

Б.В. Перелигін
Т.Б. Ткач
С.А. Гор'єв

СПЕКТРАЛЬНИЙ І ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ МОНІТОРИНГУ

Навчальний посібник



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Б.В. Перелигін
Т.Б. Ткач
С.А. Гор'єв

СПЕКТРАЛЬНИЙ І ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ МОНІТОРИНГУ



Видавничий дім
«Гельветика»
2020

Рецензенти:

Ковальчук В.В., д.фіз.-мат.н., проф., ОККТ
Боровська Г.О., к.геогр.н., доц., ОДЕКУ

*Затверджено Вченою Радою
Одеського державного екологічного університету
Міністерства освіти і науки України як навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти за спеціальностями
Науки про Землю, Комп'ютерні науки
(протокол № 6 від „04” липня 2019 р.)*

Перелигін Б.В., Ткач Т.Б., Гор'єв С.А.

П 27 Спектральний і прикладний аналіз даних моніторингу: навчальний посібник / Б.В. Перелигін, Т.Б. Ткач, С.А. Гор'єв. — Одеса: Видавничий дім «Гельветика», 2020. — 133 с.
ISBN 978-966-992-195-6

У навчальному посібнику викладені основні поняття про спектральний і прикладний аналіз даних моніторингу. Досить докладно розглянутий гармонійний аналіз періодичних і неперіодичних даних, спектральний аналіз дискретних послідовностей оснований на застосуванні рядів і перетворення Фур'є. Більш детально викладені питання прикладного аналізу даних стосовно часових рядів, які в більшості своїй є даними моніторингу. Наводяться нескладні приклади аналізу. Щодо даних палеокліматичного моніторингу, як одного з прикладів моніторингу, докладно розглядаються питання спектрального і гармонійного аналізу ряду температурної палеорекострукції, як оснований на застосуванні перетворення Фур'є до стаціонарних процесів, так і такі, що ґрунтуються на застосуванні перетворення Фур'є до нестационарних процесів.

Посібник розрахований на студентів, які навчаються за спеціальностями „Комп'ютерні науки” та „Науки про Землю”, може бути корисним для екологів, які навчаються за спеціальностями „Екологія” і „Технології захисту навколишнього середовища”.

ЗМІСТ

	стор.
Вступ	5
1 Поняття про спектральний і прикладний аналіз даних моніторингу	6
1.1 Моніторинг навколишнього середовища і дані моніторингу....	6
1.2 Поняття про спектральний аналіз даних.....	10
1.2.1 Спектральний аналіз.....	10
1.2.2 Розкладання довільної функції за заданою системою функцій. Узагальнений ряд Фур'є.....	12
1.3 Поняття про прикладний аналіз даних.....	16
2 Гармонійний і спектральний аналіз даних	21
2.1 Гармонійний аналіз періодичних даних.....	21
2.1.1 Форми подання ряду Фур'є.....	21
2.1.2 Спектри найпростіших періодичних даних.....	26
2.1.3 Умова збіжності ряду Фур'є. Явище Гіббса.....	30
2.1.4 Розподіл потужності в спектрі періодичних даних.....	32
2.2 Гармонійний аналіз неперіодичних даних.....	35
2.2.1 Перетворення Фур'є.....	35
2.2.2 Спектральні характеристики найпростіших неперіодичних даних.....	37
2.2.3 Основні властивості перетворення Фур'є.....	41
2.2.4 Розподіл енергії в спектрі періодичних даних.....	45
2.3 Спектральний аналіз дискретних послідовностей.....	47
2.3.1 Опис, перетворення та подання дискретних послідовностей.....	47
2.3.2 Перетворення Фур'є дискретної послідовності. Дискретне перетворення Фур'є.....	55
2.3.3 Теорема Котельникова.....	59
2.3.4 Ефект розтікання спектра.....	62
2.3.5 Двовимірний спектральний аналіз.....	70
3 Прикладний аналіз даних	75
3.1 Часові ряди.....	75
3.1.1 Часові ряди та вимоги, які ставляться до них.....	75
3.1.2 Вибіркові статистичні характеристики часового ряду... ..	77
3.1.3 Компонентний склад часових рядів.....	81
3.1.4 Попередня обробка часового ряду.....	82

3.2	Методи виділення загальної тенденції часового ряду.....	83
3.2.1	Метод ковзного середнього.....	83
3.2.2	Основні типи тенденцій і криві зростання.....	87
3.2.3	Метод регресії.....	88
3.3	Порядок аналізу часових рядів.....	97
3.4	Корелограма та її застосування.....	100
4	Застосування спектрального й прикладного аналізу даних моніторингу.....	102
4.1	Опис даних палеокліматичного моніторингу.....	102
4.2	Спектральний аналіз даних палеорекострукції температури в центральній частині Гренландії.....	105
4.3	Гармонійний аналіз нестационарного ряду температурної палеорекострукції для центральної частини Гренландії.....	113
	Предметний покажчик.....	126
	Іменний покажчик.....	129
	Бібліографічний список.....	130

ВСТУП

У рамках дисципліни „Спектрально-часова обробка даних” студенти мають засвоїти два великих розділи, присвячені обробці даних моніторингу: „Спектральний і прикладний аналіз даних моніторингу” й „Спектрально-часовий аналіз даних моніторингу”.

Пропонована книга являє собою навчальний посібник з першого розділу, а саме, зі спектрального і прикладного аналізу даних моніторингу.

У посібнику викладаються основи гармонійного та спектрального аналізу даних, одержуваних при всіх або більшості видів моніторингу, основи аналізу й статистичної обробки часових рядів, одержуваних за допомогою автоматичних метеорологічних станцій загального та спеціального (дорожні, авіаційні, екологічні й ін.) призначення які будуть сприяти одержанню студентами навичок аналізу часових рядів при роботі з архівами та базами даних.

Посібник спрямований на формування у студентів знань в обсязі, необхідному для розуміння основних принципів обробки та аналізу даних моніторингу.

1 ПОНЯТТЯ ПРО СПЕКТРАЛЬНИЙ І ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ МОНІТОРИНГУ

1.1 Моніторинг навколишнього середовища і дані моніторингу

Екологічна напруженість у світі вимагає всебічного та повсякденного аналізу стану навколишнього середовища. Тільки на підставі точних кількісних даних можна ухвалювати рішення щодо вживання необхідних заходів, які попереджають погіршення стану навколишнього середовища.

Діагноз і лікування хвороби будь-якого живого організму повинні опиратися на певну систему спостережень, контролю параметрів, що відбивають стан організму, розвиток хвороби й ефективність заходів щодо її лікування.

Біосфера – така ж, як і організм, жива система, але глобального рівня. І її стан також необхідно характеризувати певним набором параметрів, методикою „лікування” і прогнозування результату екологічних „захворювань”. Для здійснення цих заходів організовується система моніторингу стану навколишнього середовища.

Моніторинг (від англ. monitoring, від лат. monitor – що стежить, спостереження) – це система спостережень, оцінки та прогнозу стану навколишнього середовища. Термін „моніторинг” почали використовувати незадовго перед проведенням Стокгольмської конференції ООН з навколишнього середовища (5-16 червня 1972 р.) [1].

На першій міжурядовій нараді з моніторингу (Кенія, 1974 р.), скликаній Радою Програми ООН із проблем навколишнього середовища (ЮНЕП), були визначені основні цілі глобальної системи моніторингу навколишнього середовища. Першочерговим напрямком у системі глобального моніторингу були названі спостереження над забрудненням навколишнього середовища на імпактіму (рівень сильного глобального забруднення), регіональному і фоновому рівнях. Була запропонована структура моніторингу відбита на (рис. 1.1) [2].

З рисунка видно, що моніторинг не включає управління (регулювання) якістю навколишнього середовища. Однак очевидно, що для організації управління якістю навколишнього середовища зовсім необхідною умовою є організація системи моніторингу.

Моніторинг охоплює спостереження за джерелами й факторами антропогенних впливів – хімічними, фізичними (випромінювання, механічні впливи), біологічними, за ефектами, виробленими цими впливами на навколишнє середовище, і, насамперед, за зворотною

реакцією біологічних систем на ці впливи.



Рис. 1.1 – Структура моніторингу

Спостереження можуть здійснюватися за фізичними, хімічними і біологічними показниками; особливо перспективними видаються інтегральні (комплексні) показники стану природних систем. Моніторинг може проводитися за окремими компонентами екосистем або за екосистемами різного рівня. При проведенні моніторингу використовуються фізико-хімічні, біологічні, географічні та інші методи, широко впроваджуються космічні методи моніторингу.

Моніторинг поділяють на такі рівні: біоекологічний, геоекологічний і біосферний.

Перший рівень – біоекологічний (біологічний, санітарно-гігієнічний, санітарно-токсикологічний) моніторинг включає спостереження:

- за станом навколишнього середовища;
- за ступенем забруднення природних об'єктів шкідливими речовинами;
- за впливом цих забруднювальних речовин на людину й біоту в цілому (сукупність флори, фауни й мікроорганізмів);
- за наявністю в навколишньому середовищі алергенів, патогенних організмів, пилу;
- за вмістом в атмосфері оксидів азоту й сірки, важких металів;
- за якістю водних об'єктів, ступенем їхнього забруднення і т.д.

Об'єктами біоекологічного моніторингу є: приземні шари атмосфери, поверхневі та ґрунтові води, ґрунти, промислові й побутові стоки і викиди, радіоактивні випромінювання і відходи.

Біоекологічний моніторинг здійснюють різні служби: гідрометеорологічна (метеостанції, гідропости, обсерваторії), санітарно-гігієнічна й епідеміологічна (санепідемстанції) і ін. Біоекологічний моніторинг дає експрес-інформацію про стан навколишнього середовища й

дуже важливий для всіх районів, міст, населених пунктів.

Другий рівень – системний геоecологічний (природно-господарський) моніторинг. Суть його полягає в спостереженні за змінами в ecологічних системах (біогeоценозах), природних комплексах, у спостереженні за їхньою продуктивністю, динамікою запасів корисних копалин, водних, земельних і рослинних ресурсів.

Об'єктами геоecологічного моніторингу служать: зникаючі види рослин, тварин, мікроорганізмів, природні еко- і геосистеми, агросистеми, лісові насадження, рекреаційні системи. Спостереження ведуться на географічних стаціонарах і спеціальних полігонах (тестових ділянках). Тестові ділянки призначені для контрольних вимірів і спостережень, на них розробляються тести (індикатори), біологічної продуктивності, природної здатності до самоочищення і т.д. Результати, отримані на тестових ділянках, розглядаються як типові, характерні для даної екосистеми. Більшу роботу в цьому напрямку виконують гідрометеорологічна служба, сільськогосподарські дослідні станції, гідромеліоративні станції та ін.

Третій рівень – глобальний біосферний моніторинг. Метою цього моніторингу є контроль за станом навколишнього середовища в глобальному масштабі, спостереження за глобально-фоновими змінами в природі, прогноз можливих змін біосфери та всієї географічної оболонки в результаті господарської діяльності людини.

Об'єктами глобального біосферного моніторингу є: радіаційний баланс, прозорість атмосфери і її антропогенна зміна, світовий водний баланс і забруднення Світового океану, великомасштабні зміни в біогeохімічних циклах елементів і речовин (CO_2 , O_2 , N, P, S, H_2O та ін.), енергетичний обмін географічної оболонки з космосом, світова міграція птахів, тварин, рослин і комах, зміна клімату на планеті та ін.

З метою проведення фонових спостережень в усьому світі створюється мережа біосферних заповідників, на території яких забороняється виробнича діяльність, яка становить небезпеку для всього живого. У цей час в 62 країнах світу створено більше ніж 230 біосферних заповідників.

Починаючи з 1960-х років, величезну роль в організації глобального моніторингу стали відігравати методи космічної зйомки. Дистанційне зондування Землі включає всі роботи, пов'язані з дослідженням стану навколишнього середовища з космосу [3]. Особливо ефективні космічні дослідження, коли вони сполучаються з аеровізуальними методами і наземними спостереженнями. Дистанційне зондування Землі проводиться зі штучних супутників, пілотованих космічних кораблів, орбітальних станцій. Спостереження з космічних кораблів дозволили одержати дані про будову Землі, без яких важко прогнозувати пошуки нафти і газу, зібрана

інформація про розподіл пилу в атмосфері на різних широтах та у різних регіонах Землі. Космічні методи широко використовуються при проведенні екологічних досліджень у багатьох країнах світу.

Створення глобальних моніторингових систем є якісно новим етапом у розвитку моніторингу й вимагає більших фінансових витрат. Успіхи інформатики та обчислювальної техніки в останні десятиліття відкрили двері в екологію методам моделювання. Модель повинна якомога точніше описувати реальний об'єкт, а живі об'єкти характеризуються безліччю параметрів, які до того ж безупинно змінюються. Повну інформацію про живий об'єкт одержати практично неможливо, тому принципово неможливо створити ідеальну модель. Проблема ще більше ускладнюється, якщо за допомогою моделі спробувати описати функціонування окремих екосистем або біосфери в цілому. Однак моделювання в проведенні глобального моніторингу має більшу перспективу.

Поняття „дані” має досить широку інтерпретацію й використовується в багатьох галузях науки й техніки.

В інформатиці та інформаційних технологіях.

Дані – подання, які піддаються багаторазовій інтерпретації, інформації у формалізованому вигляді, придатному для передачі, зв'язку, або обробки (ISO/IEC 2382-1:1993).

Дані – форми подання інформації, з якими мають справу інформаційні системи і їхні користувачі (ISO/IEC 10746-2:1996).

Дані – зареєстрована інформація, подання фактів, понять або інструкцій у формі, прийнятній для спілкування, інтерпретації або обробки людиною, або за допомогою автоматичних засобів (ISO/IEC/IEEE 24765-2010).

У метрології.

Дані – сукупність значень, порівнянних з основними або похідними мірами й/або показниками (ISO/IEC 15939:2007, ISO/IEC 25000:2005).

Хоча інформація повинна мати деяку форму подання (тобто перетворитися на дані), щоб нею можна було обмінюватися, інформація є в першу чергу інтерпретація (зміст) такого подання (ISO/IEC/IEEE 24765:2010). Тому в точному значенні інформація відрізняється від даних, хоча в неформальному контексті ці два терміни дуже часто використовують як синоніми.

Даними називають інформацію, коли наголошують на тому, що вона надходить як вхідні параметри деякого алгоритму обробки. Дані – від слова „дано”, так само як у записі умови завдання ми записуємо „дано” і „знайти”.

Цей термін часто вживається, коли мова йде про комп'ютерні системи. Ті самі дані, записані в комп'ютерній пам'яті, можуть бути

відображені залежно від обраної програми обробки або як графічна інформація, або як символна, або як звукова, або як числова.

Дані також – це будь-які зареєстровані сигнали. Слово „інформація” частіше використовується в більш вузькому сенсі, чим просто все, що відбивається в матеріальному об'єкті в результаті впливу на нього іншого матеріального об'єкта. Передбачається, що одержання інформації дає її отримувачу можливість приймати рішення, діяти, здійснювати вибір або поповнити (і/або реструктурувати) свою систему знань. Якщо отримані дані не приводять ні до чого з перерахованого, то із суб'єктивної точки зору вважається, що для одержувача вони інформації не несуть, хоча й займають певний обсяг його пам'яті.

Моніторинг розглядає зміну стану навколишнього середовища й життєзабезпечення через наявність у ній великої кількості динамічних параметрів із украй різноманітними характеристиками які містять у собі екзогенні чинники на зразок температури, вологості повітря, швидкості й напрямки повітряних потоків. Кінцевою метою роботи з моніторингу є створення набору методик, які дозволять вирішувати практичні завдання з автоматичного виділення аномалій у динамічній зміні станів системи навколишнього середовища, візуалізації стану для оператора.

Алгоритм аналізу даних моніторингу полягає, крім усього іншого, у побудові адекватних статистичних і спектрально-часових моделей:

- моделі, що описують набір зібраних раніше даних, т.зв. „безліч первинних даних”;
- моделі, що дозволяють обчислювати можливі майбутні стани системи (моніторинг динаміки);
- моделі просторово-часового аналізу із застосуванням моделі „безліч первинних даних” для класифікації станів, визначених за допомогою спектрального аналізу.

1.2 Поняття про спектральний аналіз даних

1.2.1 Спектральний аналіз

Спектральний аналіз – чутливий метод дослідження, він широко застосовується в аналітичній хімії, астрофізиці, металургії, машинобудуванні, геологічній розвідці, археології та інших галузях науки.

Спектральний аналіз – це:

фізична енциклопедія – фізичні методи якісного та кількісного визначення складу речовини, основані на одержанні й дослідженні його спектрів;

велика політехнічна енциклопедія – фізичні методи якісного й кількісного визначення хімічного складу будь-яких речовин на основі

одержання та дослідження їхнього оптичного спектра. Залежно від характеру використовуваних спектрів розрізняють такі їхні види: випромінювання (емісійний спектральний аналіз), поглинання (абсорбційний спектральний аналіз), комбінаційного розсіювання світла, люмінесценції, рентгенівський та ін. Спектральний аналіз відрізняється високою чутливістю, точністю і швидкістю одержання результатів. Його широко використовують у хімії, металургії, машинобудуванні, геологічній розвідці й ін. галузях науки і техніки. За допомогою спектрального аналізу можна визначити температуру, щільність і масу небесних тіл, швидкості руху космічних об'єктів, відстані до зірок і вік останніх;

економіко-математичний словник – математико-статистичний метод аналізу часових рядів, при якому ряд розглядається як складна сукупність, суміш гармонійних коливань, що накладаються один на одного. При цьому основна увага приділяється частоті коливань; використовується, зокрема, апарат тригонометричних функцій, розкладання рядів, аналіз автокореляцій. Спектральний аналіз застосовується при вивченні коливань ділової активності, коректуванні сезонних коливань для більше наочного подання тренда;

геологічний словник – метод визначення хімічного складу речовин, оснований на використанні спектрів електромагнітного випромінювання, поглинання, відбиття або люмінесценції;

велика медична енциклопедія – один з методів аналізу, у якому використовуються спектри, що дають ті або інші тіла при їхньому накалюванні або при пропущенні крізь розчини променів, які дають суцільний спектр;

великий енциклопедичний словник – фізичний метод якісного й кількісного визначення складу речовини, проведеного за його оптичними спектрами. Розрізняють атомний і молекулярний спектральний аналіз, емісійний (за спектрами випромінювання) і абсорбційний (за спектрами поглинання). У якісному спектральному аналізі отриманий спектр інтерпретують за допомогою таблиць і атласів спектрів елементів та індивідуальних сполук; у кількісному спектральному аналізі визначають вміст досліджуваної речовини за відносною або абсолютною інтенсивністю ліній або смуг у спектрах. Застосовується в промисловості, сільському господарстві, геології та ін.;

велика радянська енциклопедія – фізичний метод якісного та кількісного визначення атомного і молекулярного складу речовини, заснований на дослідженні його спектрів. Фізична основа спектрального аналізу – спектроскопія атомів і молекул. Його класифікують за цілями аналізу й типами спектрів. Атомний спектральний аналіз визначає елементний склад зразка за атомними (іонними) спектрами випромінювання і поглинання, молекулярний спектральний аналіз –

молекулярний склад речовин за молекулярними спектрами поглинання, люмінесценції та комбінаційного розсіювання світла. Емісійний спектральний аналіз роблять за спектрами випромінювання атомів, іонів і молекул, збудженими різними джерелами електромагнітного випромінювання в діапазоні від γ -випромінювання до мікрохвильового. Абсорбційний спектральний аналіз здійснюють за спектрами поглинання електромагнітного випромінювання аналізованими об'єктами (атомами, молекулами, іонами речовини, які перебувають в різних агрегатних станах).

У підсумку коротко спектральний аналіз можна визначити, як сукупність методів якісного та кількісного визначення складу об'єкта, основаних на вивченні спектрів взаємодії матерії з випромінюванням, включаючи спектри електромагнітного випромінювання, акустичних хвиль, розподілу за масами і енергіями елементарних частинок та ін.

У теорії обробки сигналів спектральний аналіз означає аналіз розподілу енергії сигналу (наприклад, звукового) за частотами, хвильовими числами і т.п. При обробці сигналів у багатьох випадках доводиться вимірювати спектри. Наприклад, при рішенні завдань розпізнавання мови спектральний аналіз, як правило, передусім спеціальній обробці. При стиску даних у багатьох випадках спектральний аналіз є основною операцією. У гідроакустичних системах для виявлення об'єктів доводиться проводити складний спектральний аналіз. У радіолокаційних системах для одержання інформації про швидкості об'єктів також необхідно проводити спектральні виміри.

Варто мати на увазі, що поняття „спектральний аналіз” містить у собі велику кількість різних вимірів. У широкому сенсі його можна визначити, як вимір, що дає точні або наближені значення *z-перетворень* дискретного сигналу для заданих значень z . Складності в теорії спектрального аналізу виникають у силу тієї обставини, що на практиці всі спектральні виміри проводяться на кінцевих часових інтервалах, довжина яких визначається інтуїтивно або на основі накопиченого досвіду. Наприклад, спектр мовного сигналу дуже сильно залежить від часу, змінюючись зі швидкістю зміни параметрів мовного тракту (до 10 разів за секунду). Незважаючи на цю обставину, у багатьох прикладних завданнях короткочасний спектр мовного сигналу є однією з найбільш важливих характеристик.

1.2.2 Розкладання довільної функції за заданою системою функцій. Узагальнений ряд Фур'є.

Часто буває зручніше деяку функцію розглядати не як функцію, задану нескінченним числом своїх значень у різні моменти часу, а працювати з рахунковою кількістю коефіцієнтів розкладання функції за

деякими базисними функціями.

Математичною основою спектрального аналізу є можливість розкладання функції за заданою системою функцій.

Тому факту, що в просторі n вимірів будь-який вектор можна лінійно представити за допомогою n довільно обраних незалежних векторів, відповідає завдання про вираження більш-менш довільно взятої функції, визначеної в основній області G , у вигляді лінійної комбінації заданих функцій. Множина заданих функцій повинна бути нескінченною і ортогональною. Тоді й говорять про завдання розкладання довільно взятої функції за заданою системою функцій.

Два поліноми, задані на інтервалі $[a, b]$, є ортогональними, якщо виконано умову

$$\int_a^b p(x)q(x)w(x)dx = 0, \quad (1.1)$$

де $w(x)$ – не від’ємна вагова функція.

Множина поліномів $p_n(x)$, $n=0, 1, 2, \dots$, де n – ступінь полінома $p_n(x)$, утворюють систему ортогональних поліномів, якщо справедлива рівність

$$\int_a^b P_m(x)p_n(x)w(x)dx = c_n \delta_{mn}, \quad (1.2)$$

де c_n – задані константи, δ_{mn} – символ Кронекера.

Узагальненим рядом Фур'є для деякої функції називається її розкладання в ряд на основі системи ортогональних функцій. Будь-яка кусочно-безперервна функція може бути представлена у вигляді узагальненого ряду Фур'є:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) = \begin{cases} f(x), \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, \end{cases} \quad (1.3)$$

якщо $f(x)$ безперервна в точці розриву 2 роду.

Цими функціями можуть бути, наприклад, ортогональні поліноми Ерміта, Лагерра, Лежандра, Чебишева та ін.

Поліноми Ерміта

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (1.4)$$

ортогональні з ваговою функцією e^{-x^2} на інтервалі $(-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases} \quad (1.5)$$

Іноді використовується альтернативне визначення, у якому вагова функція дорівнює $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Цей запис широко застосовується в теорії ймовірностей через те, що щільність нормального розподілу описується функцією $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Поліноми Лагерра

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}, n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1.6)$$

ортогональні з ваговою функцією e^{-x} на інтервалі $(0, \infty)$:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x)L_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (1.7)$$

Поліноми Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

ортогональні на відрізку $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases} \quad (1.9)$$

Поліноми Чебишева

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (1.10)$$

ортогональні на відрізку $[-1, 1]$ з ваговою функцією $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Однак, найбільше часто використовуваний базис, за яким розкладають сигнали, – це тригонометричний базис або, при використанні формули Ейлера, система експонент із уявними показниками

$$\{\eta_k(t; \omega_1) = Ae^{jk\omega_1 t}\}_{k=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \quad (1.12)$$

Найбільше поширення цей базис одержав тому, що експонентні функції є власними функціями лінійних операцій, таких як:

1) операція переносу з використанням експонентних функцій:

$$\exp[j\omega(t + h)] = \exp(j\omega h) \exp(j\omega t) = H(\omega) \exp(j\omega t), \quad (1.13)$$

де $H(\omega) = \exp(j\omega h)$ – власне значення операції переносу, незалежне від змінної.

2) операція диференціювання:

$$d[\exp(j\omega t)]/dt = j\omega \exp(j\omega t), \quad H(\omega) = j\omega. \quad (1.14)$$

3) операція інтегрування:

$$\exp(j\omega t) dt = (1/j\omega) \exp(j\omega t), \quad H(\omega) = 1/j\omega. \quad (1.15)$$

У загальній формі, для будь-яких лінійних операцій перетворення:

$$[\exp(j\omega t)] = H(\omega) \exp(j\omega t), \quad (1.16)$$

де $T[.]$ – довільний лінійний оператор, $H(\omega)$ – власне значення операції, незалежне від аргументу.

Коефіцієнти Фур'є

$$\alpha_i = \frac{\langle x, \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle} \quad (1.17)$$

забезпечують найкраще наближення вихідного сигналу, тобто при таких коефіцієнтах відстань

$$\|x(t) - \sum_i \alpha_i \eta_i(t)\|, \quad (1.18)$$

буде мінімальною.

Енергія помилки апроксимації сигналу

$$\|x(t) - \sum_i \alpha_i \eta_i(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 - \sum_i \alpha_i^2 \|\eta_i(t)\|^2 \geq 0, \quad (1.19)$$

звідки витікає нерівність Бесселя

$$\|x(t)\|^2 \geq \sum_i \alpha_i^2 \|\eta_i(t)\|^2. \quad (1.20)$$

Якщо базис є ортонормованим, тобто $\langle \eta_i, \eta_i \rangle = 1$, то

$$\|x(t)\|^2 \geq \sum_i \alpha_i^2, \quad (1.21)$$

або сума квадратів коефіцієнтів розкладання сигналу за будь-яким набором векторів $\eta_i(t)$ не більше квадрата норми цього сигналу.

Рівність Бесселя. Для повної ортонормованої системи базисних функцій енергія сигналу складається з енергії його спектральних компонентів

$$\|x(t)\|^2 = \sum_i \alpha_i^2. \quad (1.22)$$

Рівність Парсеваля. Для повної ортонормованої системи базисних функцій $\eta_i(t)$ скалярний добуток двох сигналів дорівнює скалярному добутку їхніх спектрів

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_i \alpha_i \beta_i, \quad (1.23)$$

де $x(t) = \sum_i \alpha_i \eta_i(t)$ і $y(t) = \sum_i \beta_i \eta_i(t)$.

1.3 Поняття про прикладний аналіз даних

Метеорологічне забезпечення господарської діяльності базується на аналізі та прогнозі погоди. Для аналізу метеорологічного стану використовуються результати вимірів, виконуваних за допомогою різних вимірювальних систем наземного базування. У поточний час ефективність метеорологічного забезпечення багато в чому залежить від ступеня оснащення сучасним метеорологічним устаткуванням і засобами автоматизації. Сучасні автоматичні метеорологічні станції (АМС) можуть вимірювати метеорологічні величини з високою часовою частотою без участі спостерігача. Це відкриває можливості для всебічного аналізу часової структури метеорологічних часових рядів.

Одержувана від автоматичних метеорологічних станцій загального і спеціального призначення метеорологічна інформація звичайно являє собою сукупність синхронізованих часових рядів метеорологічних величин. Тому паралельно з розвитком систем виміру вдосконалювався і математичний апарат, використовуваний для аналізу часових рядів, одержуваних від АМС. Аналіз часових рядів – це сукупність математико-

статистичних методів аналізу, призначених для виявлення структури часових рядів і для їхнього прогнозування.

Часовий ряд (динамічний ряд) – це розташовані в хронологічній послідовності обмірювані або задані одна, або кінцева множина випадкових (наприклад, метеорологічних) величин, що відповідають певним моментам часу.

Часовий ряд містить у собі два обов'язкових елементи – відмітку часу і значення показника ряду, отримане в той або інший спосіб і відповідне зазначеній відмітці часу. Кожен часовий ряд розглядається як вибіркова реалізація з нескінченної генеральної сукупності. Така генеральна сукупність генерується деяким стохастичним процесом на який можуть впливати безліч факторів. Якщо час безперервний, часовий ряд називається безперервним. Якщо час змінюється дискретно, то часовий ряд дискретний. У дискретному часовому ряді його значення можуть бути взяті як через рівні, так і через нерівні проміжки часу. У першому випадку часовий ряд називається еквідистантним, а в другому – нееквідистантним. Проміжки часу, через які береться часовий ряд, називають інтервалом дискретизації (кроком дискретизації) Δt .

Залежно від властивостей різних вибірок статистичного ряду часові ряди прийнято розділяти на наступні:

- стаціонарні часові ряди;
- нестаціонарні часові ряди.

Одновимірний часовий ряд називається стаціонарним, якщо його імовірнісні характеристики (статистичні параметри випадкової величини: середнє значення, дисперсія і т.п.) постійні (не змінюються із часом). Наприклад, можна розглядати стаціонарність часового ряду по математичному очікуванню. Часовий ряд називається нестаціонарним, якщо хоча б одна з його імовірнісних характеристик непостійна. Нестаціонарні часові ряди для рішення завдання прогнозування часто приводяться до стаціонарного за допомогою різницевого оператора.

Вибір стратегії та методів обробки і аналізу часових рядів, безумовно, залежить від кінцевої мети дослідника. Процедура обробки сигналу в основному містить у собі перевірку наявності тренда в часовому ряді, виявлення аномальних спостережень, згладжування часових рядів. Головним завданням при цьому є одержання повних, однорідних, коректних даних. Однак, як правило, першим етапом є оцінка тренда часового ряду.

Часовий ряд (ряд динаміки) може розділятися на три компоненти:

$$Y(t) = f(t) + g(t) + \xi(t), \quad (1.24)$$

де $f(t)$ – плавно змінювана компонента, обумовлена довгостроковою

тенденцією (трендом) зміни ряду ознак, може бути детермінованою компонентою, що представляє собою деяку аналітичну функцію, яка виражає тенденцію в ряді; $g(t)$ – періодична, сезонна або квазіперіодична компонента, яка відбиває повторюваність процесів на певних проміжках часу; $\xi(t)$ – випадкова компонента, що містить вплив інших факторів, механізм якого (впливу) схований від спостерігача, типу „білий шум”.

Трендова компонента часових рядів звичайно не відома точно, а, як і ряд у цілому, є випадковою величиною, але її зміна з деяких апріорних суджень часто може бути якісно описана аналітично. Для опису тренда використовуються так звані криві росту, які дозволяють моделювати ці процеси.

Для моделювання цих процесів використовуються поліноміальні або квазіполіноміальні (з експонентними множниками і т.п.) залежності, дрібно-раціональні й лінійно логарифмічні функції.

Таким чином, часто використовуваним методом моделювання нестационарних часових рядів є параметричне оцінювання. У цьому випадку підбираються параметри тієї або іншої функціональної залежності для трендової складової, після виключення якої залишається стаціонарний ряд. Ряд, що залишився, може й не бути стаціонарним у змісті математичного визначення цього поняття, але на практиці його зручно вважати таким з довірчою ймовірністю, достатньою для дослідника. Для цієї мети використовуються різні тести на стаціонарність [4], які, як правило, розроблені для застосування до відомих функціональних залежностей (наприклад, нормального, експонентного або рівномірного розподілів).

Однак часто неможливо вказати підходящу параметричну криву для апроксимації ряду на всій його довжині. Для виділення тренда в цьому випадку використовують різні непараметричні методи аналізу часових рядів, такі як, згладжування ковзними середніми або ковзними медіанами, частотну фільтрацію і т.п. На відміну від параметричних методів виділення тренда, ці методи придатні лише для осереднення значень ряду по точках деякої околиці й не можуть використовуватись для прогнозування (екстраполяції) динамічних рядів, оскільки не дають у явному вигляді розрахункового рівняння детермінованої компоненти $f(t)$. Однак одержання досить гладкої траєкторії дає можливість візуально оцінити наявність тенденції в умовах сильної зашумленості, а також виділити ряд залишків $y(t)=x(t)-f(t)$, як випадкову компоненту часової послідовності, якщо кінцевою метою дослідження є побудова моделей авторегресії для прогнозування.

Попередня обробка часових рядів (*непараметричні методи аналізу*) складається у виявленні аномальних значень ряду й згладжуванні ряду. Аномальні значення часового ряду не відповідають потенціалу досліджуваної метеорологічної моніторингової системи, і їхнє

використання для побудови трендової моделі може сильно спотворити одержувані результати. Причинами появи аномальних рівнів можуть бути технічні помилки при зборі, обробці та передачі інформації. Такі помилки називаються помилками першого роду, їх можна виявити і усунути або вжити заходів до їхнього недопущення. Крім того, аномальні рівні можуть виникати через вплив факторів, які мають об'єктивний характер, але діють епізодично. Такі помилки називаються помилками другого роду, їх неможливо усунути, але можна виключити з розгляду, замінивши аномальне значення на середнє арифметичне двох сусідніх рівнів.

Ряди після належних підготовчих операцій вивчаються методами регресійного, кореляційного та гармонійного аналізів.

Лінійна регресійна модель дозволяє зв'язати дві величини Y й X лінійною залежністю виду $Y=a+bX$ по наявним N парам значень (x_k, y_k) методом найменших квадратів (МНК).

Максимуми модуля автокореляційної функції показують наявність лагів, тобто проміжків часу, на яких проявляється схована залежність випадкових величин. Наприклад, у рядах з істотним впливом циклічної компоненти лаги виражені на графіку вибіркової автокореляційної функції особливо сильно. Моделі, що використовують лагову автокореляцію, називаються автокореляційними або авторегресійними.

Мета аналізу часових рядів. При практичному вивченні часових рядів на основі метеорологічних даних на певному проміжку часу метеоролог повинен зробити висновки про властивості цього ряду і про імовірнісний механізм, що породжує цей ряд. Найчастіше при вивченні часових рядів ставляться наступні цілі:

- короткий (стислий) опис характерних рис ряду.
- підбір статистичної моделі, яка описує часовий ряд.
- прогнозування майбутніх значень на основі минулих спостережень.
- управління процесом, який породжує часовий ряд.

На практиці ці й подібні цілі досяжні далеко не завжди і далеко не повною мірою. Часто цьому перешкоджає недостатній обсяг спостережень через обмежений час спостережень. Ще частіше – статистична структура, що змінюється із часом, часового ряду.

Стадії аналізу часових рядів. Звичайно при практичному аналізі часових рядів послідовно проходять наступні етапи:

- графічне подання та опис поведження часового ряду.
- виділення та видалення закономірних складових часового ряду, які залежать від часу: тренда, сезонних і циклічних складових.
- виділення та видалення низько- або високочастотних складових процесу (фільтрація).
- дослідження випадкової складової часового ряду, яка залишилася після видалення перерахованих вище складових.

- побудова (підбір) математичної моделі для опису випадкової складової та перевірка її адекватності.
- прогнозування майбутнього розвитку процесу, представленого часовим рядом.
- дослідження взаємодій між різними часовими рядами.

Методи аналізу часових рядів. Для рішення цих завдань існує велика кількість різних методів. З них найпоширенішими є наступні:

- кореляційний аналіз, який дозволяє виявити істотні періодичні залежності і їхні лаги (затримки) усередині одного процесу (автокореляція) або між декількома процесами (крос кореляція).
- спектральний аналіз, який дозволяє знаходити періодичні та квазіперіодичні складові часового ряду.
- згладжування і фільтрація, призначені для перетворення часових рядів з метою видалення з них високочастотних або сезонних коливань.
- моделі авторегресії та змінного середнього, які виявляються особливо корисними для опису і прогнозування процесів, які проявляють однорідні коливання навколо середнього значення.
- прогнозування, яке дозволяє на основі підібраної моделі поведінки часового ряду прогнозувати його значення в майбутньому.

Питання для самоконтролю

1. Поясніть значення терміну Моніторинг
2. Що містить у собі моніторинг?
3. Назвіть рівні моніторингу навколишнього середовища
4. Назвіть об'єкти біоекологічного моніторингу
5. Перелічіть об'єкти геоекологічного моніторингу
6. Які об'єкти є предметом глобального біосферного моніторингу?
7. Які Ви знаєте інтерпретації поняття Дані?
8. Назвіть приклади кількісного аналізу величин, вимірюваних при моніторингу
9. Поясніть сутність спектрального аналізу
10. Поясніть сутність прикладного аналізу

2 ГАРМОНІЙНИЙ І СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ

2.1 Гармонійний аналіз періодичних даних

2.1.1 Форми подання ряду Фур'є

Базисна система сигналів

При формуванні математичної моделі сигналу можуть використатися різні системи ортогональних функцій. Однак найбільшого поширення набула система, у якій базис утворюють ортогональні гармонійні функції:

$$1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots, \cos n\omega_1 t, \dots, \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots, \sin n\omega_1 t, \dots \quad (2.1)$$

Це порозумівається тим, що гармонійна функція є єдиною, котра зберігає свою форму при проходженні через лінійні системи, тобто якщо на вході лінійної системи діє гармонійний сигнал, то на її виході сигнал по закінченні перехідного процесу буде гармонійним, відрізняючись від вхідного лише амплітудою і початковою фазою. Графіки декількох перших функцій системи показані на (рис. 2.1).

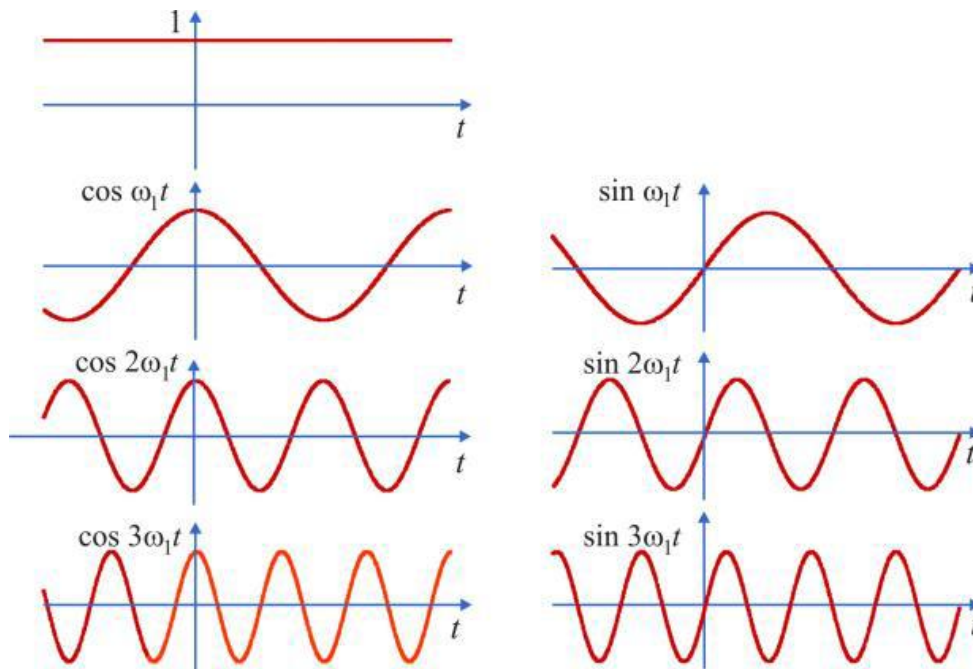


Рис. 2.1 – Базисні тригонометричні функції

Система тригонометричних функцій (2.1) є повною і ортогональною на інтервалі тривалістю $T = 2\pi/\omega_1$. Умови ортогональності мають вигляд:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{для } n \neq m \\ T/2 & \text{для } n = m \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \cdot \sin m\omega_1 t dt = \begin{cases} 0 & \text{для } n \neq m \\ T/2 & \text{для } n = m \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin n\omega_1 t \cdot \cos m\omega_1 t dt = 0. \quad (2.4)$$

Тригонометричний ряд Фур'є

Усяка періодична функція часу $x(t)$, яка у межах періоду її зміни T задовольняє умовам Дирихле, може бути представлена у вигляді розкладання за тригонометричними функціями Фур'є:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t]. \quad (2.5)$$

Цей ряд називається *тригонометричним рядом Фур'є*. Коефіцієнти ряду визначаються за наступними формулами:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt, \quad (2.6)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin n\omega_1 t dt, \quad (2.8)$$

При розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є необхідно вибрати початковий момент часу періоду інтегрування в (2.6)...(2.8). Як правило, значення вибирають так, щоб спростити обчислення. Звичайно, виходячи із цієї умови, приймають $t_0 = -T/2$. При цьому (2.6)...(2.8) здобувають наступний вигляд:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (2.9)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad (2.10)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_1 t dt, \quad (2.11)$$

Безпосередньо з (2.9)...(2...11) впливають дві властивості, які спрощують обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є у випадку, коли функція $x(t)$ задовольняє умови непарності або парності.

