**О.В. ГЛУШКОВ, О.Ю. ХЕЦЕЛІУС, С.В. АМБРОСОВ,
А.А.СВИНАРЕНКО, Г.В. ІГНАТЕНКО**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(р.«Теорія ймовірностей математична статистика»)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.В. ГЛУШКОВ, О.Ю. ХЕЦЕЛІУС, С.В. АМБРОСОВ,
А.А.СВИНАРЕНКО, Г.В. ІГНАТЕНКО

ВИША МАТЕМАТИКА
«Теорія ймовірностей математична статистика»

Конспект лекцій

О д е с а – 2010

ББК 28.082:22.1
Г 13
УДК 504:534.1

Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету (протокол №8 від 28.10.2010 р.).

Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Амбросова С.В., Свинаренко А.А., Ігнатенко Г.В.

Вища математика (р. «Теорія ймовірностей математична статистика»): Конспект лекцій. –Одеса, Вид-во: Екологія, 2010. – 124с.

У конспекту лекцій викладені класичні питання теорії ймовірностей та математичної статистики (розділу курсу «Вища математика»), зокрема, елементи комбінаторики, поняття дискретних та неперервних випадкових величин, закони розподілу їх ймовірностей, функція розподілу ймовірностей системи випадкових величин та її властивості, граничні теореми теорії ймовірностей, основні відомості математичної статистики, у т.ч. критерії для перевірки статистичних гіпотез тощо. Для студентів гідрометеорологічних, екологічних та економічних спеціальностей.

Конспект лекцій використовується для денної та заочної форм навчання.

Зміст

РОЗДІЛ І. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Предмет теорії ймовірностей. Статичне означення ймовірності

У повсякденному житті нам часто доводиться зустрічатися з різними явищами і фактами, які ми називаємо *випадковими*. Зокрема, інформація, на основі якої розв’язуються практичні задачі в економіці, зазвичай носить *наближений, неточний, випадковий* характер. Наприклад, власник магазину не знає, скільки буде покупців, бізнесмен – яким буде завтра курс гривні, банкір – чи повернуть йому позику. Але й у випадкових фактах за певних умов можуть бути виявлені певні закономірності. Ці закономірності вивчає теорія ймовірностей. Для розв’язання задач, пов’язаних з аналізом економічної інформації, використовують ймовірнісні та статистичні методи, оскільки характерною особливістю теорії ймовірностей є те, що вона розглядає явища, в яких в тій чи іншій формі присутня невизначеність.

Широко розповсюджене уявлення пов’язує невизначеність і, отже, ймовірність з такими ситуаціями як гра в кості, в рулетку, витягування карт з колоди і т.п. Саме потреба у розв’язуванні практичних задач, пов’язаних з азартними іграми, а також з питаннями страхування і демографії, якими в середині 17 ст. займались такі відомі вчені як Гюйгенс, Паскаль, Ферма і Яків Бернуллі, обумовила виникнення теорії ймовірностей як самостійної науки.

Як і в кожній математичній дисципліні, в теорії ймовірностей існують деякі *початкові, первісні* поняття, покладені в її основу.

Першим таким поняттям є поняття *випадкової події*. До нього приходимо так.

По-перше, під *подією* розуміємо таку *дію*, про яку можна сказати, що вона відбулась, або відбувається, або може відбутись, або неможлива.

Приклади: 1) Першого вересня почалось навчання в ЛНУ ім. І.Франка (подія відбулась). 2) При киданні монети герб випаде зверху (може відбутись, може не відбутись). 3) Витягнути зелену кульку зі скриньки, яка містить 1 білу і 1 чорну кульку (неможлива подія).

По-друге, поняття випадкової події пов’язане з завданням *певного комплексу умов*.

Приклади комплексів умов:

1) На тверду плоску рівну поверхню кидається кубик правильної форми, виготовлений з однорідного матеріалу, з гранями, позначеними одним, двома,..., шістьома очками.

2) Ведеться спостереження за певною частиною неба в зоряну ніч протягом деякого проміжку часу.

3) Серед населення якого-небудь населеного пункту вибирають навмання 100 чол. Процес реалізації певного комплексу умов називається ***експериментом.*** Тепер можемо дати означення *випадкової події*. ***Випадкова подія*** – це подія, яка може *відбутись або не відбутись* в результаті здійснення деякого експерименту, тобто в результаті реалізації певного комплексу умов.

Приклади випадкових подій (в зв'язку з вищевказаними комплексами умов):

1) Випадання грані кубика з парною кількістю очок.

2) Поява комети.

3) Наявність хоча б 10-ти чоловік з вищою освітою серед вибраних ста чоловік.

Якщо під час кожної реалізації заданого комплексу умов подія *обов'язково* відбувається, то вона називається ***вірогідною***.

Якщо ж в результаті експерименту подія *обов'язково* не відбудеться, то це - ***неможлива*** подія.

Очевидно, що після *одноразового* здійснення експерименту, ми не виявимо закономірностей, які властиві для конкретної випадкової події. Однак закономірності можна виявити, якщо здійснювати експеримент *багаторазово в однакових умовах.*

Наприклад, дані реєстрації народжувань дітей в невеликому населеному пункті за невеликий період часу не дають *стійких* співвідношень між кількістю народжених хлопчиків і дівчаток. Однак якщо зібрати статистичні дані *по всій країні за тривалий період* (кілька десятиріч) і проаналізувати їх, то виявиться певна закономірність: на кожну 1000 народжених припадає *в середньому* 515 хлопчиків.

Отже, другим з початкових понять теорії ймовірностей є поняття *масовості* явищ (подій).

Масові явища розглядаються як протилежність до одиничних і масовість може проявлятись: 1) в часі; 2) в просторі; 3) і в часі, і в просторі.

Тепер ми можемо остаточно сформулювати, що є *предметом* теорії ймовірностей. ***Предметом теорії ймовірностей*** є вивчення кількісних закономірностей, характерних для масових однорідних випадкових подій.

Статистичне означення ймовірності

Нехай деякий експеримент здійснюється n разів і при цьому в результаті m випробувань відбувається подія A. Відношення m/n називається *відносною частотою* появи події A в серії з n випробувань. Теорія ймовірностей вивчає лише такі події, для яких має місце властивість *стійкості частот.* Вона полягає в тому, що частота появи події A при *великій кількості* випробувань мало відрізняється від деякого числа.

Наприклад, якщо багато разів підкидати монету, то частота випадання герба буде мало відрізнятися від $1/2$. Частота народження хлопчика для великої кількості проаналізованих даних буде мало відрізнятися від 0,515.

Звідси, логічно міркуючи, отримуємо так зване *статистичне означення* ймовірності. *Ймовірністю* події називається *об'єктивно існуюча величина,* навколо якої групуються відносні частоти цієї події при великій кількості випробувань. Позначаємо $P(A)$ - ймовірність події A.

Легко зрозуміти, що за значеннями відносних частот можна отримати лише наближене значення ймовірності, тому з точки зору математики таке означення є недосконалим.

Якщо формулювати досконале статистичне означення з точки зору математики, то можна сказати, що *ймовірністю події є границя,* до якої прямує відносна частота появи події при необмеженому зростанні кількості випробувань: $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n}$. Це означення належить німецькому математику Ріхарду Мізесу .

1.2. Елементи комбінаторики

Комбінаторика - розділ математики, предметом якого є теорія *скінченних* множин.

Множина - сукупність об'єктів довільної природи, які мають спільну для всіх них характеристичну властивість.

Приклади: множина всіх дійсних чисел; множина цілих чисел - *нескінченні* множини; множина цілих чисел від 1 до 100 - *скінченна* множина.

A, B, C,... - множини; *a, b, c* - їх елементи. Нагадаємо, що, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}, \varnothing$- відповідно об'єднання, перетин, різниця множин і порожня множина. Позначимо: $N(A)$- кількість елементів множини A. Якщо $N(A)=n$, то казатимемо, що A – n-множина.

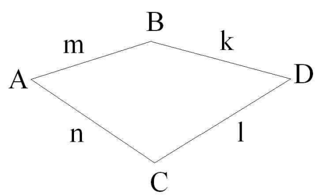
В основі комбінаторики лежать два елементарні правила – суми і добутку.

Сформулюємо **правило суми**.

$$N(A)= m,\ N(B)= n,\ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing \quad \Rightarrow \quad N(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})= m + n.$$

Правило добутку (основне правило комбінаторики): якщо І-у дію можна здійснити n_1 способами, ІІ-у, яка не залежить від першої, - n_2 способами, ..., k-ту, яка не залежить від усіх попередніх, - n_k способами, то першу, другу, дії *послідовно* можна здійснити $n_1\, n_2 ... n_k$ способами.

Приклад. Скількома способами можна потрапити з п. A до п. D якщо з A до B веде m доріг, з B до D –k доріг, з A до C -n доріг і з C до D – l доріг?



Розв'язання. За правилом добутку рух шляхом ABD можна здійснити mk способами, а шляхом ACD - nl способами. Згідно з правилом суми з A до D можна потрапити $mk + nl$ способами.

Впорядковані множини

Означення. Множина M називається *впорядкованою,* якщо в ній встановлено відношення порядку, що має такі властивості:

1) $\forall a, b \in M$ або $a \prec b$, або $b \prec a$;

2) якщо $a \prec b, b \prec c$ то $a \prec c$. Для впорядкування n-множини досить кожному з її елементів приписати один з номерів $1,2,...,$ $n,$ або просто записати її елементи в певному порядку.

Ту саму множину очевидно можна впорядкувати по-різному. Наприклад для множини $M=\{1,2,3\}$ можливі такі впорядкування:

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).

Розміщення, перестановки, комбінації

Означення. Нехай M – n - множина; $k \le n, k \in N$. ***Розміщенням*** з n елементів по k називають будь-яку *впорядковану* k- підмножину множини M.

Кількість розміщень з n елементів по k обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \ .$$

Приклад. $M=\{1,2,3\}$; $n=3$, $k=2$; $A_3^2=\dfrac{3!}{1!}=6$. Справді, можливі розміщення такі: (1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2) - всього шість.

Означення. ***Перестановкою*** з n елементів називається розміщення з n елементів по n , тобто будь-яке впорядкування n-множини, яка складається з різних елементів.

Щоб задати перестановку з n елементів, досить якимось чином впорядкувати n-множину.

Кількість перестановок з n елементів обчислюють за формулою:

$$P_n=n! \quad \left(P_n=A_n^n=\frac{n!}{0!}=n!\right).$$

Зокрема, $P_3=3!=6$, в чому можна переконатися, повернувшись до прикладу про можливі впорядкування множини $M=\{1, 2, 3\}$.

Означення. Нехай M - n-множина; $k\le n, k\in N$. ***Комбінацією*** з n елементів по k називають будь-яку k-підмножину множини M.

Кількість комбінацій з n елементів по k обчислюють за формулою:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ .$$

Приклад. $M=\{1,2,3\}$; $n=3$, $k=2$; $C_3^2=\dfrac{3!}{2!1!}=3$. Справді, можливі комбінації такі: $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ - всього три.

Числа C_n^k називають біномними коефіцієнтами, оскільки вони фігурують у відомій формулі бінома Ньютона $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$.

Поклавши у ній $a=b=1$, одержимо: $2^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k$ - кількість підмножин n-множини.

Розміщення з повтореннями

Означення. Нехай M - n-множина; $k\in N$ - довільне натуральне число. ***Розміщенням з повтореннями*** з n елементів по k називають будь-яку *впорядковану* множину вигляду $(a_1,a_2,\dots,a_k)$, де a_i, $i=\overline{1,k}$-елементи множини M, не обов'язково різні. Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по k обчислюють за формулою: $\bar{A}_n^k=n^k$.

Приклади. 1) $M=\{1,2\}$; $n=2$, $k=3$; $\bar{A}_2^3=2^3=8$.

Справді, можливі розміщення такі: (2,1,1), (1;2,1), (1,1,2), (1,2,2), (2,1,2), (2;2,1), (1,1,1), (2,2,2) - всього вісім.

2) $M=\{1, 2, 3\}$; $n=3$, $k=2$; $A_3^2 = 3^2 = 9$.

Справді, можливі розміщення такі: (1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2), (1;1), (2;2), (3;3) - всього дев’ять.

Перестановки з повтореннями

Означення. ***Перестановкою з повтореннями*** з n елементів називається будь-яке впорядкування n-множини, серед елементів якої є однакові.

Якщо серед елементів n-множини є n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, ..., n_k елементів k-ого типу, причому $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то кількість перестановок з повтореннями з n елементів обчислюють за формулою: $P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$. Остання формула задає також кількість способів розбиття n-множини на k підмножин, що містять відповідно $n_1, n_2, \ldots n_k$ елементів.

Приклад. $M=\{1, 2, 2\}$; $n=3$, $n_1=1$, $n_2=2$, $k=2$; $P_3(1,2) = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$.

Справді,можливі перестановки такі: (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1) - всього три.

Приклад розбиття n-множини. $M=\{1, 2, 3\}$; $n=3$, $n_1=1$, $n_2=2$, $k=2$;

$P_3(1,2)=3$. Справді, можливі розбиття такі: $\{1\},\{2,3\}$; $\{2\},\{1,3\}$; $\{3\},\{1,2\}$ - всього три.

Комбінації з повтореннями

Означення. Нехай M - n-множина; $k \in N$ - довільне натуральне число. ***Комбінацією з повтореннями*** з n елементів по k називають будь-яку k-множину вигляду $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, де $a_i, i = \overline{1,k}$ - елементи множини M, не обов’язково різні.

Кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по k обчислюють за формулою: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$.

Приклади. 1) $M=\{1,\ 2\}$; $n=2$, $k=3;\overline{C_2^3}=C_4^3=\frac{4!}{1!3!}=4$. Справді, можливі комбінації такі: $\{2{,}1{,}1\}$, $\{1{,}2{,}2\}$, $\{1{,}1{,}1\}$, $\{2{,}2{,}2\}$ - всього чотири.

2) $M=\{1,\ 2,\ 3\}$; $n=3$, $\kappa=2$; $\overline{C_3^2}=C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6$. Справді, можливі комбінації такі: {1;2}, {1;3}, {2;3}, {1;1}, {2;2}, {3;3} - всього шість.

1.3 Простір елементарних подій. Операції над випадковими подіями

Простором елементарних подій (Ω) назвемо множину, елементами якої є всі елементарні події, пов'язані з даним випробуванням.

Під *елементарними* подіями (ω) ми розуміємо всі нерозкладні результати даного випробування, які взаємно виключають один одного.

Приклади. 1) *Підкидання монети 1 раз.* Можливі результати у цьому експерименті: випадання герба (елементарна подія Γ або ω_1); випадання цифри (елементарна подія *Ц* або ω_2). $\Omega=\{\Gamma$, *Ц* $\}$ або $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$.

2) *Підкидання грального кубика 1 раз.* Тоді $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_k - випадання k очок.

3) *Підкидання монети 2 рази.* Ω=*{ГГ, ЦЦ, ГЦ, ЦГ}*.

Стрільба по плоскій мішені. Введемо в площині мішені прямокутну систему координат xOy і влучання в певну точку площини поставимо у відповідність координаті цієї точки. Тоді простором елементарних подій є вся площина, тобто множина всіх впорядкованих пар дійсних чисел:

$$\Omega=\{(x,y):-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty\}.$$

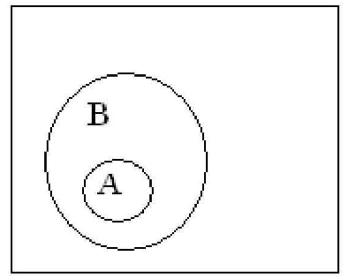
Нехай Ω - довільний простір елементарних подій. *Випадковими подіями* або просто *подіями* назвемо *підмножини* A множини Ω. Отже, ми поняття *подія* ототожнюємо з поняттям *множина.* Для прикладу 2 (підкидання кубика) подіями є: $A=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ - випадання непарної кількості очок; $B=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ - випадання парної кількості очок і т.п. Для прикладу 4 (стрільба) подією є будь-яка область A в площині xOy. Подія A відбувається, якщо відбувається влучання в точку $(x, y)\in A$.

Подію Ω називатимемо *вірогідною,* вона обов'язково відбудеться в результаті випробування, а подію $\varnothing$ - *неможливою,* вона обов'язково не відбудеться в результаті випробування.

Розглянемо *відношення,* в яких можуть перебувати події одна відносно одної, і *операції над подіями.*

Означення. Кажуть, що подія A є **окремим випадком** події B (або подія A тягне за собою B, або B є наслідком A), якщо множина A є підмножиною множини B.

Позначають ці відношення так само як для множин: $A \subset B$ або $B \supset A$.



Відношення $A \subset B$ означає, що всі елементарні події, які входять до складу *A,* належать також і до *B,* тобто кожного разу, коли відбувається подія *A*, відбувається також і подія *B*.

Приклади.

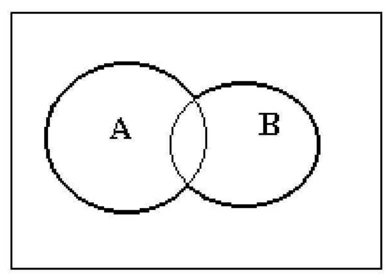
1) $A=\{\omega_2, \omega_6\}$, $B=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \Rightarrow A \subset B$.

2) Подія *A* - влучання в область *A,* подія *B* - влучання в область $B \Rightarrow A \subset B$.

*Означення. Події A і B називаються **рівносильними**, якщо* $A \subset B$ *і* $B \supset A$. *Рівносильність подій позначають так: A=B.*

*Означення***.** ***Сумою*** двох подій *A* і *B (A+B* або $A \cup B$*)* називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться хоча б одна з подій *A* або *B* (або лише *A,* або лише *B,* або і *A,* і *B).*

Згідно з цим означенням, якщо події *A* відповідає підмножина *A* простору **Ω**, а події *B* - підмножина *B,* то події *A+B* відповідає підмножина $A \cup B$, яка складається з усіх елементарних подій, які належать об'єднанню *множин A* і *B.*



Приклади. 1) $A=\{\omega_2, \omega_4\}$, $B=\{\omega_4, \omega_6\} \Rightarrow A+B=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. 2) Подія *A* - влучання в область *A,* подія *B* - влучання в область $B \Rightarrow$ *A+B* - влучання хоча б в одну з областей *A* або *B.*

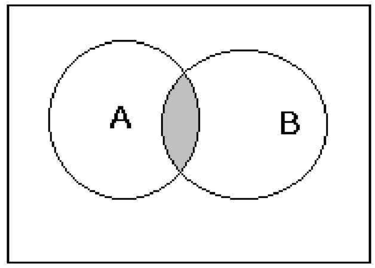
Означення. **Добутком** двох подій A і B (AB або $A \cap B$) називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться як подія A, так і подія B.

Події *AB* відповідає перетин множин *A* і *B,* тобто вона складається з елементарних подій, які входять до складу обидвох множин *A* і *B.*

Приклади. 1) $A=\{\omega_2, \omega_4\}$, $B=\{\omega_4, \omega_6\} \Rightarrow A \cap B = \{\omega_4\}$.

2) Подія A - влучання в область A, подія B - влучання в область

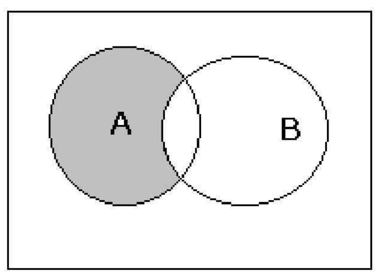
$B \Rightarrow A \cap B$ - влучання в перетин цих областей.



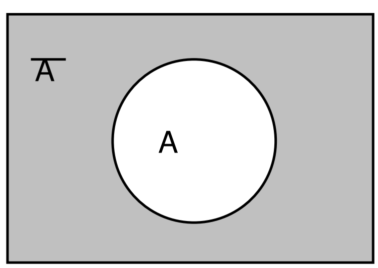
Означення. **Різницею** двох подій A і B (A-B або A \ B) називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться подія A, але не відбудеться подія B. Події A-B відповідає різниця множин A і B, тобто вона складається з елементарних подій, які входять до A, але не входять до B.

Приклади. 1) $A=\{\omega_2, \omega_4\}$, $B=\{\omega_4, \omega_6\} \Rightarrow A\text{-}B =\{\omega_2\}$.

2) Подія A - влучання в область A, подія B - влучання в область $B \Rightarrow$ A-B - влучання в різницю цих областей.



Означення. **Протилежною** подією $\overline{A}$ до події A називається подія $\Omega - A$, вона означає , що подія A не відбулася.



Приклади. 1) $A=\{\omega_2, \omega_4\} \Rightarrow \overline{A}=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$.

2) Подія A - влучання в область A, подія $\overline{A}$ - невлучання в область A.

Означення. Події A і B називаються **несумісними,** якщо їх добуток є неможлива подія, тобто $AB=\varnothing$.

Несумісність подій A і B означає, що поява події A виключає можливість появи події B і навпаки.

Приклад. $A=\{\omega_2, \omega_4\}$, $B=\{\omega_3, \omega_5\}$ $\Rightarrow$ A і B - несумісні.

Поняття суми і добутку подій поширюються на випадок будь-якої скінченної, а також зліченної кількості подій. Зокрема, подія $\bigcup_{i-1}^{\infty} A_1 = A_1 + A_2 + \cdots$ відбувається тоді і лише тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A_i, $i=1,2,\ldots$, а подія $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 \cdots$ відбувається тоді і лише тоді, коли відбуваються всі події A_i, $i= 1,2,\ldots$.

Означення. Події $A_1, A_2, \ldots, A_п$ утворюють **повну групу подій,** якщо в результаті виконання експерименту принаймні одна з цих подій обов'язково відбудеться, тобто $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$.

Особливо істотними для нас надалі будуть *повні групи попарно несумісних подій.* Такою, зокрема, є сукупність усіх елементарних подій у випадку, коли Ω є скінченна множина. Повну групу попарно несумісних подій завжди утворюють будь-яка подія A та протилежна до неї подія $\overline{A}$, оскільки $A\overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = \Omega$.

Для довільних подій безпосередньо з означень операцій над подіями випливають співвідношення $AA = A$, $A + A = A$, $(A + B)C = AC + +BC$, а також закони де Моргана $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

Алгебра і σ-алгебра подій. Аксіоматичне означення ймовірності

Ймовірність - це функція від випадкової події. Функції дійсної змінної, як ми знаємо, зазвичай визначені не для всіх дійсних чисел, а лише для деякої підмножини множини **R**, яка називається областю визначення. Ймовірність також не завжди вдається визначити для будь-яких підмножин (випадкових подій) множини Ω. Доводиться обмежуватися деяким класом підмножин. Від цього класу природно вимагати, щоб він був замкненим відносно операцій, введених для подій вище.

Означення. Нехай Ω - довільний простір елементарних подій, а S_1- деяка сукупність випадкових подій. Сукупність подій S називається **алгеброю подій,** якщо виконуються умови:

1) $\Omega \in S$;

2) *якщо* $A \in S$, $B \in S$, *то* $A + B \in S$, $A - B \in S$.

Неможлива подія завжди входить до алгебри подій, оскільки $\varnothing=\Omega-\Omega$. Якщо $A\in S$, то $\overline{A}\in S$, оскільки $\overline{A}=\Omega-A$. Нарешті, якщо $A\in S$, $B\in S$, то $AB\in S$, тому що $AB=\overline{\overline{A}+\overline{B}}$ (це випливає з другого закону де Моргана).

Найменшою сукупністю подій, яка є алгеброю, очевидно, є множина $S=\{\Omega, \varnothing\}$, оскільки $\Omega \pm \varnothing=\Omega$, $\varnothing-\Omega=\varnothing$.

Означення. Алгебра подій Φ називається **σ-алгеброю** або борелівською алгеброю, якщо з того, що $A_1\in\Phi$, i=1,2,..., випливає, що $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_1\in\Phi$.

Зауважимо, що у випадку скінченної множини Ω будь-яка алгебра подій є σ-алгеброю.

Тепер ми можемо ввести поняття ймовірності події.

Означення. Числова функція P, визначена на σ-алгебрі подій Φ, називається **ймовірністю,** якщо

1) $P(A)>0;$

2) $P(\Omega)=1$;

$3_а$) $AB=\varnothing \Rightarrow P(A+B)=P(A)+P(B)$ (скінченна адитивність);

$3_б$) якщо в послідовності подій $A_1, A_2, \ldots$ всі події попарно несумісні, то $P\left(\bigcup\limits_{i-1}^{\infty} A_i\right)=\sum\limits_{i-1}^{\infty} P(A_1)$ (зліченна адитивність);

4) Нехай для зростаючої послідовності подій $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots$ і $A=\bigcup\limits_{n-1}^{\infty} A_n$ або для спадної послідовності подій, $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset A_{n+1}\subset\cdots$ і $A=\bigcup\limits_{n-1}^{\infty} A_n$ тоді $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty} P(A_п)$ (аксіома неперервності).

Трійку (Ω,Φ,P), де Φ-σ-алгебра, а P - ймовірність, визначена вище, називатимемо *ймовірнісним простором.*

Наслідки з аксіом

1) $P(A) = 1-P(A)$.

Доведення. Оскільки $A+\overline{A}=\Omega$, то $1 \overset{A2}{=} P(\Omega)=P(A+\overline{A}) \overset{A3}{=} P(A)+P(\overline{A})$.

2) $P(\emptyset)=0.$

Доведення. Оскільки $\overline{\Omega}=\Omega\text{-}\Omega=\emptyset$, то $P(\emptyset)=P(\overline{\Omega})\overset{H1}{=}1\text{-}P(\Omega)\overset{A1}{=}1\text{-}1=0.$

3) $\forall\ A,\ B \quad P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ - теорема додавання ймовірностей.

