МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
з курсу «Математика»
для слухачів підготовчого відділення
Частина 2

МАТЕМАТИЧНІ ВИРАЗИ І ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ.

ВЕКТОРА НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРІ

Зміст

«Не слід залучати нові сутності без необхідності"
Вільям з Оккама

ПЕРЕДМОВА

Друга частина методичного посібника «Математика», є природним продовженням першої частини. У ній розглянуті дві теми: «Математичні виразі» і «Вектори на площі і в просторі» в обсязі, передбаченим програмою зовнішнього незалежного тестування
Виклад теоретичного матеріалу супроводжується великою кількістю прикладів, які допомагають не тільки краще зрозуміти суть тих чи інших визначень математичних понять, але і, може бути, «відчути» необхідність самого існування цих понять. Істинне розуміння визначення будь-якого поняття, або формули, або теореми не може бути повним, якщо немає розуміння проблеми, яка призводить до необхідності це поняття ввести в розгляд.

§1. МАТЕМАТИЧНІ ВИРАЗИ

1. Поняття математичного виразу і змінної величини. Розглянемо використання деяких понять і пов'язаних з ними символів в письмової математичної мові.

Символічні позначення, які використовуються в математиці, служать для викладу математичних суджень в зручній для роботи (читаємої і компактної) формі. Крім символів, які вже розглядалися раніше і використовувалися, наприклад, для запису чисел і дій над ними, застосовуються і деякі інші символи, наприклад, літери і дужки.

У разі буквених символів зазвичай використовують букви грецького і латинського алфавітів (дивіться додаток 1). Використовуються вони для позначення чисел в тих випадках, коли конкретне значення числа з якихось причин не важливо. Тому буквами оперують, як числами.

1.1 Змінна величина і математичний вираз.

Математичний вираз (далі, просто - вираз) являє собою запис, якій складаєтсяз математичних символів:

- чисел, записаних за допомогою цифр або букв,
- знаків математичних дій,
- дужок: $(...), [...], \{...\}$,
- знаків рівності і нерівності $"<,\ >,\ \leq,\ \geq"$.

Прикладами математичних виразів можуть бути такі символічні записи:

(1) $a+b=b+a$,

(2) $2\sqrt{x}+a\leq 3\sqrt{x}-4$,

(3) $(x-4)(x+3)=0$,

Зауваження

1. Кожна буква в вираженні може бути або *змінною величиною*, або *постійною величиною*.

2. Питання про те, до якого виду величин належить та чи інша буква, вирішується шляхом попереднього оголошення статусу кожної літери. Якщо ж таке попереднє оголошення не зроблено, то «за замовчуванням» (традиційно):

- букви, розташовані в кінці латинського алфавіту (наприклад: *x, y, z, t, v, u, w*), розглядаються як змінні;
- букви, розташовані на початку латинського алфавіту (*a, b, c* і інші) або літери грецького алфавіту ($\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \ldots$), розглядаються як постійні і їх називають *параметрами вираження*.

3. Для позначення деяких найбільш важливих в математиці чисел «закріплені» букви. Наприклад, $\pi = 3{,}1415926...$; $e = 2{,}18728....$; .

4. Відзначимо ще раз, що традиційне використання тих чи інших букв для позначення постійних і змінних величин зовсім не означає, що, наприклад, за буквою x «ховається» обов'язково змінна величина. Все залежить від розглянутого вираження і конкретного сенсу тієї чи іншої літери в цьому виразі, якщо такий випливає з постановки розв'язуваної задачі.

5. Якщо в математичному вираженні операції виконуються тільки над числами, то таке математичному вираженні називається числовим. Результат (число), який виходить після виконання всіх операцій в аналізованому числовому вираженні, називається значенням числового виразу.

6. Дужки - це символи, за допомогою яких задається порядок виконання операцій в математичному вираженні. Зазвичай використовуються три типи дужок: $(\ldots)$ - *круглые*; $[\ldots]$ - *квадратные*; $\{\ldots\}$ - *фигурные*. Порядок виконання операції в математичному вираженні прийнятий наступний:

- якщо дужок в математичному вираженні немає, тоді слід спочатку виконати дії множення і ділення (зліва направо), потім додавання і віднімання в будь-якому порядку;
- при наявності дужок - спочатку виконуються операції в круглих дужках, потім в квадратних і в останню чергу - в фігурних.

Приклад 1. Вкажіть порядок дій в числовому вираженні:

$$\frac{3}{4}\cdot\left(6-4\cdot\frac{5}{16}\right):5+\frac{2}{3}.$$

Рішення. Порядок дій повинен бути наступним:

- множення в дужках;
- віднімання в дужках;
- множення поза дужками;
- розподіл;
- складання.

Щоб уникнути помилок при виконанні дій зручно над кожним з них вказувати номер його виконання. У розглянутому прикладі це буде виглядати так:.

$$\frac{3}{4}\overset{(3)}{\cdot}\left(6\overset{(2)}{-}4\overset{(1)}{\cdot}\frac{5}{16}\right)\overset{(4)}{:}\,5\overset{(5)}{+}\frac{2}{3}$$

Математичні вирази можна класифікувати і присвоювати їм «імена». Якщо, наприклад, в якості ознаки за яким здійснюється класифікація виразів, використовується факт наявності знака «дорівнює», то два математичних вираження A і B пов'язані цим знаком утворюють *рівність*: $A = B$.
Якщо ж зв'язок здійснюється за допомогою знаків будь-якого нерівності: $A < B,\ A > B,\ A \le B,\ A \ge B$, то ці вирази називаються *нерівностями*.

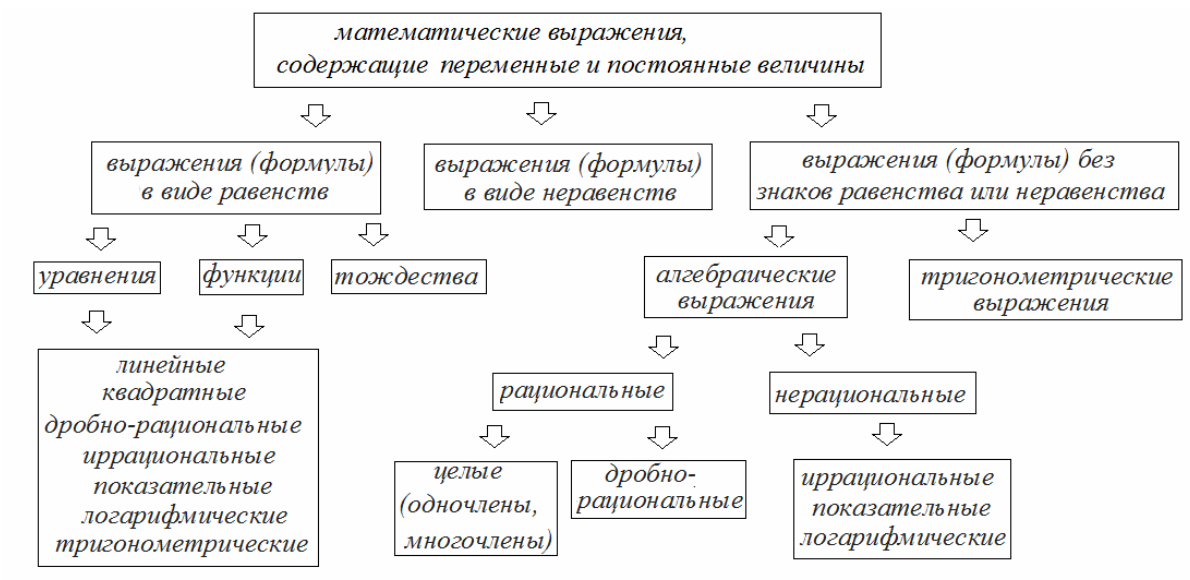


Рис. 1

Залежно від того, чи використовуються в вираженні буквені позначення чи ні, чи присутні змінні величини і якщо «так», то, скільки їх і які операції виконуються над ними, математичні вирази класифікуються далі як *тотожності*, *рівняння* і *функції* різних типів (дивіться малюнок 1). Далі будуть розглянуті всі перераховані вище типи математичних виразів.

Зауваження.

1. Так як поняття «математичне вираз» і «формула» близькі за змістом, то часто їх і не розрізняють. Проте, відзначимо, що поняття формула прийнято використовувати для тих математичним виразів, які мають якийсь самостійний математичний сенс. Так, наприклад, серед перерахованих нижче математичних виразів (1) - (5) формулою варто було б назвати тільки математичний вираз (1), так як воно висловлює властивість комутативності операції додавання, тобто має самостійний математичний сенс.

2. Область визначення математичного виразу. Математичні вирази (рівняння, нерівності, функції, тотожності) містять операції, які виконуються як над змінними величинами, так і над параметрами (дивіться зауваження 2 в цьому пункті) цього виразу. Тому, завжди необхідно визначитися з тим, які числові значення можуть приймати параметри і змінні в розглянутому вираженні.

Визначення поняття *область визначення математичного виразу*. *Область визначення математичного виразу* (рівняння, нерівності, функції, тотожності) - це *числова множина* (позначається літерою D), елементами якої є тільки ті числові значення змінних і параметрів, при яких всі дії над ними можуть бути виконані.

Пояснення. Обмеження на можливі числові значення змінних і параметрів в математичному виразі завжди пов'язані тим, що деякі операції визначені не для всіх дійсних чисел (дивіться §3, пункт 8). У таблиці 1 наведені області визначення всіх операцій.

Якщо у виразі використовуються n операцій: $L_1, L_2, ..., L_n$ і їх областями визначення є множини: $D(L_1), D(L_2), ..., D(L_n)$, то область визначення D математичного виразу виходить як результат перетину всіх множини $D(L_i),\quad i=1,2,...,n$: (4).

(4) $$D=D(L_1)\cap D(L_2)\cap ...\cap D(L_n).$$

Приклад 2. Знайдіть область визначення математичного виразу: $\dfrac{arcsin\, x}{\sqrt{x}}$. *Рішення.* У заданому виразі використовується три операції: добування кореня квадратного, розподіл і арксинус. Запишемося і зобразимо на числової осі область визначення кожної операції:

$$D(arcsin\ x)=\{x|-1\le x\le 1\},\quad D\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\{x|x\in R,\quad x\ge 0, x\ne 0\}.$$

Областю визначення виразу є перетин двох множин: перше - це множина $D(arcsin\ x)$ і друге - $D\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Використовуючи «інтервальні» позначення, напишемо множину, яке є їх перетином: $x\in[-1;1]\cup[0;\infty)=[0;1]$.

Таблица 1.

№	Назваоперації	ПозначенняопераціїL	Область визначенняопераціїL: $D(L)$	Область визначенняопераціїL («интервальные обозначения»)
1, 2, 3	додавання, множення, віднімання	$a+b$ $a\cdot b$ $a-b$	$D(a+b)=D(a\cdot b)=D(a+$ $=\{a,b\|a\in R, b\in R\}$	$a\in(-\infty;\infty)$, $b\in(-\infty;\infty)$
3, 4	зведенняв ступінь, потенціювання	$exp_b\, a$ или b^a	$D(exp_b\, a)=D(b^a)=$ $\{a,b\|a\in R, b\in R\}$	$a\in(-\infty;\infty)$, $b\in(-\infty;\infty)$
5, 6	синус, косинус	$sin\ a$ $cos\ a$	$D(sin\, a)=D(cos\, a)=\{a\|a\in$	$a\in(-\infty;\infty)$

7	тангенс	$tg\ a$	$D(tga)=\left\{a \middle| a\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in \right.$	$a\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$
8	котангенс	$ctg\ a$	$D(ctga)=\{a\mid a\neq\pi k, k\in Z\}$	$a\in(2\pi k;\pi+\pi k)$ $\cup(\pi k;2\pi(k+1))$
1 0	ділення	$\frac{a}{b}$	$D\left(\frac{a}{b}\right)=\{a,b\mid a\in R;\ b\in R,\ b$	$a\in(-\infty;\infty)$; $b\in(-\infty;0)\cup$ $\cup(0;\infty)$
1 1	добуття кореня	$\sqrt[n]{a}$	$D(\sqrt[n]{a})=\{a\mid a\in R,\quad a\geq 0\}$, $если\quad n-чётное;$ $D(\sqrt[n]{a})=\{a\mid a\in R\}$, $если\quad n-нечётное.$	$a\in[0;\infty)$ $если\quad n-чётно$ $a\in(-\infty;\infty)$ $если\quad n-нечёт$
1 2	логарифмирование	$log_b\,a$	$D(log_b\,a)=\{a,b\mid a>0;\ b>0$	$a\in(0;\infty)$ $b\in(0;1)\cup(1;\infty)$
1 3, 1 4	арксинус, арккосинус	$arc\sin a$ $arc\cos a$	$D(arcsin\ a)=D(arccos\ a)=$ $=\{a\mid -1\leq a\leq 1\}$	$a\in[-1;1]$
1 5, 1 6	арктангенс,арккотангенс	$arctg\ a$ $arcctg\ a$	$D(arctg\ a)=D(arcctg\ a)=$ $=\{a\mid a\in R\}$	$a\in(-\infty;\infty)$

3. Корінь математичного виразу.Якщозмінноївеличиніx в математичномувираженні $F(x)$ дати якесь числове значення a, то математичний вираз стає числовим виразом $F(a)$ і його можна обчислити: $F(a)=b$. Тут b - це значення числового виразу $F(a)$.