Якщо функція $x(t)$, яка описує сигнал, є непарною, тобто $x(t) = -x(-t)$, то коефіцієнти $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, і в розкладанні (2.5) залишаються тільки синусні складові:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t.$$

Якщо функція $x(t)$, яка описує сигнал, є парною, тобто $x(t) = x(-t)$, то коефіцієнти $b_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, і в розкладанні (2.5) залишаються тільки постійна та косинусні складові:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t.$$

Набула поширення й інша форма запису тригонометричного ряду Фур'є:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (2.12)$$

де амплітуда A_n і фаза φ_n n -ї гармонійної складової пов'язані з коефіцієнтами a_n й b_n і співвідношеннями:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arg(a_n - jb_n) = -\arctg \frac{b_n}{a_n}; \quad (2.13)$$

або

$$a_n = A_n \cos \varphi_n, \quad b_n = A_n \sin \varphi_n. \quad (2.14)$$

Згідно (2.12) періодичний сигнал $x(t)$ містить у собі незалежну від часу постійну складову $a_{0/2}$ і нескінченний набір гармонійних коливань, так званих гармонік, із частотами $\omega_n = n\omega_1$, ($n = 1, 2, \dots$) кратними основній частоті $\omega_1 = 2\pi/T$. періодичного сигналу. Спектральну складову із частотою ω_1 називають *основною гармонікою*, а складові із частотами $\omega_n = n\omega_1$ ($n > 1$) – *вищими гармоніками* періодичного сигналу.

Подання довільного сигналу у вигляді сукупності постійної складової та суми гармонійних коливань із кратними частотами називають *спектральним розкладанням* цього сигналу в базисі гармонійних функцій, або *гармонійним аналізом* сигналу.

Сукупності величин A_n та φ_n ($n = 1, 2, \dots$) і називають відповідно

амплітудними та фазовим частотними спектрами сигналу або, інакше, спектром амплітуд і спектром фаз. Графічно частотні спектри зображують у вигляді відрізків A_n , φ_n , проведених перпендикулярно до осі, на яку наносяться значення $0, \omega_1, \omega_2=2\omega_1, \omega_3=3\omega_1, \dots$ (рис. 2.2). Спектр періодичного сигналу називається *лінійчатим* або *дискретним*, тому що складається з окремих ліній, які відповідають дискретним частотам $\omega_n=n\omega_1$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Графічне зображення амплітудного і фазового частотних спектрів прийнято називати *амплітудними* і *фазовими спектральними діаграмами*.

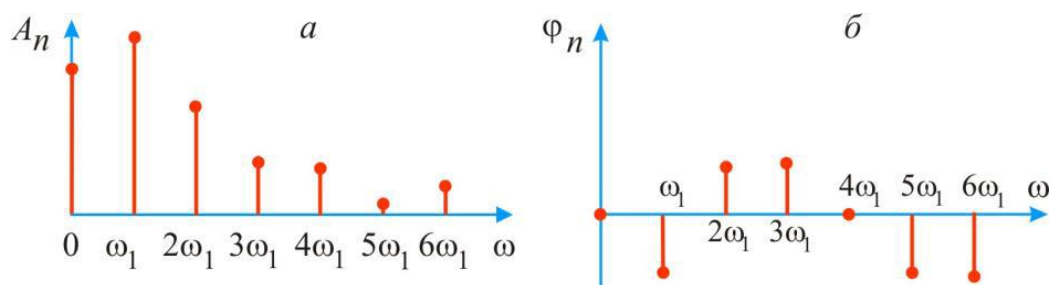


Рис. 2.2 – Спектральні діаграми періодичного сигналу:
а – амплітудна, б – фазова

Відзначимо, що між періодичними сигналами і їхніми частотними спектрами існує взаємо-однозначна відповідність: періодичний сигнал $x(t)$ повністю визначає його частотні спектри і, навпаки, маючи частотні спектри, можна визначити, якому періодичному сигналу вони належать. Маючи на увазі цю відповідність при рішенні багатьох практичних завдань операції над періодичними сигналами замінюють операціями над частотними спектрами сигналів.

Спектр сигналів, описуваних відносно гладкими функціями, швидко убуває (з ростом номера коефіцієнти швидко прагнуть до нуля). Спектр щодо порізаних сигналів убуває повільно, тому що для подання розривів і зламів функції потрібні синусоїди з більшими частотами.

Комплексний (експонентний) ряд Фур'є

Застосовується також запис ряду Фур'є в комплексній формі, одержуваний при заміні тригонометричних функцій експонентними із введенням у розгляд комплексних величин.

Тригонометричний ряд Фур'є записується у вигляді

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t]. \quad (2.15)$$

За формулами Ейлера маємо:

$$\cos n\omega_1 t = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2},$$

$$\sin n\omega_1 t = j \frac{-e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}.$$

Підставивши ці вирази в (2.12), одержимо

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right). \quad (2.16)$$

Запис (2.16) можна спростити. Для цього введемо в розгляд від'ємні індекси n і, з урахуванням що коефіцієнти a_n парні, а коефіцієнти b_n непарні відносно індексів, позначимо

$$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \text{ для } n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Тоді, об'єднавши всі доданки в (2.16) під один знак суми, прийдемо до наступної форми запису ряду Фур'є:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.18)$$

де

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.19)$$

Перевагою цієї форми запису ряду Фур'є є компактність. Згідно (2.18) сигнал $x(t)$ представлений сумою комплексних складових виду $c_n e^{jn\omega_1 t}$, де n змінюється від $-\infty$ до ∞ . Від'ємному значенню n відповідає від'ємна частота $-n\omega_1$. Очевидно, що від'ємні частоти в природі не існують. Вони є математичною абстракцією і з'являються в результаті формального подання гармонійних функцій у комплексній формі. Легко показати, що при переході від комплексної форми запису до тригонометричного від'ємна частота зникає.

Коефіцієнти c_n є комплексними величинами. Тому для подання періодичного сигналу в частотній області в загальному випадку необхідно мати два дійсних спектри: амплітудний спектр $|c_n|$ і фазовий спектр $\varphi_n = \arg c_n$. Спектральні діаграми при використанні комплексного ряду Фур'є будуються як для додатних, так і для від'ємних значень ω (або n). Легко переконатися в тому, що амплітудний спектр є парною функцією, а фазовий спектр – непарною функцією. У загальному випадку вони мають вигляд, подібний показаному на (рис. 2.3).

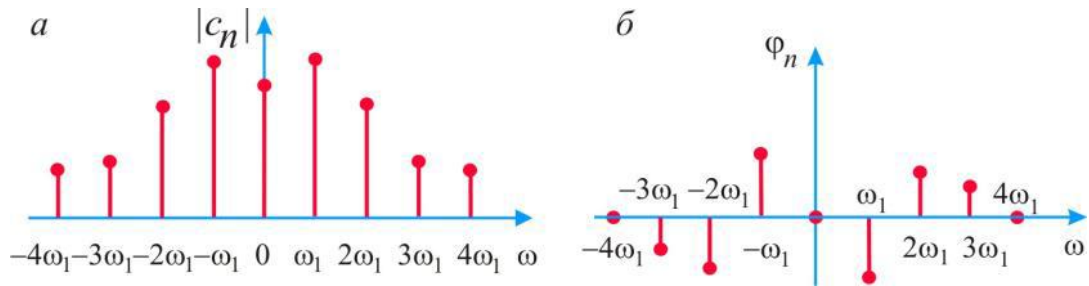


Рис. 2.3 – Спектральні діаграми: а – амплітудна, б – фазова

Для додатних n коефіцієнти тригонометричного і комплексного рядів Фур'є, як потребують (2.13) і (2.17), зв'язані в такий спосіб:

$$|c_n| = A_n/2, \quad \varphi_n = \arg c_n = \arg (a_n - jb_n).$$

2.1.2 Спектри найпростіших періодичних даних

Прямокутне коливання

Розглянемо спектральний состав прямокутного коливання (рис. 2.4), який часто називають *меандром*, і покажемо, як впливає вибір початку відліку часу на спектр цього сигналу.

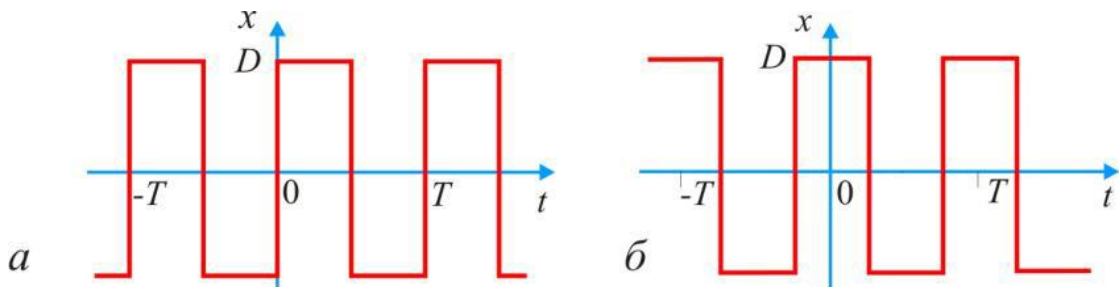


Рис. 2.4 – Графік меандру

Випадок 1. Нехай початок відліку часу збігається з початком позитивної напівхвилі (рис. 2.4, а). У цьому випадку функція $x(t)$, що описує сигнал, є непарною. Відповідно до наведених вище формул маємо при $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$a_n = \frac{2D}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) \cos n\omega_1 t dt + \int_0^{T/2} \cos n\omega_1 t dt \right] = 0,$$

$$b_n = \frac{2D}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) \sin n\omega_1 t dt + \int_0^{T/2} \sin n\omega_1 t dt \right] = \frac{2D}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

Легко побачити, що коефіцієнти b_n при парних n дорівнюють нулю.

Тому ряд Фур'є записується в наступному вигляді

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right). \quad (2.20)$$

Ряд (2.20) можна привести до форми запису (2.12). У результаті будемо мати

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left[\cos \left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{3} \cos \left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \cos \left(5\omega_1 t - \frac{\pi}{2} \right) + \dots \right]. \quad (2.21)$$

Результати гармонійного аналізу прямокутного коливання у вигляді значень амплітуди і фази гармонійних складових згідно (2.21) наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Амплітуди і фази спектра коливання на (рис. 2.4, а)

n	–	1	2	3	4	5	6	7
A_n	–	$4D/\pi$	0	$4D/3\pi$	0	$4D/5\pi$	0	$4D/7\pi$
φ_n	рад	$-\pi/2$	–	$-\pi/2$	–	$-\pi/2$	–	$-\pi/2$

Випадок 2. Розглянемо варіант, коли початок відліку часу розташовується всередині імпульсу (рис. 2.4, б). Тепер функція $x(t)$, що описує прямокутне коливання, буде парною відносно t . Для цього випадку одержимо при $n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0,$$

$$a_n = \frac{4D}{T} \left[\int_0^{T/4} \cos n\omega_1 t dt + \int_{T/4}^{T/2} (-1) \cos n\omega_1 t dt \right] = \frac{4D}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$b_n = 0.$$

Ряд Фур'є здобуває вид

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right). \quad (2.22)$$

Після приведення ряду (2.22) до форми запису (2.12) одержимо

$$x(t) = \frac{4D}{\pi} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t - \pi) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_1 t) + \dots \right]. \quad (2.23)$$

Результати цього варіанта гармонійного аналізу прямокутного коливання наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Амплітуди і фази спектра коливання на (рис. 2.4, б)

n	–	1	2	3	4	5	6	7
A_n	–	$4D/\pi$	0	$4D/3\pi$	0	$4D/5\pi$	0	$4D/7\pi$
φ_n	рад	0	–	$-\pi$	–	0	–	$-\pi$

Порівнюючи вирази (2.21), (2.23) і дані гармонійного аналізу в табл. 2.1 і 2.2, можна зробити наступний висновок. При зсуві початку відліку амплітудний спектр сигналу не змінюється, змінюється лише фазовий спектр.

З виразів (2.21) і (2.23) також витікає, що в розкладанні прямокутного коливання відсутні постійна складова і парні гармоніки. На (рис. 2.5) суцільними лініями показані графіки функції $x^*(t)$, отримані при урахуванні різного числа членів ряду.

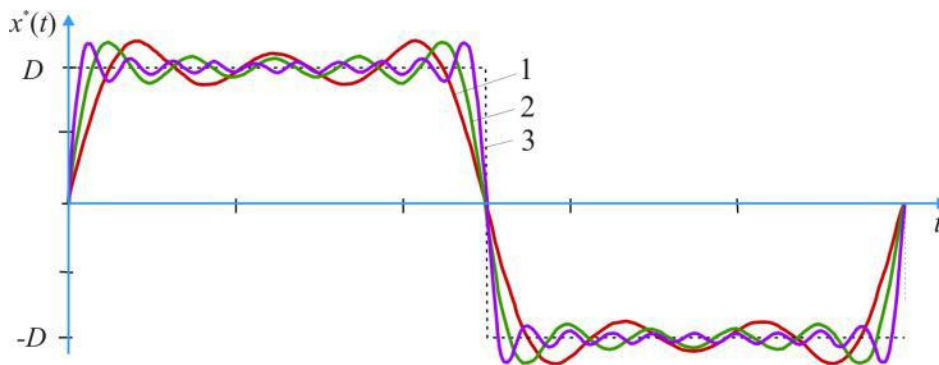


Рис. 2.5 – Апроксимація прямокутного коливання усіченим рядом Фур'є з різним числом N гармонік:
1) $N=5$, 2) $N=9$, 3) $N=19$

Випадок 3. Знайдемо розкладання прямокутного коливання в комплексний ряд Фур'є (2.18). Приймаючи за початок відліку початок позитивної напівхвилі (рис. 2.4, а), для коефіцієнтів ряду згідно (2.19) будемо мати

$$c_n = \frac{D}{T} \int_{-T/2}^0 (-1)e^{-jn\omega_1 t} dt + \frac{D}{T} \int_0^{T/2} e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

Після перетворень одержимо

$$c_n = \frac{D}{j2\pi n} (1 - e^{-j\pi n}) = \frac{D}{j\pi n} (1 - \cos \pi n).$$

Значення модуля і аргументу коефіцієнтів c_n комплексного ряду

Фур'є, розраховані по цій формулі, наведені в табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Розкладання коливання в комплексний ряд Фур'є

n	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$ c_n $...	$2D/3\pi$	0	$2D/\pi$	0	$2D/\pi$	0	$2D/3\pi$...
φ_n	...	$\pi/2$	-	$\pi/2$	-	$-\pi/2$	-	$-\pi/2$...

Пилкоподібний сигнал

Розглянемо пилкоподібний сигнал (рис. 2.6). У межах періоду цей сигнал описується лінійною функцією:

$$x(t) = \frac{2D}{T}t, \quad -T/2 < t \leq T/2. \quad (2.24)$$

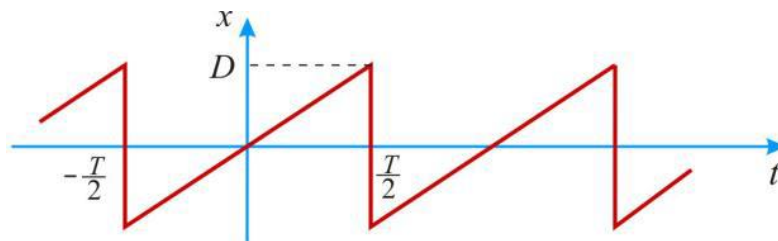


Рис. 2.6 – Графік пилкоподібного сигналу

Дана функція є непарною. Тому коефіцієнти ряду Фур'є, записаного в тригонометричній формі, дорівнюють:

$$a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (2.25)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2D}{T}t \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt = -\frac{2D}{\pi n} \cos \pi n = \frac{2D}{\pi n} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

Ряд Фур'є записується в наступному вигляді:

$$x(t) = \frac{2D}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega_1 t) + \dots \right].$$

Послідовність прямокутних імпульсів

Знайдемо спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів з амплітудою D , тривалістю τ і періодом проходження T (рис. 2.7). На інтервалі $(-T/2, T/2)$ сигнал описується функцією

$$x(t) = \begin{cases} D, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0, & \text{при інших } t \end{cases}.$$

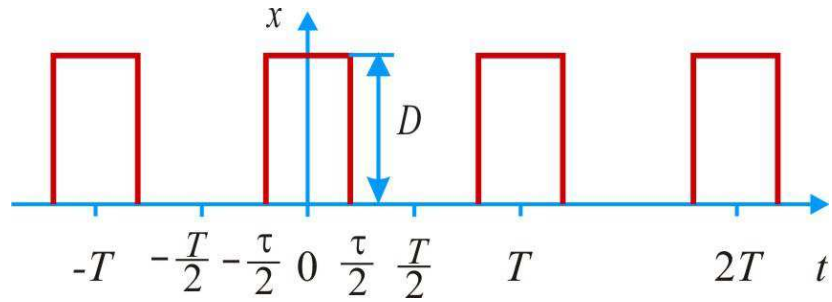


Рис. 2.7 – Послідовність прямокутних імпульсів

Функція $x(t)$ є парною, тому ряд Фур'є містить тільки постійну та косинусні складові. Коефіцієнти ряду обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D dt = 2D \frac{\tau}{T}, \quad (2.27)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2D}{\pi n} \sin \frac{n\pi\tau}{T}.$$

Амплітуди гармонійних складових дорівнюють

$$A(n) = |a_n| = \frac{2D}{\pi n} \left| \sin \frac{n\pi\tau}{T} \right|. \quad (2.28)$$

На (рис. 2.8) наведена амплітудна спектральна діаграма досліджуваної послідовності імпульсів у відносних одиницях A_n/D для $\tau/T=0,5$.

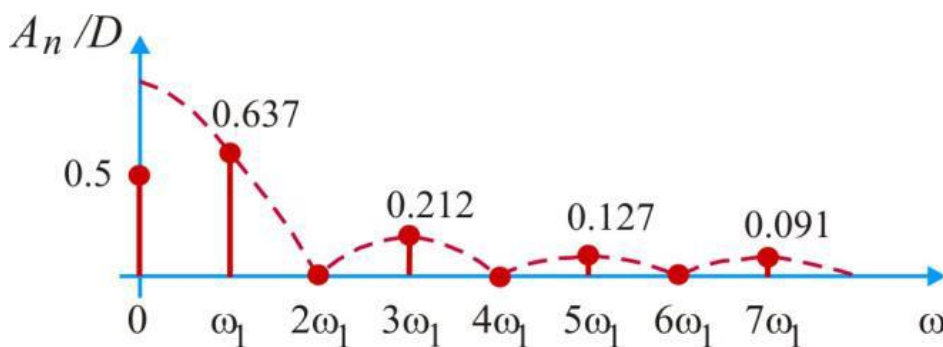


Рис. 2.8 – Амплітудна спектральна діаграма послідовності прямокутних імпульсів для $\tau/T=0,5$

2.1.3 Умови збіжності ряду Фур'є. Явище Гіббса

Отже, періодичний сигнал, описуваний на інтервалі $[-T/2, T/2]$ функцією $x(t)$, можна описати тригонометричним рядом Фур'є (2.5). При

практичних розрахунках у тригонометричному ряді Фур'є враховується кінцеве число N членів ряду, і вихідна функція апроксимується усіченим рядом

$$x^*(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t]. \quad (2.29)$$

Очевидно, становлять практичний інтерес:

- умови, при виконанні яких апроксимуюча функція $x^*(t)$ сходиться до вихідної функції $x(t)$;
- особливості поведінки апроксимуючої функції $x(t)$ при збільшенні числа N членів ряду.

Як відзначалося вище, функція, що розкладає в ряд Фур'є, повинна задовольняти умовам Дирихле. Ці умови формулюють в такий спосіб. Функція $x(t)$ на інтервалі $[-T/2, T/2]$:

- повинна мати кінцеве число максимумів і мінімумів;
- може мати розриви безперервності першого роду при деяких значеннях аргументу $t=t_i$, число яких повинне бути скінченим;
- повинна мати скінчені (рівні або нерівні між собою) граничні значення $x(-T/2+0)$ і $x(T/2-0)$.

На (рис. 2.9) показаний графік функції, яка має п'ять розривів безперервності першого роду і нерівні граничні значення $x(-T/2+0)$ і $x(T/2-0)$. Така функція $x(t)$ у проміжку від $-T/2$ до $T/2$ задовольняє наведені вище умови Дирихле. У цьому випадку для всіх значень t цього ж проміжку ліміт суми N перших членів ряду Фур'є при необмеженому збільшенні числа N :

- дорівнює $x(t)$ у всіх точках безперервності усередині проміжку;
- дорівнює $[x(t_i-0) + x(t_i+0)]/2$ у всіх точках розриву;
- дорівнює $[x(-T/2+0) + x(T/2-0)]/2$ на кінцях проміжку.

Ряд Фур'є забезпечує найкраще в сенсі середньоквадратичної похибки наближення до вихідної функції. Це значить, що якщо число членів ряду Фур'є обмежене і вихідний сигнал $x(t)$ апроксимований функцією $x^*(t)$, то найменша середньоквадратична помилка

$$M = \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - x^*(t)]^2 dt \quad (2.30)$$

має місце в тому випадку, коли коефіцієнти ряду Фур'є визначені за формулами (2.9)...(2.11). Зі збільшенням числа членів ряду Фур'є раніше обчислені коефіцієнти не змінюються, а середньоквадратична помилка (2.30) зменшується.

Явищем Гіббса називається особливість поведінки усіченого ряду (2.29) Фур'є в околиці точки розриву функції, що проявляється у вигляді

викидів. Уперше це явище було виявлено в 1848 р. Уїлбрейамом і пізніше перевідкрито в 1898 р. Дж. Гіббсом.

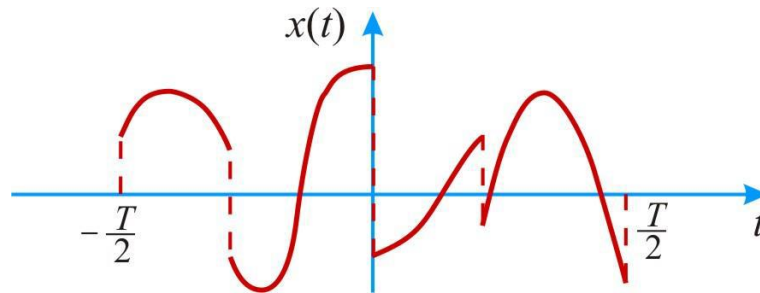


Рис. 2.9 – Приклад сигналу, що задовольняє умови Дирихле

При додаванні гармонік усе більше високих порядків апроксимуюча функція $x^*(t)$ наближається до вихідної у всіх точках за винятком точок розриву. Відповідно до теореми Дирихле, апроксимуюча функція $x^*(t)$ прагне до значення, яке дорівнює середньоарифметичному значень ліворуч і праворуч від точки розриву. Однак це не єдина особливість, обумовлена наявністю розриву функції $x(t)$.

Поблизу точки розриву, ліворуч і праворуч від неї, функція $x^*(t)$ має викиди (рис. 2.10).

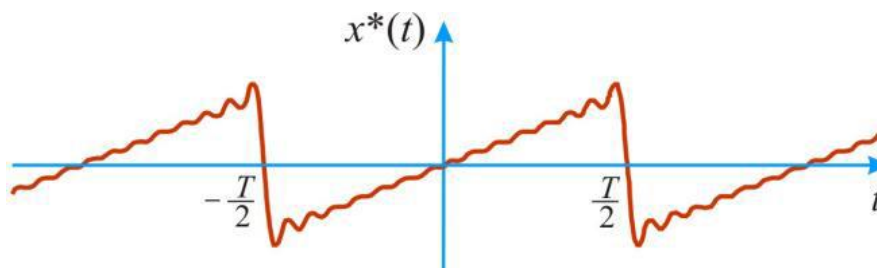


Рис. 2.10 – Апроксимація пилкоподібного коливання усіченим рядом Фур'є при $N=15$

Додавання нових гармонік зсуває ці викиди до точок розриву й зменшує їхню тривалість, але розмах викиду залишається постійним і становить 18%.

Для багатьох аналітичних досліджень наявність явища Гіббса викликає певні труднощі.

2.1.4 Розподіл потужності в спектрі періодичних даних

Нехай сигнал $x(t)$ (струм, напруга) являє собою складну періодичну функцію часу з періодом T . Енергія такого сигналу, що триває від $t = -\infty$ до

$t = \infty$, нескінченно велика. Основний інтерес являє середня потужність періодичного сигналу і розподіл цієї потужності між окремими гармоніками.

Очевидно, що середня потужність періодичного сигналу збігається із середньою потужністю за період і вона, в припущенні, що опір навантаження дорівнює 1 Ом, записується у вигляді

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt. \quad (2.31)$$

Представимо сигнал $x(t)$ рядом Фур'є

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n). \quad (2.32)$$

Підставивши (2.32) в (2.31) і зробивши перетворення, одержимо

$$P_{cp} = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2.$$

Таким чином, *середня потужність періодичного сигналу дорівнює сумі середніх потужностей, які виділяються окремими гармоніками і його постійною складовою.*

Для усіченого ряду будемо мати:

$$P_{cp}^* = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2.$$

Таким чином, середня потужність не залежить від фаз окремих гармонік. Це означає, що зміна форми сигналу, який виходить при порушенні фазових співвідношень усередині спектра, не пов'язане зі зміною середньої потужності сигналу. Звідси також витікає, що для визначення середньої потужності вибір початку відліку при розкладанні в ряд Фур'є не відіграє ролі.

Приклад. Розглянемо пилкоподібний сигнал, описуваний функцією (2.24). Середня потужність, яка виділяється сигналом в активному опорі $R=1$ Ом, дорівнює

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{2D}{T} t \right)^2 dt = \frac{8D^2}{T^3} \int_0^{T/2} t^2 dt = \frac{D^2}{3} = 0.333D^2.$$

Згідно (2.25) і (2.26) амплітуди гармонік дорівнюють

$$A_n = |b_n| = \frac{2D}{\pi n}.$$

Середня потужність, виділювана в активному опорі $R=1$ Ом N гармоніками, дорівнює

$$P_{cp}^* = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_n^2 = \frac{2D^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}. \quad (2.33)$$

З останнього одержимо:

$$\begin{aligned} \text{при } N=10 \quad P_{cp}^* &= 0.314D^2 = 0.943P_{cp} \\ \text{при } N=50 \quad P_{cp}^* &= 0.329D^2 = 0.988P_{cp} \end{aligned}$$

Практична ширина спектра

Реальні пристрої та системи через наявність у них інерційних елементів не можуть передавати коливання яких завгодно високих частот. Отже, при рішенні практичних завдань, пов'язаних з передачею періодичних сигналів через пристрої та системи, може бути врахована лише певна кількість гармонійних складових.

У зв'язку із цим уводиться поняття практичної ширини спектра. Очевидно, необхідно враховувати ту частину спектра сигналу, яка містить гармонійні складові з відносно більшими амплітудами. Тому під *практичною шириною спектра* сигналу розуміється та область частот, у межах якої лежать гармонійні складові сигналу з амплітудами, які перевищують наперед задану величину. З енергетичної точки зору практична ширина спектра може бути визначена як область частот, у межах якої зосереджена гнітюча частина потужності сигналу.

Приклад. Розглянемо періодичну послідовність прямокутних імпульсів (рис. 2.7) з амплітудою D , періодом проходження T і тривалістю $\tau = T/2$. Визначимо практичну ширину спектра, якщо потрібно врахувати всі гармонійні складові сигналу, амплітуди яких більші за 10% від амплітуди першої гармоніки.

Згідно з (2.28) амплітуди гармонійних складових при $\tau = T/2$ дорівнюють

$$A_n = \frac{2D}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Число гармонік n , які підлягають обліку можна визначити з виразу

$$\frac{A_n}{A_1} = \frac{2D}{n\pi} \cdot \frac{\pi}{2D} = \frac{1}{n} = 0.1.$$

Звідси $n = 10$. Практична ширина спектра становить $10\omega_1$.

2.2 Гармонійний аналіз неперіодичних даних

2.2.1 Перетворення Фур'є

Гармонійний аналіз можна поширити і на неперіодичні сигнали. Розглянемо сигнал, що визначений деякою функцією $x(t)$ на інтервалі $[t_1, t_2]$ і дорівнює нулю за межами цього інтервалу (цей сигнал показаний на (рис. 2.11) суцільною лінією). Будемо вважати, що ця функція задовольняє умови Дирихле і абсолютно інтегрувальна.

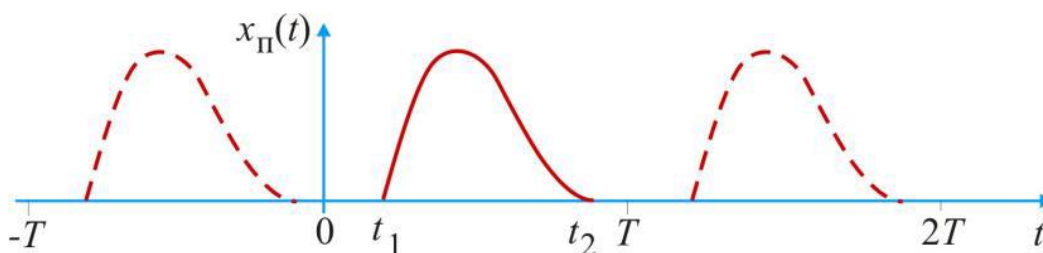


Рис. 2.11 – Періодична функція, утворена повторенням $x(t)$

Візьмемо довільний відрізок часу тривалістю T , що цілком включає інтервал $[t_1, t_2]$, і утворимо періодичну функцію

$$x_{\Pi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$$

у якій функція $x(t)$ повторюється через інтервал T (фрагмент цієї функції показаний на (рис. 2.11)).

Очевидно, що

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_{\Pi}(t) . \quad (2.34)$$

Періодичну функцію $x_{\Pi}(t)$ можна записати у вигляді ряду Фур'є в комплексній формі

$$x_{\Pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t} , \quad (2.35)$$

де

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt . \quad (2.36)$$

Підставивши (2.36) в (2.35) і замінивши $T=2\pi/\omega_1$, одержимо

$$x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) e^{-jn\omega_1 t} d\tau \right] e^{jn\omega_1 t} \omega_1 . \quad (2.37)$$

Щоб одержати спектральне подання сигналу $x(t)$, підставимо (2.37) в (2.34) і спрямуємо T до нескінченності. При $T \rightarrow \infty$ кутова частота $\omega_1 = 2\pi/T$ перетворюється в нескінченно мале збільшення частоти $d\omega$, частота n -ї складової ряду $n\omega_1$ – у поточну частоту ω , а операція підсумовування може бути замінена на операцію інтегрування. У результаті одержимо

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{t_1}^{t_2} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] d\omega . \quad (2.38)$$

З урахуванням, що значення t_1 й t_2 не визначені, для внутрішнього інтеграла в (2.38) уведемо позначення

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt . \quad (2.39)$$

Функцію $x(j\omega)$ називають *спектральною характеристикою сигналу* $x(t)$.

Вираження (2.38) з урахуванням (2.39) приймає вид

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt . \quad (2.40)$$

Формули (2.40) і (2.39) утворюють пари перетворень Фур'є й установлюють однозначну відповідність між поданням $x(t)$ сигналу в часовій області і його поданні $X(j\omega)$ в області частот. Формулу (2.39) називають прямим перетворенням Фур'є, а функцію $X(j\omega)$ – спектральною характеристикою сигналу $x(t)$. Формула (2.40) дозволяє здійснити зворотне перетворення і обчислити миттєве значення сигналу $x(t)$, якщо відомо його спектральну характеристику $X(j\omega)$. Символічно ці перетворення записуються у вигляді $X(j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\}$, $x(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$.

Спектральна характеристика $X(j\omega)$ сигналу $x(t)$ у загальному випадку є комплексною функцією частоти. Застосувавши відому формулу Ейлера, її можна записати в такому вигляді

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \cdot dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \cdot dt = \\ &= a(\omega) - jb(\omega) = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)} . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Дійсна частина $a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \cdot dt$ спектральної характеристики є парна функція частоти, а уявна частина $b(\omega) =$

$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \cdot dt$ – непарна функція частоти. Звідси витікає, що модуль спектральної характеристики $X(\omega) = |X(j\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}$ є парна функція частоти, а аргумент спектральної характеристики $\phi(\omega) = \arg X(j\omega)$ – непарна функція частоти.

Графічно спектральну характеристику $X(j\omega)$ сигналу $x(t)$ у загальному випадку можна представити у вигляді годографа на комплексній площині (рис. 2.12, *a*). Однак частіше будують амплітудно-частотну $X(\omega)$ і фазо-частотну $\phi(\omega)$ спектральні характеристики (рис. 2.12, *б, в*). З огляду на симетричність спектральних характеристик при додатних і від'ємних значеннях частоти ω , їх, як правило, будують тільки при додатних значеннях частоти ω .

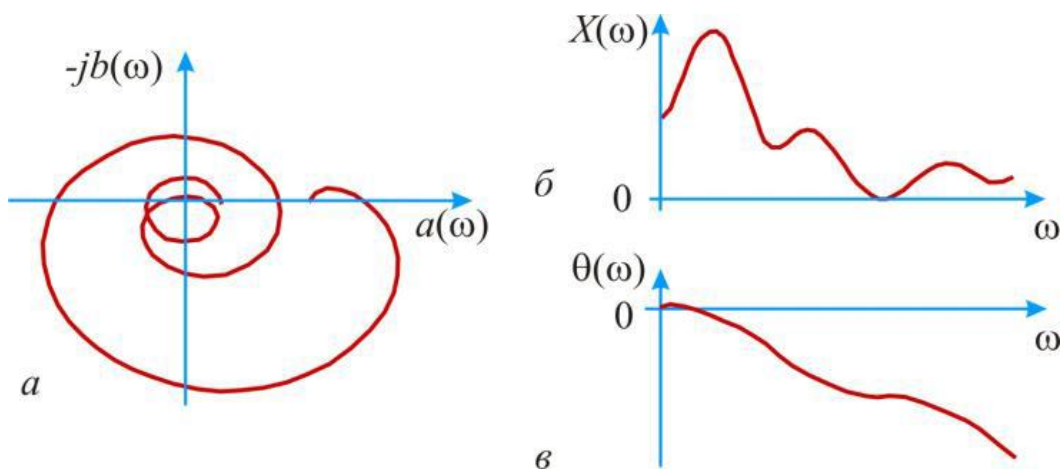


Рис. 2.12 – Спектральні характеристики сигналу:
a – годограф, *б* – амплітудна, *в* – фазова

Формулу (2.40) зворотного перетворення Фур'є за допомогою формули Ейлера і виразу (2.41) можна перетворити до такого вигляду:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega . \quad (2.42)$$

2.2.2 Спектральні характеристики найпростіших неперіодичних даних

Спектральна характеристика одиночного прямокутного імпульсу

Прямокутний імпульс із початком відліку, сполученим з його серединою (рис. 2.13, *a*), описується виразом

$$x(t) = D \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} D & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2. \end{cases}$$

Застосовуючи формулу (2.39), знаходимо

$$X(j\omega) = D \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{D}{-j\omega} \left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right) = D\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}. \quad (2.43)$$

Спектральна характеристика прямокутного імпульсу при обраному початку відліку є дійсною функцією (рис. 2.13, б). Максимальне значення $X(j\omega)$ досягається при $\omega=0$. Його можна обчислити за правилом Лопіталія: $X(0)=D\tau$. Спектральна характеристика обертається в нуль при значеннях аргументу $\frac{\omega\tau}{2} = \pi n$ ($\omega = \frac{2\pi}{\tau} n$), де n – кожне (додатне або від’ємне) ціле число.

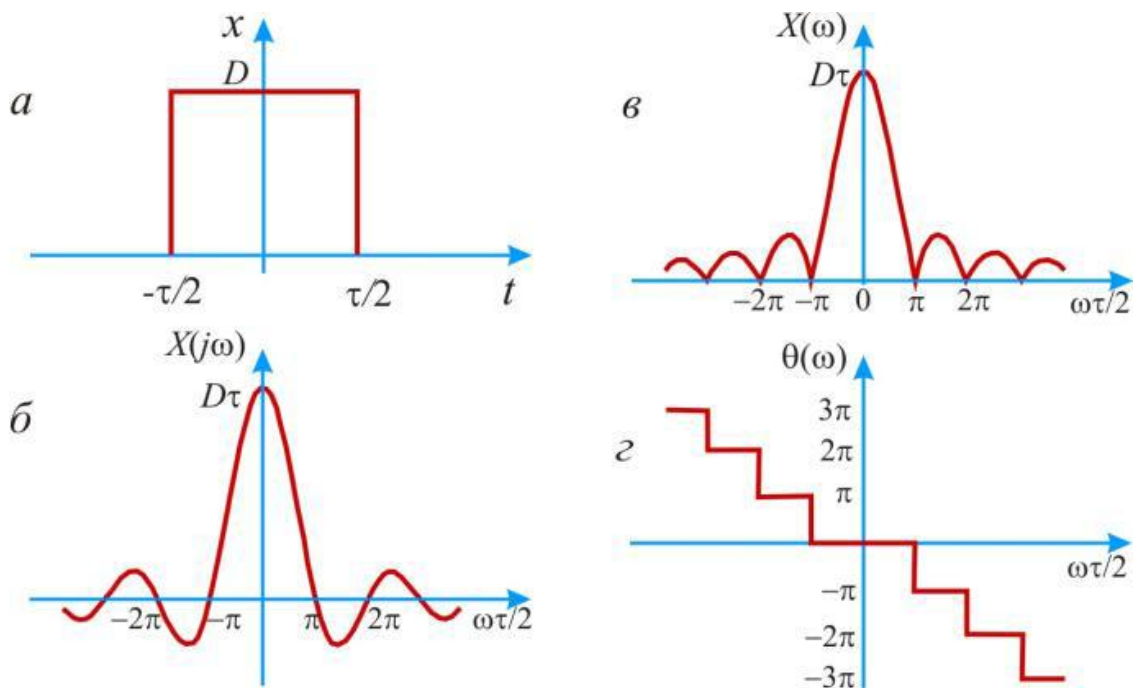


Рис. 2.13 – Спектральні характеристики прямокутного імпульсу (а):
 б – загальна; в – амплітудна; г – фазова

При збільшенні тривалості τ імпульсу відстань між нулями функції $X(j\omega)$ зменшується, тобто спектр звужується. Значення $X(0)$ при цьому зростає. При зменшенні тривалості τ імпульсу, навпаки, відстань між нулями функції $X(j\omega)$ збільшується, що свідчить про розширення спектра, а значення $X(0)$ зменшується.

Амплітудна спектральна характеристика $X(\omega)$ прямокутного імпульсу показана на (рис. 2.13, в). При побудові фазової спектральної характеристики $\theta(\omega)$ (рис. 2.13, г) кожна зміна знаку функції $X(j\omega)$ ураховується збільшенням фази на π .

Спектральна характеристика дельта-функції

Дельта-функція (її цифровий аналог – функція Дірака) визначається в такий спосіб:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$$

Функція задовольняє умову $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, яке означає, що площа імпульсу дорівнює одиниці. Одержати на практиці сигнал, описуваний такою функцією, не можна. Однак дельта-функція є дуже зручною математичною моделлю. На (рис. 2.14, а) наведено графічне подання дельта-функції у вигляді вертикального відрізка, що закінчується стрілкою. Довжина цього відрізка, береться пропорційною площі дельта-імпульсу.

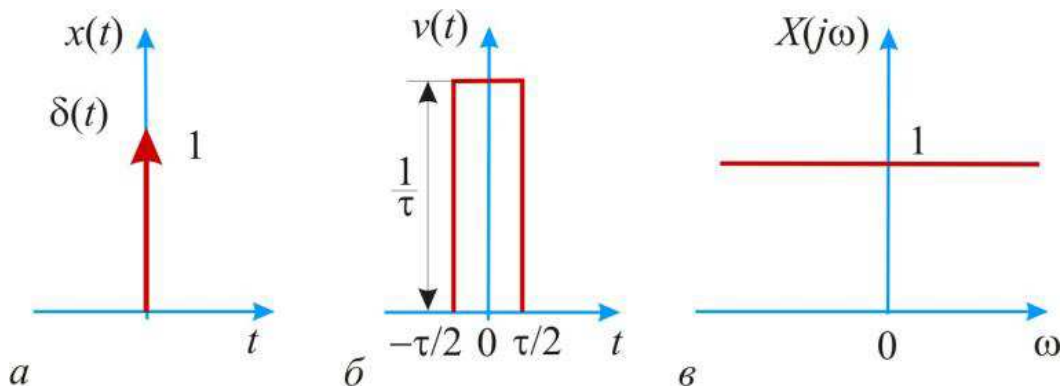


Рис. 2.14 – До визначення спектральної характеристики дельта-функції:
а – дельта-функція; б – прямокутний імпульс; в – спектральна характеристика

Знайдемо спектральну характеристику дельта-функції. Для цього візьмемо прямокутний імпульс, описуваний функцією $v(t)$ (рис. 2.14, б). Тривалість імпульсу дорівнює τ , а амплітуда – $1/\tau$. Тому площа імпульсу дорівнює одиниці. Будемо зменшувати тривалість імпульсу до нуля, при цьому його амплітуда буде прагнути до нескінченності. Отже, $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} v(t)$.

Спектральна характеристика прямокутного імпульсу визначається виразом (2.43). Звідси, з урахуванням того, що $A=1/\tau$, одержимо спектральну характеристику дельта-функції

$$X(j\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = 1.$$

Таким чином, дельта-імпульс має рівномірний спектр на всіх частотах (рис. 2.14, в).

Спектральна характеристика експонентного сигналу

Розглянемо сигнал, описуваний функцією

$$x(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$$

при додатному дійсному значенні параметра α (рис. 2.15, а).

