

**О.В. ГЛУШКОВ, О.Ю. ХЕЦЕЛУС, А.В. ЛОБОДА,
Л.А.ВІТАВЕЦЬКА, Т.О.ФЛОРКО**

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
(Р.«МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.В. ГЛУШКОВ, О.Ю. ХЕЦЕЛІУС, А.В. ЛОБОДА,
Л.А.ВІТАВЕЦЬКА, Т.О.ФЛОРКО

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
(Р.«МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»)

Конспект лекцій

О д е с а – 2011

ББК 28.082:22.1

Г 13

УДК 504:534.1

Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету (протокол №8 від 28.10.2010 р.).

Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Лобода А.В.,
Вітавецька Л.А., Флорко Т.О.

Вища та прикладна математика (р. «Математичне програмування,»):
Конспект лекцій. – Одеса, Вид-во: Екологія, 2011. – 100с.

У конспекті лекцій розглянуто питання лінійного, нелінійного, цілочисельного, динамічного програмування, особливості транспортної задачі, а також як приклад застосування методів математичного програмування розглянуто задачу розподілу капіталовкладень у нафтопереробну промисловість. Для студентів спеціальності «менеджмент» університетів.

Конспект лекцій використовується для денної та заочної форм навчання.

© Глушков О., Хецеліус О., Лобода А.,
Вітавецька Л., Флорко Т., 2011

© Одеський державний
екологічний університет, 2011

ПЕРЕДМОВА

Серед багатьох типів економіко-математичних моделей існують такі, серед яких важливими є оптимізаційні моделі, що характеризуються великою кількістю економічних та технологічних зв'язків. Їх вибір підпорядковується заданим критеріям ефективності.

В літературі [6] такий вибір пов'язують із задачею раціонального ведення господарства, раціональної діяльності, тобто з розподілом обмежених ресурсів для ефективного досягнення поставленої мети. Внаслідок обмеженості ресурсів доводиться вибирати той чи інший варіант їх використання. При доцільному виборі можна досягти поставленої мети, не перевищуючи межу використання ресурсів.

Проблему раціонального ведення господарства можна розглядати з позиції методу математичної оптимізації в економіці. Задачу оптимізації можна сформулювати як пошук таких значень деяких змінних, що задовольняють обмеження, при яких досягається максимум чи мінімум функції. Останні є критерієм ефективності виробництва.

Серед задач раціонального ведення господарства, які пов'язані з розподілом обмежених ресурсів, слід розрізняти ті, що розглядаються у фіксовані моменти часу, і задачі на перспективу. Але у будь-якому випадку математично задача полягає у відшукуванні змінних, що оптимізують задану функцію і задовольняють систему обмежень.

Перш ніж обирати метод для розв'язання задачі необхідно з'ясувати, до якого класу вона належить. Умовно задачі математичного програмування, які полягають у дослідженні функції на екстремум (найбільше і найменше значення), на змінні якої накладені певні обмеження, можна розбити на такі:

- задачі лінійного та нелінійного програмування (залежно від вигляду невідомих математичної моделі задачі);
- задачі динамічного та статичного програмування (з урахуванням чи без урахування часу);
- задачі детермінованого та статистичного програмування (залежно від характеру вихідних параметрів моделі).

Математична модель будь-якої оптимізаційної моделі залежить від двох складових: опису економічних та технологічних зв'язків, що впливають із змісту задачі; задання критерію ефективності її розв'язку.

Розв'язок математичної моделі задачі, який забезпечує критерій ефективності її розв'язку, називається оптимальним. У залежності від конкретної моделі ці розв'язки можуть набувати різного змісту.

У данному посібнику розглянуті питання лінійного, нелінійного, цілочисельного, динамічного, стохастичного програмування, особливості транспортної задачі тощо.

Користуючись випадком, автори висловлюють подяку декану Інституту математики, механіки та економіки Одеського національного університету ім. І.Мечникова, д-ру фіз.-мат. н., професору Шевчуку В.Г., завідувачам кафедр вищої математики та комп'ютерного моделювання Одеського національного політехнічного університету, д-ру фіз.-мат. н., професору Новікову В.В. та д-ру фіз.-мат. н., професору Усову А.В., завідувачу кафедри вищої та прикладної математики Одеської державної академії холоду, д-ру фіз.-мат. н., професору Швецю В.Т. за корисні дискусії з ряду питань.

Розділ 1

ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

§1.1. Основні властивості задач лінійного програмування

Перед лінійним програмуванням (ЛП) стоять дві важливі проблеми:
1) моделювання економічних задач;
2) пошук найефективнішого (оптимального) плану на базі побудованої математичної моделі [1], [3].

Задача лінійного програмування (ЗЛП) полягає в наступному: серед всіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m, \end{cases} \quad (1.1)$$

знайти такий, при якому функція $z(x)$

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.2)$$

набуває найбільшого значення.

Залежно від системи обмежень, ЗЛП має такі основні форми: стандартна, канонічна та загальна. Стандартна форма має вигляд:

$$z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \quad (1.3)$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0.$$

Якщо

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

тоді стандартна форма у матричному вигляді:

$$z = c^T x \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$,

$c^T x = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ – скалярний добуток векторів c та x , знак T – це транспонування.

Загальна ЗЛП має вигляд:

Загальна ЗЛП має вигляд:

$$z = c^T x \rightarrow \max$$

$$Ax \leq (=, \geq) b \quad (1.5)$$

$$x \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix} 0.$$

Компоненти вектора c називають *коефіцієнтами вартості*, сам вектор c – *вектор вартості*.

Вектор b – це матриця умов або *витрат*. Функція $z = c^T x$ називається *цільовою функцією*.

Обмеження $Ax \begin{matrix} \square \\ (=, \square) \end{matrix} b$ називають *основними обмеженнями*, а обмеження $x \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \end{matrix} 0$ – *прямими*.

Стандартна форма ЗЛП

1) Цільова функція максимізується.

- 2) Обов'язкова присутність прямих обмежень.
- 3) Основні обмеження містять знак нерівності « \leq ». Кількість основних обмежень може бути будь-якою.

$$z = c^T x \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b; \tag{1.6}$$

$$x \geq 0.$$

Канонічна форма ЗЛП

- 1) Цільова функція (1.2) максимізується.
- 2) Обов'язкова присутність прямих обмежень.
- 3) Основні обмеження мають знак « $=$ », кількість основних обмежень менша, ніж кількість невідомих.
- 4) Вектор обмежень b невід'ємний ($b \geq 0$).

$$z = c^T x \rightarrow \max$$

$$Ax = b, b \geq 0 \tag{1.7}$$

$$x \geq 0,$$

$$m < n.$$

Будь-яку ЗЛП можна звести до стандартної або канонічної форми.

Правила зведення ЗЛП до стандартної або канонічної форми.

- 1) У випадку мінімізації цільової функції $z = c^T \cdot x$, вводячи функцію $w = -z$, дістанемо оптимізацію на максимум:

- 2)

$$\min z = \max w$$

- 2) Основне обмеження у вигляді рівності, яке має від'ємну праву частину

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = -b_k,$$

можна замінити на обмеження з невід'ємною правою частиною, якщо обидві його частини помножити на -1 :

$$-a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \dots - a_{kn}x_n = b_k.$$

3) Для зведення обмеження у вигляді нерівності:

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n \leq b_l,$$

до канонічної форми необхідно ввести додаткову невідому $x_{n+1} \geq 0$. Тоді отримаємо

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n + x_{n+1} = b_l,$$

4) Для перетворення обмеження:

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n \geq b_s,$$

до канонічної форми необхідно додаткову змінну $x_{n+2} \geq 0$ відняти від лівої частини:

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n - x_{n+2} = b_s.$$

5) Для того, щоб звести обмеження

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \geq b_p,$$

до стандартної форми, необхідно обидві частини нерівності помножити на -1 :

$$-a_{p1}x_1 - a_{p2}x_2 - \dots - a_{pn}x_n \leq -b_p.$$

6) Для перетворення обмеження

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r,$$

до стандартної форми розглянемо два обмеження:

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n \leq b_r,$$

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n \geq b_r.$$

Останнє з них треба домножити на -1 .

Приклад. Розглянемо ЗЛП

$$w = -2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 1600 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

У стандартній формі (1.6) отримаємо:

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 1600 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Для зведення до канонічної форми (1.7) додаємо до лівих частин обмежень – нерівностей нові додаткові змінні x_3 та x_4 .

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

§1.2. Основні визначення та теореми лінійного програмування

Розглянемо основні обмеження прикладу з попереднього параграфу. Вони мають вигляд системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600 \end{cases}$$

де $m = 2, n = 4, m < n$.

Коли система містить рівнянь менше, ніж невідомих, то вона має нескінченну множину розв'язків. Розглянемо:

$$(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4),$$

$$(x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4).$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	1700	1600
2	0	425	0	-525
3	0	320	420	0
4	$566 \frac{2}{3}$	0	0	$466 \frac{2}{3}$
5	800	0	-700	0
6	300	200	0	0

З усіх розв'язків ми отримали 4, які задовольняють основні та прямі обмеження, і саме серед них знаходиться оптимальний розв'язок задачі. Це той розв'язок, який надає цільовій функції максимального значення.

Означення. Вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, який є розв'язком ЗЛП, називається *оптимальним розв'язком*.

Означення. Будь-який вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє всім обмеженням ЗЛП, називається *допустимим розв'язком (планом)*.

Означення. Вектор x називається *базисним розв'язком*, якщо $n - t$ його компонентів дорівнюють «0», а решта t компонент обчислюються, як єдиний розв'язок системи основних обмежень, які містять t рівнянь відносно n невідомих.

Змінні, прирівняні до 0, називаються *вільними*, а змінні, одержані як розв'язок системи обмежень, називаються *базисними*.

Означення. Базисний розв'язок називається *допустимим*, якщо всі його компоненти невід'ємні, тобто задовольняють прямі обмеження (опорні плани).

Означення. Множина K називається *опуклою*, якщо для будь-яких двох елементів цієї множини, відрізок, який їх з'єднує, повністю належить множині K .

Означення. *Вершиною* опуклої множини називається точка множини, для якої не існує відрізка, який містить в собі цю точку і повністю належить цій множині.

Теорема. Множина допустимих розв'язків в ЗЛП є опуклою.

Теорема. *Базисні допустимі розв'язки відповідають вершинам опуклої множини.*

Якщо ЗЛП має оптимальний розв'язок, то він міститься серед базисних допустимих розв'язків, тобто серед вершин опуклої множини. Якщо ЗЛП має нескінченну множину розв'язків, то вони містяться на одній з границь опуклої множини (коли лінія рівня цільової функції паралельна одній з границь області). ЗЛП не має розв'язків, коли область допустимих розв'язків – це опукла, необмежена множина.