Якщо вираз $F(x)$ матиме, наприклад, такий вигляд:

$x \cdot (x+1) - 3 \cdot x$

і, якщо змінної x дати числове значення 5, тобто: $x = 5$, то вийде числовий вираз $F(5)$, яке матиме вигляд: $5 \cdot (5+1) - 3 \cdot 5$. Виконавши дії, отримаємо значення цього виразу, що дорівнює 15, тобто: $F(5) = 15$.

Визначення поняття *корінь математичного виразу*. Якщо існує таке числове значення змінної величини, підстановка якого в математичний вираз перетворює його *в нуль*, то це значення змінної величини називається *коренем математичного виразу*.

***Пояснення*.** Вираз $x \cdot (x+1) - 3x$ «перетворюється» в нуль, якщо покласти $x = 2$. Тоді,

$2 \cdot (2+1) - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$.

Значить, значення $x = 2$ змінної величини є коренем цього виразу.

4. Поняття математичного тотожності.

Визначення поняття *тотожність*. Якщо рівність двох математичних виразів виконується при будь-якому значенні, що входять в нього букв, то це рівність називається *тотожністю*.

***Пояснення*.** Вираз $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ є тотожністю. Якщо підставити в цей вислів замість x будь-яке число, то буде виходити правильне числове рівність. Наприклад, якщо підставити $x = 3$, то:

$$3^2 - 4 \overset{?}{=} (3-2)(3+2)1 \quad \Rightarrow \quad 9 - 4 \overset{?}{=} 1 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 5.$$

***Зауваження*.** Щоб довести, що рівність є тотожністю треба виконати перетворення лівої або / і правої частин рівності так, щоб вони виявилися однаковими.

5. Поняття рівняння та його розв'язання. Розглянемо два вирази $f(x)$ і $\varphi(x)$, які пов'язані між собою знаком рівності:

(5) $f(x) = \varphi(x)$,

де x - змінна величина.

Визначення понять *рівняння і рішення рівняння*.*Рівняння* - це равенство двох математичних виразів, в якому присутня змінна величина, яка називається невідомою величиною. Причому, рівність має місце тільки при деяких числових значеннях невідомої величини. Ці значення невідомої величини називаються *рішеннями рівняння*.

Зауваження.

1. Формулу (5) далі будемо називати *«загальним видом рівняння»* з однієї невідомої величиною.

2. Якщо рівняння (5) записати у вигляді: $f(x)-\varphi(x)=0$ і якщо значення змінної величини $x=a$ є вирішенням цього рівняння, тобто: $f(a)-\varphi(a)=0$, то згідно з визначенням поняття корінь «математичного виразу» (дивіться пункт 4 цього параграфа), значення $x=a$ є коренем математичного вираження. Тому, терміни рішення рівняння і корінь рівняння для рівняння мають однаковий сенс.

3. Щоб знайти корінь математичного виразу треба цей вислів прирівняти до нуля і знайти рішення отриманого таким чином рівняння.

4. Рівняння може містити кілька змінних величин. У цьому випадку рівняння називається рівнянням з багатьма змінними або невідомими величинами. Наприклад, якщо їх дві, то загальний вигляд такого рівняння буде наступний:

(6) $f(x,y)=\varphi(x,y)$.

Пояснення. Розглянемо математичний вираз: $3x-2=2x$, яке слід класифікувати як рівняння, тому що воно:

- по-перше, є рівністю;
- по-друге, в ньому присутня буква *x*, яка «за замовчуванням» - змінна величина;
- по-третє, це рівність не виконується при будь-яких значеннях змінноївеличини. Наприклад, якщо,

$x=10$, то $3\cdot 10-2\overset{?}{=}2\cdot 10$ і $28\neq 20$,

то і, рівність не має місце. Якщо ж вибрати $x=2$, то

$3 \cdot 2 - 2 \overset{?}{=} 2 \cdot 2$ и $4 = 4$.

Рівність має місце і числів значення невідомої величини *x=2* є рішенням рівняння.

Приклад 3. Вкажіть, які з перерахованих нижче чисел є рішеннями рівняння:

$x^4 + 2x^2 + 12 = x^6 - 28$.

Варіанти відповіді: А) 0; Б) -2; В 1; Г) 2; Д 1.

Рішення. Для відповіді на питання треба замість змінної (невідомої) величини *x* в рівняння підставити передбачуване рішення цього рівняння (число). Якщо після виконання дій вийде правильне рівність, то це буде означати, що це число є рішенням рівняння. Якщо ж рівності лівої і правої частин рівнянь не матиме місце, то досліджуване число не є рішенням.

Підставами число *0* (варіант *А*):

$$0^4 + 2 \cdot 0^2 + 12 \overset{?}{=} 0^6 - 28 \quad \Rightarrow \quad 12 \overset{?}{=} -28 \quad \Rightarrow \quad 12 \neq -28,$$

тобто, число *0* не є рішенням рівняння. Підставивши кожне з решти чисел в рівняння, можна переконатися, що рішенням рівняння будуть два числа *2* і *(-2)*:

$$(-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2 + 12 \overset{?}{=} (-2)^6 - 28 \quad \Rightarrow \quad 16 + 8 + 12 \overset{?}{=} 64 - 28 \quad \Rightarrow \quad 36 = 36.$$

$$2^4 + 2 \cdot 2^2 + 12 \overset{?}{=} 2^6 - 28 \quad \Rightarrow \quad 16 + 8 + 12 \overset{?}{=} 64 - 28 \quad \Rightarrow \quad 36 = 36.$$

Поняття рівносильних рівнянь. Рівняння з однією змінною (невідомої) величиною можуть:

- не мати рішень;
- мати одне або декілька рішень;
- мати нескінченно багато рішень.

Наведемо приклади рівнянь, які ілюстрували б це твердження.

- Рівняння: $\cos x = 4$, не має рішень.
- Рівняння: $2x = 4$, має одне рішення: $x = 2$.
- Рівняння: $x^2 = 4$, має два рішення: $x_1 = 2, \quad x_2 = -2$.
- Рівняння: $\cos x = 1$, має нескінченно багато рішень:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2\pi, \quad x_3 = 4\pi, ..., \quad x_n = 2\pi n, ...$$

Визначення поняття *рівносильні рівняння*. Два рівняння називаються *рівносильними*, якщо *всі* рішення першого рівняння є і рішеннями другого рівняння і навпаки, *всі* рішення другого рівняння є рішеннями першого рівняння. Або *обидва рівняння не мають рішень*.

6. Поняття функції. Поняття функції так само як і поняття множини, або поняття числа належать до категорії невизначених понять математики. Тому, звичайно всілякі визначення поняття функції зводиться до *опису* цього поняття. Причому ці описи, в залежності від передбачуваного використання поняття функції, різні. Відзначимо, що найбільш загальне тлумачення поняття функції пов'язано з деякими теоретико-множинними поняттями і тут ми його обговорювати не будемо.

Розглянемо попередньо поняття *залежності значень двох змінних величинх* і y один від одного. Нехай має місце рівність двох два математичних виражен-ня: $F(x,y)$ *и* $\Phi(x,y)$ кожне з яких або хоча б одне з них містить дві змінні величини:

(7) $\quad F(x,y)=\Phi(x,y),$

Наприклад, якщо:

$$F(x,y)=x+2y \quad \text{и} \quad \Phi(x,y)=x\cdot(y+3),$$

то рівність (7) матиме такий вигляд:

(8) $$x+2y=x\cdot(y+3).$$

де x і y змінні.

Рівність цих двох математичних виразів матиме місце не при будь-яких значеннях змінних x і y. Дійсно, вибравши довільно, наприклад, $x=2$ і $y=4$ та підставивши їх у вираз (8), отримаємо, що

$$F(2,-4)\overset{?}{=}\Phi(2,-4) \quad \Rightarrow \quad 2+2\cdot(-4)=2\cdot((-4)+3) \quad \Rightarrow \quad -5\neq-2$$

рівність не має місця.

Якщо числове значення однієї з змінних, наприклад x, вибирати довільно, а значення y якось «підбирати», то рівність (8) можна забезпечити. Наприклад, $x=1$:

$$1+2y=1\cdot(y+3) \quad\Rightarrow\quad 2y=y+2 .$$

Остання рівність «підказує» як вибрати числове значення іншої змінної величини *у*. Воно визначається рівністю: $2y=y+2$. Щоб ця рівність мало місце, значення змінної величини у треба покласти рівним *2*, тоді:

$$2y=y+2 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 2=2+2 \quad\Rightarrow\quad 4=4 .$$

і рівність (8) має місце.

У разі, якщо вибрати $x=3$, то вибір значення змінної *у* буде зумовлений рівністю, яке вийде, якщо в вираз (8) підставити $x=3$:

$$x+2y=x\cdot(y+3) \quad\Rightarrow\quad 3+2y=3\cdot(y+3) \quad\Rightarrow\quad 2y=3\cdot y+6.$$

Щоб отримане рівність мало місце, значення змінної величини *у* має дорівнювати *(- 6).*

Таким чином, якщо $x=1$, то $y=4$; якщо ж $x=3$, то $y=-6$. Тобто, числове значення змінної величини *у*, залежить від числового значення змінної *х*. Це означає, що рівності (7), (8) визначають зв'язок між двома змінними величинами *х* і *у*. Отже, рівність двох математичних виразів (7), які містять дві змінні величини *х* і *у*, можна розуміти як спосіб завдання зв'язку між цими змінними величинами. Цей зв'язок будемо далі *називати функціональною залежністю* (зв'язком) між змінними *х* і *у*.

Якщо рівність (7) можна записати так, що одна змінна величина виражена через іншу, наприклад:

$$F(x,y)=\Phi(x,y) \quad\Rightarrow$$

$$\text{(9)} \qquad \Rightarrow\quad y=f(x)$$

то змінна *х* називається *незалежною змінною або аргументом*, а змінна *у - залежною або функцією*. Наприклад, якщо зв'язок між змінними величинами *х* і *у* задана рівністю:

$$\frac{y}{2} - 2x^2 = 3 \cdot x^2 - \frac{y}{2} + 1,$$

то це рівність можна записати так:

$$y = 5x^2 + 1$$

Буква f у формулі (9) має сенс математичних дій, за допомогою яких реалізується функціональний зв'язок між змінними x і y. Тут доречно нагадати, що змінні величини позначаються не тільки буквами x і y. Так наприклад, якщо рівність (7) мати вигляд: $y = f(t)$ або $x = f(t)$, то це означає, що в першому випадку y - це функція, а t - це аргумент, а в другому x - це функція, а t - це аргумент.

Зауваження.

1. Зв'язок між двома змінними величинами x і y, яка реалізується за допомогою математичного виразу (7) далі будемо називати *неявним способом завдання функції.*

2. У разі, якщо це математичне вираження можна записати у вигляді формули (8), то будемо говорити, що *функція задана явно*.

3. Задати функцію за допомогою формул (7) або (9) - це означає поставити функцію аналітично. Інші, не аналітичні способи завдання функції будуть розглянуті далі.

Пояснення.

1. Функція - це назва (ім'я), яке присвоюється залежною *зміної* величині (традиційне позначення - y).

2. Числові значення y цій залежною змінної величини виходять в результаті математичних дій (у формулі (7) вони позначені літерою f), які виконуються над незалежною змінною величиною (традиційне позначення - x).

7. Поняття нерівності. Якщо між двома математичними виразами A і B є знак нерівності: $A > B$ або $A < B$, то математичний вираз називається нерівністю (строгим). Якщо: $A \le B$ або $A \le B$ - нерівність називається *нестрогим*.

§2. МНОГОЧЛЕНИ, ОДНОЧЛЕНИ І ДІЇ НАД НИМИ

1. Поняття одночлена і многочлена. Розглянемо математичні вирази, в яких немає знаків «більше», «менше» і «дорівнює», а присутні тільки числа, букви і дії над ними. Класифікація таких математичних виразів і присвоювання їм спеціальних назв здійснюється за тим, які дії виконуватися в них.

Визначення поняття *одночлен*. *Одночлен* - це добуток дійсного числа на буквене вираз, яке представляє собою добуток букв, показник ступеня яких є натуральним числом.

Пояснення. Наприклад, вираз: $21 \cdot a^3 \cdot b^2$ є одночленом. При записи одночлена знак множення зазвичай не пишуть, тобто одночлен $21 \cdot a^3 \cdot b^2$ можна записати так: $21a^3b^2$.

Вираз: $5a^{\frac{1}{2}}b^3$ не є одночленом тому, що показник ступеня у літери *a* дробовий, так само як і вираз $3a^2b^{-3}$ не є одночленом - у літери *b* показник ступеня негативний. У вираженні $21 + a^2b^3$ присутній дію додавання, тому цей вислів не є одночлен.

Зауваження.

1. Число в одночлене називається коефіцієнтом одночлена. Наприклад, у одночлена $21a^2b^3$ коефіцієнт дорівнює *21*; a^2b^3 - це буквений вираз. Якщо до складу одночлена входять тільки букви, наприклад c^2b^3y, то його коефіцієнтом є число *1*, яке зазвичай не пишуть, тобто: $1 \cdot c^2b^3y = c^2b^3y$.