Спектральна характеристика експонентного сигналу дорівнює

$$X(j\omega) = A \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha + j\omega}.$$

Годограф спектральної характеристики наведений на (рис. 2.15, б). Амплітудний і фазовий спектри визначаються відповідно виразами:

$$X(\omega) = |X(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}},$$

$$\phi(\omega) = \arg X(j\omega) = -\arctg(\omega/\alpha).$$

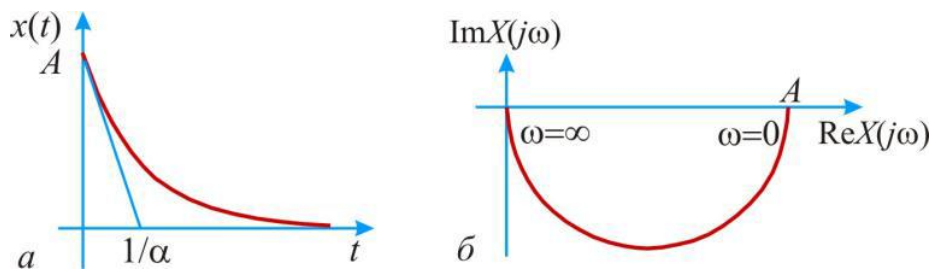


Рис. 2.15 – До визначення спектральної характеристики експонентного імпульсу: а – експонентний імпульс; б – спектральна характеристика

Спектральна характеристика східчастого сигналу

Розглянемо сигнал, описуваний східчастою функцією

$$x(t) = A \cdot 1(t). \quad (2.44)$$

Східчата функція $1(t)$ не є абсолютно інтегрувальною функцією, тому формулу прямого перетворення Фур'є використати не можна. Однак функцію (2.44) можна представити як межу експонентної функції:

$$x(t) = A \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t}.$$

У цьому випадку спектральну характеристику $X(j\omega)$ можна

визначити як межу спектральної характеристики експонентного сигналу при $\alpha > 0$:

$$X(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{A}{\alpha + j\omega} = A \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - jA \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

При $\alpha > 0$ перший доданок у правій частині цього виразу дорівнює нулю на всіх частотах, крім $\omega = 0$, де воно обертається в нескінченність. Знайдемо площу

$$\int_{-\alpha}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega/\alpha)^2} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$

Отже, межа першого доданка дорівнює $\pi\delta(\omega)$. Межа другого доданка очевидна. Тому остаточно одержимо

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

2.2.3 Основні властивості перетворення Фур'є

Між сигналом $x(t)$ і його спектром $X(j\omega)$ існує однозначна відповідність. Для рішення практичних завдань необхідно знати зв'язок між змінами сигналу і відповідних змін спектральної характеристики. Розглянемо найбільш важливі перетворення сигналів і відповідні їм зміни спектральної характеристики.

Лінійність перетворення Фур'є

Якщо сигнали $x_1(t), \dots, x_n(t)$ перетворювані по Фур'є і їхніми спектральними характеристиками є відповідно функції $X_1(j\omega), \dots, X_n(j\omega)$ і якщо $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – величини, що не залежать від t й ω , то справедливі такі рівності:

$$\mathfrak{F}\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(t)\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i(j\omega)$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i(j\omega)\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(t)$$

Таким чином, лінійній комбінації сигналів відповідає лінійна комбінація спектральних характеристик цих сигналів.

Спектральна характеристика похідної

Якщо функція $x(t)$, що описує сигнал, і її похідна $y(t) = dx/dt$, перетворювані по Фур'є і функція має спектральну характеристику $X(j\omega)$, то спектральна характеристика похідної

$$Y(j\omega) = \mathfrak{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega). \quad (2.45)$$

Таким чином, диференціювання сигналу за часом еквівалентно простій алгебраїчній операції множення спектральної характеристики на множник $j\omega$. Тому прийнято говорити, що уявне число є оператором диференціювання, що діє в частотній області.

Формула (2.45) узагальнюється на випадок спектра похідної n -го порядку. Легко показати, що якщо похідна

$$y(t) = dx^n(t)/dt^n$$

абсолютно інтегрувальна в інтервалі $(-\infty, \infty)$, то

$$Y(j\omega) = (j\omega)^n X(j\omega).$$

Спектральна характеристика інтеграла

Якщо функція $x(t)$, що описує сигнал, перетворювана по Фур'є, має спектральну характеристику $X(j\omega)$ і $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 0$, то спектральна характеристика інтеграла $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ дорівнює

$$Y(j\omega) = \mathfrak{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega}.$$

Таким чином, множник $1/j\omega$ є оператором інтегрування в частотній області. Ця властивість поширюється і на інтеграли кратності n .

Спектральна характеристика зміщеного сигналу

Нехай є сигнал $x_1(t)$ (рис. 2.16, а) довільної форми, що існує на інтервалі $[t_1, t_2]$ і має спектральну характеристику $X_1(j\omega)$. Розглянемо такий же сигнал, але виникаючий на час τ пізніше і тому описуваний функцією

$$x_2(t) = x_1(t - \tau).$$

Ця функція визначена на інтервалі $[t_1 + \tau, t_2 + \tau]$ (рис. 2.16, б).

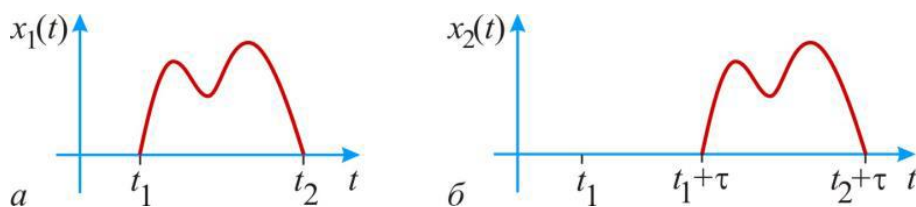


Рис. 2.16 – Вихідний (а) і „запізнілий” (б) сигнали

Якщо сигнал $x_1(t)$ може перетворюватися по Фур'є і має спектральну характеристику $X_1(j\omega)$, то спектральна характеристика сигналу, що

„запізнюється”, $x_2(t)$ дорівнює

$$X_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_1(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} X_1(j\omega).$$

У випадку „випереджаючого” $x_2(t) = x_1(t + \tau)$ сигналу будемо мати

$$X_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_1(t + \tau)\} = e^{j\omega\tau} X_1(j\omega).$$

Зсув спектральної характеристики

Якщо функція $x(t)$ може перетворюватися по Фур'є і має спектральну характеристику $X(j\omega)$, то

$$\mathfrak{F}\{e^{-jat} x(t)\} = X[j(\omega + a)]$$

де a – будь-яке дійсне невід'ємне число.

Стиснення і розтягання сигналів

Нехай заданий сигнал $x_1(t)$ і її спектральна характеристика $X_1(j\omega)$. Піддамо цю функцію зміні масштабу часу, утворивши нову функцію

$$x_2(t) = x_1(kt),$$

де k – деяке дійсне число. На (рис. 2.17) наведені, наприклад, графіки сигналу, описуваного функцією

$$x_2(t) = e^{-0.5kt} \cos \pi kt \tag{2.46}$$

для різних значень k .

Легко помітити, що при $k > 1$ відбувається „стиснення” сигналу (рис. 2.17, б), а при $0 < k < 1$ – „розтягання” сигналу (рис. 2.17, в).

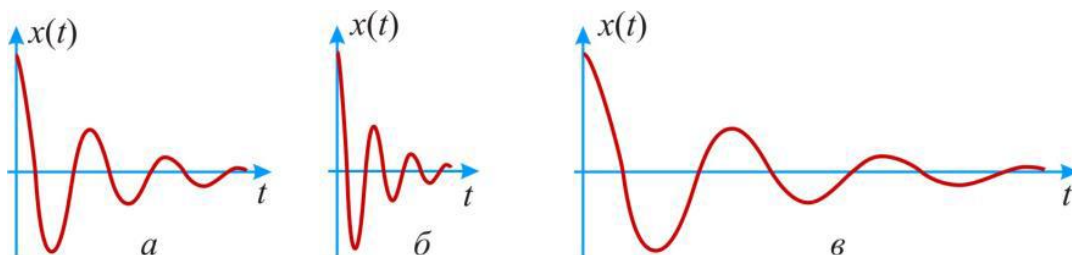


Рис. 2.17 – Графіки сигналу (2.44)
 $a - k=1$; $б - k=2$; $в - k=0,5$

Можна показати, що спектральна характеристика сигналу $x_2(t)$ визначається виразом

$$X_2(j\omega) = \mathfrak{F}\{x_1(kt)\} = \frac{1}{k} X_1\left(j\frac{\omega}{k}\right).$$

Із цього виразу витікає, що при стиску сигналу на часовій осі в k раз у стільки ж раз розширюється його спектр на осі частот. Модуль спектральної характеристики при цьому зменшується в k раз. При розтяганні сигналу в часі, тобто при $0 < k < 1$, мають місце звуження спектра і збільшення модуля спектральної характеристики.

Спектральна характеристика добутку сигналів

Нехай є два сигнали, які описуються функціями $x_1(t)$ і $x_2(t)$. Утворимо сигнал

$$y(t) = x_1(t)x_2(t).$$

Якщо сигнали $x_1(t)$ і $x_2(t)$ можуть перетворюватися по Фур'є і їхні спектральні характеристики є відповідно $X_1(j\omega)$ і $X_2(j\omega)$, то спектральна характеристика сигналу $y(t)$ визначається виразом

$$Y(j\omega) = F\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1[j(\omega - \sigma)] X_2(j\sigma) d\sigma.$$

Теорема Парсеваля

Якщо функції $x_1(t)$ і $x_2(t)$ можуть перетворюватися по Фур'є і їхні спектральні характеристики відповідно дорівнюють $X_1(j\omega)$ і $X_2(j\omega)$, причому інтеграли

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\omega) d\omega$$

сходяться абсолютно, то справедлива рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) X_2(-j\omega) d\omega. \quad (2.47)$$

Формула (2.47) дозволяє знайти інтеграл у нескінченних межах від добутку двох функцій, зробивши відповідні операції зі спектральними характеристиками функцій.

Після нескладних перетворень формулу (2.47) можна записати в дійсній формі

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X_1(j\omega)| |X_2(j\omega)| \cos[\phi_1(\omega) - \phi_2(\omega)] d\omega.$$

Якщо $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, то $X_1(j\omega) = X_2(j\omega) = X(j\omega)$ і з (2.47) одержимо рівність, що називають *формулою Парсеваля*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega .$$

Оборотність перетворення Фур'є

Неважко помітити, що формули прямого перетворення

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

і зворотного перетворення Фур'є

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

дуже схожі одна на одну. Із цієї причини всі „пари” перетворень мають близькі дзеркальні образи. Покажемо це на прикладі.

Як показано вище, прямокутний імпульс, описуваний функцією

$$x(t) = \begin{cases} D & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau/2 \text{ і } t > \tau/2. \end{cases}$$

має спектральну характеристику

$$X(j\omega) = D\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} .$$

З іншого боку, якщо піддати прямому перетворенню Фур'є сигнал

$$y(t) = \frac{D\omega_0}{2\pi} \frac{\sin(\omega t_0/2)}{\omega t_0/2} ,$$

одержимо

$$Y(j\omega) = \begin{cases} D & \text{при } -\omega_0/2 \leq \omega \leq \omega_0/2, \\ 0 & \text{при } \omega < -\omega_0/2 \text{ і } \omega > \omega_0/2. \end{cases}$$

2.2.4 Розподіл енергії в спектрі неперіодичних даних

Величина

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

зветься *енергією сигналу*. Саме така енергія виділяється в резисторі з опором 1 Ом, якщо до його затискачів прикладена напруга $x(t)$.

За допомогою формули Парсеваля енергію сигналу можна виразити через його спектральну характеристику:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega . \quad (2.48)$$

Співвідношення (2.48) дозволяє визначити енергію сигналу шляхом інтегрування квадрата модуля спектральної характеристики по всьому діапазону частот. Крім того, це співвідношення показує, яким образом розподілена енергія сигналу по різних частотних складових. З нього видно, що на нескінченно малий проміжок частот припадає енергія

$$dE_x = \frac{|X(j\omega)|^2}{\pi} d\omega.$$

Тому функцію

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi} |X(j\omega)|^2$$

можна назвати спектральною характеристикою енергії сигналу $x(t)$. Вона характеризує розподіл енергії сигналу за його гармонійними складовими.

У процесі рішення практичних завдань аналізу і синтезу сигналів за допомогою перетворення Фур'є доводиться обмежувати інтервал частот, у якому будується спектральна характеристика. Цей інтервал частот $[0, \omega_{\text{пр}}]$, називаний *практичною шириною спектра*, містить істотні для даного дослідження складові.

При визначенні практичної ширини спектра сигналу за заданою інтенсивністю гармонійних складових використовують амплітудну спектральну характеристику. Значення $\omega_{\text{пр}}$ вибирають із умови, що при $\omega > \omega_{\text{пр}}$ амплітуди гармонійних складових не перевищують заданої величини.

З енергетичної точки зору практична ширина спектра неперіодичного сигналу оцінюється по області частот, у межах якої зосереджена гнітюча частина енергії сигналу. Відповідно до формули (2.48) енергія сигналу, яка зосереджена в смузі частот від 0 до $\omega_{\text{пр}}$, буде

$$E_x^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\text{пр}}} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Залежно від вимог до частки корисно використовуваної енергії сигналу й вибирається практична ширина спектра.

Приклад. Дано прямокутний імпульс, описуваний функцією

$$x(t) = \begin{cases} D & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau/2 \text{ і } t > \tau/2. \end{cases} \quad (2.49)$$

Енергія сигналу дорівнює

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} D^2 dt = D^2 \tau .$$

Спектральна характеристика прямокутного імпульсу визначена вище:

$$X(j\omega) = D\tau \frac{\sin(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2}$$

Нехай $D=1$, $\tau=1$. Тоді згідно з (2.49) $E_x=1$. Інтегрування квадрата модуля спектральної характеристики в інтервалі частот $[0, 100]$ дає оцінку енергії імпульсу $E_x^* = 0.994$.

2.3 Спектральний аналіз дискретних послідовностей

2.3.1 Опис, перетворення та подання дискретних послідовностей

Більшість сигналів мають аналогову природу. Вони змінюються безупинно в часі й можуть набувати будь-яких значень в деякій області. Увести такий сигнал у комп'ютер і обробити його неможливо, тому що на будь-якому інтервалі часу він має нескінченну множину значень. Тому в системах цифрової обробки сигнал представлений значеннями сигналу, узятими в окремі дискретні моменти часу (рис. 2.18). Ці значення називаються *відліками*.

Відліки можуть братись в довільні моменти часу t_n , $n=0, 1, 2, \dots, N$ (рис. 2.18, *а*). Тоді сигнал буде представлений двома послідовностями чисел: послідовністю t_0, t_1, t_2, \dots, t і послідовністю відліків $x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t)$. Змінюючи тривалість інтервалу між відліками, залежно від властивостей аналогового сигналу, можна підвищити точність їхнього збереження. Однак завдяки складності реалізації цей спосіб не набув широкого застосування в системах обробки сигналів.

На практиці набув поширення інший спосіб подання сигналу послідовністю, у якій відліки розташовуються через рівні проміжки часу T (рис. 2.18, *б*).

У цьому випадку сигнал визначається послідовністю його значень $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$. Цю послідовність називають *дискретною послідовністю*. Позначають дискретну послідовність $x(n)$.

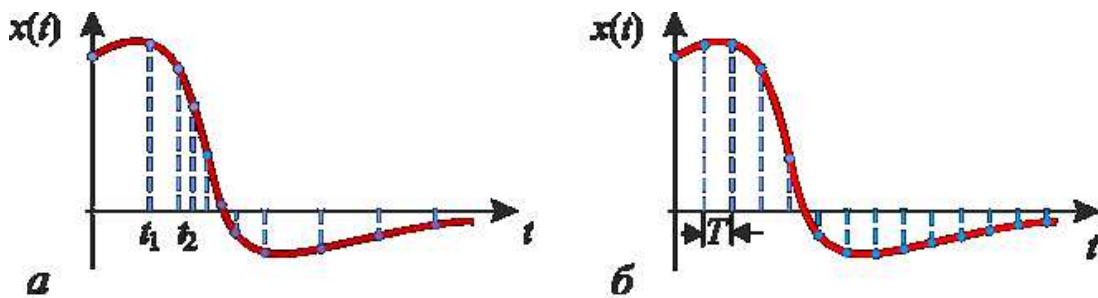


Рис. 2.18 – Подання сигналу послідовністю відліків:
 а – у довільні дискретні моменти часу t_i ;
 б – у дискретні моменти часу $T \cdot n$, $n=0,1,2, \dots$, $T=\text{const}$

Аналітично дискретна послідовність $x(n)$ може описуватись функцією, яка називається *гратковою*.

Інтервал T називають *періодом дискретизації*, або інтервалом дискретизації. Величина, зворотна періоду дискретизації, називається *частотою дискретизації*, або частотою взяття відліків f_d або f_s .

Перетворення аналогового сигналу на послідовність відліків називається *дискретизацією за часом*.

Очевидно, що подання сигналу дискретною послідовністю відліків приводить до втрати інформації про поведінку сигналу в проміжках між відліками. Щоб ці втрати були мінімальні, період дискретизації T необхідно зменшувати. Однак зменшення періоду дискретності призводить до збільшення числа відліків і, як наслідок, до збільшення обсягу обчислень. Тому при виборі періоду дискретизації доводиться шукати компромісне рішення.

Для точного подання значення сигналу в дискретні моменти часу потрібні числа нескінченної розрядності. У системах обробки сигналів розрядність чисел обмежена. Подання дискретної послідовності числами скінченної розрядності називається *квантуванням за рівнем*. Вся область значень сигналу при цьому розбивається на рівні, кількість яких залежить від числа розрядів. Ці рівні називаються *рівнями квантування*. Відстань між ними називається *кроком квантування*. Квантування сигналу за рівнем – принципово нелінійна операція.

Операції дискретизації за часом і квантування за рівнем виконуються в аналого-цифрових перетворювачах (АЦП). Якщо знехтувати явищами гістерезису і запізнювання, АЦП можна представити у вигляді послідовного з'єднання імпульсного елемента, що здійснює квантування за

часом, і багатоступінчастого симетричного релейного елемента зі статичною характеристикою $\Phi[x(n)]$, що здійснює квантування за рівнем (рис. 2.19).

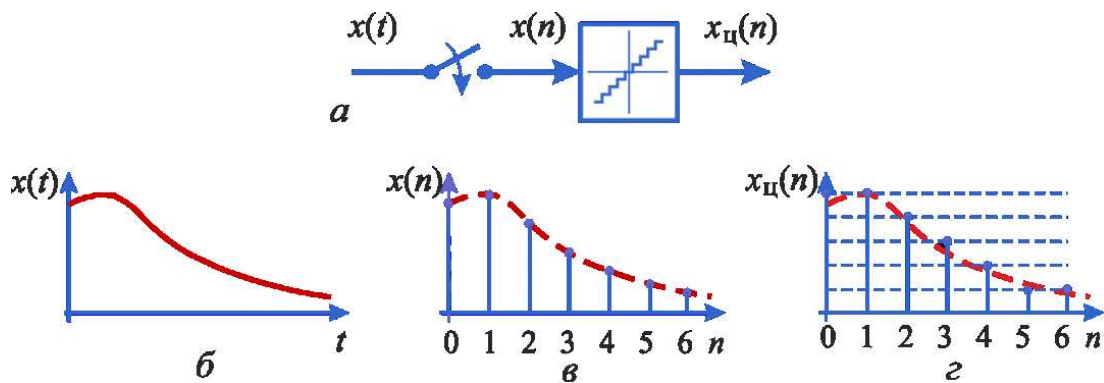


Рис. 2.19 – Утворення дискретної та цифрової послідовності:
a – схема заміщення аналого-цифрового перетворювача, *б* – аналоговий сигнал, *в* – дискретна послідовність, *г* – цифрова послідовність, отримана округленням

Елементи цифрової послідовності $x_{ц}(n)$ можуть набувати лише ряд дискретних значень $h_0, h_1, h_2, \dots, h_b, \dots, h_{N-1}$, число яких залежить від кількості використовуваних розрядів.

Відомі способи квантування за рівнем з використанням зрізання або округлення значення дискретного відліку сигналу. Якщо здійснюється зрізання, то дискретний відлік, що перебуває між рівнями h_{l-1} й h_l , замінюється нижнім значенням h_{l-1} . Зрізання призводить до похибки, максимальне значення якої дорівнює вазі молодшого з утримуваних розрядів. При цьому помилка завжди має той самий знак (зрізане значення не може бути більше від вихідного).

При округленні дискретного відліку, що перебуває між рівнями h_{l-1} й h_l , привласнюється найближче значення. Помилка для цього способу квантування може бути як позитивною, так і негативною, а її модуль не перевищує ваги старшого з відкинутих розрядів.

Дискретні послідовності, піддані процедурі квантування за рівнем, прийнято називати *цифровими дискретними послідовностями*.

Одиничний імпульс

Одиничний імпульс (рис. 2.20, *a*) визначається виразом

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

У дискретних системах цей імпульс відіграє таку ж роль, що й дельта-функція $\delta(t)$ в аналізі аналогових сигналів. Але між ними є дуже

важлива відмінність: одиничний імпульс $l(n)$ є фізично реалізованим, а дельта-функція $\delta(t)$ є математичною абстракцією.

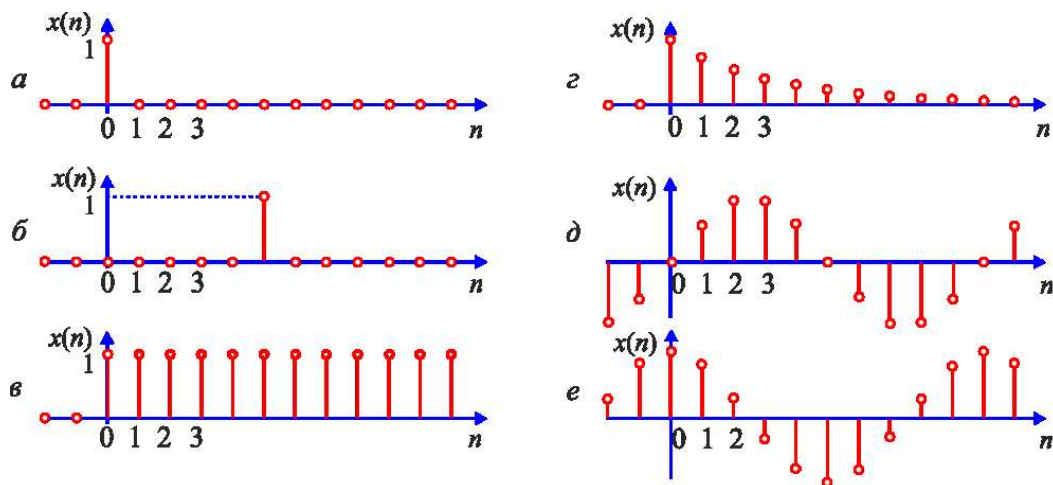


Рис. 2.20 – Графіки типових дискретних послідовностей

$$\begin{aligned}
 & a) x(n) = \delta(n); \quad б) x(n) = \delta(n - n_0); \\
 & в) x(n) = 1(n); \quad г) x(n) = A \cdot \exp(-an) \cdot 1(n); \\
 & д) x(n) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}n\right); \quad е) x(n) = A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)
 \end{aligned}$$

На (рис. 2.20, б) зображений одиничний імпульс, затриманий на n_0 інтервалів дискретності. Вираз, що його описує, виглядає так:

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, & n = n_0, \\ 0, & n \neq n_0. \end{cases}$$

Одинична східчаста послідовність

Одинична східчаста послідовність $1(n)$ (рис. 2.20, в) є аналогом одиничної східчастої функції $1(t)$ і описується формулою

$$1(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Експонентна послідовність

Експонентна послідовність утвориться в результаті дискретизації експоненти $x(t) = A \cdot \exp(\pm at) \cdot 1(t)$. Зробивши заміну $t=Tn$ і позначивши $a=aT$, одержимо ґраткову функцію, що описує експонентну послідовність:

$$x(n) = A \cdot \exp(\pm an) \cdot 1(n) = \begin{cases} A \cdot \exp(\pm an), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

На (рис. 2.20, з) показаний графік спадної експонентної послідовності.

Синусоїдна послідовність

Синусоїдна дискретна послідовність виходить внаслідок дискретизації синусоїдального сигналу, описуваного функцією

$$x(t) = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} t$$

де T_0 – період. Після заміни $t = Tn$ будемо мати

$$x(n) = A \cdot \sin \frac{2\pi}{T_0} Tn = A \cdot \sin \frac{2\pi}{N} n$$

Тут $N = T_0/T$ – число інтервалів дискретності на періоді. Синусоїдна послідовність показана на (рис. 2.20, д).

Легко помітити, що синусоїдна послідовність є періодичною тільки в тому випадку, коли N – ціле число.

Косинусоїдна послідовність

Аналогічно можна визначити косинусоїдну дискретну послідовність

$$x(n) = A \cdot \cos \frac{2\pi}{T_0} Tn = A \cdot \cos \frac{2\pi}{N} n$$

Графічне подання цієї послідовності дано на (рис. 2.20, е).

Опис дискретних послідовностей

Для опису довільних послідовностей можуть бути використані різні способи:

1. у вигляді послідовності відліків $\{x(0), x(1), x(2), \dots, x(n), \dots\}$,
2. у вигляді суми зважених і затриманих одиничних імпульсів $x(n) = \sum_{v=0}^{\infty} x(v) \delta(n - v)$
3. у вигляді ґраткової функції $x(n) = F(n)$.

Приклад

Послідовність, утворену в результаті дискретизації експоненти $x(t) = \exp(-0,5t) \cdot I(t)$ з періодом $T = 0,2$ с, можна задати:

1. у вигляді послідовності відліків $x_n = \{x(0), x(1), x(2), \dots\}$, де $x(0) = \exp(0) = 1$, $x(1) = \exp(-0,1) = 0,9048$, $x(2) = \exp(-0,2) = 0,8187$ і т.д.,
2. за допомогою одиничних імпульсів у вигляді $x(n) = \sum_{v=0}^{\infty} \exp(-0,1v) \cdot \delta(n - v) = \delta(n) + 0,9048 \delta(n - 1) + 0,8187 \delta(n - 2) + \dots$
3. у вигляді ґраткової функції $x(n) = \exp(-0,1n) \cdot I(n)$.

Перетворення дискретних послідовностей

Власне, цифрова обробка сигналів полягає в перетворенні деякої дискретної (цифрової) послідовності $x(n)$ на іншу послідовність $y(n)$ за допомогою певного алгоритму. Розглянемо деякі базові перетворення дискретних послідовностей.

1. Масштабування

При масштабуванні дискретна послідовність $y(n)$ утвориться шляхом множення кожного елемента дискретної послідовності $x(n)$ на постійний множник λ :

$$y(n) = \lambda \cdot x(n).$$

2. Зсув

При цьому дискретна послідовність $y(n)$ виходить зсувом кожного елемента дискретної послідовності $x(n)$ на фіксоване значення незалежної змінної n_0 у ту або іншу сторону. При цьому

$$y(n) = x(n \mp n_0)$$

Тут знаку « \leftarrow » відповідає затримка послідовності на n_0 інтервалів дискретності, а знаку « \rightarrow » – випередження.

3. Різниці дискретної послідовності

Теорія безперервних функцій використовує поняття диференціювання, і в результаті одержують похідні різних порядків. У теорії дискретних послідовностей аналогічну роль відіграють поняття *різниць*.

Аналогом першої похідної безперервної функції є або *перша пряма різниця*

$$\Delta x(n) = x(n + 1) - x(n)$$

або *перша зворотна різниця*

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n - 1)$$

Пряма різниця визначається в дискретний момент часу $\bar{t} = n$ за майбутнім значенням дискретної послідовності $\bar{t} = n + 1$. Це можна зробити в тих випадках, коли майбутнє значення відоме, або, якщо це майбутнє значення можна обчислити. Зворотна різниця визначається для моменту часу $\bar{t} = n$ за минулим значенням дискретної послідовності в момент часу $\bar{t} = n - 1$.

Аналогом другої похідної безперервної функції для дискретної послідовності служать другі різниці:

пряма друга різниця

$$\Delta^2 x(n) = \Delta x(n + 1) - \Delta x(n)$$

зворотна друга різниця

$$\nabla^2 x(n) = \nabla x(n) - \nabla x(n-1)$$

Очевидно, сказане вище щодо можливості обчислення прямої і зворотної різниці зберігає свою силу і тут.

Пряма і зворотна різниці m -го порядку визначаються за формулами:

$$\Delta^m x(n) = \Delta^{m-1} x(n+1) - \Delta^{m-1} x(n),$$

$$\nabla^m x(n) = \nabla^{m-1} x(n) - \nabla^{m-1} x(n-1).$$

Зі способу утворення різниці різних порядків видно, що різниці дискретних послідовностей, які є аналогами похідної безперервної функції, характеризують локальні властивості дискретної послідовності поблизу деякої точки. Різниці, разом з тим, мають деякі відмінні риси:

- якщо дискретна послідовність визначена тільки для позитивних значень аргументу, тобто $x(n)=0$ при $n<0$, то в точці $n=0$ m -а зворотна різниця $\Delta^m x(0) = x(0)$ для будь-якого цілого додатного m ,
- різниця будь-якого порядку може виражатись через значення вихідної дискретної послідовності. Наприклад, пряма і зворотна різниці другого порядку можуть визначатись за формулами:

$$\Delta^2 x(n) = \Delta x(n+1) - \Delta x(n) = x(n+2) - 2 \cdot x(n+1) + x(n),$$

$$\nabla^2 x(n) = \nabla x(n) - \nabla x(n-1) = x(n) - 2 \cdot x(n-1) + x(n-2).$$

4. Сума дискретної послідовності

У теорії безперервних функцій використовується інтегрування. Аналогами інтеграла безперервної функції в межах від 0 до t для дискретної послідовності є сума

$$\sigma(n) = \sum_{m=0}^{n-1} x(m).$$

Інтервал між сусідніми значеннями дискретної послідовності дорівнює одиниці. Тому сума, власне кажучи, дорівнює площі огиначної східчастої дискретної послідовності.

Аналогія між похідними та інтегралом функцій безперервного аргументу і кінцевими різницями, і сумою дискретних послідовностей є чисто формальною. Досить відзначити, що кінцеві різниці та сума дискретних послідовностей існують завжди, у той час як для

диференціювання та інтегрування функцій безперервного аргументу потрібне дотримання певних умов.

Подання дискретної послідовності у вигляді дискретної функції часу

Математичне подання дискретної послідовності у вигляді ґраткової функції не завжди виявляється зручним. Зокрема, до решіткової функції не можна застосувати інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є, які набули широкого поширення при аналізі безперервних сигналів. Для того щоб застосувати зазначені перетворення, визначимо функцію безперервного часу, однозначно пов'язану із ґратковою функцією.

Розглянемо перетворення безперервного сигналу за допомогою ідеального дискретизатора (рис. 2.21, а). На виході ідеального дискретизатора утвориться послідовність миттєвих імпульсів (дельта-функцій), які з'являються в дискретні моменти часу $n, n=0, 1, 2, \dots$, і мають площу, яка дорівнює значенню $x(n)$ безперервного сигналу в дискретні моменти часу. Математично ця послідовність імпульсів визначається виразом

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT).$$

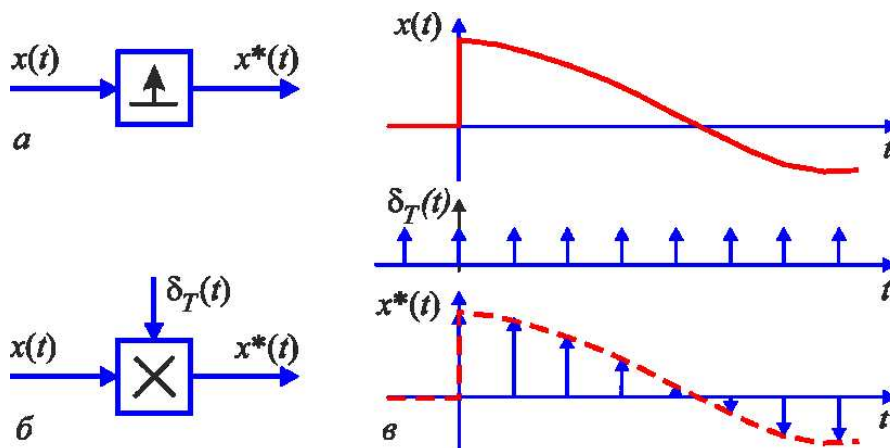


Рис. 2.21 – Подання дискретної послідовності у вигляді дискретної функції часу

Ідеальну дискретизацію можна представити, як модуляцію безперервного сигналу $x(t)$, коли „переносною” є безперервна послідовність одиничних миттєвих імпульсів

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

У цьому випадку функція $x^*(t)$ утвориться в результаті множення (рис. 2.21, б) вхідного сигналу $x(t)$ на послідовність $\delta_T(t)$:

$$x^*(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT).$$

Дискретна функція часу $x^*(t)$ містить ту ж саму інформацію про значення безперервного сигналу в дискретні моменти часу, що й дискретна послідовність. І в той же час вона може піддаватись перетворенням Лапласа і Фур'є.

2.3.2 Перетворення Фур'є дискретної послідовності. Дискретне перетворення Фур'є

Нехай дана дискретна послідовність $x(n)$, $n=0, 1, 2, \dots$. Безглуздо говорити про перетворення Фур'є від цієї дискретної послідовності. Однак, як показано вище, дискретну послідовність $x(n)$ можна зв'язати з часовою функцією

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \delta(t - nT).$$

Ця функція має перетворення Фур'є

$$X^*(j\omega) = \mathfrak{F}\{x^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega T n}. \quad (2.50)$$

У той же час дискретна послідовність має *z-перетворення*

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}. \quad (2.51)$$

Якщо зрівняти (2.50) і (2.51), можна побачити, що перетворення Фур'є являє собою окремий випадок *z-перетворення*, тобто перетворення Фур'є можна одержати як *z-перетворення*, обчислене на одиничному колі *z-площини*:

$$X^*(e^{j\omega T}) = X(z)|_{z=e^{j\omega T}}.$$

З виразу (2.50) видно, що спектральна характеристика є періодичною функцією за частотою і її період $\omega_d = 2\pi/T$. Спектр дійсного сигналу $x^*(t)$ повністю описується в основній смузі частот $[0, \omega_d/2]$. Складові спектра, розташовані в цій смузі частот, називають *основним спектром*.

Співвідношення, що встановлює зв'язок між спектрами аналогового та дискретного сигналів, має вигляд

$$X^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a[j(\omega + m\omega_d)],$$

де $\omega_d = 2\pi/T$.

Іншими словами, спектр дискретного сигналу (з точністю до постійного множника $1/T$) дорівнює сумі спектрів вихідного аналогового сигналу, зсунутих друг щодо іншого на всі можливі значення частоти, кратні частоті дискретизації, тобто на значення $m \cdot \omega_d$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Приклад.

Нехай експонентний імпульс $x(t) = A \cdot \exp(-at)$, $t \geq 0$ піддано дискретизації з інтервалом T . Знайдемо спектральну характеристику сигналу

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot e^{-\alpha T n} \delta(t - nT).$$

Згідно (2.51) одержимо

$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot e^{-\alpha T n} e^{-j\omega T n}.$$

Застосувавши формулу суми геометричної прогресії, знайдемо

$$X^*(\omega) = \frac{A}{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega T}} = \frac{A \cdot e^{-j\omega T}}{e^{-j\omega T} - e^{-\alpha T}}.$$

На (рис. 2.22) представлені спектральні характеристики, побудовані за отриманим виразом. Амплітудна і фазова спектральні характеристики на інтервалі частот від 0 до $2\pi/T$ виділені суцільною лінією.

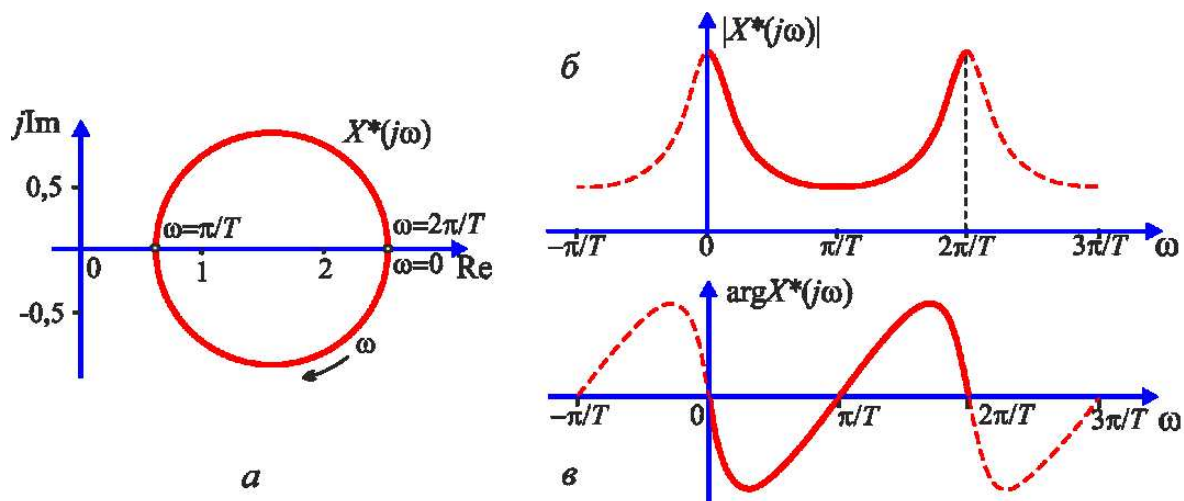


Рис. 2.22 – Спектральні характеристики експонентної дискретної послідовності: *a* – годограф, *б* – амплітудна, *в* – фазова

Дискретне перетворення Фур'є

На практиці доводиться мати справу із сигналами, заданими на обмеженому інтервалі часу, наприклад, $t \in [0, T_H]$. Такий сигнал можна представити послідовністю з N відліками, узятими на часовому відрізку $[0, T_H]$ через інтервал дискретизації $T = T_H/N$. У результаті одержимо дискретну послідовність $x(n)$, задану на скінченному інтервалі дискретного аргументу $[0, N-1]$.

У цьому випадку дискретна функція $x^*(t)$ і її спектральна характеристика $X^*(j\omega)$ описуються виразами:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{N-1} x(n) \cdot \delta(t - nT),$$

$$X^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\omega T n}.$$

Згадаємо, що спектральна характеристика $X^*(j\omega)$ є функцією безперервною і періодичною за частотою з періодом $\omega_d = 2\pi/T$. Для практичних розрахунків спектральну характеристику $X^*(j\omega)$ доцільно представити у вигляді послідовності $X^*(jk\Omega)$, $k=0, 1, \dots, N-1$, де Ω – обрана відстань між відліками в частотній області. З огляду на відзначену вище періодичність функції $X^*(j\omega)$ за частотою, приймаємо

$$\Omega = 2\pi/NT.$$

Підставивши $\omega = k\Omega$, $k=0, 1, \dots, N-1$, і ввівши позначення $X(k) = X^*(jk\Omega)$, одержимо

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\Omega T n k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \dots$$

Формула визначає пряме дискретне перетворення Фур'є (ДПФ). Легко помітити, що пряме ДПФ у загальному випадку дає періодичну послідовність комплексних чисел з періодом N .

Існує зворотне ДПФ, яке переводить послідовність $X(k)$ у послідовність $x(n)$, з якої вона була обчислена. Воно задається виразом

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\Omega T n k}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

яке відрізняється від формули прямого ДПФ тільки масштабним множником і знаком експоненти.

Зворотне перетворення подібно прямому ДПФ може давати відліки $x(n)$ для n поза інтервалом $[0, N-1]$, але ці відліки є просто повторенням значень $x(n)$ для n , узятих усередині цього інтервалу.

Увівши позначення для так названого обертового множника

$$W_N = e^{-j\Omega T} = e^{-j2\pi/NT},$$

можна записати пряме і зворотне ДПФ у такому вигляді

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{-kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \dots$$

Властивості дискретного перетворення Фур'є

Між дискретною функцією $x(n)$ і її спектральною характеристикою $X(k)$ існує однозначна відповідність. Для розв'язання практичних завдань необхідно знати зв'язок між змінами дискретної функції і відповідними змінами спектральної характеристики.

1. Лінійність

Якщо $y(n) = \sum_{r=1}^R \lambda_r x_r(n)$, то $Y(k) = \sum_{r=1}^R \lambda_r X_r(k)$, де $\lambda_1, \dots, \lambda_R$ – постійні коефіцієнти; $X_r(k) = \mathfrak{F}\{x_r(n)\}$, $r = 1, 2, \dots, R \dots$

2. Спектральна характеристика зміщеної дискретної функції

Якщо $X(k) = \mathfrak{F}_\delta\{x(n)\}$, то $\mathfrak{F}_\delta\{x(n-m)\} = e^{-j2\pi km/N} X(k) = W_N^{km}$.

3. Властивість симетрії

Якщо дискретна послідовність $x(n)$ є дійсною, то спектральна характеристика $X(k)$ задовольняє такі умови симетрії:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} X(k) &= \operatorname{Re} X(N-k), \\ \operatorname{Im} X(k) &= -\operatorname{Im} X(N-k), \\ |X(k)| &= |X(N-k)|, \\ \arg X(k) &= -\arg X(N-k). \end{aligned}$$

Спектральна характеристика симетричної послідовності $x(n)=x(N-n)$ є дійсною.

4. Кругова згортка

Нехай $X_1(k) = \mathfrak{F}_\delta\{x_1(n)\}$ і $X_2(k) = \mathfrak{F}_\delta\{x_2(n)\}$. Тоді якщо, $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$, то $y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$.

5. Спектральна характеристика добутку дискретних функцій

Нехай $X_1(k) = \mathfrak{F}_\delta\{x_1(n)\}$ і $X_2(k) = \mathfrak{F}_\delta\{x_2(n)\}$. Тоді якщо $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$, то $Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l)X_2(k-l)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

2.3.3 Теорема Котельникова

Відновлення сигналу за його відліками

У результаті перетворень дискретних послідовностей у системі цифрової обробки одержуємо дискретну послідовність. Виникає природне запитання – як за відомою дискретною послідовністю одержати безперервний сигнал?