§1.3. Симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування

Після зведення задачі ЛП у стандартній формі до канонічної форми введенням нових додаткових змінних отримуємо:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0.$$

Отримали задачу, яка називається канонічною ЗЛП в базисній формі. Вона містить змінні, які входять в основні обмеження один раз в одне рівняння з коефіцієнтом 1 ($x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$) і називаються *базисними*.

m – кількість основних обмежень, n – кількість змінних.

Нам треба знайти початковий базисний допустимий розв'язок.

$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_n$ – базисні змінні;

x_1, x_2, \dots, x_n – небазисні (вільні) змінні.

Нехай:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0,$$

$$\dots,$$

$$x_n = 0.$$

Тоді:

$$x_{n+1} = b_1,$$

$$x_{n+2} = b_2,$$

$$\dots,$$

$$x_{n+m} = b_m -$$

початковий базисний допустимий розв'язок.

Умову ЗЛП у базисній формі зручно задати у вигляді симплекс-таблиці

c	x	b	c_1	c_2	$\dots c_n$	c_{n+1}	c_{n+2}	\dots	c_{n+m}	θ
			x_1	x_2	$\dots x_n$	x_{n+1}	x_{n+2}	\dots	x_{n+m}	
c_{n+1}	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	$\dots a_{1n}$	1	0	\dots	0	$\frac{b_1}{a_{1s}}$
c_{n+2}	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	$\dots a_{2n}$	0	1	\dots	0	$\frac{b_2}{a_{2s}}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
c_{n+m}	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots a_{mn}$	0	0	\dots	1	$\frac{b_m}{a_{ms}}$
Δ_j	z		Δ_1	Δ_2	$\dots \Delta_n$	\dots	\dots	\dots	Δ_{n+m}	

x містить змінні, які є базисними,

c – відповідні коефіцієнти цільової функції,

b – початковий базисний допустимий розв'язок задачі, який не дорівнює нулю.

Решта таблиці містить коефіцієнти основних обмежень.

Побудуємо оціночний рядок за формулою:

$$\Delta_j = z_j - c_j$$

(для кожного j -того стовпчика матриці коефіцієнтів обчислюється сума добутків відповідних коефіцієнтів цього стовпчика та стовпчика c , а потім віднімається відповідне c_j):

$$\Delta_1 = c_{n+1}a_{11} + c_{n+2}a_{21} + \dots + c_{n+m}a_{m1} - c_1$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\Delta_j = c_{n+1}a_{1j} + c_{n+2}a_{2j} + \dots + c_{n+m}a_{mj} - c_j$$

В оціночному рядку у стовпчику b знаходиться початкове значення цільової функції.

Алгоритм розв'язання ЗЛП симплекс методом

1. Продивляємось усі елементи оціночного рядка. Якщо всі оцінки $\Delta_j \geq 0$, то записаний в таблиці базисний допустимий розв'язок є оптимальним, а відповідне значення цільової функції максимальне.

2. Якщо серед оцінок Δ_j є хоча б одна від'ємна, то виберемо стовпчик з найменшою від'ємною оцінкою і назвемо його ключовим стовпчиком. Нехай номер цього стовпчика s ($\Delta_s < 0$). Якщо у ключовому стовпчику усі елементи $a_{is} < 0$, то ЗЛП розв'язків не має, бо цільова функція необмежена.

3. Якщо серед елементів ключового стовпчика є додатні, то для них обчислюємо відповідні величини, які записуємо у стовпчик θ . $\theta_i = b_i/a_{is}$ (відношення елементів стовпчика b до відповідних додатних коефіцієнтів ключового стовпчика). Серед отриманих відношень θ_i виберемо найменше. Номер цього відношення визначає номер ключового рядка r .

Елемент a_{rs} , який знаходиться на перетині ключового стовпчика та ключового рядка, називається ключовим елементом. З його допомогою ми перетворюємо таблицю та одержуємо новий базисний допустимий розв'язок. Номер рядка показує, яку базисну змінну виводимо з базису, а номер стовпчика ключового елемента вказує, яку вільну змінну треба ввести в базис.

Перетворення таблиці

1. Ключовий рядок ділимо на ключовий елемент.
2. Елементи ключового стовпчика, крім самого ключового елемента, замінимо нулями.
3. Для решти елементів таблиці використовуємо метод Жордана-Гаусса.

Для перетворення елемента a_{ij} будуємо прямокутник, діагональ якого утворюють елемент a_{ij} та ключовий елемент a_{rs} .

$$a_{ij}^* = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$$

Перетворену таблицю аналізуємо за оціночним рядком.

Приклад.

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700 \\ \end{cases}$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

x_3, x_4 – базисні змінні;

x_1, x_2 – вільні.

$$x_1 = 0, x_2 = 0,$$

$$x_3 = 1700, x_4 = 1600;$$

$$z = 0.$$

$x_0 = (0; 0; 1700; 1600)$ – початковий розв'язок.

$$z_0 = 0.$$

c	x	b	2	4	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	1700	3	4	1	0	425
0	x_4	1600	2	5	0	1	320
	Δj	0	-2	-4	0	0	

↑

0	x_3	420	$\frac{7}{5}$	0	1	$-\frac{4}{5}$	300
4	x_2	320	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	800
	Δj	1280	$-\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	

↑

2	x_1	300	1	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{4}{7}$	
4	x_2	200	0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	
	Δj	1400	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	

Від'ємна оцінка Δj при обчислюванні значення цільової функції дозволяє отримати значення більші, ніж на попередньому етапі.

$$x_1 = (0; 320; 420; 0),$$

$$z_1 = 1280$$

$$x_2 = (300; 200; 0; 0),$$

$$z_2 = 1400$$

x_2 – оптимальний розв'язок

$$(\Delta j \geq 0).$$

Отже ідея методу полягає в переході від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб значення цільової функції оптимізувалося (зроста-

ло). Зазначимо, що змінні задачі, які переходять з базисних у вільні, обираються так, щоб зберігалась умова невід'ємності задачі. Крім того, на кожному кроці в базисі змінюється лише одна базисна і одна вільна невідомі.

§1.4. Метод штучного базису

Розглянемо ЗЛП в канонічній формі, але не в базисній:

$$\begin{aligned}
 z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$m < n, \quad b_i \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0.$$

Задача у такій формі не містить базисних змінних. Для розв'язання задачі (1.8) розглянемо допоміжну задачу. Для цього вводимо m додаткових штучних змінних:

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m} (\geq 0).$$

В кожне рівняння основних обмежень додамо по одній штучній змінній:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2, \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \dots - Mx_{n+m} \rightarrow \max.$$

Додаткові змінні мають невід'ємні значення. Тому, якщо їх помножити на нескінченно велике число M і взяти зі знаком «-» та, крім того, ввести їх у цільову функцію, яка максимізується, то найбільшого значення функція набуває у випадку, коли всі додаткові змінні будуть дорівнювати нулю.

Величина M в (1.9) має значення штрафу за те, що штучні змінні увійдуть до базису.

Ціль методу – отримати допустимий базисний розв’язок, який не містить штучних додаткових змінних у складі базисних.

c	x	b	c_1	c_2	...	c_n	$-M$...	$-M$
			x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}
$-M$	x_{n+1}	b_1							
...							
$-M$	x_{n+m}	b_m							

$M \gg 0$.

1. Якщо в оптимальному розв’язку M -задачі штучні змінні дорівнюють «0», то отриманий розв’язок є оптимальним розв’язком вихідної задачі.
2. Якщо в оптимальному розв’язку M -задачі хоча б одна штучна змінна ≥ 0 , то вихідна задача не має розв’язку, бо умови несумісні.
3. Якщо M -задача не має розв’язку, то і вихідна задача не має оптимального розв’язку.

При розв’язанні ЗЛП в канонічній формі можуть виникнути такі ситуації:

1) всі рівняння основних обмежень містять одну базисну змінну (тоді можна отримати початковий базисний допустимий розв’язок і застосувати звичайний симплекс-метод);

2) жодне з рівнянь основних обмежень не містить базисних невідомих (тоді вводимо стільки штучних базисних змінних, скільки маємо основних обмежень. Для розв’язання застосовується M -метод);

1) якщо кількість рівнянь основних обмежень містить базисні змінні, а решта їх не має, то штучні змінні вводяться по кількості недостаючих до базису. Для розв’язання застосовується M -метод.

§1.5. Двоїста задача лінійного програмування

Розглянемо ЗЛП у стандартній формі:

$$z = c^T x \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2;$$

$$-8y_1 - y_2 + 5y_3 \geq -4;$$

$$3y_1 + 5y_2 - 8y_3 \geq 3;$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0.$$

Теорема. Якщо одна з двоїстих одна одній задач має оптимальний розв'язок, то і друга задача має оптимальний розв'язок. Значення цільової функції вихідної та двоїстої задач співпадають. Якщо x^* – оптимальний розв'язок вихідної задачі, y^* – оптимальний розв'язок двоїстої задачі, то $c^T x^* = b^T y^*$.

Теорема. Для того, щоб допустимі розв'язки x^* та y^* були оптимальними розв'язками вихідної та двоїстої задач, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:

$$1) y_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

$$Y^* \cdot (A \cdot X^* - B) = 0;$$

$$2) x_j^* \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$X^* \cdot (A \cdot Y^* - C) = 0.$$

Перше обмеження означає, що на оптимальному розв'язку, або i -та компонента розв'язку двоїстої задачі дорівнює нулю (тобто вільна), або відповідне обмеження вихідної задачі виконується як рівність.

Аналогічно і друга умова – або j -та компонента розв'язку вихідної задачі дорівнює нулю, або відповідне обмеження двоїстої задачі виконується як рівність.

Розв'язання двоїстої задачі

Якщо одна з двоїстих задач має стандартну форму, то зводячи її до канонічної форми та розв'язавши симплекс-методом, ми одночасно розв'язали і двоїсту задачу. Якщо вихідна задача має оптимальний розв'язок, то оптимальний розв'язок двоїстої задачі міститься в останній симплекс-таблиці в оціночному рядку в стовпчиках, які відповідають початковим базисним змінним.