Доведення. Оскільки $A+B=A+B\overline{A}$, де доданки у правій частині – несумісні події, то $P(A+B)\overset{A3}{=}P(A)+P(B\overline{A})$. Але $B=BA+B\overline{A}$, тому, аналогічно, $P(B)\overset{A3}{=}P(AB)+P(B\overline{A})$, звідки $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$, тому $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

4) $P(A+B)\le P(A)+P(B);\ P(A_1+\dots+A_n)\le P(A_1)+\dots+P(A_n)$.

Доведення. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\le P(A)+P(B)$, оскільки $P(AB)\overset{A1}{\ge}0$. Для випадку n доданків нерівність можна довести, використовуючи метод математичної індукції.

5) $A\subset B \quad \Rightarrow \quad P(A)\le P(B)$.

Доведення. Якщо $A\subset B$, то $B=BA+B\overline{A}=A+B\overline{A}$, тому

$P(B)\overset{A3}{=}P(A)+P(B\overline{A})\overset{A1}{\ge}P(A).$

6) $\forall\ A \qquad 0\le P(A)\le 1.$

Доведення. $A\subset\Omega\Rightarrow P(A)\overset{H5}{\le}P(\Omega)=1.$

1.4 Класичне означення ймовірності

Нехай простір елементарних подій є скінченою множиною

$\Omega=\{\omega_1, \omega_3, \dots\dots \omega_N\}, \qquad \boldsymbol{N}(\Omega)=\boldsymbol{N},$

тобто є лише N можливих результатів випробування, отже, множина $\boldsymbol{\Omega}$ є повною групою всіх попарно несумісних результатів випробування.

Вважатимемо додатково, що всі елементарні події *рівноможливі,* тобто з міркувань симетрії або якихось інших випливає, що нема об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій більш ймовірною порівняно з іншими. Наприклад, якщо експеримент полягає в одноразовому киданні грального кубика правильної форми, виготовленого з однорідного матеріалу, то всі 6 результатів цього випробування природно вважати рівноможливими.

Класичне означення ймовірності формулюють для подій, які є підмножинами множини Ω. Якщо $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_{N(A)}}\}$, де

$$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{N(A)} \le N, \quad N(A)=0,1,2,....,N,$$

то ймовірність події *A* визначають за формулою:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}, \tag{1.1}$$

де *N (A)* - кількість елементів множини *A*.

Отже, ***ймовірністю*** події А називається відношення кількості сприятливих для події А елементарних подій до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування.

Визначена за формулою (1.1) функція *P(A)* задовольняє всі аксіоми теорії ймовірностей. З формули (1.1) випливає, що ймовірність кожної елементарної події ω_i рівна

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{N}, \qquad i=\overline{1,N}. \tag{1.2}$$

Отож класична схема означення ймовірності може служити моделлю тих випадкових явищ, для яких є природним припущення (1.2).

Приклад. Знайти ймовірність того, що кількість очок, яка випаде при одноразовому киданні кубика, буде а) парною (подія *A*)*;* б) кратною трьом (подія *B*).

Розв'язання.

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,....,\omega_6\}$, $N(\Omega)=6$, $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$, $B=\{\omega_3,\omega_6\}$, *N(A)*=3, *N(B)*=2,

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \qquad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Геометричні ймовірності

Класичне означення ймовірності не можна застосувати до випробування, для якого множина Ω є незліченною множиною елементарних подій.

Нехай простір елементарних подій Ω - це відрізок числової прямої або область на площині, або в просторі, а елементарні події ω - окремі точки в межах цієї області. Припустимо, що область Ω має скінченну міру $\mu(\Omega)$ (на прямій - довжину, на площині - площу, у просторі - об'єм). Розглянемо систему Φ підмножин простору Ω, які мають міру. Відомо, що вони утворюють σ-алгебру. Множини з Φ назвемо випадковими подіями. Якщо експеримент має властивість симетрії щодо елементарних результатів (наприклад, деякий „точковий” об’єкт “навмання” кидаємо в межах області), то всі елементарні події „рівноправні”, тож природно припустити, що ймовірність попадання елементарної події ω у будь-яку частину Ω пропорційна мірі цієї частини і не залежить від її розташування і форми. Тоді ймовірність будь-якої події $A \in \Phi$ можна обчислити, користуючись таким означенням.

Означення. **Геометричною ймовірністю** події A називається відношення міри $\mu(A)$до міри $\mu(\Omega)$, тобто $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Можна показати, що геометрична ймовірність задовольняє всі аксіоми теорії ймовірностей.

Зауваження. За класичного означення ймовірності $P(A) = 0$ лише для

$A=\emptyset$. За геометричного це не так. Справді, нехай Ω - плоска область, A - точка або лінія, розміщена в Ω. Тоді за формулою геометричної ймовірності $P(A) = 0$, хоча подія A є можливою - точка в разі її „кидання” на Ω може потрапити на A.

1.5. Умовні ймовірності. Теорема множення ймовірностей.

Незалежність подій

Пояснимо спочатку на прикладі суть умовної ймовірності. Нехай двічі кидають гральний кубик. Простір елементарних подій складається з 36 елементів: $\Omega = \{(m,n): m,n = \overline{1,6}\}$. Розглянемо подію A - „сума очок після двох кидань рівна 5”, тоді $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$. Припустимо, що результат першого кидання - випадання 3 очок (подія $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)(3,5),(3,6)\}$). В такій ситуації ймовірність події A зміниться: сумарна кількість очок буде рівною 5 лише тоді, коли за другим разом випаде „2”, тобто в одному випадку з шести. Отже, ймовірність події A за умови, що відбулась подія B, $P(A/B) = 1/6$.

В загальному випадку (в умовах класичної схеми) міркуємо так. Якщо відбулась подія *B,* то здійснився один з *N(B)* елементарних результатів. Серед них подія *A* з'являється *N(AB)* разів. Тому

$$P(A/B)=\frac{N(AB)}{N(B)}=\frac{N(AB)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

У випадку загальної ймовірнісної моделі рівність

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B)>0 \tag{1.3}$$

приймається за *означення* ***умовної ймовірності***.

З цього означення випливають такі властивості умовної ймовірності:

1) $P(A/B)>0;$

2) $P(\Omega/B) = 1;$

3) $P(B/B) = 1;$

4) $A_1A_2 =\varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A_1 + A_2/B) = P(A_1 /B) + P(A_2/B).$

Доведення.

2) $P(\Omega/B)=\dfrac{P(\Omega B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1;$

3) $P(B/B)=\dfrac{P(BB)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1;$

4) $P(A_1+A_2/B)=\dfrac{P((A_1+A_2)B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}+\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=$

$$=P(A_1/B)+P(A_2/B).$$

З рівності (1) безпосередньо випливає ***теорема множення ймовірностей:*** *якщо* $P(A)>0$, $P(B)>0$, *то*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \tag{1.4}$$

Приклад. Обчислити ймовірність *P(AB)* у прикладі про кидання кубика, розглянутому на початку параграфа.

Розв'язання. $P(A/B) = 1/6$, $P(B) = 6/36 = 1/6 \ \Rightarrow \ P(AB) = 1/36.$

Справді, $AB=\{3, 2\}$, і за класичним означенням $P(AB) = 1/36$. □

Формулу множення ймовірностей (1.4) можна узагальнити для випадку будь-якої скінченої кількості подій. Нехай $A_1,A_2,...,A_n$- випадкові події такі, що $P(A_1A_2 \cdot\ldots\cdot -A_{n-1})>0$. Тоді

$$P(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}). \tag{1.5}$$

Доведемо формулу (1.5) за допомогою методу математичної індукції. Для $n=2$ справедливість (1.5) випливає безпосередньо з (2). Припустимо, що формула (1.5) виконується для $n–1$ множника і введемо позначення: $A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}=A, A_n=B$. Тоді

$$P(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P((A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{n1})A_n)=P(AB)=P(A)P(B/A)=$$
$$=P(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{n1})\,P(A_n/A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1})\ =$$
$$=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).\ \square$$

Введемо поняття ***незалежності*** випадкових подій, яке в теорії ймовірностей відіграє дуже важливу роль. Нехай Ω - простір елементарних подій, $A\subset\Omega$, $B\subset\Omega$ - випадкові події.

Означення. Події A і B називаються ***незалежними,*** *якщо*

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Приклад. Монету кидають двічі. Нехай A - подія, яка полягає в тому, що за першим разом випав герб, B- подія, яка полягає в тому, що за другим разом випав герб. З'ясувати, чи будуть незалежними події A і B.

Розв'язання. Простором елементарних подій даного експерименту є множина $\Omega=\{ГГ, ЦЦ, ГЦ\ ЦГ\}$. Тоді

$A=\{ГГ, ГЦ\}$, $B=\{ГГ, ЦГ\}$, $AB=\{ГГ\}$

і $P(A) = P(B) = \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P(AB) =\frac{1}{4}$. Отже, $P(AB) = P(A)P(B)$, тому випадкові події A і B - незалежні. $\square$

Розглянемо найважливіші ***властивості*** ймовірностей для незалежних подій.

1. Якщо події A і B незалежні, то $P(A/B)=P(A)$ $(P(B)>0)$, $P(B/A)=P(B)$ $(P(A)>0)$. Доведення випливає безпосередньо з теореми множення.

2. Якщо події A і B незалежні, то незалежні також A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

Доведення. Для обґрунтування цієї властивості досить довести, що події A *і* $\overline{B}$ - незалежні. Оскільки $A=AB + A\overline{B}$, причому доданки цієї суми – несумісні події, то $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$. Звідси $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) =P(A)P(\overline{B})$, отже, A *і* $\overline{B}$ - незалежні.

Якщо маємо сукупність подій, яка містить більше, ніж дві події, то формула для обчислення ймовірності їх добутку також спрощується, якщо ці події незалежні в сукупності.

*Означення***.** Випадкові події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються **незалежними в сукупності,** якщо

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}) \qquad (1.6)$$

для будь-яких $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n \quad (2 \le k \le n)$.

Для незалежних у сукупності подій $A_1, A_2, ..., A_n$ ймовірність їх добутку дорівнює добуткові ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Якщо умова (1.6) виконується лише для $k=2$, то події називаються *попарно незалежними.* Виявляється, що попарно незалежні події можуть не бути незалежними в сукупності. Про це свідчить приклад, наведений С.Н.Бернштейном.

Приклад 1. На площину кидають тетраедр, три грані якого пофарбовані відповідно в червоний, синій, жовтий кольори, а на четверту грань нанесено всі три кольори. Розглянемо випадкові події: A_1 - випаде грань із червоним кольором; A_2 - випаде грань із синім кольором; A_3 - випаде грань із жовтим кольором. З'ясувати, чи будуть ці події незалежними в сукупності.

Розв'язання. Очевидно, що $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

$$P(A_1A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2);\ P(A_1A_3) = \frac{1}{4} = P(A)P(A);\ P(A_2A_3) = \frac{1}{4} = \\ = P(A_2)P(4).$$

Отже, події A_1, A_2, A_3 - попарно незалежні. Проте ці події не є незалежними в сукупності, бо

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \ne P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}\ .$$

Приклад 2. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – випадкові події, незалежні в сукупності, і їхні ймовірності $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ є відомі. Знайти ймовірність події A, яка полягає в тому, що в результаті виконання експерименту відбудеться хоча б одна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Розглянемо протилежну подію A. Ця подія полягає в тому, що в результаті виконання експерименту не відбудеться жодної з подій $A_1, A_2, ..., A_n$, тобто одночасно відбудуться події $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$. Тому $\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, і внаслідок незалежності подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n).$$

Отже, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n)$, тобто *ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій* $A_1, A_2, ..., A_n$ *дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних до них подій.*

1.6. Формула повної ймовірності. Формули Байєса

Припустимо, що подія А може відбуватися в різних умовах, яким відповідають попарно несумісні події $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу і які назвемо *гіпотезами.* Нехай відомі ймовірності $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ та умовні ймовірності $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$. Як знайти $P(A)$ в даній ситуації?

Теорема. *Якщо* $H_1, H_2, ..., H_n$ *- повна група попарно несумісних подій і* $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$, *то для будь-якої події А справедлива рівність:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i) \qquad (1.7)$$

Доведення. Оскільки події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу подій, то $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega$, і подію *A* можна записати так:

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \cdots + H_n) = H_1 A + H_2 A + \cdots + H_n A,$$

де всі доданки у правій частині - попарно несумісні події. Використовуючи аксіому адитивності та теорему множення ймовірностей, маємо:

$$P(A) = P(H_1 A) + P(H_2 A) + \cdots + P(H_n A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i),$$

що й треба було довести.

Рівність (1.7) називають ***формулою повної ймовірності.*** Вона виражає ймовірність події A за умови, що відбулася одна і тільки одна з попарно несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$.

Якщо додатково припустити, що $P(A) > 0$, то за теоремою множення ймовірностей можемо записати:

$$P(AH_k) = P(A)P(H_k / A),$$

звідки

$$P(H_k/A)=\frac{P(AH_k)}{P(A)}=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}$$

або

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)}, \quad k=\overline{1,n}. \tag{1.8}$$

Формули (1.8) називаються ***формулами Байєса*** *(формулами ймовірностей гіпотез).* Їм можна дати таке тлумачення. Нехай подія A може відбуватись в різних умовах, щодо характеру яких можна зробити n припущень *(гіпотез)* $H_1, H_2, ..., H_n$. Ймовірності цих гіпотез $P(H_k)$ нам відомі, як і умовні ймовірності $P(A/H_k)$ події A за умови здійснення кожної гіпотези. Якщо в результаті експерименту подія A відбулась, то за формулами Байєса ми можемо *переоцінити* ймовірності кожної з гіпотез, знайшовши $P(H_k/A)$.

Приклад. Зі скриньки, яка містить 5 білих і 3 чорних кулі, одна куля невідомого кольору загублена. Яка ймовірність витягнути навмання зі скриньки білу кулю (подія A)? Яка ймовірність того, що загублено чорну кулю, якщо витягнута навмання куля виявилась білою?

Розв'язання. Тут можливі дві події-гіпотези: H_k - загублено k білих куль ($k=0;$ 1). Очевидно, події H_0, H_1- несумісні й утворюють повну групу, а їхні ймовірності становлять: $P(H_0)=\frac{3}{8}$, $P(H_1)=\frac{5}{8}$. Відповідні умовні ймовірності події $A = AH_0+AH_1$ становлять: $P(A/H_0)=\frac{5}{7}$, $P(A/H_1)=\frac{4}{7}$. За формулою повної ймовірності

$$P(A)=\sum_{i=0}^{1}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5}{8}.$$

Ймовірність $P(H_0/A)$ обчислимо за формулою Байєса:

$$P(H_0/A)=\frac{P(H_0)P(A/H_0)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{7}.$$

1.7 Послідовність незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Біномна формула. Біномний розподіл

Припустимо, що проводиться певна кількість однакових випробувань, у кожному з яких можливі лише два несумісні результати: деяка подія A може відбутися або не відбутися. Наприклад, коли підкидаємо 10 разів монету, то за кожного підкидання монети випаде або герб (подія A), або цифра (подія $\overline{A}$).

Означення. Випробування називаються **незалежними** стосовно деякої події А, якщо ймовірність цієї події в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань.

Означення. Серія повторних незалежних випробувань з одним із можливих результатів А або $\overline{A}$, у кожному з яких подія А має одну і ту саму ймовірність Р(А) = р, називається **схемою Бернуллі.**

Отже, якщо випробування проводяться за схемою Бернуллі, то в кожному з них можливий тільки один з двох результатів: A (успіх) або A (невдача), до того ж ймовірності $P(A)=p$ і $P(\overline{A})=1-p=q$ є однаковими в кожному випробуванні.

Позначимо через μ_n *кількість успіхів* (кількість появ події A) в серії із n послідовних незалежних випробувань за схемою Бернуллі і обчислимо ймовірність того, що кількість успіхів в n випробуваннях рівна k $P\{\mu_n=k\} = P_n(k)$, за умови, що ймовірність успіху в кожному окремому випробуванні $P(A) = p$. Подію $\{\mu_n=k\}$ можна записати у вигляді

$$\{\mu_n = k\} = \underbrace{AA\cdot\ldots\cdot AA}_{k\ \text{разів}}\cdot\underbrace{\overline{A}\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}\overline{A}}_{n-k\ \text{разів}} +$$

$$+\overline{A}\cdot\underbrace{AA\cdot\ldots\cdot AA}_{k\ \text{разів}}\cdot\underbrace{\overline{A}\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}\overline{A}}_{n-k-1\ \text{разів}} + \cdots + \underbrace{\overline{A}\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}\overline{A}}_{n-k\ \text{разів}}\cdot\underbrace{AA\cdot\ldots\cdot AA}_{k\ \text{разів}}.$$

Беручи до уваги незалежність випробувань, маємо, що ймовірність кожної з подій-доданків у правій частині рівна $p^k q^{n-k}$. Всі ці доданки – попарно несумісні події, а їхня кількість рівна кількості перестановок з повтореннями множини з n елементів, серед яких $к$ елементів першого типу і n-k елементів другого типу, тобто

$$P_n(k, n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k .$$

Застосовуючи аксіому адитивності, одержимо:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} . \tag{1.9}$$

Формула (1.9) називається ***біномною формулою*** або *формулою Бернуллі.* Вона виражає ймовірність того, що кількість успіхів в серії з n послідовних незалежних випробувань за схемою Бернуллі дорівнює k.

Набір чисел $P_n(k)$ ($k = 0,1,\dots, n$) називають ***біномним розподілом.***

Події $\{\mu_n = 0\},\{\mu_n = 1\},\dots,\{\mu_n = n\}$ утворюють повну групу попарно несумісних подій, отже, $\{\mu_n = 0\}+\{\mu_n = 1\}+\dots+\{\mu_n = n\} = \Omega$,

$$\text{тому } \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = P(\Omega) = 1.$$

Цю формулу можна також отримати й безпосереднім обчисленням

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Приклад. Кубик кидають 5 разів. Обчислити ймовірність випадання чотирьох шісток.

Розв'язання. Тут $n=5$, $k=4$, $p=1/6$, $q=5/6$. За допомогою біномної формули отримуємо: $P_5(4) = C_5^4 \cdot \frac{1}{6^4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^2}{6^5} = \frac{25}{7776}$.

Найймовірніша кількість успіхів у випробуваннях за схемою Бернуллі

Теорема. Найймовірніша кількість успіхів k_0 в n випробуваннях за схемою Бернуллі задовольняє умову $np-q \le k_0 \le np+p$. Якщо $np-q$- неціле, то є одне таке значення k_0, якщо $np-q$ - ціле, то таких значень два.

Доведення. Розглянемо відношення

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}p}{\frac{n!}{(n-k)!k!}q} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}.$$

Отже, $P_n(k+1) > P_n(k)$, якщо $(n-k)p > (k+1)q$, тобто $np-q > k(p+q) = k$. Тому

$$\begin{cases} P_n(k+1) > P_n(k), \text{ якщо } k < np-q; \\ P_n(k+1) = P_n(k), \text{ якщо } k = np-q; \\ P_n(k+1) < P_n(k), \text{ якщо } k > np-q. \end{cases} \tag{1.10}$$

Це означає, що зі зростанням $к$ величина $P_n(k)$ спочатку зростає до певного максимуму, а потім спадає. Знайдемо, при якому $к$ досягається максимум. Можливі два випадки.

1) np-q- неціле число. Тоді число $np-q+1 = np + p$ також неціле і існує єдине ціле число k_0, що задовольняє умову $np-q<k_0<np+p$. Покажемо, що k_0 - найймовірніша кількість успіхів, тобто що $P_n(k)$ досягає найбільшого значення при $k=k_0$. Справді, оскільки k_0-$1<np-q$, то згідно з першим співвідношенням (1.10) $P_n(k_0)>P_n(k_0-1)$, а оскільки $k_0>np-q$, то із третього співвідношення (1.10) випливає, що $P_n(k_0+1)<P_n(k_0)$. Звідси дістаємо, що $P_n(k_0) >P_n(k)$ для всіх $k\neq k_0$, тобто k_0 - найймовірніша кількість успіхів.

2) $np-q$ - ціле число. Покладемо $k_1= np - q$, тоді $k_1+1 = np - q + =$ $= np + p$. Згідно з другим співвідношенням (1.10) $P_n(k_1 +1) = P_n (k_1)$ Через те, що $k_1 -1 < np-q$ і $k_1+1 > np - q$, то відповідно з першого і третього співвідношень (1.10) випливає, що $P_n(k_1) > P_n(k_1$-$1)$ і $P_n(k_1+2) < P_n(k_1+1)$. Отож у цьому випадку є два найймовірніші значення: $k=k_1$ і $k=k_1+1$. Отже, в загальному випадку $pn-q\leq k_0\leq np+p$.

Приклад. Кубик кидають 5 разів. Яка найймовірніша кількість випадань шістки?

Розв'язання. Тут $n = 5, p = 1/6, q = 5/6, np = 5/6, np-q= 0,$ $np +p =1.$

Отже, $0 \leq k_0 \leq 1$, і найймовірнішими є два значення кількості випадань шістки: $k_0=0$ *і* $k_0=1$.

1.8 Граничні теореми для схеми Бернуллі

Якщо проводяться випробування за схемою Бернуллі і числа n і k - великі, то обчислення ймовірностей $P_n(k)$ за біномною формулою викликає певні труднощі. У такому разі для обчислення цих ймовірностей застосовують асимптотичні (наближені) формули, які випливають із локальної та інтегральної теорем Муавра-Лапласа і граничної теореми Пуассона. Назва „гранична” в обох випадках пов'язана з тим, що згадані теореми встановлюють поведінку ймовірностей $P_n(k)$ або $P_n(k_1\leq k\leq k_2)$ за певних умов, до яких обов'язково входить умова $n\to\infty$.

Гранична теорема Пуассона

Якщо ймовірність успіху в кожному з п незалежних випробувань за схемою Бернуллі рівна р і якщо для $n\to\infty\; p\to\infty$ так, що $np\to\lambda\,(0<\lambda<\infty)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, для будь-якого k= 0,1,2,…, де $P_п(k)$ – ймовірність появи k успіхів в п випробуваннях.

Доведення. Поклавши $np=\lambda_n$ (отже, $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$), запишемо

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}p^k q^{n-k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\left(-\frac{\lambda}{n}\right)\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

що й треба було довести.

Отже, при великих n ($n>100$) і малих p ($np<30$) ми можемо користуватися наближеними формулами:

$$P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \tag{1.11}$$

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}P_n(k)\approx\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad \lambda=np. \tag{1.12}$$

Формули (1.11) і (1.12) називаються *асимптотичними формулами Пуассона.* Друга з них дає наближений вираз для ймовірності того, що кількість успіхів в п випробуваннях міститься між заданими числами k_1 і k_2. Дослідження питання про точність формул (1.11) і (1.12) ми не розглядаємо. Обмежимося лише тим, що приймемо без доведення нерівність

$$\left|\sum_{k\in M}P_n(k)-\sum_{k\in M}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|<np^2.$$

яка є правильною для будь-якої множини $M\subset\{0,1,2,\ldots\}$. Зокрема, якщо M складається з одного числа k, то

$$\left| P_n(k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right| < np^2. \tag{1.13}$$

Для виразу $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, який розглядається як функція двох змінних k і λ, складено таблицю значень.

Введемо позначення $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Сукупність значень

$$\{P(k) : k = 0,1,2,...\}$$

називається *розподілом Пуассона з параметром* $\lambda > 0$.

Приклад. У фірмі працює 500 співробітників. Знайти ймовірність того, що у двох співробітників день народження припаде на новий рік, вважаючи, що ймовірність народитися у фіксований день становить 1/365.

Розв'язання. Маємо: $n=500$, $p=1/365$, $\lambda = np = \frac{500}{365} = \frac{10}{73}$, $k=2$;

Обчислення ж за біномною формулою дають $P_{500}(2)=0{,}2388347$. Бачимо, що

\$P_{500}(2)$ - 0,2384517\= 0,000383 < 0,003753 = np^2.

Отже, оцінка (1.13) в даному випадку правильна.

Локальна формула Муавра-Лапласа

Нехай ймовірність успіху в кожному з п незалежних випробувань за схемою Бернуллі рівна р, 0<р<1. Тоді для великих значень п ймовірність $P_п(k)$ появи к успіхів в п випробуваннях обчислюється за наближеною формулою:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{якщо} \quad x_0 \approx \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \tag{1.14}$$

де $\varphi(x_0) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$, - функція Гаусса.

При цьому встановлено, що відносна похибка формули (1.14) наближається до нуля, коли $n \to \infty$.

Функція Гаусса табульована. В більшості підручників наведено значення *φ (x)* для $0 \le x \le 3{,}99$. Для обчислення значень *φ (x)* при від'ємних значеннях $-3{,}99 \le x \le 0$ використовуємо парність функції *φ (x),* а для |x|>3,99 приймаємо, що *φ (x) = 0.*

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Нехай ймовірність успіху в кожному з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі рівна p, 0 < p < 1, а μ_n кількість успіхів в n випробуваннях. Тоді

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

для всіх $a, b\,(-\infty \le a \le b \le \infty)$.