2. *Стандартною формою записи одночлена є запис*, в якій перший множник одночлена це число (коефіцієнт), а всі інші множники - букви, які не повторюються і розташовуються в будь-якому порядку.

Наприклад, $a^2 \cdot 5 \cdot b$ - це одночлен, який записаний не в стандартнім вигляді, так як першим множником є не число 5, а буква. Стандартна запис цього одночлена повинна виглядати як, $5a^2b$ або $5ba^2$.

У одночлена $21a^2 \cdot b \cdot a^3$ буква а повторюється два рази, тому він записаний не в стандартному вигляді. Якщо використовувати властивості операції піднесення до степені (дивіться §2, формула (15)) і записати: $a^2 \cdot a^3 = a^5$, то отримаємо стандартну форму цього многочлена у вигляді: $21ba^5$ або $21a^5b$. Порядок проходження букв в одночленне значення не має.

3. *Ступінь одночлена* - це сума показників ступенів всі літери. Наприклад, ступінь одночлена $7a^2b^3$ дорівнює: $2+3=5$.

Приклад. Які або яке з наведених виразів (1 - 4) є одночленом?

$$1)\ 7a^{-2}b^3;\quad 2)\ \frac{5x^2}{y^3};\quad 3)\frac{xb^3}{8};\quad 4)\ 0{,}1\cdot b^3y;\quad 5)\ 12a^{5,2}b^3y;\ 6)\ 1+4ab^3$$

Рішення. Вираз (1) не є одночленом, так як один з показників ступеняє негативним числом. Вираз (2) не є одночленом тому, що має місце операція ділення на y^3. Вираз (5) не є одночленом тому, що показник ступеня у літери а дробовий. У вираженні (6) присутній дію додавання, тому цей вислів не є одночленом. Одночленом є тільки варіанти (3) і (4).

Приклад. Які або яке з наведених одночленним (1 - 4) записані в стандартній формі?

$$1)\ a^2 8b^3;\quad 2)\ 21a^2\cdot b\cdot a^3;\quad 3)\,3xb^3;\quad 4)\ 1{,}7\cdot b^5y^3;$$

Рішення. Одночлен (1) записаний не в стандартному вигляді, так як першим множником повинен бути коефіцієнт 8. Стандартна запис цього одночлена повинна виглядати як, $8a^2b^3$ або $8a^2b^3$.
У одночлен (2) буква а повторюється два рази, тому він записаний не в стандартному вигляді. Якщо використовувати властивості операції піднесення до степеня (дивіться §2, формула (15)) і записати: $a^2 \cdot a^3 = a^5$, то отримаємо стандартну форму цього многочлена у вигляді: $21ba^5$ або $21a^5b$.
Порядок проходження букв в одночлені значення не має. Одночлен (3) і (4) записані в стандартному вигляді.

2. Поняття многочлена.

Визначення поняття *многочлена*. Якщо над декількома одночленами виконуються дії додавання, віднімання, то таке математичне вираз називається *многочленом*.

Пояснення. Розглянемо вираз: $5x^4y^2 + 3x - y^5$. Кожне з доданківцього виразу: $5x^4y^2$, $3x$ і y^5 є одночленами і над ними виконуються дії додавання, віднімання, тому цей вислів є многочленом.

Зауваження.

5. Якщо многочлен складається з двох одночленним, то він називається *двочленом*. Наприклад, вираз $\left(3x - 2y^5\right)$ - це *двочлен*.

6. Якщо многочлен складається з трьох одночленним, то він називається *тричлен*. Наприклад, $\left(5x^4y^2 + 3x - 2y^5\right)$ - це *тричлен*.

7. Многочлен написаний в стандартному вигляді, якщо все одночлени многочлена написані в стандартному вигляді і серед них немає подібних. Наприклад, многочлен: $5a^2c + 3ac - ac^3 + ac$ записану не в стандартному вигляді, так як другий і третій одночлени - подібні. Якщо їх привести, то вийде многочлен, записаний в стандартному вигляді:

$$5a^2c + 3ac - ac^3 + ac = 5a^2c + \left(3ac + ac\right) - ac^3 = 5a^2c + 4ac - ac^3.$$

8. *Степенем багаточлена* називається найбільша з степенів одночленів, з яких він складається.

Приклад 2. Знайдіть степінь многочлена: $2a^2 - 5a^4 + 3ab - 7{,}2b^3a^2$.

Рішення. Щоб визначити степінь заданого многочлена треба знайти степеня всіх одночленним:

$$2a^2b \;\Rightarrow\; 2 + 1 = 3; \qquad 5a^4 \;\Rightarrow\; 4;$$
$$3ab \;\Rightarrow\; 1 + 1 = 2; \qquad 7{,}2b^3a^2 \;\Rightarrow\; 3 + 2 = 5$$

Найбільшу степінь *5* має останній одночлен, тому степінь многочлена дорівнює *5*.

Зауваження.

9. Многочлен другого ступеня:

(1) ax^2+bx+c

називається *квадратним тричленної*. У формулі (1*) a, b, c* - коефіцієнти тричлена, *x* - змінна величина.
Формула (1) - це загальноприйнята, стандартна форма запису квадратного тричлена.

Наприклад, в тричлені $2x^2+4x-6$ його коефіцієнти рівні: $a=2, b=4, c=-6$.

Дискримінантом квадратного тричлена називається число, яке обчислюється за формулою:

(2) $D=b^2-4ac$

Наприклад, дискримінант тричлена $2x^2+4x-6$ буде дорівнює:

$D=4^2-4\cdot 2\cdot(-6)=16+48=64$.

Числове значення змінної величини *x*, підстановка якого перетворює квадратний тричлен в нуль, називається *коренем квадратного тричлена*.
Наприклад, у тричлена $2x^2+4x-6$ є два кореня - це числа *1* і *(-3).*Перевіримо, що число *1* є коренем тричлена. Для цього треба змінної величини *x* дати значення *1*. Підставляючи $x=1$, отримаємо:

$2\cdot 1^2+4\cdot 1-6=0$.

Якщо підставити $x=-3$, то:

$2\cdot(-3)^2+4\cdot(-3)-6=2\cdot 9-12-6=0$.

Приклад. Запишіть квадратний тричлен: $-4+3x^2-x$ в стандартному вигляді і вкажіть його коефіцієнти.

Рішення. Стандартна форма запису квадратного тричлена має вигляд:

$$ax^2+bx+c$$

тому його треба записати в такий спосіб: $3x^2-x-4$.

Його коефіцієнти рівні: $a = 3, b = -1, c = -4$.

Приклад. Установіть відповідність між коефіцієнтами квадратного тричлена (1 - 5) і самим квадратним тричленної (А - Е):

1) -4, 1, 5; 2) 0, -4, 5; 3) 5, 1, -4; 4) 5, -4, 0; 5) 1,0, 5.

А) $5x^2 + x - 4$; *Б)* $5x^2 - 4x$; *В)* $x^2 + 5$; *Г)* $-4x^2 + x + 5$; *Д)* $-4x^2 + 5x$;
Е) це не квадратний тричлен.

Рішення. 1 - Г; 2 - Е; 3 - А; 4 - Б; 5 - У.

Приклад. Обчисліть дискримінант квадратного тричлена: $-4x^2 + x - 3$.

Рішення. Випишемось коефіцієнти квадратного тричлена: $a = -4, b = 1, c = -3$ і застосуємо формулу: $D = b^2 - 4ac$,

$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-4)(-3) = -47.$

3. Дії над одночленами і многочленами. Розглянемо правила виконання деяких дій над одночленами.

3.1. Множення одночлена на одночлен. Щоб помножити одночленна одночлен треба:

• перемножити коефіцієнти одночленів;

• використовуючи формулу: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, скласти степеня з однаковими основами;

• написати отриманий одночлен в стандартному вигляді.

Приклад. Помножте одночлен $7a^3bx$ на одночлен $5ac^2$.

Рішення. $\left(7a^3bx\right) \cdot \left(5ac^2\right) = (7 \cdot 5) \cdot \left(a^3 \cdot a\right) \cdot b \cdot x \cdot c^2 = 35a^4bxc^2$.

Приклад. Помножте одночлен $\left(-m^3n^2a\right)$ на одночлен $\left(8an^3\right)$.

Рішення. $\left(-m^3n^2a\right) \cdot \left(8an^3\right) = (-1 \cdot 8) \cdot \left(n^2 \cdot n^3\right) \cdot (a \cdot a) \cdot m^3 = -8n^5a^2m^3$.

Зведення одночлена в степінь. Щоб звести одночлен до степені треба:

• звести в степінь коефіцієнт одночлена;

• використовуючи формулу: $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$, звести в степінь кожну з літер;

• записати отриманий одночлен в стандартному вигляді.

Приклад. Виконайте дію: $\left(7a^3bx\right)^2$.

Рішення. $\left(7a^3bx\right)^2 = 7^2 \cdot \left(a^3\right)^2 \cdot b^2 \cdot x^2 = 49a^6b^2x^2$.

3.2.Ділення одночлена на одночлен. Щоб розділити одночлен на одночлен треба:

• виконати операцію ділення коефіцієнтів одночленним;

• використовуючи формулу: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, виконати дії над степенями з однаковими основами;

• записати отриманий одночлен в стандартному вигляді.

Приклад. Розділіть одночлен $\left(-15m^3n^5a^4\right)$ на одночлен $\left(5a^4mn^3\right)$.

Рішення. $\frac{-15m^3n^5a^4}{5a^4mn^3} = \left(\frac{-15}{5}\right)\cdot\left(\frac{m^3}{m}\right)\cdot\left(\frac{n^5}{n^3}\right)\cdot\left(\frac{a^4}{a^4}\right) = -3m^2n^2a^0 = -3m^2n^2$.

Зауваження.

9. При діленні одночлена на одночлен в результаті може вийти математичний вираз, який не є одночленом.

Приклад. Розділіть одночлен $\left(5x^2y^3\right)$ на одночлен $\left(2x^4ay\right)$.

Рішення. $\frac{5x^2y^3}{2x^4ay} = \left(\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^4}\right)\cdot\left(\frac{y^3}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}\right) = 2{,}5x^{-2}y^2a^{-1}$.

Отриманий вираз не є одночленом, так як в його буквеному виразі присутні негативні показники степеня.

3.3. Приведення подібних членів. Якщо многочлен складається з подібних одночленним, то їх суму, різницю можна записати у вигляді одного одночлена. Ця процедура називається *приведенням подібних членів*. Для цього необхідно:

• скласти(відняти) коефіцієнти подібних членів;

• приписати їх загальну буквеною частина до отриманого коефіцієнту.

Приклад 8. Наведіть подібні члени в многочлені:

$$5a^2b+3a^2-3a^2b+b-3a^2+4b$$

Рішення. Згрупуємо подібні члени в заданому многочлені:

$$5a^2b+3a^2-3a^2b+b-a^2+4b=\left(5a^2b-3a^2b\right)+\left(3a^2-a^2\right)+\left(b+4b\right).$$

Наведемо подібні члени в кожній круглої дужки:

$$5a^2b-3a^2b=\left(5-3\right)a^2b=2a^2b;$$

$$3a^2-a^2=\left(3-1\right)a^2=2a^2;$$

$$b+4b=\left(1+4\right)b=5b.$$

В результаті отримаємо:

$$\left(5a^2b-3a^2b\right)+\left(3a^2-a^2\right)+\left(b+4b\right)=2a^2b+2a^2+5b.$$

3.4. Додавання многочленів. Для складання двох і більше многочленів треба:

• «з'єднати» їх знаком «плюс»;

• розкрити (прибрати) дужки;

• привести подібні члени.

Приклад. Виконайте додавання двох многочленів:

$\left(-5x^2+3x-3\right)$ і $\left(2x^2-x-4\right)$

Рішення.

$$\left(-5x^2+3x-3\right)+\left(2x^2-x-4\right)=-5x^2+3x-3+2x^2-x-4=$$

$$=\left(-5x^2+2x^2\right)+\left(3x-x\right)+\left(-3-4\right)=-3x^2+2x-7.$$

$5a^2b-3a^2b=\left(5-3\right)a^2b=2a^2b$;

$3a^2-a^2=\left(3-1\right)a^2=2a^2$;

$b+4b=\left(1+4\right)b=5b$.

В результаті отримаємо:

$$\left(5a^2b-3a^2b\right)+\left(3a^2-a^2\right)+\left(b+4b\right)=2a^2b+2a^2+5b\ .$$

3.5. Множення многочлена на число. При множенні многочлена на число треба коефіцієнт кожного многочлена помножити на це число.

Приклад. Виконайте множення числа3 на многочлен:

$3ax^2-2cx+3$

Рішення. Виконаємо дію:

$$3\cdot\left(3ax^2-2cx+3\right)=3\cdot 3ax^2-3\cdot 2cx+3\cdot 3=9ax^2-6cx+9$$

Приклад. Виконайте множення числа$\left(-4\right)$ на многочлен:

$2ax^2-3cx+ax$.