Приклад. Ми розв'язали симплекс-методом задачу

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700;$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Отримали, що

$$x_1 = 300,$$

$$x_2 = 200,$$

$$z = -1400.$$

Двоїста задача має вигляд:

$$u = 1700y_1 + 1600y_2 \rightarrow \min$$

$$3y_1 + 2y_2 \geq 2;$$

$$4y_1 + 5y_2 \geq 4;$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0.$$

З тієї ж симплекс-таблиці маємо:

$$y_1 = 2/7;$$

$$y_2 = 4/7;$$

$$u = 1400.$$

§1.6. Економічний аналіз вихідної та двоїстої задач

Розглянемо задачу раціонального використання ресурсів. Нехай підприємство виготовляє n видів виробів, маючи m різних ресурсів. Відомі: 1) витрати ресурсів, які задані матрицею A , елементи якої a_{ij} – витрати i -го виду ресурсів на виробництво одиниці j -го виду виробів; 2) запаси ресурсів, які задаються вектором B , елементи якого b_i – запас i -го виду ресурсів; 3) прибуток від реалізації j -го виду виробів c_j . Необхідно скласти план виробництва виробів із запасів ресурсів, який забезпечить максимальний прибуток підприємству.

Побудуємо відповідну математичну модель. Нехай x_j – план виробництва j -го виду виробів. Набір x_1, x_2, \dots, x_n – це план підприємства по виготовленню усіх видів виробів.

Нехай z – прибуток, який планується при реалізації виготовлених виробів. Тоді

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

Обмеженість ресурсів означає, що витрати кожного з них не повинні перевищувати їх запас. Таким чином, з'являються обмеження:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m. \end{aligned}$$

План виробництва не може визначатися від'ємною величиною, тому

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0, \\ \dots, \\ x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

Підприємство може продавати ресурси, які воно має у розпорядженні. Тоді виникає задача визначення таких цін на ресурси, щоб продаж був не менш ефективним, ніж виробництво товарів. При цьому вважається, що покупець бере увесь запас ресурсів і вимагає, щоб їх вартість була мінімальною.

Побудуємо відповідну модель. Нехай y_i – вартість i -го виду ресурсів, тоді u – вартість усієї покупки

$$u = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min.$$

Основні обмеження відображають вимоги покупця. Прибуток від продажу ресурсів повинен бути не меншим за прибуток від продажу готового виробу.

Прибуток від продажу одного виду ресурсів:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{m1}y_m &\geq c_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m &\geq c_2, \end{aligned}$$

... ..

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n.$$

Ціни на ресурси повинні бути невід'ємними – так з'являються прямі обмеження.

Сформульовані постановки задач утворюють пару двоїстих задач. Розв'язавши одну з них симплекс-методом, ми відразу знаходимо і розв'язок двоїстої задачі.

Властивості розв'язків

1. Компоненти вектора y_i^* – оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Вони показують, наскільки виросте максимальний прибуток підприємства при додатковому залученні до виробництва одиниці i -го виду ресурсів.
2. y_i^* показують граничну ефективність використання даного виду ресурсів.
3. Компоненти y_i^* відображають порівняну дефіцитність ресурсів. Ресурс називається дефіцитним, якщо додаткове залучення його до процесу виробництва приведе до підвищення прибутку, тобто, якщо $y_i^* > 0$, то ресурс дефіцитний. Якщо $y_i^* = 0$ – ресурс не є дефіцитним. З двох дефіцитних ресурсів більш дефіцитний той, чия вартість вища.

Приклад.

Підприємство виготовляє два види виробів і витрачає два види ресурсів. Відомі: витрати ресурсів, їх запаси і прибуток, який буде одержаний від реалізації одиниці продукції.

Види ресурсів	Виріб 1	Виріб 2	Запаси
Сировина 1	3	4	1700
Сировина 2	2	5	1600
Прибуток	2	4	

Необхідно:

- 1) скласти математичну модель задачі (треба так організувати випуск продукції, виходячи з наявних ресурсів, щоб одержати найбільший прибуток);
- 2) скласти математичну модель двоїстої задачі;
- 3) розв'язати одну з них і одержати розв'язок другої;
- 4) проаналізувати розв'язки з економічної точки зору.

Нехай x_1 – запланована кількість виробів 1-го виду, x_2 – другого виду. Прибуток від реалізації цих виробів визначається функцією

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

Запаси ресурсів на виробництво продукції обмежені:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700;$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600;$$

$$x \geq 0, x_2 \geq 0.$$

y_1 – вартість продажу сировини 1-го виду;

y_2 – другого виду.

Цільова функція визначає ціну продажу всіх ресурсів:

$$u = 1700y_1 + 1600y_2 \rightarrow \min$$

$$3y_1 + 2y_2 \geq 2;$$

$$4y_1 + 5y_2 \geq 4;$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Продаж ресурсів повинен бути не менш вигідним, ніж продаж готової продукції.

Розв'язавши задачу симплекс-методом (див. стор. 14), ми одержали оптимальний розв'язок вихідної задачі:

$$x_{\text{опт}} = (300; 200; 0; 0)$$

$$z_{\text{max}} = 1400.$$

Виробів 1-го виду необхідно виробляти 300 одиниць, виробів 2-го виду – 20 одиниць. Основні обмеження канонічної задачі:

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1700;$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 1600,$$

де x_3 та x_4 – додаткові змінні.

В оптимальному розв'язку вони мають нульові значення, тому основні обмеження стандартної задачі виконуються як рівності.

Це означає, що наявні ресурси 1-го та 2-го виду витрачені повністю. Якби одна з додаткових змінних не дорівнювала б нулю, це означало б, що відповідне обмеження виконується як рівність, а сама змінна відповідає остачі невикористаної сировини.

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі

$$y_{\text{опт}} = (2/7, 4/7) \\ u_{\text{min}} = 1400.$$

Вартість одиниці ресурсу 1-го виду становить $2/7$ грошових одиниць, вартість одиниці ресурсу 2-го виду – $4/7$ грошових одиниць.

Виходячи з цін на ресурси, можна зробити висновок, що сировина 1-го та 2-го виду дефіцитна, але сировина 2-го виду більш дефіцитна, бо $4/7 > 2/7$.

$y_1 = 2/7$, отже, виходячи з теореми двоїстості, перше основне обмеження вихідної задачі повинно виконуватись як рівність. Це означає, що ресурси 1-го виду використані повністю.

$y_2 = 4/7$, отже друге основне обмеження вихідної задачі виконується як рівність, і відповідний ресурс використано повністю.

Якби одна з змінних y_1 чи y_2 дорівнювала б нулю, це означало б, що відповідна сировина не є дефіцитною, її вартість дорівнює нулю, а відповідна нерівність виконувалась би як рівність. Це означало б, що є остача даної сировини.

Виходячи з теореми двоїстості, $x_1 \neq 0$ та $x_2 \neq 0$. Це означає, що основні обмеження двоїстої задачі повинні виконуватись як рівності. З економічної точки зору це означає, що витрати при виробництві товару збігаються з прибутком від реалізації цього товару.

Якщо б $x_1 = 0$, чи $x_2 = 0$, то відповідне обмеження двоїстої задачі виконувалось би як нерівність, тобто витрати при виробництві перевищували б прибуток від продажу і відповідний товар виробляти було б невигідно.

§1.7. Двоїстий симплекс-метод

Розглянемо задачу ЛП у вигляді:

$$z = c^T x \rightarrow \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0.$$

Припустимо, що праві частини основних обмежень містять від'ємні значення, а самі обмеження містять базисні змінні у явному вигляді. Якщо $b \geq 0$, то це була б канонічна ЗЛП у базисній формі. При складанні симплекс-таблиці для такої задачі може виникнути ситуація, коли всі оцінки $\Delta_j \geq 0$. Така задача називається канонічною задачею у двоїстій базисній формі.

Ідея методу полягає в переході від одного базисного розв'язку до другого (для яких виконується критерій оптимальності), поки серед них не з'явиться допустимий розв'язок.

Основний симплекс-метод називається методом послідовного покращення базисних допустимих розв'язків. Двоїстий симплекс-метод називається методом послідовного уточнення оцінок.

В основному симплекс-методі перебираються базисні допустимі розв'язки, поки не знайдеться оптимальний. В двоїстому симплекс-методі перебираються базисні розв'язки з виконаним критерієм оптимальності, поки не буде отриманий допустимий розв'язок.

Алгоритм двоїстого симплекс-методу

1. Якщо серед елементів b_i стовпчика b немає від'ємних, то критерій оптимальності виконаний, базисний розв'язок допустимий та оптимальний.
2. Якщо серед елементів b_i стовпчика b є від'ємні, то обираємо рядок з найменшим значенням b_r . Рядок з номером r – ключовий.

Якщо всі елементи ключового рядка невід'ємні, задача розв'язків не має (цільова функція необмежена).

3. Якщо серед елементів ключового рядка є від'ємні, то для них обчислюється оцінка $\theta_j = \frac{\Delta_j}{a_{rj}}$.

Серед цих оцінок θ_j обирається максимальна, яка визначає ключовий стовпчик з номером s . Елемент a_{us} ключовим. З його допомогою перетворюється таблиця [3].

Розділ 2

Транспортна задача

§2.1. Постановка транспортної задачі і побудова її математичної моделі

Класична транспортна задача (ТЗ) полягає у пошуку найбільш економічного плану перевезення однорідного продукту (чи взаємозамінних продуктів) з пунктів виробництва (станцій відправлення) до пунктів споживання (станцій призначення), ефективність якого будемо оцінювати за критерієм найменшої вартості перевезення.

Нехай на m пунктах відправлення A_1, \dots, A_m зосереджено a_1, \dots, a_m одиниць деякого однорідного вантажу. Цей вантаж необхідно перевезти в n пунктів призначення B_1, \dots, B_n , причому в кожний з них потрібно завезти відповідно b_1, \dots, b_n одиниць цього вантажу.

Вартість перевезення c_{ij} одиниці вантажу з пункту A_i в пункт B_j вважається заданою.

Треба скласти такий план перевезення, щоб загальна вартість його виявилася мінімальною.

Заради простоти будемо вважати, що загальний запас вантажу на всіх станціях відправлення дорівнює загальній сумі потреб всіх пунктів призначення, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2.1)$$

Таку задачу називають *ТЗ з правильним балансом* (або *закритою ТЗ*). Якщо умова (2.1) порушується, таку задачу називають *ТЗ з неправильним балансом* (або *відкритою ТЗ*).

Заради простоти викладок і для наочності всі дані транспортної задачі (вартості c_{ij} , запаси a_i , потреби b_j) заносять в спеціальну таблицю, яку називають матрицею перевезень (табл.2.1).

Оскільки наперед невідомо, скільки вантажу потрібно перевезти з пункту A_i до пункту B_j , щоб план перевезень був оптимальним, то позначимо його через x_{ij} .

Всі невідомі занесемо в табл.2.2.

Таблиця 2.1.