Теорема, доведена В.А. Котельниковим в 1933 році, визначає умови точного відновлення миттєвих значень сигналу за його відліками, узятими через рівні проміжки часу.

Теорема.

Будь-яку функцію $x(t)$, що містить тільки гармонійні складові із частотами від 0 до ω_B , можна представити у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin \omega_e(t-nT)}{\omega_e(t-nT)}, \quad (2.52)$$

де $t=\pi/\omega_B$, і, навпаки, будь-яка функція, представлена рядом (2.52), містить тільки гармонійні складові із частотами від 0 до ω_B .

Формулу (2.52) можна розглядати як розкладання сигналу $x(t)$ по функціях

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin \omega_e(t-nT)}{\omega_e(t-nT)}, \quad (2.53)$$

причому як коефіцієнти ряду виступають значення сигналу $x(t)$ у дискретні моменти часу $t_n=n$, $n \in [-\infty, \infty]$. Функція $\varphi_n(t)$, називана відліковою функцією, відображає собою коливання з максимальним значенням при $t_n=n$ (на рис. 2.23, а представлений графік відлікової функції для $n=3$). В інші дискретні моменти часу функція дорівнює нулю. Легко перевірити, що відлікові функції ортогональні на інтервалі часу, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} \pi/\omega_e & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases}$$

У кожній точці $t=n$ тільки один член ряду, який стоїть в правій частині виразу (2.52), відмінний від нуля і цей член дорівнює $x(n)$. Отже, у точках $t=n$ справедливність формули (2.52) очевидна. У проміжках між зазначеними точками точне значення функції $x(t)$ забезпечується підсумовуванням нескінченного числа функцій виду (2.53).

Таким чином, функція $x(t)$ з обмеженим спектром, з одного боку, може повністю задаватись безліччю її миттєвих значень, узятих через рівні проміжки часу T . З іншого боку, якщо є числові значення функції $x(n)$ для

всіх n , то вона може бути повністю відновлена за формулою (2.52).

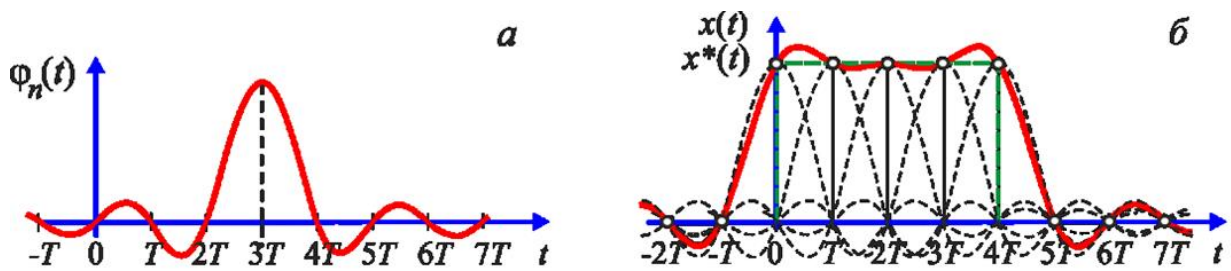


Рис. 2.23 – Подання сигналу у вигляді ряду Котельникова:
 а – відлікова функція; б – складові ряду

Бажаючи використати теорему Котельникова для відновлення безперервного сигналу за його відліками, необхідно враховувати наступне. Сигнали з обмеженим спектром, для яких справедлива теорема, нескінченні в часі. Реальні ж сигнали обмежені за часом інтервалом $[0, T_c]$ і, отже, мають необмежений за частотою спектр. Тому точно відновити сигнал не вдається. Для наближеного відновлення можна виділити інтервал частот $[0, \omega_B]$, у якому укладена основна частина енергії сигналу, а на частку складових спектра із частотою $\omega > \omega_B$ припадає мала частина енергії сигналу.

Сигнал, обмежений за часом, приблизно описується рядом (2.52), який складається зі скінченного числа членів:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^N x(nT) \frac{\sin \omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}. \quad (2.54)$$

На (рис. 2.23, б) показана апроксимація рядом (2.52) прямокутного імпульсу, представленого п'ятьма дискретними відліками.

При підсумовуванні членів ряду (2.54) сигнал $x(t)$ відтворюється точно тільки в точках відліків $t_n = n \cdot T$. У проміжках між відліками виникає помилка апроксимації, величина якої залежить від відкиданої частини спектра сигналу. Щоб зменшити помилку, інтервал дискретизації T рекомендують брати в 2...5 раз менші величини, від обумовленої за формулою (2.53). Ряд Котельникова для відновлення сигналів практично не використовується. Він має скоріше теоретичне значення, дозволяючи одержати корисні висновки. Для відновлення ж сигналів за дискретними відліками на практиці частіше використовуються інші методи, наприклад, методи лінійної і квадратичної інтерполяції.

Метод лінійної інтерполяції

При лінійній інтерполяції сусідні дискретні точки відновлюваної функції з'єднують прямолінійними відрізками. Припустимо, що при

відновленні сигналу необхідно відтворити із заданою точністю всі гармонійні складові до деякої верхньої частоти ω_B . Нехай обраний інтервал дискретизації $T = \pi/5\omega_B$, що в п'ять разів менший від встановлюваного теоремою Котельникова.

Як видно з (рис. 2.24), найбільша похибка відновлення буде визначена в районі екстремальної точки і при симетричному розташуванні відліків. Тоді найбільша наведена похибка відновлення синусоїдної складової із частотою ω_B може бути визначена як різниця між амплітудою A і одним із зазначених відліків:

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{A} = \frac{1}{A} \left[A - A \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_B T}{2} \right) \right] = 1 - \cos \frac{\omega_B T}{2}. \quad (2.55)$$

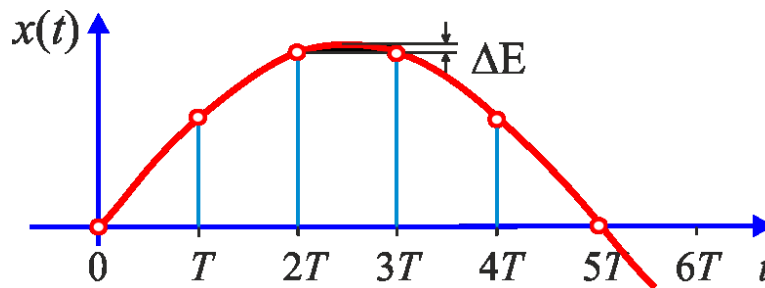


Рис. 2.24 – Помилка відновлення методом лінійної інтерполяції

Позначимо через N число відліків на одному періоді синусоїди із частотою ω_B . Тоді $\omega_B = 2\pi/NT$. Підставивши в (2.55), одержимо

$$\varepsilon = 1 - \cos(\pi/N).$$

Це співвідношення дозволяє визначити число відліків N , необхідних для забезпечення заданої похибки ε :

$$N = \frac{\pi}{\arccos 1 - \varepsilon}.$$

Наприклад, при заданій припустимій похибці $\varepsilon = 0,01$ для відновлення потрібно 22 відліки на один період синусоїди.

На практиці звичайно віддають перевагу методу лінійної інтерполяції, оскільки вона реалізується дуже просто технічно і дозволяє відновлювати сигнал у режимі реального часу. Відновлення ж за допомогою ряду Котельникова можливо тільки після одержання всіх точок відновлюваного сигналу.

2.3.4 Ефект розтікання спектра

В основі цифрового спектрального аналізу лежить апарат дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Однак при використанні ДПФ часто виникають труднощі, обумовлені скінченністю інтервалу обробки. Розтікання спектра – ефект поділу енергії сигналу між декількома спектральними складовими у випадку, якщо час аналізу не вміщає цілого числа періодів сигналу. Проаналізуємо ефекти, що виникають при обмеженні інтервалу аналізу.

Нехай є два синусоїдальних сигнали із частотами $f_0=200$ Гц і $f_1=210$ Гц. Зробимо дискретизацію даних сигналів із частотою $F_s=1000$ Гц і візьмемо дві вибірки $s_0(n)$ і $s_1(n)$, $n=0 \dots N-1$ по $N=50$ відліків:

$$\begin{aligned} s_0(n) &= \sin\left(2\pi \cdot \frac{f_0}{F_s} \cdot n\right), \quad n = 0 \dots N - 1 \\ s_1(n) &= \sin\left(2\pi \cdot \frac{f_1}{F_s} \cdot n\right), \quad n = 0 \dots N - 1 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Розрахуємо $N = 50$ -точкові ДПФ сигналів $s_0(n)$ і $s_1(n)$, і одержимо два комплексних спектри $S_0(k)$ і $S_1(k)$, $k = 0 \dots N - 1$. На (рис.2.25, а) показані дискретні сигнали $s_0(n)$ і $s_1(n)$, а на (рис. 2.25, б) їхні амплітудні спектри $|S_0(k)|$ і $|S_1(k)|$.

Зауваження. На (рис. 2.25, б), як і на всіх рисунках нижче, амплітудний спектр сигналу приводиться після перестановки спектральних відліків в інтервалі від $-\frac{F_s}{2}$ до $\frac{F_s}{2}$. Індокси $k = 0 \dots N - 1$ спектральних відліків перераховані в значення частоти $f(k)$, які наведені по осі абсцис (рис. 2.25, б).

На (рис. 2.25) можна бачити, що амплітудний спектр $|S_0(k)|$ містить тільки гармоніки на частотах $f_0 = \pm 200$ Гц, як і задавалося в сигналі $s_0(n)$. Однак амплітудний спектр $|S_1(k)|$ містить безліч гармонік, хоча для сигналу $s_1(n)$ також задавалося тільки одна частота $f_1 = 210$ Гц. При цьому помітимо, що значення амплітуд гармонік $|S_1(k)|$ нижче амплітуди $|S_0(k)|$. Таким чином, маємо ефект розтікання спектра (англ. spectralleakage) для сигналу $s_1(n)$, який наочно показаний на (рис.2.25).

Аналіз ефекту розтікання спектра в частотній області

При розгляді дискретного перетворення Фур'є відзначалося, що спектр дискретного сигналу $s(n)$, $n=0 \dots N-1$, це 2π -періодична функція нормованої циклічної частоти $\omega = \frac{\omega}{F_s}$, обумовлена через дискретно-часове перетворення Фур'є (ДЧПФ):

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot n) \quad (2.57)$$

При цьому ДПФ $S(k)$ вийдуть шляхом дискретизації ДЧПФ $S(\omega)$ на сітці частот $\omega_k = \frac{2\pi \cdot k}{N}$, $k = 0 \dots N - 1$. Відповідно, при розрахунку ДПФ одержуємо тільки значення дискретно-часового перетворення Фур'є (2.57) для дискретної сітки частот ω_k .

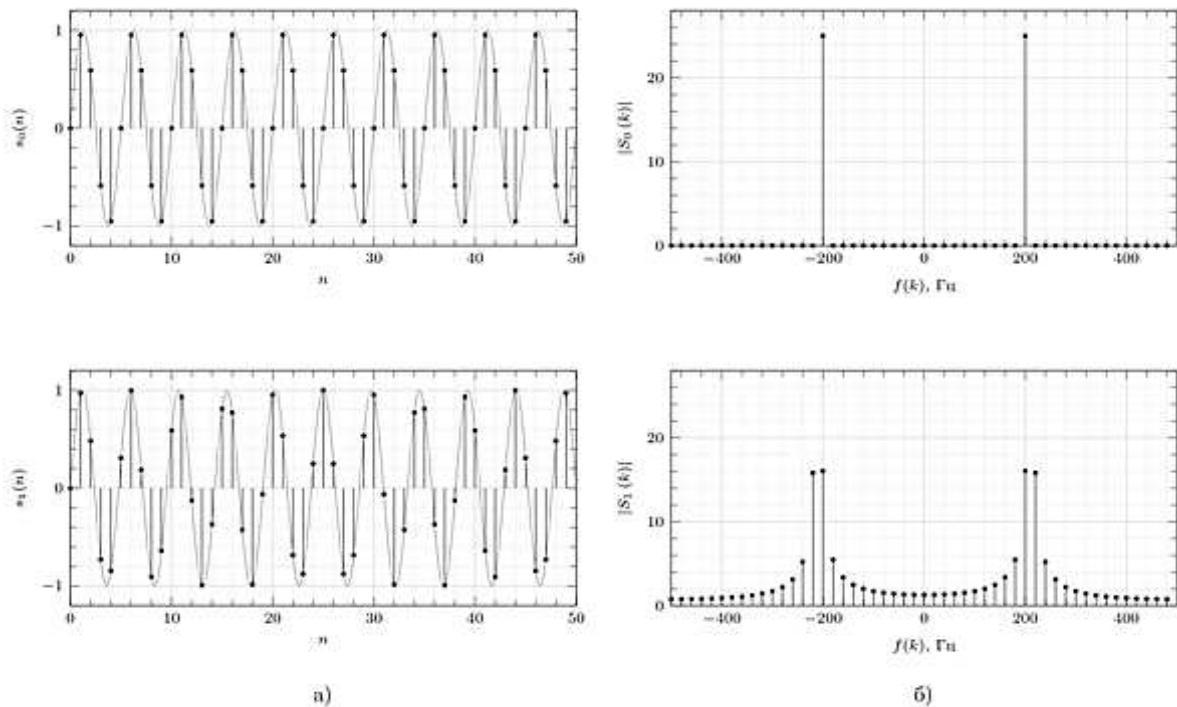


Рис. 2.25 – Ілюстрація ефекту розтікання спектра

Для того, щоб одержати більше докладну інформацію про ДЧПФ $S(\omega)$ необхідно дискретизувати $S(\omega)$ на більш частій сітці частот $\omega_k = \frac{2\pi \cdot k}{N \cdot P}$, $k = 0 \dots N \cdot P - 1$, де P – ціле число більше від одиниці. Наприклад, у вищенаведеному прикладі розраховували $N=50$ -точкові ДПФ, так для одержання апроксимації ДЧПФ повинні використати $N \cdot P=200$ точкові ДПФ ($P=4$). Але як порахувати 200-точкове ДПФ, якщо вибірка всього 50 відліків?

Для відповіді на це запитання треба згадати, що дискретизація ДЧПФ на сітці $\omega_k = \frac{2\pi \cdot k}{N}$, $k = 0 \dots N - 1$ відповідає періодичному сигналу, повтореному в часі нескінченну кількість разів з періодом N відліків. Для того щоб сітка дискретизації стала більш частою: $\omega_k = \frac{2\pi \cdot k}{N \cdot P}$, $k = 0 \dots N \cdot P - 1$, необхідно повторювати сигнал у часі з періодом $N \cdot P$ відліків. Таким чином, треба доповнити вихідний сигнал $s(n)$, $n=0 \dots N-1$ нулями до тривалості $N \cdot P$ відліків.

На (рис. 2.26 і 2.27) показані сигнали $z_0(n)$ і $z_1(n)$, $n=0 \dots N \cdot P$, які являють собою доповнені нулями до довжини $N \cdot P=200$ відліків сигналу $s_0(n)$ і $s_1(n)$, $n=0 \dots N$. Також на (рис. 2.26 і 2.27) показані амплітудні спектри ДПФ $Z_0(k)$ і $Z_1(k)$, на сітці $\omega_k = \frac{2\pi \cdot k}{N \cdot P}$, $k = 0 \dots N \cdot P - 1$, де $P=4$.

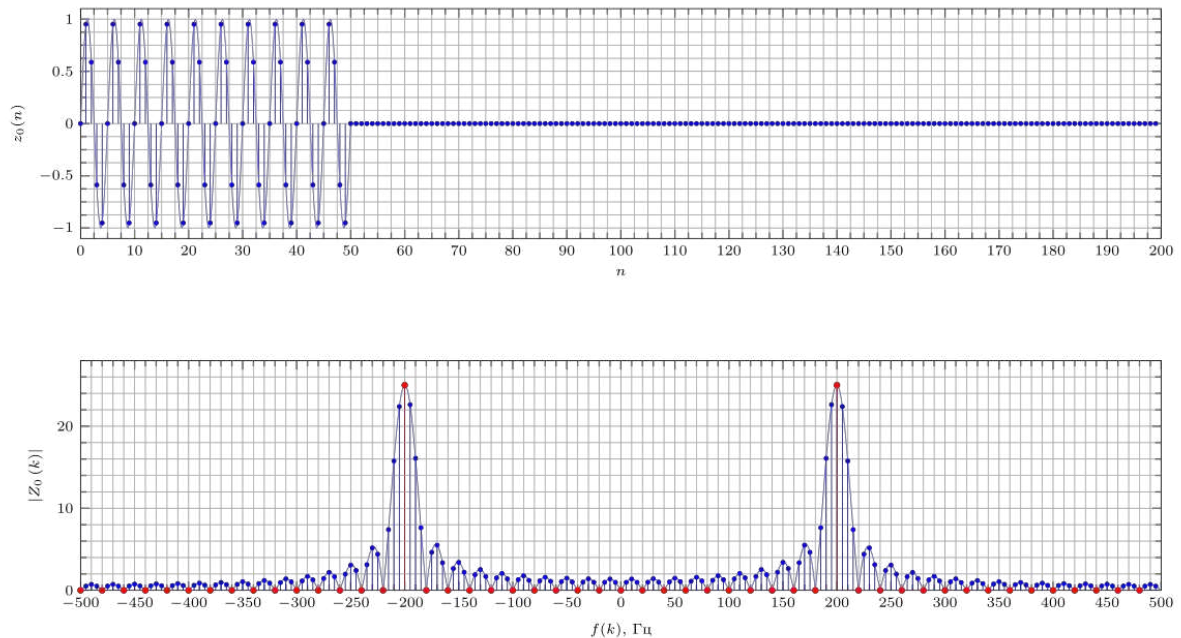


Рис. 2.26 – ДПФ сигналу $s_0(n)$, доповненого нулями до 200 відліків

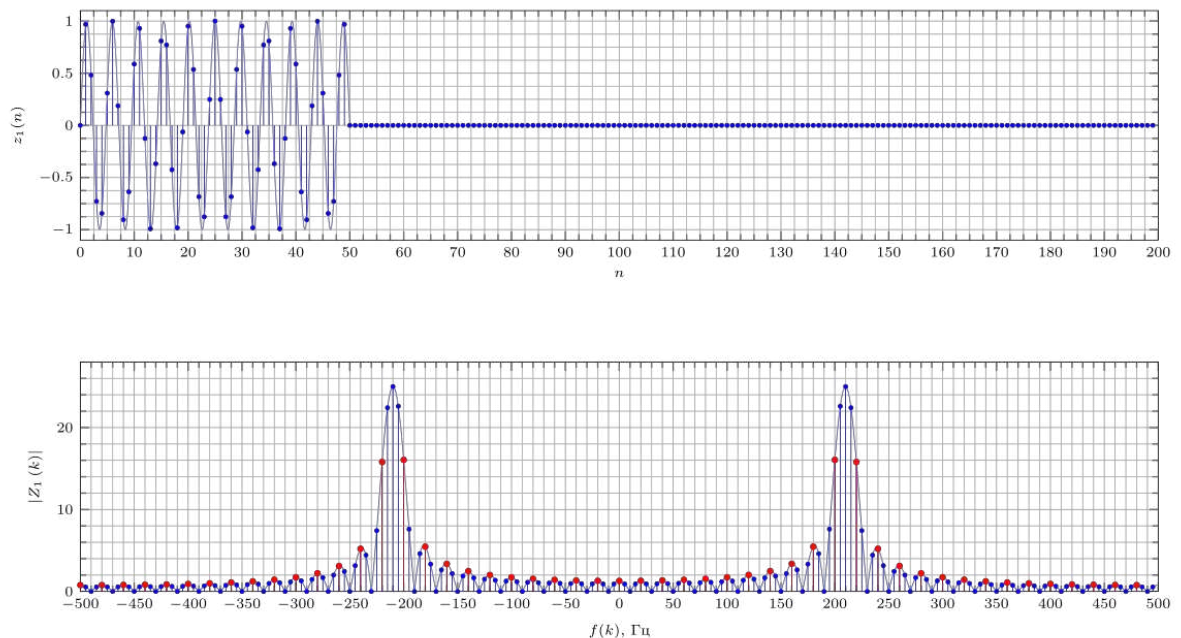


Рис. 2.27 – ДПФ сигналу $s_1(n)$, доповненого нулями до 200 відліків

Червоним відзначені значення ДПФ $S_0(k)$ і $S_1(k)$ розраховані без додавання нулів у вихідні сигнали, а безперервною лінією – амплітудні спектри ДПФ, на сітці $\omega_k = \frac{2\pi \cdot k}{N \cdot P}$, $k = 0 \dots N \cdot P - 1$, де $P=16$.

З (рис. 2.26 і 2.27) витікає, що ДЧПФ сигналів $s_0(n)$ і $s_1(n)$ мають схожу форму, але зсунуті по частоті. При цьому в ДПФ сигналу $s_0(n)$ не спостерігається розтікання спектра через те, що частота f_0 обрана так, що дискретизація ДЧПФ даного сигналу була зроблена в нулях ДЧПФ. Дискретизація ДЧПФ сигналу $s_1(n)$ вироблялася на бічних пелюстках через зсув частоти f_1 відносно f_0 .

Представимо сигнали $z_0(n)$ і $z_1(n)$ як добуток сигналів $s_0(n)$ і $s_1(n)$ згідно (2.56) при $n=0 \dots N \cdot P - 1$ і сигналу $\omega(n)$, $n=0 \dots N \cdot P - 1$, названого віконною функцією:

$$\begin{aligned} z_0(n) &= s_0(n) \cdot \omega(n), n = 0 \dots N \cdot P - 1; \\ z_1(n) &= s_1(n) \cdot \omega(n), n = 0 \dots N \cdot P - 1; \\ \omega(n) &= \begin{cases} 1 & \text{если } n < N; \\ 0 & \text{если } t \geq N, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.58)$$

як це показано на (рис. 2.28 і 2.29) для сигналів $z_0(n)$ і $z_1(n)$, $n=0 \dots N \cdot P - 1$, $N=50$, $P=4$ відповідно.

У відповідності із властивостями ДПФ, ДПФ сигналу $z_0(n)$ можна представити, як циклічну згортку ДПФ вихідного сигналу $S_0(k)$ і ДПФ віконної функції $W(k)$

$$\begin{aligned} Z_0(k) &= \frac{1}{N \cdot P} \cdot S_0 \circledast W(k), k = 0 \dots N \cdot P - 1; \\ Z_1(k) &= \frac{1}{N \cdot P} \cdot S_1 \circledast W(k), k = 0 \dots N \cdot P - 1 \dots \end{aligned} \quad (2.59)$$

Графічно ДПФ $Z_0(k)$ і $Z_1(k)$ сигналів $z_0(n)$ і $z_1(n)$ при $n, k=0 \dots N \cdot P - 1$, $N=50$, $P=4$ обмежених у часі віконною функцією $\omega(n)$, як результат циклічних згорток (2.59) наведені на (рис. 2.30 і 2.31).

З аналізу (рис. 2.30 і 2.31) можна зробити висновок, що розтікання спектра повторює за формою спектр віконної функції $W(k)$, перенесену на частоти переносних частот f_0 і f_1 .

Аналіз ефекту розтікання спектра в часовій області

Вище проаналізований ефект розтікання спектра в частотній області як результат дискретизації ДЧПФ $S(\omega)$ на фіксованій сітці частот $\omega_k = \frac{2\pi \cdot k}{N}$, $k = 0 \dots N - 1 \dots$ При цьому спостерігалось, що в деяких випадках

ефект розтікання не проявляється через дискретизацію ДЧПФ у частотних точках, що відповідають нульовим значенням ДЧПФ $S(\omega)$. Проаналізуємо це в часовій області.

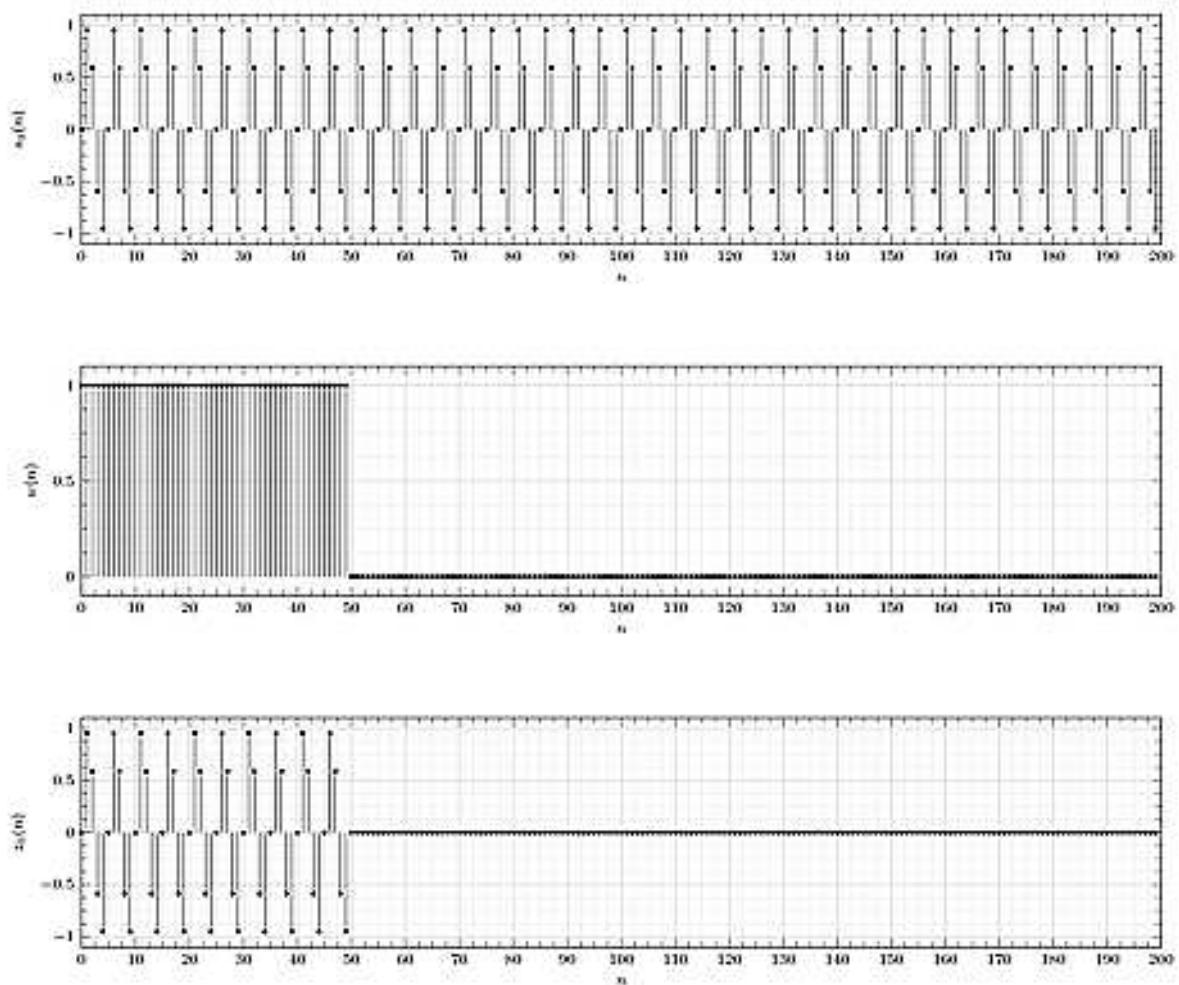


Рис. 2.28 – Сигнал $z_0(n)$ як добуток $s_0(n)$ і віконної функції $w(n)$

При розгляді дискретного перетворення Фур'є відзначалося, що дискретизація ДЧПФ $S(\omega)$ рівнозначна періодичному повторенню сигналів (2.56) у часі з періодом рівним довжині сигналу N . На (рис. 2.32) у центрі показані вихідні сигнали $s_0(n)$ і $s_1(n)$, а по краях їхні періодичні повторення з періодом $N=50$ відліків.

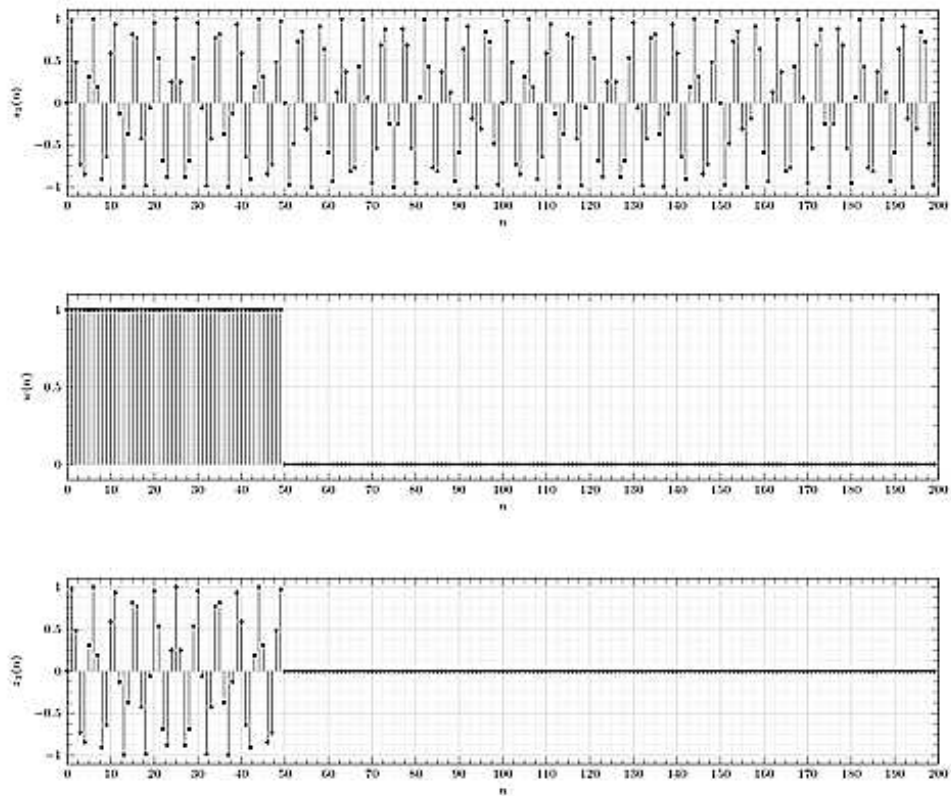


Рис. 2.29 – Сигнал $z_1(n)$ як добуток $s_1(n)$ і віконної функції $\omega(n)$

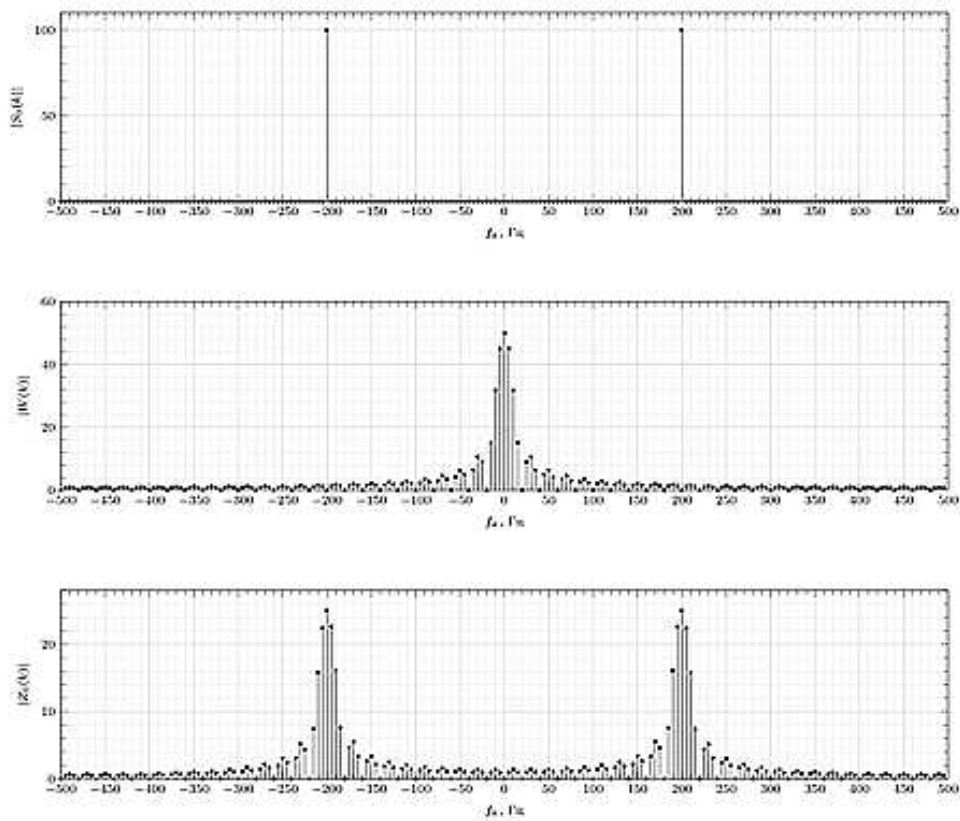


Рис. 2.30 – ДПФ $Z_0(k)$ обмеженого в часі сигналу $z_0(n)$

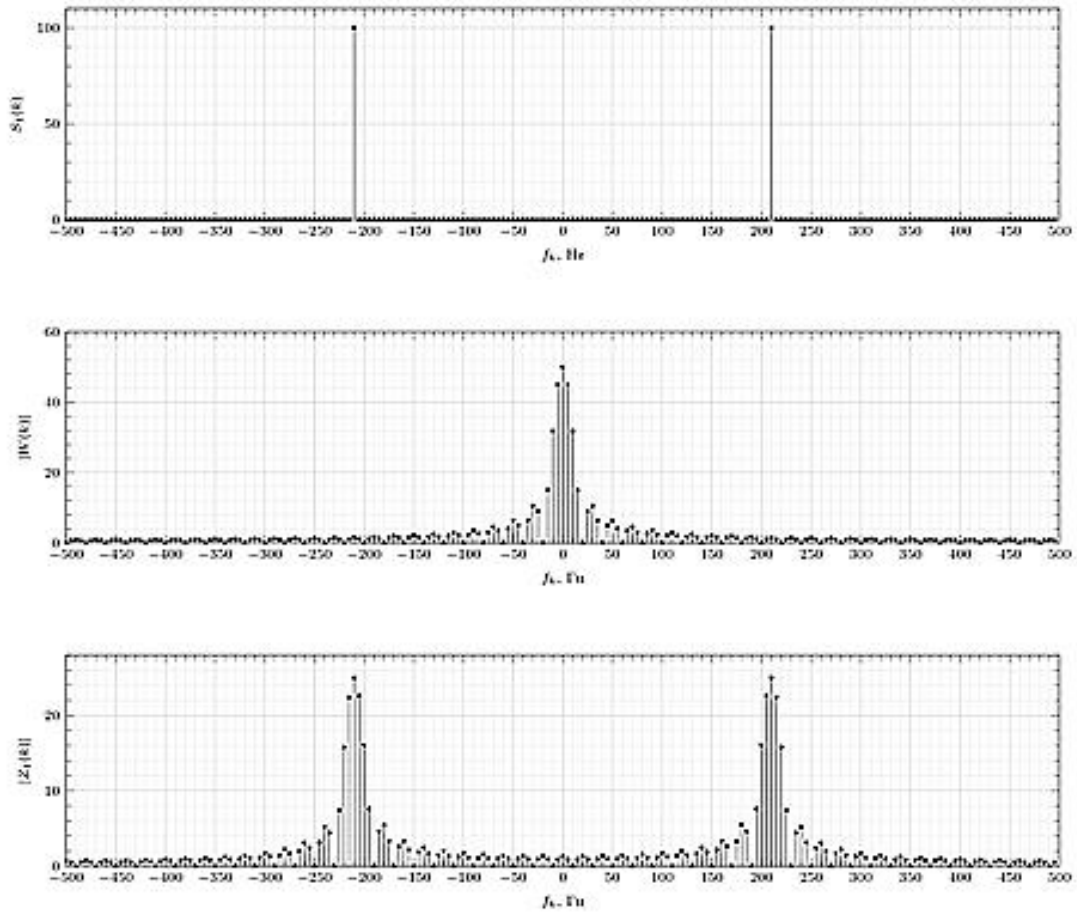


Рис. 2.31 – ДПФ $Z_1(k)$ обмеженого в часі сигналу $z_1(n)$

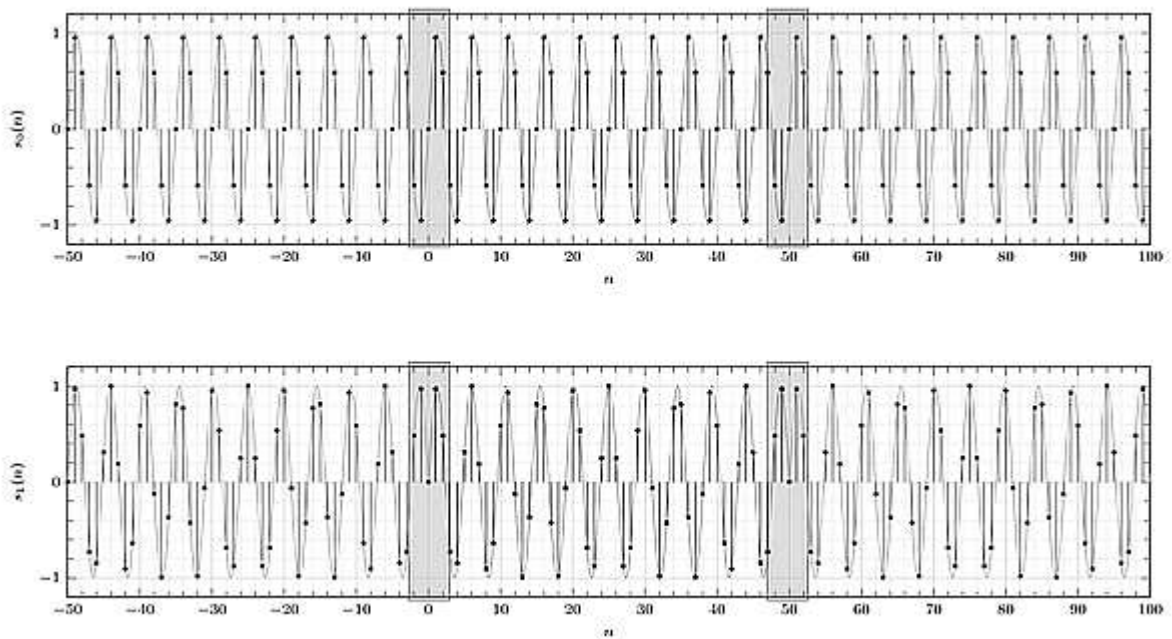


Рис. 2.32 – Періодичне повторення вибірок сигналів $s_0(n)$ і $s_1(n)$

З (рис. 2.32) можна помітити, що на одному періоді повторення $s_0(n)$ укладається ціле число періодів синусоїдного сигналу із частотою f_0 . У результаті сам сигнал і його повторення „стикуються у фазі” (відзначено заливанням) і являють собою єдиний синусоїдний сигнал нескінченної тривалості. Як результат – не спостерігається ефект розтікання спектра.

У випадку сигналу $s_1(n)$ на одному періоді повторення не укладається ціле число періодів синусоїдального сигналу із частотою f_1 . У результаті, при стикуванні ми можемо бачити перегони фази (відзначено заливанням), які розширюють спектр, що й видно на виході ДПФ.

Таким чином, ефект розтікання виникає, якщо на довжині вибірки сигналу не укладається ціле число періодів повторення сигналу. Очевидно, що забезпечити ціле число періодів сигналу на обмеженій вибірці можна лише в деяких окремих випадках. У загальному випадку для смугових сигналів це неможливо. При цьому встає питання: а наскільки шкідливе ефект розтікання?

Вплив ефекту розтікання спектра при цифровому спектральному аналізі

Розглянемо негативні ефекти, які виникають у результаті розтікання ДПФ.

Ефект 1. Спотворення амплітуди спектрального відліку. Гребінчасте спотворення спектра.

На (рис. 2.25) відбиті амплітудні спектри сигналів $s_0(n)$ і $s_1(n)$ на яких спостерігається зменшення максимального значення амплітудного спектра $S_1(k)$ сигналу $s_1(n)$. Далі показано, що значення амплітуд спектральних відліків залежать від співвідношення частоти сигналу і частотної сітки дискретизації ДЧПФ. Подальше моделювання показує, що максимальне значення спектра досягається при збігу частоти сигналу і частоти спектрального відліку ДПФ (біна ДПФ), а мінімальне при частоті сигналу посередині між спектральними відліками ДПФ. При цьому виникають гребінчасті спотворення. Останні вносять втрати при обробці сигналу, тому що максимальна амплітуда спектрального відліку може бути зменшена до 0,635 (-3,94 дБ за потужністю) від істинного значення. Однак сумарна потужність залишається постійною, тому що відсутня потужність розтікається по сусіднім спектральним відлікам.

Ефект 2. Зменшення динамічного діапазону спектрального аналізу.

Нехай є два вхідних сигнали $s_0(n)$ і $s_1(n)$, $n=0\dots N-1$ які містять $N=100$ відліків:

$$\begin{aligned} s_0 &= 10 \cdot \sin\left(2\pi \cdot n \cdot \frac{f_0}{F_s}\right) + 0.2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot n \cdot \frac{f_2}{F_s}\right), \\ s_1 &= 10 \cdot \sin\left(2\pi \cdot n \cdot \frac{f_1}{F_s}\right) + 0.2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot n \cdot \frac{f_2}{F_s}\right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

де $f_0=200$ Гц, і $f_1=205$ Гц, $f_2=300$ Гц та $F_s=1000$ Гц. Амплітуда гармонік із

частотою f_2 в 50 разів (-34 дБ за потужністю) нижче ніж амплітуди гармонік із частотами f_0 і f_1 . На (рис. 2.33) показані оцінки спектральної щільності потужності $|S_0(k)|^2$ і $|S_1(k)|^2$ у логарифмічному масштабі.