Спираючись на цю теорему, для великих значень *n* записують наближену формулу для ймовірності $P\{k_1 \le \mu_n \le k_2\}$. Щоб отримати її, введемо позначення $k_1 = a\sqrt{npq} + np,\ k_2 = b\sqrt{npq} + np.$

Тоді

$$P\left\{ a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b \right\} = P\{a\sqrt{npq} + np \le \mu_n \le b\sqrt{npq} + np\} =$$

$$= P\{k_1 \le \mu_n \le k_2\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

де $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$

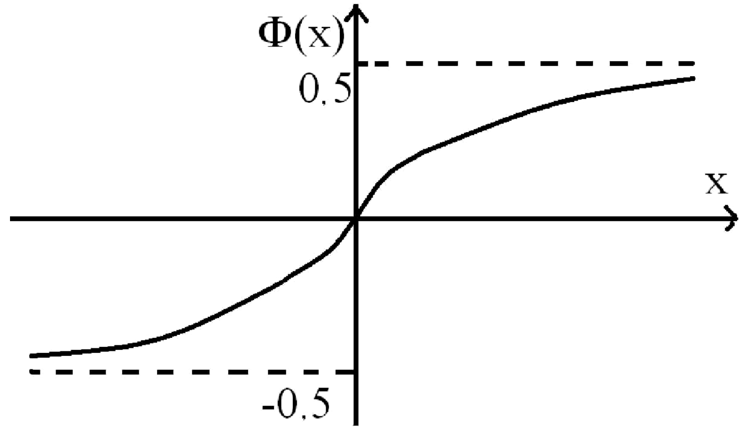
Для простішого запису отриманої наближеної формули вводять ***функцію Лапласа*** $$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

Оскільки $$\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\int_0^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

то остаточно отримаємо

$$P\{k_1\le\mu_n\le k_2\}\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (1.15)$$

Функцію Лапласа часто використовують у теорії ймовірностей і математичній статистиці, тому опишемо її найпростіші властивості.



Графік функції Лапласа

- *Ф(х)- непарна функція: Ф(-х) = -Ф(х).*

Доведення. В інтегралі $\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, зробимо заміну i = -*u*. Тоді *dt=-du,* $\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du=-\Phi(x)$,

- Ф(0) = 0; $\Phi(+\infty)$=0,5 і $\Phi(-\infty)$ = -0,5 $\Rightarrow$ прямі у = 0,5 і у = -0,5 асимптоти графіка функції при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$ відповідно.

Доведення. В інтегралі $\Phi(+x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, зробимо заміну $t=u\sqrt{2}$. Тоді $dt=\sqrt{2du}$,

$$\Phi(+x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}.$$

- $\Phi(x)$ *зростаюча функція.*

Функція Лапласа $\Phi(x)$ табульована для $0 \le x \le 5$. Для обчислення значень $\Phi(x)$ при від'ємних значеннях $-5 \le x \le 0$ використовуємо непарність функції.

Приклад. Знайти ймовірність того, що при 600 киданнях кубика „шістка" випаде 100 разів. Яка ймовірність того, що кількість випадань „шістки" є в межах від 90 до 110?

Розв'язання. Маємо: n=600; k=100; p=1/6; np=100; npq=100$\cdot\frac{5}{6}$=83,(3);

$$\sqrt{npq} = 9{,}1287; \quad x_0 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = 0;$$

$$P_{600} \approx \frac{\varphi(0)}{\sqrt{npq}} = \frac{0{,}3989}{9{,}1287} = 0{,}0437;$$

$$P\{90 \le \mu_{600} \le 110\} \approx \Phi\left(\frac{110 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{90 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}095) - \Phi(-1{,}095) = 2\Phi(1{,}095) = 2 \cdot 0{,}363224 = 0{,}72648.$$

Зауваження. Точність наближених формул (1.14) і (1.15) істотно залежить від взаємовідношення величин n і p. Зокрема, добрі наближення ці формули дають при p=q=1/2, їх часто використовують, коли $npq \ge 10$. Звідси, до речі, видно: що ближче одне з чисел p або q до нуля, то більшим слід вибирати n. Тому в разі близькості однієї з величин p або q до нуля формулами (1.14) і (1.15) зазвичай не користуються; для цього випадку значно точнішими є наближені формули Пуассона.

1.9 Теорема Бернуллі про стійкість відносних частот

Нехай ймовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі становить p. Для довільного числа ε > 0 визначимо за допомогою інтегральної теореми Муавра-Лапласа ймовірність події $\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \le \varepsilon$ при $n \to \infty$, де $\frac{\mu_n}{n}$ відносна частота події, тобто ймовірність того, що відхилення відносної частоти події від її ймовірності за абсолютним значенням не перевищує числа ε > 0. Можемо записати

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=P\left\{-\varepsilon\le\frac{\mu_n-np}{n}\le\varepsilon\right\}=P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}\underset{n\to\infty}{\to}$$

$$\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(+\infty)-\Phi(-\infty)=2\Phi(+\infty)=1.$$

Отже,

$$\forall\ \ \varepsilon>0\quad\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=1.$$

Ця формула виражає теорему Бернуллі.

Теорема Бернуллі

Якщо в кожному з серії незалежних випробувань випадкова подія настає з однією і тою самою ймовірністю р, то за достатньо великої кількості випробувань з ймовірністю як завгодно близькою до 1, відхилення відносної частоти появи цієї події від її ймовірності p не перевищуватиме як завгодно малого наперед заданого числа ε.

Оскільки для великих n

$$P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\le\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}\le\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

то для великих n використовують наближену формулу

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\approx2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).\tag{1.16}$$

Приклад. Проводиться 100 випробувань за схемою Бернуллі з ймовірністю p=0,5 появи події A в кожному окремому випробуванні. Знайти межі, в яких міститься частота події A з ймовірністю 0,9545.

Розв'язання. За умовою задачі n=100, p=q=0,5 і

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-0{,}5\right|\le\varepsilon\right\}=0{,}9545.$$

За формулою (1.16) маємо, що

$0{,}9545 = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{100}{0{,}25}}\right) \Leftrightarrow \Phi(20\varepsilon) = 0{,}47725.$ За таблицею значень функції Лапласа знаходимо, що $20\varepsilon = 2 \Rightarrow \varepsilon = 0{,}1.$ Із нерівності

$$\left|\frac{\mu_n}{n} - 0{,}5\right| \le 0{,}1 \Leftrightarrow -0{,}1 \le \frac{\mu_n}{n} - 0{,}5 \le 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}4 \le \frac{\mu_n}{n} \le 0{,}6$$

випливає, що $40 \le \mu_n \le 60$, тобто з ймовірністю 0б9545 подія *A* може з'явитися від 40 до 60 разів.

Теоретичні питання до розділу

1. Що називається вірогідною; неможливою подією? Навести приклади.
2. Яка подія називається випадковою? Навести приклади.
3. Дати класичне означення ймовірності випадкової події.
4. Що таке алгебра подій?
5. Аксіоми теорії ймовірностей.
6. Що називається геометричною ймовірністю?
7. Визначення умовної ймовірності.
8. Формула множення ймовірностей для двох залежних випадкових подій А і В має вигляд
9. Чому дорівнює $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$, якщо випадкові події Ai є залежними?
10. Гіпотези у формулі повної ймовірності та їх властивості.
11. Формула повної ймовірності випадкової події А за наявності n гіпотез Bi має вигляд ...
12. За якої умови формула Бернуллі застосовується для обчислення ймовірностей?

РОЗДІЛ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. Поняття дискретних та неперервних випадкових величин. Закони розподілу їх ймовірностей

Розглянемо такий простір елементарних подій, в якому кожній елементарній події $\omega_i \in \Omega$ відповідає одне і лише одне число x або набір чисел $(x_1, x_2, ..., x_k)$, тобто на множині Ω визначена певна функція $\alpha(\omega_i)$, яка кожній елементарній події ω_i ставить у відповідність певний елемент одновимірного простору R_1 або n-вимірного простору R_n. Цю функцію називають *випадковою величиною*.

Означення. Випадковою величиною називається така змінна величина, яка внаслідок випробування набуває з деякою ймовірністю певного значення із множини можливих значень.

У разі, коли $\alpha(\omega_i)$ відображає множину Ω на одновимірний простір R_1, випадкову величину називають *одновимірною*. Якщо відображення здійснюється на R_n, то випадкову величину називають n-вимірною (системою n випадкових величин або n-вимірним випадковим вектором).

Випадкові величини можна розподілити на дві групи в залежності від множини їх можливих значень.

Перша група – це дискретні випадкові величини. Їх значення утворюють злічену множину, тобто можуть бути перераховані.

Друга група – це неперервні випадкові величини. Їх значення утворюють суцільний інтервал числової осі.

Приклад. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Навмання беруть одне число. Елементарними подіями будуть такі: поява одного з чисел $\alpha(\omega_i) = 1, 2, 3, \ldots, 10$ з певною ймовірністю. Множина можливих значень $\alpha(\omega_i)$ є дискретною, а тому й випадкова величина — поява одного з чисел множини Ω — буде дискретною.

Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z, ... , а їх можливі значення — малими x; y; z, ...

Для опису випадкової величини необхідно навести не лише множину можливих її значень, а й указати, з якими ймовірностями ця величина набуває того чи іншого можливого значення.

З цією метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей.

Співвідношення, що встановляє зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями, називають *законом розподілу випадкової величини*.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного многокутника.

У разі табличної форми запису закону подається послідовність можливих значень випадкової величини X, розміщених у порядку зростання, та відповідних їм ймовірностей:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	......	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	.....	p_k

Оскільки випадкові події $(X = x_j)$ і $(X = x_m)$ є між собою несумісними ($(X = x_i) \cap (X = x_m) = \varnothing$, $i \neq m$; $i, m = 1, 2, \ldots, k$) і утворюють повну групу $\left(\bigcup_{j=1}^{k} (X = x_j) = {}'\Omega \right)$, то необхідною є така умова:

$$\sum_{j=1}^{k} P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{k} p_i = 1. \qquad (2.1)$$

Рівність (2.1) називають *умовою нормування* для дискретної випадкової величини X. Наведену таблицю називають *рядом розподілу*.

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

$X = xi$	–4	1	2	5	9
$P(X = x_i) = pi$	0,1	0,1	0,5	p_4	0,2

Знайти ймовірність можливого значення випадкової величини $X = x_4 = 5$.

Розв'язання. Згідно з умовою нормування (2.1) маємо:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \to 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 + p_4 + 0{,}2 =$$
$$= 1 \to p_4 = 0{,}1.$$

2.2. Функція розподілу ймовірностей та її властивості

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, яка придатна і для дискретних, і для неперервних випадкових величин, а саме:

як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$, так звану інтегральну функцію.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$$F(x) = P(X < x) \qquad (2.2)$$

Цю функцію можна тлумачити так: унаслідок експерименту випадкова величина може набути значення, меншого за x.

Наприклад, $F(5) = P(X < 5)$ означає, що в результаті експерименту випадкова величина X (дискретна чи неперервна) може набути значення, яке міститься ліворуч від $x = 5$, що ілюструє рис. 2.1.

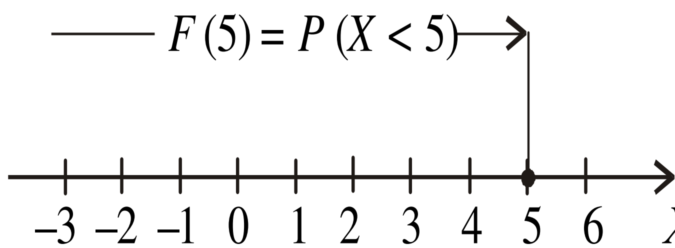


Рис. 2.1

Розглянемо властивості $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Ця властивість випливає з означення функції розподілу.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Доведення. Позначимо відповідно A, B, C події $(X < x_2)$, $(X < x_1)$ і $(x_1 \le X \le x_2)$. Випадкові події B і C є несумісними (A∩C = ∅) (рис. 2.2).

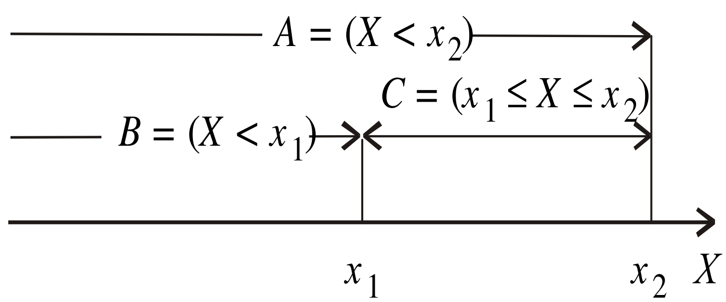


Рис. 2.2

Тоді подію A можна записати так:

$A = B \cup C$ ($A = B + C$).

За формулою додавання для несумісних випадкових подій маємо:

$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$

або

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X \le x_2). \qquad (2.3)$$

Звідси на підставі означення інтегральної функції $F(x)$, дістаємо

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X \le x_2)$$

або

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X \le x_2) \ge 0. \qquad (2.4)$$

Отже,

$$F(x_2) - F(x_1) \ge 0 \to F(x_2) \ge F(x_1).$$

Із другої властивості $F(x)$ випливають наведені далі висновки:

1. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $X = x \in [\alpha;\ \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (2.5)$$

2. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

І справді, підставивши в (2.5) $\alpha = x_i$, $\beta = x_i + \Delta x$, дістанемо

$$P(x_1 < X < x_i + \Delta x) = F(x_i + \Delta x) - F(x_i).$$

Коли $\Delta x \to 0$, маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x_i < X < x_i + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(F(x_i + \Delta x) - F(x_i)\right). \qquad (2.6)$$

Оскільки при $\Delta x \to 0$ $X = x_i$, то

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i) = 0,$$

що й потрібно було довести.

Отже, для неперервної випадкової величини X справджуються такі рівності:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = \\ = P(\alpha \le X \le \beta). \qquad (2.7)$$

3. Якщо $X \in \left]-\infty; \infty\right[$, виконуються два подані далі співвідношення.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X < x) \to F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$

Оскільки подія $X < -\infty$ полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, яке міститься ліворуч від $-\infty$. А така подія є неможливою ($\varnothing$).

2) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \lim\limits_{x \to \infty} P(X < x) \to F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

Подія $X < \infty$ полягає в тому, що випадкова величина X набуває числового значення, яке міститься ліворуч від $+\infty$. Ця подія є вірогідною (Ω), оскільки будь-яке число $X = x < \infty$.

Із цих двох співвідношень випливає висновок: якщо можливі значення випадкової величини X належать обмеженому проміжку $[a;\ b]$, то

$F(x) = 0$ для $x \le a$;

$F(x) = 1$ для $x > b$. (2.8)

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	– 4	– 1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення.

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0$;

2) $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0{,}1$;

3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;

4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) =$
$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4$;

5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) +$
$+ P(X = 6) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7$;

6) $F(12) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) +$
$+P(X = 9) = 0{,}1 + 0{,}2 +0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$;

7) $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) +$
$+ P(X = 9) + P(X = 13) = 0{,}1 + 0{,}2 +0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$.

Компактно $F(x)$ можна записати в такій формі:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & 2 < x \le 6; \\ 0{,}7, & 6 < x \le 9; \\ 0{,}8, & 9 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 2.3.

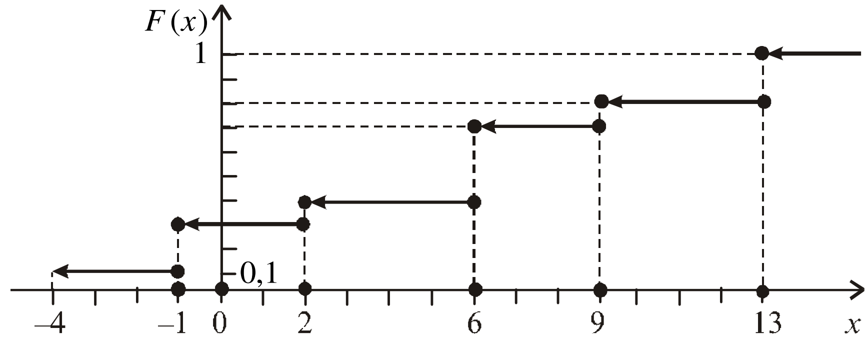


Рис. 2.3

2.3. Щільність ймовірностей та її властивості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}, \quad (2.9)$$

звідки $dF(x)=f(x)dx$.

Оскільки

$$P(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)\approx dF(x)=f(x)dx,$$

то добуток $f(x)dx$ — ймовірність того, що випадкова величина X міститиметься у проміжку $[x, x+dx]$, де $dx=\Delta x$.

Геометрично на графіку щільності ймовірності $f(x)dx$ відповідає площа прямокутника з основою dx і висотою $f(x)$ (рис. 2.4).

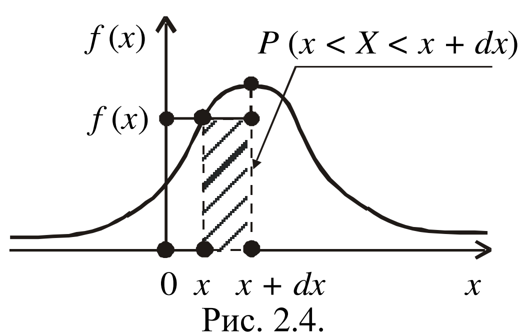


Рис. 2.4.

Властивості $f(x)$

1. $f(x)\geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною

функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини *X*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha x = 1. \qquad (2.10)$$

Доведення.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = F(x)|_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Якщо неперервна випадкова величина *X* визначена лише на проміжку [*a*; *b*], то умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{a}^{в} f(x)dx = 1. \qquad (2.11)$$

3. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha;\beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (2.12)$$

Доведення. За властивістю функції розподілу ймовірностей (2.7)

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Залежність (2.12) можна подати так:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} dF(x) = F(x)|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha).$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (2.13)$$

Доведення.

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} dF(x) = F(x)|_{-\infty}^{x} = F(x) - F(-\infty) = F(x).$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать лише інтервалу [*a*; *b*], то

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx. \qquad (2.14)$$

Приклад. Закон розподілу неперервної випадкової величини *X* такий:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P(0<X<2)$, скориставшись (2.5) і (2.12).

Розв’язання.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{3}{64}(x+1)^2, & -1<x\le 3;\\ 0, & x<3.\end{cases}$$

Графіки функцій $F(x), f(x)$ зображено відповідно на рис. 2.5 і 2.6.

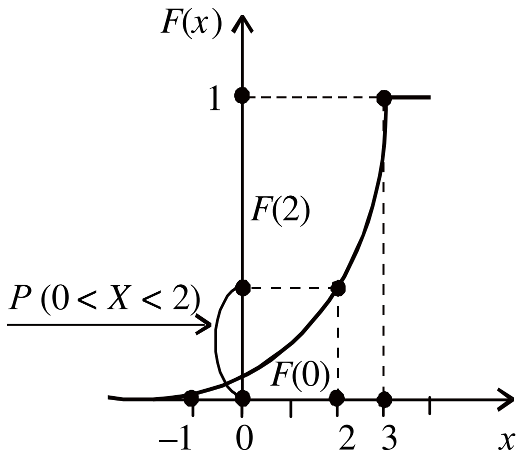


Рис. 2.5

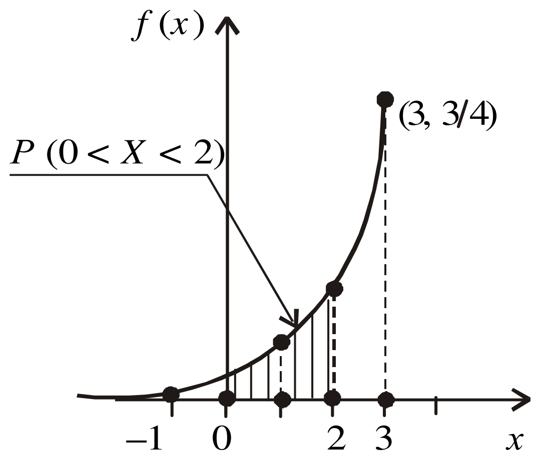


Рис. 2.6

Ймовірність події $0<X<2$ обчислимо за (2.5):

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=\frac{27}{64}-\frac{1}{64}=\frac{26}{64}=\frac{13}{32};$$

далі згідно із (2.12) маємо

$$P(0<X<2)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{3}{64}\,(x+1)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{64}\int_0^2(x+1)^2dx=\frac{3}{64}\,\frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{27}{64}-\frac{1}{64}=\frac{26}{64}=\frac{13}{32}.$$

2.4. Математичне сподівання та його властивості

Однією з найчастіше застосовуваних на практиці характеристик є *математичне сподівання*.

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини X.

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеною на дискретному просторі **Ω**, називається величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i . \qquad (2.15)$$

Якщо **Ω** — обмежена множина, то

$$M(X) = \sum_{s=1}^{n} x_i p_i . \qquad (2.16)$$

Якщо простір **Ω** є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина

$$M(X) = \int_{\Omega} x f(x) dx . \qquad (2.17)$$

Якщо $\Omega = (-\infty; \infty)$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx . \qquad (2.18)$$

Якщо $\Omega = [a; b]$, то

$$M(X) = \int_{a}^{в} x f(x) dx. \qquad (2.19)$$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання від сталої величини C дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C. \qquad (2.20)$$

Справді, сталу C можна розглядати як випадкову величину, що з ймовірністю, яка дорівнює одиниці, набуває значення C, а тому $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2. $$M(CX) = CM(X) \qquad (2.21)$$

Для дискретної випадкової величини згідно із (2.15) маємо

$$M(CX) = \sum_{i=1}^{k} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{k} x_i p_i = CM(X) .$$

Для неперервної:

$$M(CX)=\int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)\,dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = CM(X).$$

3. Якщо A і B є сталими величинами, то

$$M(AX+B)=AM(X)+B. \qquad (2.22)$$

Для дискретної випадкової величини:

$$M(AX+B)=\sum_{i=1}^{n}(Ax_i+B)p_i = A\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + B\sum_{i=1}^{n}p_i = AM(X)+B.$$

Для неперервної випадкової величини:

$$M(AX+B)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(Ax+B)f(x)dx = A\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)dx + B\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = AM(X)+B.$$

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

x_i	– 6	– 4	2	4	6	8
p_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

Обчислити $M(X)$.

Розв'язання. Скориставшись (2.16), дістанемо

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i = x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5+x_6p_6=$$

$$=-6\cdot 0{,}1-4\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}2=$$

$$=-0{,}6-0{,}4+0{,}4+1{,}2+0{,}6+1{,}6=2{,}8.$$

Приклад 2. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \dfrac{\sqrt{x+4}}{3}, & -4<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Обчислити $M(X)$.

Розв'язання. Для обчислення $M(X)$ необхідно знайти щільність ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-4;\\ \dfrac{1}{6\sqrt{x+4}}, & -4<x\le 6;\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

Тоді:

$$M(X)=\int_{-4}^{6} x\ f(x)dx=\int_{-4}^{6} x\frac{1}{6\sqrt{x+3}}dx=\frac{1}{6}\int_{-4}^{6}\frac{x}{\sqrt{x+3}}\ dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} x+3=z^2 & \\ x=z^2-3 \quad \to & \begin{array}{c}-3\le x\le 6\\ 0\le z\le 3\end{array} \\ dx=2zdz & \end{array}\right|=\frac{1}{6}\int_{0}^{3}\frac{z^2-3}{z}2zdz=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{3}(z^2-3)dz=\frac{1}{3}\left(\int_{0}^{3} z^2dz-3\int_{0}^{3}dz\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left.\frac{z^3}{3}\right|_0^3-\left.3z\right|_0^3\right)=\frac{1}{3}(9-9)=0;$$

$$M(X)=0.$$

Якщо випадкова величина $X\in\ [a;\ b]$, то $M\ (X)\in\ [a;\ b]$, а саме: математичне сподівання випадкової величини має обов’язково міститься всередині інтервалу $[a;\ b]$, являючи собою центр розподілу цієї величини.

Приклад 3. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{12}\sqrt[3]{x+1}, & -1<x\le 7;\\ 0, & x>7\end{cases}$$

обчислити $M\ (X)$.

Розв’язання. Згідно із (2.19) маємо:

$$M(X)=\int_{-1}^{7} x\,f(x)dx=\int_{-1}^{7} x\frac{1}{12}\ \sqrt[3]{x+1}\ dx=\frac{1}{12}\int_{-1}^{7} x\ \sqrt[3]{x+1}\ dx=$$

$$= \begin{vmatrix} x+1=z^3 \\ x=z^3-1 \;\to\; -1\le x\le 7 \\ dx=3z^2dz \qquad 0\le z\le 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\int_0^2 (z^3-1)\; z\; 3z^2dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 (z^6-z^3)dz = \frac{1}{4}\left(\int_0^2 z^6dz - \int_0^2 z^3dz\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{z^7}{7}\Bigg|_0^2 - \frac{z^4}{4}\Bigg|_0^2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{128}{7}-4\right) = \frac{1}{4}\;\frac{128-28}{7} = \frac{100}{28} = \frac{25}{7};$$

$$M(X) = \frac{25}{7}.$$

2.5. Мода та медіана випадкової величини

Модою (Мо) дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності:

$f\,(\text{Mo}) = \max$.

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл ймовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди — *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною (Ме) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність ймовірностей подій:

$$P(-\infty < X < \text{Me}) = P(\text{Me} < X < \infty) \to F(\text{Me}) - F(-\infty) =$$
$$= F(\infty) - F(\text{Me}) \to$$
$$\to F(\text{Me}) = 1 - F(\text{Me}) \to 2F(\text{Me}) = 1 \to$$
$$\to F\,(\text{Me}) = 0{,}5. \qquad (2.23)$$

Отже, медіану визначають із рівняння (2.23).

Приклад. Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Ймовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, — величина стала і дорівнює 0,8.

Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа верстатів, які потребують уваги робітника за певний проміжок часу. Знайти Mo.

Розв'язання.

Можливі значення випадкової величини:

$X = 0, 1, 2, 3.$

Ймовірності цих можливих значень такі:

$p_1 = (0{,}2)^3 = 0{,}008;$

$p_2 = 3p\,q^2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}04 = 0{,}096;$

$p_3 = 3p^2q = 3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 0{,}384;$

$p_4 = p^3 = (0{,}8)^3 = 0{,}512.$

Запишемо закон таблицею:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Із таблиці визначаємо Mo = 3.