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
...
A_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...
A_m	c_{m1}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Таблиця 2.2

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	a_1
...
A_i	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}	a_i
...
A_m	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	...	b_j	...	b_n	

Для складання математичної моделі задачі скористаємося такими міркуваннями: кількість вантажу, який планується перевезти до пункту B_j з усіх пунктів відправлення, з одного боку, дорівнює $\sum_{i=1}^m x_{ij}$, з іншого — b_j .

Оскільки загальна сума запасів дорівнює загальній сумі потреб, то ці величини рівні між собою, тобто

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2)$$

З кожного пункту відправлення до пунктів призначення відправлено таку кількість вантажу:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (2.3)$$

Разом системи (2.2) і (2.3) складають систему обмежень транспортної задачі. В розгорнутому вигляді вона має вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \quad (2.4)$$

Систему обмежень (2.4) легко скласти, якщо скористатися табл.2.2. Для цього слід пам'ятати, що сума всіх x_{ij} , розміщених в i -му рядку, дорівнює запасу a_i у пункті відправлення A_i , а сума x_{ij} з j -го стовпчика дорівнює потребам b_j пункту споживання B_j .

Вартість перевезення вантажу з пункту A_i в пункт B_j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Щоб знайти загальну вартість перевезення, треба просумувати вартості перевезення всіх клітинок. Отже, загальна вартість перевезення

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \quad (\min). \quad (2.5)$$

Виходячи з економічної постановки задачі, тепер можемо сформулювати її математичну модель: *серед всіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь (2.4) знайти такий, при якому форма z в (2.5) набуде найменшого значення.*

Із фізичних міркувань випливає, що оптимальний розв'язок транспортної задачі завжди існує.

Теорема. Ранг матриці системи обмежень транспортної задачі (2.4) визначається за формулою

$$R = m + n - 1, \quad (2.6)$$

де m — число пунктів відправлення, а n — споживання.

§2.2. Метод найменшої вартості пошуку опорних планів транспортної задачі

Оскільки транспортна задача є задачею ЛП, то її можна розв'язувати симплекс-методом. Однак через просту будову системи обмежень (2.4) симплекс-метод у цьому разі значно спрощується. Це вже можна помітити на прикладі відшукування початкових планів. Заповнюють клітинки матриці перевезень A_iB_j меншим з чисел її рядка і стовпчика, тобто числом $\min(a_i, b_j)$.

Починають заповнювати ті клітинки таблиці, де вартості перевезення на даному етапі є мінімальними (табл.2.3).

Таблиця 2.3

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	1 45	3	4	4 15	60
A_2	2 22	3	2 13	2	3	35
A_3	3	5	2 7	4 18	4 15	40
Потреби	22	45	20	18	30	135

Найменша вартість в клітинці A_1B_2 , тому заповнюємо її. Наступна мінімальна вартість 2, в клітинках A_2B_1 , A_2B_3 , A_2B_4 , A_3B_3 . Можна вибрати будь-яку із цих клітинок, наприклад A_2B_1 , потім A_2B_3 , A_3B_3 . Клітинку A_2B_4 не заповнюємо, тому що запаси A_2 вичерпано. Вибираємо клітинку A_3B_4 з мінімальною вартістю 4, з вартістю 3 всі клітинки заповнені і т.д.

Зауваження. Число базисних клітинок завжди має дорівнювати рангу ТЗ, у протилежному випадку доповнюємо їх до відповідної кількості за рахунок вільних з базисним значенням 0.

§2.3. Критерій оптимальності опорних розв'язків за методом потенціалів

Ми вже вміємо знаходити початкові опорні плани. Зрозуміло, що опорні плани в табл.3 не є оптимальними. Критерій оптимальності знаходимо із співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Запишемо двоїсту задачу до транспортної, математична модель якої задана формулами (2.4) і (2.5).

$$\left\{ \begin{array}{l|l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1 & \alpha_1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m & \alpha_m \\ \hline x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1 & \beta_1 \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n & \beta_n \end{array} \right.$$

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (\min).$$

Введемо двоїсті змінні $\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n$ і за правилами складання двоїстих задач складемо двоїсту задачу, система обмежень якої має вигляд

$$(2.7) \quad \alpha_i + \beta_j \leq c_{ij}$$

$$(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Нерівності (2.7), враховуючи співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач, можна конкретизувати:

а) для базисних невідомих (клітинок)

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}; \quad (2.8)$$

б) для вільних невідомих (клітинок)

$$\alpha_i + \beta_j \leq c_{ij} . \quad (2.9)$$

Зауваження. Взагалі кажучи, у співвідношеннях (2.9) ми мали б писати знак строгої нерівності, але щоб врахувати факти виродженості задачі, ми будемо допускати у формулах (2.9) і рівності, що не суперечить співвідношенням між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Цей метод називають методом потенціалів. Розглянемо його на прикладі табл.2.4.

Поставимо у відповідність пунктам A_i потенціали α_i , $B_j - \beta_j$ і побудуємо систему рівнянь

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \quad (2.10)$$

для всіх базисних клітинок.

Таблиця 2.4

Пункти	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	4 ①	1 45	3 ①	4 ①	4 15	0
A_2	2 2	3 ③	2 ①	2 18	3 15	-1
A_3	3 20	5 ④	2 20	4 ①	4 ①	0
β_j	3	1	2	3	4	

Для базисної клітинки A_1B_2 рівняння системи має вигляд

$$\alpha_1 + \beta_2 = 1;$$

$$A_2B_1 - \alpha_2 + \beta_1 = 2 \text{ і т.д.}$$

Для відшукування потенціалів α_i , β_j з табл.2.4 дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 1, \\ \alpha_1 + \beta_5 = 4, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 2, \\ \alpha_2 + \beta_5 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_1 = 3, \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2. \end{cases} \quad (2.11)$$

Система рівнянь (2.11) складається з рівнянь, до кожного з яких входять дві невідомі. Всього маємо 7 рівнянь і 8 невідомих. Ранг системи (2.10) дорівнює 7 (у загальному випадку $m + n - 1$). Тому одну з невідомих беруть за вільну (наприклад, α_1). Покладемо $\alpha_1 = 0$. Із першого рівняння знайдемо β_2 , з другого β_5 , з п'ятого α_2 і т.д.

В результаті розв'язок системи (2.11) має вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \alpha_2 = -1, \\ \alpha_3 &= 0; \\ \beta_1 &= 3, \beta_2 = 1, \beta_3 = 2, \\ \beta_4 &= 3, \\ \beta_5 &= 4. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Теорема. Для того, щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - (\alpha_i + \beta_j), \quad (2.13)$$

обчислені для вільних клітинок, де α_i і β_j — розв'язки системи (2.10), були невід'ємними.

Перевіримо на оптимальність розв'язок табл.2.4. Потенціали задаються розв'язками (2.12). За формулами (2.13) обчислюємо коефіцієнти:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 4 - (0 + 3) = 1, \\ \gamma_{13} &= 3 - (0 + 2) = 1 \\ &\text{і т.д.} \end{aligned}$$

Ці числа поміщаємо в табл.2.4 і обводимо кружком.

Із табл.2.4 випливає, що всі коефіцієнти

$$\gamma_{ij} \geq 0$$

для вільних клітинок. Тому знайдений опорний план буде оптимальним і

$$x_{\text{ОПТ}} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 0 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & 0 & 18 & 15 \\ 20 & 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$z_{\text{min}} = 290.$$

Для обчислення потенціалів не обов'язково складати систему рівнянь (2.11). Їх можна знайти безпосередньо за таблицею, користуючись таким правилом: *невідомий потенціал дорівнює різниці вартості базисної клітинки і значення відомого потенціалу.*

Наприклад, покладемо с табл.2.4 $\alpha_1 = 0$. Із базисних клітинок A_1B_2 і A_1B_5 знаходимо β_2 і β_5 як різницю між вартістю і $\alpha_1 = 0$. У стовпчику B_5 є ще одна базисна клітинка A_2B_5 , тому $\alpha_2 = 3 - 4 = -1$; із клітинок A_2B_1 аналогічно знаходимо β_1, β_4 і т.д.

Проілюструємо цей метод за допомогою табл.2.5.

План не є оптимальним, тому що є від'ємні значення γ_{ij} у клітинках A_2B_1, A_3B_1, A_3B_3 .

Таблиця 2.5

						α_i
	4	1	3	4	4	0
	22	38				
	2	3	2	2	3	2
		7		20	8	
	3	5	2	4	4	4
				10	30	
β_j	4	1	0	0	0	

§2.4. Пошук опорних розв'язків за допомогою циклу перерахунку

Із табл.2.5 випливає, що план неоптимальний, оскільки є від'ємні коефіцієнти γ_{ij} (γ_{21} , γ_{31} , γ_{33}), тому необхідно вказати способи переходу до наступного опорного плану таким чином, щоб значення цільової функції мінімізувалось. Вкажемо метод, який дає змогу це зробити. Введено деякі означення.

Означення. Циклом в матриці будемо називати замкнену ламану лінію, вершини якої розміщені в клітинках матриці перевезень і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпчику.

Можливі цикли, які схематично зображені на рис. 2.1.

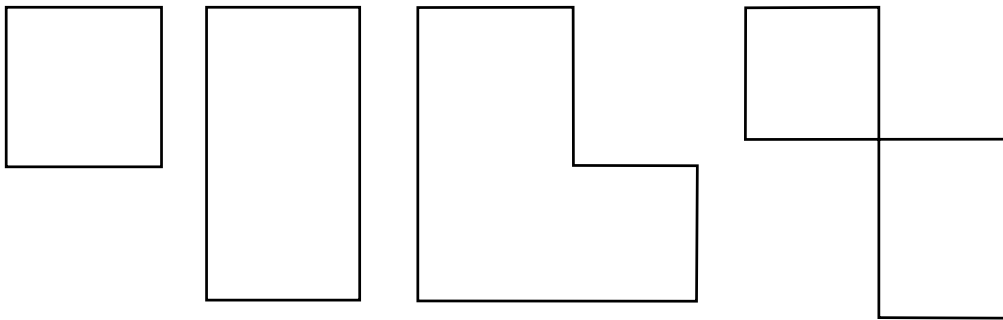


Рис.2.1

Перпендикулярні ламані циклу в матриці можуть перетинатися, а точки перетину не будуть вершинами циклу.

Означення. Вершини одного і того самого відрізка циклу будемо називати *сусідніми*.

Означення. Цикл, сусіднім вершинам якого поставлені у відповідність протилежні знаки («+», «-»), називають *означеним*.

Означення. Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітинці, а всі інші в базисних, називають *циклом перерахунку*.

Наприклад, в табл.2.5 для клітинки A_3B_1 цикл перерахунку зображено на рис. 2.2.