Рішення. Виконаємо дію:

$$\left(-4\right)\cdot\left(2ax^2-3cx+ax\right)=-4\cdot 2ax^2+4\cdot 3cx-4\cdot 1ax=-8ax^2+12cx-4\ .$$

Зауваження.

10. Якщо перед многочленом стоїть знак мінус, наприклад:

$-\left(2ax^2-3cx+ax\right)$

то це означає, що многочлен множиться на число $\left(-1\right)$. Виконання дії множення призведе до зміни знаку у кожного одночлена:

$$-\left(2ax^2 - 3cx + ax\right) = (-1)\cdot\left(2ax^2 - 3cx + ax\right) =$$

$$(-1\cdot 2)ax^2 + \left(-1\cdot(-3)\right)cx + (-1\cdot 1)ax = -2ax^2 + 3cx - ax.$$

3.6. Віднімання многочленів. Для виднімання двох і більше многочленів треба:

- «з'єднати» їх знаком «мінус»;
- розкрити (прибрати) дужки;
- привести подібні члени.

Приклад 12. Виконайте дію:

$$\left(4ax^2 + 3cx + 2b\right) - \left(3b + 5cx + 2ax^2\right).$$

. *Рішення.* Виконаємо дію:

$$\left(4ax^2 + 3cx + 2b\right) - \left(3b - 5cx + 2ax^2\right) = 4ax^2 + 3cx + 2b - 3b + 5cx - 2ax^2 = .$$

$$= 2ax^2 + 8cx - b$$

3.7. Множення многочлена на многочлен. Щоб помножити многочлен на многочлен треба:

- кожен одночлен першого многочлена помножити на кожний одночлен другого многочлена;
- привести подібні члени.

Приклад. Виконайте множення многочленів:

$$\left(4x^2 + 2b\right)\cdot\left(-2b + 4x^2\right).$$

Рішення. Виконаємо дію:

$$\left(4x^2 + 2b\right)\cdot\left(-2b + 4x^2\right) = 4x^2\cdot\left(-2b + 4x^2\right) + 2b\cdot\left(-2b + 4x^2\right) =$$

$$= -8bx^2 + 16x^2\cdot x^2 - 4b^2 + 8bx^2 = 16x^4 - 4b^2.$$

4. Формули скороченого множення. Формули, про яких тут піде мова, дозволяють скоротити обсяг технічної роботи, пов'язаної з перетвореннями многочленів, зокрема з їх множенням. Успіх застосування формул скороченого множення пов'язаний з умінням побачити ту чи іншу формулу (або її фрагмент) в розглянутому математичному виразі. Часто ці формули присутні в ньому в кілька завуальованому вигляді, а видає їх присутність наявність характерних математичних виразів («структур»). До їх числа відносяться, наприклад, ті, що наведені у таблиці 1.

Таблица 1.

№	*«Структура» алгебраїчного виразу*	*Назва алгебраїчного виразу*
1	A^2+B^2	сума квадратів
2	A^2-B^2	різницю квадратів
3	A^3+B^3	сума кубів
4	A^3-B^3	різниця кубів
5	$2AB$	подвоєний добуток
6	A^2+B^2+2AB	повний квадрат суми
7	A^2+B^2-2AB	повний квадрат різниці
8	A^2+B^2+AB	неповний квадрат суми
9	A^2+B^2-AB	неповний квадрат різниці
10	$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$	куб суми
11	$A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$	куб різниці

4.1. Квадрат суми (різниці) двох виразів. Зведення в квадрат суми або різниці двох математичних виразів a і b може бути виконано за такими формулами:

(1) $(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$,

(2) $(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$.

Вираз $a^2+b^2\pm 2ab$ називається *повним квадратом суми (різниці)a* і b.

Приклад. Розкрийте дужки: $(2x+3y)(2x+3y)$.

Рішення.

$$\begin{aligned}&(2x+3y)(2x+3y)=(2x+3y)^2=\\&=(2x)^2+(3y)^2+2\cdot 2x\cdot 3y=4x^2+9y^2+12xy.\end{aligned}$$

Приклад. Розкрийте дужки: $\left(x^5-3\right)\left(x^5-3\right)$.

Рішення.

$$\left(x^5-3\right)\left(x^5-3\right)=\left(x^5-3\right)^2=$$

$$=\left(x^5\right)^2+(3)^2+2\cdot x^5\cdot 3=x^{10}+9+6x^5.$$

4.2. Куб суми (різниці) двох виразів.

Піднесення до куба суми або різниці двох математичних виразів a і b може бути виконано за такими формулами:

(3) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,

(4) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Вираз $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ називається кубом суми (різниці) a і b.

Приклад. Розкрийте дужки: $(2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$.

Рішення.

$$\begin{aligned}&(2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)=(2x+3y)^3=\\&=(2x)^3+(3y)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot(3y)^2\cdot 2x=\\&=8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2.\end{aligned}$$

4.3. Добуток різниці двох виразів на їх суму.

(5) $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$.

Вираз називається різницею квадратів *a* і *b*.

Приклад. Розкрийте дужки: $(2x-3y)(2x+3y)$..

Рішення.

$$(2x+3y)\left(4x^2+9y^2-6xy\right)=(2x+3y)\left((2x)^2+(3y)^2-2x\cdot 3y\right)=$$

$$=(2x)^3+(3y)^3=8x^3+27y^3.$$

4.4. Добутоксуми (різниці) двох виразів на неповний квадрат їх різниці (суми).

(6) $(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$,

(7) $(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$.

Вираз $a^2+b^2\pm ab$ називається*неповним квадратом суми* (різності) *a* і *b*.

Приклад. Розкрийте дужки: $(2x+3y)\left(4x^2+9y^2-6xy\right)$..

Рішення.

$$(2x+3y)\left(4x^2+9y^2-6xy\right)=(2x+3y)\left((2x)^2+(3y)^2-2x\cdot 3y\right)=$$

$$=(2x)^3+(3y)^3=8x^3+27y^3.$$

Приклад. Розкрийте дужки: $(x-3)\left(x^2+9+3xy\right)$.

Рішення.

$$(x-3)\left(x^2+9+3xy\right)=(x-3)\left(x^2+3^2+x\cdot 3\right)=$$

$$=x^3-3^3=x^3-27.$$

5. Розкладання многочлена на множники. Від стандартної форми запису многочлена у вигляді суми одночленним іноді зручно перейти до іншої форми його записи - у вигляді добутку многочленів або многочленів і одночлена. Таке перетворення многочлена носить назву *розкладання на множники*.

Визначення поняття *розкладання многочлена на множники.* Якщо позначити буквою A довільний многочлен, то запис цього многочлена у вигляді добутку:

$$A = A_1 \cdot A_2,$$

де A_1 і A_2 якісь многочлени, називається *розкладанням многочлена A* на множники A_1 і A_2.

Прикладами таких перетворень є формули скороченого множення (1) - (7), якщо на них подивитися не «зліва направо», а «справа наліво». Пояснимо це твердження.

Як приклад розглянемо формулу (5):

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2,$$

яка будучи так записаної, дозволяє, не виконуючи операції множення, відразу записати результат множення у вигляді многочлена $a^2 - b^2$. Тобто, добуток многочленів, за допомогою формул скороченого множення, приводиться до многочлену, записаному в стандартному вигляді.

Якщо ж в цій формулі поміняти місцями ліву і праву частини рівності, тобто записати її так:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b),$$

то їй можна надати інший зміст, а саме: $a^2 - b^2$, многочлен, який записаний в стандартному вигляді, представлений у вигляді добутку двох многочленів $(a+b)$ і $(a-b)$, тобто, розкладений на множники $(a+b)$ і $(a-b)$.

Переходячи до питання про методи розкладання многочленів на множники, треба відзначити, що один з методів пов'язаний із застосуванням формул скорченого множення (1) - (7).

5.1. *Метод розкладання многочлена на множники: формули скорченого множення.*

Цей метод розкладання многочлена на множники може бути застосований до многочленів, які мають якусь характерну структуру. Таким многочленнім зазвичай привласнюють спеціальні «імена». Зокрема, якщо многочлен має структуру:

• *різниці квадратів,* то він може бути розкладений на множники за такою формулою:

$$(8)\, a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b);$$

• *суми кубів,* то він може бути розкладений на множники за такою формулою:

$$(9)\, a^3 + b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2 - ab + b^2\right);$$

• *різниці кубів,* то він може бути розкладений на множники за такою формулою:

$$(10)\, a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + ab + b^2\right);$$

• *повного квадрата суми*, то він може бути розкладений на множники за такою формулою:

$$(11)\, a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2;$$

• *повного квадрата різниці*, то він може бути розкладений на множники за такою формулою:

$$(12)\, a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2;$$

• *куба суми*, то він може бути розкладений на множники за такою формулою:

$$(13)\, a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3;$$

• *куба різниці,* то він може бути розкладений на множники за такою формулою:

$$(14)\, a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3.$$

Приклад. Розкладіть на множники: $4a^2 - 9$.

Рішення. Застосування формул скороченого множення пов'язано з наявністю (і їх треба побачити!) стандартних математичних структур в розглянутому многочлені(дивіться таблицю 1).

$$4a^2 - 9 = (2a)^2 - 3^2 = (2a - 3)\cdot(2a + 3).$$

5.2. Метод розкладання многочлена на множники: винесення спільного множника за дужки.

Для реалізації цього методу треба:

1. визначити загальний множник в розглянутому многочлені;
2. розділити на нього все одночлени, з яких складається многочлен;
3. записати твір загального множника на отриману частку, взявши це приватна в дужки.

Приклад 19. Розкладіть на множники: $8x^4a^2 - 2a^5x^3$.

Рішення. Застосуємо метод винесення спільного множника за дужки.

1. Загальними множниками є: число $2, a^2, x^3$. Зверніть увагу, що в якості показників степені у букв a і x, вибираються найменша степень. Отже, загальним множником є одночлен $2a^2x^3$..

2 і 3. $$8x^4a^2 - 2a^5x^3 = 2a^2x^3 \cdot \left(\frac{8x^4a^2}{2a^2x^3} - \frac{2a^5x^3}{2a^2x^3}\right) = 2a^2x^3 \cdot \left(4x - a^3\right).$$

5.3. Метод розкладання многочлена на множники: угруповання. Якщо в розглянутому многочлені немає загальних множників і немає «стандартних структур» (формули скороченого множення), то іноді можна шляхом угруповання елементів многочлена штучно створити загальний множник. Отриманий таким чином загальний множник потім виноситься за дужки. Успіх застосування методу угруповання часто залежить від того наскільки вдало згруповані одночлени, з яких складається даний многочлен. Проілюструємо застосування цього методу наступним прикладом.

Приклад 20. Розкладіть на множники: $7a+7c+ax+cx$.

Рішення. Згрупуємо перший одночлен з другим, третій з четвертим:

$$7a+7c+ax+cx=(7a+7c)+(ax+cx)=7(a+c)+x(a+c)=$$
$$=(a+c)(7+x).$$

$$7a+7c+ax+cx=(7a+7c)+(ax+cx)=7(a+c)+x(a+c)=$$
$$=(a+c)(7+x).$$

§ 3. АЛГЕБРАЇЧНИ ДРОБІ І ДІЇ НАД НИМИ

1. Поняття алгебраїчної дробі. Багаточлени часто називаю цілими математичними виразами. Термін «цілий», який використовується тут по відношенню до многочленів, вже використовувався при іншій нагоді - для позначення множини цілих чисел. Такий збіг не випадково. Справа в тому, що між множиною всіляких математичних виразів і множиною дійсних чисел можна провести певну аналогію.

- Множина цілих чисел є «аналогом» множини многочленів.
- Множина раціональних чисел(тобто чисел, які можна записати у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$, де n– цілі числа, m - натуральні числа) є «аналогом» множини алгебраїчних дробів $\frac{A}{B}$, де чисельник A і знаменник B - многочлени.

Визначення поняття *алгебраїчна дріб.* Математичний вираз виду $\frac{A}{B}$ називається *алгебраїчної дробом*, якщо A і B є многочлени, причому $B \neq 0$.

Приклад. Вкажіть, які з наведених математичних виразів, являються алгебраїчними дробами.

А) $\dfrac{1+a^2}{2}$; *Б)* $\dfrac{a^2+3x}{3}$; *В)* $\dfrac{5}{x^3+4y}$; *Г)* $\dfrac{2x^3+4}{x+1}$; *Д)* a^2-cx^2.

Рішення. Математичний вираз є алгебраїчним дробом, якщо, по-перше, вон є дробом, і, по-друге, знаменник дробу містить буквений вираз. Цим двом вимогам задовольняють варіанти *В)* і *Г).*

Нагадаємо, що операція ділення на нуль невизначена. Тому, в будь-який алгебраїчної дробі знаменник не повинен дорівнювати нулю. Ця умова може призвести до обмежень на числові значення букв, які завжди містяться в знаменнику алгебраїчної дробу.

2. Область допустимих значень (ОДЗ) математичного виразу.

Визначення поняття *область допустимих значень (ОДЗ) алгебраїчної дробі.*

Алгебраїчна дріб виду $\dfrac{A}{B}$ визначена (тобто, має сенс) тільки за умови, що

(1) $B \neq 0$.