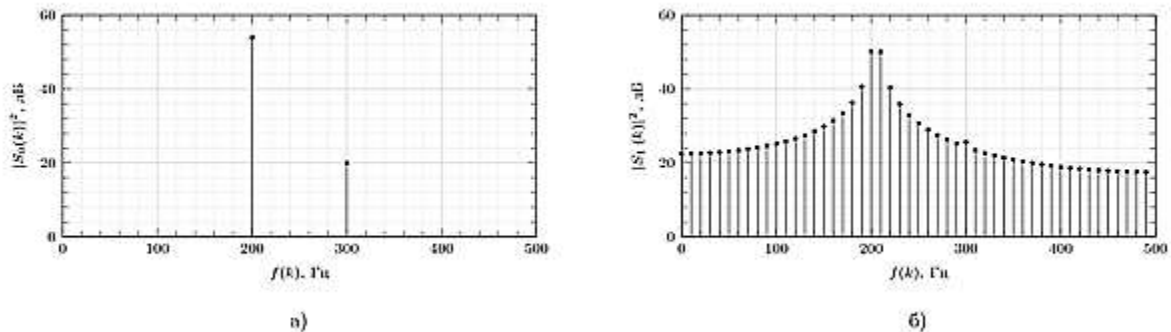


Рис. 2.33 – Зменшення динамічного діапазону спектрального аналізу

На (рис. 2.33, а) частоти гармонік f_0 і f_2 обрані таким чином, що ефект розтікання спектра не спостерігається. У результаті оцінки спектральної щільності потужності $|S_0(k)|^2$ спостерігається 2 гармоніки на частотах $f_0 = 200$ Гц і $f_2 = 300$ Гц. На (рис. 2.33, б) гармоніка із частотою $f_1=205$ Гц бічними пелюстками маскують гармоніку із частотою $f_2=300$ Гц. У такий спосіб динамічний діапазон спектрального аналізу скорочений до 34 дБ за рахунок ефекту розтікання спектра, що наочно ілюструє проблеми зменшення динамічного діапазону спектрального аналізу в умовах розтікання спектра.

Таким чином, кожен відлік ДПФ несе інформацію не про амплітуду сигналу відповідної частоти, але про потужності сигналу в деякій смузі в околиці частоти, що відповідає гармоніці ДПФ. При цьому розтікання спектра приводить до взаємного впливу спектральних відліків ДПФ один на одного, спотворюючи амплітуди гармонік і маскуючи сигнали під бічними пелюстками інших гармонік.

2.3.5 Двовимірний спектральний аналіз

Одновимірні сигнали описуються дійсними або комплексними функціями однієї змінної. У техніці зв'язку, телебаченні, антенній техніці та інших областях велике значення мають двовимірні сигнали, описувані функцією двох змінних $s(x, y)$. У найбільш простому випадку двовимірний сигнал – це нерухоме квадратне чорно-біле зображення. Тоді $s(x,y)$ – це яскравість у точці з координатами x, y .

Завдяки тому, що система передачі та приймач інформації (людина) мають скінченну роздільну здатність, то передане зображення можна

дискретизувати, тобто представити у вигляді сукупності точок (пікселів) різної яскравості, розташованих на перетинаннях ліній деякої рівномірної прямокутної сітки. У цьому випадку функція $s(x,y)$ описує дискретний двовимірний сигнал розмірності $N \times N$, що може бути представлений у вигляді квадратної матриці s_{xy} . Безліч усіляких картинок такого роду з однаковим числом точок розкладання становить простір розмірності N^2 .

Нехай цей простір буде лінійним зі середньоквадратичною метрикою, тоді будь-який двовимірний сигнал $s(x,y)$ можна представити у вигляді вектора у векторному просторі. Між двовимірними сигналами або їхніми зображувальними матрицями і векторами буде існувати взаємна однозначна відповідність.

Для опису двовимірних сигналів можна вибрати у векторному просторі довільну Декартову систему координат. У найпростішому випадку вона задається квадратною матрицею, елементами якої служать *двовимірні одиничні „імпульси”* (імпульси на площині):

$$u(k, l, x, y) = \begin{cases} 1, & k = x, l = y \\ 0, & k \neq x, l \neq y, \end{cases}$$

k, l – двовимірний номер функцій; x, y – двовимірна змінна і всі числа вибираються з натурального ряду від 0 до $N-1$.

Система таких координатних функцій розмірності 4×4 наведена на (рис. 2.34). Вона являє собою ортогональну симетричну матрицю.

Двовимірний одиничний імпульс можна представити у вигляді

$$u(k, l, x, y) = u_1(k, x)u_1(l, y),$$

де u_1 – звичайний одновимірний одиничний імпульс.

Це значить, що базисні функції $u(k, l, x, y)$ є *роздільними* (можуть бути представлені у вигляді добутку функцій) і *симетричними* (не змінюються, якщо поміняти місцями k, x , і l, y).

Розглянемо іншу роздільну і симетричну систему координат, побудовану на основі двовимірних взаємних кореляційних функцій (ВКФ),

$$f(k, l, x, y) = \text{Pal}(k, x) \text{Pal}(l, y).$$

Для випадку $N \times N = 4 \times 4$ і $m=2$ (функції Уолша) ця система показана у вигляді матриці на (рис. 2.35).

Елементами цієї матриці є *просторові гармоніки* – квадратні матриці того ж розміру. Енергію таких двовимірних ВКФ можна обчислити в базисі двовимірних одиничних імпульсів:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} |\text{Pal}(k, x)\text{Pal}(l, y)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\text{Pal}(k, x)|^2 \sum_{l=0}^{N-1} |\text{Pal}(l, y)|^2 = N^2.$$

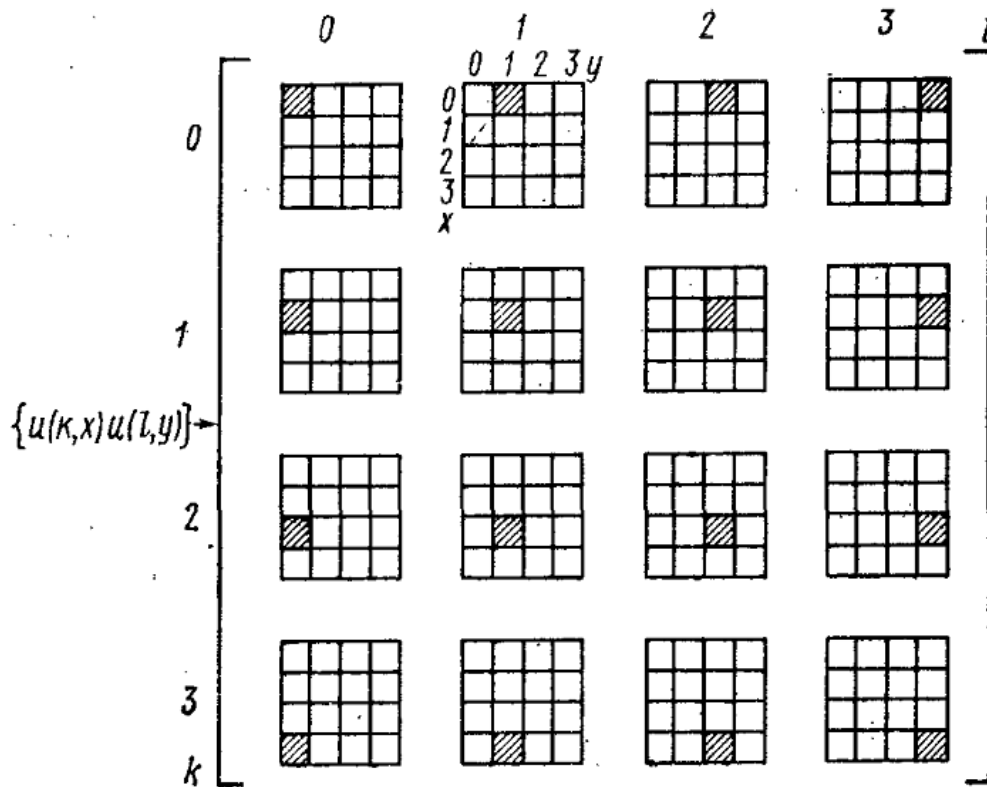


Рис. 2.34 – Матриця двовимірних одиничних „імпульсів”
(чорне поле позначає +1, біле – 0)

Неважно переконатися, що двовимірні ВКФ ортогональні. Для цього розглянемо скалярний добуток:

$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \text{Pal}(k, x)\text{Pal}(l, y) \overline{\text{Pal}(q, x)\text{Pal}(n, y)} = \sum_{x=0}^{N-1} \text{Pal}\left(k \ominus_m q, x\right) \sum_{y=0}^{N-1} \text{Pal}\left(l \ominus_m n, y\right) = \begin{cases} 0, & k \neq q, l \neq n, \\ N^2, & k = q, l = n. \end{cases}$$

Отже, система двовимірних базисних функцій зображується унітарною симетричною матрицею.

До будь-якого двовимірного дискретного сигналу скінченної розмірності застосовні дискретні перетворення Фур'є, які можуть бути записані у вигляді

$$s(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} S(k, l)\text{Pal}(k, x)\text{Pal}(l, y),$$

$$S(k, l) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} s(x, y)\overline{\text{Pal}(k, x)\text{Pal}(l, y)}.$$

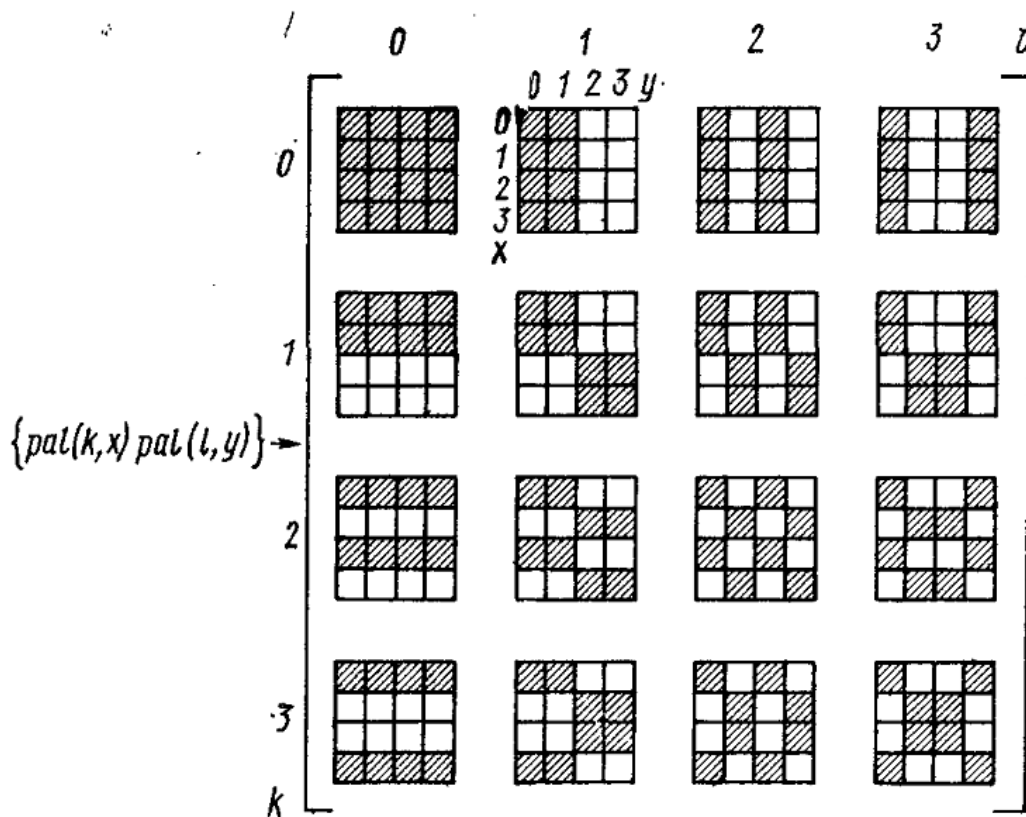


Рис. 2.35 – Матриця двовимірних функцій Уолша
(чорне поле позначає +1, біле – 0)

Тут $S(k, l)$ – просторовий спектр двовимірного сигналу, що визначає комплексні амплітуди просторових гармонік.

У випадку спектрального аналізу зображень $S(k, l)$ – це такі вагові коефіцієнти, які треба приписати елементам (картинкам), з яких складається базисна матриця (див., наприклад, рис. 2.34), щоб після підсумовування цих елементів утворилося вихідне зображення.

Якщо дорівняти енергію двовимірного сигналу, обчислену в базисі одиничних імпульсів і у базисі двовимірних ВКФ, то одержимо рівність Парсеваля у вигляді

$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} |s(x, y)|^2 = \frac{1}{N^2}.$$

У матричній формі двовимірні перетворення Фур'є з урахуванням, того, що матриця ВКФ-Пелі є симетричною, записуються у вигляді виразів

$$S_{xy} = PS_{kl}P, S_{kl} = (1/N^2)\bar{P}S_{xy}\bar{P}.$$

Звідси видно особлива перевага базису ВКФ для обробки

двовимірних сигналів у спектральній області – він дозволяє застосувати для прямого й зворотного перетворень той самий алгоритм.

Обчислення просторового спектра, таким чином, можна вести у два етапи. Спочатку двовимірний сигнал можна розкласти по рядках і знайти проміжну функцію

$$z(k, y) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} s(x, y) \overline{\text{Pal}}(k, x),$$

а потім розкласти цю функцію по стовпцях

$$S(k, l) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} z(k, y) \overline{\text{Pal}}(l, y).$$

Можна застосувати, звичайно, і зворотний порядок обчислень. Симетрія перетворень Фур'є щодо рядків і стовпців двовимірного сигналу, що розкладає, гарантує те, що кореляційні зв'язки між точками сигналу в різних напрямках будуть однаково враховані при обробці сигналу в спектральній області.

Для двовимірного спектрального аналізу можуть бути відповідним чином інтерпретовані і основні теореми одномірного аналізу.

Питання для самоконтролю

1. Які існують форми подання ряду Фур'є?
2. Що являють собою гармоніки?
3. Які графічні форми подання спектрів Ви знаєте?
4. Назвіть види найпростіших періодичних даних.
5. Назвіть види найпростіших неперіодичних даних.
6. У чому сутність явища Гіббса?
7. Назвіть основні відмінності в розподілі потужності в спектрах періодичних і неперіодичних даних.
8. Назвіть основні властивості перетворення Фур'є.
9. У чому полягають відмінності між дискретними і цифровими послідовностями?
10. Яким чином описуються дискретні послідовності?
11. У чому сутність дискретного перетворення Фур'є?
12. Що відбиває теорема Котельникова?
13. Які ефекти виникають при обробці дискретних послідовностей?
14. У чому полягає особливість двовимірного спектрального аналізу?

3 ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ

3.1 Часові ряди

3.1.1 Часові ряди та вимоги, які ставляться до них

У поточний час для вивчення властивостей інтелектуальних систем моніторингу, у тому числі й при експериментальних дослідженнях, широко використовується підхід, оснований на аналізі сигналів, зроблених системою. Це дуже актуально в тих випадках, коли математично описати досліджуваний процес практично неможливо, але в розпорядженні є деяка характерна спостережувана величина. Тому аналіз інтелектуальних систем моніторингу часто реалізується за допомогою обробки реєстрованих сигналів. *Часовий ряд* – це послідовність реєстрованого сигналу, розташована в хронологічній послідовності, обмірювана в певні моменти часу (рис. 3.1). Такий ряд, ще його називають рядом динаміки, будується в тому випадку, коли неможливо описати динамічний процес рівнянням [4]. Окремі спостереження x_i , $i=1, 2, \dots, N$ (де N – число спостережень) називаються *рівнями ряду*, індекс i указує на момент часу, у який виконувалось спостереження. Отже на відміну від просторових даних, значення x_i розглядаються як реалізація деякого випадкового процесу (випадковим процесом у загальному випадку називається функція, значення якої при кожному значенні i є випадковими величинами). Рівні часового ряду, як правило, не є статистично незалежними і однаково розподіленими випадковими величинами, тобто для них не виконані основні припущення класичної моделі регресійного аналізу. На (рис. 3.1) наведено приклад часового ряду, який відбиває річний хід температури поверхні океану.

Прогнозування поведінки, наприклад, метеорологічних величин, має сенс тільки в рамках імовірнісних категорій. Інакше кажучи, для очікуваних подій можуть бути зазначені лише ймовірності їхнього настання, а щодо значень тих або інших величин доводиться обмежуватися законами їхнього розподілу або інших імовірнісних характеристик. На практиці при аналізі часових рядів їм приписують властивість *ергодичності* засновану на припущенні про те, що єдина реалізація випадкової функції достатньої тривалості є достатнім дослідним матеріалом для одержання її статистичних характеристик.

При обробці часових рядів до вихідних даних пред'являється ряд вимог: однорідність даних, порівнянність і повнота даних, припущення про тип їхнього розподілу і т.д. Деякі методи аналізу і прогнозування

висувають тверді вимоги до довжини ряду, тому іноді замість річних даних бажано брати поквартальні або помісячні. Але, безумовно, питання про вибір інтервалу часу між рівнями ряду повинен вирішуватися, виходячи із цілей кожного конкретного дослідження. Так, наприклад, для успішного вивчення сезонних коливань на базі місячних і кварталних даних бажано мати інформацію не менше ніж за 3 роки. При використанні методів регресійного аналізу варто брати часові ряди, довжина яких в 5...6 разів перевищує кількість незалежних змінних.

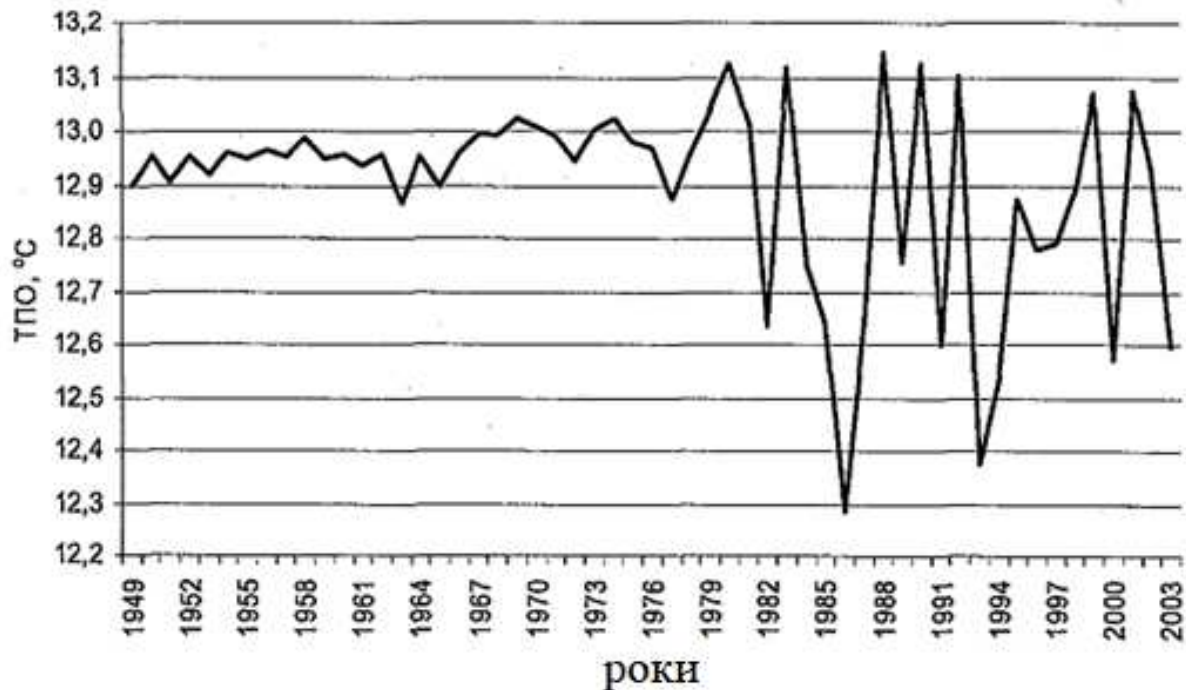


Рис. 3.1 – Часовий ряд, що відбиває річний хід температури поверхні океану

Для аналізу динаміки явища або процесу необхідно, щоб інформація була повна, тобто часові ряди не повинні мати пропущених значень, які можуть розумітися як недоліком при зборі інформації, так і змінами, що відбулися, у системі звітності.

Рівні часових рядів можуть містити аномальні значення („викиди”), поява яких часто буває викликано помилками реєстрації інформації. Виявлення таких значень, заміна їх істинними або розрахунковими є необхідними етапами первинної обробки даних. Однак якщо аномальні значення відбивають реальний розвиток процесу, то при побудові моделей вони замінюються розрахунковими, що й ураховується при обчисленні можливих величин відхилень фактичних даних від отриманих.

3.1.2 Вибіркові статистичні характеристики часового ряду

Важливими характеристиками випадкового процесу є математичне очікування та дисперсія. Математичним очікуванням процесу $X(t)$ є невідповідна функція m_x , значення якої для моменту часу t дорівнює математичному очікуванню множині *рівнів ряду*.

Середнє значення для стаціонарного часового ряду визначається як математичне очікування, яке, у цьому випадку, не залежить від моменту спостереження. В якості оцінки середнього використовують звичайно вибіркоче середнє значень ряду – суму значень ряду, ділену на їхнє загальне число. При припущеннях ергодичності ця оцінка заможна.

Середнє арифметичне значення часового ряду $X_{сер}$ характеризує центр ваги досліджуваної характеристики або точку її рівноваги при різних коливаннях і розраховується по формулі:

$$X_{сер} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (3.1)$$

де N – довжина часового ряду (кількість значень у ньому). Математичним очікуванням процесу $X(t)$ є невідповідна функція $m_x(t)$.

Медіаною (Me) називається значення ознаки, що доводиться на середину ранжируваного (упорядкованого за зростанням) ряду. Головна властивість медіани полягає в тому, що сума абсолютних відхилень членів ряду від медіани є величина найменша:

$$\sum_{i=1}^N |x_i - Me| = \min. \quad (3.2)$$

Елементи вихідного ряду розташовуються в порядку зростання, тобто з вихідного ряду x_1, x_2, \dots, x_n утвориться ранжируваний (варіаційний) ряд.

Визначається медіана ранжируваного ряду:

$$med = \begin{cases} x_{p+1}, & \text{якщо ширина вікна } n = 2p + 1 \\ \frac{x_p + x_{p+1}}{2}, & \text{якщо ширина вікна } n = 2p \end{cases}$$

Дисперсія (D) характеризує середнє розсіювання значень ряду від середнього арифметичного значення. Розраховується за формулою відповідно:

$$D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - X_{сер})^2, \quad (3.3)$$

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання можливих значень рівнів ряду щодо математичного очікування.

Вибірковою дисперсією називають середнє арифметичне відхилення квадратів значень часового ряду від їхнього середнього значення для даної вибірки.

Стандартне відхилення σ (або вибіркове середньоквадратичне відхилення) – корінь квадратний зі значення вибіркової дисперсії $\sigma = \sqrt{D}$.

Приклад. Розрахунок вибіркової дисперсії для часового ряду значень температури повітря.

	x	\bar{x}	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	D
	12,5	19,6	-7,1	50,4	167,4/6 = 33,5
	12,7		-6,9	47,6	
	22,2		0,4	0,2	
	24,5		2,6	6,8	
	25,8		4,9	24,0	
	20,0		6,2	38,4	
Σ	117,7		0	167,4	

Математичне очікування та дисперсія є характеристиками випадкової функції як деякої випадкової величини і відбивають лише зовнішні властивості випадкового процесу. Однак вони зовсім не містять ніякої інформації про тісноту зв'язку між окремими *рівнями ряду* випадкової функції і, отже, не дають уяви про її внутрішню структуру.

Для опису внутрішньої структури випадкового процесу використовується автокореляційна функція, яка являє собою не випадкову функцію $R_x(t_1, t_2)$ двох незалежних фіксованих аргументів t_1 і t_2 , рівну кореляційному моменту перетинів цих аргументів:

$$R_x(t_1, t_2) = M\{[X(t_1 - mx)] \cdot [X(t_2 - mx)]\}.$$

При рівності аргументів $t_1=t_2=t$, автокореляційна функція обертається в дисперсію випадкової функції:

$$R_x(t_1, t_1) = M\{[X(t_1 - mx)]^2\} = Dx.$$

У випадку дискретного значення часового ряду, замість щільності розподілу ймовірності маємо справу з імовірностями конкретних значень. *Гістограмою* називається графік, який апроксимує за випадковими дискретними даними часового ряду щільність їхнього розподілу, тобто частоту появи дискретних даних, які попадають в область значень амплітуди. При побудові гістограми область значень випадкової величини

(a,b) розбивається на деяку кількість k інтервалів мінливості змінної в досліджуваному часовому ряді за рівнем амплітуди x_k , а потім підраховується відсоток влучення даних у кожен інтервал. Імовірність появи значення амплітуди досліджуваного часового ряду в кожному інтервалі дорівнює p_k

$$p_k = \frac{n_k}{N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1.$$

де N – загальне число дискретних значень часового ряду у випадковій реалізації, n_k – число значень дані амплітуди x_k , а L – максимально припустиме число сегментів амплітуди.

Залежність імовірності появи значення (частота влучення в інтервал сегмента) визначає емпіричний розподіл імовірностей випадкової величини x_k , графічне подання якої називається гістограмою (рис. 3.2).

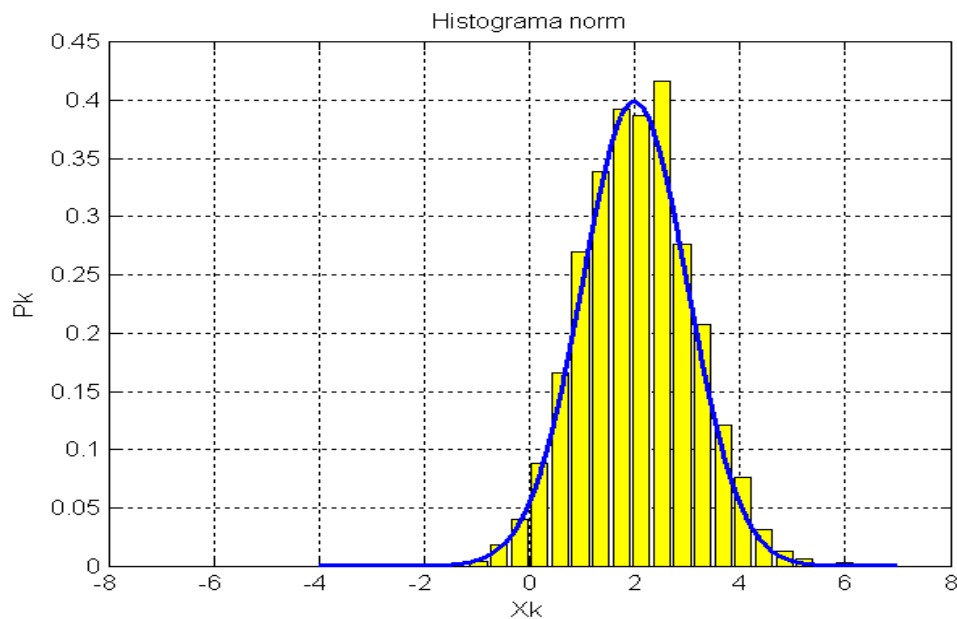


Рис. 3.2 – Приклад гістограми нормального закону розподілу випадкового дискретного процесу для $X_{сер}=2, D=1$.

Для побудови гістограми по осі абсцис відкладають інтервали рівної довжини, на які розбивається весь діапазон можливих значень випадкової величини $x(t)$, а по осі ординат відкладають частоти p_k . Тоді висота кожного стовпчика гістограми дорівнює відповідній частоті. Таким чином, виходить наближене подання закону розподілу ймовірностей для випадкової величини $x(t) \approx x_k$, у вигляді східчастої функції, апроксимація (вирівнювання) якої приводить до кривої щільності, що є *розподілом імовірності* $p(x) \approx p_k$.

Часовий ряд *стаціонарний*, якщо механізм, який його породжує, не міняється при зсуві в часі, а відповідний випадковий процес досяг статистичної рівноваги. Формально стаціонарний часовий ряд визначається як такий випадковий процес, для якого математичне очікування, дисперсія і коваріації між окремими членами ряду випадково варіюють навколо постійного рівня, який не залежить від часу (так називана „стаціонарність” у широкому сенсі, що тільки і розглядається для часових рядів), а його автокореляційна функція є тільки функцією інтервалу часу $\tau = t_2 - t_1$ і не залежить від значення кожного аргументу t_1 і t_2 окремо:

$$X_{cp} = const, D = const, R_x(t_1, t_1) = R_x(\tau).$$

Найпростішим прикладом стаціонарного часового ряду є „білий шум” – випадковий процес, значення якого в різні моменти часу незалежні і однаково розподілені.

У центрі уваги досліджень часових рядів перебувають звичайно загальні закономірності, сховані в емпіричних даних, які відбивають внутрішню структуру явища. *Трендом* (або *тенденцією*) називають невідповідно повільно мінливу складову часового ряду, на яку можуть накладатися випадкові коливання або сезонні ефекти. Це не цілком суворе поняття використовує безліч моделей і методів аналізу динаміки, в основі яких лежить розкладання часового ряду на декілька компонент, одна із яких є в певному сенсі досить гладкою, відбиваючою глобальну спрямованість процесу, а інші компоненти характеризують вплив випадкових факторів. Більшість рядів динаміки метеорологічних показників мають тенденцію середнього рівня, тобто вони, власне кажучи, нестаціонарні. Однак такі ряди можна легко перетворити в центровані стаціонарні ряди шляхом урахування функції тренда (*елімінавання тренда*).

У багатьох рядах динаміки екологічних і метеорологічних систем можна спостерігати сезонні коливання під впливом зовнішніх факторів, які діють циклічно із заздалегідь відомою періодичністю. Типовими прикладами сезонності є ефекти, пов'язані з астрономічними або календарними причинами. Так, у ряді щомісячних даних природно очікувати наявності сезонних ефектів з періодом 12, у кварталних рядах – з періодом 4 години. У свою чергу, в інформації, яку збирають з інтервалом в 1 годину, цілком можуть виникнути добові ефекти з періодом 24 години. Деякі дослідники виявляють багаторічні цикли в компонентах біосфери різної регулярної періодичності (50, 18, 9 років та ін.) і зв'язують їх із сонячною активністю. Існують й інші квазіперіодичні залежності значення випадкової функції від передісторії (часового лага або зсуву), які

дозволяють обчислити ймовірність того, що деяке майбутнє значення буде лежати в певному інтервалі.

3.1.3 Компонентний склад часових рядів

У завданнях обробки будь-якого сигналу виділяють етапи попередньої (первинної) і вторинної обробки сигналів. Це пов'язане з тим, що в загальному випадку на вході системи спостерігається суміш корисного сигналу і деякого шуму. Для підвищення ймовірності правильного прийому сигналу повинна бути зроблена попередня обробка прийнятого сигналу. Крім того, попередній аналіз дає можливість визначати і використати дані закономірності для оцінювання характеристик процесу в майбутньому (прогнозування) при рішенні завдань ідентифікації моделей процесів.

Вибір стратегії та методів попередньої обробки і аналізу часових рядів, безумовно, залежить від кінцевої мети дослідника. Процедура попередньої обробки сигналу в основному містить у собі перевірку наявності тренда в часовому ряді, виявлення аномальних спостережень, згладжування часових рядів. Головним завданням при цьому є одержання повних, однорідних, коректних даних. Однак, як правило, першим етапом є оцінка тренда часового ряду.

Часовий ряд (ряд динаміки) можна поділити на три компоненти:

$$Y(t) = f(t) + g(t) + \zeta(t), \quad (3.4)$$

де $f(t)$ – плавно мінлива компонента, зумовлена довгостроковою тенденцією (трендом) зміни ряду ознак, може бути детермінованою компонентою, що представляє собою деяку аналітичну функцію, яка виражає тенденцію в ряді; $g(t)$ – періодична, сезонна або квазіперіодичні компонента, що відбиває повторюваність процесів на певних проміжках часу; $\zeta(t)$ – випадкова компонента, що містить вплив інших факторів, механізм яких (впливу) схований від спостерігача (типу „білий шум”).

Трендова компонента часових рядів звичайно невідома точно, а, як і ряд у цілому, є випадковою величиною, але її зміна з деяких апріорних суджень часто може бути якісно описана аналітично. Однак часто неможливо вказати підходящу параметричну криву для апроксимації ряду на всій його довжині. Для виділення тренду в цьому випадку використовують різні непараметричні методи аналізу часових рядів, такі як згладжування ковзними середніми або ковзними медіанами, частотну фільтрацію і т.п. На відміну від параметричних методів виділення тренда, ці методи придатні лише для осереднення значень ряду по точках деякої околиці й не можуть бути використані для прогнозування (екстраполяції)

динамічних рядів, оскільки не дають у явному вигляді розрахункового рівняння детермінованої компоненти $f(t)$. Однак одержання досить гладкої траєкторії дає можливість візуально оцінити наявність тенденції в умовах сильної зашумленості, а також виділити ряд залишків $y(t)=x(t)-f(t)$, як випадкової компоненти часової послідовності, якщо кінцевою метою дослідження є побудова моделей авторегресії для прогнозування.

3.1.4 Попередня обробка часового ряду

Попередня обробка часових рядів (*непараметричні методи аналізу*) складається у виявленні аномальних значень ряду і згладжуванні ряду. Аномальні значення часового ряду не відповідають потенціалу досліджуваної метеорологічної моніторингової системи, і їхнє використання для побудови трендової моделі може сильно спотворити одержувані результати. Причинами появи аномальних рівнів можуть бути технічні помилки при зборі, обробці та передачі інформації. Такі помилки називаються помилками першого роду, їх можна виявити і усунути або вжити заходів до їхнього недопущення. Крім того, аномальні рівні можуть виникати через вплив факторів, які мають об'єктивний характер, але діють епізодично. Такі помилки називаються помилками другого роду, їх неможливо усунути, але можна виключити з розгляду, замінивши аномальне значення на середньоарифметичне двох сусідніх рівнів.

Для виявлення аномальних значень ряду використовується *критерій Ірвина*, відповідно до якого аномальною вважається точка Y_t , яка відстоїть від попередньої точки $Y_{(t-1)}$ на величину, більшу середньоквадратичного відхилення

$$\lambda_t = \frac{|Y_t - Y_{t-1}|}{\sigma}, \quad (3.5)$$

де λ_t – критерій Ірвина, σ – середньоквадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})^2}{N-1}}. \quad (3.6)$$

Точка вважається аномальною, якщо $\lambda_t > \lambda_{\text{таб}}$. Табличні значення $\lambda_{\text{таб}}$ зменшуються з ростом довжини ряду, їхні значення наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Значення критерію Ірвина

N	10	20	30	50	100
$\lambda_{\text{таб}}$	1.5	1.3	1.2	1.1	1.0

3.2 Методи виділення загальної тенденції часового ряду

Після того як встановлено (графічно або із застосуванням критеріїв), що часовий ряд містить тенденцію розвитку, необхідно визначити поведінку довгострокової складової. Для цього застосовуються наступні методи, які умовно діляться на дві групи:

- 1) методи механічного вирівнювання (згладжування), засновані на тому, що фактичні рівні ряду замінюються розрахунковими, які мають меншу коливальність, ніж вихідні дані, або випадковим процесом типу білого шуму. У ряді випадків згладжування ряду розглядається як засіб, який допомагає визначити, як виглядає тенденція розвитку;
- 2) методи аналітичного вирівнювання, засновані на тому, що приблизно відомий вид тренду в адитивному розкладанні (3.4). Графічне зображення в багатьох випадках дозволяє приблизно виявити тип тенденції часового ряду (рис. 3.1), лінійний тренд добре підходить для відбиття тенденції динаміки і описується лінійною функцією часу t , тобто $F_t = a_0 + a_1 t$, де a_0, a_1 – невідомі параметри, які потрібно визначити (оцінити).

3.2.1 Метод ковзного середнього

Метод ковзного середнього базується на припущенні, яке вважається тривіальним: при визначенні середніх значень випадкові відхилення погашаються. При згладжуванні цим методом фактичні значення ряду динаміки замінюються середніми значеннями, які характеризують серединну точку періоду ковзання. Просте згладжування ґрунтується на складанні нового ряду із простих середніх арифметичних, обчислених для проміжків часу довжиною $2p+1$. Математично даний метод (Simple Moving Average – *SMA*) можна описати наступним виразом:

$$\tilde{Y}_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} Y_i}{2p+1}; \quad p < t < N - p \quad (3.7)$$

де Y_i – вихідний часовий ряд; \tilde{Y}_t – згладжений часовий ряд; p – кількість спостережень, які стоять по різні сторони від згладжуваного елемента.

$(2p + 1)$ – число спостережень, по якому розраховується ковзне середнє, котре так само можна назвати „шириною вікна”. Ця величина при згладжуванні визначається самим дослідником. Чим більше p , тим більше згладженим буде ряд, що може привести до елімінування не тільки „шумів”, але й важливих елементів вихідного ряду.

Звичайно при згладжуванні використовується непарне число

спостережень для того, щоб одержати симетрію: у ковзному середньому порядку $(2p + 1)$ використовується p спостережень із початку і p спостережень із кінця вікна. У результаті цього згладжений ряд виявляється коротше вихідного ряду на $2p$ спостереження.

На (рис. 3.3) показаний згенерований ряд даних і просте ковзне середнє третього порядку, побудоване по ньому:

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_{i-1} + Y_i + Y_{i+1}}{3} \quad (3.8)$$

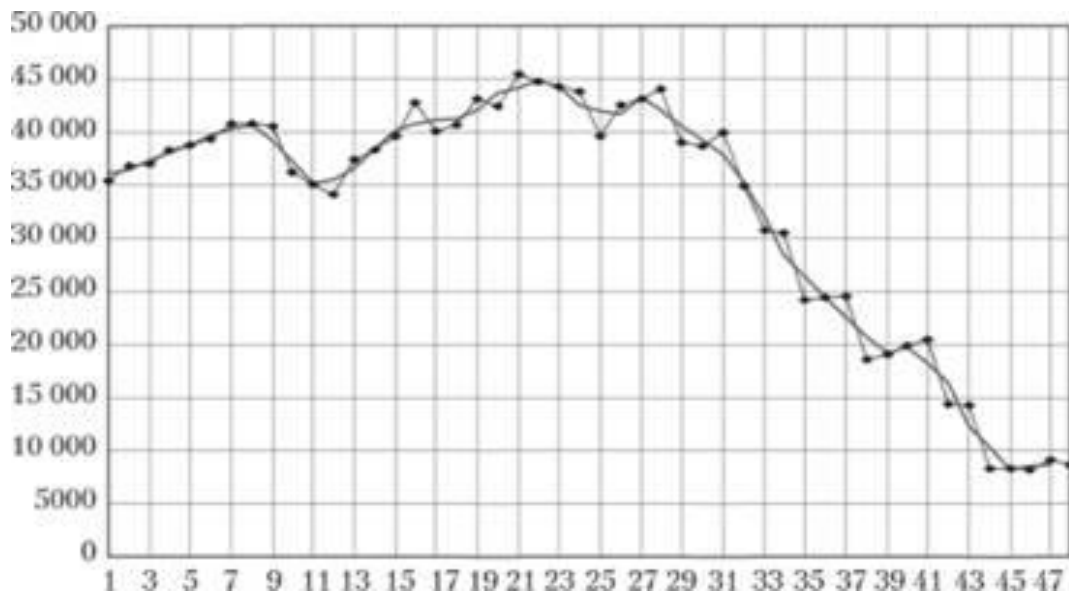


Рис. 3.3 – Вихідний ряд абстрактних даних (суцільна лінія із точками) і $SMA(3)$ – суцільна лінія

Просте ковзне середнє такого порядку вже дозволяє зменшити вплив випадкових відхилень у ряді даних і визначити деяку тенденцію, що намітилася, на останніх спостереженнях.

Застосування простого ковзного середнього більш високого порядку ще сильніше згладжує ряд даних (рис. 3.4):

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_{i-2} + Y_{i-1} + Y_i + Y_{i+1} + Y_{i+2}}{5} \quad (3.9)$$

У тому випадку, коли динамічний ряд містить істотно нелінійний тренд (підтвердженням цьому може служити, зокрема, графічне зображення ряду) згладжування часового ряду часто проводиться за допомогою *зваженого ковзного середнього*. Особливо зручно подібне згладжування в тому випадку, коли для аналізу бажано зберегти невеликі „згини” ряду.

Із згладжування рівнів часового ряду за допомогою зваженого

ковзного середнього витікає, що кожному рівню часового ряду активної ділянки ставиться у відповідність деяка вага, значення якої залежить від далекості рівня від центра ділянки. Передбачається, що функцію тренду можна описати за допомогою полінома деякого ступеня $m > 1$.