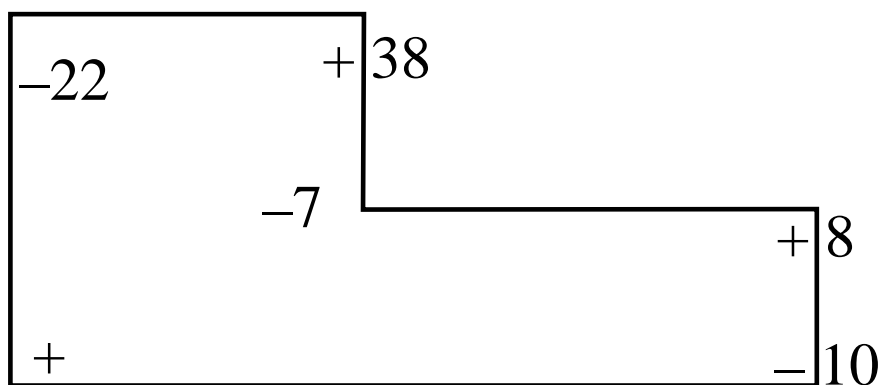


Рис. 2.2

Домовимося завжди у вільній клітинці у відповідність ставити знак «+».

Означення. Зсувом по циклу перерахунку на число θ називають таку операцію, при якій в додатній вершині додається одне і те саме число θ , а у від'ємних віднімається.

Теорема. Зсув за означеним циклом в матриці перевезень перетворює один розв'язок системи обмежень транспортної задачі в інший цієї самої задачі.

Теорема. Для будь-якої вільної клітинки існує лише один цикл перерахунку.

За допомогою зсуву за циклом перерахунку можна перейти до нового опорного плану, в якому значення цільової функції буде меншим, ніж у попередньому. Проілюструємо це за допомогою рис. 2.3:

$$\theta = \min(22; 7; 10) = 7.$$

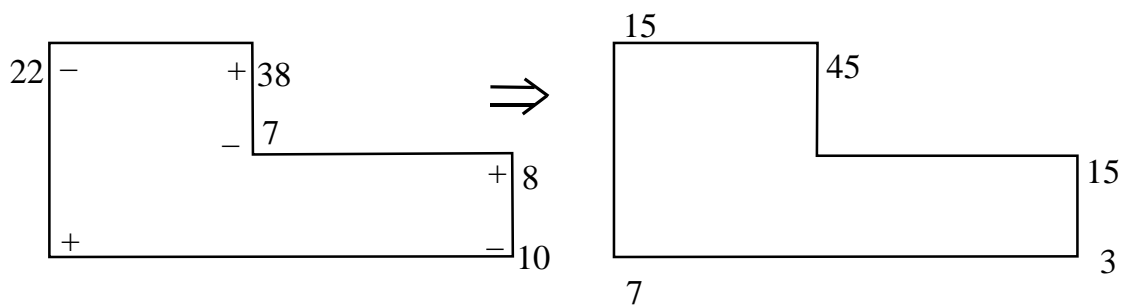


Рис. 2.3

Виберемо у від'ємних вершинах базисне значення $\min(22; 7; 10) = 7$ і зробимо зсув на цю величину. Для того, щоб число базисних клітинок не змінилося, клітинку, на значення якої здійснюємо зсув, зробимо вільною. Додамо в додатних вершинах циклу (рис. 2.3) число 7, а у від'ємних віднімаємо 7. В результаті дістанемо опорний план (табл.2.6).

Таблиця 2.6

4	15	1	45	3	4	4
2		3		2	2	3
3		5		2	4	4
					3	30

Зауваження. Значення базисних клітинок, які не брали участі в циклі перерахунку, в новій таблиці залишаються без змін

Зауваження. У вироджених задачах часто зсув треба робити на число 0, яке не змінює базисних значень. Тоді цей нуль переводять у вільну клітинку циклу перерахунку, залишаючи попередню вільною

За методом потенціалів перевіряємо опорний план на оптимальність. Якщо розв'язок оптимальний, то обчислюємо мінімальне значення функції, а якщо ні, то знову будуюмо цикл перерахунку і за допомогою зсуву переходимо до наступного опорного плану. Процес продовжують доти, доки розв'язок не стане оптимальним.

§2.5. Транспортна задача з неправильним балансом

На практиці транспортні задачі, в яких загальна сума запасів не дорівнює загальній сумі потреб, називають транспортними задачами з неправильним балансом (іноді їх називають відкритими). Розв'язують такі задачі розподільчим методом, зводячи їх попередньо до відповідної задачі з правильним балансом. Для цього вводять фіктивний пункт призначення чи відправлення в залежності від дефіциту потреб чи запасів. Вартості у фіктивних пунктах вважають рівними нулю (щоб не змінювалась загальна вартість перевезень).

Приклад. Нехай транспортну задачу задано матрицею перевезень

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

і запасами та потребами відповідно

$$a_i = (60, 40),$$

$$b_j = (20, 30, 45, 15).$$

Загальні суми запасів $60 + 40 = 100$ і потреб $20 + 30 + 45 + 15 = 110$ різні, тому треба ввести фіктивний пункт постачання із запасами, що дорівнюють різниці $110 - 100 = 10$, і нульовими вартостями.

Зауваження. При розв'язуванні транспортних задач з неправильним балансом доцільно будувати таблиці дещо в іншій формі (табл. 2.7).

Таблиця 2.7

	b_j	20	30	45	15	α
a_i						

60	3 —	4 30	6 30	7 —	-2
40	2 20	5 —	8 5	1 15	0
10	0 —	0 —	0 10	0 —	-8
β	2	6	8	1	

Знайдемо початковий опорний план методом найменшої вартості. При цьому у розрахунок фіктивний пункт не враховуватимемо, тому що всі вартості в ньому найменші (нулі), а на загальну вартість вони не впливають. Остачу після заповнення основних клітинок заносимо до відповідних клітинок фіктивного пункту. Для наочності в пунктах, де використані всі запаси або потреби, вільні клітинки, що залишилися, позначаємо знаком «—». У нашому прикладі в кінці непозначеною залишилася клітинка A_3B_3 , в якій розміщуємо залишок 10 од.

Розв'язок, знайдений методом найменшої вартості, не є оптимальним, причому умова оптимальності порушується лише для клітинки A_2B_2 : $\gamma_{22} = 5 - (6 + 0) = -1$. Будуємо для цієї клітинки цикл перерахунку і в ньому робимо зсув на число $\theta = 5$ (цього досягнемо також, якщо замінимо неправильний квадрат $[A_2B_2]$ на правильний (зсувом на $\theta = 5$)).

4 30	6 30	\Rightarrow	4 25	6 35
5 5	8 5		5 8	8 5

В результаті зсуву дістанемо табл.2.8.

Таблиця 2.8

20	30	45	15	
3 —	4 25	6 35	7 —	-1
2 20	5 5	8 —	1 15	0
0 —	0 —	0 10	0 —	-7
2	5	7	1	

Легко перевірити, що опорний розв'язок табл.2.8 оптимальний,

$$x_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 35 & 0 \\ 20 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$z_{\text{min}} = 4 \times 25 + 6 \times 36 + 2 \times 20 + 1 \times 15 = 365 \text{ од.}$$

Значення оптимального плану у фіктивному пункті можна тлумачити таким чином: пункт B_3 недоодержує 10 од. вантажу.

Розділ 3

ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

§3.1. Нерівність Гоморрі

У попередніх розділах розглядалися задачі математичного програмування, в яких змінні мали властивості подільності та адитивності. Це рівносно лінійності цільової функції та системи обмежень. У таких випадках змінні в оптимальному розв'язку нерідко набували і дробових значень, що з економічної точки зору пояснити важко.

Відмова від цих припущень приводить до нового класу задач – задач цілочисельного програмування.

Загальна постановка такої задачі має вигляд:

знайти

$$(\max) z = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (3.1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$x_j \text{ } (j = 1, 2, \dots, n) \text{ – цілі числа.} \quad (3.3)$$

(Останні два обмеження $x_j \geq 0$, x_j – цілі числа можна записати простіше – $x_j = 0, 1, 2, 3 \dots$)

Із відомих задач, в яких змінні можуть набувати лише цілих значень, такою може бути задача про використання сировини. Якщо в ній змінною

x_j (або однією з них) позначено види продукції, що мають велику вартість, то дробове значення не має змісту в рамках реальної задачі (наприклад, турбіни для гідроелектростанції).

Прикладом задачі цілочисельного програмування можуть бути транспортна задача і задача про комівояжера. Нагадаємо, зміст останньої: комівояжеру треба відвідати кожне з n міст, починаючи і закінчуючи свій маршрут в одному й тому самому місті і не заїжджаючи двічі в одне й те саме місто.

Якщо між містами i та j немає прямого маршруту, то покладають $c_{ij} = \infty$ (на практиці достатньо велике число m). Крім того, можливо, що:

$$c_{ij} \neq c_{ji}.$$

Математична модель задачі має вигляд:

$$\min \quad z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}, \quad (c_{ij} = \alpha)^*, \quad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (\text{від'їзд}), \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, n), \quad (\text{приїзд}),$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо цикл включає переїзд з міста } i \text{ в } j, \\ 1 & \text{– в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Можна навести і багато інших задач, в яких за фізичним змістом задачі виникає умова цілочисельності.

Очевидно, що задача цілочисельного програмування буде складнішою, ніж задача лінійного програмування, оскільки вона включає додаткову умову (3.3). Тому оптимальне значення в задачі (3.1)-(3.3) не більше, ніж у відповідній задачі без умови цілочисельності. Якщо оптимальний розв'язок вихідної задачі виражається у цілих числах, то цей розв'язок буде одночасно і розв'язком задачі цілочисельного програмування. В протилежному випадку шуканий розв'язок можна одержати за допомогою заокруглення.

По-перше, така постановка проблеми ускладнюється тим, що коефіцієнти a_{ij} у системі обмежень (3.2) можуть бути від'ємними і тоді невідомо, як краще заокруглювати. По-друге, немає простих критеріїв, які б дали змогу визначити, що знайдений план є оптимальним. Тому виникає потреба у створенні прямих методів пошуку цілочисельних розв'язків.

Відомі методи пошуку таких розв'язків можна поділити на дві групи:
 1) всі розв'язки задачі (3.1), (3.2) є цілочисельними;
 2) одна частина невідомих задачі цілочисельна, а друга може бути довільною.

Методи пошуку оптимальних розв'язків задач першої групи значно простіші. Проте їх поєднує одна особливість: вони легко розв'язуються на ЕОМ. У задачах невеликої розмірності часто вдається використати спеціальні властивості задачі і створити метод, який дає змогу швидко знайти оптимальний план.