Нерівність (1) визначає область (множину) допустимих числових значень (ОДЗ) букв, які входять в розглянуту дріб. Позначається це множина традиційно буквою *D*:

$$D\left(\frac{A}{B}\right)=\{B\neq 0\}.$$

Приклад. Запишіть ОДЗ для алгебраїчної дробу $\dfrac{2x^3+4}{x+1}$. .

Рішення. Дріб має сенс, тобто, визначена, якщо знаменник дробу не дорівнює нулю. Тому, безліч *D* можна задати умовою:

(2) $x+1\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq 0$.

Інший спосіб запису безлічі *D* має вигляд:

(3) $D\left(\dfrac{2x^3+4}{x+1}\right)=\left\{x \mid \; x+1\neq 0\right\}.$.

МножинуD можна записати, використовуючи «інтервальні» позначення:

(4) $D=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;\infty\right)$

Це ОДЗ даної дробу визначає обмеження на можливі числові значення, які може приймати буква x.

Зауваження. З формули (2) видно, що допустимим є все безліч дійсних чисел, крім числа*(-1)*. Тому, ОДЗ можна записати більш конкретно в такий спосіб:

$$D\left(\frac{2x^3+4}{x+1}\right)=\left\{x+1\neq 0\right\} \quad \Rightarrow D\left(\frac{2x^3+4}{x+1}\right)=\left\{x\in R,\, x\neq -1\right\},$$

або

(5) $D\left(\dfrac{2x^3+4}{x+1}\right)=\left\{\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;\infty\right)\right\}.$

Формули (2) - (4) - це аналітичні способи запису ОДЗ. Для графічного зображення допустимих значень x будемо використовувати позначення і зображення числових множин на числової осі. Наприклад, множина або область допустимих значень розглянутого прикладу, графічно може бути представлена так:

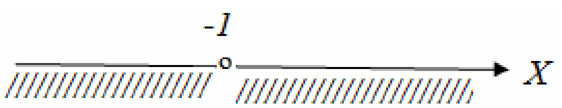


Рис. 1.

Обмеження на числові значення букв (змінних), які виконаються в математичному виразі, можуть бути пов'язані не тільки з операцією ділення. Всі зворотні операції мають цей «недолік». У таблиці 1 наведено список операцій, які породжують ті чи інші обмеження на можливі числові значення многочлена A.

Таблиця 1

	Операція	*Умова, при якоїопераціяможе бути виконана*

1.	Ділення $\frac{1}{A}$	$A \neq 0$
2.	Добуттякореня парноїстепені $\sqrt[2n]{A}$	$A \geq 0$
3.	Логарифмування $log_b A$	$A > 0$
4.	Зворотнітригонометричнідії $arcsin A, \quad arccos A$	$-1 \leq A \leq 1$

3. Основна властивість алгебраїчної дробу. Якщо чисельник і знаменник алгебраїчної дробі помножити або розділити на одне й те саме не рівне нулю вираз, то величина дробу при такому перетворенні не зміниться.

Наприклад,

$$\frac{x+2a}{a-x} = \frac{(x+2a)\cdot(a+x)}{(a-x)\cdot(a+x)}.$$

Приклад. Запишіть дроби $\frac{a}{a-b}$ і $\frac{x}{x-y}$ так, щоб у них були однакові знаменники.

Рішення. Використовуючи основну властивість дробу, помножимо чисельник і знаменник першого дробу на один і той же вираз $(x-y)$, припускаючи, що: $x-y \neq 0$:

$$\frac{a}{a-b} = \frac{a\cdot(x-y)}{(a-b)\cdot(x-y)},$$

а чисельник і знаменник другого дробу на вираз $(a-b)$, припускаючи, що:

$a-b \neq 0$:

$$\frac{x}{x-y}=\frac{x\cdot(a-b)}{(x-y)\cdot(a-b)}.$$

Отримані таким чином дроби мають однакові знаменники.

4. Скорочення дробів. Скоротити дріб - це означає розділити її чисельник і знаменник на один і теж, не рівний нулю, вираз. Скорочення дробів виконується з метою спрощення математичних виразів. Тому, вираз, на яке ділиться її чисельник і знаменник має являти собою загальний дільник.

Приклад. Виконайте скорочення дробу:

$$\frac{(a-2c)(a+c)}{(a+c)(a-c)}\ .$$

Рішення. У чисельника і знаменника даної дробу є спільний дільник: $(a+c)$, тому виконаємо скорочення (поділ чисельника і знаменника) на цей вислів:

$$\frac{(a-2c)(a+c)}{(a+c)(a-c)}=\frac{\dfrac{(a-2c)(a+c)}{(a+c)}}{\dfrac{(a+c)(a-c)}{(a+c)}}=\frac{a-2c}{a+c}.$$

Зауваження. Щоб виконати дію скорочення дробу, треба попередньо чисельник і знаменник розкласти на множники. Якщо в результаті цього розкладання в чисельнику і знаменнику дробу з'являться спільні множники, то виконати скорочення на ці множники.

Приклад. Виконайте скорочення дробу:

$$\frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}\ .$$

Рішення. Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники, використовуючи формули (8) і (11) з §2:

$$a^2-x^2=(a-x)(a+x);\quad a^2+2ax+x^2=(a+x)^2=(a+x)(a+x).$$

Якщо підставити в вихідну дріб ці розкладання:

$$\frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+x)(a+x)},$$

то видно, що чисельник і знаменник дробу містять загальний множник $(a+x)$. Тому, можна виконати скорочення дробу, розділивши чисельник і знаменник дробу на спільний множник $(a+x)$:

$$\frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+x)(a+x)}=\frac{\dfrac{(a-x)(a+x)}{(a+x)}}{\dfrac{(a+x)(a+x)}{(a+x)}}=\frac{a-x}{a+x}.$$

5. Дії з алгебраїчними дробами: додавання (віднімання) дробів. Найбільш простим є випадок, коли *у всіх дробів однаковий знаменник*. Результатом складання (віднімання) таких дробів є дріб, знаменник якого такий же як і у вихідних дробів, а чисельник дорівнює сумі (різниці) чисельнику цих дробів. Після виконання дії додавання дробів, в отриманої дробу треба виконати операцію скорочення, якщо це можливо.

Приклад. Знайдіть суму дробів:

$$\frac{ax}{a^2\cdot(x+a)}+\frac{a^2}{a^2\cdot(x+a)}+\frac{x+a}{a^2\cdot(x+a)}\ .$$

Рішення. Так як знаменники всіх дробів однакові, то в результаті вийде дріб з таким же знаменником, а чисельник дорівнюватиме сумі чисельників всіх дробів, тобто:

$$\frac{ax}{a^2\cdot(x+a)}+\frac{a^2}{a^2\cdot(x+a)}+\frac{x+a}{a^2\cdot(x+a)}=\frac{ax+a^2+x+a}{a^2\cdot(x+a)}.$$

Щоб спробувати виконати скорочення отриманої дробу треба розкласти чисельник на множники. Для цього згрупуємо перші два і два останніх доданка чисельника:

$$ax+a^2+x+a=\left(ax+a^2\right)+(x+a)=a(x+a)+(x+a)=(x+a)(a+1).$$

Підставами отриманий результат в чисельник дробу і виконаємо скорочення:

$$\frac{ax+a^2+x+a}{a^2\cdot(x+a)}=\frac{(x+a)(a+1)}{a^2\cdot(x+a)}=\frac{a+1}{a^2}.$$

Приклад. Виконайте дії:

$$\frac{3x}{x^2-4cx+c^2-1}-\frac{4x-2c+5}{x^2-4cx+c^2-1}+\frac{2x-3c+4}{x^2-4cx+c^2-1}.$$

Рішення. Знаменники всіх дробів однакові, тому в результаті вийде дріб з таким же знаменником. Чисельник дорівнюватиме сумі і різниці чисельників всіх дробів:

$$\frac{3x}{x^2-4cx+c^2-1}-\frac{4x-2c+5}{x^2-4cx+c^2-1}+\frac{2x-3c+4}{x^2-4cx+c^2-1}=$$

$$=\frac{3x-(4x-2c+5)+(2x-3c+4)}{x^2-4cx+c^2-1}.$$

Виконаємо тотожні перетворення в чисельнику - розкриємо дужки і наведемо подібні члени:

$$3x-(4x-2c+5)+(2x-3c+4)=3x-4x+2c-5+2x-3c+4=x-c-1.$$

В результаті вийде наступна дріб:

$$\frac{x-c-1}{x^2-4cx+c^2-1}.$$

Розкладемо знаменник на множники:

$$x^2-4cx+c^2-1=\left(x^2-4cx+c^2\right)-1=(x-c)^2-1^2=$$

$$=(x-c-1)(x-c+1).$$

Тепер можна виконувати скорочення дробу:

$$\frac{x-c-1}{x^2-4cx+c^2-1}=\frac{x-c-1}{(x-c)^2-1}=$$

$$=\frac{x-c-1}{(x-c-1)(x-c+1)}=\frac{1}{x-c+1}.$$

Додавання (віднімання) дробів з різними знаменниками.

Щоб скласти (відняти) дроби з різними знаменниками треба кожну дріб перетворити так, щоб у всіх дробів був однаковий знаменник. Ця процедура називається *приведення дробів до спільного знаменника*. Потім скласти (відняти) одержані таким чином дроби за правилом додавання дробів з однаковими знаменниками.

Алгоритм приведення дробів до спільного (однаковому) знаменника.

Для того, щоб привести дроби до спільного найпростішого (найменшому) знаменника треба виконати наступні дії.

- Розкласти знаменник кожного дробу на множники.
- Записати спільний знаменник як добуток всіх різних множників з найбільшим ступенем.
- Визначити та записати для кожного дробу додаткові множники, тобто множники, на які треба помножити чисельник і знаменник кожного дробу так, щоб у всіх дробів був однаковий знаменник.
- Застосувати правило додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

Приклад. Виконайте дії: $\frac{3}{x^3-x^2}+\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{x^3-x}$.

Рішення. Так як у дробів різні знаменники, то можна застосувати алгоритм складання (вирахування) дробів з різними знаменниками.

Крок 1. Розкладемо знаменник кожного дробу на множники:

$x^3-x^2=x^2(x-1)$; $x^2+2x+1=(x+1)^2=(x+1)(x+1)$;

$x^3 - x = x\left(x^2 - 1\right) = x\left(x-1\right)\left(x+1\right).$

Крок 2. Напишемо загальний знаменник як твір всіх різних множників з найбільшим ступенем:

$$\frac{2}{x^3 - x^2} + \frac{1}{x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^3 - x} = \frac{2}{x^2\left(x-1\right)} + \frac{1}{\left(x+1\right)^2} - \frac{1}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)} =$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots}{x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2}.$$

Крок 3. Визначимо і напишемо для кожного дробу додаткові множники. Для цього порівняємо знаменники кожного дробу з спільним знаменником:

$x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2.$

З порівняння знаменника першого дробу $x^2\left(x-1\right)$ з спільним знаменником $x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2$ слід, що його треба помножити на $\left(x+1\right)^2$. Це і є додатковий множник для першого дробу.

Знаменник другого дробу $\left(x+1\right)^2$ порівнюємо з $x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2$ - додатковий множник: $x^2\left(x-1\right)$.

Знаменник третій дробу $x\left(x+1\right)\left(x-1\right)$ порівнюємо з $x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2$ - додатковий множник: $x\left(x+1\right)$. Тепер кожну дріб можна записати в такий спосіб:

$$\frac{2}{x^2\left(x-1\right)} = \frac{2\cdot\left(x+1\right)^2}{x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2};$$

$$\frac{1}{\left(x+1\right)^2} = \frac{1\cdot x^2\left(x-1\right)}{x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2};$$

$$\frac{1}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = \frac{1\cdot x\left(x+1\right)}{x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2} = \frac{x\left(x+1\right)}{x^2\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2}.$$

Крок 4. Застосуємо правило додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{2}{x^3-x^2}+\frac{1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{x^3-x}=\frac{2}{x^2(x-1)}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{2\cdot(x+1)^2}{x^2(x-1)(x+1)^2}+\frac{x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)^2}-\frac{x(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot(x+1)^2+x^2(x-1)-x(x+1)}{x^2(x-1)(x+1)^2}.$$

При виконанні додавання (віднімання) дробів прийнято використовувати певну форму записи, які виконуються перетворень.

Приклад . Виконайте дії: $\frac{1}{x^3-8}+\frac{1}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x^2-4x+4}$.

Рішення. Розкладемо знаменники кожного дробу на множники:

- $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$;

• $x^2+2x+4=x^2+2x+2^2$ - це неповний квадрат суми (дивіться таблицю 1, §2). Будь якій неповний квадрат суми розкласти на множники неможливе!

- $x^2-4x+4=x^2-4x+2^2=(x-2)^2$.

Спільний знаменник дорівнює: $(x-2)^2\left(x^2+2x+4\right)$, тоді:

$$\frac{1}{x^3-8}+\frac{1}{x^2+2x+4}-\frac{1}{x^2-4x+4}=$$

$$=\frac{1^{(x-2}}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}+\frac{1^{((x-2)^2}}{x^2+2x+4}-\frac{1^{(x^2+2x+4}}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{}{(x-2)^2\left(x^2+2x+4\right)}$$

6. Дії з алгебраїчними дробами: множення дробів. Результатом множення двох дробів є дріб, чисельник якого є добуток чисельників вихідних дробів, а знаменник - добуток знаменників вихідних дробів.