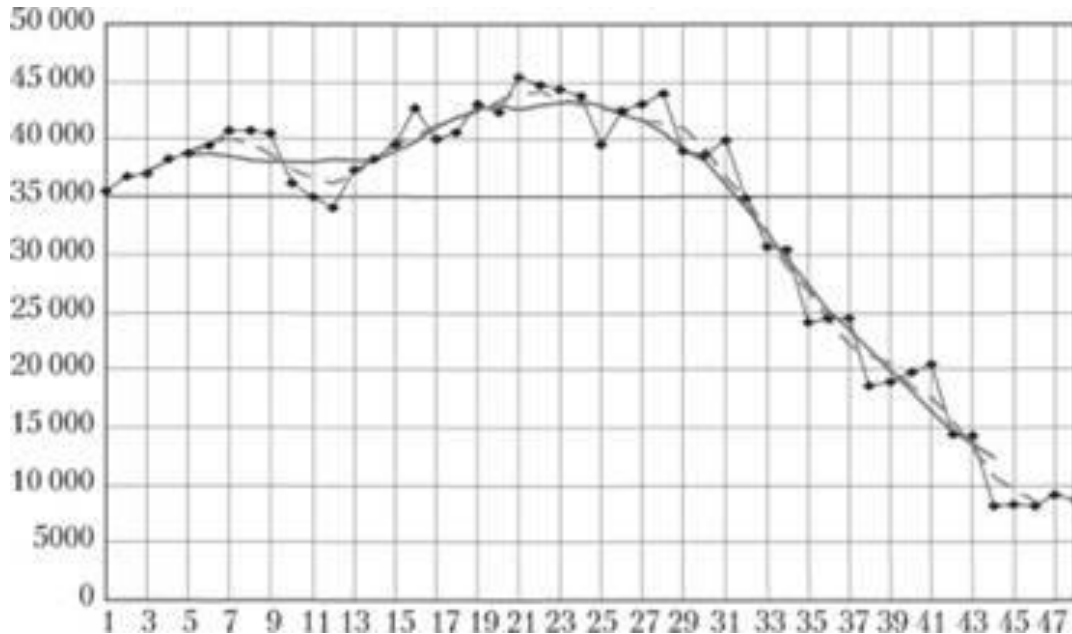


Рис. 3.4 – Вихідний ряд абстрактних даних (суцільна лінія із точками), $SMA(5)$ – пунктирна лінія $SMA(9)$ – суцільна лінія

Значення коефіцієнтів полінома знаходяться методом найменших квадратів. Формули зваженого ковзного середнього у випадку, коли згладжування виробляється за допомогою багаточлена другого ступеня, мають такий вигляд:

для $p=2$

$$\tilde{Y}_t = \frac{-3 \cdot Y_{i-2} + 12 \cdot Y_{i-1} + 17 \cdot Y_i + 12 \cdot Y_{i+1} - 3 \cdot Y_{i+2}}{35}, \quad t = 3, \dots, N - 2,$$

для $p=3$

$$\tilde{Y}_t = \frac{-2 \cdot Y_{i-3} + 3 \cdot Y_{i-2} + 6 \cdot Y_{i-1} + 7 \cdot Y_i + 12 \cdot Y_{i+1} + 3 \cdot Y_{i+2} - 2 \cdot Y_{i+3}}{21}, \quad t = 4, \dots, N - 3.$$

Для згладжування аномальних спостережень часто використовується алгоритм згладжування за допомогою ковзної медіани, який дає гарні результати. Алгоритм згладжування за допомогою *ковзної медіани* полягає в наступному: у вихідному часовому ряді $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N$ розглядаються послідовні трійки елементів ряду. У середині кожної розглянутої трійки

значення спочатку переставляються в порядку зростання, а потім береться їхня медіана, тобто значення, яке перебуває в середині:

$$\tilde{Y}_t = \text{med}(Y_{t-1}, Y_t, Y_{t+1}).$$

Для того, щоб знайти значення ковзної медіани в точці t , обчислюється медіана значень ряду в часовому інтервалі $[t-p, t+p]$. Відповідне значення називається $(2p+1)$ -точковою ковзною медіаною. Елементи вихідного ряду розташовуються в порядку зростання, тобто з вихідного ряду $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_N$ утвориться ранжируваний ряд. Визначається медіана ранжируваного ряду:

$$\text{med} = \begin{cases} Y_{p+1} & , \text{ якщо ширина вікна } n = 2p + 1 \\ \frac{Y_p + Y_{p+1}}{2} & , \text{ якщо ширина вікна } n = 2p \end{cases} \quad (3.10)$$

Вище розглянуті симетричні алгоритми для згладжування часових рядів. Разом з ними значне поширення при прогнозуванні часових рядів одержали асиметричні алгоритми.

Експонентне згладжування. У цьому методі для згладжування поточних значень ряду використовуються всі попередні значення ряду, причому значення вагових коефіцієнтів убивають по експоненті в міру віддалення від поточного значення ряду. Формулу експонентного згладжування можна записати у вигляді виразу, у якому поточне значення ряду залежить від всіх попередніх значень:

$$\tilde{Y}_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\tilde{Y}_{t-1}; \quad 0 < \alpha < 1$$

де α – параметр згладжування;

Фіктивне початкове значення згладженого ряду беруть рівним першому значенню ряду або середньоарифметичному перших трьох значень ряду:

$$\tilde{Y}_0 = Y_1 \text{ або } \tilde{Y}_0 = (Y_1 + Y_2 + Y_3)/3.$$

При виборі величини згладжувального параметра α необхідно враховувати те, що чим більше значення параметра α , тим менше позначається вплив попередніх рівнів й, отже, меншою виявляється згладжувальна дія експонентної середньої.

3.2.2 Основні типи тенденцій і криві зростання

Трендова компонента часових рядів звичайно не відома точно, а, як і ряд у цілому, є випадковою величиною. Але її зміна з деяких апріорних суджень часто може бути якісно описана аналітично. Для опису тренда використовуються так називані криві зростання, які дозволяють моделювати процеси трьох основних якісних типів: без межі зростання, з межею зростання без точки перегину, а також з межею зростання і точкою перегину.

Для моделювання цих процесів використовуються поліноміальні залежності, дрібно-раціональні та лінійно-логіфімічні функції.

Таким чином, часто використовуваним методом моделювання нестационарних часових рядів є параметричне оцінювання (*параметричні методи аналізу*). У цьому випадку підбираються параметри тієї або іншої функціональної залежності для трендової складової, після виключення якої залишається стаціонарний ряд.

Для аналітичного вирівнювання часових рядів найбільше часто застосовуються відносно прості функції, які умовно можна розбити на три класи.

До 1-го класу відносять функції, використовувані для опису процесів з монотонним характером розвитку і відсутністю меж зростання.

До 2-го класу відносять криві, які описують процес, у якого в досліджуваному періоді є межа зростання. Функції, що відносять до цього класу, називаються кривими насичення.

Якщо криві насичення мають точку перегину, то їх відносять до 3-го класу кривих зростання і називають S-подібними кривими.

Найбільш відповідальним етапом при аналітичному вирівнюванні ряду є вибір форми кривої, яка утворить тенденцію, до якого можна підійти різними шляхами (графічний метод, метод кінцевих різниць і т.д.). Однак який би шлях не був прийнятий, він обов'язково припускає знайомство з основними властивостями кривих зростання. Тому зупинимося на характеристиці окремих кривих, найбільш часто застосовуваних на практиці.

Серед кривих зростання 1-го класу найбільш часто застосовують поліноми (багаточлени)

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_p t^p, \quad (3.11)$$

де a_i – параметри багаточлена ($i = 0, 1, 2, \dots, p$); t – незалежна змінна (час).

Коефіцієнти багаточленів невисоких ступенів мають конкретну інтерпретацію залежно від змісту часового ряду. Наприклад, їх можна

трактувати як швидкість зростання (a_1), прискорення зростання (a_2), зміна прискорення (a_3), а параметр a_0 характеризує рівень ряду при $t=0$. У метеорологічних дослідженнях звичайно застосовують поліноми не вищі від третього порядку, тому що поліноми більше високих ступенів відбивають випадкові відхилення (що суперечить змісту тенденції), а параметри a_4 і т.д. не інтерпретуються.

Поліном першого ступеня $y_t = a_0 + a_1 t$ на графіку зображується прямою і використовується для опису процесів, які розвиваються в часі рівномірно (рис. 3.5, а). У цьому випадку перші різниці (абсолютні прирости) мають приблизно однакові значення.

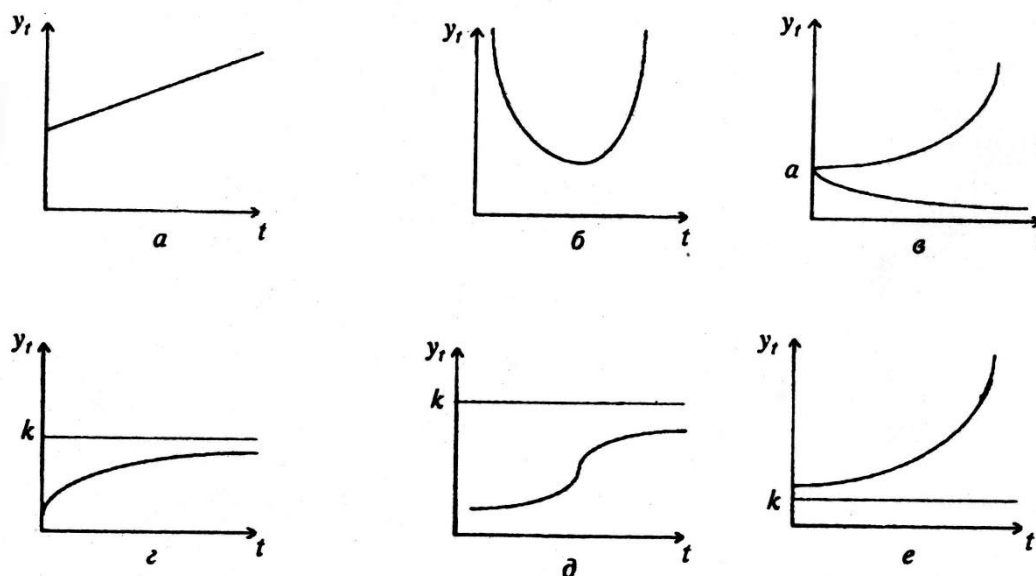


Рис. 3.5 – Криві зростання:

a – поліном 1-го порядку $y_t = a_0 + a_1 t$; *б* – поліном 2-го порядку $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$; *в* – експонента $y_t = ab^t$; *г* – модифікована експонента $y_t = k + ab^t$; *д* – крива Гомперца, якщо $\log a < 0$; *е* – крива Гомперца, якщо $\log a > 0, b > 1$

Поліном другого ступеня $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ можна застосовувати в тих випадках, коли процес розвивається рівноприскорено (рис. 3.5, б). На це вказує відносна сталість других різниць.

Поліном третього ступеня $y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ застосовують у тому випадку, якщо постійні треті різниці.

3.2.3 Метод регресії

Ряди, які після попередньої обробки можна вважати стаціонарними, далі вивчаються методами регресійного, кореляційного та гармонійного

аналізів. Кожен із цих методів використовується для створення деякої прогнозної моделі для досліджуваних рядів.

Регресія – це статистичний метод, що дозволяє знайти рівняння, яке щонайкраще описує сукупність даних, заданих часовим рядом.

Графічне зображення в багатьох випадках дозволяє приблизно виявити тип тенденції часового ряду. Але для цього слід дотримуватися правил побудови графіка: точне дотримання масштабу як за величиною рівнів ряду, так і за часом. Часові інтервали відкладають по осі абсцис, величини рівнів – по осі ординат.

На (рис. 3.6) видно, що лінійний тренд добре підходить для відбиття тенденції динаміки врожайності зернових культур: пряма проходить як би посередині коливних точок–рівнів років.

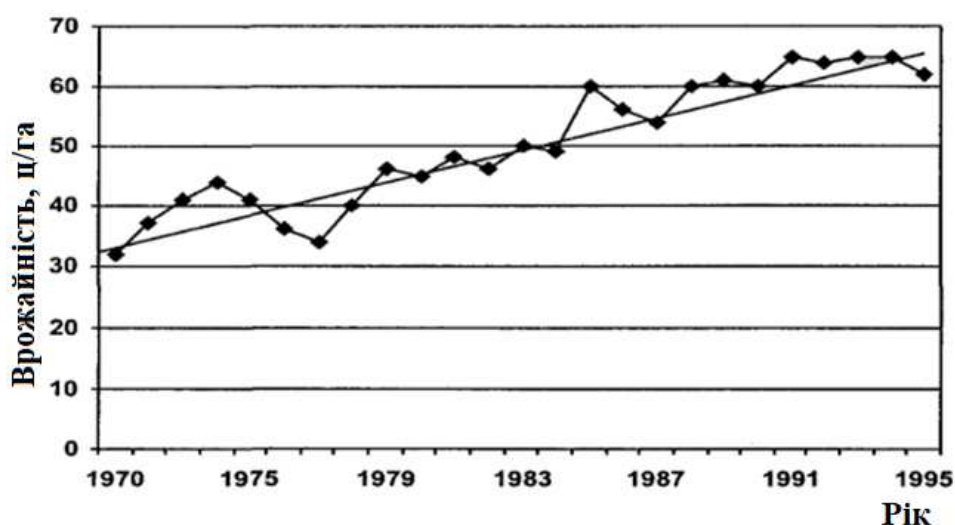


Рис. 3.6 – Динаміка врожайності зернових:

-■- фактичні рівні, – тренд

Але не завжди графік дозволяє вибрати тип лінії тренда. Важко графічно відрізнити параболу від експоненти, логарифмічну криву від гіперболи і т.д. Оцінка типу тренда за типом графіка включає суб'єктивні моменти, що може призвести до помилки. Є багато способів об'єктивної статистико-математичної оцінки придатності того або іншого типу лінії. Досить популярний його вибір за допомогою перебору на електронних обчислювальних машинах всіх наявних у пакеті програм статистичного аналізу типів ліній або по найменшому середньоквадратичному відхиленню, або по найменшому модулю відхилень фактичних рівнів від розрахункових по лінії, що перевіряється.

Лінійна регресійна модель дозволяє зв'язати дві величини Y_t і X_t лінійною залежністю виду $\hat{Y}_t = a_1 X_t + a_0$ по наявних N парах значень методом найменших квадратів (МНК). $\hat{Y}_t = a_1 X_t + a_0$ рівняння прямої лінії тренда.

При первинному аналізі всі пари спостережень (Y_t, X_t) $t = 1, \dots, N$ зображують на координатній площині. У результаті одержують так зване *кореляційне поле (діаграму розсіювання)*. Взаємне положення точок візуально характеризує форму взаємозв'язку Y_t і X_t (рис. 3.7).

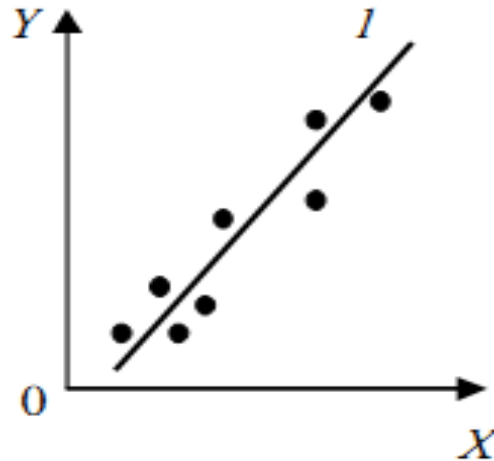


Рис. 3.7 – Діаграма розсіювання

Формула прямої лінії досить добре відповідає емпіричним даним. Тому для опису форми залежності між Y_t і X_t доцільно вибрати лінійну функцію. Для кожного t -го спостереження модель має вигляд:

$$Y_t = a_1 X_t + a_0 + e_t = \hat{Y}_t + e_t \quad (3.12)$$

де a_0 – вільний член рівняння, дорівнює середньому рівню тренда, a_1 – головний параметр лінійного тренда – його константа, e_t – оцінка випадкової складової – *шума*, це випадкові залишки, або „помилки” щодо тренда.

На практиці для обчислення a_0 і a_1 найчастіше використовують метод найменших квадратів (МНК), проілюстрований на (рис. 3.8).

Метод найменших квадратів. Ідея МНК полягає в наступному: із всієї безлічі ліній, які можна провести через експериментальні точки на діаграмі розсіювання, лінія регресії вибирається так, щоб сума квадратів похибок для всіх точок $(e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_N^2)$ була найменша. Відповідно до цього методу невідомі коефіцієнти a_0 , і a_1 обчислюються таким чином, щоб величина функціонала

$$F(a_0, a_1) = \sum_{i=2}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=2}^N (Y_i - a_0 - a_1 X_i)^2 = \min \quad (3.13)$$

була мінімальна.

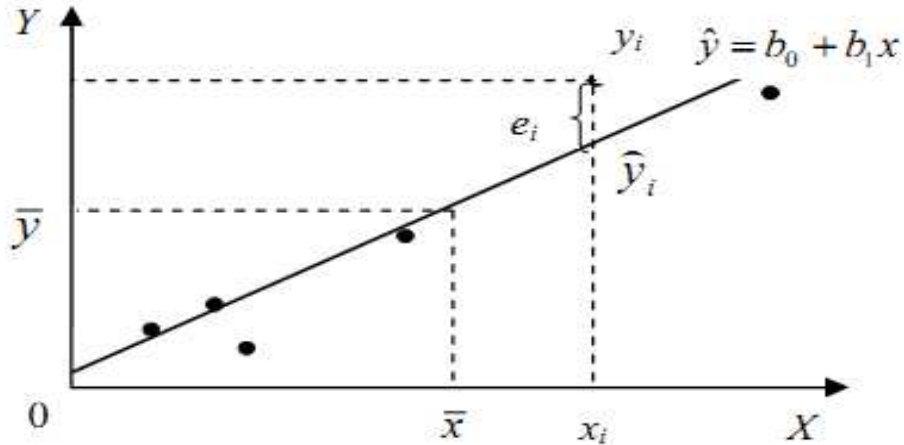


Рис. 3.8 – Ілюстрація принципу МНК

Для цього функціонала необхідними й достатніми умовами мінімуму є умови рівності часткових похідних нулю, тобто умови мінімуму функціонала визначаються системою із двох наступних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dF(a_0, a_1)}{da_0} = 2 \sum_{i=1}^N (Y_i - a_0 - a_1 X_i) \cdot (-1) = 0 \\ \frac{dF(a_0, a_1)}{da_1} = 2 \sum_{i=1}^N (Y_i - a_0 - a_1 X_i) \cdot (-X_i) = 0 \end{cases}, \quad (3.14)$$

щодо двох невідомих a_0, a_1 . Виконавши прості перетворення, одержуємо систему нормальних рівнянь для обчислення коефіцієнтів a_0, a_1 лінійної регресії:

$$\begin{cases} a_0 \cdot N + a_1 \sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N Y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N X_i + a_1 \sum_{i=1}^N X_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i \cdot X_i) \end{cases} \quad (3.15)$$

Для спрощення запису і подальших обчислень уведемо наступні середні (по вибірці) величини:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i & \bar{Y} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \\ \overline{XY} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i \cdot Y_i) & \overline{X^2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 \end{aligned}$$

Тоді систему (3.15) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot \bar{X} = \bar{Y} \\ a_0 \cdot \bar{X} + a_1 \cdot \bar{X}^2 = \overline{XY} \end{cases} \quad (3.16)$$

Вирішуючи цю систему рівнянь, одержуємо

$$a_1 = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\bar{X}^2 - (\bar{X})^2}; \quad (3.17)$$

$$a_0 = \bar{Y} - a_1 \cdot \bar{X} \quad (3.18)$$

Кутовий коефіцієнт регресії a_1 показує, на скільки одиниць у середньому змінюється залежна змінна Y при зміні незалежної змінної X на одиницю свого виміру. Постійна a_0 дає середнє значення залежної змінної при $X=0$, графічно a_0 визначає точку перетинання прямої регресії з віссю ординат.

Одним з показників якості побудованого рівняння регресії є коефіцієнт детермінації R^2 . За визначенням

$$R^2 = \frac{D(\hat{Y})}{D(Y)} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N e_i}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (3.19)$$

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

Таким чином, коефіцієнт детермінації можна інтерпретувати як частину загальної дисперсії Y_t , пояснену за допомогою рівняння регресії, точніше, за допомогою розрахункової змінної \hat{Y}_t рівняння регресії. Максимальне значення коефіцієнта детермінації R^2 дорівнює 1. Це відбудеться тоді, коли всі залишки $e_t = 0$, а рівняння прямої регресії ляже точно на експериментальні точки Y_t . Таким чином, при побудові регресії коефіцієнт детермінації R^2 бажано максимізувати. Саме це й робиться при застосуванні МНК, тому що з (3.19) випливає, що максимум R^2 досягається при мінімумі $D(e_t)$.

При дослідженні моделі простої регресії передбачалося, що залежність між відгуком Y і кожної з пояснюючих змінних є лінійною. Однак існують й інші види взаємозв'язку. Однією з найпоширеніших нелінійних взаємозв'язків між двома змінними є квадратична залежність. Для її аналізу призначена модель квадратичної регресії.

Модель квадратичного тренда, або поліноміальна модель другого ступеня є найпростішою нелінійною моделлю, застосовуваною для прогнозування. Рівняння квадратичного тренда:

$$\hat{Y}_t = a_2 X_t^2 + a_1 X_t + a_0,$$

де a_0 – оцінка зсуву відгуку X_i , a_1 – оцінка лінійного ефекту, a_2 – оцінка квадратичного ефекту.

Оцінка параметрів квадратичної регресійної моделі також визначається методом найменших квадратів. Система нормальних рівнянь для обчислення коефіцієнтів квадратичної регресії:

$$\begin{cases} a_0 \cdot N + a_1 \sum_{i=1}^N X_i + a_2 \sum_{i=1}^N X_i^2 = \sum_{i=1}^N Y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^N X_i + a_1 \sum_{i=1}^N X_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^N X_i^3 = \sum_{i=1}^N (Y_i \cdot X_i) \\ a_0 \sum_{i=1}^N X_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^N X_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^N X_i^4 = \sum_{i=1}^N (Y_i \cdot X_i^2) \end{cases} \quad (3.20)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо значення коефіцієнтів квадратичної регресійної моделі тренда.

Геометрична інтерпретація регресійного аналізу.

Розглянемо n -вимірний векторний простір R^n , в якому існує стандартний скалярний добуток: тобто якщо

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \text{то } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i.$$

Нехай

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = a_0 \cdot \mathbf{L} + a_1 \cdot \mathbf{x}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.22)$$

де \mathbf{y} – вектор стовпець розмірності n фактичних значень відгуку,
 a_0 і a_1 – числові коефіцієнти, які підлягають визначенню
 тобто a_0 – вільний член і a_1 – коефіцієнт регресії,
 \mathbf{x} – вектор розмірності n , складений з реальних значень фактора;
 \mathbf{L} – вектор розмірності n , складений з одиниць,
 $\hat{\mathbf{y}}$ – вектор, що лежить у двовимірній гіперплощині π , натягнутої на вектори \mathbf{L} і \mathbf{x} . Припускаємо, що ці вектори не колінеарні.

Поставимо завдання: знайти такі a_0 і a_1 , щоб вектор \mathbf{e} мав найменшу

довжину. Інакше кажучи, потрібно щонайкраще апроксимувати вектор y вектором \hat{y} , який знаходиться у гіперплощині π .

Очевидно, що рішенням є такий вектор \hat{y} , для якого вектор e ортогональний (перпендикулярний) площині π . Для цього необхідно й достатньо, щоб вектор – рішення був ортогональний векторам L і x , які породжують площину π (рис. 3.9).

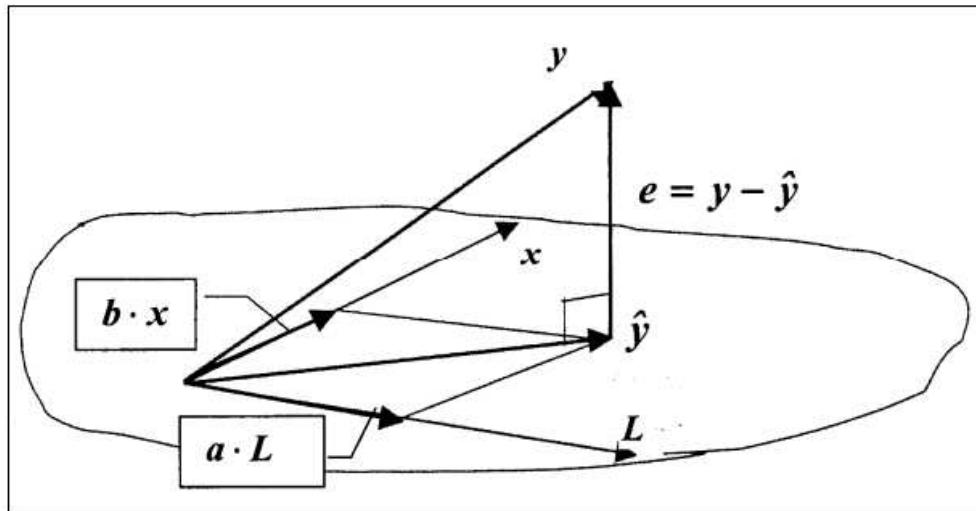


Рис. 3.9 – Геометрична інтерпретація побудови рівняння регресії

Умови розв'язання вектора-рішення визначаються системою рівнянь:

$$\begin{cases} (L, e) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n L_i \cdot e_i = 0 \\ (? , e) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n L_i \cdot e_i = 0 \\ (x, e) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Використовуючи визначення вектора e , одержуємо наступні співвідношення

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Розкривши дужки, в останній системі одержимо відомі співвідношення (3.16).

Матрична форма запису регресійної лінійної моделі.

Позначимо через X матрицю розмірності $n \times 2$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

A – вектор коефіцієнтів, $e = y - X \cdot A$

Умова ортогональності вектора e до площини π записується як

$$X^T \cdot e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

або

$$X^T \cdot (y - X \cdot A) = X^T \cdot y - X^T \cdot X \cdot A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Останнє рівняння еквівалентно наступному рівнянню

$$X^T \cdot y = X^T \cdot X \cdot A.$$

Це рівняння можна легко розв'язати:

$$A = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y. \quad (3.25)$$

Цей вираз в розгорнутому вигляді буде виглядати так:

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Помітимо, що (3.26) є розв'язанням системи (3.25) за допомогою зворотної матриці.

Для опису процесів з монотонним характером тенденції розвитку і відсутністю меж зростання кривих зростання найбільше часто застосовують поліноми (багаточлени)

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_p x_i^p,$$

де a_i ($i = 0, 1, \dots, p$) – параметри багаточлена; x – незалежна змінна (час); p – ступінь полінома.

Матрична форма запису регресійної поліноміальної моделі.

Регресійна модель – поліном заданого ступеня P має вигляд:

$$y_i = \sum_{j=1}^{p+1} a_j x_i^{j-1}.$$

Матриця X у випадку поліноміальної регресії набуває вигляду:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^p \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_p \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

Аналогічно (3.25) розв'язок знаходження коефіцієнтів поліноміальної регресійної моделі буде мати вигляд:

$$A = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y.$$

Оцінка показників якості побудованого рівняння регресії.

Основними характеристиками якості моделей, обраних для функціональної залежності трендової складової, є показник точності. Поняття точності характеризує ступінь близькості змодельованих (розрахованих за певною моделлю тренда) значень \hat{Y}_t у їхній сукупності до вихідних фактичних даних X_t . Чим менша відмінність теоретичних значень від емпіричних даних, тим вища якість моделі. Для оцінки точності на практиці використовуються:

$$\text{коефіцієнт детермінації} - R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2};$$

$$\text{середнє абсолютне відхилення} - \Delta = \frac{\sum_{i=1}^N |Y_i - \hat{Y}_i|}{N};$$

$$\text{середній квадрат помилки} - S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N};$$

$$\text{середня відносна помилка} - \bar{\delta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{Y_i - \hat{Y}_i}{Y_i} \right| \cdot 100\%;$$

Вважається, чим ближче коефіцієнт детермінації до одиниці, тим

точніше модель описує вихідні дані часового ряду. При порівнянні альтернативних моделей за допомогою інших показників необхідно виходити з наступного: чим менше значення цих характеристик, тим вище точність моделі.

3.3 Порядок аналізу часових рядів

Мета аналізу часових рядів звичайно полягає в побудові математичної моделі ряду, за допомогою якої можна пояснити його поведінку та здійснити прогноз на певний період часу. При аналізі часових рядів звичайно використовуються такі методи:

- графічні методи подання часових рядів і їх супутніх числових характеристик;
- методи зведення до стаціонарних процесів: моделі ковзного середнього та авторегресії, і видалення тренда цими або іншими методами;
- методи дослідження внутрішніх зв'язків між елементами часових рядів.

Аналіз часових рядів включає такі основні етапи.

Побудова і вивчення графіка. Аналіз часового ряду звичайно починається з побудови і вивчення його графіка. Оскільки табличне подання часового ряду і описові статистики найчастіше не дозволяють зрозуміти характер процесу, у той час як за графіком часового ряду можна зробити досить багато висновків. Надалі вони можуть бути перевірені й уточнені за допомогою розрахунків.

При аналізі графіків можна досить упевнено визначити:

- наявність тренда і його характер;
- наявність сезонних і коливальних компонентів;
- ступінь плавності або переривчастості змін послідовних значень ряду після усунення тренда. За цим показником можна виявити характер і величину кореляції між сусідніми елементами ряду.

Якщо нестационарність часового ряду очевидна, то першою справою треба виділити та видалити нестационарну складову ряду. Процес видалення тренда та інших компонентів ряду, що приводять до порушення стаціонарності, може проходити в кілька етапів. На кожному з них розглядається ряд залишків, отриманих у результаті віднімання з вихідного ряду підбраної моделі тренда, або результат різницевого та інших перетворень ряду. Крім графіків, ознаками нестационарності часового ряду можуть служити імовірнісні (статистичні) характеристики в часі. Відповідно, якщо характеристика змінюється в часі, то можна говорити про нестационарність.

При класифікації нестационарності часових рядів можна виділити три

класи:

1. Нестационарність за математичним очікуванням, коли середнє значення характеристики за який-небудь період часу значно відрізняється від її середнього значення за інший період;

2. Нестационарність за дисперсією, коли середня мінливість характеристики за який-небудь період часу значно відрізняється від середньої мінливості за інший період;

3. Нестационарність за автокореляційною функцією (АКФ), коли в різні періоди часу в характеристиках відзначається різна частотна структура.

Оцінити стаціонарність можна на підставі теорії перевірки статистичних гіпотез. Для цього часовий ряд розбивається на частини (періоди часу), для кожної з яких окремо розраховуються прості статистики (середнє, дисперсія, АКФ). Розбивку реалізації на окремі інтервали бажано здійснювати, виходячи із закономірностей внутрішньої структури розглянутого процесу, тому що яких-небудь формальних критеріїв для цього немає. Потім попарно проводиться перевірка рівності цих характеристик для частин рядів. Якщо розходження виявляться статистично значимими, отже, часовий ряд не є стаціонарним за однією або за декількома з розглянутих статистичних характеристик. Якщо розбіжність між імовірнісними характеристиками для всіх інтервалів виявиться незначущою, то робиться висновок, що цей часовий ряд є стаціонарним.

Для оцінки незначущості необхідно побудувати довірчі інтервали для всіх цих характеристик. Визначення довірчого інтервалу: *довірчий інтервал* – це *інтервал значень* статистичної характеристики часового ряду, що відповідає довірчій області статистичного критерію.

Довірчий інтервал:

- 1) оцінює деякий параметр числової вибірки безпосередньо за даними самої вибірки;
- 2) „накриває” значення цього параметра з імовірністю α .

Щоб визначити довірчий інтервал, необхідно залучити теорію перевірки статистичних гіпотез. Для того щоб визначити довірчий інтервал для вибіркового середнього арифметичного значення вимірюваної величини при відомій дисперсії її оцінки за даними наявної вибірки, у першу чергу необхідно знайти значення *критерію Стюдента* $t_{кр}$. Потім обчислити значення Δx , за допомогою якого і визначається довірчий інтервал:

$$\Delta x = t_{кр} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (3.27)$$

де σ – стандартне (середньоквадратичне) відхилення часового ряду; N –

кількість значень часового ряду. Сам довірчий інтервал для математичного очікування $X_{сер}$ визначається за допомогою наступного виразу:

$$(X_{сер} - \Delta x) < X_{сер} < (X_{сер} + \Delta x), \quad (3.28)$$

де $X_{сер}$ – середнє значення вибірки.

Загальна схема перевірки стаціонарності часового ряду виглядає таким чином:

1. Перетворити статистичний ряд, розбивши його на дві частини.
2. Для кожної із частин розрахувати математичне очікування, дисперсію і автокореляційну функцію.
3. Перевірити гіпотезу про рівність середніх значень двох частин ряду. Зробити висновок про стаціонарність за математичним очікуванням.
4. Перевірити гіпотезу про рівність дисперсій двох частин ряду. Зробити висновок про стаціонарність за дисперсією.
5. Перевірити гіпотезу про рівність коефіцієнтів автокореляції. Зробити висновок про стаціонарність за автокореляційною функцією.

Розбивку реалізації на окремі інтервали бажано здійснювати, виходячи із закономірностей внутрішньої структури розглянутого процесу, тому що яких-небудь формальних критеріїв для цього немає. Потім попарно проводиться перевірка рівності цих характеристик для частин рядів. Якщо розходження виявляться статистично значущими, отже, часовий ряд не є стаціонарним по одній або по декільком з розглянутих статистичних характеристик. Якщо розбіжність між імовірнісними характеристиками для всіх інтервалів виявиться незначущою, то робиться висновок, що даний часовий ряд є стаціонарним.

Довірчий інтервал для дисперсії нормально розподіленої випадкової величини по вибірковій дисперсії σ^2 обчислюється за даними вибірки. Тому при заданій надійності γ – значення ймовірності влучення значення випадкової величини в інтервал $(-\infty X]$ і $(n-1)$ ступенем свободи, довірчий інтервал має вигляд:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}^2} < D_X < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}^2}. \quad (3.29)$$

Значення $\chi_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}^2$, $\chi_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}^2$ беруть із таблиці розподілу χ^2 .

3.4 Корелограма та її застосування

Як було відзначено вище, стаціонарний і нестаціонарний процеси відрізняються один від одного автокореляційною функцією.

Крім того, для характеристики динаміки зміни показників ряду часто використовується поняття автокореляції, що характеризує не тільки взаємозалежність рівнів того самого ряду, що ставляться до різних моментів спостережень, але й ступінь стійкості розвитку процесу в часі, величину оптимального періоду прогнозування і т.п.

Ступінь тісноти статистичного зв'язку між рівнями часового ряду, зсунутими на τ одиниць часу, визначається величиною коефіцієнта кореляції $r(\tau)$. Завдяки тому, що $r(\tau)$ вимірює тісноту зв'язку між рівнями того самого часового ряду, його прийнято називати коефіцієнтом автокореляції. При цьому τ – довжину часового зсуву – називають звичайно лагом. Коефіцієнт автокореляції обчислюють за формулою

$$r(\tau) = \frac{(n-\tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t y_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}}{\sqrt{\left[(n-\tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \right)^2 \right] \left[(n-\tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau} \right)^2 \right]}}$$

При великій довжині досліджуваного ряду розрахунок коефіцієнтів автокореляції можна спростити. Для цього знаходять відхилення не від середніх корельованих рядів, а від загального середнього всього ряду. У цьому випадку

$$r(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{n-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}$$

Порядок коефіцієнтів автокореляції визначається часовим лагом: першого порядку (при $\tau=1$), другого порядку (при $\tau=2$) і т.д.

Послідовність коефіцієнтів автокореляції рівнів першого, другого і наступних порядків називають автокореляційною функцією. Значення автокореляційної функції можуть коливатися від -1 до $+1$, але зі стаціонарності випливає, що $r(\tau)=r(\tau)$. Графік автокореляційної функції називається корелограмою. Аналіз автокореляційної функції і корелограми дозволяє визначити лаг, при якому автокореляція найбільш висока, тобто за допомогою аналізу автокореляційної функції та корелограми можна виявити структуру ряду.

Якщо найбільш високим виявився коефіцієнт автокореляції першого порядку, досліджуваний ряд містить тільки *тенденцію*. Якщо найбільш високим виявився коефіцієнт автокореляції порядку τ , то ряд містить

циклічні коливання з періодичністю в τ моментів часу. Якщо жоден з коефіцієнтів автокореляції не є значущим, то можна зробити одне із двох припущень щодо структури цього ряду: або ряд не містить *тенденцій і сезонних коливань*, або ряд містить сильну нелінійну тенденцію, для виявлення якої потрібно провести додатковий аналіз. Тому коефіцієнт автокореляції рівнів і автокореляційну функцію доцільно використовувати для виявлення в часовому ряді наявності або відсутності трендової компоненти $f(t)$ і сезонної компоненти $S(t)$.

Питання для самоконтролю

1. Які види часових рядів ви знаєте? Наведіть приклади.
2. Поясніть, у чому складаються характерні відмінності часових рядів від просторових вибірок.
3. Чому доводиться коректувати аномальні значення? У чому суть критерію Ірвина?
4. Що називають вікном згладжування?
5. Поясніть призначення ковзних середніх. Вплив яких компонентів часового ряду усувається за їхньою допомогою?
6. Що таке зважене (середньозважене) ковзне середнє?
7. Який ряд називається стаціонарним?
8. Як поводиться автокореляційна функція для моделей часового ряду з періодичним компонентом?
9. У чому суть критерію перевірки залишків?
10. Назвіть компоненти часових рядів.
11. Як на стадії проведення графічного аналізу можна досліджувати компонентний склад часових рядів?
12. Вплив яких компонентів часового ряду усувається за допомогою ковзного середнього?
13. Як на стадії графічного аналізу динаміки часового ряду можна визначити характер тенденції та періодичності?
14. Охарактеризуйте основні типи кривих росту, найбільш часто використовуваних на практиці при побудові трендових моделей.
15. Які точки часового ряду вважаються аномальними?
16. Які можливості лінійної регресії? Рівняння лінійної регресії.
17. Назвіть визначення коефіцієнта детермінації.
18. Опишіть метод перевірки стаціонарності часового ряду.
19. Назвіть оцінки параметрів поліномів кривої зростання та опишіть принцип методу найменших квадратів.

4 ЗАСТОСУВАННЯ СПЕКТРАЛЬНОГО Й ПРИКЛАДНОГО АНАЛІЗУ ДАНИХ МОНІТОРИНГУ

4.1 Опис даних палеокліматичного моніторингу

Дослідження циклічності глобальної кліматичної системи пов'язані з використанням довгоперіодних кліматичних рядів і базуються на аналізі даних палеореконокструкцій за допомогою методів математичної статистики. Одним зі способів одержання довгоперіодних кліматичних рядів є вивчення гляціальних відкладів. Аналіз крижаного керна, дає можливість одержати відомості про кліматичні умови за тривалий період часу. Вивчення нівально-гляціальних систем минулого за допомогою льодових кернів дозволяє одержати інформацію про дейтерій, що втримується в ньому, мікрочастинках, парникових газах, ізотопах й оцінити зміни температури повітря за період, який охоплює декілька кліматичних циклів [5].

З середини минулого століття все більшу роль у вивченні кліматичних систем минулого грає аналіз керна із глибоких свердловин, пробурених на льодовиках у зонах акумуляції. Безупинно вдосконалюються способи аналізу керна. Аналіз крижаного керна та вмісту в ньому дейтерію, мікрочастинок, парникових газів та ізотопів уже дозволив оцінити зміни температури повітря за період близько 800 тис. років [6, 7]. Детальні палеореконокструкції температури будуються на основі аналізу ізотопного складу кернів, а саме, процентного вмісту важкого ізотопу кисню ^{18}O (його середній вміст у природі – близько 0,2% від всіх атомів кисню). Молекули води, що містять цей ізотоп кисню, важче випаровуються і легше конденсуються. Тому, наприклад, у водяній парі над поверхнею моря зміст ^{18}O нижчий, ніж у морській воді. А в конденсації на поверхні сніжних кристалів, які формуються в хмарах, частіше беруть участь молекули води, що містять ^{18}O , завдяки чому їхній вміст в опадах вищий, ніж у водяній парі, з якої опади формуються. Чим нижча температура формування опадів, тим сильніше проявляється цей ефект, тобто тим більше в них ^{18}O . Тому, оцінивши ізотопний склад снігу або льоду, можна оцінити і температуру, при якій формувалися опади. Був виявлений зв'язок між ізотопною кривою із гренландської свердловини Crete і кривими температур в Англії та Ісландії. Ці температури реконструйовані для останніх 300...500 років по надійних записах прямих спостережень за природними процесами [8–10]. Все це дає підстави розглядати гренландські льодовикові керни в якості чутливого природного реєстратора температурних флуктуацій у Північній Півкулі і, зокрема, у

Європі.

Особливість дослідження довгоперіодних кліматичних рядів полягає у властивості нестационарності цих рядів, у них інформативним є сам факт зміни частотно-часових характеристик ряду, що відбиває динаміку кліматичних процесів.

Надалі в аналізі будемо опиратися на дані, отримані від двох найбільш відомих із пробурених у Гренландії за останню третину XX століття свердловин – GRIP й GISP2 [8–10]. Аналіз стану льодяних кернів дає повну картину про зміни клімату Землі та стану атмосфери в минулому. Збережені нашарування льоду дозволяють робити висновки про значення і хід температур далеких епох з 1 % помилкою [8, 9, 11]. Відновлена температура повітря в приземному шарі в центральній частині Гренландії за останні 50 тис. років була одержана на основі аналізу стабільних ізотопів N_2 і Ar, отриманих з льодяних кернів. Вона відбиває хід зимових значень температури повітря, які, як відомо, близькі до середньорічних температур [12]. Реконструйовані дані температури за останні 50 тис. років надані Світовим центром даних палеокліматології World Data Center for Paleoclimatology, Boulder, USA [13]. Ці дані являють собою набір точок, що фіксують зміну температури повітря в нерегулярні моменти часу (рис. 4.1).

Для дослідження був використаний перетворений ряд реконструйованих даних температури приблизно за 50 тис. років (точніше – за 49 830 років). Для цього з вихідного ряду на основі інтерполяції був сформований ряд значень температури повітря через кожні тридцять років (рис. 4.2).

