left(2x^3+2xy^2\right)dy=0$

;c) $y^{\mathrm{IV}}-3y'''+3y''-y'=x-3$;

b) $y''=\ln x$;

d) $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cdot\cos x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+5y \\ \dfrac{dy}{dt}=-4x-4y \end{cases}$.

Варіант №18

1. Розв'язати рівняння

a) $\left(xye^{x/y}+y^2\right)dx-x^2e^{x/y}dy=0$; c) $y^{\mathrm{IV}}+2y'''+y''=12x^2-6x$;

b) $y''=1+(y')^2$; d) $y''-4y'+8y=e^x(3\sin x+5\cos x)$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=4y-x \\ \dfrac{dx}{dt}=y+2x \end{cases}$.

Варіант №19

1. Розв'язати рівняння a) $\left(x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}-y\right)dx+x\,dy=0$; c) $y'''-4y''=32-384x^2$;

b) $y\,y''-1=(y')^2$;

d) $y''+2y'=6e^x(\sin x+\cos x)$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-5x-4y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-3y\end{cases}$.

Варіант №20

1. Розв'язати рівняння a) $y'-x\,y=-y^3\cdot e^{-x^2}$; c) $y^{\mathrm{IV}}+2y'''+y''=2-3x^2$;

b) $(y'')^2=4y'$; d) $y''-4y'+4y=-e^{2x}\cdot\sin 4x$.

2. Знайти загальне рішення системи рівнянь: $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=2y-3x\\ \dfrac{dx}{dt}=3y+2x\end{cases}$.

6. Перелік навчальної літератури

Основна література

1. Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я. «Вища математика» –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с.
2. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. «Вища математика» - К.: Вища шк., 1987.
3. Глушков О.В., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Чернякова Ю.Г., Дубровська Ю.В., Свинаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій.Ч.2. –Одеса, 2013.

Додаткова література

4. М.І. Шкіль, Т.В.Колесник, „Вища математика у трьох книгах”. Київ, „Либідь”, 1994, 720 с
5. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О. Вища математика. Т.2. К.:Либідь, 1994.

Методичні вказівки
до виконання модульних робіт
з дисципліни “Вища математика“
розділ «Диференціальні рівняння »
для студентів I курсу очної форми навчання

Укладачі: Глушков О.В., проф.
Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц.,

Відп. ред: Глушков О.В., проф.

Підп. до друку ______ Формат _____ Папір друк.

Умовн. друк. арк. Тираж _________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала- макета