Приклад. Виконайте множення дробів: $\frac{a^2-x^2}{4ax}\cdot\frac{a^2-ax}{(a-x)^2}$.

Рішення.

$$\frac{a^2-x^2}{4ax}\cdot\frac{a^2-ax}{(a-x)^2}=\frac{(a^2-x^2)\cdot(a^2-ax)}{4ax\cdot(a-x)^2}.$$

Якщо можливо, то отриману дріб треба скоротити:

$$\frac{(a^2-x^2)\cdot(a^2-ax)}{4ax\cdot(a-x)^2}=\frac{(a-x)\cdot(a+x)\cdot a\cdot(a-x)}{4ax\cdot(a-x)^2}=\frac{(a-x)^2\cdot(a+x)\cdot a}{4ax\cdot(a-x)^2}=\frac{a+x}{4x}.$$

Таким чином:

$$\frac{a^2-x^2}{4ax}\cdot\frac{a^2-ax}{(a-x)^2}=\frac{a+x}{4x}.$$

7. Дії з алгебраїчними дробами: ділення дробів. Дія ділення двох дробів $\frac{a}{b}$ і $\frac{m}{n}$ можна «замінити» дією множення за таким правилом:

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}.$$

Далі слід застосувати правило множення дробу на дріб.

Приклад. Виконайте ділення дробів: $\frac{a^2-x^2}{4ax}:\frac{3a-3x}{6ax^3}$.

Рішення. $\frac{a^2-x^2}{4ax}:\frac{3a-3x}{6ax^3}=\frac{a^2-x^2}{4ax}\cdot\frac{6ax^3}{3a-3x}=\frac{\left(a^2-x^2\right)\cdot 6ax^3}{4ax\cdot\left(3a-3x\right)}$.

Скоротимо отриману дріб:

$$\frac{\left(a^2-x^2\right)\cdot 6ax^3}{4ax\cdot\left(3a-3x\right)}=\frac{\left(a-x\right)\cdot\left(a+x\right)\cdot 6ax^3}{4ax\cdot 3\cdot\left(a-x\right)}=\frac{\left(a+x\right)\cdot x^2}{2}.$$

§4. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ СТАНДАРТНИХ(ПРАКТИЧНИХ) ЗАВДАНЬ. КОНТРОЛЬНІ (ТЕСТОВИ)

Контрольні завдання спрямовані на перевірку знань наступних математичних навчальних елементів (понять та їх визначень):

1. Порядок дій в числових і алгебраїчних виразах
2. Область визначення математичного виразу
3. Корінь математичного виразу
4. Поняття математичного тотожності
5. Поняття рівняння та його розв'язання
6. Поняття рівносильних рівнянь
7. Поняття функції
8. Поняття одночлена і многочлена
9. Стандартна форма запису одночлена
10. Степінь одночлена
11. Подібні одночлени
12. Стандартна форма запису многочлена
13. Степінь многочлена
14. Квадратний тричлен
15. Дискримінант квадратного тричлена
16. Корінь квадратного тричлена.
17. Множення одночлена на одночлен
18. Зведення одночлена в степінь
19. Ділення одночлена на одночлен
20. Приведення подібних членів
21. Додавання (віднімання) многочленів

22. Множення многочлена на число
23. Множення многочлена на многочлен
24. Формули скороченого множення
25. Розкладання многочлена на множники
26. Поняття алгебраїчної дробу
27. Область допустимих значень математичного виразу
28. Основна властивість алгебраїчної дробу.
29. Алгоритм приведення дробів до спільного (однаковому) знаменника
30. Скорочення дробів
31. Дії з алгебраїчними дробами

1. Чому дорівнює коефіцієнт одночлена:

1.1. $a^5 \cdot 41 \cdot b^2 \cdot x^3$.

Варіанти відповідей: А) 5;   В) 2;   С) 4;   D) 41;   Е) 3.

1.2. $-a^3 x \cdot m^2$

Варіанти відповідей: А) 3; В) 1; С) 2; D) -1; Е) 0.

1.3. $-6x^2 \cdot y \cdot b$

Варіанти відповідей: А) 6; В) 2; С) -6; D) 1; Е) 0.

2. Чому дорівнює буквене вираз одночлена: $3ab^3x$

Варіанти відповідей: А) 3; В) ab^3*; С)* ab^3x*; D)* x*; Е) буквених виразів немає.*

3. Чому дорівнює степінь одночлена:

3.1. $a^5 \cdot 4 \cdot b^2 \cdot x^3$

Варіанти відповідей: А) 5; В 10; С) 4; D) 2; Е) 3.

3.2. a^3xm^2

Варіанти відповідей: А) 3; В 2; З 1; D) 6; Е) 0.

3.3. $27ab^3x$

Варіанти відповідей: А) 5; В) 27; С) 3; D) 1; Е) 0.

4. Напишіть одночлен в стандартному вигляді:

4.1. $5a^2b^3a^3c$

Варіанти відповідей: A) $a^2b^3a^3c\cdot 5$*; B)* $5abc$*; C)* $5b^3ca^5$*;*
D) a^5b^3c*; E)* $5a^5$.

4.2. $b^2\cdot 5\cdot c\cdot b$

Варіанти відповідей: A) $5b^3c$*; B)* bc*; C)* 5*; D)* $5bc$*; E)* b^3c.

4.3. $6cd\cdot 2ac$*;*

4.4 . $3m\cdot(-5n)\cdot(-8k)$.

5. Визначте, які одночлени є подібними.

1) $a^3\cdot b\cdot c^2$; 2) $-4a^3c^2$; 3) $8abc$; 4) a^3c^2
Варіанти відповідей: A) все одночлени подібні; B) перший і третій;
C) подібних немає; D) другий і четвертий; E) другий і третій.

6. Знайдіть степінь многочлена:

6.1. $3x^2y+4a^5-7a^3b^3+9b^4$

Варіанти відповідей: A) 3; B 5; C) 4; D) 1; E) 6.

6.2. $-a^2x+ax^2+4a^3-5x^3$

Варіанти відповідей: A) 3; B 2; C) 4; D) -5; E) це не многочлен.

7. Запишіть вираз у вигляді многочлен в стандартному вигляді:

7.1. $(5x-7y)(5x+7y)+(7x-5y)(7x+5y)$*;*

7.2. $(x+4)^2-(x-2)\ (x+2)$*;*

7.3 $(8a-3b)\ (8a+3b)-(6a-5b)^2$.

7.4. $-4x^3\ (x^2-3x+2)$.

7.5. $(1-x)\ (2y+x)$.

7.6. $(5c-4)^2$.

7.7. $3a\ (a-b)+(b\ (2a-b)$.

7.8. $3c\,(c-2)-(c-3)^2$.

7.9. $5a^2\,(4a^3-a^2+1)$.

7.10. $(3c-x)\,(2c-5x)$.

7.11. $(3a+2b)^2$.

7.12. $5x\,(2x+3)-(x-1)\,(x-6)$.

7.13. $(a-c)^2-c\,(a-3c)$.

7.14. $(a-2)\,(a+2)-a\,(a-1)$.

7.15 $(a+b)\,(a-b)\,(a^2+b^2)$

7.16. $c\,(c-2)\,(c+2)-(c-1)\,(c^2+c+1)$.

7.17 $-4x^3\,(x^2-3x+2)$.

7.18 $(1-x)\,(2y+x)$.

7.19 $(5c-4)^2$.

7.20 $5a^2\,(4a^3-a^2+1)$.

7.21 $(3c-x)\,(2c-5x)$.

7.22 $(3a+2b)^2$.

8.Винесіть спільниймножник за дужки:

8.1. $3a^3b-12a^2b+6ab$.

8.2. $x\,(x-1)+2\,(x-1)$.

8.3. $16a^4-4a^3+8a^2$.

8.4. $7\,(x-2)-x\,(x-2)$.

8.5. $16a^4-4a^3+8a^2$.

8.6. $7\,(x-2)-x\,(x-2)$.

8.7. $3a^3b-12a^2b+6ab$.

8.8. $x\,(x-1)+2\,(x-1)$.

9. Розкладіть на множники:

9.1. $xy+3y+xz+3z$.

9.2. $25-c^2$.

9.3. $ab^2-2abc+ac^2$.

9.4. $2x + 2y - x^2 - 2xy - y^2$.

9.5. $5a - ab + 5c - cb$.

9.6. $9a^2 - c^2$.

9.7. $2b^2 - 12bc + 18c^2$.

9.8. $19 + 12x + 4x^2$.

9.9. $4a^2 - 20ax + 25x^2$.

9.10. $(a + b)^2 - (a^2 - b^2)$

9.11. $a^4b + ab^4$.

10. Виконайте дію над дробом. Результат подайте у вигляді дробу, записаної в стандартної формі.

10.1. $\left(\frac{1}{n-8} - \frac{n}{n^2-64}\right) : \frac{8n}{n^2-16n+64} - \frac{2}{n+8}$

10.2. $\frac{3}{2a-3} - \frac{8a^3-18a}{4a^2+9} \cdot \left(\frac{2a}{4a^2-12a+9} - \frac{3}{4a^2-9}\right)$

10.3. $\frac{1}{3b-1} - \frac{27b^3-3b}{9b^2+1} \cdot \left(\frac{3b}{9b^2-6b+1} - \frac{1}{9b^2-1}\right)$

10.4. $\frac{2a}{a-b} + \frac{2a}{a+b}$.

10.5. $\frac{8m^2n^2}{5k} : 4m^3n$.

11.6. $\left(\frac{m^2}{m^2-4} - \frac{m+2}{m-2}\right) : \frac{4m+4}{2-m}$.

11.7. $x - \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

11.8. $\frac{10a}{a-b} \cdot \frac{a^2-b^2}{5a}$.

12. Скоротіть дріб:

12.1 $\frac{b^2-c^2}{b^2-bc}$.

12.2. $\frac{3a^4b^3}{15a^5b}$.

12.3. $\frac{x^2-xy}{x^2-y^2}$.

12.4 . $\frac{x^2+4x}{x^2-16}$.

§5. ДЕКАРТОВАЯ ПРЯМОКУТНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

1.Координати точки. Положення точки *P* на площині однозначно визначається за допомогою *двох чисел*, які називаються *координатами точки* і традиційно позначаються буквами x і y. Наприклад, якщо $x=2$ *і* $y=-3$, будемо записувати це в такий спосіб $P(2;-3)$. Кількість координат визначається *розмірністю простору*, в якому знаходиться дана точка.
Положення точки *P*, яка знаходиться на прямій лінії (одномірний простір) однозначно визначається однією координатою - $P(x)$; на площині (двомірний простір) - $P(x,y)$ двома координатами; в реальному просторі (тривимірний простір) - $P(x,y,z)$ трьома.

2. Система координат. Координати точки *P* задаються в *системі координат.* Найбільш уживаною є декартова прямокутна система координат (ДПСК). Координати називаються в цьому випадку декартовимі координатами і позначаються x,y,z.. На малюнку 1 зображені одномірна, двомірна і тривимірна декартова системи координат. В одновимірному просторі *декартова система координат - це числова вісь (координатна вісь)* - пряма, на якій обрана точка відліку *O* (початок координатної системи) і масштаб.

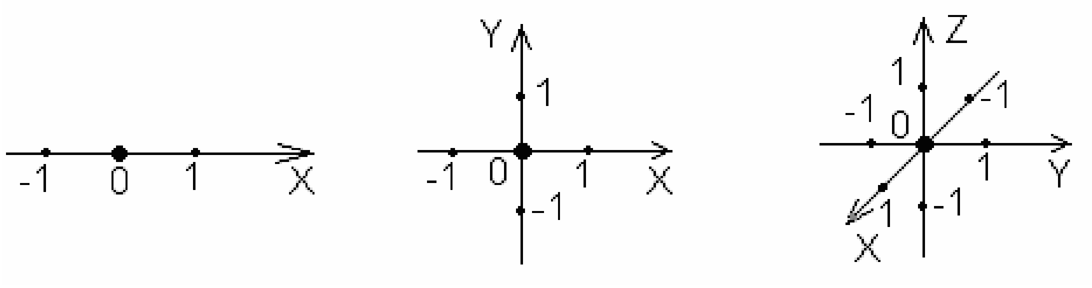


Рис. 1

В двомірному просторі ДПСК (рис.1) являє собою дві взаємно перпендикулярні числові осі на площині (координатні осі). Точка перетину O осей називається початком координат; горизонтальна вісь називається віссю абсцис (вісь OX), вертикальна - віссю ординат (вісь OY); площину, в якій знаходяться координатні осі OX і OY називається координатною площиною $XOУ$. У тривимірному просторі - ДПСК (рис. 1) - це три числові осі із загальним початком в точці O; дві координатні осі (зазвичай це OX і OY), що лежать в горизонтальній площині, називаються віссю абсцис і віссю ординат, а вертикальна вісь OZ - віссю аплікат. ДПСК в просторі має три координатні площини: перша - XOY, утворена осями OX і OY, друга XOZ- осями OX і OZ, третя ZOY - осями OY і OZ.