Такий період вибірки пов'язаний з тим, що зміна тенденцій у зміні тиску і температури, а відповідно і зміна типу атмосферної циркуляції, спричиняють відповідні зміни в кутовій швидкості обертання Землі. Саме при зниженій частоті появи меридіональної форми циркуляції спостерігається прискорення обертання Землі та навпаки [14]. Ця тенденція має квазіперіодичний характер з періодом в 30...35 років. Помітимо, що кратні гармоніки з періодами $\approx 30...60$ років характерні для стерических коливань рівня Світового океану, глобальної температури повітря і температури поверхні океану [15, 16].

При уважному розгляді цього ряду добре видно, що температура повітря за 49 830 років перетерплювала значні зміни (рис. 4.3).

Зміни температури повітря і пов'язані з нею періодичності коливання атмосферної циркуляції проявляються протягом деякого часового інтервалу (десятки, тисячі або мільйони років) і, згодом, змінюються або зникають повністю [15]. Кожна циклічність має свою міру стійкості в часі і цим циклам відповідає певна енергетика, що залежить від багатьох зовнішніх і внутрішніх кліматоутворювальних факторів. Тому важливим

науковим завданням є виявлення не тільки енергетично значущих періодів коливань, але й прояв найбільш „яскравих” періодичностей у кліматичній системі планети.

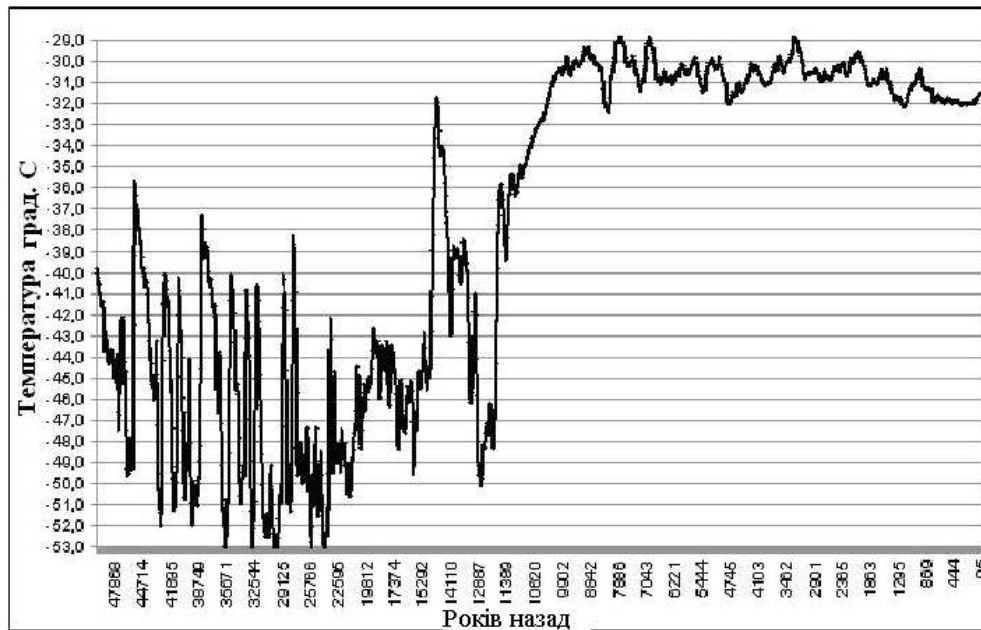


Рис. 4.1 – Вихідний нерегулярний ряд реконструйованих значень температури в центральній частині Гренландії

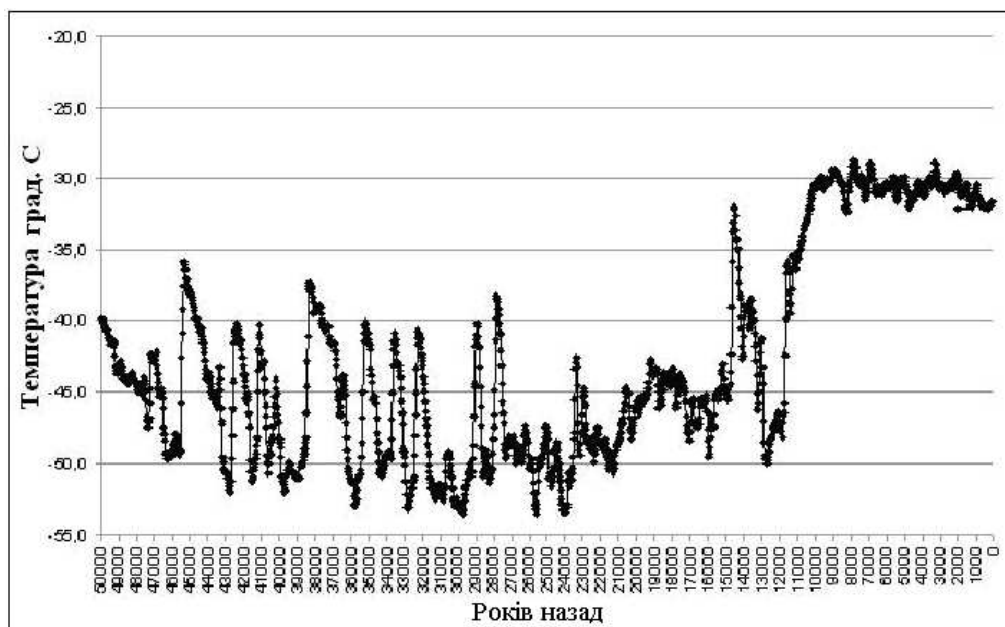


Рис. 4.2 – Перетворений ряд реконструйованих значень температури в центральній частині Гренландії з дискретністю 30 років

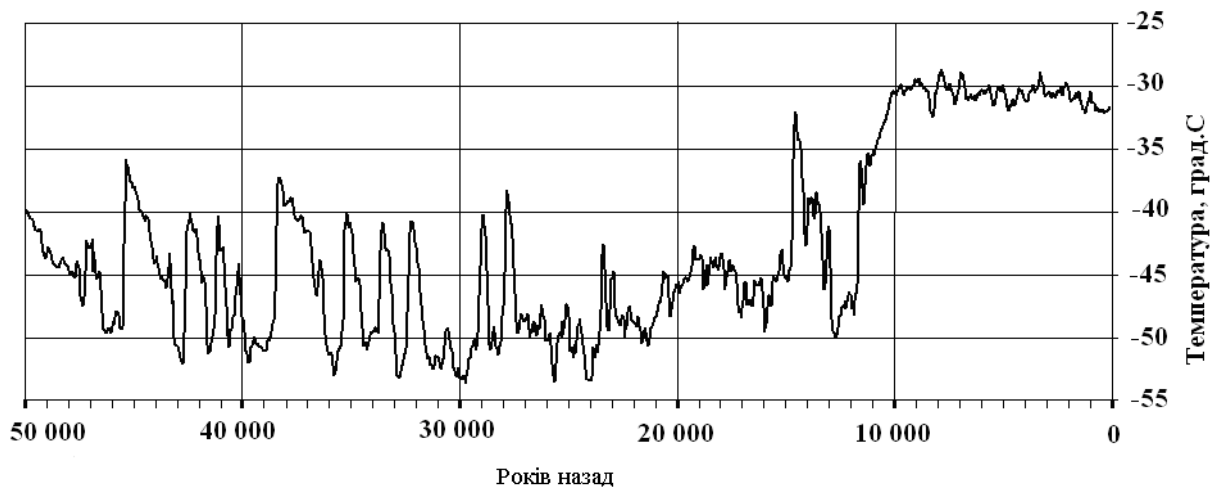


Рис. 4.3 – Згладжений ряд реконструйованих значень температури в центральній частині Гренландії з дискретністю 30 років

4.2 Спектральний аналіз даних палеорекострукції температури в центральній частині Гренландії

Часто використовуване для аналізу гідрометеорологічних рядів одновимірне перетворення Фур'є дозволяє виділити найбільш значимі періодичності відповідно до величини енергії, яка доводиться на кожне коливання. Для виявлення енергетично найбільш виражених періодів коливань до трьох аналізованих часових періодів був застосований апарат спектрального Фур'є-аналізу математичного пакета прикладних програм MATLAB (застосована функція FFT пакета SPTool).

Аналізований ряд був розбитий на три великих періоди аналізу: льодовиковий, перехідний і наш час.

Аналіз всіх трьох числових рядів дозволяє прийти до природного висновку про те, що постійна складова спектра коливань температури для всіх рядів буде мати набагато більшу енергію, на кілька порядків вищу за енергію високочастотних коливань. Результати розрахунків показали, що середнє значення температури для льодовикового періоду становило $-46,6^{\circ}\text{C}$, для перехідного періоду становило $-40,2^{\circ}\text{C}$ і для нашого часу становило $-30,6^{\circ}\text{C}$.

На тлі настільки потужної постійної складової на отриманих спектрах неможливо буде розглянути інші, більше високочастотні складові. Тому для зменшення в спектрі частки постійної складової для кожного із трьох часових періодів визначалося середнє значення температури і щодо середнього розраховувалися відхилення температур, тобто аномалії (рис. 4.5). При проведенні досліджень здійснювався Фур'є-аналіз аномалій. При цьому вважалося, що у всіх трьох аналізованих

періодах процес є стаціонарним.

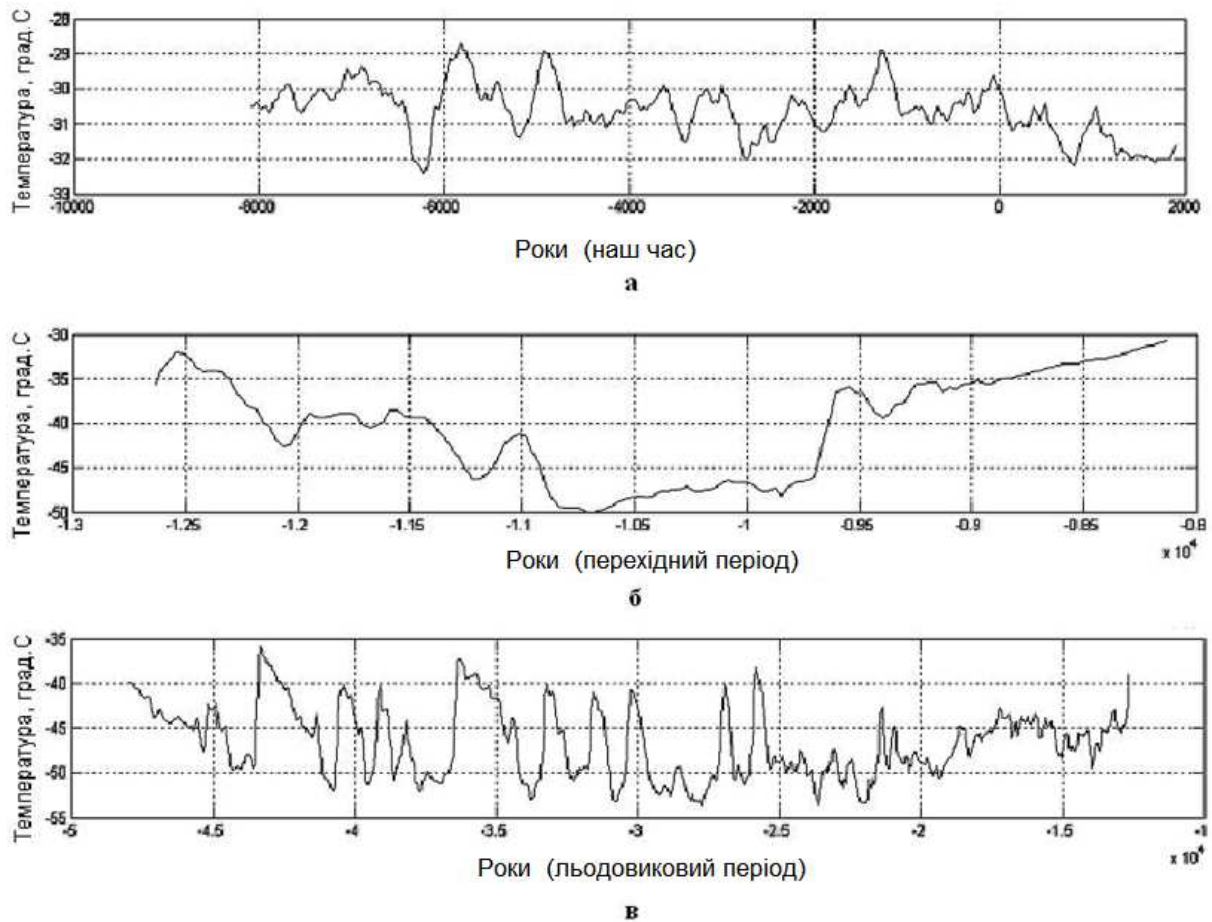


Рис. 4.4 – Перетворений ряд реконструйованих даних температури в центральній частині Гренландії за останні 49830 років з дискретністю 30 років розділений на три періоди (зі знаком „-” роки до нашої ери)

У результаті проведеного Фур'є-аналізу аномалій всіх трьох періодів були отримані спочатку амплітудно-фазові частотні спектри для кожного з розглянутих періодів і на їхній основі розраховані енергетичні спектри для всіх трьох періодів. Всі спектри нормувалися за тривалістю для того, щоб одержати можливість порівнювати їх між собою за рівнем енергії. По осі ординат всіх отриманих спектрів відкладені нормовані значення енергії спектральних компонент, а по осі абсцис – частоти, які являють собою зворотні значення часу.

При цьому максимальна ширина спектра відповідно до теореми Котельникова буде визначатися половиною частотою самого короткоперіодичного процесу, яким є крок ряду рівний 30 рокам. Таким чином, максимальна ширина спектра складе значення, рівне 1/60, а роздільна здатність спектра складе значення, яке залежить від величини вибірки, тобто від довжини ряду. При виявленні моди в спектрі легко

визначити її періодичність, взявши зворотне значення частоти, що відповідає цій моді.

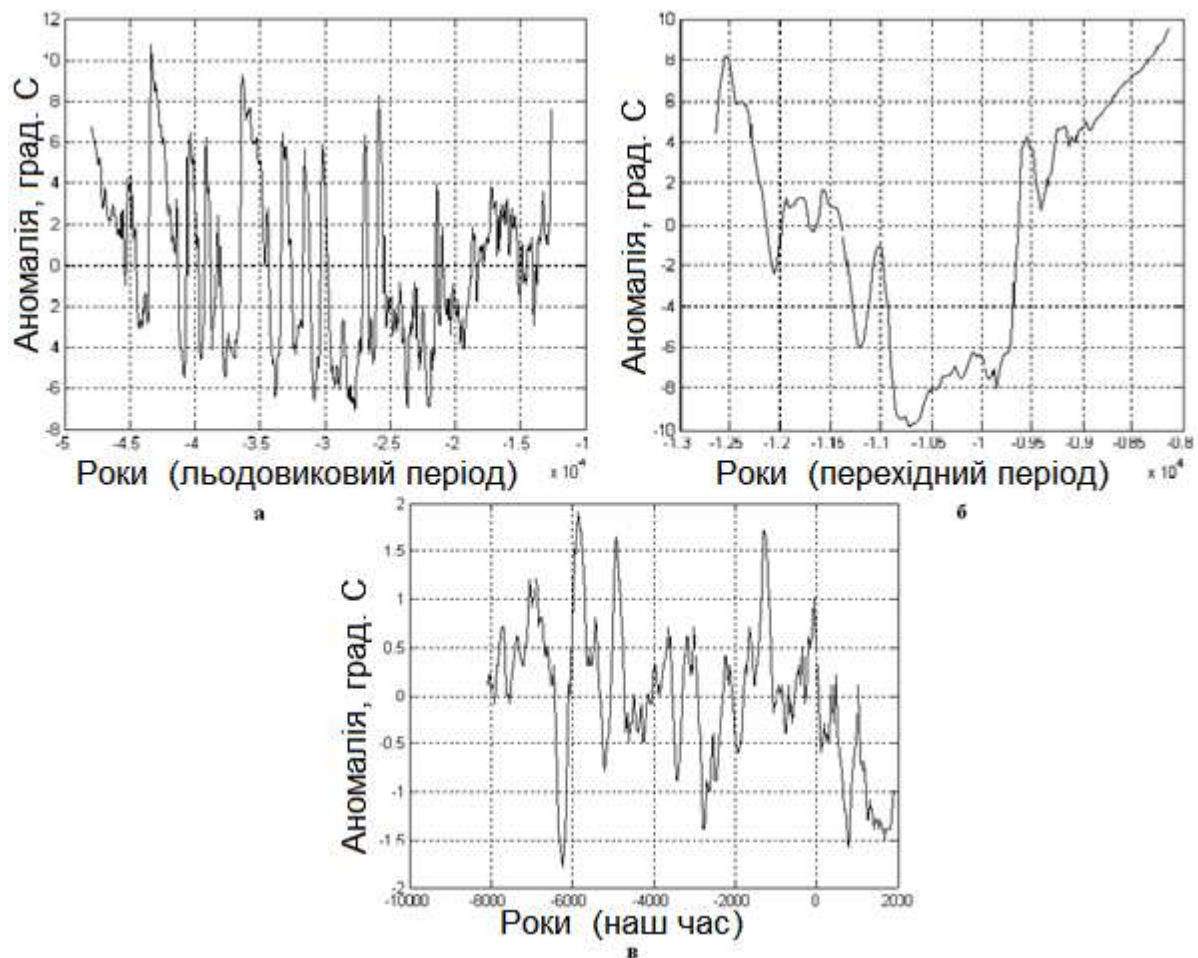


Рис. 4.5 – Ряди аномалій температури в центральній частині Гренландії по трьох часових періодах з дискретністю 30 років

Проведений аналіз показав, що більша частина енергетично значущих мод спектрів лежить у низькочастотній області. Це пов'язане з тим, що прийняте припущення про стаціонарність процесу усередині кожного з розглянутих періодів не зовсім вірне. Усередині кожного періоду все-таки середнє значення змінюється, що і дає потужний низькочастотний відгук у спектрі. Тому відображати спектри є сенс тільки в їхній низькочастотній області, тому що у високочастотній частині спектра моди не видні. При проведенні аналізу перших 35280 років, які являють собою льодовиковий період, був отриманий енергетичний спектр у його низькочастотній частині, наведений на (рис. 4.6, а).

Його аналіз дозволив розставити в порядку зменшення енергії наступні коливання. Найбільшу моду (мода 1 величиною 1748) має квазівісімнадцятитисячорічне коливання (17857 років) – найпотужніше

коливання, що визначається впливом кліматоутворювального фактора і, можливо, пов'язане з фазами стиску і розширення нашої планети, які були виявлені Мартяновим у ході досліджень [17]. Як визначив автор, потепління на Землі збігаються з фазами стиску, а похолодання – з фазами розширення. Ці пульсації спостерігаються з періодичністю приблизно 20...18 тисяч років, що добре збігається з результатами аналізу.

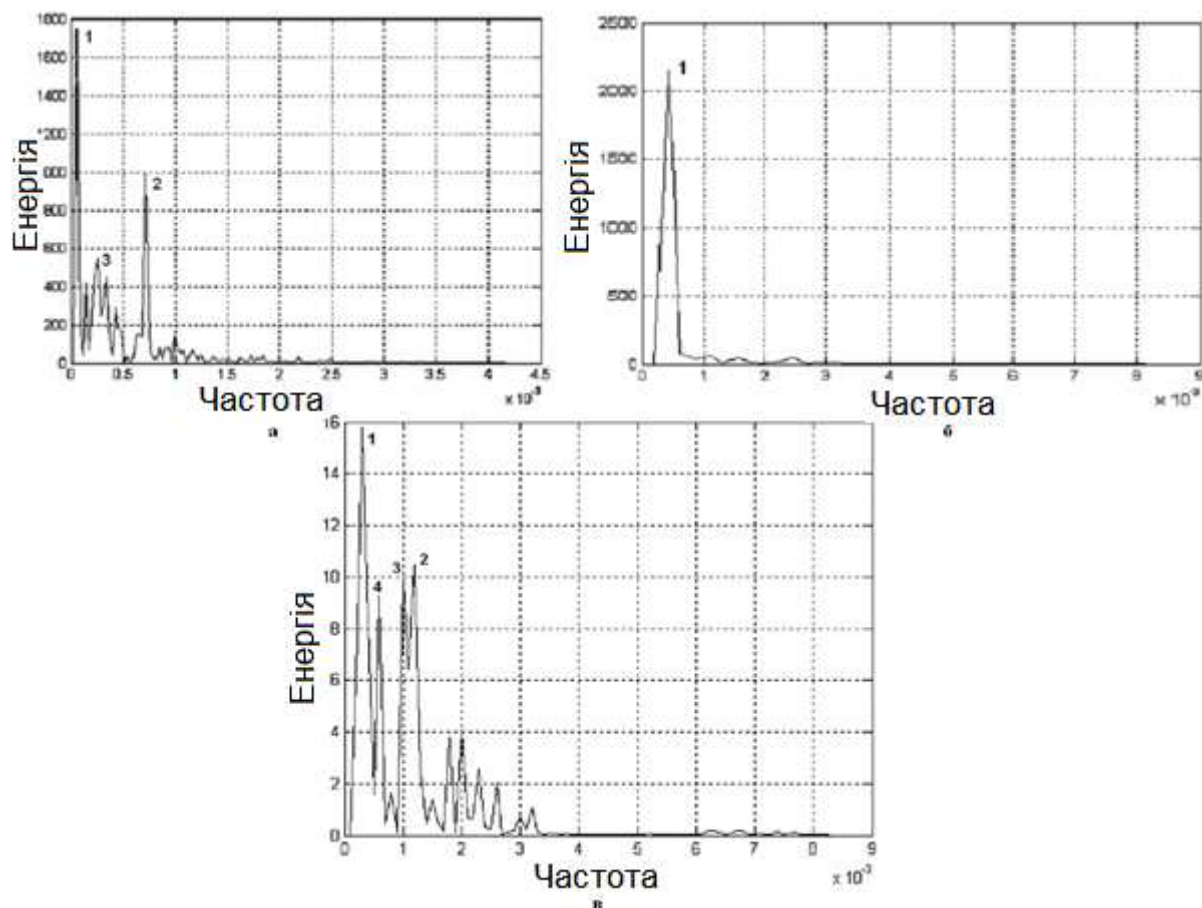


Рис. 4.6 – Низькочастотна частина енергетичного спектра аномалій льодовикового періоду (а), перехідного періоду (б) і після льодовикового періоду – нашого часу (в)

Другим за величиною енергії (мода 2 зі значенням 997) є коливання з періодичністю в 1408 років. Меншим (мода 3 з величиною 543) з найбільше енергетично значимих коливань є квазічотириохтисячорічне коливання з періодом в 3921 рік.

Особливий інтерес становлять результати Фур'є-аналізу даних, що відносяться до перехідного періоду (рис. 4.6, б). При порівнянні (рис. 4.6, а і 4.6, б) можна побачити значну різницю в енергіях спектральних мод. Головна мода льодовикового періоду становить 80% від головної моди перехідного періоду. Це свідчить про те, що енергетичні зміни в

перехідний період були більше істотними, ніж у льодовиковий період. Часовий відрізок перехідного періоду представлений стійким зростанням температури повітря з малими амплітудами коливань. На цьому тлі яскраво виділяється різка зміна температури повітря – спочатку різке підвищення, а потім різке зниження в межах 12...13 тисяч років тому. Цей температурний сплеск може зумовлюватись глобальною катастрофою, пов'язаною з падінням космічного тіла. У результаті цієї катастрофи в північній півкулі одночасно загинуло близько 70% всіх рослин і тварин. У літературі існує багато свідчень про цю катастрофу. В [18] описуються результати геологічних досліджень: „в південноамериканських Андах, у горах, на висоті 4200 м, геологи виявили сліди морських опадів! У тім же районі деякі руїни в Тиауанако (на висоті 4300 м) виявилися залитими двометровим шаром рідкого бруду, причому джерело затоплення знайти не вдалося... Фрагменти кістяків людей і тварин, віком більшим за 12 тисяч років лежать у хаотичному безладді разом з обробленими каміннями, знаряддями, інструментами та незліченною кількістю інших предметів”. Так, в Америці більше 70 видів великих ссавців вимерли між 15000 і 8000 роками до н.е. Однак більше 40 мільйонів тварин не були рівномірно розподілені по всьому періоді; загибель основної їхньої частини доводиться на дві тисячі років між 11000 і 9000 роками до н.е., відома також динаміка зникнення видів – протягом попередніх 300 тисяч років зникли всього близько 20 видів.

На (рис. 4.6, б) добре видно, що найважливішим і максимальним з енергії є коливання з періодом 2272 року (мода 1), інші сплески мають в 43 і більше раз меншу енергію. Те, що потепління в перехідному періоді не було монотонним, підтверджується детальними палеокліматичними реконструкціями. Загальне підвищення температури переривалося великими і малими похолоданнями різної тривалості. Два великих з них, які мали місце в період 14...12 тисяч років тому, одержали найменування древній і середній дріас. У кульмінацію цих похолодань льодовитість акваторії північної півкулі досягала в першому випадку 8 балів, у другому – 6 балів. Вони були розчленовані інтерстадіалом бьоллінг, коли льодовитість знижувалася до 2 балів, тобто до рівня, що мав місце в період потепління раннього середньовіччя. Це підтверджується даними з деградації льодовиків на островах Європейської частини Арктики і температурною амплітудою, визначеною по біологічних індикаторах з урахуванням впливу континентальних льодів. До звільнення від льоду Арктичного басейну в аллереді (12...11 тисяч років тому) привів надзвичайний і яскраво виражений ріст температури поверхневих вод на 6,0...10,0 °С на більшій частині акваторії. Цей факт був установлений за допомогою палеотемпературного і мікропалеонтологічного аналізів донних відкладів Атлантики. Тривалість кульмінації можна оцінити

приблизно в 500 років [19].

Після перехідного періоду ближчого до нашого часу знаходиться голоцен – типова міжльодовикова епоха з відносно стабільним кліматом. Періодизація голоцену на основі схеми Блітта-Сернандера: Субатлантичний період (0...2500 років тому), Суббореальний період (2500...5000 років тому), Атлантичний період (5000...8000 років тому) – найтепліший і найвологіший період голоцену, Бореальний і пребореальний періоди (8000...10300 років тому), Древній голоцен (раніше 10300 років тому).

Для досліджуваної післяльодовикової епохи або нашого часу, що містить у собі чотири перших з перерахованих вище періодів, характерним є розмаїтість гармонік (рис. 4.6, в). Серед них можна виділити в порядку зменшення енергії наступні коливання: коливання з періодичністю 3333 року (мода 1); наступною за значимістю фіксується коливання з періодичністю 833 року (мода 2); далі, проявляється гармоніка з періодичністю 1000 років (мода 3); фіксується періодичність в 1666 років (мода 4). більш дрібні гармоніки, які залишилися, мають амплітуду в 3...5 разів меншу, чим вищевказані.

Результати розрахунків зведені в таблицю 4.1. Курсивом виділені періодичності, які простежуються протягом тривалого часу і є найбільш характерними для приземної температури, напівжирним шрифтом – ті гармоніки, які знайшли своє продовження в наступному періоді.

Таблиця 4.1 – Періодичності процесів, визначені в результаті Фур'є-аналізу

Льодовиковий період		Перехідний період		Післяльодовиковий період	
Амплітуда	Період	Амплітуда	Період	Амплітуда	Період
1748	17857				
416	7143				
543	3921				
448	2941			15.8	3333
295	2325	2143	2272		
997	1408			9.3	1666
80	1176				
80	1063				
130	1000			9.9	1000
72	862			10.4	833
		50	645		
40	578				
38	543			4	500
34	458			2.5	435
23	400	50	411	2	385

Порівняльний аналіз цих трьох періодів дозволив виявити деякі

закономірності часової мінливості в коливальних процесах. У всіх трьох розглянутих періодах відзначається квазічотирихтисячорічне коливання.

Тисячорічне і п'ятисотрічне коливання характерні як для льодовикового, так і для післяльодовикового періодів, але не спостерігаються в перехідному періоді. Взагалі, динаміка температури повітря в перехідному періоді настільки стійка й однозначна, що різноманіття гармонік протягом 4,5 тис. років не фіксується. Виявлені гармоніки характеризують, очевидно, ті деякі коливання, які були властиві кліматичній системі Землі в перехідному періоді. Самим потужним з них є квазічотирихтисячорічна періодичність.

Крім того, у післяльодовиковому періоді можна виділити кратні гармоніки: 3333→1666→833 року, а так само: 1000→500 років. Для льодовикового періоду така кратність гармонік досить умовна: 2325→1176, 1408→2941. Також простежуються періодичності близькі до 2,5 тис. років (2941 і 2325 років), ці коливання найбільш близькі до періодів варіацій магнітного поля Землі, що становить 2700 років. Причому, ця циклічність стає більше тривалою за часом: приблизно 45...46 тис. років тому вона становила 1500 років, пізніше – 2350 років, і востаннє в період максимуму заледеніння вона виявилася як коливання в 2600 років [17]. Далі, у перехідний період, ця гармоніка стає практично єдиною, яка має максимальну енергію й, отже такою, що впливає на клімат тієї епохи. Однак у післяльодовиковий період ця циклічність зникла і більше не простежувалася, а з'явилися нові цикли в 1666 і 1000 років, які можуть бути також пов'язані з активізацією геологічних процесів на планеті.

Зміни температури повітря в льодовиковий період описуються осциляціями Дансгора-Ешгера, які характеризуються різкими змінами клімату і являють собою високочастотну циклічність (1000, 1450 і 3000 років). Під час останнього льодовикового періоду цих змін налічується 23 (рис. 4.4, в). Ці осциляції в північній півкулі проявляються у вигляді швидкого (десятиріччя) потепління з наступним поступовим похолоданням (у віковому масштабі). Різниця температур під час осциляції в Гренландії досягала 15,0 °С.

Причини появи цих осциляцій неясні, однак можливий зв'язок з подіями Хайнриха [20] – явищами порушення термохалінної циркуляції, які викликали похолодання в північній півкулі. Події Хайнриха, визначаються наявністю шарів, насичених детритом, перенесеним айсбергами, у результаті періодичної нестабільності льодяних потоків з північноамериканського Лаврентийського льодовикового щита протягом останніх 70...60 тисяч років і являють собою циклічність середньої періодичності (5000 і 10000 років) [21].

У перехідний період також можна говорити про цикли другого рівня – це багатовікові цикли Бонда з періодом 1470 ± 500 років. Усього протягом

сучасного післяльодовикового періоду було виявлено 8 таких циклів Бонда, і варіації температур у їхніх рамках були досить значні (рис. 4.4, а). Події Бонда можуть також корелювати з 1800-річним циклом місячних припливів [22], 1850-річний цикл також характерний для коливань льодовиків.

На думку авторів [21], у морських опадах Північної Атлантики цикли Дансгора-Ешгера виявлені як цикли Бонда, кожен цикл Бонда закінчується шаром айсбергових опадів, у результаті розвантаження Лаврентийського льодовикового щита, тобто подією Хайнриха. Тепла фаза подій Дансгора-Ешгера наставала, коли осадження айсбергових відкладень закінчувалося. Збіг подій Дансгора-Ешгера і циклів Бонда говорить про те, що відкол айсбергів у Гренландії та на Лаврентийському щиті відбувався майже одночасно, у Гренландії, як правило, трохи раніше. Безумовно, ці події впливали на кліматичні умови обох півкуль.

Проведений Фур'є-аналіз перетвореного ряду реконструйованої температури в центральній частині Гренландії за даними льодових кернів, дозволив зробити наступні висновки:

- 1) розподіл перетвореного ряду реконструйованої температури в центральній частині Гренландії на три часових відрізки, представляється доцільним, тому що це дозволило виділити властиві кожному часовому періоду коливання та закономірності коливань;
- 2) найбільшу енергію має коливання з періодичністю 17857 років – саме потужне коливання льодовикового періоду, що можливо пов'язане з фазами стиску і розширення нашої планети, потепління на Землі збігаються з фазою стиску, а похолодання – з фазами розширення. Ці пульсації спостерігаються з періодичністю приблизно 20...18 тисяч років, що добре погоджується з результатами розрахунків;
- 3) також у льодовиковий період простежуються гармоніки близькі до 2,5 тисяч років (2941 і 2325 років), ці коливання найбільш близькі до періодів варіацій магнітного поля Землі, що становить 2700 років. У перехідний період ця гармоніка стає єдиною, яка має максимальну енергію і, отже, впливає на клімат тієї епохи. Однак, у післяльодовиковий період ця циклічність зникла і більше не простежувалася, а з'явилися нові цикли в 1666 і 1000 років;
- 4) у післяльодовиковому періоді максимальну енергію має гармоніка з періодичністю 3333 року, а також простежується 1666-річне коливання, що цілком відповідає багатовіковим циклам Бонда, кожен з яких є кліматичною подією і, можливо, є наслідком змін у термохалінній циркуляції;
- 5) застосування методів Фур'є-аналізу для ряду аномалій

реконструйованої температури повітря дозволило виявити тільки довгоперіодичні коливання, яким властива максимальна енергія. Для виявлення короткоперіодичних коливань, які мають значно меншу енергію, необхідно провести високочастотну фільтрацію рядів або застосувати методи аналізу нестационарних рядів.

4.3 Гармонійний аналіз нестационарного ряду температурної палеорекострукції для центральної частини Гренландії

Як показано в попередньому підрозділі часто використовуване для гармонійного аналізу гідрометеорологічних рядів одновимірне перетворення Фур'є дозволяє виділити найбільш значимі періодичності відповідно до величини енергії, яка доводиться на кожне коливання. Припущення про стаціонарність досліджуваного ряду при проведенні гармонійного аналізу приводить до одержання в спектрі постійної складової, яка за потужністю на 4...5 порядків перевищує спектральні складові, які цікавлять дослідника [23]. Гармонійний аналіз аномалій температур усього ряду, як це прийнято в кліматології та метеорології, також проблеми не вирішує, тому що спектральні компоненти, які цікавлять дослідника, виявляються на 3...4 порядку менше постійної складової. Розбивка всього ряду аномалій температур на великі геологічні періоди знову ж проблеми не вирішує, тому що ряд залишається за математичним очікуванням нестационарним і, отже, від постійної складової, яка на 2...3 порядку перевищує досліджувані спектральні компоненти, позбутися не вдається. Так ще додаються втрати в спектральних компонентах через розбивку досліджуваного ряду. Потрібно переходити до методів Фур'є-фільтрації вихідного ряду температур або ряду температурних аномалій. У цьому випадку через дискретність ряду також виникають складності з вибором функції зважування часових відліків при фільтрації.

Аналіз реконструйованого температурного ряду (рис. 4.3) дозволяє прийти до висновку про те, що цей ряд є випадковим процесом, оскільки неможливо простежити характер причинно-наслідкових зв'язків зміни температури в джерелі. Необхідність використання для опису ряду теорії випадкових процесів зумовлюється природою кліматичних процесів і недоліком апріорних відомостей про останній [24]. Випадковість процесу складається із двох компонентів – швидких змін значень температури та повільних змін значень температури. Повільні зміни значень температури мають тривалий період зміни і у загальному можна їх вважати модульовальною функцією, або трендом випадкового процесу [25]. Подібний підхід до випадкового процесу, з погляду на його характеристики, дозволяє віднести його до класу нестационарних

випадкових процесів, оскільки не виконуються умови стаціонарності ні у вузькому сенсі (статистичні характеристики стійкі, залежать тільки від часових зсувів і не залежать від самих значень часу), ні в широкому сенсі (моментна функція першого порядку постійна і моментна функція другого порядку залежить тільки від часових зсувів і не залежить від самих значень часу) [26].

Оскільки передбачається проводити гармонійний аналіз нестационарного випадкового процесу, то для одержання спектральних характеристик, що відображають часові зміни процесу або його поточні властивості, можна скористатися миттєвим спектром потужності $G(\omega, t)$ процесу $\xi(t)$, відповідно до якого [27]:

$$G(\omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} |S_t(\omega)|^2, \quad (4.1)$$

де $|S_t(\omega)|^2 = \int_0^t \xi(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |S_t^{(i)}(\omega)|^2$ і $S_t^{(i)}(\omega) = \int_0^t X_i(t) e^{-j\omega t} dt$, $X(t)$ – реалізація випадкового процесу, у нашому випадку – одна.

У нашому випадку, вирішуючи питання про допустимість визначення спектральної функції $G(\omega, t)$ по одній реалізації, необхідно знати, чи відноситься досліджуваний процес до класу, який характеризується властивістю узагальненої ергодичності, оскільки при визначенні поточних значень характеристик нестационарних процесів усередненням за часом мають місце принципові обмеження точності оцінки. Тому при поділі нестационарних випадкових процесів на два види – які допускають і які не допускають оцінку за допомогою усереднення за часом – вводять критерій. Цим критерієм є середній квадрат помилки δ . Для процесу з узагальненою поточною ергодичністю ця помилка, яка включає в себе поточні помилки через скінченність інтервалу спостереження, через зсув оцінки, через зміну виду функції $s(t)$, яка описує часову залежність досліджуваної характеристики від реалізації до реалізації, позначена як $\delta_{f \min}^t$ повинна бути менше деякого граничного значення середнього квадрата помилки δ_{nop} . Процеси з узагальненою поточною ергодичністю характеризуються повільною нестационарністю. Це дає можливість довести інтервал усереднення до досягнення значення помилки $\delta_{f \min}^t < \delta_{nop}$. Таким чином, процес із узагальненою поточною ергодичністю повинен задовольняти умову (4.2):

$$R(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} K_{2s}(t, \tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} K_{2x}(t, \tau) d\tau} \gg 1 \quad (4.2)$$

де $K_{2s}(t, \tau)$ – поточна кореляційна функція $s(t)$, $K_{2x}(t, \tau)$ – поточна кореляційна функція процесу $X(t)$.

У теорії нестационарних процесів відомі два напрямки їхнього аналізу: поширення положень теорії стаціонарних випадкових процесів на нестационарні випадкові процеси і розробка спеціальних методів аналізу нестационарних випадкових процесів [27]. Для проведення досліджень був обраний перший напрямок аналізу – стаціонаризація одного з параметрів випадкового процесу, а саме, математичного очікування.

При аналізі нестационарних процесів, представлених однією реалізацією, умови нестационарності не дозволяють значно збільшити тривалість реалізації. Щоб вийти із цього положення, потрібно реалізацію нестационарного випадкового процесу розділити на ділянки тривалістю T . При цьому характер ділянок і час T вибираються такими, щоб із заданим ступенем точності можна було оцінки характеристик процесу на кожній ділянці вважати стаціонарними. Знаючи оцінки на ділянках, можна потім побудувати графіки зміни характеристик процесу в часі. Найбільший інтерес представляє вибір оптимальної тривалості ділянки реалізації T_{opt} , при якій сумарна похибка оцінки буде мінімальною.

Таким чином, для процесів, що відносяться до класу процесів з узагальненою поточною ергодичністю, характерна мала зміна функції $s(t)$ від реалізації до реалізації і повільна зміна в часі. У нашому випадку реалізація одна, вона відноситься до класу процесів з узагальненою поточною ергодичністю і, виходить, у процесі дослідження потрібно згодом оцінювати помилку при різних значеннях часових усереднювань процесу, оскільки задатися значенням δ_{nop} при наявності однієї реалізації досить проблематично.

Підбиваючи підсумок міркуванням можна визначитися з методикою дослідження. Застосувавши до процесу процедуру згладжування одним з відомих методів (лінійна регресія, ковзне середнє, вейвлет-обробка або ін.) одержимо його оцінку математичного очікування. Потім віднімаємо ординати отриманої кривої математичного очікування з відповідних ординат реалізації, тим самим одержуємо процес, стаціонарний за математичним очікуванням. Після цього здійснюємо перетворення Фур'є отриманого стаціонарного процесу. Процедуру перетворення Фур'є потрібно застосувати багаторазово до стаціонарного процесу, щоразу змінюючи час осереднення при згладжуванні. Оцінку точності при цьому

варто проводити, порівнюючи отримані спектри і оцінюючи їх по відомих кліматичних і геологічних подіях. Застосуємо два зі згаданих вище методів згладжування, а саме, ковзного середнього і вейвлет-обробки. Для виявлення енергетично найбільш виражених періодів коливань застосуємо апарат спектрального Фур'є-аналізу математичного пакета прикладних програм MatLab.

Для проведення осереднення необхідно вибрати такі періоди, процеси з якими простежуються протягом тривалого часу і є найбільш характерними для досліджуваного ряду приземної температури повітря. Попередній аналіз досліджуваного ряду температур показав, що для осереднення вихідного ряду температур потрібно використати кілька часових відрізків $T_{осер}$ різної тривалості.

Представлений у роботі [10] аналіз тисячорічних змін клімату за даними GISP2 ^{18}O , показав наявність яскраво виражених періодичностей у діапазоні 830...1050 років. Вейвлет-аналіз GISP2 [28] також показав наявність домінуючих періодичностей 1130...1140, 790...770, 560...590 і 390...360 років. У роботах [22, 29] виділена добре виражена періодичність $\sim 1\ 500$ років, що зветься циклом Бонда і визначається під час голоцену в основному за матеріалами флуктуацій в уламках айсбергового льоду. Події Бонда можуть бути міжльодовиковими аналогами осциляції Дансгора-Ешгера 1470-річної циклічності, з магнітудою близько 15...20 % від льодовиково-дольодовикової температурної зміни [30]. Таким чином, для кліматичних змін найбільш характерна періодичність $\approx 1470 \pm 500$ років [8, 10]. Крім того, у роботі [31] показано, що для кліматичних змін також характерні циклічності з періодом 2000...3000 років.