Розглянемо детальніше пошук розв'язку задачі цілочисельного програмування, в якій всі змінні цілочисельні, методом відтинання площин (методом Гоморрі).

Означення. Цілою частиною числа a називають найбільше ціле число, яке менше або дорівнює йому (позначають $[a]$):

$$\left[\frac{10}{3} \right] = 3; \quad [6] = 6; \quad [-2,3] = -3.$$

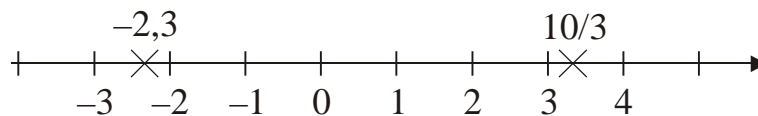


Рис. 3.1

Означення. Дробовою частиною числа a називають різницю між числами a та її цілою частиною (позначають $f(a)$):

$$f(a) = a - [a]. \tag{3.6}$$

Наприклад (рис. 3.1):

$$f\left[\frac{10}{3}\right] = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3},$$

$$f(-2,3) = -2,3 - (-3) = 0,7,$$

$$f(6) = 6 - 6 = 0.$$

Очевидно,

$$f(a) \geq 0,$$

причому

$$f(a) = 0$$

тоді і тільки тоді, коли a – ціле число. В теорії чисел для дробової частини числа виводять такі властивості:

$$1) f(a + b) \leq f(a) + f(b) \quad (3.7)$$

$$2) \text{ якщо } n \geq 0 \text{ – ціле,} \\ f(n a) \leq n f(a).$$

Властивості 1) та 2) легко перевірити. Властивість 1) підтверджує простий приклад:

$$f(-2/3 + 5/3) = 0$$

$$f(-2/3) + f(5/3) = 1/3 + 2/3 = 1.$$

У вигляді рівності властивості 1), 2) можна записати лише для цілих додатних чисел a, b і n .

Для обмеження задачі (3.1), (3.2) властивості 1), 2) дають змогу записати нерівність

$$\sum_{j=1}^n x_j f(a_{ij}) \leq f(b_j), \quad (3.8)$$

яку називають нерівністю Гоморрі. Вона відіграє важливу роль у пошуку цілочисельних розв'язків. Наприклад, обмеження задачі має вигляд:

$$2,3x_1 + 0,7x_2 - 1,4x_3 + x_4 = 0,1.$$

Нерівність Гоморрі перетворює його в інше обмеження

$$f(2,3x_1 + 0,7x_2 - 1,4x_3 + x_4) \leq 0,3x_1 + 0,7x_2 + 0,6x_3 \geq 0,9.$$

§3.2. Метод Гоморрі

Алгоритм методу Гоморрі можна описати за допомогою наступних кроків.

КРОК 1. Знайдемо розв'язок задачі (3.1), (3.2) без умови цілочисельності.

КРОК 2. Якщо оптимальний план цілочисельний, то задача розв'язана. У протилежному випадку вибираємо базисну змінну з найбільшою дробовою

частиною і за обмеженням цієї базисної невідомої складаємо нерівність Гоморрі.

Крок 3. До обмежень задачі додаємо обмеження з кроку 2 (нерівність Гоморрі). Розв'язуємо розширену задачу і повертаємось до кроку 1. Процес повторюємо доти, доки розв'язок не буде цілочисельним або симплекс-таблиці не покажуть, що задача не має розв'язку.

Весь алгоритм методу можна зобразити у вигляді блок схеми (рис. 3.2).

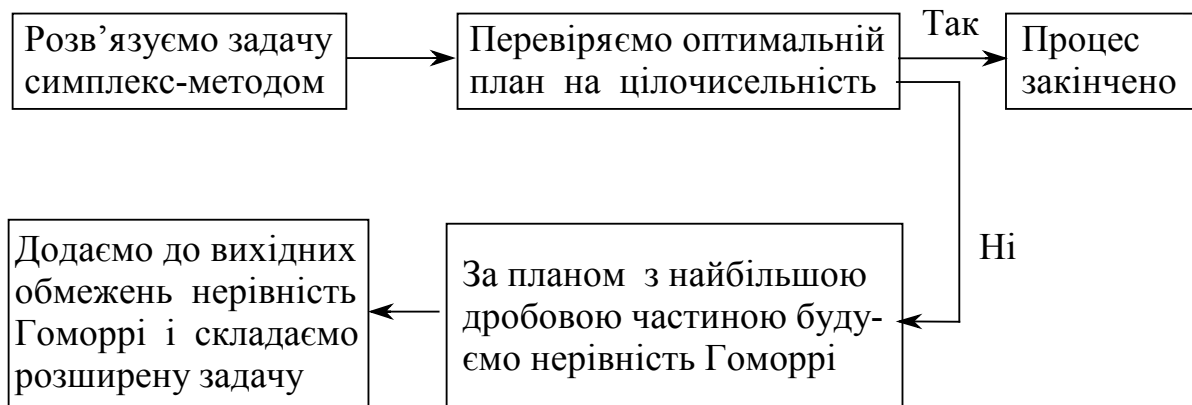


Рис. 3.2

Детальніше процес методу розглянемо на прикладі.

Приклад. На придбання обладнання для нової виробничої ділянки виділено 20 у.г.о. Обладнання можна розмістити на площі, меншій ніж 38 м². Підприємство може замовити обладнання двох типів *A* та *B* з такими даними:

A) вартість 5 у.г.о.; потребує площі 8 м²; випускає 7 тис. од. продукції за зміну;

B) вартість 2 у.г.о.; потребує площі 4 м²; випускає 3 тис. од.

Треба розрахувати оптимальний варіант придбання обладнання, який би забезпечив максимальний обсяг продукції. Позначимо через x_1 кількість одиниць обладнання *A*, через x_2 – *B*, тоді математичну модель задачі формуємо таким чином:

знайти $(\max) z = 7x_1 + 3x_2$ за таких обмежень:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 38, \\ x_j = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Записуємо канонічну форму задачі

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20, \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 = 38, \end{cases}$$

$$x_j = 0, 1, 2, \dots$$

$$(\max) z = 7x_1 + 3x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 - 7x_1 - 3x_2 = 0.$$

Результати обчислень подані в табл. 3.1.

Остання симплекс-таблиця дає оптимальний план, але він не є цілочисельним. Тому переходимо до кроку 2. Дробовому плану відповідає обмеження:

$$x_2 - 2x_3 + 5/4x_4 = 15/2. \quad (3.9)$$

Нерівність Гоморрі для нього має вигляд:

$$1/4x_4 \geq 1/2$$

$$[f(x_2 - 2x_3 + 5/4x_4) \geq 1/4x_4 \text{ і } 1/2].$$

До обмежень початкової задачі додаємо обмеження (3.9) і задачу знову розв'язуємо симплекс-методом. Для зменшення обчислень дописуємо його до канонічної форми оптимальної симплекс-таблиці:

Таблиця 3.1

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	x_0	0	-7	-3	0	0
	1	x_3	20	$\boxed{5}$	2	1	0
	2	x_4	38	8	4	0	1
II	0	x_0	28	0	-1/5	7/5	0
	1	x_1	4	1	2/5	1/5	0
	2	x_4	6	0	$\boxed{4/5}$	-8/5	1
III	0	x_0	59/2	0	0	0	1/4
	1	x_1	1	1	0	1	-1/2
	2	x_2	15/2	0	1	-2	5/4

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2}, \\ \frac{1}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}, \\ x_j = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$(\max) \quad z = \frac{59}{2} - x_3 - \frac{1}{4}x_4.$$

Канонічну форму останньої задачі знайдемо за двоїстим симплекс-методом:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{5}{4}x_4 = \frac{15}{2}, \\ \frac{1}{4}x_4 - x_6 = \frac{1}{2}, \\ x_j = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$(\max) \quad z = \frac{59}{2} - x_3 - \frac{1}{4}x_4.$$

Таблиця 3.2

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	x_0	$59/2$	0	0	$1/4$	0	0
	1	x_1	1	1	0	1	$1/2$	0
	2	x_2	$15/2$	0	1	-2	$5/4$	0
	3	x_5	$-1/2$	0	0	0	$-1/4$	1
II	0	x_0	29	0	0	1	0	1
	1	x_1	2	1	0	1	0	2
	2	x_2	5	0	1	-2	0	5
	3	x_3	2	0	0	0	1	-4

Оскільки у нульовому рядку симплекс-таблиці немає від'ємних чисел, то план оптимальний. Крім того, він цілочисельний.

$$x_{\text{опт}} = (2, 5, 0, 2, 0),$$

$$z_{\max} = 29.$$

Задачу розв'язано. У даному прикладі оптимальне значення можна знайти за допомогою заокруглення. Але просте заокруглення дає значення:

$$x_1 = 1, x_2 = 7, z = 7 + 3 \times 7 = 28.$$

Серед методів цілочисельного програмування, в яких накладаються умови цілочисельності на частину змінних, найпоширенішим є метод гілок і границь. За цим методом із деякої множини задач лінійного програмування за певними правилами вибирають одну і розв'язують її доти, доки потрібний розв'язок не буде знайдено ([1], [2], [15]). Крім того, є наближені методи пошуку цілочисельних розв'язків [2].

Розділ 4

Задачі нелінійного програмування

§4.1. Особливості задач нелінійного програмування

У задачах лінійного програмування, які розглядалися раніше, всі невідомі входили як до системи обмежень, так і до цільової функції, у першому степені. Тому ці задачі були досить простими у постановці і за методами розв'язування.

Зрозуміло, що ряд економічних задач допускають такі математичні моделі, до яких невідомі або деяка їх частина входять нелінійно. У більшості випадків нелінійність моделі обумовлюється, як правило, структурними співвідношеннями економічного процесу або непропорційністю зміни витрат, випуску продукції, показників якості.

У загальній постановці задачі нелінійного програмування (НЛП) записують так:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$(\max) z(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.2)$$

де $F_1(x), \dots, F_m(x), z(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – довільні функції.

У конкретних задачах частина обмежень (або всі) можуть бути нерівностями. Крім того, на невідомі можуть накладатися умови невід'ємності і т.п.

Однією з основних особливостей задач НЛП є можливість різними способами задавати цільову функцію. Якщо в лінійному випадку вона була строго монотонною і досягала свого оптимального значення лише у вершині многокутника розв'язку, то тут картина зовсім інша.