3. Геометрична інтерпретація поняття координата точки. З геометричної точки зору координата точки P в ДПСК на площині - це відстань від цієї точки до відповідної координатної осі, взяте зі знаком плюс або мінус (рис.2). Відстань від осі OY (довжина відрізка або рівного йому відрізка) - це x - координата точки P, відстань від осі OX (довжина відрізка або рівного йому відрізка) - у координата точки.

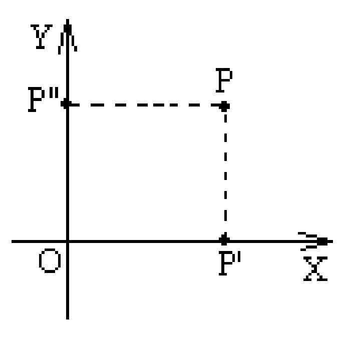


Рис. 2.

Зауваження

1. Точки P'і P''на малюнку 2 називаються прямокутними проекціями точки P на координатні осіOX і $OУ$ відповідно.

2. У ДПСК в просторі відстані від точки P до координатної площини XOY, взяте з відповідним знаком є z - координата точки P, відстані від точки P до координатної площині XOZ - y - координата точки P, відстані від точки P до координатної площини ZOY - x - координата точки P.

3. Якщо координати двох точок $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$і $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$ задані в ДПСК в просторі, то відстань між ними визначається формулою:

(1) $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

На площині відстань між точками $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$і $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$ рівно:

(2) $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Приклад. Знайдіть відстань між точками *P (-1; 5) і M (-4; -2).*

Рішення. Так як точки задані двома координатами, то вони розташовані на площині і треба використовувати формулу (2):

$$PM=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(-1-(-4))^2+(5-(-2))^2}=$$

$$=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58.}$$

Приклад. Задана точка *A (-3, 4).* Знайдіть відстань від точки *A* до осі *OX* і осі *OY*.

Рішення. Так як координата будь-якої точки в ДПСК на площині - це відстань від цієї точки до відповідної координатної осі, то: x - координата точки *A* дорівнює *(-3)* - відстань до осі *OY* одно *(+3*); y - координата точки *A* дорівнює *(+4)* - відстань до осі *OX* одно *(+4).*

Приклад. Напишіть координати точки, розташованої на негативній частині осі ОХ на відстані *4* від початку координат.

Варіанти відповідей: 1) (4; -4); 2) (-4; 0); 3) (0; 4); 4) (4; 0); 5) (0; -4).

Рішення. Так як точка розташована на осі *OX*, то це означає що відстань від точки до осі *OX* дорівнює нулю, тобто $y = 0$. Відстань від осі *OY* дорівнює *4*, отже x - координата точки дорівнює *(+4)* або *(-4)*. Точка знаходиться на негативній частині осі *OX*, тому: $x = -4$.

§6. ВЕКТОРА НА ПЛОЩАНІ

1. Поняття вектора на площині і його геометрична інтерпретація. Вектор - це новий математичний об'єкт, який з геометричної точки зору, являє собою відрізок *AB* причому точки *A* і *B* не рівноправні, як у звичайного відрізка, і тому мають спеціальні назви: точка *A* називається *початком вектора*, точка *B* - *кінцем вектора.* Позначають такий вектор $\overrightarrow{AB}$ (дивіться малюнок 3). Стрілка на малюнку показує, яка точка - початок, а яка - кінець вектора.

Зауваження.

1. Вектора $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ - це різні вектора, тому, що початком першого вектора є точка *A*, другого - точка *B*: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$..

2. Стрілка над «ім'ям вектора» *AB* замінює слово вектор і підкреслює той факт, що мова йде не просто про відрізок *AB*, а про вектор $\overrightarrow{AB}$.

2. Координати вектора.Якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, то два числа (позначимо їх $(AB)_1$ і $(AB)_2$), які виходять за формулами:

$(AB)_1 = x_2 - x_1;$

$(AB)_2 = y_2 - y_1;$

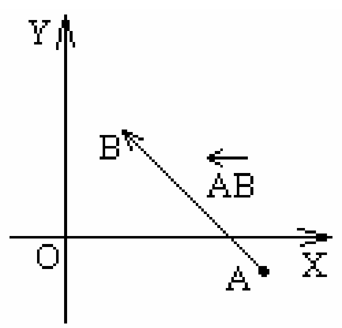


Рис. 3.

називаються *координатами вектора* $\overrightarrow{AB}$. Можна сказати, що вектор $\overrightarrow{AB}$ заданий, якщо задані його координати і записувати будемо це так:

(1) $\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right)$.

Зауваження 1. Для того щоб обчислити координатами вектора треба від *координат кінця вектора відняти координати початку*.

Приклад. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, якщо відомі координати точок початку і кінця вектора $A(3;-2), B(-7;-1)$.

Рішення. Застосуємо формулу (1):

$x_2 - x_1 = -7 - 3 = -10; \quad y_2 - y_1 = -1 - \left(-2\right) = 1$;

$\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1\right) = \left(-10; 1\right)$;

$\overrightarrow{BA} = \left(x_1 - x_2, y_1 - y_2\right) = \left(10; -1\right)$.

Зауваження. Крім позначення вектора символом $\overrightarrow{AB}$ використовуються і інші символи. Наприклад, вектор $\overrightarrow{AB} = \left(-10; 1\right)$ можна записати так: $\vec{a} = \left(-10; 1\right)$ або так $\overrightarrow{\left(-10; 1\right)}$.

3. Модуль вектора. *Модуль вектора* $\vec{a} = (a_1, a_2)$ *–це число*, яке позначається $\left|\vec{a}\right|$ і обчислюється за формулою:

(2) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$.

З геометричної точки зору модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ - це довжина відрізка *AB*:

(3) $$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

Зауваження. Так як модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ - це довжина відрізка *AB*, то формула (3) і формула (1) з §1 збігаються.

Приклад. Обчисліть модуль вектора $\vec{c}$, якщо відомі координати точок початку і кінця цього вектора: $P(-3;4)$ і $M(1;-1)$.

Рішення. Щоб застосувати формулу (2) або (3) для обчислення модуля вектора треба попередньо знайти координати цього вектора c_1 *и* c_2.

З формули (1) випливає, що: $c_1 = 1 - (-3) = 4$ і $c_2 = -1 - 4 = -5$. Тобто, $\vec{c} = (4;-5)$ і тоді:

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}.$$

4. Колінеарні, ортогональні і рівні вектора. Колінеарність векторів. Якщо координати двох векторів $\vec{a} = (a_1, a_2)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2)$ *пропорційні*, тобто:

(4) $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

то ці вектори називаються *колінеарними* (паралельними). Колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

З геометричної точки зору колінеарність векторів означає, що вони лежать або на одній прямій, або на паралельних прямих.

Приклад. Визначте координату *x* так, щоб вектора $\vec{k} = (-4, x)$ і $\vec{p} = (16, 8)$ були колінеарні.

Рішення. Напишемо умову колінеарності (4) заданих векторів:

$$\frac{16}{-4} = \frac{8}{x} \quad \Rightarrow \quad 16x = 8 \cdot (-4) \quad \Rightarrow \quad x = -2.$$

Ортогональність векторів. Якщо координати двох векторів $\vec{a}=(a_1,a_2)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2)$, задовольняють умові:

(5) $\quad a_1b_1+a_2b_2=0$,

то вони називаються *ортогональними* (перпендикулярними).Ортогональність векторів $\vec{a}=(a_1,a_2)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2)$ позначається так: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

З геометричної точки зору ортогональність векторів відповідає тому, що вони лежать на взаємно перпендикулярних прямих.

Приклад. Визначте координату x так, щоб вектора $\vec{k}=(3x,-3)$ і $\vec{p}=(x,16)$ були ортогональними.

Рішення. Напишемо умову ортогональності (5) заданих векторів: Рівність векторів.

$$3x\cdot x+(-3)\cdot 16=0 \quad\Rightarrow\quad 3x^2-48=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=16$$
$$x_1=4,\quad x_2=-4.$$

Рівність векторів. Два вектор $\vec{a}=(a_1,a_2)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2)$ рівні, якщо рівні їх відповідні координати:

(6) $$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2.$$

5. Дії над векторами.

Додавання (віднімання) векторів. Сумою (різницею) двох векторів $\vec{a}=(a_1,a_2)$ і $\vec{b}=(b_1,b_2)$ називається вектор $\vec{c}=(c_1,c_2)$, координати якого визначаються рівностями:

(7) $$c_1=a_1\pm b_1,\quad c_2=a_2\pm b_2.$$

Тобто,

(8) $$\vec{c}=\vec{a}\pm\vec{b}=\overrightarrow{(a_1,a_2)}\pm\overrightarrow{(b_1,b_2)}=\overrightarrow{(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2)}.$$

Зауваження.

1. При додаванні (відніманні) більш ніж двох векторів правило (8) зберігається.

2. При геометричному складання кількох вільних векторів використовується правило замикає вектора. Наприклад, щоб геометрично знайти суму векторів: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ (дивіться *малюнок 4*) треба:

• шляхом паралельного перенесення поєднати початок другого вектора $\vec{a}_2$ з кінцем першого $\vec{a}_1$, початок третього $\vec{a}_3$ з кінцем другого $\vec{a}_2$ і так далі;

• вектор, який замикає отриману ламану лінію (*рис. 4b*), початок якого знаходиться в початку першого вектора $\vec{a}_1$, а кінець в кінці останнього вектора і являє собою суму векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$

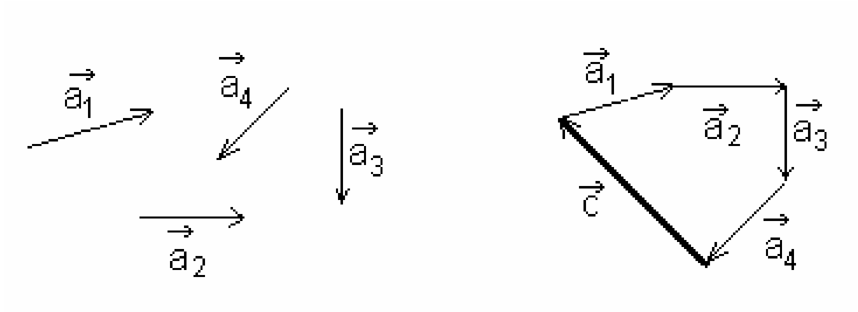
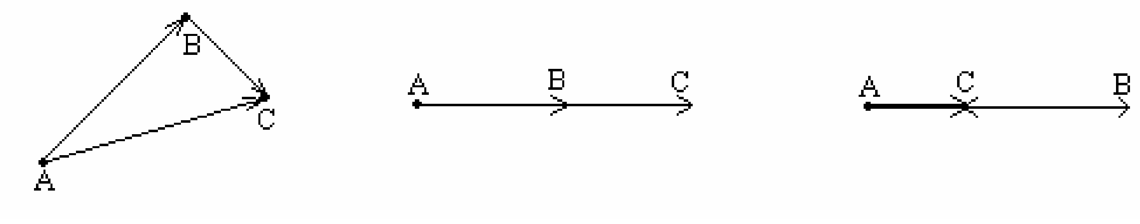


Рис. 4.

3. У разі двох не колінеарних векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ замикаючим вектором є вектор $\overrightarrow{AC}$, який утворює з векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ трикутник ABC (рис. 5а).

4. Якщо вектора $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ єсонаправленнимі, то їх «геометрична сума» - вектор $\overrightarrow{AC}$, наведена на малюнку *5b*.

5. У разі, коли вектора $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ протилежно спрямовані, результат їх геометричного складання наведено на малюнку *5c*. Вектор $\overrightarrow{AC}$ виділений жирною лінією.



abc

Рис.5.

6. Щоб знайти різницю двох векторів $\vec{a}-\vec{b}$ треба шляхом паралельного перенесення поєднати початок першого вектора $\vec{a}$ з початком другого вектора $\vec{b}$

7. (м*алюнок 6*). Вектор $\vec{c}$, що з'єднує кінці обох векторів і спрямований від кінця вектора $\vec{b}$ до кінця вектора $\vec{a}$, є різниця векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (*малюнок 6*).

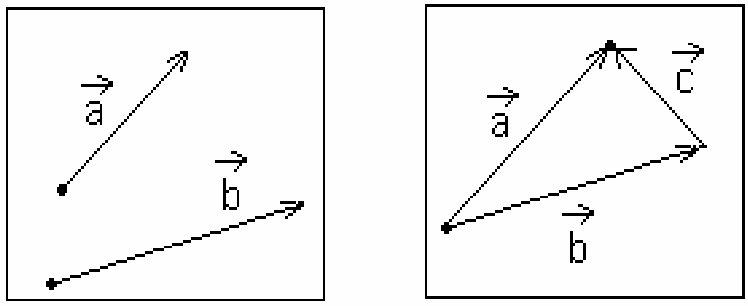


Рис.6.