Отже, дістаємо одномодальний розподіл.

2.6 Дисперсія та її властивості

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню $M(X)$ може відповідати безліч випадкових величин, які будуть різнитися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

Приклад 1. Закони розподілу випадкових величин X і Y задані таблицями:

x_i	– 0,5	– 0,1	0,1	0,5
p_i	0,4	0,1	0,1	0,4

y_j	– 100	– 80	– 10	10	10	80
p_j	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,2

Обчислити $M(X)$ і $M(Y)$.

Розв'язання.

$$M(X) = \sum_{s=1}^{4} x_i p_i = -0{,}5 \cdot 0{,}4 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 =$$

$$= -0{,}2 - 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}2 = 0;$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^{6} y_j p_j = -100 \cdot 0{,}1 - 80 \cdot 0{,}2 - 10 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}2 + 80 \cdot 0{,}2$$

$$= +100 \cdot 0{,}1 = -10 - 16 - 2 + 2 + 16 + 10 = 0.$$

Отже, два закони розподілу мають однакові математичні сподівання, хоча можливі значення для випадкових величин X і Y істотно різні. Із наведеного прикладу бачимо, що в разі рівності математичних сподівань *(M (X) = M (Y) = 0)* випадкові величини X і Y мають тенденцію до коливань відносно $M(X)$ та $M(Y)$, причому Y має більший розмах розсіювання відносно $M(Y)$, ніж випадкова величина X відносно $M(X)$. Тому математичне сподівання називають *центром розсіювання.* Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яку називають *дисперсією*.

Для визначення дисперсії розглядається відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання $(X - M(X))$

Математичне сподівання такого відхилення випадкової величини X завжди дорівнює нулю. Справді,

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Отже, відхилення не може бути мірою розсіювання випадкової величини.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \qquad (2.26)$$

Для дискретної випадкової величини X дисперсія

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i; \qquad (2.27)$$

для неперервної

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx. \qquad (2.28)$$

Якщо $X \in [a; b]$,

то $$D(X) = \int_{a}^{b} (x - M(X))^2 f(x)dx. \qquad (2.29)$$

Властивості дисперсії

1. Якщо C — стала величина, то

$$D(C)=0. \qquad (2.30)$$

Справді

$$D(C)=M(C-M(C))^2=M(C-C)^2=M(0)=0.$$

2. $D(CX)=C^2D(X)$. (2.31)

Маємо:

$$D(CX)=M(CX-M(CX))^2=M(CX-CM(X))^2=$$
$$=M(C(X-M(X))^2=C^2M(X-M(X))^2=C^2D(X)$$

3. Якщо A і B — сталі величини, то

$$D(AX+B)=A^2D(X). \qquad (2.32)$$

Адже

$$D(AX+B)=M(AX+B-M(AX+B))^2=$$
$$=M(AX+B-AM(X)-B)^2=$$
$$=M(AX-AM(X))^2=A^2M(X-M(X))^2=A^2D(X).$$

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X). \qquad (2.33)$$

Доведення. Згідно з (2.26) дістаємо:

$$D(X)=M(X-M(X))^2=M(X^2-2M(X)X+M^2(X))=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+M(M^2(X))=$$
$$=M(X^2)-2M^2(X)+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

Для дискретної випадкової величини X

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-M^2(X); \qquad (2.34)$$

для неперервної

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-M^2(X). \qquad (2.35)$$

Якщо $X\in[a;b]$, то

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-M^2(X). \qquad (2.36)$$

Слід пам'ятати, що дисперсія не може бути від'ємною величиною $\left(D\left(X\geq 0\right)\right)$.

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання. Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті.

Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (2.37)$$

Приклад 2. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Згідно з (2.34) маємо:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{6} x_i p_i\right)^2;$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -4 \cdot 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}1 =$$

$$= -0{,}4 - 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}6 = 0{,}9;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i{}^2 p_i = 16 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 1{,}6 + 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}6 + 3{,}6 = 8{,}7;$$

$$D(X) = 8{,}7 - (0{,}9)^2 = 8{,}7 - 0{,}81 = 7{,}89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} \approx 2{,}8.$$

2.7. Система двох дискретних випадкових величин (*X, Y*) та їх числові характеристики

На одному й тому самому просторі елементарних подій Ω можна визначити не одну, а кілька випадкових величин. Така потреба постає, наприклад, коли досліджуваний об’єкт характеризується кількома випадковими параметрами. Так, у разі виготовлення валів такі їх параметри, як діаметр, довжина, овальність є випадковими величинами, значення яких наперед не можна передбачити. Або, скажімо, структура витрат випадково взятої окремої сім’ї на їжу, одяг, взуття, транспорт, задоволення духовних потреб також є випадковими величинами, визначеними на одному й тому самому просторі елементарних подій.

На багатовимірні випадкові величини поширюються майже без змін основні означення, які були розглянуті для одновимірної випадкової величини.

Означення. Одночасна поява внаслідок проведення експерименту n випадкових величин (X_1, X_2, …, X_n) з певною ймовірністю являє собою n-вимірну випадкову величину, яку називають також *системою n випадкових величин*, або *n-вимірним випадковим вектором*.

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік можливих значень $Y = y_i$, $X = x_j$ та відповідних їм ймовірностей спільної появи.

У табличній формі цей закон має такий вигляд:

$X = x_j$ / $Y = y_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_m	p_{yi}
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}		p_{1m}	p_{y1}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}		p_{2m}	p_{y2}
y_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}		p_{3m}	p_{y3}
…	…	…	…	…	…	…
y_k	p_{k1}	p_{k2}	p_{k3}	…	p_{km}	p_{ym}
p_{xj}	p_{x1}	p_{x2}	p_{x3}	…	p_{xm}	

Тут використано такі позначення

$$p_{ij} = p((Y = y_i) \bigcap (X = x_j)); \;\; p_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}; \;\; p_{x_j} = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}.$$

Умова нормування має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} p_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{x_j} = 1. \qquad (2.38)$$

Числові характеристики для випадкових величин X, Y, що утворюють систему (X, Y)

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j p_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_j p_{x_j}. \qquad (2.39)$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}x_j^2 p_{ij}-M^2(X)=$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_j^2 p_{x_j}-M^2(X). \qquad (2.40)$$

$$\sigma(X)=\sigma_x=\sqrt{D(X)}. \qquad (2.41)$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}y_i p_{ij}=\sum_{i=1}^{k}y_i p_{y_i}. \qquad (2.42)$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}y_i^2 p_{ij}-M^2(Y)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}y_i^2 p_{y_i}-M^2(Y). \qquad (2.43)$$

$$\sigma(Y)=\sigma_y=\sqrt{D(Y)}. \qquad (2.44)$$

2.8. Коефіцієнт кореляції та його властивості

Під час вивчення системи двох і більше випадкових величин доводиться з'ясовувати наявність зв'язку між цими величинами та його характер. З відповідною метою застосовують так званий *кореляційний момент:*

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)M(Y)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}y_i x_j p_{ij}-M(X)M(Y). \quad (2.45)$$

У разі $K_{xy}=0$ зв'язок між величинами X та Y, що належать системі (X, Y), відсутній. Коли $K_{xy}\neq 0$, то між відповідними X і Y кореляційний зв'язок існує.

Тісноту кореляційного зв'язку характеризує коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}, \qquad (2.46)$$

$\left|r_{xy}\right|\le 1$, або $-1\le r_{xy}\le 1$.

Отже, якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то $K_{xy}=0$ і $r_{xy}=0$. Рівність нулеві r_{xy} є необхідною, але не достатньою умовою незалежності випадкових величин.

Справді, може існувати система залежних випадкових величин, в якої коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Прикладом такої системи є система двох випадкових величин (X, Y), яка рівномірно розподілена всередині кола радіусом R із центром у початку координат. Дві випадкові величини X і Y називають *некорельованими*, якщо $r_{xy} = 0$, і *корельованими*, якщо $r_{xy} \neq 0$.

Отже, якщо X і Y незалежні, то вони будуть і некорельованими. Але з некорельованості випадкових величин у загальному випадку не випливає їх незалежність.

Приклад. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y):

$X = x_j$ / $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	0,1a	2a	0,9a	
4,4	2a	0,2a	1,8a	
6,4	1,9a	0,8a	0,3a	
P_{xj}				

Знайти a. Обчислити $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$; $M(Y)$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$; K_{xy}; r_{xy}; $P(2{,}4 \le Y < 6{,}4;\ 5{,}2 < X \le 15{,}2)$.

Розв'язання.

Скориставшись умовою нормування (2.38), дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} P_{ij} = 0{,}1a + 2a + 0{,}9a + 2a + 0{,}2a + 1{,}8a + 1{,}9a + 0{,}8a + 0{,}3a =$$

$$= 1 \Rightarrow a = 0{,}1.$$

Зі знайденим a закон системи набирає такого вигляду:

$X = x_j$ / $Y = y_i$	5,2	10,2	15,2	P_{yi}
2,4	0,01	0,2	0,09	0,3
4,4	0,2	0,02	0,18	0,4
6,4	0,19	0,08	0,03	0,3
P_{xj}	0,4	0,3	0,3	

Основні числові характеристики обчислюємо за формулами (2.39-2.46):

$$M(X)=\sum_{j=1}^{3} x_j p_{x_j} = 5{,}2\cdot 0{,}4+10{,}2\cdot 0{,}3+15{,}2\cdot 0{,}3=$$
$$=2{,}08+3{,}06+4{,}56=9{,}7;$$
$$M(X^2)=\sum_{j=1}^{3} x_j^2 p_{x_j} = (5{,}2)^2\,0{,}4+(10{,}2)^2\,0{,}3+(15{,}2)^2\ 0{,}3=$$
$$=10{,}816+31{,}212+69{,}312=111{,}34;$$
$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=111{,}34-94{,}09=17{,}25;$$
$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=4{,}15;$$

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{3} y_i p_{y_i} = 2{,}4\cdot 0{,}3+4{,}4\cdot 0{,}4+6{,}4\cdot 0{,}3=0{,}72+1{,}76+1{,}92=4{,}4;$$

$$M(Y^2)=\sum_{i=1}^{3} y_i^2 p_{y_i} = (2{,}4)^2\,0{,}3+(4{,}4)^2\,0{,}4+(6{,}4)^2\,0{,}3=$$
$$=1{,}728+7{,}744+12{,}288=21{,}76;$$
$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=21{,}76-(4{,}4)^2=21{,}76-19{,}36=2{,}4;$$
$$\sigma_y=\sqrt{D(Y)}=1{,}55;$$
$$M(XY)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} y_i x_j p_{ij} = 2{,}4\cdot 5{,}2\cdot 0{,}01+2{,}4\cdot 10{,}2\cdot 0{,}2+$$
$$+2{,}4\cdot 15{,}2\cdot 0{,}09+4{,}4\cdot 5{,}2\cdot 0{,}2+4{,}4\cdot 10{,}2\cdot 0{,}02+$$
$$+4{,}4\cdot 15{,}2\cdot 0{,}18+6{,}4\cdot 5{,}2\cdot 0{,}19+,4\cdot 10{,}2\cdot 0{,}08+$$
$$+6{,}4\cdot 15{,}2\cdot 0{,}03=0{,}1248+4{,}896+3{,}2832+4{,}576+$$
$$+0{,}8976+12{,}0384+6{,}3232+5{,}2224+2{,}9184=40{,}28;$$
$K_{xy} = M\,(XY)$ — $M\,(X)\,M\,(Y) = 40{,}28 - 9{,}7 \cdot 4{,}4 =$
$= 40{,}28 - 42{,}68 = 1{,}4$.

Оскільки $K_{xy} > 0$, то між відповідними величинами існує кореляційний зв'язок. Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислимо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{-2{,}4}{4{,}15\cdot 1{,}55}\approx 0{,}37.$$

Остаточно маємо:

$$p(2{,}4 \le Y < 6{,}4;\ \ 5{,}2 < X \le 15{,}2) = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}09 + 0{,}18 = 0{,}31.$$

2.9. Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин та їх числові характеристики

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X при фіксованому значенні $Y = y_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини $X = x_i$ та відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $Y = y_i$.

У табличній формі запису умовний закон $X\ /\ Y = y_i$ має такий вигляд:

$X = x_j$	x_1	x_2	x_3	…	x_m
$P(X = x_j / Y = y_i) = \dfrac{P((X = x_j) \bigcap (Y = y_i))}{P(Y = y_i)} = \dfrac{P_{ij}}{P_{y_i}}$	P_{i1}/P_{y1}	P_{i2}/P_{y2}	P_{i3}/P_{y3}	…	P_{im}/P_{ym}

При цьому має виконуватись умова нормування:

$$\sum_{j=1}^{m} P(X = x_j / Y = y_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_{ij}}{P_{y_i}} = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = \frac{P_{y_i}}{P_{y_i}} = 1.\quad \left(\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = P_{y_i}\right).$$

Числові характеристики для цього закону називають умовними.

Умовне математичне сподівання

$$M(X / Y = y_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j P(X = x_j / Y = y_i) = \sum_{j=1}^{m} x_j \frac{P_{ij}}{P_{y_i}} = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^{m} x_j P_{ij}. \qquad (2.47)$$

Умовна дисперсія і середнє квадратичне відхилення обчислюються відповідно за формулами

$$D(X / Y = y_i) = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^{m} x_j^2 P_{ij} - M^2(X / Y = y_i); \qquad (2.48)$$

$$\sigma(X / Y = y_i) = \sqrt{D(X / Y = y_i)}. \qquad (2.49)$$

Умовним законом розподілу випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$ називається перелік можливих значень випадкової величини $Y = y_j$ і відповідних їм умовних ймовірностей, обчислених при фіксованому значенні $X = x_i$.

У табличній формі запису умовний закон має такий вигляд:

$Y = y_j$	y_1	y_2	y_3	…	y_m
$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P((Y = y_j) \bigcap (X = x_i))}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{x_i}}$	P_{1j} / P_{x1}	P_{2j} / P_{x2}	P_{3j} / P_{x3}	…	P_{mj} / P_{xm}

При цьому має виконуватись умова нормування:

$$\sum_{i=1}^{k} P(Y = y_i / X = x_j) = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_{ij}}{P_{x_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = \frac{P_{x_i}}{P_{x_i}} = 1. \quad (\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = P_{x_i})$$

Умовне математичне сподівання

$$M(Y / X = x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_j P(Y = y_j / X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} y_j \frac{P_{ij}}{P_{x_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{i=1}^{k} y_j P_{ij}. \qquad (2.50)$$

Умовна дисперсія

$$D(Y / X = x_i) = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{i=1}^{k} y_j^2 P_{ij} - M^2 (Y / X = x_i). \qquad (2.51)$$

Умовне середнє квадратичне відхилення

$$\sigma (Y / X = x_i) = \sqrt{D(Y / X = x_i}. \qquad (2.52)$$

2.10. Функція розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин та її властивості

Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) називають таку функцію двох аргументів x, y, яка визначає ймовірність спільної появи подій $(X < x) \bigcap (Y < y)$:

$$F(x,y) = P((X < x) \bigcap (Y < y)). \qquad (2.53)$$

Геометрично ця функція зображена на рис. 2.7

Рис. 2.7

Властивості F(x, y)

1. $0 \le F(x,\ y) \le 1$, оскільки $0 \le P((X < x) \bigcap (y < y)) \le 1$.

2. Якщо один із аргументів $F(x,\ y)$ прямує до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу одного аргументу, що не прямує до $+\infty$, а саме:

$$\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F(x,\infty) = F(x); \qquad (2.54)$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F(\infty,y) = F(y). \qquad (2.55)$$

3. $$\lim_{\substack{y\to\infty,\\ x\to\infty}} F(x,y) = F(\infty,\infty) = P(x<\infty, y<\infty) = 1. \qquad (2.56)$$

4. $$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y) = \lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0. \qquad (2.57)$$

5. $F(x,\ y)$ є неспадною функцією аргументів x і y.

Доведення.

$F(x_2,\ y) \ge F(x_1,\ y),\ x_2 > x_1.$

Нехай $A = (X < x_2,\ Y < y)$, $B = (X < x_1,\ Y < y)$, $C = (x_1 < X < x_2,\ Y < y)$ (рис. 2.8).

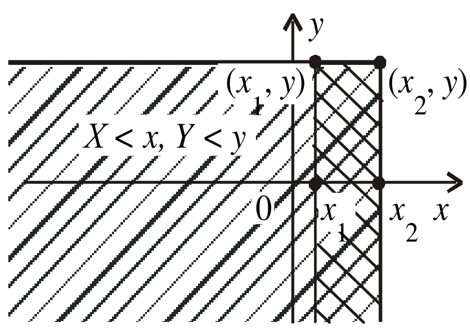


Рис. 2.8

Оскільки $B \bigcap C \ne \varnothing$, то $A = B \bigcup C$ $(A = B + C)$.

Тоді $P(A) = P(B \bigcup C) = P(B) + P(C)$.

Узявши до уваги, що

$$P(A) = P(X < x_2, Y < y) = F(x_2, y);$$

$$P(B) = P(X < x_1, Y < y) = F(x_1, y);$$

$$P(C) = P(x_1 < X < x_2, Y < y),$$

дістанемо:

$$F(x_2, y) = F(x_1, y) + P(x_1 < X < x_2, Y < y_1) \to$$
$$\to F(x_2, y) - F(x_1, y) = P(x_1 < X < x_2, Y < y) \geq 0 \to$$
$$\to F(x_2, y) - F(x_1, y) \geq 0 \to F(x_2, y) \geq F(x_1, y).$$

Аналогічно доведемо, що

$F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$, $y_2 > y_1$.

Позначимо тепер $A = (X < x,\ Y < y_2)$, $B = (X < x,\ Y < y_1)$, $C = (X < x,\ y_1 < У < y_2)$ (рис 2.9).

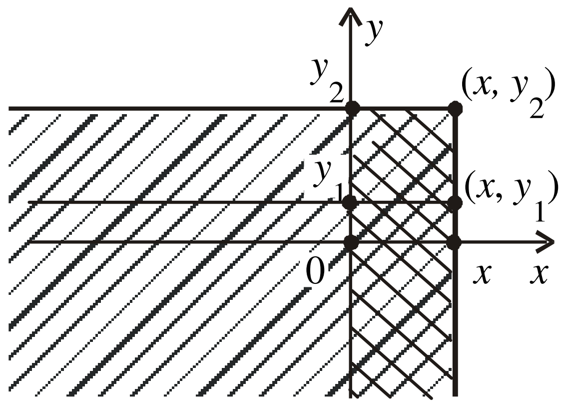


Рис. 2.9

Оскільки $B \cap C = \varnothing$, то $A = B \cup C \to P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$.

$$P(X < x, Y < y_2) = P(X < x, Y < y_1) + P(X < x, y_1 < Y < y_2) \to$$
$$\to F(x, y_2) = F(x, y_1) + P(X < x, y_1 < Y < y_2) \to$$
$$\to F(x, y_2) - F(x, y_1) = P(X < x, y_1 < Y < y_2) \geq 0 \to$$
$$\to F(x, y_2) - F(x, y_1) \geq 0 \to F(x, y_2) \geq F(x, y_1).$$

Скориставшись властивістю (5), можна обчислити ймовірності

$P(a < X < b,\ Y < y) = F(b,\ y) - F(a,\ y)$;

$P(X < x,\ c < Y < d) = F(x,\ d) - F(x,\ c)$. (2.58)

6. Ймовірність влучення точки $(X,\ Y)$ в довільний прямокутник $(a < X < b,\ c < Y < d)$ обчислюємо так:

$P(a < x < b,\ c < y < d) = F(b,\ d) + F(a,\ c) - F(a,\ d) - F(b,\ c)$. (2.59)

Доведення.

Розглянемо такі випадкові події:

$A = (X < b,\ Y < d)$; $B = (X < a,\ Y < c)$; $C = (a < X < b,\ Y < c)$; $D = (X < a,\ c < Y < d)$; $E = (a < X < b,\ c < Y < d)$ (рис. 2.10).

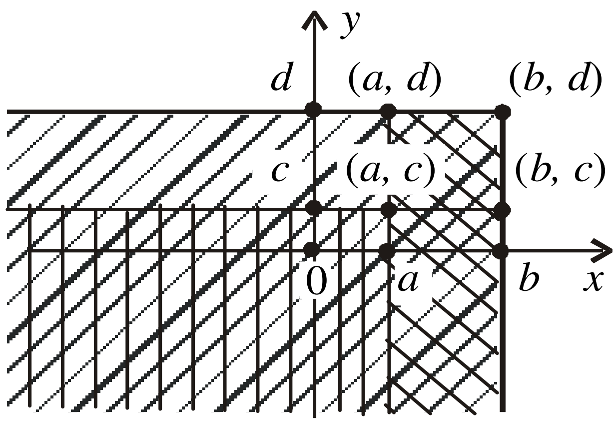


Рис. 2.10

Оскільки випадкові події B, C, D, E несумісні, маємо:

$A = B \bigcup C \bigcup D \bigcup E.$

$P(A) = P(B \bigcup C \bigcup D \bigcup E) = P(B) + P(C) + P(D) + P(E).$

$P(x < b,\ y < d) = P(x < a,\ y < c) + P(a < x < b,\ y < c) +$
$+ P(x < a,\ c < y < d) + P(a < x < b,\ c < y < d).$

Дістанемо:

$F(b, d) = F(a, c) + F(b, c) - F(a, c) + F(a, d) - F(a, c) +$
$+ P(a < X < b,\ c < Y < d);$

$P(a < X < b,\ c < Y < d) = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c),$
що й треба було довести

Приклад. Закон розподілу системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & x \le 0, y \le 0; \\ 1 - e^{-2x} - e^{-3y} + e^{-2x-3y}, & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

Обчислити $P(0 < x < 4, 0 < y < 2)$.

Розв'язання. Відповідну графічну схему зображено на рис. 2.11.

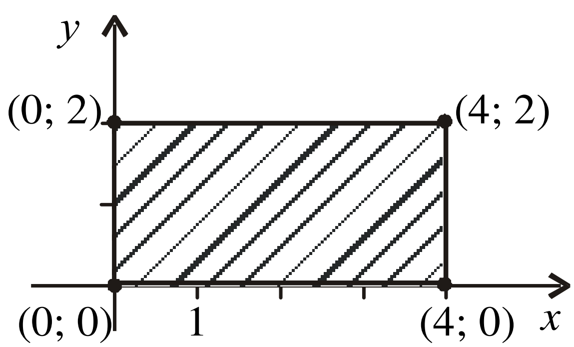


Рис. 2.11

Далі згідно зі (2.59) маємо:

$P(0 < x < 4;\, 0 < y < 2) = F(4;\, 2) + F(0;\, 0) - F(0;\, 2) - F(4;\, 0) =$
$= 1 - e^{-8} - e^{-6} + e^{-14}.$

2.11. Щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин (*X, Y*), *f*(*x, y*) та її властивості

Характеристикою системи неперервних випадкових величин є щільність ймовірностей.

Для визначення щільності ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин (*X, Y*) застосовується формула (2.59).

Розглянемо прямокутник зі сторонами Δx та Δy (рис. 2.12).

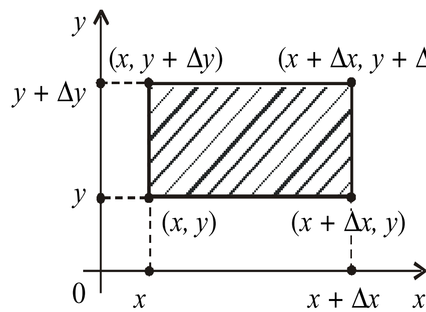


Рис. 2.12

Ймовірність розміщення системи (*X, Y*) у прямокутній області $(x < X < x + \Delta x,\, y < Y < y + \Delta y)$ обчислюється за формулою

$P(x < X < x + \Delta x,\, y < Y < y + \Delta y) = = F(x + \Delta x,\, y + \Delta y) +$
$+ F(x,\, y) - F(x + \Delta x,\, y) - F(x,\, y + \Delta y).$

Поділивши цю ймовірність на площу прямокутника Δx, Δy і спрямувавши $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, дістанемо ймовірність у точці, тобто щільність:

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x,\, y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \lim \frac{(F(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - F(x,\, y + \Delta y)) - (F(x + \Delta x,\, y) - F(x,\, y))}{\Delta x \Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \Big(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - F(x,\, y + \Delta y)}{\Delta x} -$$

$$-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x, y)-F(x,y)}{\Delta x}) =$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F'_x(x, y+\Delta y)-F'_x(x,y)}{\Delta y} = F''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial_x \partial_y} = f(x,y).$$

Отже,

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial_x \partial_y}. \qquad (2.60)$$

Функція $f\ (x,\ y)$ може існувати лише за умови, що $F\ (x,\ y)$ є неперервною за аргументами x і y та двічі диференційовною.

Функції $f\ (x,\ y)$ у тривимірному просторі відповідає певна поверхня — так звана *поверхня розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин* (X, Y).

Тоді $f\ (x,\ y)\ dxdy$ — ймовірність розміщення системи двох випадкових величин у прямокутнику зі сторонами dx, dy.

Властивості $f\,(x,\ y)$

1. Функція $f\ (x,\ y) \geq 0$, оскільки $F(x,\ y)$ є неспадною відносно аргументів x і y.