Раніше застосовані методи Фур'є-аналізу [23] і вейвлет-аналізу [32] до перетвореного ряду реконструйованих значень приземної температури повітря за ~ 50000 років у центральній частині Гренландії, також дозволили виділити основні гармоніки з періодами в 2500, 1500, 1000 і 450 років. Таким чином, незважаючи на різні ряди, використовувані для виявлення значимих періодичностей, у результаті отримані близькі значення. Отже, для досліджень виберемо три значення часу осереднення: 1-е – у межах 400...500 років, 2-е – близько 2000 років і 3-е – до 4000 років. Процес із періодом в 4000 років, у принципі, може бути описаний подіями Хайнриха [20] – явищами порушення термохалінної циркуляції, які спричинили похолодання в північній півкулі.

Результати осереднення представлені на (рис. 4.7, а-і). На рисунках зображений вихідний ряд температур з накладеним на нього власним трендом, обчисленим методами ковзного середнього і вейвлет-перетворенням, з різним часом осереднення. Осереднення методом ковзного середнього традиційно, описано раніше і особливих пояснень не вимагає. Осереднення вейвлет-перетворенням здійснювалося шляхом

вейвлет-розкладання процесу до певного рівня, який відповідає заданому часу осереднення, з наступним вейвлет-відновленням тільки апроксимуючих коефіцієнтів на один рівень нагору. Ці відновлені на один рівень апроксимуючі коефіцієнти і являють собою тренд процесу із заданим часом осереднення. Час осереднення $T_{осер}$ залежно від рівня розкладання n обчислюється за формулою (4.3):

$$T_{осер} = 30 \cdot 2^{n-1}, \quad (4.3)$$

де число 30 відповідає кроку за часом досліджуваного ряду (роки).

Для проведення дослідження обраний досить довгий симетричний вейвлет sym10 . Втім, для побудови тренду тип вейлета особливої ролі не грає, тому що часовий масштаб аналізу визначає глибина розкладання, а не довжина вейлета, а застосування вейлета з більш коротким носієм додасть деяку незграбність отриманому тренду. Застосування ж у нашому випадку більше протяжного вейлета більшого згладжування процесу не здійснить, але збільшить час рішення завдання.

Проведене осереднення методом ковзного середнього і шляхом вейвлет-розкладання процесу, з використанням найменшого періоду осереднення в межах 400...500 років, показало, що тренди практично повторюють вихідний ряд реконструйованих температур, а результати осереднення різними методами відрізняються незначно (рис. 4.7, а, б).

Використання другого періоду осереднення в межах 2000 років, при осереднення методом ковзного середнього і шляхом вейвлет-розкладання процесу показало, що тренди значно відрізняються від вихідного ряду реконструйованих температур. Період осереднення в 2000 років дозволив позбутися в тренді від значної частини короткоперіодичних коливань. Крім того, результати осереднення, проведені різними методами, також значно відрізняються. Метод вейвлет-розкладання дав більше згладжений результат (рис. 4.7, в, г). Тренди в обох випадках добре характеризують вихідний ряд температур, виявляючи основні закономірності його динаміки.

Третій період осереднення в 4000 років, використаний у методах ковзного середнього і вейвлет-розкладання, дав задовільні результати.

Слід зазначити, що тренди в цьому випадку істотно відрізняються від вихідного ряду реконструйованих температур. Період осереднення в 4000 років дозволив позбутися більшої частини коротко- і середньоперіодичних коливань. Крім того, результати осереднення, отримані різними методами, сильно відрізняються (рис. 4.7, д, е). Отримані тренди в обох випадках виявляють тільки основні тенденції динаміки вихідного ряду температур.

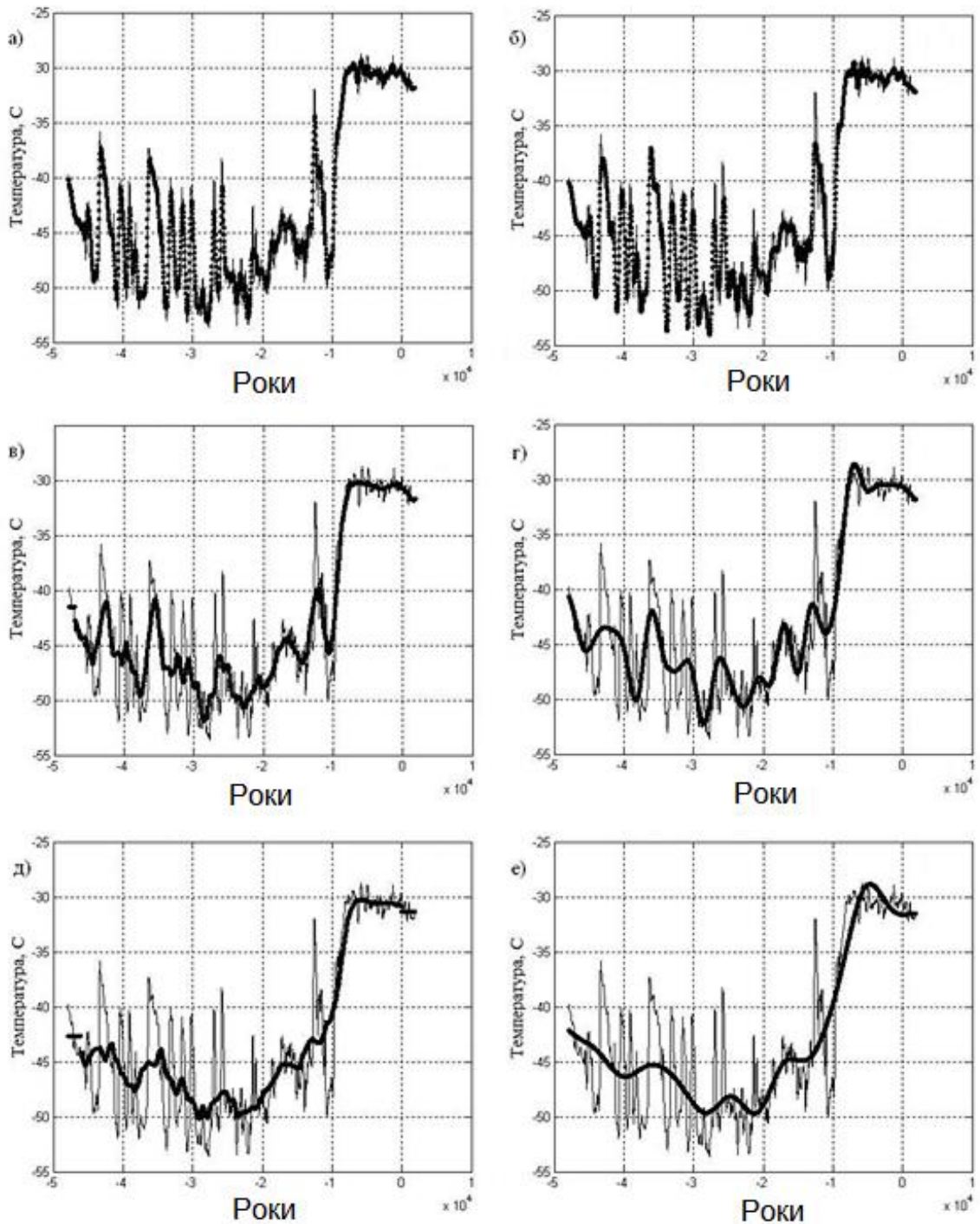


Рис. 4.7 – Вихідний ряд реконструйованих температур (вузька лінія) з накладеними трендами (широка лінія): отриманими методом ковзного середнього – (а) із часом осереднення 450 років, (в) із часом осереднення 1950 років, (д) із часом осереднення 3870 років, і отриманими методом вейвлет-перетворення – (б) із часом осереднення 480 років, (г) із часом осереднення 1920 років, (е) із часом осереднення 3840 років

Таким чином, часовий відрізок в 4000 років, використаний для осереднення та інтерпретований як події Хайнриха, дав самі гірші результати. Причина цього полягає в тому, що, чим більший період осереднення використається, тим більше згладжений ряд виходить, який відбиває тільки саму загальну тенденцію ходу температур.

Крім того, події Хайнриха, протягом усього періоду їхніх спостережень, не мають постійної періодичності й можуть змінюватися від 4000 до 10000 років, що пов'язано з енергетикою процесу, який приводить до реалізації події.

Зміна періодичності події Хайнриха у два–два з половиною рази, нехай навіть на досить великому часовому відрізку, приведе до того, що при осереднення з використанням постійної величини 4000 років, відбудеться втрата значних подій основного ряду температур. Так, проведене осереднення в 4000 років призвело до втрати яскраво вираженого сплеску, що описує різку зміну температури повітря – спочатку різке підвищення, а потім різке зниження в межах 11...13 тисяч років тому. Саме цей часовий відрізок, що характеризується стрімким спадом температури, називається пізнім дриасом і у геохронології є завершальним етапом останнього заledenіння [33–36].

Далі проводилася стаціонаризація одного з параметрів випадкового процесу, а саме, математичного очікування. Зі значень процесу віднімалися значення тренду, після чого проводилося Фур'є-перетворення стаціонаризованого ряду температур. У результаті проведеного Фур'є-перетворення отримані спочатку амплітудно-фазові частотні спектри і на їхній основі розраховані енергетичні спектри. Всі енергетичні спектри нормувалися за тривалістю для того, щоб одержати можливість порівнювати їх між собою за рівнем енергії. Графічне відображення спектрів не стандартне, а трансформоване: по осі ординат всіх отриманих спектрів відкладені нормовані значення енергії спектральних компонентів (мод), а по осі абсцис відкладена не частота, а час, тобто період (у роках) появи відповідного спектрального компонента. При цьому максимальна ширина спектра буде визначатися половинною частотою самого короткоперіодичного процесу, яким є крок ряду рівний 30 рокам. Таким чином, максимальна ширина спектра складе значення, рівне $1/60$ років⁻¹, а розв'язна здатність спектра складе значення, яке залежить від величини вибірки, тобто від довжини ряду.

Результати розрахунків відображені графічно на (рис. 4.8...4.10) для різних періодів і методів осереднення. Розглянемо результати стаціонаризації ряду реконструйованих температур методом ковзного середнього з часом осереднення 450 років (рис. 4.8, а). Аналіз стаціонаризованого ряду показав, що в льодовиковому й перехідному періодах спостерігаються більші коливання температури за амплітудою

($>4,0^{\circ}\text{C}$), але малі за тривалістю. Це свідчить про досить різкі коливання енергії, що затрачається на реалізацію процесу зміни температури. У голоцен амплітуда цих коливань досягає $\sim 1,0^{\circ}\text{C}$, тобто цей період часу характеризується стійкістю, майже незмінними значеннями енергії. Результати стаціонаризації ряду реконструйованих температур методом вейвлет-перетворення з часом осереднення 480 років показали, що в льодовиковому і перехідному періодах коливання температури за амплітудою досягають $\sim 6,0^{\circ}\text{C}$ і також є малими за тривалістю (рис. 4.8, в).

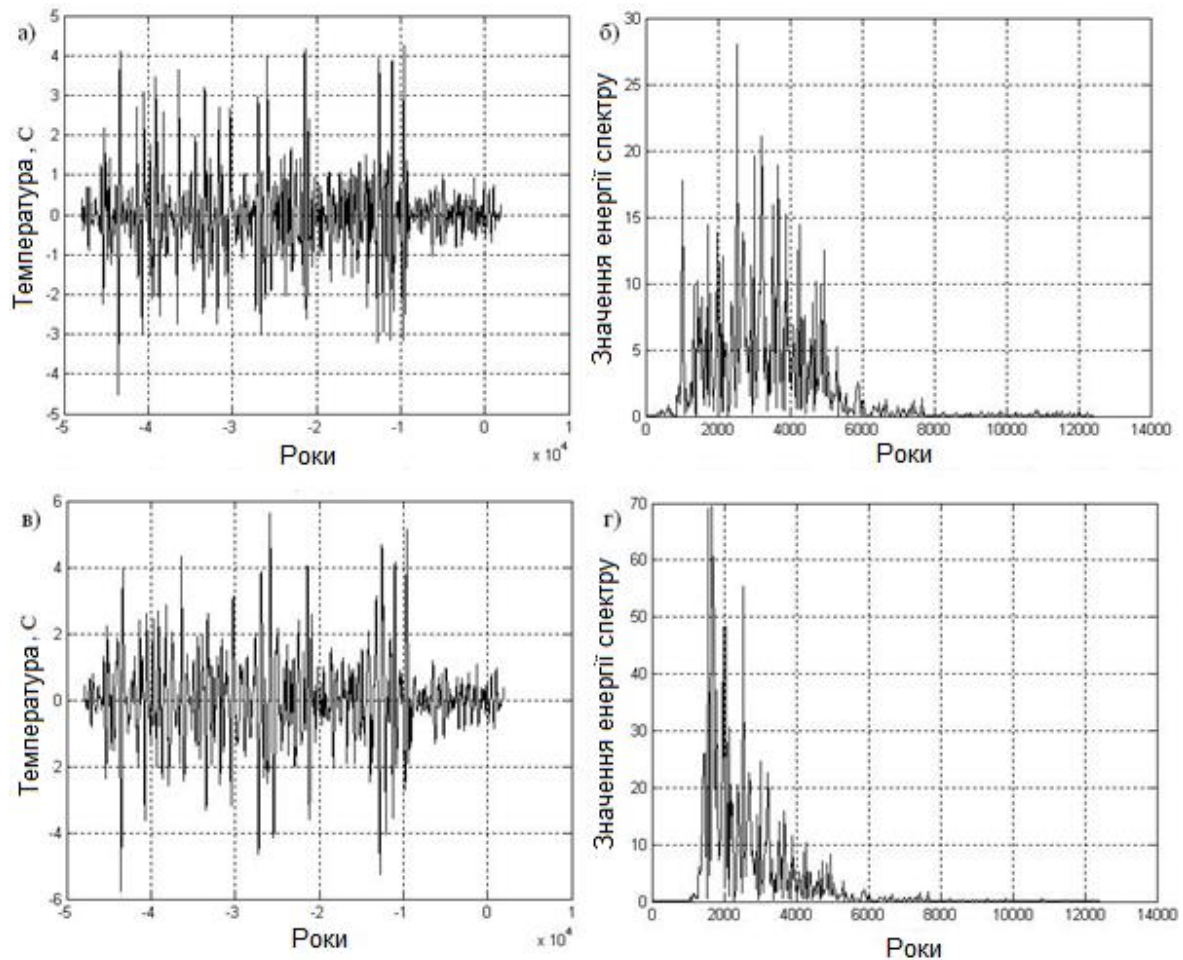


Рис. 4.8 – Стаціонаризований вихідний ряд реконструйованих температур: отриманий методом ковзного середнього (а) з часом осереднення 450 років і його спектр (б); отриманий методом вейвлет-перетворення (в) з часом осереднення 480 років і його спектр (г)

Графічне відображення спектрів, отриманих у результаті Фур'є-перетворення стаціонаризованого ряду температур, показало значні відмінності, обумовлені різними методами осереднення. Спектр, розрахований на основі стаціонаризованого методом ковзного середнього ряду дав досить великий часовий розкид гармонік від 1000 до 6000 років,

максимальна з яких, відповідає періоду ~ 2500 років (рис. 4.8, б). Аналіз спектра, отриманого на основі стаціонаризованого методом вейвлет-перетворення ряду, дав набагато менший розкид гармонік від 1500 до 4000 років, з яких треба виділити основні: з періодом ~ 1500 і 2500 років (рис.4.8, г). Завдяки тому, що всі енергетичні спектри нормувалися за тривалістю для того, щоби можна було порівнювати їх між собою за рівнем енергії, то порівняльний аналіз показав, що гармоніка 2500 років, отримана на основі стаціонаризованого методом ковзного середнього ряду, має енергію у два рази меншу, чим на основі ряду, стаціонаризованого методом вейвлет-перетворення.

Розглянемо результати стаціонаризації ряду реконструйованих температур двома методами з часом осереднення ~ 2000 років (рис. 4.9).

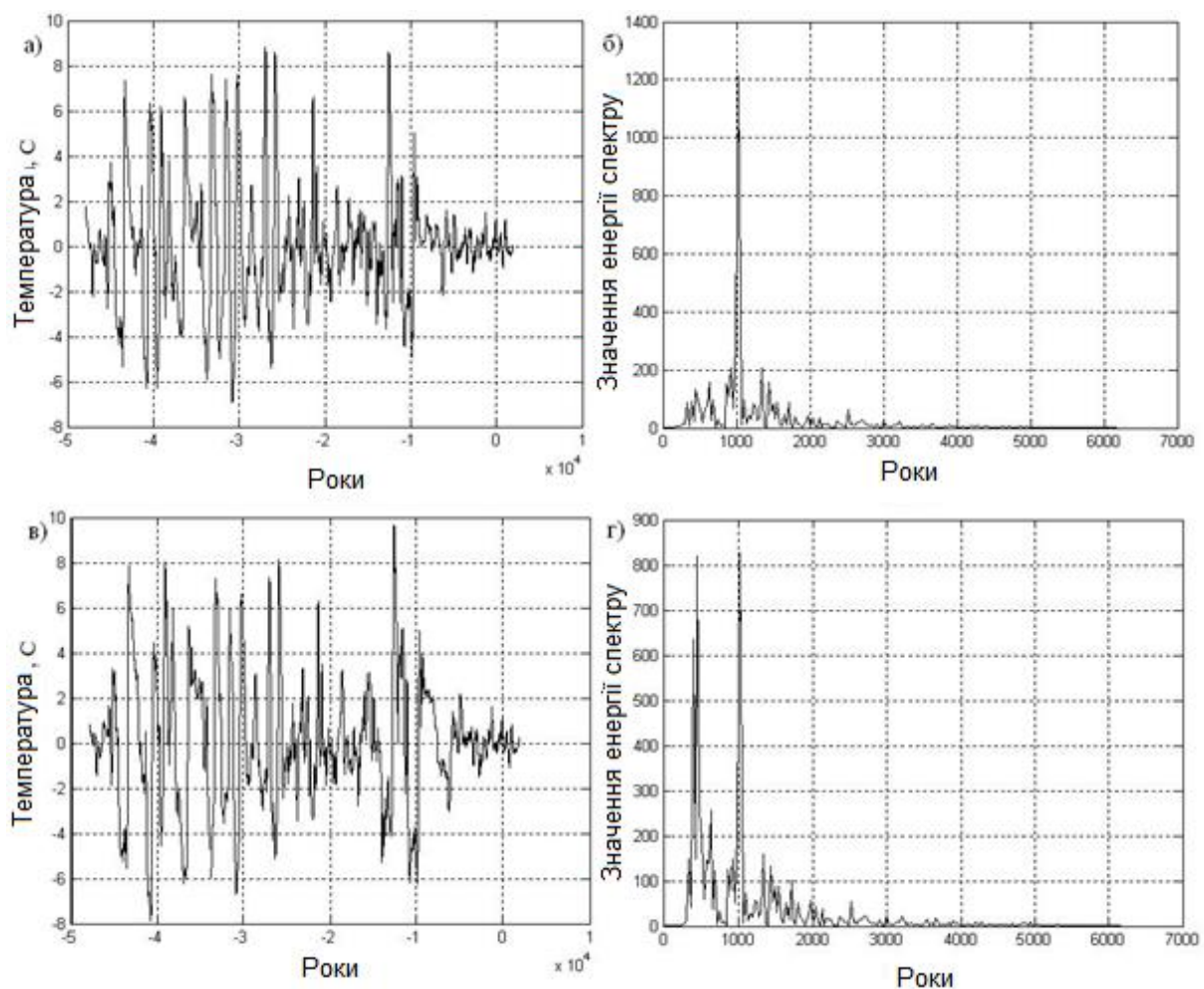


Рис. 4.9 – Стаціонаризований вихідний ряд реконструйованих температур: отриманий методом ковзного середнього (а) з часом осереднення 1950 років і його спектр (б); методом вейвлет-перетворення (в) з часом осереднення 1920 років і його спектр (г)

Аналіз стаціонаризації методом ковзного середнього ряду показав, що в льодовиковому і перехідному періодах спостерігаються більші коливання температури за амплітудою ($\sim 9,0^{\circ}\text{C}$), у голоцен амплітуда цих коливань досягає $\sim 2,0^{\circ}\text{C}$ (рис. 4.9, а). У результаті стаціонаризації методом вейвлет-перетворення ці коливання за амплітудою досягають, відповідно: $\sim 10,0^{\circ}\text{C}$, а в голоцен $\sim 3,0^{\circ}\text{C}$ (рис. 4.9, в). Спектр стаціонаризованого методом ковзного середнього ряду дав одну головну гармоніку з періодом 1000 років (рис. 4.9, б), а спектр стаціонаризованого методом вейвлет-перетворення ряду дав дві гармоніки з періодом ~ 400 років і 1000 років (рис. 4.9, г). Енергія 1000-річної гармоніки, отриманої різними методами, відрізняється незначно.

Перейдемо до аналізу результатів стаціонаризації ряду реконструйованих температур двома методами з часом осереднення ~ 4000 років (рис. 4.10). Аналіз стаціонаризованих рядів двома методами виявив однакові за амплітудою коливання в льодовиковому і перехідному періодах ($\sim 12,0^{\circ}\text{C}$) і в голоцені ($\sim 2,0^{\circ}\text{C}$) (рис. 4.10, а, в). Крім того, стаціонаризований ряд (двома методами) з часом осереднення ~ 4000 років досить добре описує вихідний ряд реконструйованих температур.

Також дуже схожі спектри стаціонаризованих рядів двома методами (рис. 4.10, б, г). В обох випадках виявлені дві основні гармоніки: з періодами ~ 300 років і 1000 років. Крім того, можна виділити два сплески зі значеннями 1300 і 1400 років. Значення енергії основних гармонік, отриманих різними методами, відрізняється незначно.

Отже, оцінимо отримані результати та порівняємо їх з результатами проведеного Фур'є-аналізу аномалій ряду реконструйованих температур, розділеного на три частини в попередньому підрозділі. Таким чином, було проведене виділення часових періодів, яким властиві свої коливання і середні значення: льодовиковий період тривалістю 35280 років (49830...14550 років тому), довжина ряду становить 1176 значень; перехідний період тривалістю 4530 років (14550...10020 років тому), довжина ряду становить 151 значення; післяльодовиковий період (наш час) тривалістю 10020 років (10020 років тому – по наш час), довжина ряду становить 334 значення. Для зменшення в спектрі частки постійної складової для кожного із трьох часових періодів було визначено середнє значення температури і відносно середнього розраховані відхилення температур, тобто аномалії. При проведенні досліджень здійснювався Фур'є-аналіз аномалій. При цьому передбачалося, що у всіх трьох аналізованих періодах процес є стаціонарним.

Представимо тепер всі отримані різними методами спектральні моди у вигляді таблиці. Проаналізуємо тільки основні моди, а саме, які найбільше часто фіксуються при розподілі ряду на періоди, а також ті моди, які мають максимальні значення енергії для стаціонаризованого

різними методами ряду (табл. 4.2).

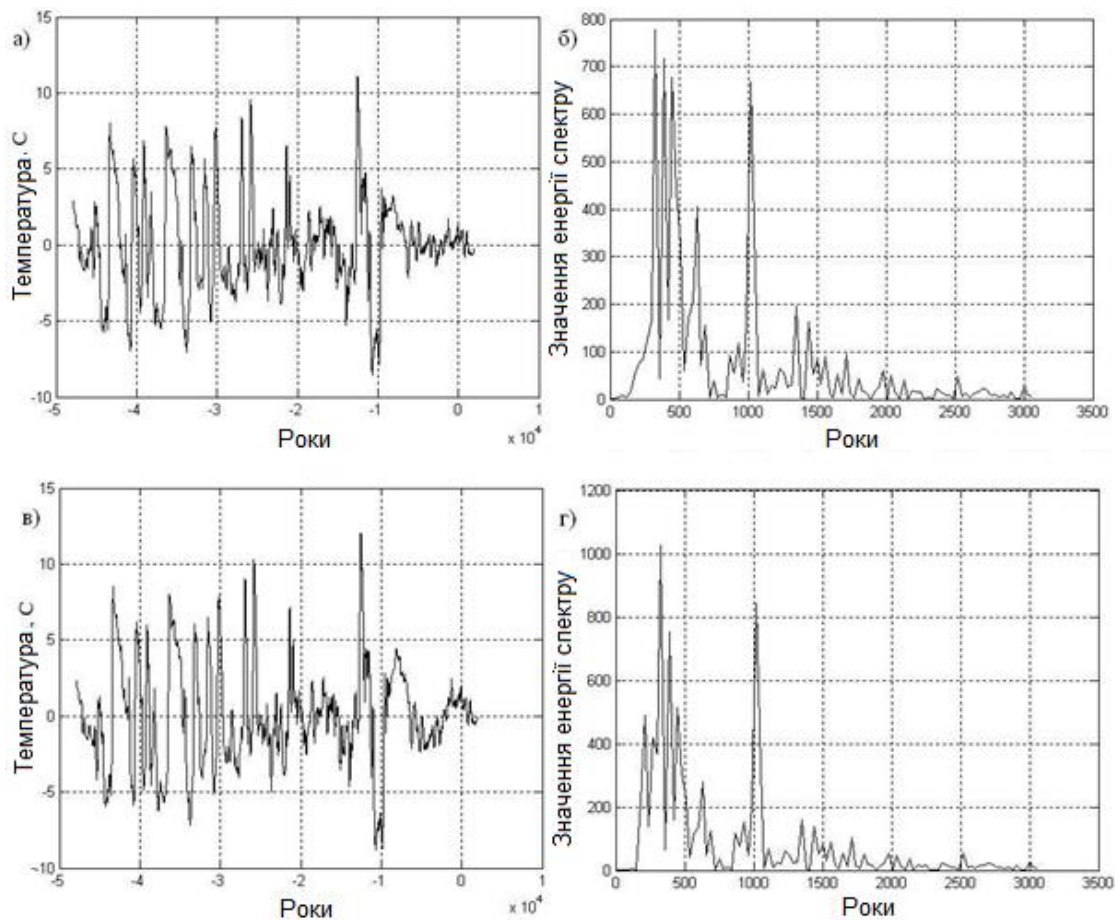


Рис. 4.10 – Стаціонаризований вихідний ряд реконструйованих температур: отриманий методом ковзного середнього (а) з часом осереднення 3870 років і його спектр (б); методом вейвлет-перетворення (в) з часом осереднення 3840 років і його спектр (г)

Таблиця 4.2 – Періодичності процесів, отримані в результаті Фур'є-аналізу

Нестационаризований ряд з поділом на періоди			Стаціонаризований ряд					
49830-14550 років тому	14550-10020 років тому	10020 років тому – по наш час	Метод ковзного середнього			Метод вейвлет-перетворення		
			Час осереднення			Час осереднення		
			450	1950	3870	480	1920	3840
Періодичність появи спектральних мод (роки)								
2325	2272		2500			2500		
1408		1666				1500		
1000		1000		1000	1000		1000	1000
400	411	385			~300		400	~300

До осциляцій Дансгора-Ешгера, які являють собою високочастотну або короткоперіодичну циклічність (1000, 1450 і 3000 років) можна віднести отримані моди 2500, 1500 і 1000 років. Тут також можна говорити про багатовікові цикли Бонда з періодом 1470 ± 500 років. Таким чином, нам відомо, що клімат і загальна зволоженість материків Північної півкулі змінювалися циклічно, в інтервалі 1500...2500 років. Як бачимо, отримані результати, добре погоджуються з відомою циклічністю процесів у кліматичній системі планети, а виявлені моди цілком порівнянні і гарно відповідають одна одній.

Проведений аналіз стаціонаризованого різними методами ряду реконструйованої за даними льодяних кернів температури в центральній частині Гренландії дозволяє зробити наступні висновки:

- 1) проведені осереднення методом ковзного середнього і шляхом вейвлет-розкладання процесу з використанням найменшого періоду осереднення в межах 400...500 років показало, що тренди практично повторюють вихідний ряд реконструйованих температур, а результати осереднення різними методами відрізняються незначно;
- 2) використання другого періоду осереднення в межах 2000 років при осередненні методом ковзного середнього і шляхом вейвлет-розкладання процесу показало, що тренди в обох випадках добре характеризують вихідний ряд температур, виявляючи основні закономірності його динаміки;
- 3) використання періоду з часом осереднення ~ 4000 років, зумовленого подіями Хайнриха, показало гірший результат. Це зумовлено тим, що події Хайнриха не мають постійної періодичності й можуть змінюватися від 4000 до 10000 років. Зміна періодичності події Хайнриха у два–два з половиною рази, нехай навіть на досить великому часовому відрізку, привели до того, що при осередненні з використанням постійної величини 4000 років відбулася втрата значної події основного ряду температур;
- 4) стаціонаризація ряду реконструйованих температур методом ковзного середнього і методом вейвлет-перетворення, показала кращі результати з часом осереднення ~ 400 і ~ 2000 років, причому метод вейвлет-перетворення дав результати, добре відповідні результатам раніше проведених досліджень;
- 5) порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами проведеного раніше Фур'є-аналізу аномалій, поділеного на три частини ряду реконструйованих температур, показав, що обидва підходи доповнюють один одного, тому що отримані моди цілком порівнянні.

Таким чином, були виявлені основні, характерні для ряду

реконструйованої температури, гармоніки, що узгоджуються із циклічністю процесів у кліматичній системі планети.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає особливість дослідження довгоперіодних кліматичних рядів?
2. Що таке льодяний керн?
3. Яким чином здійснюється визначення температури повітря за вмістом льодяних кернів?
4. Яким чином з вихідного нерегулярного ряду реконструйованих значень температури в центральній частині Гренландії був сформований регулярний ряд температур?
5. З якою метою довгоперіодний ряд температурної палеорекострукції розбивається на періоди?
6. Поясніть термін „аномалія температури”.
7. Який зміст мають гармоніки довгоперіодного ряду температурної палеорекострукції?
8. Які найбільш потужні гармоніки були виявлені в спектрі досліджуваного довгоперіодного температурного ряду?
9. Яким образом здійснюється підтвердження істинності результатів спектрального аналізу довгоперіодного ряду температурної палеорекострукції?
10. Назвіть основні підходи до аналізу нестационарних рядів.
11. З якою метою здійснюється стаціонаризація нестационарних рядів?
12. У чому полягає стаціонаризація нестационарного дискретного ряду?
13. З яких міркувань вибирається довжина аналізованого фрагмента (час осереднення) досліджуваного нестационарного ряду?

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Аномалія температурна, 106
- Годограф, 37
- Дані, 9
 - аналіз, 10
 - – двовимірний, 70
- Коефіцієнт кореляції, 100
 - – часовий лаг, 100
- Критерій Ірвина, 82
- Льодовий керн, 103
- Меандр, 26
- Метод найменших квадратів, 90
 - експонентного згладжування, 86
 - ковзного середнього, 83
 - – – зваженого, 85
 - ковзної медіани, 85
 - регресії, 88
 - – лінійної, 89
 - – – коефіцієнт детермінації, 92
- Моніторинг, 6
 - рівні, 7
 - структура, 7
- Полином, 13
 - Ермита, 13
 - Лагерра, 14
 - Лежандра, 14
 - ортогональний, 13
 - Чебишева, 14
- Послідовність дискретна, 47
 - – відліки, 47
 - – опис, 51
 - – період дискретизації, 48
 - – рівні квантування, 49
- цифрова, 49
- Перетворення Фур'є, 35
 - – властивості, 41
 - – дискретне, 56
 - – – властивості, 58
 - – дискретної послідовності, 54

- – оборотність, 45
- Рівність Бесселя, 16
- Парсеваля, 16
- Розкладання функції, 13
 - – ортогональне, 13
- Ряд часовий, 17, 77
 - – аналіз, 19
 - – – методи, 20
 - – – стадії, 19
 - – варіаційний, (див. ряд часовий ранжируваний)
 - – імовірнісні характеристики, 97
 - – – – довірчий інтервал, 98
 - – гістограма, 78
 - – дисперсія, 77
 - – – вибіркова, 78
 - – компоненти, 17
 - – медіана, 77
 - – нестационарний, 17
 - – палеорекоконструкція, 103
 - – попередня обробка, 18
 - – ранжируваний, 77
 - – рівень, 75
 - – середнє арифметичне значення, 78
 - – стаціонарний, 17, 79
 - – тенденція, (див. ряд часовий тренд)
 - – тренд, 80
- динамічний, (див. ряд часовий)
- Котельникова, 59
 - гармоніки, 23
 - гармонійний аналіз, (див. ряд довільний спектральне розкладання)
 - спектральне розкладання, 23
- Фур'є, 13
 - – комплексний, 24
 - – коефіцієнти, 22
 - – форми подання, 21
 - – експонентний, (див. ряд Фур'є комплексний)
- Спектр, 24
 - амплітудно-частотний, 25
 - дискретний, (див. спектр лінійчатий)
 - лінійчатий, 24
 - розтікання, 61
 - фазо-частотний, 25

- ширина, 34, 46
- Спектральна діаграма, 24
 - – амплітудна, 24
 - – фазова, 24
- Спектральний аналіз, 10
- Теорема Котельникова, 59
 - Парсеваля, 44
- Функція автокореляційна, 100
 - дельта, 39
- Явище Гіббса, 31

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Бессель, 16
Блітт, 110
Бонд, 112
Гіббс, 31
Гомперц, 88
Дансгор, 112
Дірак, 39
Дирихле, 31
Ейлер, 15
Ерміт, 13
Ешгер, 112
Ірвин, 82
Котельников, 59
Кронекер, 13
Лагерра, 13
Лежандр, 13
Лопіталь, 38
Мартьянов, 109
Парсеваль, 16
Сернандер, 111
Стьюдент, 98
Уілбрейам, 31
Фур'є, 12
Хайнрих, 112
Чебишев, 13

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Mann R.E. Global Environmental Monitoring System (GEMS). Action Plan for Phase 1. SCOPE, rep. 3, Toronto, 1973. 130 p.
2. Израэль Ю.А. Экология и контроль состояния природной среды. / Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 560 с.
3. Виноградов Б.В. Аэрокосмический мониторинг экосистем. / М.: Наука, 1984. 320 с.
4. Канасевич Э.Р. Анализ временных последовательностей в геофизике / Пер. с англ. под ред. О.А. Потапова. – М.: Недра, 1985. – 300 с.
5. Котляков В.М. Глобальные изменения за четыре климатических цикла по гляциологическим данным. // Материалы гляциологических исследований. 2000. Вып. 89. с. 106–111.
6. EPICA community members Eight glacial cycles from an Antarctic ice core // Nature. 2004. V. 429. P. 623-628.
7. Jouzel J., Masson-Delmotte V., Cattani O., Dreyfus G., Falourd S., Hoffmann G., Minster B., Nouet J., Barnola J.M., Chappellaz J., Fischer H., Gallet J. C., Johnsen S., Leuenberger M., Loulergue L., Luethi D., Oerter H., Parrenin F., Raisbeck G., Raynaud D., Schilt A., Schwander J., Selmo E., Souchez R., Spahni R., Stauffer B., Steffensen J.P., Stenni B., Stocker T.F., Tison J.L., Werner M., Wolff E.W. Orbital and Millennial Antarctic Climate Variability over the Past 800,000 Years. // Science. 2007. 317(5839), 793-796.
8. Grootes P.M., Stuiver M., White J.W.C., Johnsen S.J., Jouzel J. Comparison of oxygen isotope records from the GISP2 and GRIP Greenland ice cores. // Nature 366. 1993. P. 552-554.
9. Stuiver M., Braziunas T.F., Grootes P.M., Zielinski G.A. Is there evidence for solar forcing of climate in the GISP2 oxygen isotope record. // Quaternary Research 48. 1997. P. 259-266.
10. Stuiver M., Grootes P.M., Braziunas T.F. The GISP2 ¹⁸O climate record of the past 16,500 years and the role of the sun, ocean and volcanoes. // Quaternary Research 44. 1995. P.341-354.
11. Meese D.A., Alley R.B., Fiacco R.J., Germani M.S., Gow A.J., Grootes P.M., Illing M., Mayewski P.A., Morrison M.C., Ram M., Taylor K.C., Yang Q., Zielinski G.A. Preliminary depth-agescale of the GISP2 ice core. // US Special CRREL Report 94-1. 1994.
12. Монин А.С. Введение в теорию климата. / Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 246 с.
13. Мировой центр данных палеоклиматологии: USA World Data Center for Paleoclimatology – Режим доступа: <http://www.ncdc.noaa.gov/paleo/>

- datalist.html.
14. Рудяев Ф.И. Влияние аномального гравитационного поля Земли на циркуляционные системы атмосферы // Доклады АН. 1990. Т. 310. № 6. С. 1345–1448.
 15. Кляшторин Л.Б., Любушин А.А. Циклические изменения климата и рыбопродуктивности. / М.: ВНИРО, 2005. 235 с.
 16. Глок Н.И., Малинин В.Н. Статистический анализ стерических колебаний уровня Мирового океана // Ученые записки РГГМУ. 2011. №21. С. 126–137.
 17. Мартьянов Н.Е. Размышления о пульсациях Земли. / Красноярск: КНИИГиМС, 2003. 272 с.
 18. Тюняев А.А. История возникновения мировой цивилизации: системный анализ. / М.: Научный эксперт, 2008. 739 с.
 19. Борисов П.М. Опыт реконструкции ледяного покрова полярного бассейна в поздне- и послеледниковое время. Северный Ледовитый океан и его побережье в кайнозое / Л.: Гидрометеиздат, 1970. С. 61–70.
 20. Primeau F. Characterizing transport between the surface mixed layer and the ocean interior with a forward and adjoin global ocean transport model // Journal of Physical Oceanography, 2005. Vol. 35. P. 545–564.
 21. Васильчук А.К. Палинология и хронология повторно-жильных льдов. Диссертация.....докт. геогр. наук. М.: 2009. 362 с.
 22. Bond G.; et al. (1997). „A Pervasive Millennial-Scale Cycle in North Atlantic Holocene and Glacial Climates”. Science 278 (5341): 1257–1266. DOI:10.1126/science.278.5341.1257.
 23. Данова Т.Е., Перелыгин Б.В. Результаты Фурье-анализа данных палеореконструкции температуры в центральной части Гренландии. // Ученые записки РГГМУ. 2013. № 32. С. 83–93.
 24. Казакевич Д.И. Основы теории случайных функций и её применение в гидрометеорологии. 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Гидрометеиздат, 1977. – 320 с.
 25. Лоева И.Д., Евсеева Л.П. Статистический анализ временных рядов. // Труды ГГО, 1983. – вып. 475. – С. 101–108.
 26. Грибанов Ю.И., Мальков В.Л. Спектральный анализ случайных процессов. – М.: Энергия, 1974. – 240 с.
 27. Котюк А.Ф., Цветков Э.И. Спектральный и корреляционный анализ нестационарных случайных процессов. – М.: Издательство стандартов, 1970. – 103 с.
 28. Humlum O., Solheim J-E, Stordahl K. Identifying natural contributions to late Holocene climate change, Global and Planetary Change 79. 2011. P. 145–156.
 29. Bond G., Kromer B., Beer J., Muscheler R. Evans M.N., Showers W.,

- Hoffmann S., Lotti-Bond R., Hajdas I., Bonani G. «Persistent Solar Influence on North Atlantic Climate During the Holocene». 2001. *Science* 294 (5549): P. 2130–2136.
30. Dansgaard, W., Johnsen, S. J., Clausen, H. B., Dahl-Jensen, D., Gundestrup N., Hammer, C. U., and Oeschger, H. North Atlantic climatic oscillations revealed by deep Greenland ice cores. *Geophysical Monograph* 29. – 1984. – P. 288–298.
31. Bond Gerard C. and Rusty Lotti, 1995. Iceberg Discharges into the North Atlantic on Millennial Time Scales During the Last Glaciation *Science* 17 February 1995: 1005-1010. DOI:10.1126/science.267.5200.1005.
32. Данова Т.Е., Перельгин Б.В. Применение вейвлет-анализа для уточнения возраста событий Хайнриха. // *Геофизический журнал*. 2015. Т. 37, № 1. – С. 165–175.
33. Donald Rapp. *Ice Ages and Interglacials: Measurements, Interpretation and Models*. Springer, 2009.
34. Taylor K. C. «The Holocene-Younger Dryas transition recorded at Summit, Greenland». *Science* 278 (5339). – 1997. – P. 825–827. DOI: 10.1126/science.278.5339.825.
35. Hughen Konrad A. «Synchronous Radiocarbon and Climate Shifts During the Last Deglaciation». *Science* 290 (5498): 2000. 1951–1954. DOI:10.1126/science.290.5498.1951.
36. Spurk M. «Revisions and extension of the Hohenheim oak and pine chronologies: New evidence about the timing of the Younger Dryas/Preboreal transition». *Radiocarbon* 40 (3). – 1998. – P. 1107–1116.

Навчальне видання

**ПЕРЕЛИГІН Борис Вікторович
ТКАЧ Тетяна Борисівна
ГОР'ЄВ Сергій Адольфович**

СПЕКТРАЛЬНИЙ І ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ МОНІТОРИНГУ

Навчальний посібник

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул. Львівська, 15

Підписано до друку 01.09.2020 р. Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman. Цифровий друк.
Умовно-друк. арк. 20,16. Тираж 50. Замовлення № 0920-200.
Віддруковано з готового оригінал-макета.

Видавництво і друкарня – Видавничий дім «Гельветика»
65101, Україна, м. Одеса, вул. Інглезі, 6/1
Телефон +38 (0552) 39 95 80,
+38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08
E-mail: mailbox@helvetica.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 6424 від 04.10.2018 р.



Г Е Л Ь В Е Т И К А
И З Д А Н И Ч И Й Д О М