Множенням векторів. Добутком числа λ на вектор $\vec{a}=(a_1,a_2)$ називається вектор $\vec{b}=(b_1,b_2)$, координати якого визначаються так:

(9) $$b_1=\lambda a_1, \qquad b_2=\lambda a_2.$$

Тобто,

(10) $$\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\overrightarrow{(a_1,a_2)}=\overrightarrow{(\lambda a_1,\lambda a_2)}.$$

Для операцій додавання векторів і множення на число має місце формула:

(11) $$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

Зауваження

1. Якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

2. Якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ і $\lambda > 0$, то:

- вектор $\vec{a}$ *збігається за напрямком* з вектором $\vec{b}$ $\left(\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}\right)$ і

- $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

3. Якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ і $\lambda < 0$, то:

- вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно спрямовані $\left(\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}\right)$ и

- $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

4. Для операцій додавання векторів і множення на число має місце формула:

$\lambda\left(\vec{a} + \vec{b} + \ldots\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} + \ldots$.

Приклад. Знайдіть координати вектора $\vec{c} = (-4)\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$, якщо $\vec{a} = (1,-2)$ і $\vec{b} = (3,-2)$.

Рішення.

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (-4)\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -4\cdot\vec{a} - (-4)\cdot\vec{b} = -4\cdot\vec{a} + 4\cdot\vec{b} = \\ &= -4\cdot\overrightarrow{(1,-2)} + 4\cdot\overrightarrow{(3,-2)} = \overrightarrow{(-4,8)} + \overrightarrow{(12,-8)} = \\ &= \overrightarrow{(-4+12;\ 8+(-8))} = \overrightarrow{(16;0)}.\end{aligned}$$

Скалярний добуток. Результатом скалярного добутку вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$ на вектор $\vec{b} = (b_1, b_2)$ є число, яке позначається: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ і обчислюється за формулою:

(12) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$.

Так як, формула (12) дозволяє виконати множення двох векторів, якщо відомі їх координати, то її називають *координатної формою записи скалярного добутку*.

Множення двох векторів можна виконати, використовуючи іншу формулу:

(13) $$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\beta,$$

де $\left|\vec{a}\right|$ і $\left|\vec{b}\right|$ - модулі векторів $\vec{a}=\left(a_1,a_2\right)$ і $\vec{b}=\left(b_1,b_2\right)$, а β - кут між ними. Такий спосіб запису твору векторів називається *геометричною формою записи скалярного добутку*, так як в ній використовуються геометричні характеристики вектора: довжина (модуль) і кут.

Зауваження.

1. З формули (12) і визначення модуля вектора (2) випливає, що, якщо помножити вектор $\vec{a}$ на себе, то:

(14) $$\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1\cdot a_1+a_2\cdot a_2=a_1^{\,2}+a_2^{\,2}=\left|\,\vec{a}\,\right|^2.$$

Квадрат вектора визначається як скалярний твір цього вектора на себе:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}$$

і

$$\vec{a}^{\,2}=\left|\,\vec{a}\,\right|^2.$$

6. Формули обчислення кута між векторами і проекції вектора на вектор.

Якщо прирівняти праві частини формул (12) і (13), то можна отримати, що

(14) $$\cos\beta=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$

Формула (14) дозволяє обчислити кут між векторами, якщо відомі координати цих векторів.

Приклад. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}=(-2;4)$ і $\vec{c}=(3;1)$.

Рішення. Застосуємо формулу (14), обчисливши попередньо модулі векторів і їх скалярний добуток:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(-2\right)\cdot 3+4\cdot 1=-2$.

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$,

$$cos\,\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{-2}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

§7. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ СТАНДАРТНИХ (ПРАКТИЧНИХ) ЗАВДАНЬ. КОНТРОЛЬНІ (ТЕСТОВИ)ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГОРІШЕННЯ

Завдання 1. Якщо координати точки *A (-3, 4)*, то відстань від *A* до осі *OX* одно:

Варіанти відповідей: 1) 3; 2) -3; 3) 4; 4) -4; 5) (32 + 42) 1/2 = 5.

Завдання 2*.* Вектор перпендикулярний осі *OY*. Його модуль дорівнює *3*. Вкажіть можливий варіант значень його координат.

Варіанти відповідей: 1) (3; 3); 2) (3; 0); 3) (0; 3); 4) (0; -3); 5) (-3; -3).

Завдання 3*.* Напишіть координати точки, розташованої на негативній частині осі *OX* на відстані *4* від початку координат.

Варіанти відповідей: 1) (4; -4); 2) (-4; 0); 3) (0; 4); 4) (4; 0); 5) (0; -4).

Завдання 4. Координати точок: *A (-2; 3)* і *B (2; -2),* тоді координати вектора $\overrightarrow{AB}$ дорівнюють:

Варіанти відповідей: 1) (4; 5); 2) (-4; 0); 3) (5; 0); 4) (4; -5); 5) (-4; 5).

Завдання 5. Знайдіть відстань між точками $A(-2;3)$ і $B(-2;4)$.

Варіанти відповідей: 1) 4; 2) 2; 3) -1; 4) 3; 5) 1.

Завдання 6.Знайдіть координати середини відрізка *AB*, якщо *A (-5; 3) і B (5; -1).*

Варіанти відповідей: 1) (5; 1); 2) (0; 2); 3) (10; 2); 4) (-1; 5); 5) (3; 5).

Завдання 7. Знайдіть модуль вектора $\vec{a} = (-2; -1; 2)$.

Варіанти відповідей: 1) 5; 2) $-2 + (-1) + 2 = -1$; *3)* $\left|-2 + (-1) + 2\right| = 1$;

4) 3; 5) $(2; 1; 2)$.

Завдання 8. Вектор паралельний осі *OX*. Його модуль дорівнює *15*. Вкажіть можливий варіант значень його координат.

Варіанти відповідей: : 1) $\vec{a}$ *= (15; 15); 2)* $\vec{a}$ *= (-15; 0);*

3) $\vec{a}$ *= (0; 15); 4)* $\vec{a}$ *= (0; -15); 5)* $\vec{a}$ *= (-15;-15).*

Завдання 9. Вектор, модуль якого дорівнює *4*, паралельний осі *OY* і збігається з нею за напрямком. Знайдіть його координати.

Варіанти відповідей:

1) $\vec{a}$ *= (4; -4); 2)* $\vec{a}$ *= (4; 0); 3)* $\vec{a}$ *= (0; 4);*

4) $\vec{a}$ *= (-4; 0); 5)* $\vec{a}$ *= (-4; -4); 6)* $\vec{a}$ *= (0; -4).*

Завдання 10. Вектор перпендикулярний осі *OX*. Його модуль дорівнює *7*. Вкажіть можливий варіант значень його координат.

Варіанти відповідей: 1) $\vec{a}$ *= (7; 7); 2)* $\vec{a}$ *= (-7; 0);*

3) $\vec{a}$ *= (7; 0); 4)* $\vec{a}$ *= (0; -7); 5)* $\vec{a}$ *= (-7;-7).*

Завдання 11. Відомо, що вектор $\vec{a}$ перпендикулярний осі *OY* і $|\vec{a}| = 3$. Вкажіть можливий варіант значень його координат.

Варіанти відповідей: 1) $\vec{a}$ *= (3; 3); 2)* $\vec{a}$ *= (3; 0);*

3) $\vec{a}$ = (0; 3);   4) $\vec{a}$ = (0; -3);   5) $\vec{a}$ = (-3;-3).

Завдання 12. Вкажіть правильне продовження твердження: «Якщо вектор заданий в прямокутній декартові системі координат, то ...»

а) проекція вектора $\vec{a} = (3;4)$ на вісь OX дорівнює:

Варіанти відповідей: 1) 0; 2) 3 + 4 = 7; 3) 32 + 42 = 25; 4) 3; 5) 4.

b) проекція вектора $\vec{a} = (-3;-4)$ на вісь OY дорівнює:

Варіанти відповідей: 1) 3; 2) 4; 3) -7; 4) -3;   5) -4.

Завдання 13. Перевірте чи виконується умова:

а) колінеарності для векторів $\vec{b} = (-1;2)$ і $\vec{c} = (2;4)$;

b) ортогональності для векторів $\vec{b} = (2;-1)$, $\vec{c} = (2;4)$.

Завдання 14. При якому значенні $\alpha \neq 0$ вектора $\vec{b} = (\alpha;-2\alpha)$ і $\vec{a} = (\alpha;2)$ ортогональні.

Завдання 15. Вкажіть правильне продовження твердження: «Якщо $\vec{a} = 2\vec{b}$, то вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ...»:

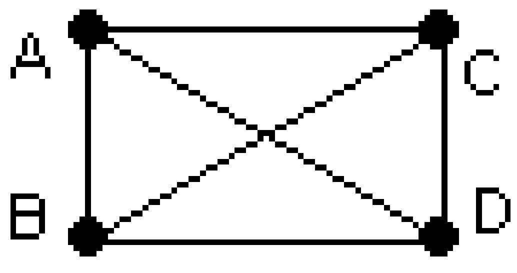
Варіанти відповідей: 1) ортогональні; 2) не колінеарні; 3) сонапрвленние; 4) довільно спрямовані по відношенню один до одного; 5) протилежно спрямовані.

Завдання 16. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{b} = (1;-2)$; $\vec{a} = (0;-4)$.

Завдання 17*.* Вкажіть правильне продовження твердження: «Якщо $\vec{a} = -5\vec{b}$, то вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ...»

Варіанти відповідей: 1) ортогональні; 2) не колінеарні; 3) сонапрвленние; 4) довільно спрямовані по відношенню один до одного; 5) протилежно спрямовані.

Завдання 18. Знайдіть:



a) суму векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DC}$;

Варіанти відповідей:.

1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$*;* *2)* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$*;* *3)* $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$*;* *4)* $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$*;* *5)* $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$*;* *6) 0.*

b) суму векторів $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

Варіанти відповідей:

1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$*;* *2)* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$*;* *3)* $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$*;* *4)* $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$*;* *5)* $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$*;* *6) 0.*

c) різницю векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Варіанти відповідей:

1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$*;* *2)* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$*;* *3)* $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$*;* *4)* $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$*;* *5)* $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$*;* *6) 0.*

d) різницю векторів $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

Варіанти відповідей:

1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$*;* *2)* $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$*;* *3)* $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$*;* *4)* $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$*;* *5)* $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$*;* *6) 0.*

Завдання.19. Вкажіть правильний варіант твердження: «Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то вектора $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ...»

Варіанти відповідей: 1) колінеарні; 2) одиничні; 3) компланарні; 4) ортогональні; 5) не ортогональні; 6) не колінеарні, але обов'язково одиничні.

Завдання 20. Вкажіть правильний варіант твердження: «Результатом скалярного твори векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ...»

Варіанти відповідей: 1) число, тільки позитивне; 2) число, тільки негативне; 3) будь-яке дійсне число; 4) вектор, ортогональний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; 5) вектор, колінеарний тільки до вектора $\vec{a}$; 6) вектор, колінеарний тільки до вектора $\vec{b}$.

Завдання 21. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}=(3;0;-4)$, $\vec{b}=(1;-1;0)$.

Варіанти відповідей: 1) $(4;-1;-4)$; 2) $(3;0;0)$; 3) 0; 4) 3; 5) не існує.

Завдання 22. Знайдіть кут між вектором $\vec{a}=(3;-4)$ і

а) віссю OY;

Варіанти відповідей: 1) 30^o; 2) $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $cos\alpha=-1$;

4) $cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{5}}$; 5) $cos\alpha=\frac{-4}{\sqrt{5}}$.

2) віссю OX;

Варіанти відповідей: 1) 3; 2) 4; 3) -7; 4) -3; 5) -4.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Підручник для 8 класу./За редакцією З.І.Слепкань. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. - 232 с.
2. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра. Підручник для 9 класу./За редакцією З.І.Слепкань. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. - 256 с.

3. Шкіль М.І., та інші. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу загальноосвіт. навч. закладів - К:, Зодіак - ЕКО, 2006. - 272 с.
4. Шкіль М.І., та інші. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 11 класу загальноосвіт. навч. закладів - К:, Зодіак - ЕКО, 2006. - 384 с.
5. Крижанівська Т.В. Методичні вказівки до самостійного вивчення контрольних робіт з дисципліни " Математика" для учнів факультету довузівської підготовки. - Одеса: ОДЕКУ, 2006 - 68 с.
6. Крижанівська Т.В. Методичні вказівки до самостійного вивчення контрольних робіт з дисципліни " Математика" для учнів факультету довузівської підготовки. - Одеса: ОДЕКУ, 2007-51с.
7. Крижанівська Т.В. Методичні вказівки до самостійного вивчення контрольних робіт з дисципліни " Математика" для учнів факультету довузівської підготовки. - Одеса: "Екологія", 2005 - 50 с.

8.Дворецька Л.П., Захарійченко Ю.Ю., Мерзляк А.Г. та інші, Зовнішнє оцінювання. Математика. Навч. посібн. Із підготов, до зовніш. Оцінювання учнів загальноосвітн. навч. закл.: Укр. Центр оцінювання якості освіти. - К., 2007. - 64 с.

9. Захарійченко Ю.О. Школьний о.В. Математика: 36. тест, завдань для підготовки до зовнішньогонезалежного. оцінювання. - К.: Генеза, 2009. - 104 с.