2. Умова нормування системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) така:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dx\,dy = 1. \qquad (2.61)$$

Якщо $\Omega = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$, то (2.61) набирає такого вигляду:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy = 1. \qquad (2.62)$$

3. Ймовірність розміщення системи змінних (x, y) в області $D \subset \Omega$ обчислюється так:

$$P((x,y)\in D) = \iint_{D} f(x,y)dx\,dy. \qquad (2.63)$$

Ймовірність розміщення системи змінних (x, y) у прямокутній області $D = (a < x < b,\ c < y < d)$

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dx\,dy. \qquad (2.64)$$

4. Функція розподілу ймовірностей системи двох змінних визначається з рівняння

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx\,dy. \qquad (2.65)$$

5. Якщо $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$, то

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(x,y)dx\,dy. \qquad (2.66)$$

2.12 Основні числові характеристики для системи двох неперервних випадкових величин (*X, Y*)

$$M(X) = \iint_\Omega xf(x,y)dx\,dy; \qquad (2.67)$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \iint_\Omega x^2 f(x,y)dx\,dy - M^2(X); \quad (2.68)$$

$$M(Y) = \iint_\Omega yf(x,y)dx\,dy; \qquad (2.69)$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \iint_\Omega y^2 f(x,y)dx\,dy - M^2(Y); \qquad (2.70)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)}; \qquad (2.71)$$

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \\ = \iint_\Omega xy\ f(x,y)dx\,dy - M(X)M(Y); \qquad (2.72)$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad |r_{xy}| \le 1;$$

Якщо $\Omega = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$, то виконуються співвідношення:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dx\,dy; \qquad (2.73)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)dx\,dy - M^2(X); \quad (2.74)$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dx\,dy; \qquad (2.75)$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)dx\,dy - M^2(Y); \quad (2.76)$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\ f(x,y)dx\,dy - M(X)M(Y). \quad (2.77)$$

Якщо $\Omega = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, то маємо:

$$M(X) = \int_{b}^{a}\int_{c}^{d} xf(x,y)dx\,dy; \quad (2.78)$$

$$D(X) = \int_{b}^{a}\int_{c}^{d} x^2 f(x,y)dx\,dy - M^2(X); \quad (2.79)$$

$$M(Y) = \int_{b}^{a}\int_{c}^{d} yf(x,y)dx\,dy; \quad (2.80)$$

$$D(Y) = \int_{b}^{a}\int_{c}^{d} y^2 f(x,y)dx\,dy - M^2(Y); \quad (2.81)$$

$$K_{xy} = \int_{b}^{a}\int_{c}^{d} xy\ f(x,y)dx\,dy - M(X)M(Y). \quad (2.82)$$

2.13. Умовні закони розподілу для неперервних випадкових величин *X* та *Y*, які утворюють систему (*X*, *Y*)

Як і в системі двох дискретних випадкових величин, у системі двох неперервних випадкових величин розглядаються умовні закони розподілу.

Можна записати

$$F(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy;$$

$$F(y) = F(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy. \quad (2.83)$$

Звідси

$$f(x) = F'(x) = \left(\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\right)dx\right)'_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \quad (2.84)$$

$$f(y) = F'(y) = \left(\int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\right)dy\right)'_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx. \quad (2.85)$$

Умовні закони розподілу для неперервних випадкових величин *X*, *Y*, що утворюють систему (*X*, *Y*), визначаються умовними щільностями ймовірностей $f(x/y)$, $f(y/x)$:

$$f(y/x)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{P(y<Y<y+\Delta y/X=x)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(y<Y<y+\Delta y/x<X<x+\Delta x)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(y<Y<y+\Delta y,\ x<X<x+\Delta x)\Delta x}{\Delta y\ \Delta x\ P(x<X<x+\Delta x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Тут застосовується формула умовної ймовірності}\\ P(y<Y<y+\Delta y/x<X<x+\Delta x)=\dfrac{P(y<Y<y+\Delta y,x<X<x+\Delta x)}{P(x<X<x+\Delta x)}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{P(y<Y<y+\Delta y,\ x<X<x+\Delta x)}{\Delta x\ \Delta y}}{\dfrac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{F(y+\Delta y,\ x+\Delta x)+F(x,y)-F(x+\Delta x)-F(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x\ \Delta y}}{\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{F(y+\Delta y,\ x+\Delta x)+F(x,\ y)-F(x+\Delta x)-F(x,\ y+\Delta y)}{\Delta x\ \Delta y}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}}=$$

$=\big|$ використовуючи доведення (2.66), для $f(x,y)$ і $f(x)$, маємо $\big|=$

$$=\frac{f(x,\ y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)dy}. \qquad (2.86)$$

Аналогічно доводимо співвідношення

$$f(x/y)=\frac{f(x,\ y)}{f(y)}=\frac{f(x,\ y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)dx}. \qquad (2.87)$$

Із (2.86), (2.87) дістаємо

$$f(x,\ y) = f(x)\,f(y/x) = f(y)\,f(x/y). \qquad (2.88)$$

Для умовних законів розподілу неперервних випадкових величин умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x/y)dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} f(y/x)dy = 1. \qquad (2.89)$$

Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то

$$f(x/y) = f(x), f(y/x) = f(y). \qquad (2.90)$$

У цьому разі (2.88) набирає вигляду

$$f(x,\ y) = f(x)\,f(y). \qquad (2.91)$$

Для незалежних випадкових величин X та Y виконується рівність

$$F(x,\ y) = F(x)\ F(y). \qquad (2.92)$$

Числові характеристики для умовних законів розподілу ймовірностей:

$$M(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)dx; \qquad (2.93)$$

$$M(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy; \qquad (2.94)$$

$$D(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x/y)dx - M^2(X/y); \qquad (2.95)$$

$$D(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y/x)dy - M^2(Y/x). \qquad (2.96)$$

2.14. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Біноміальний закон розподілу ймовірностей

Дискретна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, 3, ..., n. \qquad (2.97)$$

У табличній формі цей закон набирає такого вигляду:

$X = x_k = k$	0	1	2	3	...	n
$P_k = P(X = k) = = C_n^k p^k q^{n-k}$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$C_n^3 p^3 q^{n-3}$		p^n

При перевірці виконання умови нормування використовується формула біному Ньютона, тому закон розподілу називають *біноміальним*:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (q + p)^n = 1.$$

Побудуємо ймовірнісну функцію для цього закону

$$A(X) = \sum_{k=0}^{n} x^k p_k = \sum_{k=0}^{n} x^k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (px)^k q^{n-k} = (q + px)^n$$

.

Отже, ймовірнісна функція для біноміального закону

$$A(X) = (q + px)^n. \qquad (2.98)$$

Знайдемо основні числові характеристики для цього закону:

1. $$M(X) = A'(1) = \left[(q + px)^n\right]'_{X=1} = \left[np(q + px)^{n-1}\right]'_{X=1} =$$

$$= np(q + p) = np;$$

$$(p + q = 1),$$

$$M(X) = np. \qquad (2.99)$$

2. $$A''(1) = \left[np(q + px)^{n-1}\right]'_{X=1} = \left[n(n-1)(q + px)^{n-2} p^2\right]'_{X=1} =$$

$$= n(n-1)(q + p)p^2 = n(n-1)p^2;\ A''(1) = n(n-1)p^2;$$

$$D(X) = A'' + A'(1) - (A'(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 =$$

$$= (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 =$$

$$= -np^2 + np = np(1 - p) = npq;$$

$$D(X) = npq; \qquad (2.100)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}. \qquad (2.101)$$

Приклад. У партії однотипних деталей стандартні становлять 95%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X — появи числа стандартних деталей серед 400 навмання взятих.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу ймовірностей, яка може набувати значення

$X = k = 0, 1, 2, ..., 400.$

Ймовірності можливих значень обчислюються за формулою Бернуллі: $P_k = P(X = k) = C_{400}^k p^k q^{400-k}$, де p = 0,95 — ймовірність появи стандартної деталі, q = 1 – p =1 – 0,95 = 0,05 — ймовірність появи нестандартної деталі.

Згідно з (2.99), (2.100), (2.101), маємо:

$M(X) = np = 400 \cdot 0{,}95 = 380;$

$D(X) = npq = 400 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 19;$

$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{19} \approx 4{,}36.$

Пуассонівський закон розподілу ймовірностей

Дискретна випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень

$$P_k = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, 3, ..., n, \qquad (2.102)$$

тобто обчислюється за формулою Пуассона, де $a = np$. У табличній формі цей закон розподілу буде такий:

$X = k$	0	1	2	3	…	n
$P = P(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$	e^{-a}	ae^{-a}	$\frac{1}{2!} a^2 e^{-a}$	$\frac{1}{3!} a^3 e^{-a}$		$\frac{1}{n!} a^n e^{-a}$

$$\sum P_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} e^{a} = e^0 = 1.$$

Умова нормування виконується.

Побудуємо ймовірну функцію для цього закону:

$$A(X) = \sum_{k=0}^{n} x^k p_k = \sum_{k=0}^{n} x^k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{(ax)^k}{k} = e^{-a} e^{ax} = e^{a(x-1)}$$

Отже,

$$A(X) = e^{a(x-1)}. \qquad (2.103)$$

Вирази для $M(X)$, $D(X)$:

1. $M(X) = A'(1) = (e^{a(x-1)})'_{X=1} = (ae^{a(x-1)})_{X=1} = a;$

$$M(X) = a = np. \qquad (2.104)$$

2. $A''(1) = (ae^{a(x-1)})'_{X=1} = (a^2 e^{a(x-1)})_{X=1} = a^2;$

$D(X) = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2 = a^2 + a - a^2 = a;$

$$P(X) = a; \qquad (2.105)$$
$$\sigma(X) = \sqrt{a}. \qquad (2.106)$$

Отже, для Пуассонівського закону розподілу ймовірностей $M(X) = D(X) = a$.

Приклад 1. Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що мікроелемент вийде із ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,004. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X — числа мікроелементів, що вийдуть із ладу під час роботи приладу.

Розв'язання. Випадкова величина X є дискретною, що має пуассонівський закон розподілу — ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою Пуассона, котра є асимптотичною щодо формули Бернуллі для великих значень n і малих значень p, так званих малоймовірних випадкових подій.

За умовою задачі маємо:

$M(X) = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4;$

$D(X) = M(X) = np = 4;$

$\sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{4} = 2.$

Приклад 2. У деякому населеному пункті маємо 0,1% дальтоніків. Навмання вибирають 5000 мешканців цього населеного пункту. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X — числа дальтоніків, яких буде виявлено серед 5000 навмання вибраних мешканців.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу. Із умови задачі: $n = 5000$, $p = 0{,}0001$. Згідно з (2.104), (2.105), (2.106), дістаємо:

$M(X) = np = 5000 \cdot 0{,}0001 = 0{,}5;$

$D(X) = M(X) = np = 0{,}5;$

$\sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71.$

Геометричний закон розподілу ймовірностей

Інколи спроби здійснюють до першої появи випадкової події. Число проведених спроб буде дисретною випадковою величиною. Цілочислова випадкова величина X має геометричний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень

$$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \qquad (2.107)$$

Тут p — ймовірність появи випадкової події в кожній спробі — є величиною сталою, $q = 1 - p$.

У табличній формі геометричний закон розподілу такий:

$X = X_k = k$	1	2	3	4	...
$P_k = P(X = k) = pq^{k-1}$	p	pq	pq^2	pq^3	...

При перевірці умови нормування використовується формула суми нескінченної геометричної прогресії, тому й закон розподілу називають геометричним:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = p + pq + pq^2 + pq^3 + ... = p\,(1 + q + q^2 + q^3 + ...) =$$

$$= p\,\frac{1}{1-q} = p\,\frac{1}{p} = 1.$$

Побудуємо ймовірнісну функцію

$$A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qx)^k .$$

Ураховуючи, що $|X| \le 1$, дістаємо

$$A(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k pq^{k-1} = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qx)^k .$$

Оскільки $|X| \le 1$, то

$$A(X) = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}(qx)^k = \frac{p}{q}(qx + (qx)^2 + (qx)^3 + ...) = \frac{p}{q}\,\frac{qx}{1-qx};$$

$$A(X) = \frac{px}{1-qx}. \qquad (2.108)$$

Числові характеристики для цього закону:

$$1.\ M(X) = A'(1) = \left[\frac{px}{1-qx}\right]'_{X=1} = \left[\frac{p(1-qx) + pqx}{(1-qx)^2}\right]_{X=1} =$$

$$= \left[\frac{p}{(1-qx)^2}\right]_{X=1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p};$$

$$M(X) = \frac{1}{p}. \qquad (2.109)$$

2. $$A''(1)=\left[\frac{p}{(1-qx)^2}\right]'_{X=1}=\left[\frac{2pq(1-qx)}{(1-qx)^4}\right]_{X=1}=$$

$$=\left[\frac{2pq}{(1-qx)^3}\right]_{X=1}=\frac{2pq}{(1-qx)^3}=\frac{2pq}{p^3}=\frac{2q}{p^2};$$

$$D(X)=A''(1)+A'(1)-(A'(1))^2=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{2q+p-1}{p^2}=\frac{q}{p^2}$$

$$D(X)=\frac{q}{p^2}; \qquad (2.110)$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{q}}{p}. \qquad (2.111)$$

Серед дискретних випадкових величин лише геометричному закону притаманна властивість відсутності післядії. Це означає, що ймовірність появи випадкової події в k-му експерименті не залежить від того, скільки їх з’явилося до k-го, і завжди дорівнює p.

Приклад. Гральний кубик підкидається до першої появи цифри 6. Визначити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ для випадкової величини X числа здійснюваних підкидань.

Розв’язання. Випадкова величина X є цілочисловою, що має геометричний закон розподілу ймовірностей. За умовою задачі: $p=\frac{1}{6}$; $q=\frac{5}{6}$.

Скориставшись (2.109), (2.110), (2.111), дістанемо:

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6;\ D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{36}}=30;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{30}\approx 5{,}48.$$

Рівномірний закон розподілу ймовірностей

Дискретна випадкова величина X має рівномірний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою:

$$P_k=P(X=k)=\frac{1}{n}. \qquad (2.112)$$

У табличній формі запису рівномірний закон розподілу має вигляд:

$X = x_k = k$	1	2	3	...	n
$P_k = P(X = k) = \dfrac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$

Умова нормування $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$ виконується.

Ймовірнісна функція для цього закону

$$A(X) = \sum_{k=1}^{n} x^k p_k = \sum_{k=1}^{n} x^k \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1}{n} \frac{1-x^n}{1-x};$$

$$A(X) = \frac{1}{n} \frac{1-x^n}{1-x}, \tag{2.113}$$

або $$A(X) = \frac{x - x^{n+1}}{n(1-x)}.$$

Числові характеристики рівномірного закону:

1. $$M(X) = A'(1) = \frac{1}{n} \left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x} \right)'_{X=1} =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{\left(1 - (n+1)x^n\right) + x - x^{n+1}}{(1-x)^2} \right)_{X=1} =$$

$=\Big|$ При $x = 1$ дістаємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, яку розкриваємо за правилом Лопіталя $\Big| = \frac{1}{n} \left(\lim\limits_{x \to 1} \frac{\left(1 - (n+1)x^n\right)(1-x) + x - x^{n+1}}{(1-x)^2} \right) =$

$$= \frac{1}{n} \left(\lim_{x \to 1} \frac{(1 - (n+1)x^n)(1-x) + x - x^{n+1}}{(1-x)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - (n+1)\, x^4 - x + (n+1)\, x^{n+1} + x - x^{n+1}}{(1-x)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\lim_{x \to 1} \frac{-(n+1)x^n + (n+1)\, x^{n+1} - x^{n+1}}{(1-x)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\lim_{x \to 1} \frac{-(n+1)\, n x^{n-1} + (n+1)^2 x^n - (n+1)\, x^n}{-2\, (1-x)} \right) =$$

$$=\frac{n+1}{2n}\left(\lim_{x\to 1}\frac{-nx^{n-1}+(n+1)\,x^n-x^n}{-2(1-x)}\right)=\Big|$$ При $x = 1$ знову дістаємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, яку розкриваємо за правилом Лопіталя $\Big| =$

$$=\frac{n+1}{2n}\left(\lim_{x\to 1}\frac{-n(n-1)x^{n-2}+n(n+1)x^{n-1}-nx^{n-1}}{1}\right)=$$

$$=\frac{n+1}{2n}\big(-n(n-1)+n(n+1)-n\big)=$$

$$=\frac{n+1}{2n}(-n^2+n+n^2+n-n)=\frac{n+1}{2};$$

$$M(X)=\frac{n+1}{2}. \qquad (2.114)$$

2. Виконуючи аналогічні, але більш громіздкі перетворення, дістаємо:

$$D(X)=\frac{n^2-1}{12}; \qquad (2.115)$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}. \qquad (2.116)$$

Приклад. Знайти *M* (*X*), *D* (*X*), σ (*X*), якщо цілочислова випадкова величина *X* має рівномірний закон розподілу і можливі значення її такі:

$$X_k = k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, 100.$$

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $n = 100$, $P_k = 1/100$. Згідно з (2.114), (2.115), (2.116) дістаємо:

$$M(X)=\frac{n=1}{2}=\frac{100+1}{2}=50{,}5.$$

$$D(X)=\frac{n^2-1}{12}=\frac{1000-1}{2}=\frac{9999}{12}=832{,}25.$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{n^2}-1}{2\sqrt{3}}=\sqrt{832{,}25}\approx 28{,}87.$$

2.15. Закони розподілу неперервних випадкових величин

Нормальний закон розподілу

Випадкова величина X має нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \qquad (2.117)$$

де $a = M(X)$, $\sigma = \sigma(X)$. Отже, нормальний закон визначається звідси параметрами a і σ і називається загальним.

Тоді

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (2.118)$$

Якщо $a = 0$ і $\sigma = 1$, то нормальний закон називають *нормованим*.

У цьому разі

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty, \ (2.119)$$

тобто $f(x) = \varphi(x)$ є функцією Гаусса,

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (2.120)$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ для загального нормального закону залежно від параметрів a і σ зображені на рис. 2.13 і 2.14.

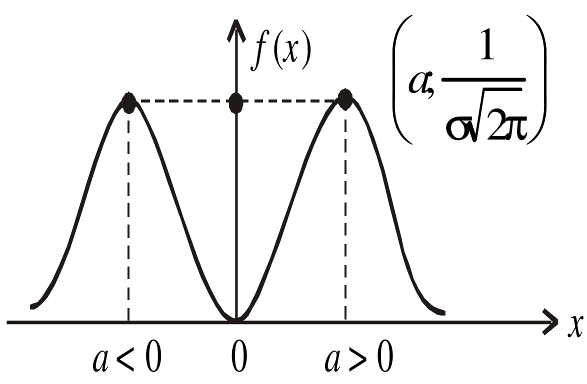


Рис. 2.13

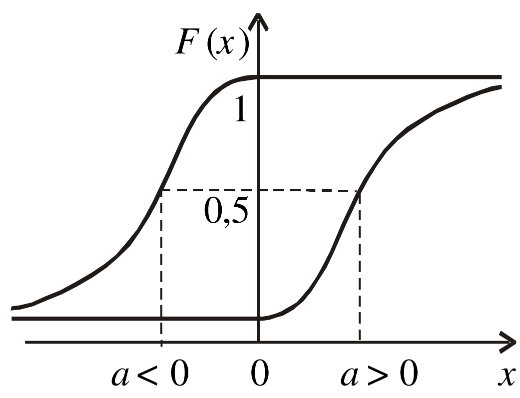


Рис. 2.14

Із рис. 2.13 бачимо, що графік $f(x)$ розміщений симетрично відносно умовно проведеного перпендикуляра в точку $X = a$. Зі зміною значень параметра a крива $f(x)$ зміщується праворуч, якщо $a > 0$ або ліворуч, якщо $a < 0$, не змінюючи при цьому своєї форми; $f(a)$ = max, отже, Mo = a.

Із рис. 2.14 бачимо, що графік $F(x)$ є неспадною функцією, оскільки $f(x) = F'(x) > 0$ і, як буде доведено далі, $F(a) = 0{,}5$.

Отже, Me = a.

Зі зміною значень параметра a крива $F(x)$ зміщується праворуч для $a > 0$ або ліворуч при $a < 0$, не змінюючи при цьому форми кривої.

Отже, для нормального закону Mo = Me = a.

Зі зміною значень σ при a = const змінюється крутизна кривих у околі значень $X = a$, що унаочнюють рис. 2.15 і 2.16.

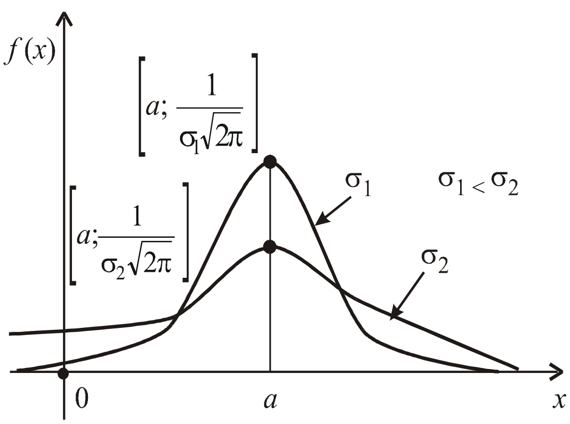


Рис. 2.15

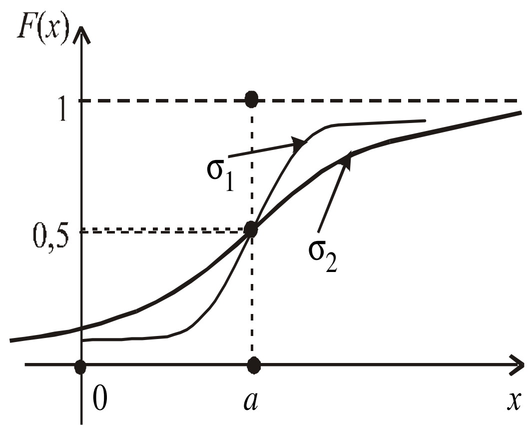


Рис. 2.16

Для нормованого нормального закону графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображено на рис. 2.17 і 2.18.

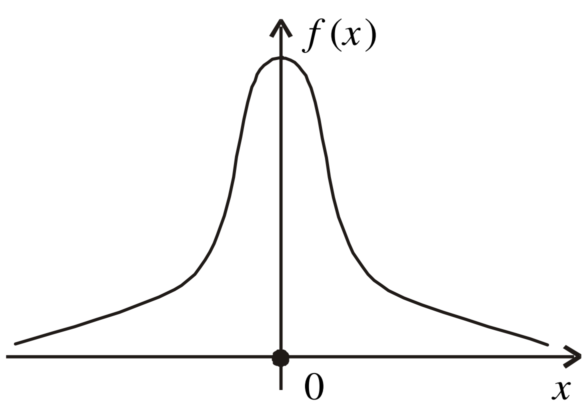


Рис. 2.17

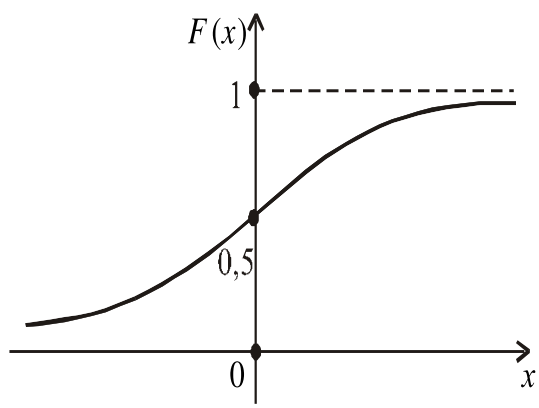


Рис. 2.18

Загальний нормальний закон позначають: $N(a; \sigma)$. Так, наприклад, $N(-2; 4)$ — загальний нормальний закон із значенням параметрів $a = -2$, $\sigma = 4$.

Нормований нормальний закон позначають $N(0; 1)$.

Розподіл χ^2 (хі-квадрат)

Якщо кожна із X_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) незалежних випадкових величин характеризується нормованим законом розподілу ймовірностей ($N(0;1)$), то випадкова величина $X = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ матиме розподіл χ^2 із k ступенями свободи, щільність ймовірностей якої буде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ Cx^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Використовуючи умову нормування, знаходимо

$$C = \frac{1}{\int\limits_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx};$$

$$\int\limits_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \left| \begin{matrix} \frac{x}{2} = z \to x = 2z \\ dx = 2dz \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_0^\infty (2z)^{\frac{k}{2}-1} e^{-z} 2dz = 2^{\frac{k}{2}} \int\limits_0^\infty z^{\frac{k}{2}-1} e^{-z} dz = 2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right).$$

Тоді
$$C = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \qquad (2.121)$$

Отже,
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0. \end{cases} \qquad (2.122)$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_0^x x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx, & x > 0. \end{cases} \qquad (2.123)$$

Числові характеристики

1. $M\left(X\right)=\int\limits_0^{\infty} x\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty} x^{\frac{k}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2}=z\to x=2z;\\ dx=2dz\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty}(2z)^{\frac{k}{2}}e^{-z}2dz=\frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty}z^{\frac{k}{2}}e^{-z}dz=$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=\frac{2\frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=2\frac{k}{2}=k\,;$$

$$M(X)=k. \qquad (2.124)$$

2. $M(X^2)=\int\limits_0^{\infty}x^2 f(x)dx=\int\limits_0^{\infty}x^2\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2}=z\to x=2z;\\ dx=2dz\end{array}\right|=$$

$$=\frac{4\Gamma\left(\frac{k}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=\frac{4\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}=k(k+2)\,;$$

$$M(X^2)=k(k+2)\,;$$

3. $D(X)=M(X^2)-M^2(X)=k(k+2)-k^2=k^2+2k-k^2=2k\,;$

$$D(X)=2k. \qquad (2.125)$$

4. $\sigma(X)=\sqrt{2k}\,. \qquad (2.126)$

Приклад. Кожна з 10 незалежних випадкових величин x_i має закон розподілу *N* (0; 1). Записати вирази для *f* (*x*), *F*(*x*) і обчислити *M* (*X*), *D* (*X*), σ (*X*).