Друга особливість задач НЛП впливає із порушення властивості опуклості многокутника розв'язків задач ЛП. Легко навести приклади задач, де область розв'язків задачі НЛП буде багатозв'язною. Природньо, що чисельна реалізація моделей нелінійного програмування є значно більш складною, чим, скажемо, подібних моделей лінійного програмування. Авжеж, відповідні чисельні реалізації теперішнього часу відносяться до числа актуальних задач сучасної обчислювальної математики.

§4.2. Геометрична інтерпретація задач нелінійного програмування

Розглянемо випадок двох змінних з обмеженнями-нерівностями.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$z = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 5$$

за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Система обмежень лінійна, тому область розв'язків складається з многокутника розв'язків.

Неважко помітити, що цільову функцію можна записати таким чином:

$$z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2.$$

Отже z є квадратом радіуса кола. При фіксованому z маємо коло з центром у точці $C(1,2)$, а найбільше концентричне коло буде проходити через точку $B(6,0)$ многокутника розв'язків. Тому

$$z_{\min} = (6 - 1)^2 + (0 - 2)^2 = 29.$$

Аналогічно:

$$z_{\max} = (1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 = 0..$$

В даному випадку найменше значення функції міститься в області розв'язків, а найбільше — на її границі (рис. 4.1). Якщо в цьому ж прикладі розглянути функцію:

$$z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2,$$

то найменше значення буде в точці C , а найбільше в точці O (рис.4.2).

$$z_{\max} = (4-0)^2 + (4-0)^2 = 32.$$

$$z_{\min} = \left(\frac{4+4-6}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2.$$

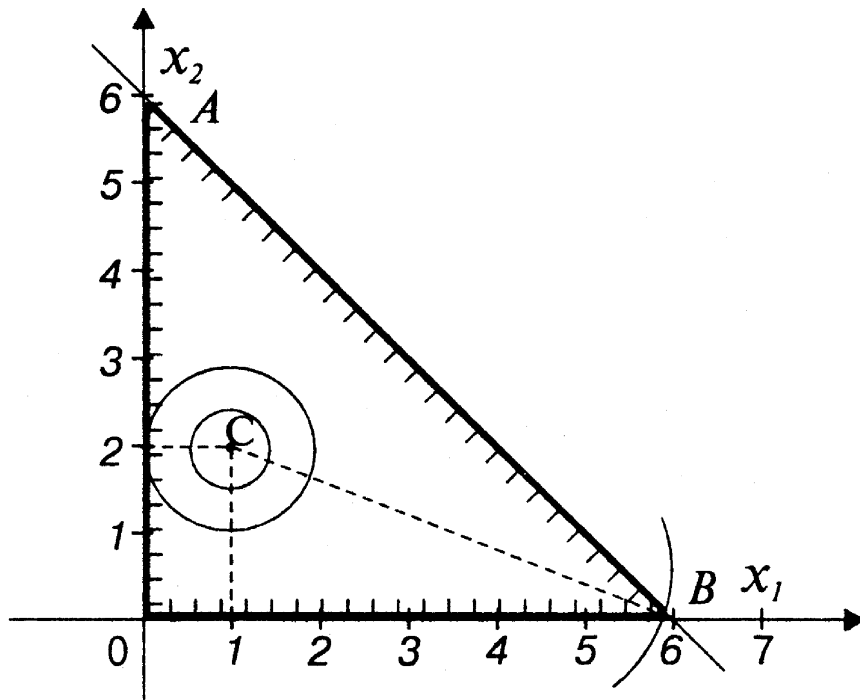


Рис. 4.1

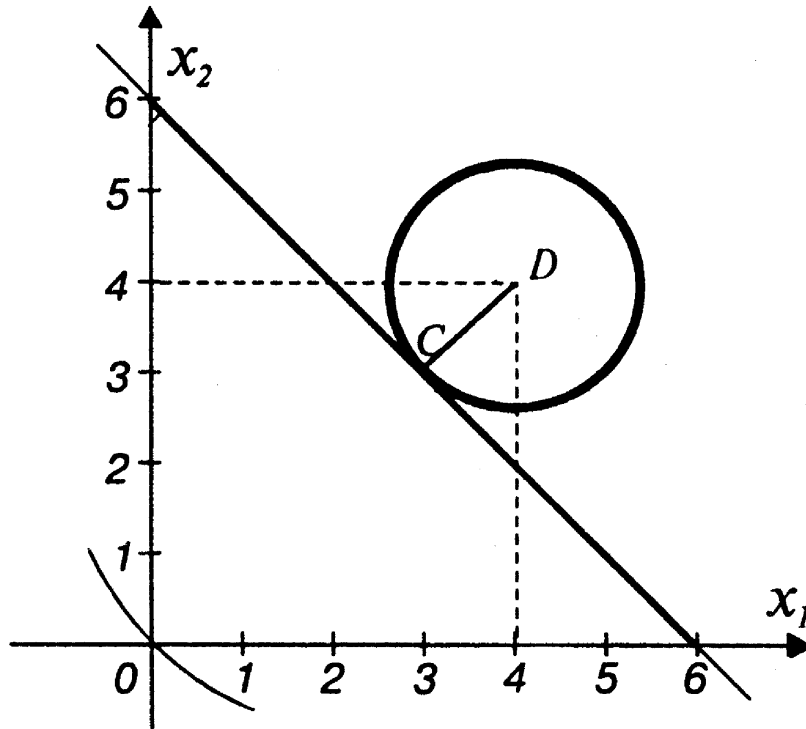


Рис. 4.2

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 8$ за таких обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 \times x_2 \leq 3, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ 0 \leq x_2 \leq 6. \end{cases}$$

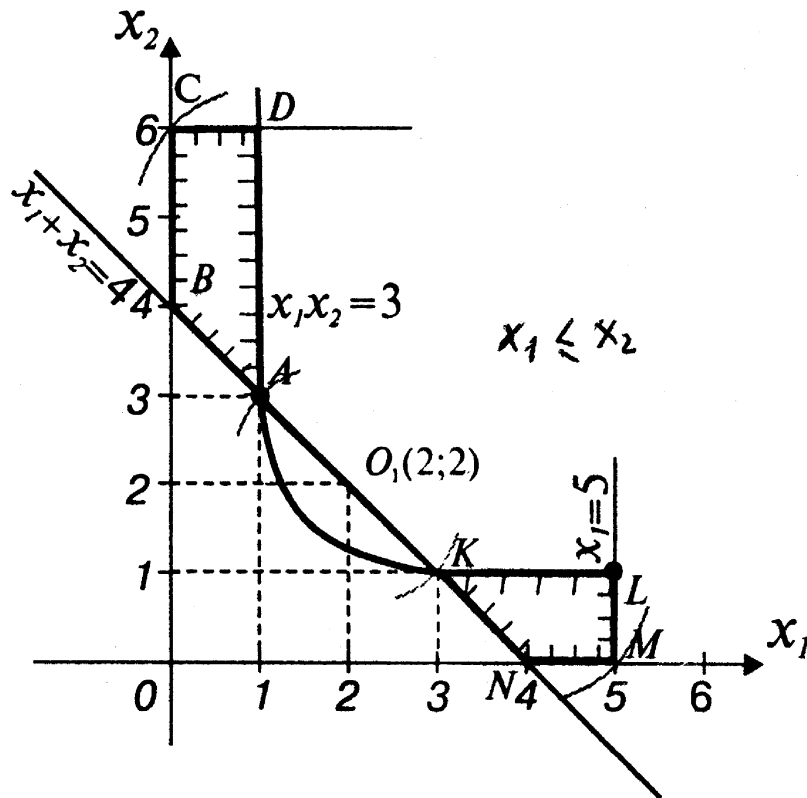


Рис. 4.3

З рис. 4.3 випливає, що область розв'язків є незв'язною — складається з двох окремих частин. Маємо два однакових локальних мінімуми в точках А і К. Координати цих точок можна знайти як розв'язок системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, & x_2 = 3, & x_2 = 1, \\ x_1 x_2 \leq 3, & x_2 = 1, & x_2 = 3, \end{cases}$$

$$z_{\min} = 1 - 4 \times 1 + 3 - 4 \times 3 + 8 = 2.$$

Легко перевірити, що маємо і два локальні максимуми в точках $C(0,6)$ і $M(5,0)$.

$$z(M) = 5^2 - 4 \times 5 + 8 = 13, \quad z(C) = 6^2 - 4 \times 6 + 8 = 20.$$

§4.3. Задачі нелінійного програмування без обмежень. Необхідні та достатні умови оптимальності точки

Вивчення загальної задачі НЛП (4.1), (4.2) почнемо з найпростішого випадку, коли на змінні функції (4.2) не накладено жодних обмежень. Таку задачу називають задачею без обмежень.

Покажемо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Відомо, що у випадку однієї змінної в точках, де функція досягає найбільшого чи найменшого значення, перша похідна перетворюється в нуль. Для функції багатьох змінних перших похідних більше, ніж одна. Їх можна брати за будь-яким аргументом.

Означення. Частинною похідною першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ називають похідну функції $z(x_1, \dots, x_n)$ по x_i , яку обчислюють у припущенні, що всі інші змінні величини є сталими.

Приклад. Частинні похідні першого порядку функції $z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2^2 + 3$ мають вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2x_1 + 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 2x_2 - 2.$$

Означення. Вектор, складений з частинних похідних функції $z(x)$ першого порядку, називають градієнтом функції (позначають ∇ — “набла” або “grad”).

$$\nabla = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right).$$

У курсі диференціального числення зазначається, що вектор-градієнт вказує напрямом найшвидшого зростання функції в даній точці. Очевидно, що коли в деякій точці x_0 значення функції оптимальне, то воно буде оптимальним і по будь-якій змінній, а для них, як відомо з курсу диференціального числення,

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Отже, необхідною умовою оптимальності точки x_0 є така:

$$\text{grad } z(x_0) = 0. \quad (4.3)$$

або у розгорнутій формі —

$$\begin{cases} \frac{\partial z(x)}{\partial x_1} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial z(x)}{\partial x_n} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Рівності (4.3), (4.4) допускають наочну фізичну інтерпретацію: швидкість зростання функції в точці дорівнює нулю і її можна назвати точкою спокою.

Домовимося, розв'язки системи (4.4) позначати через x^* (серед них можуть бути і точки, які не є оптимальними). Щоб визначити характер оптимальності точки x недостатньо частинних похідних першого порядку, необхідно обчислити частинні похідні вищих порядків.

Введемо матрицю, складену з частинних похідних другого порядку — матрицю Гессе.

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Найпростішими умовами додатної (від'ємної) визначеності матриці є умови Рауса–Гурвіца. Додатна (від'ємна) визначеність матриці є узагальненням додатного (від'ємного) числа на більш складні математичні об'єкти.