Розв'язання. Використовуючи (2.125),(2.126), дістаємо:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^5\Gamma(5)} x^4 e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{32\cdot 4!} x^4 e^{-\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{32\cdot 24} x^4 e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{768} x^4 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Таким чином,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{768} x^4 e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0; \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{768} \int\limits_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x}{2}} dx, & x > 0; \end{cases}$$

$$M(X) = k = 10;$$

$$D(X) = 2k = 20;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{2k} = \sqrt{20} \approx 4{,}47.$$

Розподіл Стьюдента

Незалежні випадкові величини *Y* і *X* мають закони розподілу:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad -\infty < y < \infty;$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{k-1} e^{-\frac{kx^2}{2}}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти *f* (*z*), якщо $Z = \frac{Y}{X}$. Для зручності подальших перетворень запишемо *f* (*x*) у вигляді

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{\sqrt{2k}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\left(\dfrac{k}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

Дістаємо:

$$f(z)=\int_0^\infty f(x)f(zx)x\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2k}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}e^{-\frac{x^2z^2}{2}}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{\pi}}\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}\int_0^\infty x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}(k+z^2)}x\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{2}(k+z^2)=t\to x=\left(\dfrac{2t}{k+z^2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ x\,dx=\dfrac{dt}{k+z^2}\end{array}\right|=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{\pi}}\,\frac{(k)^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\,\frac{1}{(k)^{\frac{k+1}{2}}\left(1+\dfrac{z^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}\int_0^\infty t^{\frac{k+1}{2}-1}e^{-t}dt=$$

$$=\sqrt{\frac{k}{\pi}}\;\frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{k\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

Отже, якщо Y має розподіл $N(0,\ 1)$, а випадкова величина $X-\frac{\chi}{\sqrt{k}}$, то випадкова величина $Z=\dfrac{Y}{X}$ характеризуватиметься розподілом Стьюдента зі щільністю ймовірностей

$$f(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty<z<\infty. \qquad (2.127)$$

Тоді функція розподілу ймовірностей

$$F(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{z}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz\,. \qquad (2.128)$$

Числові характеристики розподілу Стьюдента

1. $$M(Z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\,f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=0.$$

Оскільки підінтегральна функція є непарною, а межі інтегрування симетричні відносно нуля:

$$.M(Z)=0 \qquad (2.129)$$

2. $$M(Z^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2f(z)dz=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dz=$$

$$=\left| \begin{array}{l} z=\left(\frac{kt}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}},\ dz=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{kt}}\ \ \frac{kdt}{(1-t)^{2}} \\ 0<z<\infty\ \ \to 0<t<1 \end{array}\right| =$$

$$=2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{0}^{1}\frac{kt}{1-t}\left(1+\frac{1}{k}\frac{kt}{1-t}\right)^{-\frac{k+1}{2}}\ \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{kt}}\frac{kdt}{(1-t)^{2}}=$$

$$=2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{k\sqrt{kt}}{(1-t)^{\frac{5}{2}}}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{-\frac{k+1}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{kt}}\frac{kdt}{\sqrt{t}}=2\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k\sqrt{k}}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\frac{1}{2}\int_{0}^{1}t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{k}{2}-2}dt=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}2\frac{1}{2}\int_{0}^{1}t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\left(\frac{k}{2}-1\right)-1}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{0}^{1}t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\left(\frac{k}{2}-1\right)-1}dt=$$

$$=\left| \begin{array}{l} \text{Зі співвідношення } \int_{0}^{1}t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\left(\frac{k}{2}-1\right)-1}dt=B\left(\frac{3}{2};\frac{k}{2}-1\right)\text{ і згідно з} \\ \text{властивістю бета-функції } B(p;q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ \text{ дістаємо} \end{array}\right| =$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}B\left(\frac{3}{2};\frac{k}{2}-1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{k}{2}-1\right)}=$$

$$=\frac{k}{\sqrt{\pi}}\ \frac{\Gamma\cancel{\left(\frac{k+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)}{\Gamma\cancel{\left(\frac{k+1}{2}\right)}}=$$

$$=\left| \begin{array}{l} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}; \\ \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)=\Gamma\left(\left(\frac{k}{2}-1\right)+1\right)=\left(\frac{k}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right) \end{array}\right| =$$

$$=\frac{k}{\sqrt{\pi}}\;\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)}{\left(\frac{k}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-1\right)}=\frac{\frac{k}{2}}{\frac{k-2}{2}}=\frac{k}{k-2}.$$

3. $D(Z)=\dfrac{k}{k-2}.$ (2.130)

4. $\sigma(Z)=\sqrt{\dfrac{k}{k-2}}.$ (2.131)

Приклад. Випадкова величина X має розподіл Стьюдента із $k=7$ ступенями свободи. Записати вираз для $f(x)$, $F(x)$ і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. За заданим числом ступеней свободи $k=7$ обчислимо гамма-функції:

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)=\Gamma(4)=3!=6;$$

$$f(x)=\frac{6}{\sqrt{7\pi}\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{x^2}{7}\right)^{-4}=\frac{48}{\sqrt{7}\cdot 15\pi}\left(1+\frac{x^2}{7}\right)^{-4},\quad -\infty<x<\infty;$$

$$F(x)=\frac{48}{\sqrt{7}\cdot 15\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{7}\right)^{-4}dx;$$

$$M(X)=0;$$

$$D(X)=\frac{k}{k-2}=\frac{7}{7-2}=\frac{7}{5}=1{,}4;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{1{,}4.}\approx 1{,}18.$$

Рівномірний закон розподілу

Неперервна випадкова величина X, що визначена на проміжку $[a, b]$, має рівномірний закон розподілу, якщо

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\int_a^x \frac{1}{b-a}dx=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Числові характеристики

1. $M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\dfrac{b+a}{2}$;

$M(X)=\dfrac{b+a}{2}$.

2. $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$,

де $M(X^2)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx=\dfrac{b^2+ab+a^2}{3}$.

Тоді

$$D(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(b+a)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

3. $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$;

4. $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$;

5. $\mathrm{Me}=M(X)=\dfrac{b+a}{2}$.

Приклад. Випадкова величина X має розподіл Фішера із $k_1=6$, $k_2=8$ ступенями свободи. Записати вирази для $f(x)$, $F(x)$ і обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Обчислимо значення гамма-функцій:

$$\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{6}{2}\right)=\Gamma(3)=2!=2;$$

$$\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{8}{2}\right)=\Gamma(4)=3!=6;$$

$$\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{6+8}{2}\right)=\Gamma(7)=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720.$$

Тоді

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{2560}{9}x^3\left(1+\frac{4}{3}x\right)^{-7}, & x>0.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{2560}{9}\int\limits_0^x x^3\left(1+\frac{4}{3}x\right)^{-7}dx, & x>0.\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{k_1}{k_1-2}=\frac{6}{6-2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

$$D(X)=\frac{2k_1^2(k_2+k_1-2)}{k_2(k_1-2)^2(k_1-4)}=\frac{2\cdot36(6+8-2)}{8(6-2)^2(6-4)}=\frac{72\cdot12}{8\cdot16\cdot2}=3{,}375.$$

$\sigma(X)=\sqrt{3{,}375}=1{,}84.$

Теоретичні запитання до розділу

1. Означення дискретної і неперервної випадкової величини.
2. Закон розподілу випадкової величини.
3. Що називається функцією розподілу випадкової величини?
4. Означення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини X.
5. Якщо X ∈ [a; b], то чому дорівнює $\int\limits_a^x f(x)dx$?
6. Властивості F(x).
7. Що називається математичним сподіванням випадкової величини?
8. Що характеризує математичне сподівання випадкової величини?
9. Чому дорівнює M (X – M (X))?
10. Що називають дисперсією випадкової величини?
11. При яких значенях сталої С виконуються співвідношення: D (CX) = D (X); D (CX) > D (X), D (CX) < D (X)?
12. Означення щільності ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин.

13. Формула для D (X) випадкової величини X, що утворює систему (X, Y), має вигляд… Основні числові характеристики системи n випадкових величин.

14. Основні числові характеристики функції неперервного випадкового аргументу.

15. Числові характеристики функції дискретного випадкового аргументу.

РОЗДІЛ 3. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

3.1. Закон великих чисел

Математичні закони теорії ймовірностей одержані внаслідок формалізації реальних статистичних закономірностей, що притаманні масовим випадковим подіям. Під час спостереження масових однорідних випадкових подій у них виявляються певні закономірності типу стабільності. Так, у разі великого числа проведених експериментів відносна частота події $W(A)$ виявляє стабільність і за ймовірністю наближається до ймовірності $P(A)$; середнє арифметичне для випадкової величини наближається за ймовірністю до її математичного сподівання.

Усі ці явища об'єднують під спільною назвою закону великих чисел, який можна загалом сформулювати так: у разі великого числа експериментів, що здійснюються для вивчення певної випадкової події або випадкової величини, середній їх результат практично перестає бути випадковим і може передбачатися з великою надійністю.

Закон великих чисел об'єднує кілька теорем, у кожній з яких за певних умов виявляється факт наближення середніх характеристик під час проведення великої кількості експериментів до певних невипадкових, сталих величин.

Для доведення цих теорем використовується нерівність Чебишова.

3.2. Нерівність Чебишова

Якщо випадкова величина X має обмежені $M(X)$; $D(X)$, то ймовірність відхилення цієї величини від свого математичного сподівання, взятого за абсолютною величиною ε (ε > 0), не перевищуватиме величини: $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Це можна записати так:

$$P\left(|X - M(X)| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (3.1)$$

Доведення нерівності. Нехай випадкова величина X є неперервна, закон розподілу ймовірностей якої $f(x)$; $M(X)$, $D(X)$ — обмежені величини. Випадкові події $|X - M(X)| < \varepsilon$ і $|X - M(X)| > \varepsilon$ будуть протилежними (рис. 3.1).

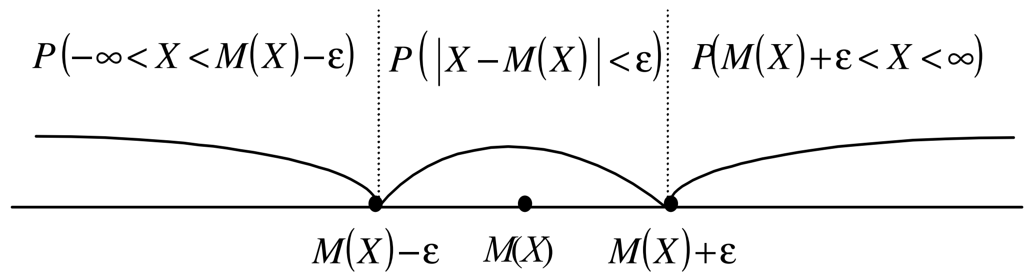


Рис. 3.1

А тому

$$P\left(\left|X-M(x)\right|<\varepsilon\right)+P\left(\left|X-M(x)\right|>\varepsilon\right)=1\rightarrow \qquad (3.2)$$

$$\rightarrow P\left(\left|X-M(x)\right|<\varepsilon\right)=1-P\left(\left|X-M(x)\right|\geq\varepsilon\right). \qquad (а)$$

Отже, знаючи оцінку для $P(\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon)$, ми згідно з (а), знайдемо оцінку і для $P(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon)$.

Розглянемо нерівність:

$$\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon \ \rightarrow \left|X-M(X)\right|^2\geq\varepsilon^2 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \frac{1}{\varepsilon^2}\left|X-M(X)\right|^2\geq 1. \qquad (б)$$

Помноживши ліву і праву частини нерівності (б) на $f(x)$ ($f(x)>0$), дістанемо:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left|X-M(X)\right|^2 f(x)\geq f(x). \qquad (в)$$

Зінтегруємо праву і ліву частини нерівності (в) на проміжках $[-\infty;\ M(X)-\varepsilon]\cup[(X)+\varepsilon;\infty]$:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{M(X)-\varepsilon}\left(X-M(X)\right)^2 f(x)dx+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{M(X)+\varepsilon}^{\infty}\left(X-M(X)\right)^2 f(x)dx\geq$$

$$\geq\int_{-\infty}^{M(X)-\varepsilon}f(x)dx+\int_{M(X)+\varepsilon}^{\infty}f(x)dx \qquad (г)$$

або $$\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon}\left(X-M(X)\right)^2 f(x)dx\geq\int\limits_{\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon}f(x)dx\,.(д)$$

Згідно з рис. 3.1 запишемо:

$$\int\limits_{\left|X-M(X)\right|\geq\varepsilon}f(x)\,dx=P(\left|X-M(X)\right|>\infty,$$

оскільки

$$P(|X - M(X)| > \varepsilon) = P(-\infty < X < M(X) - \varepsilon) + P(M(X) + \varepsilon < X < \infty)$$

З огляду на те, що $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (X - M(X))^2 f(x)dx,$ маємо:

$$\int\limits_{|X - M(X)| \geq \varepsilon} (X - M(X))^2 f(x)dx \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} (X - M(X))^2 f(x)dx \to$$

$$\to \int\limits_{|X - M(X)| \geq \varepsilon} (X - M(X))^2 f(x)dx \leq D(X).$$

Зрештою, нерівність (д) набере такого вигляду:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} D(X) \geq P(|X - M(X)| \geq \varepsilon). \qquad \text{(е)}$$

Отже,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} D(X) \geq P(|X - M(X)| \geq \varepsilon). \qquad (3.3)$$

Підставивши оцінку для $P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$ (3.3) в (3.2), дістанемо:

$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$, що й потрібно було довести.

Приклад 1. Випадкова величина X має закон розподілу N (– 2; 4).

Скориставшись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність $|x - a| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 4\sigma$.

Розв’язання.

Оскільки $a = -2$, $\sigma_x = 4$, $D(X) = 16$, то згідно з (3.1) маємо:

$$P(|x + 2| < 16) \geq 1 - \frac{16}{256} = 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375.$$

Приклад 2. Ймовірність появи випадкової події в кожній із 400 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,9. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність події $|X - M(X)| < \varepsilon$, якщо $\varepsilon = 10$.

Розв’язання: За умовою задачі маємо: $n = 400$, $p = 0{,}9$; $q = 0{,}1$; $\varepsilon = 10$.

$M(X) = np = 400 \cdot 0{,}9 = 360$; $D(X) = npq = 360 \cdot 0{,}1 = 36$.

$$P(|x - 360| < 10) \geq 1 - \frac{36}{100} = 0{,}64.$$

3.3. Теорема Чебишова

Нехай задано n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots X_n$, які мають обмежені $M(X_i)$ ($i = 1,\dots, n$) і дисперсії яких $D(X_i)$ не перевищують деякої сталої $C\,(C > 0)$, тобто $D(X_i) \le C$. Тоді для будь-якого малого додатного числа ε ймовірність відхилення середнього арифметичного цих величин

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum\limits_1^n x_i}{n}$$

від середнього арифметичного їх математичних сподівань

$$M(\overline{X}) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} = \frac{\sum\limits_1^n M(X_i)}{n},$$

взятого за абсолютним значенням на величину ε, прямуватиме до одиниці зі збільшенням числа n:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

або

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^n M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (3.4)$$

Доведення. Оскільки X_i — випадкові величини, то і $\overline{X}$ буде випадковою. Числові характеристики для $\overline{X}$:

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n M(X_i);$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i)$$

Застосуємо нерівність Чебишова для випадкової величини $\overline{X}$:

$$P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2} \text{ або}$$

$$P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}{(n\varepsilon)^2}.$$

Ураховуючи умову $D(X_i) \leq C$, записуємо:

$$P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{nc}{(n\varepsilon)^2} \rightarrow P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

Тоді при $n \to \infty$ дістаємо

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}\right) = 1.$$

Оскільки ймовірність не може бути більшою за одиницю, а нерівність є не строгою, одержимо

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) = 1$$

або

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

що й потрібно було довести.

Приклад 1. Дисперсія кожної із 4500 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу ймовірностей, дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань, взяте за абсолютною величиною, не перевищить 0,4.

Розв'язання.

Використовуючи нерівність Чебишова для теореми Чебишова, одержимо:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{4500} X_i}{4500} - \frac{\sum_{i=1}^{4500} M(X_i)}{4500}\right| < 0{,}4\right) \geq 1 - \frac{5}{4500 \cdot 0{,}4} = 0{,}003.$$

Приклад 2. Унаслідок медичного огляду 900 допризовників було виявлено, що середня маса кожного з них на 1,2 кг більша від середньої маси попереднього призову. Чи можна це констатувати як випадковість, якщо середнє відхилення маси допризовника дорівнює 8 кг?

Розв'язання.

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1{,}2\right) \geq 1 - \frac{8}{900\,(1{,}2)^2} = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9932;$$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1{,}2\right) \approx 0{,}0068.$$

Оскільки ця ймовірність дуже мала, відхилення маси можна вважати невипадковим.

3.4. Теорема Бернуллі

Якщо ймовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p, то при необмеженому збільшенні числа експериментів $n \to \infty$ ймовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від ймовірності p, взятої за абсолютною величиною на ε (ε > 0) прямуватиме до одиниці зі зростанням n, що можна записати так:

$$\lim_{n \to \infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1. \qquad (3.5)$$

Доведення. Оскільки $W(A) = m / n$, де m — число експериментів — яких випадкова подія A спостерігалась, n — загальне число проведених експериментів, то ми можемо записати, що $m = \sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i — дискретна випадкова величина, яка може набувати лише одного з можливих значень: 0 або 1. У табличній формі закон дискретної випадкової величини X_i можна записати так:

x_i	0	1
p_i	q	p

Числові характеристики X_i:

$M(X_i) = 0\ q + 1\ p = p$;
$M(X^2{}_i) = p$;
$D(X_i) = M(X^2{}_i) - M^2(X_i) = p - p^2 = p(1 - p) = pq$.

Нерівність Чебишова для теореми Бернуллі матиме такий вигляд:

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{n^2\varepsilon^2} \to P(|W(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (3.6)$$

Отже, доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1.$

Приклад 1. Ймовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі $W(A)$ від ймовірності 0,95 не більше ніж на величину 0,02.

Розв'язання. За умовою задачі: $p = 0{,}95$; $q = 0{,}05$; $n = 400$. На підставі (3.6) дістаємо:

$$P(|W(A) - 0{,}95| < 0{,}02) \geq 1 - \frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{400 \cdot (0{,}02)^2} = 1 - 0{,}2969 = 0{,}7031.$$

Приклад 2. Скільки необхідно провести експериментів n, щоб ймовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від ймовірності $p = 0{,}85$, взяте за абсолютною величиною, на $\varepsilon = 0{,}001$, була б не меншою за 0,99.

Розв'язання. Із умови задачі маємо $p = 0{,}85$; $q = 0{,}15$; $\varepsilon = 0{,}001$,

$$P(|W(A) - 0{,}85| < 0{,}001) = 0{,}99.$$

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0{,}99 \to n = \frac{pq}{0{,}01\,\varepsilon^2} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}15}{0{,}01 \cdot 0{,}000001} = 12450000.$$

3.5. Центральна гранична теорема теорії ймовірностей (теорема Ляпунова)

Характеристичні функції та їх властивості

Для доведення центральної граничної теореми використовуються характеристичні функції.

Розглядається випадкова величина $Y = e^{itX}$, де X — дійсна випадкова величина, закон розподілу якої відомий, t – параметр, а $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Така випадкова величина називається комплексною.

Характеристичною функцією називають математичне сподівання від e^{itX}:

$$\alpha_X(t) = M(Y) = M\left(e^{itX}\right). \qquad (3.7)$$

Якщо X є дискретною, то

$$\alpha_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{itx_i} p_i\,. \qquad (3.8)$$

Якщо X є неперервною, то

$$\alpha_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx. \qquad (3.9)$$

Основні властивості $\alpha_x(t)$:

1. $\alpha_x(0) = 1$, оскільки в цьому разі ($t = 0$), то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

2. Якщо взяти похідну від $\alpha_x(t)$ по t, то $\alpha'_X(t) = i\int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} f(x)dx.$

Прирівнявши параметр $t = 0$, одержимо

$$\alpha'_X(0) = i\int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} f(x)dx = iM(X) \to$$

$$\to M(X) = \frac{1}{i}\alpha'_X(0) = -i\alpha'_X(0), \qquad (3.10)$$

оскільки $i^2 = -1$.

3. Якщо взяти другу похідну від $\alpha x(t)$ за параметром і при цьому $t = 0$, то одержимо:

$$\alpha''_X(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx} f(x)dx \Bigg|_{x=0} =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = -M(X^2) \to M(X^2) = -\alpha''_X(0)$$

Отже,

$$D(X) = -\alpha''_X(0) - \left(\alpha'_X(0)\right)^2. \qquad (3.11)$$

4. Якщо випадкові величини Y і X пов'язані співвідношенням $Y = ax + b$, де a і b є сталими, то їх характеристичні функції пов'язані між собою так:

$$\alpha_Y(t) = M\left(e^{itY}\right) = M\left(e^{it(ax+b)}\right) = e^{itb} M\left(e^{itax}\right) = e^{itb}\alpha_X(at).$$

Отже,

$$\alpha_Y(t) = e^{itb}\alpha_X(at). \qquad (3.12)$$

5. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \dots X_n$ є незалежними і відомі їх характеристичні функції $\alpha_{X_i}(t)$, то для випадкової величини $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ характеристична функція:

$$\alpha_X(t) = M\left(e^{itX}\right) = M\left(e^{\left(it\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}\right) = \prod_{i=1}^{n} M\left(e^{itx_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{X_i}(t). \quad (3.13)$$

6. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \dots X_n$ є незалежними, кожна із них має один і той самий закон розподілу, то характеристична функція для $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\alpha_Y(t) = \alpha_X^n(t) \qquad (3.14)$$

Приклад. Неперервна випадкова величина X має закон розподілу N (0; 1). Знайти характеристичну функцію для цього закону.

Розв'язання. Оскільки $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty < x < \infty$, то

$$\alpha_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

через те, що $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$, де $z = x - it$, $dx = dz$.

Отже, для нормованого нормального закону розподілу випадкової величини X характеристична функція

$$\alpha_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad (3.15)$$

Центральна гранична теорема

Теорема. Нехай задано n незалежних випадкових величин X_1, $X_2, \dots X_n$, кожна із яких має один і той самий закон розподілу ймовірностей із $M(X_i) = 0$, $\sigma(X) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3|$, тоді зі зростанням числа n закон розподілу $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ наближатиметься до нормального.

Доведення. Оскільки випадкові величини X_i мають один і той самий закон розподілу, то кожна із них має одну і ту ж характеристичну функцію $\alpha_x(t)$. Згідно з (3.14) маємо:

$$\alpha_Y(t) = \alpha_X^n(t).$$

Розвинувши $\alpha_Y(t)$ в ряд Маклорена в околі точки $t = 0$ і обмежившись при цьому трьома членами й залишковим членом в формі Лагранжа, запишемо:

$$\alpha_Y(t) = \left[\alpha_X(0) + \frac{\alpha'_X(0)}{1!}t + \frac{\alpha''_X(0)}{2!}t^2 + R_3(\theta t)\right]^n, \qquad (3.16)$$

де $R_3(\theta t) = \dfrac{\alpha'''_X(\theta t)}{3!}t^2, \quad (0 < \theta < 1).$

Із властивостей характеристичної функції випливає:

$\alpha_x(0) = 1$; $\alpha'_x(0) = iM(X) = 0$, оскільки $M(X) = 0$;

$\alpha''_x(0) = -M(X^2) = -\sigma^2$.

Тоді вираз (3.16) набирає такого вигляду:

$$\alpha_Y(t) = \left[1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + R_3(\theta t)\right]^n. \qquad (3.17)$$

Оскільки $\alpha'''_X(\theta t) = -i\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{i\theta t x} f(x)dx$ і при цьому

$$\left|\alpha'''_X(\theta t)\right| = \left|-i\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{i\theta t x} f(x)dx\right| < 2\,|\nu_3|.$$

Це випливає з того, що

$$e^{it\theta x} = \cos\theta t x + i\sin\theta t x \rightarrow \left|e^{it\theta x}\right| = \left|\cos\theta t x + i\sin\theta t x\right| < 2.$$

Уведемо випадкову величину $Z = \dfrac{Y}{\sigma\sqrt{n}}$.

Маємо: $D(Y)=D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=n\sigma^2.$

Використовуючи властивість характеристичної функції (3.12), дістаємо:

$$\alpha_Z(t)=\alpha_Y\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\left[1-\frac{t^2}{2n}+R_3(\theta t)\right]^n, \qquad (3.18)$$

де

$$R_3(\theta t)<\frac{\nu_3}{3}\,\frac{t^3}{\sigma^3\sqrt{n^3}}. \qquad (3.19)$$

Прологарифмуємо вираз (3.18):

$$\ln\alpha_Z(t)=n\ln\left[1-\frac{t^2}{2n}+R_3(\theta t)\right]. \qquad (3.20)$$

Використовуючи в (3.18) при $n\to\infty$ еквівалентність нескінченно малих $(\ln(1+\alpha)\approx\alpha)$, одержимо:

$$\ln\alpha_Z(t)=n\left(-\frac{t^2}{2n}+R_3(\theta t)\right)\to\ln\alpha_Z(t)=-\frac{t^2}{2}+nR_3(\theta t)\to$$

$$\to\lim_{n\to\infty}\ln\alpha_Z(t)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{t^2}{2}+nR_3(\theta t)\right)\to\lim_{n\to\infty}\ln\alpha_Z(t)=$$

$$=-\frac{t^2}{2}+\lim_{n\to\infty}nR_3(\theta t).$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}nR_3(\theta t)<\lim_{n\to\infty}n\,\frac{\nu_3|t_3|}{\sigma^3 n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_3|t_3|}{\sigma^3\sqrt{n}}=0,$ то

$$\lim_{n\to\infty}\ln\alpha_Z(t)=-\frac{t^2}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$\alpha_Z(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Таким чином, доведено, що характеристична функція випадкової величини Z при $n\to\infty$ дорівнює характеристичній функції нормованого нормального закону, а звідси випливає, що Z і пов'язана лінійною залежністю величина Y наближатимуться до нормального закону розподілу.

Приклад. Кожна із 100 незалежних випадкових величин X_i має рівномірний закон розподілу на проміжку [0; 0,12]. Записати наближено закон розподілу для випадкової величини $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Розв'язання.

Знаходимо числові характеристики для X_i: $M(X_i) = 0{,}06$; $D(X) = 0{,}1$.

Тоді

$$M(Y) = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 100 \cdot 0{,}06 = 6.$$

$$D(Y) = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = 100 \cdot 0{,}1 = 10.$$

На підставі центральної граничної теореми маємо

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} e^{-\frac{(y-6)^2}{20}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Центральна гранична теорема була вперше використана для доведення інтегральної теореми Муавра—Лапласа.

3.6. Теорема Муавра—Лапласа

У загальному випадку випадкові величини $X_1, X_2, \dots X_n$, що розглядаються в центральній граничній теоремі, можуть мати довільні закони розподілу.

Якщо X_i є дискретними і мають лише два значення: $P(X_i = 0) = q$, $P(X_i = 1) = p$, то приходимо до теореми Муавра—Лапласа, яка є найпростішим випадком центральної граничної теореми.

Якщо здійснюється n незалежних експериментів, у кожному з яких ймовірність появи випадкової події A є величиною сталою і дорівнює p, то для інтервалу [α; β) справедлива рівність:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (3.21)$$

Доведення. Нехай проводиться n незалежних експериментів, у кожному з яких випадкова подія A може здійснитися зі сталою ймовірністю p. Тоді $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ — поява випадкової події в n експериментах є випадковою величиною із числовими характеристиками:

$M(Y) = np,\ D(Y) = npq,\ \sigma(Y) = \sqrt{npq}$.

На підставі центральної граничної теореми розподіл випадкової величини Y зі зростанням n наближатиметься до нормального. Тому для обчислення ймовірності події $\alpha < Y < \beta$ використовується формула (261):

$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)$, що і треба було довести.

Приклад. Завод виготовляє 80% виробів першого сорту. Навмання вибирають 800 виробів. Яка ймовірність того, що число виробів першого сорту виявиться в межах від 600 до 680 штук?

Розв'язання. Із умови задачі маємо $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $n = 800$; $\alpha = 700$, $\beta = 620$.

Обчислимо: $np = 800 \cdot 0{,}8 = 640$; $\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 11{,}3.$

Згідно з (259) дістанемо:

$$P(600 < y < 680) = \Phi\left(\frac{680 - 640}{11{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{600 - 640}{11{,}3}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{40}{11{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{-40}{11{,}3}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{11{,}3}\right) = 2\Phi\ (3{,}5) = 2 \cdot 0{,}4499841 = 0{,}999682.$$

Теоретичні запитання до розділу

1. Як сформулювати в загальному вигляді закон великих чисел?
2. Сформулювати нерівність Чебишова.
3. Довести, що $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.
4. Де використовується нерівність Чебишова?
5. Сформулювати теорему Чебишова.
6. Сформулювати теорему Бернуллі.
7. Записати нерівність Чебишова для теореми Бернуллі.
8. Чому дорівнює $\alpha Y(t)$, якщо $Y = ax + b$?
9. Сформулювати центральну граничну теорему.
10. Використання центральної граничної теореми для доведення інтегральної теореми Муавра—Лапласа.

РОЗДІЛ 4. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

4.1. Основні відомості математичної статистики

Математична статистика – розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки і використання статистичних даних для наукових і практичних висновків. При цьому статистичними даними називаються дані про число об'єктів в якій-небудь більш-менш обширній сукупності, які мають ті або інші ознаки.

З’ясування закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, здійснюється за допомогою методів теорії ймовірностей. Аніліз статистичних даних може здійснюватися з метою:

а) оцінки невідомої ймовірності події; оцінки невідомої функції розподілу; оцінки невідомих параметрів розподілу, загальний вигляд якого відомий; оцінки залежності випадкової величини від одної або кількох випадкових величин;

б) перевірки статистичних гіпотез про вигляд невідомого розподілу або про величину параметрів розподілу, вигляд якого відомий.

Предмет і метод математичної статистики. Статистичний опис сукупності об'єктів займає проміжне положення між індивідуальним описом кожного з об'єктів сукупності, з одного боку, і описом сукупності а її загальними властивостями, що зовсім не потребують її розчленовування на окремі об'єкти, — з іншого. В порівнянні з першим способом статистичні дані завжди більшою чи меншою мірою знеособлені і мають лише обмежену цінність у випадках, коли важливі саме індивідуальні дані. З іншого боку, в порівнянні з даними про спостережувані ззовні сумарні властивості сукупності статистичні дані дозволяють глибше проникнути в сутність справи.

Метод дослідження, що спирається на розгляд статистичних даних про ті або інші сукупності об'єктів, називається статистичним. Статистичний метод застосовується в самих різних областях знання. Проте риси статистичного методу в застосуванні до об'єктів різної природи такі своєрідні, що було б безглуздо об'єднувати, наприклад, соціально-економічну, фізичну статистику і тому подібне в одну науку.

Загальні риси статистичного методу в різних областях знання зводяться до підрахунку числа об'єктів, що входять в ті або інші групи, розгляду розподілу кількостей, ознак, застосуванню вибіркового методу (у випадках, коли детальне дослідження всіх об'єктів обширної сукупності складне), використання теорії вірогідності при оцінці достатності числа спостережень для тих або інших висновків і тому подібне. Ця формальна математична сторона статистичних методів дослідження, байдужа до специфічної природи об'єктів, що вивчаються, і складає предмет математичної статистики.

*Зв'язок математичної статистики з теорією ймовірностей***.** Зв'язок математичної статистики з теорією ймовірностей має в різних випадках різний характер. Теорія ймовірностей вивчає не будь-які явища, а явища випадкові і саме «ймовірнісні випадкові», тобто такі, для яких має сенс говорити про відповідні ним розподіли вірогідності. Проте, теорія вірогідності відіграє певну роль і при статистичному вивченні масових явищ будь-якої природи, які можуть не відноситися до категорії ймовірнісних випадкових. Це здійснюється через засновані на теорії ймовірностей теорію вибіркового методу і теорію помилок вимірювань. У цих випадках ймовірнісним закономірностям підпорядковані не самі явища, що вивчаються, а прийоми їх дослідження.

Важливішу роль відіграє теорія ймовірностей і при статистичному дослідженні ймовірнісних явищ. Тут повною мірою знаходять застосування такі засновані на теорії вірогідності розділи математичної статистики, як теорія статистичної перевірки ймовірнісних гіпотез, теорія статистичної оцінки розподілів вірогідності і вхідних в них параметрів і так далі. Область же застосування цих глибших статистичних методів значно вужча, оскільки тут потрібно, щоб самі явища, що вивчаються, були підпорядковані достатньо певним ймовірнісним закономірностям. Проте застосування тієї ж теорії до аналізу економічних тимчасових рядів може призвести до грубих помилок з огляду на те, що входить у визначення стаціонарного процесу допущення наявності незмінних розподілів вірогідності, що зберігаються протягом тривалого часу, в цьому випадку, як правило, абсолютно неприйнятно.

4.2.Генеральна сукупність. Вибірка

Вихідними поняттями математичної статистики є поняття генеральної сукупності і вибірки. Під генеральною сукупністю розуміють множину всіх реально існуючих або навіть тільки умовно можливих однорідних об'єктів, які вивчають під кутом зору їхнього розподілу за деякою ознакою. Наприклад, це можуть бути множини людей за віком, множини тварин певного виду за вагою, множини орних земель за врожайністю, множини виробів певного найменування за якістю, множини акціонерних банків України за прибутком і т. д.

Вибірковою сукупністю (або вибіркою) називається сукупність випадково відібраних однорідних об'єктів.

Генеральною сукупністю називається сукупність всіх однорідних об'єктів, з яких проводиться вибірка.

Об'ємом сукупності (вибірковою або генеральною) називається число об'єктів цієї сукупності.

Вибірка називається *репрезентативною* (представницькою), якщо вона досить добре представляє кількісні співвідношення генеральної сукупності.

Оскільки практично будь-яка ознака генеральної сукупності допускає кількісну оцінку, то замість того, щоб говорити про розподіл одиниць сукупності за ознакою, можна говорити про розподіл деякої випадкової величини X. Експеримент, з яким пов'язана випадкова величина X, полягає у виборі одного представника даної сукупності, а значення x, якого набуває X, є значенням ознаки для цього представника.

Отже, з теоретико-ймовірнісного погляду генеральна сукупність – це випадкова величина $X(\omega)$, задана на просторі елементарних подій Ω. Зрозуміло, що повний опис закону розподілу випадкової величини X можна отримати, з'ясувавши значення ознаки для всіх без винятку представників даної сукупності. В окремих ситуаціях так і роблять: наприклад, дані про розподіл жителів тієї чи іншої країни щодо статі, віку, освіти і т. д. отримують у результаті загальних переписів населення, які проводяться один раз на кілька десятиліть. Однак такий спосіб суцільного обстеження всієї досліджуваної сукупності пов'язаний із низкою труднощів. Одна з них – це великий обсяг сукупності. У деяких випадках є ще й трудність принципового характеру, яка полягає в тому, що сукупність, яку ми розглядаємо, не існує в готовому вигляді, а є лише визначеною в уяві. Наприклад, якщо нас цікавить розподіл похибки, яку допускає вимірювальний прилад, то досліджувана сукупність становитиме перелік усіх можливих вимірювань, які можна здійснити за допомогою даного приладу. Зрозуміло, що обстежити всі елементи такої сукупності неможливо. В такому випадку кажуть, що генеральна сукупність є нескінченною.

Щоб подолати або обійти вказані труднощі, найчастіше чинять так: обстеження всієї сукупності замінюють обстеженням невеликої (до того ж вибраної навмання) її частини. Таку частину генеральної сукупності називають вибіркою.

Із теоретико-ймовірнісного погляду, вибірка з даної генеральної сукупності – це результати обмеженого ряду спостережень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ випадкової величини X.

Число n, яке відповідає кількості спостережень, що утворюють вибірку, називають обсягом (або об'ємом) вибірки, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – елементами або варіантами вибірки.

У статистиці інтерпретація вибірки та її окремих елементів допускає, залежно від контексту, два різних варіанти.

У першому (практичному) варіанті інтерпретації вибірки під $x_1, x_2, \ldots, x_n$ розуміють фактично спостережувані в даному конкретному пкратному експерименті значення досліджуваної випадкової величини X, тобто конкретні числа.

Згідно з другим (теоретичним) варіантом інтерпретації під вибіркою $x_1, x_2, \ldots, x_n$ розуміють послідовність випадкових величин, i-тий член якої i х лише означає результат спостереження, який ми могли б отримати на i-му кроці n-кратного експерименту, пов'язаного зі спостереженням досліджуваної випадкової величини X.

Якщо умови експерименту не змінюються від спостереження до спостереження і якщо п-кратний експеримент організований у такий спосіб, що результати спостереження на кожному (i-му) кроці ніяк не залежать від попередніх і не впливають на майбутні результати спостережень, то очевидно, що ймовірнісні закономірності поведінки i-го спостереження теоретичної вибірки залишаються одними і тими ж для всіх $i=1, 2,\ldots,n$ і цілковито визначаються законом розподілу ймовірностей спостережуваної випадкової величини, тобто

$$P\{x_i < x\}=P\{X<x\}=F(x)$$

При цьому із взаємної незалежності спостережень вибірки випливає незалежність випадкових величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$.Якщо в межах теоретичного варіанту інтерпретації вибірки ряд спостережень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ утворює послідовність незалежних і однаково розподілених випадкових величин, то вибірка називається випадковою. Надалі, використовуючи теоретичний варіант інтерпретації вибірки, завжди будемо вважати, що ця вибірка є випадковою.

4.3. Обробка та графічне подання вибіркових даних. Числові характеристики ввибіркової сукупності

Розмістивши результати вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в порядку зростання і записавши частоти n_i, з якими зустрічаються ці значення, дістанемо ***варіаційний***, або ***статистичний***, ряд:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоти	n_1	n_2	…	n_k

На підставі такого ряду можна побудувати статистичну функцію розподілу $F_n^*(x)=\sum_{x_i<X}\frac{n(x_i)}{n}$. Якщо $n\to\infty$, то статистична функція розподілу збігається до теоретичної функції розподілу.

Статистичний ряд графічно подається ***полігоном розподілу***. Щоб побудувати його, на осі абсцис відкладають значення реалізацій, а на осі ординат — відповідні їм частоти (відносні частоти). Здобуті точки сполучають відрізками прямих.

У разі, коли X — неперервна величина і обсяг вибірки великий, результати вибірки подають інтервальним рядом. Для цього область реалізацій розбивають на k інтервалів і для кожного інтервалу визначають частоти. Кількість інтервалів $k \le 5\lg n$, а їхню довжину Δx_i найчастіше беруть однаковою. Здобутий ряд геометрично подається гістограмою. Для побудови її на осі абсцис відкладають інтервали, а на них як на основах будують прямокутники, висота яких пропорційна до частоти (відносної частоти) інтервалу. Гістограма дає певне уявлення про графік щільності розподілу.

Для вибіркової сукупності обчислюють числові характеристики — вибіркові випадкові функції: вибіркову середню $\overline{X}$, вибіркову дисперсію S^2, статистичні моменти розподілу тощо. Реалізації цих вибіркових функцій знаходять за формулами, вигляд яких залежить від того, в якій формі подано вибіркові дані. Якщо вибіркові дані не згруповано, то $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. Якщо вибіркові дані зведено у статистичний ряд, то $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 n_i$.

Якщо дані подаються інтервальним рядом, то перехід до статистичного ряду виконують, обчислюючи для кожного інтервалу його середину.

Початкові і центральні статистичні моменти розподілу обчислюють відповідно за такими формулами

$$\nu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \text{ і } \mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Формули, за якими центральні статистичні моменти подаються через початкові, аналогічні тим, які виконуються для теоретичних моментів розподілу.

Крім того, розглядають звичайні і умовні моменти розподілу. Звичайні моменти обчислюють за формулою $h_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - C\right)^r$. У разі подання вибіркових даних інтервальним рядом з однаковими довжинами інтервалів обчислення числових характеристик значно спрощується завдяки застосуванню умовних моментів розподілу. Якщо u_i — середини інтервалів і виконано заміну $v_i = \frac{u_i - C}{\Delta x}$ за умови, що C — одне зі значень

u_i, то значення v_i будуть цілими числами. Тоді $h_r^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} v_i^r n_i$ — умовні моменти розподілу. Звичайні моменти розподілу пов'язані з умовними формулою $h_r = (\Delta x)^r h_r^*$. Це дає змогу обчислювати всі числові характеристики з допомогою умовних моментів розподілу: $\bar{x} = C + \Delta x h_1^*$, $s^2 = (\Delta x)^2 \left(h_2^* - \left(h_1^*\right)^2 \right)$ тощо. Дисперсію часто обчислюють за формулою $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

Якщо розглядається вибірка із двовимірної сукупності (X, Y), то за великого її обсягу зручною формою подання даних є кореляційна таблиця. Щоб побудувати її, області реалізацій за обома змінними розбивають на інтервали. В такому разі, як правило, $\Delta x_i = \Delta x$ і $\Delta y_j = \Delta y$. Для перетинів відповідних інтервалів визначають частоти n_{ij}. Коли обчислюють числові характеристики, то кожний інтервал характеризують його серединою. Крім середніх значень і вибіркових дисперсій для складових системи визначають статистичний кореляційний момент $K_{XY}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})n_{ij}$ і вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{xy} = \frac{K_{xy}^*}{s_x \cdot s_y}$. Побудувавши кореляційну таблицю з $\Delta x_i = \Delta x$ і $\Delta y_j = \Delta y$, для обчислення числових характеристик можна використати умовні моменти розподілу. З цією метою виконують заміну змінних $u_i = \frac{x_i - C_1}{\Delta x}$, $v_j = \frac{y_j - C_2}{\Delta y}$ (C_1 і C_2 — відповідно деякі значення x_i і y_j). Числові характеристики вибірки можна знайти за формулами:

$$\bar{x} = C_1 + \Delta x \bar{u},\ s_x^2 = (\Delta x)^2\left(\overline{u^2} - (\bar{u})^2\right) = (\Delta x)^2 s_u^2;$$
$$\bar{y} = C_2 + \Delta y \bar{v},\ s_y^2 = (\Delta y)^2\left(\overline{v^2} - (\bar{v})^2\right) = (\Delta y)^2 s_v^2;$$
$$K_{xy}^* = \Delta x \Delta y\left(\overline{uv} - \bar{u}\bar{v}\right) = \Delta x \Delta y K_{uv}^*;\ r_{xy} = \frac{K_{uv}^*}{s_u s_v}.$$

Значення середніх величин обчислюють за відомими формулами.

Приклад 1. У цеху встановлено 5 верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Здобуто такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0.

Побудувати статистичну функцію розподілу. Знайти $\max\limits_{x} \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, вважаючи, що виконується біноміальний закон розподілу з $p = \frac{1}{3}$. Обчислити $\bar{x}$ і s^2. Порівняти знайдені значення з MX і DX згідно з гіпотезою про закон розподілу, а також знайти m_o, m_e, R.

Розв'язання. На підставі вибіркових даних складемо статистичний ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5
Частоти	5	7	7	4	1	1

Запишемо статистичну функцію розподілу, скориставшись формулою $F_n^*(x) = \sum\limits_{x_i < x} \frac{n(x_i)}{n}$.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{1}{5}, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ \frac{12}{25}, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ \frac{19}{25}, & \text{якщо } 2 < x \le 3; \\ \frac{23}{25}, & \text{якщо } 3 < x \le 4; \\ \frac{24}{25}, & \text{якщо } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Щоб визначити $\max\limits_{x} \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, знайдемо функцію розподілу за біноміальним законом з $n = 5$ і $p = \frac{1}{3}$.

Обчислимо ймовірності: $P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$;

$P(X = 0) = \frac{32}{243}$; $P(X = 1) = \frac{80}{243}$; $P(X = 2) = \frac{80}{243}$; $P(X = 3) = \frac{40}{243}$; $P(X = 4) = \frac{10}{243}$; $P(X = 5) = \frac{1}{243}$.

Запишемо теоретичну функцію розподілу згідно з формулою

$$F(x)=\sum_{x_i<x} p(x_i):$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \dfrac{32}{243}, & \text{якщо } 0<x\le 1;\\ \dfrac{112}{243}, & \text{якщо } 1<x\le 2;\\ \dfrac{192}{243}, & \text{якщо } 2<x\le 3;\\ \dfrac{232}{243}, & \text{якщо } 3<x\le 4;\\ \dfrac{242}{243}, & \text{якщо } 4<x\le 5;\\ 1, & \text{якщо } x>5. \end{cases}$$

Визначимо модуль максимальної різниці значень теоретичної та статистичної функцій розподілу:

$$\max_x \left| F(x)-F_n^*(x)\right| =$$

$$=\max\left|0-0;\frac{32}{243}-\frac{1}{5};\frac{112}{243}-\frac{12}{25};\frac{192}{243}-\frac{19}{25};\frac{232}{243}-\frac{23}{25};\frac{242}{243}-\frac{24}{25};1-1\right|=\frac{83}{1215}.$$

Істотність знайденого відхилення буде оцінено пізніше, під час перевірки статистичних гіпотез за критерієм Колмогорова.

Знайдемо числові характеристики вибіркової сукупності.

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i=\frac{1}{25}(7+14+12+4+5)=1{,}68.$$

Дисперсію визначимо за формулою $s^2=\bar{x}^2-(\bar{x})^2$. Знайдемо середнє значення квадрата x:

$$\bar{x}^2=\frac{1}{25}(7+28+36+16+25)=4{,}48.$$

Отже, $s^2=4{,}48-(1{,}68)^2=1{,}6576.$

Згідно з гіпотезою про закон розподілу теоретичні числові характеристики $MX\approx 1{,}67;\ DX\approx 1{,}11.$ Бачимо, що значення математичного сподівання і вибіркового середнього різняться мало, тоді як між теоретичною і вибірковою дисперсією різниця значна.

Вибірковий розподіл має два значення з найбільшою частотою, розподіл двомодальний, медіана розподілу $m_e=2.$ Розмах варіації R = 5 – 0 = 5.

Приклад 2. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом n = 32. Здобуто такі реалізації випадкової величини: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9; 4,7; 6,4; 6,9; 6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Запропонувати гіпотезу про вигляд $F(x)$ у сукупності. За допомогою умовних моментів розподілу знайти $\bar{x}$, s^2, As*, Ek^*.

Розв'язання. Для побудови інтервального ряду розбиваємо область реалізацій на 7 інтервалів з однаковими довжинами інтервалів: $\Delta x = \dfrac{\max\limits_i(x_i) - \min\limits_i(x_i)}{7}$; $\Delta x = \dfrac{9{,}2 - 2{,}2}{7} = 1$. Частоти кожного інтервалу знайдемо, визначивши для кожного значення інтервал. Якщо значення x_i потрапляє на межу, то збільшуємо на 1 частоту нижнього інтервалу.

Інтервал	2,2—3,2	3,2—4,2	4,2—5,2	5,2—6,2	6,2—7,2	7,2—8,2	8,2—9,2
Частота	2	3	4	9	10	2	2

Згідно зі знайденим рядом будуємо гістограму (рис. 4.1).

На підставі побудованої гістограми можна висунути гіпотезу про нормальний закон розподілу в сукупності.

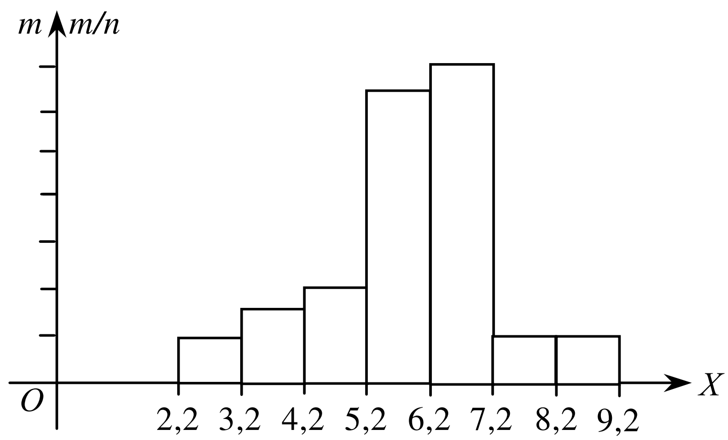


Рис. 4.1

Для обчислення умовних моментів розподілу складемо таблицю, в якій запишемо середини інтервалів $u_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, їхні частоти n_i і нові змінні $v_i = \dfrac{u_i - C}{\Delta x}$. Візьмемо C, що дорівнює $u_4 = 5{,}7$. У наступних стовпцях обчислені значення $v_i n_i$, $v_i^2 n_i$, $v_i^3 n_i$, $v_i^4 n_i$, а в останньому рядку таблиці — їхні суми.

u_i	n_i	v_i	$v_i n_i$	$v_i^2 n_i$	$v_i^3 n_i$	$v_i^4 n_i$
2,7	2	–3	–6	18	–54	162
3,7	3	–2	–6	12	–24	48
4,7	4	–1	–4	4	–4	4
5,7	9	0	0	0	0	0
6,7	10	1	10	10	10	10
7,7	2	2	4	8	16	32
8,7	2	3	6	18	54	162
Сума	32	—	4	70	–2	418

Знайдемо умовні моменти розподілу від першого до четвертого порядків включно:

$$h_1^* = \frac{\sum v_i n_i}{n} = \frac{4}{32} = 0{,}125;$$

$$h_2^* = \frac{\sum v_i^2 n_i}{n} = \frac{70}{32} = 2{,}1875;$$

$$h_3^* = \frac{\sum v_i^3 n_i}{n} = \frac{-2}{32} = -0{,}0625;$$

$$h_4^* = \frac{\sum v_i^4 n_i}{n} = \frac{418}{32} = 13{,}0525.$$

Визначимо числові характеристики за допомогою умовних моментів розподілу:

$$\bar{x} = C + h_1^* \Delta x = 5{,}7 + 0{,}125 \cdot 1 = 5{,}825;$$

$$s^2 = (\Delta x)^2 \left(h_2^* - \left(h_1^*\right)^2 \right) = 2{,}1875 - (0{,}125)^2 \approx 2{,}172;$$

$$\mu_3^* = (\Delta x)^3 \left(h_3^* - 3h_2^* h_1^* + 2\left(h_1^*\right)^3 \right) = -0{,}0625 -$$

$$-2{,}1875 \cdot 0{,}125 + 2(0{,}125)^3 \approx -0{,}332031;$$

$$\mu_4^* = (\Delta x)^4 \left(h_4^* - 4h_3^* h_1^* + 6h_2^* \left(h_1^*\right)^2 - 3\left(h_1^*\right)^4 \right) = 13{,}0625 + 4 \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}125 +$$

$$+6 \cdot 2{,}1875(0{,}125)^2 - 3(0{,}125)^4 \approx 13{,}29809; \quad A_S^* = \frac{\mu_3^*}{s^3} = -\frac{0{,}332031}{\sqrt{(2{,}172)^3}} \approx -0{,}1037;$$

$$E_k^* = \frac{\mu_4^*}{s^4} - 3 = \frac{13{,}29809}{(2{,}172)^2} - 3 \approx -0{,}1812.$$

Отже, асиметрія та ексцес близькі до нуля, чим підтверджується припущення про нормальний закон розподілу в сукупності.

4.4. Перевірка статистичних гіпотез

Дані вибіркових спостережень часто становлять основу для прийняття одного з кількох альтернативних рішень (продукція може бути бракованою або якісною, точність обробки виробу в межах норми або нижча від норми і т. д.). Із загальнометодологічного погляду тут йдеться про висунення деякої гіпотези, яку відхиляють або приймають після проведення деякого експерименту. Якщо цей експеримент має статистичний (стохастичний) характер, кажуть, що гіпотеза є статистичною.

Статистичною називається гіпотеза, яка стосується виду або параметрів розподілу випадкової величини і яку можна перевірити на підставі результатів спостереження у випадковій вибірці.

Перевіряючи статистичні гіпотези за результатами випадкової вибірки, завжди ризикують прийняти хибне рішення. Задача про статистичну перевірку статистичних гіпотез фомулюється так. Розглядають деяку гіпотезу про те, що розподіл ймовірностей деякої випадкової величини має той чи інший вигляд, або параметри розподілу мають ті чи інші значення. Задача полягає у тому, щоб на основі вивчення статистичних даних (вібірки) підтвердити справедливість висунутої гіпотези чи спростувати її. При цьому вказується також ймовірність того, що прийняте рішення є правильним або помилковим. Проблема зменшення ймовірності того, що прийняте рішення є помилковим, є також однією із задач математичної статистики.

У результаті статистичної перевірки гіпотези може бути прийняте одне з двох правильних рішень: 1) гіпотеза приймається і вона істинна; 2) гіпотеза відхиляється і вона неістинна.

Поряд із тим у результаті статистичної перевірки статистичної гіпотези можуть бути допущені помилки (прийняті неправильні рішення). Помилки, яких можна припуститися, бувають двох родів. Помилка першого роду полягає в тому, що гіпотеза перевірювана H_0 відхиляється, тоді як вона правильна. Помилка другого роду полягає у тому, що гіпотеза H_0 приймається, тоді як вона хибна, а правильною є деяка гіпотеза H_1. Ця гіпотеза, яка протиставляється гіпотезі H_0, називається ***альтернативною***. При цьому, хоча множина альтернативних гіпотез може бути нескінченною, висувається тільки одна альтернативна гіпотеза H_1. Статистичні гіпотези поділяються на прості і складні. ***Проста гіпотеза*** однозначно визначає закон розподілу випадкової величини. Для побудови статистичного критерію, який дає змогу перевірити деяку гіпотезу H_0, необхідно вибрати ***статистичну характеристику*** гіпотези Q — деяку вибіркову функцію, визначити допустиму ймовірність помилки першого роду α (рівень значущості), сформулювати альтернативну гіпотезу H_1, знайти критичну область G для статистичної характеристики, щоб мінімізувати ймовірність помилки другого роду. Критична область G — це така множина значень Q, що коли $Q \in G$, то гіпотеза H_0 відхиляється на користь гіпотези H_1. Критична область визначається так, щоб ймовірність потрапляння в неї статистичної характеристики за умови, що правильна гіпотеза H_0, дорівнювала α — заданому рівню значущості, тобто $P(Q \in G / H_0) = \alpha$. Крім того, необхідно, щоб $P(Q \in G / H_1)$ була максимальною, тобто ймовірність помилки другого роду має бути мінімальною. Останнє співвідношення називається ***вимогою максимізації потужності критерію***, який виражає ймовірність того, що не буде допущено помилки другого роду.

Статистичні гіпотези поділяються на *параметричні* і *непараметричні*. Параметричні гіпотези передбачають, що вигляд закону розподілу відомий і перевірка зводиться до перевірки значень невідомих параметрів.

У разі, коли гіпотези H_0 і H_1 прості і розглядається неперервна випадкова величина, то побудова критерію ґрунтується на теоремі Неймана—Пірсона.

Коли гіпотеза, що перевіряється, і альтернативна їй гіпотеза є простими гіпотезами виду відповідно $H_0 : \theta = \theta_0$ і $H_1 : \theta = \theta_1$ і якщо $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_0)$ і $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_1)$ — функції правдоподібності, які знайдено за умови, що правильна відповідно гіпотеза H_0 або H_1, то існує найпотужніший критерій для гіпотези H_0 стосовно альтернативної гіпотези H_1. Критична область і статистична характеристика гіпотез визначаються нерівністю: $L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_1) \geq cL(x_1, x_2, ..., x_n, \theta_0)$, де C — додатна стала, значення якого залежить від рівня значущості.

Якщо принаймні одна з гіпотез H_0 або H_1 не є простою, нерівність не можна застосувати. У цьому разі можна побудувати критерій, що ґрунтується на відношенні функцій правдоподібності (знову вважається, що розподіл у сукупності неперервний).

Припустимо, що змінна X має щільність виду $f(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)$, яка залежить від r параметрів, а гіпотеза H_0 подається у вигляді: $\bar{\theta} \in \omega$, де

$\bar{\theta}$ — вектор з s компонентами $(s \le r)$, а ω — деяка підмножина Ω усіх можливих значень параметра. Гіпотеза $H_1 : \bar{\theta} \in \Omega \setminus \omega$. Для побудови критерію визначають функцію правдоподібності $L(x_1, x_2, ..., x_n, \bar{\theta})$, а далі знаходять її максимуми для випадків, коли $\bar{\theta} \in \omega$ і $\bar{\theta} \in \Omega$. Далі складають відношення:

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\bar{\theta} \in \omega} L(x_1, x_2, ..., x_n, \bar{\theta})}{\max\limits_{\bar{\theta} \in \Omega} L(x_1, x_2, ..., x_n, \bar{\theta})}.$$

Значення λ завжди належить інтервалу $(0;1)$. Чим ближче λ до одиниці, тим правдоподібніша гіпотеза H_0 і навпаки: чим ближче значення λ до нуля, тим більше підстав для відхилення H_0. Критична область для λ лівостороння. Вона визначається з умови: $P(\lambda < \lambda_\alpha / H_0) = \alpha$.

Якщо відомий закон розподілу для λ, то можна знайти границю критичної області для заданого критерію. Критерії, що ґрунтуються на відношенні функцій правдоподібності, асимптотично найпотужніші.

4.5. Основні параметричні статистичні критерії

Перевірка гіпотези про математичне сподівання нормально розподіленої сукупності

Якщо дисперсія сукупності відома і дорівнює σ^2, то при H_0: $a = a_0$. і H_1: $a = a_1$ за статистичну характеристику береться вибіркова функція $Z = \dfrac{\bar{X} - a_0}{\sigma}\sqrt{n}$. Критична область визначається залежно від значення a_1 і відповідно до рівня значущості α. Можливі три випадки.

1. Якщо $a_1 > a_0$, то критична область правостороння. Її межа z_α визначається за умовою: $P(Z \ge z_\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{z_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}5 - \Phi(z_\alpha) = \alpha$. Тоді $z_\alpha = \Phi^{-1}(0{,}5 - \alpha)$.

2. Якщо $a_1 < a_0$, то критична область лівостороння, $z_\alpha = -\Phi^{-1}(0{,}5 - \alpha)$.

3. Якщо $a_1 \neq a_0$, то критичній області належать значення $z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ і $z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$. При цьому $z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(0{,}5 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Коли дисперсія сукупності невідома, то для перевірки гіпотези використовується вибіркова функція $Z = \frac{\overline{X} - a_0}{s}\sqrt{n-1}$, розподілена за законом Стьюдента з n – 1 ступенями волі. Вигляд критичної області визначають так само, як і в попередніх випадках, а межу знаходять за допомогою таблиць розподілу Стьюдента з відповідною кількістю ступенів волі. Якщо n > 20, то розподіл Стьюдента апроксимується нормальним розподілом з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Перевірка гіпотези про дисперсію нормально розподіленої сукупності

Коли рівень значущості дорівнює α, перевіримо гіпотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma^2 = \sigma_1^2$. Якщо справджується гіпотеза, яка перевіряється, то вибіркова функція $U = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ має розподіл χ^2 з n – 1 ступенями волі. Як і в попередніх випадках, вигляд критичної області визначається значенням σ_1^2. Межі критичної області визначаються так:

1) якщо $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$, то критична область G правостороння, $U_\alpha = \chi^2(\alpha)$;

2) якщо $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$, то критична область G лівостороння, $U_\alpha = \chi^2(1-\alpha)$;

3) якщо $\sigma_1^2 = \sigma_0^2$, то критична область двостороння. Їй належать значення $U \leq u_1$ і $U \geq u_2$, де $u_1 = \chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, а $u_2 = \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Перевірка гіпотези про істотність різниці математичних сподівань двох нормально розподілених сукупностей

Нехай задано дві нормально розподілені сукупності з однаковими дисперсіями, але, можливо, із різними математичними сподіваннями. Із цих сукупностей зроблено вибірки обсягом відповідно n_1 і n_2. Числові характеристики вибіркових сукупностей: $\overline{X}_1$, S_1^2 і $\overline{X}_2$, S_2^2. Якщо позначити різницю $a_1 - a_0 = \delta$, то гіпотезу $H_0: \ \delta = \delta_0$ можна перевірити за допомогою вибіркової функції $Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$. Якщо гіпотеза H_0 правильна, то Z має розподіл Стьюдента з $n_1 + n_2 - 2$ степенями вільності. Залежно від значення δ_1 у альтернативній гіпотезі визначають критичну область за допомогою таблиць розподілу Стьюдента, а в разі великих значень n_1 і n_2 — за допомогою таблиць функції Лапласа.

Перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених сукупностей

Нехай задано дві нормально розподілені сукупності. На підставі вибірок обсягом n_1 і n_2 із цих сукупностей потрібно перевірити гіпотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Статистичною характеристикою для перевірки гіпотези H_0 буде вибіркова функція $F = \dfrac{\dfrac{n_1}{n_1 - 1} s_1^2}{\dfrac{n_2}{n_2 - 1} s_2^2}$. При побудові відношення чисельник має бути не меншим від знаменника. Якщо гіпотеза H_0 правильна, то вибіркова функція F має розподіл Фішера з $n_1 - 1$ і $n_2 - 1$ ступенями волі. Критична область G правостороння і визначається умовою $P(F \geq f_\alpha) = \alpha$.

Критерій дисперсійного аналізу

Нехай задано k нормально розподілених сукупностей з однаковими дисперсіями і, можливо, різними математичними сподіваннями. Із кожної сукупності зроблено вибірку обсягом n_i. Перевіряється гіпотеза H_0: $a_1 = a_2 = ... = a_k$. Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція

$$F = \frac{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2 n_i}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)},$$

де X_{ij} — j-те значення випадкової величини X_i; $\overline{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$; $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i n_i$; $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Якщо гіпотеза H_0 правильна, то вибіркова функція має розподіл Фішера з k – 1 і n – k ступенями волі. Критична область правостороння і визначається так, як це було зроблено в попередньому пункті.

Крім наведених параметричних критеріїв перевірки статистичних гіпотез розглядаються.

4.6. Критерії для перевірки непараметричних статистичних гіпотез

Критерій χ^2 Пірсона

Критерій ґрунтується на порівнянні теоретичних і емпіричних частот. Нехай область реалізацій випадкової величини розбито на k інтервалів, частоти яких дорівнюють n_i, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Якщо гіпотеза про закон розподілу в сукупності правильна, то можна обчислити ймовірності $p_i = P\left(x_{i-1} \le X < x_i\right)$, тобто ймовірність потрапляння випадкової величини на i-й інтервал. Теоретичні частоти потрапляння на цей інтервал можна розглядати як математичне сподівання компонентів випадкової величини, розподіленої за поліноміальним законом:

$$P\left(X_1 = m_1; X_2 = m_2; ...; X_k = m_k\right) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}\left(m_i\right)!} p_i^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k};$$

$MX_i = n_i' = np_i$, $i = 1,2,...,k$.

Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $U = \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(n_i' - n_i\right)^2}{n_i'}$. Якщо $n \to \infty$, то вибіркова функція має розподіл χ^2 з $k - r - 1$ ступенями волі, де r — кількість параметрів, оцінки для яких знайдено за вибірковими даними. Критична область для статистичної характеристики правостороння.

Критерій Колмогорова

Критерій ґрунтується на порівнянні статистичної і теоретичної функцій розподілу. Якщо

$$D_n = \max_x \left| F_n^*(x) - F(x) \right|,$$

то при $n \to \infty$

$$P\left(\sqrt{n} D_n \geq \lambda_\alpha\right) \to 1 - K(\lambda),$$

де $K(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2\lambda^2}$, $\lambda > 0$. За допомогою таблиць розподілу Колмогорова визначається правостороння критична область.

Приклад 1. Побудувати найпотужніший критерій для перевірки гіпотези $H_0\colon a = a_0$ за альтернативної гіпотези $H_1\colon a = a_1$, якщо вибірку обсягом *n* зроблено з нормально розподіленої сукупності з дисперсією, що дорівнює σ^2. Дібрати таке значення *C*, при якому α = 0,02, якщо $a_0 = 10,\ a_1 = 12,\ \sigma^2 = 9,\ n = 25.$ Яка з гіпотез приймається, якщо $\bar{x} = 10{,}9$?

Розв'язання. Застосуємо нерівність із теореми Неймана — Пірсона: $L(x_1, x_2, ..., x_n, a_1) \geq cL(x_1, x_2, ..., x_n, a_0)$. Побудуємо функції правдоподібності:

$$L(x_1, x_2, ..., x_{n.}, a_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2},$$

$$L(x_1, x_2, ..., x_{n.}, a_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}.$$

Підставимо функції правдоподібності в нерівність і виконаємо спрощення скороченням сталих множників. Дістанемо нерівність $e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_1)^2} \geq Ce^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_0)^2}$, яку прологарифмуємо і виконаємо низку перетворень:

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2 \ge \ln C - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2;$$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2\right)\ge \ln C;$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2a_0\sum_{i=1}^{n}x_i+na_0^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2a_1\sum_{i=1}^{n}x_i-na_1^2\ge 2\sigma^2\ln C;$$

$\sum_{i=1}^{n}x_i \ge \frac{2\sigma^2\ln C+n\left(a_1^2-a_0^2\right)}{2(a_1-a_0)}$, бо за умовою $a_1>a_0$. Після заміни $\sum_{i=1}^{n}x_i=n\bar{x}$, остаточно дістанемо $\bar{X}\ge\frac{2\sigma^2\ln C+n\left(a_1^2-a_0^2\right)}{2n(a_1-a_0)}$.

Отже, статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $\bar{X}$, а критичною областю для неї — множина значень, не менших за $\frac{2\sigma^2\ln C+n\left(a_1^2-a_0^2\right)}{2n(a_1-a_0)}$. Щоб дібрати значення C, потрібно знати закон розподілу вибіркової функції. Якщо справджується гіпотеза H_0, то вибірку зроблено з нормально розподіленої сукупності з $a=10$ і $\sigma^2=9$. Тоді $M\bar{X}=10$, а $D\bar{X}=0{,}36$. Центруємо і нормуємо вибіркову функцію, щоб застосувати таблиці функції Лапласа. Аналогічні перетворення виконуємо з правою частиною нерівності: $\frac{\bar{X}-10}{0{,}6}\ge\left(\frac{18\ln C+25(144-100)}{50\cdot 2}-10\right)\cdot\frac{5}{3}$; $\frac{\bar{X}-10}{0{,}6}\ge\frac{18\ln C+100}{60}$. Критична область правостороння, тому її межа $z_\alpha=\Phi^{-1}(0{,}5-\alpha)$; $z_{0{,}02}=\Phi^{-1}(0{,}48)=2{,}055$. Отже, $\frac{18\ln C+100}{60}=2{,}055$; $\ln C\approx 1{,}2944$; $C\approx 3{,}649$.

Якщо $\bar{x}=10{,}9$, то $\frac{\bar{x}-10}{0{,}6}=\frac{0{,}9}{0{,}6}=1{,}5$ не належить критичній області і гіпотеза H_0 приймається.

Приклад 2. На підприємстві розроблено два методи виготовлення виробів. Для перевірки цих методів на матеріалоємність зібрані дані про витрати сировини на одиницю продукції у процесі роботи обома методами. Витрати сировини за застосування першого методу становили: 2,0; 2,7; 2,5; 2,9; 2,3; 2,6; а другого — 2,5; 3,2; 3,5; 3,8; 3,5. Вважаючи, що розподіл у сукупностях нормальний і дисперсії у сукупностях однакові, перевірити гіпотезу H_0: $\delta_0 = 0$, при H_1: $\delta_0 \neq 0$, $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Для вибіркової функції $Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta_0}{\sqrt{\dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$, яка розподілена за законом Стьюдента з $n_1 + n_2 - 2$ ступенями волі потрібно знайти критичну область (вона двостороння) і знайти фактичну реалізацію. Знайдемо числові характеристики вибіркових сукупностей:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{6}(2 + 2{,}7 + 2{,}5 + 2{,}9 + 2{,}3 + 2{,}6) = 2{,}5;$$

$$s_1^2 = \frac{1}{6}(0{,}25 + 0{,}04 + 0{,}16 + 0{,}04 + 0{,}01) = \frac{1}{12}.$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{5}(2{,}5 + 3{,}2 + 3{,}5 + 3{,}8 + 3{,}5) = 3{,}3;$$

$$s_2^2 = \frac{1}{5}(0{,}64 + 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}25 + 0{,}04) = \frac{49}{250}.$$

За таблицями розподілу Стьюдента для 9 ступенів волі знаходимо $z_{\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}(0{,}975) \approx 2{,}26.$

Обчислимо значення статистичної характеристики:

$$z = \frac{2{,}5 - 3{,}3}{\sqrt{\dfrac{0{,}5 + 0{,}98}{6 + 5 - 2}\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5}\right)}} \approx -3{,}258.$$

Отже, значення характеристики належить критичній області, і гіпотеза H_0 відхиляється.

Приклад 3. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу, що кількість верстатів, які не працюють, серед 5 верстатів, що є в цеху, розподілено за біноміальним законом з $p = \dfrac{1}{3}$, якщо $D_n = \max\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right| = 0{,}0683$ і $n = 25$.

Розв'язання. Використаємо для перевірки гіпотези критерій Колмогорова: $P\left(\sqrt{n}D_n \geq \lambda_\alpha\right) = 1 - K(\lambda) = \alpha$. Згідно з умовами $K(\lambda_\alpha) = 0{,}95$ і за таблицями розподілу Колмогорова $\lambda_\alpha = 1{,}356$. Обчислимо $\sqrt{n}D_n = \sqrt{25} \cdot 0{,}0683 = 0{,}3415 < \lambda_\alpha = 1{,}356$. Значення статистичної характеристики не належить критичній області, тому гіпотеза про біноміальний закон розподілу у сукупності приймається.

Приклад 4.

Із нормально розподіленої сукупності зроблено вибірку обсягом n = 15. За рівня значущості $\alpha = 0{,}02$ перевірити гіпотезу H_0: $\sigma^2 = 12$ при альтернативній гіпотезі H_1: $\sigma^2 = 10$, якщо $s^2 = 11$.

Розв'язання. Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $U = \dfrac{nS^2}{\sigma_0^2}$, розподілена за законом χ^2 з n – 1 ступенями волі. Критична область лівостороння, бо $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ (рис. 5.3).

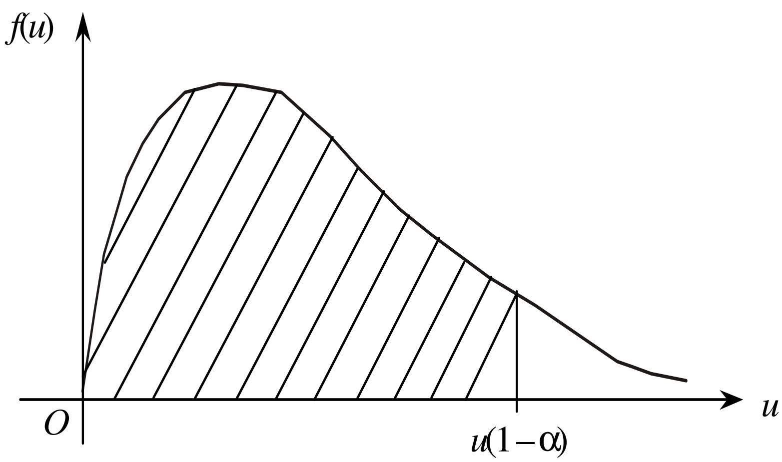


Рис. 5.3

Межу критичної області знаходимо за таблицями розподілу χ^2: $u_\alpha = \chi^2(1-\alpha) = \chi^2(0{,}98)$ при 14 ступенях волі. $u_{0,02} = 15{,}4$. Реалізація вибіркової функції $u = \dfrac{15 \cdot 11}{12} = 13{,}75$.

Значення функції належить критичній області, отже, гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної гіпотези H_1.

Теоретичні запитання до розділу

1. Що називається вибірковою сукупністю?
2. Що таке обсяг сукупності?
3. Яка гіпотеза називається статистичною?

4. Перевірка гіпотези про математичне сподівання нормально розподіленої сукупності.

5. Перевірка гіпотези про дисперсію нормально розподіленої сукупності.

6. Коли використовується критерій Пірсона?

7. На чому ґрунтується критерій Колмогорова?

3. Довести, що $P(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

4. Де використовується нерівність Чебишова?

5. Сформулювати теорему Чебишова.

6. Сформулювати теорему Бернуллі.

7. Записати нерівність Чебишова для теореми Бернуллі.

8. Чому дорівнює αY(t), якщо Y = ax + b?

9. Сформулювати центральну граничну теорему.

10. Використання центральної граничної теореми для доведення інтегральної теореми Муавра—Лапласа.

Предметний покажчик

Іменний покажчик

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1977.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2001.
4. Гнеденко В. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1965.
5. Емельянов Г. В., Скитович В. П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.
6. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей з елементами математичної статистики. — К.: УМК ВО, 1991.
7. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Ч.1. — К.: КНЕУ, 2000.
8. Карасев А. И. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Статистика, 1970.
9. Крамер М. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2001.
10. Мешалкин Л. Д. Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Изд-во МГУ, 1963.
11. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова. — М.: Наука, 1970.
12. Турчин В. М. Математична статистика. — К.: Вид. центр «Академія», 1999.
13. Черняк О.І., Обушна О.М., Ставицький А.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач. – К.: Знання, 2002.

Додаток

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\overline{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

X	Φ (x)	X	Φ (x)	X	Φ (x)	X	Φ (x)	X	Φ (x)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
00	0.0000	0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.02	0.4783
01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3448	1.51	0.4345	2.04	0.4793
02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357	2.06	0.4803
03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370	2.08	0.4812
04	0.0160	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382	2.10	0.4821
05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	L55	0.4394	2.12	0.4830
06	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406	2.14	0.4838
07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0.3577	1.57	0.4418	2.16	0.4846
08	0.0319	0.58	0.2190	1.08	0.3599	1.58	0.4429	2.18	0.4854
09	00359	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441	2.20	0.4861
10	0.0398	0.60	0.2257	1.10	0.3643	1.60	0.4452	2.22	0.4868
11	0.0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0.4463	2.24	0.4875
12	0.0478	0.62	0.2324	1.12	0.3686	1.62	0.4474	2.26	0.4881
13	0.0517	0.63	0.2357	1.13	03708	1.63	0.4484	2.28	0.4887
14	0.0557	0.64	0.2389	1.14	0.3729	1.64	0.4495	2.30	0.4893
15	0.0596	0.65	0.2422	1.15	0.3749	1.65	0.4505	2.32	0.4898
16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515	2.34	0.4904
17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1.67	0.4525	2.36	0.4909
18	0.0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.68	0.4535	2.38	0.4913
19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545	2.40	0.4918
20	0.0793	0.70	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554	2.42	0.4922
21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564	2.44	0.4927
22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0.3883	1.72	0.4573	2.46	0.4931
23	0.0910	0.73	0.2673	1.23	0.3807	1.73	0.4582	2.48	0.4934
24	0.0948	0.74	0.2703	1.24	0.3925	1.74	0.4591	2.50	0.4938
25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0.3944	1.75	0.4599	2.52	0.4941
26	0.1026	0.76	0.2764	1.26	0.3962	1.76	0.4608	2.54	0.4945
27	0.1064	0.77	0.2794	1.27	0.3980	1.77	0.4616	2.56	0.4948
28	0.1103	0.78	0.2823	1.28	0.3997	1.78	0.4625	2.58	0.4951
29	0(1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633	2.60	0.4953
30	0.1179	0.80	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641	2-62	0.4956
31	0.1217	0.81	0.2910	1.31	0.4049	1.81	0.4649	2.64	0.4959
32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656	2.66	0.4961

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1.83	0.4664	2.68	0.4963
34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671	2.70	0.4965
35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678	2.72	0.4967
36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0.4131	1.86	0.4686	2.74	0.4969
37	0.1443	0.87	0.3076	1.37	0.4147	1.87	0.4693	2.76	0.4971
38	0.1480	0.88	0.3106	1.38	0.4162	1.88	0.4699	2.78	0.4973
39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706	2.80	0.4974
40	0.1554	0.90	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713	2.82	0.4976
41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719	2.84	0.4977
42	0.1628	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726	2.86	0.4979
43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732	2.88	0.4980
44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738	2.90	0.4981
45	0.1736	0.95	0.3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744	2.92	0.4982
46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4279	1.96	0.4750	2.94	0,4985
47	0.1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756	2.96	0.4985
0.48	0.1884	0.98	0.3365	1.48	0.4306	1.98	0.4761	2.98	0.4986
0.49	0.1879	0.99	0.3389	1.49	0.4319	1.99	0.4767	3.00	0.49865
								3.20	0.49931
								3.40	0.49966
								3.60	0.499841
								3.62	0.499928
								4.00	0.499468
								4.50	0.499997
								5.00	0.499997