Для матриці $H(x)$ випишемо головні мінори.

$$M_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} \end{vmatrix},$$

...

$$M_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Умови Рауса-Гурвіца додатної визначеності матриці $H(x)$ (min) через головні мінори запишемо у вигляді:

$$M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_n > 0. \quad (4.6)$$

Умови тах мають вигляд

$$M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \dots, (-1)^n M_n \geq 0. \quad (4.7)$$

Приклад. Знайти оптимальні значення функції

$$z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 + 3.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2 = 0, \\ 2x_2 - 2 = 0, \end{cases} \quad x^* = (-1, 1).$$

Матриця $H(x)$ для даної функції має вигляд

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = 2 > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Отже, в точці $(-1,1)$ маємо мінімум

$$z_{\min} = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 1.$$

§4.4. Задачі нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями

Розглянемо загальну задачу НЛП

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$(\max) \quad z(x_1, \dots, x_n). \quad (4.9)$$

в якій функції $F_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$), $z(x)$ два рази неперервно диференційовані. Для визначення її оптимальних точок користуються функцією Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = z(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x), \quad (4.10)$$

яка дає змогу задачу з обмеженнями звести до задачі без обмежень. Очевидно, що на обмеженнях (8)

$$L(x, \lambda) = z(x) \quad \text{і}$$

$$z_{\max}(x^*) = L_{\max}(x^*, \lambda).$$

Необхідні умови оптимальності точки x^* функції $L(x, \lambda)$ мають вигляд

$$\text{grad } L(x, \lambda) = 0, \quad (4.11)$$

або в розгорнутій формі —

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_n} = \frac{\partial z}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_1} = F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda_m} = F_m(x) = 0. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Із системи $n + m$ рівнянь (4.12) випливає, що для її побудови достатньо взяти частинні похідні по x від функції Лагранжа, зрівняти їх з нулем і додати до них систему обмежень (4.8).

Характер оптимальності точки з'ясовують за допомогою достатніх умов. Застосовуємо їх лише до функції $z(x)$, оскільки $F_i(x^*) = 0$.

Приклад. Визначити оптимальні значення функції

$$z = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2$$

при обмеженні:

$$x_1 + x_2 = 2.$$

Перед тим, як будувати функцію Лагранжа, обмеження записуємо таким чином, щоб у правій частині був нуль:

$$x_1 + x_2 - 2 = 0,$$

$$L(x, \lambda) = 2x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 + 2 + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda.$$

Складаємо систему для відшукування точок, підозрілих на оптимальність

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2 + \lambda = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Виключимо λ з перших двох рівнянь, в результаті чого дістанемо

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x_1 + 4 = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Точка: $x^* = (-1, 3)$
 є підозрілою на оптимальність. Для визначення типу оптимальності обчислюємо матрицю $H(x)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = 1;$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$M_1 = 4 > 0;$$

$$M_2 = 7 > 0.$$

Отже, в точці x^* маємо мінімум

$$z_{\min} = 2 \times (-1)^2 + (-1) \times 3 + 3^2 + 2 \times (-1) - 43 = -6.$$

Зауваження. Із наведених міркувань випливає, що при обчисленні координат оптимальної точки конкретне значення λ нас не цікавить. Отже, там, де це можливо, множники Лагранжа треба виключати, що дасть змогу знизити порядок системі рівнянь.

Цікаво порівняти дану задачу з аналогічною задачею без обмежень.

Система для знаходження мінімуму (а він буде існувати тому, що значення $H(x)$ не залежить від обмеження) має вигляд

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^*(8/7, 18/7); \quad z(x^*) = -308/49 = -6,29.$$

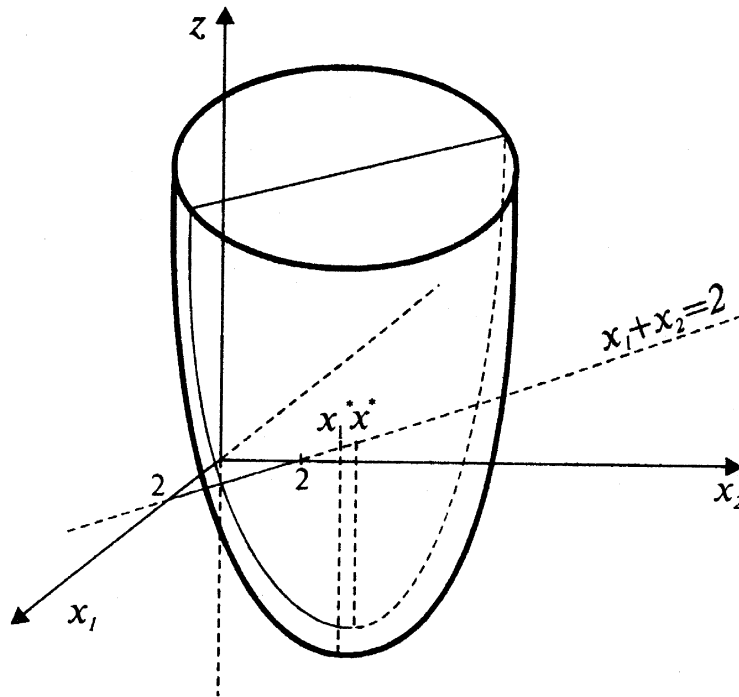


Рис. 4.4

Із рис. 4.4 випливає, що геометрично задача без обмежень зображується параболоїдом, площина $x_1 + x_2 = 2$ відтинає його частину — параболу. Природно, що мінімум задачі з обмеженнями не менший, ніж глобальний мінімум функції.

Обмеженість класу задач, в яких вдається знайти оптимальні значення функції, ті самі, що й для однієї змінної: точка має бути внутрішньою.

§4.5. Задачі нелінійного програмування з обмеженнями-нерівностями. Умови Куна-Таккера

На практиці частіше зустрічаються задачі, в яких оптимальні точки не обов'язково містяться всередині області розв'язків. Як правило, це буде тоді, коли в обмеженнях трапляються нерівності. Наприклад, якщо на змінні задачі накладені умови невід'ємності.

Спочатку розглянемо задачу НЛП, коли всі обмеження являють собою нерівності:

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$(\max) \quad z(x_1, \dots, x_n). \quad (4.14)$$

На область розв'язків задачі (4.13), (4.14) накладається умова регулярності, яка виконується, коли її границя складається, наприклад, з диференційованих функцій. Випадки, коли порушується ця умова, являють собою спеціальні математичні побудови, і їх існування на практиці є мало ймовірним. Полягає ця умова в тому, що існує такий вектор y і точка границі області, для яких

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} y_i < 0.$$

В результаті цього порушується замкненість області.

Для визначення оптимальних точок задачі (4.13), (4.14) користуються теоремою Куна-Таккера ([1], [3]).

Теорема. Нехай x^* - оптимальна точка задачі (4.13), (4.14) регулярної області. Тоді

1) x^* — допустима точка, існують множники $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$);

$$2) \lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad (i = 1, \dots, m); \quad (4.15)$$

$$3) \nabla z(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x_i) = 0. \quad (4.16)$$

Перша умова теореми є очевидною. Друга стверджує, що коли точка x^* не лежить на границі i -го обмеження і $g_i(x^*) > 0$, то відповідний множник Лагранжа дорівнює нулю. Третя умова теореми — рівність нулю вектора-градієнта функції Лагранжа задачі (4.13), (4.14). У розгорнутому вигляді умови (4.16) є системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_1} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Якщо в задачі є мішані обмеження (частина рівнянь і частина нерівностей), то у формулюванні теореми змінюється лише умова 2). Для обмежень нерівностей $\lambda_i \geq 0$, для рівнянь λ_i може мати довільний знак, причому

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (4.17)$$

Коли функція $f(x)$ вигнута, а система обмежень утворює опуклу область, умови Куна-Таккера стають не тільки необхідними, але й достатніми.

Зауваження. Зрозуміло, що умова (4.15) для обмежень-рівнянь є тривіальною

$$g_i(x^*) = 0.$$

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається вигнутою, якщо

$$f\left[\tau x^{(1)} + (1-\tau)x^{(2)}\right] \geq \tau f\left(x^{(1)}\right) + (1-\tau) f\left(x^{(2)}\right),$$

$$0 \leq \tau \leq 1.$$

Графічно це зображено на рис. 4.5.

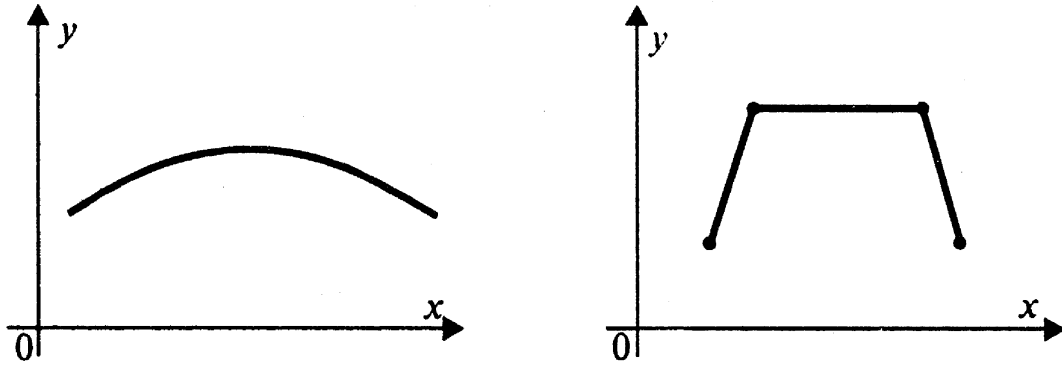


Рис. 4.5

Для опуклості області достатньо, щоб функції $g_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) були вигнутими.

§4.6. Сідлові точки та їх зв'язок з функцією Лагранжа

Попередні параграфи підкреслюють важливу роль функції Лагранжа в задачах НЛП. Фактично вона залежить від змінних двох видів:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{і} \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m).$$

Виявляється, що задача НЛП має розв'язок в тих випадках, коли функція Лагранжа має сідлову точку.

Означення. Нехай $x \in X$, $y \in Y$. Кажуть, що функція $K(x, y)$ має сідлову точку (x_0, y_0) , якщо

$$K(x, y_0) \leq K(x_0, y_0) \leq K(x_0, y) \quad (4.18)$$

Функція, яка міститься в лівій частині нерівності, залежить лише від x , а в другій — від y . У неперервних функціях

$$K_{\max}(x, y_0) = K_{\min}(x_0, y) = K(x_0, y_0), \quad (4.19)$$

$$x \in X, y \in Y,$$

тобто оптимальні значення функцій збігаються. Графічно для двох змінних сідлову точку можна подати так, як це зображено на рис. 4.6.

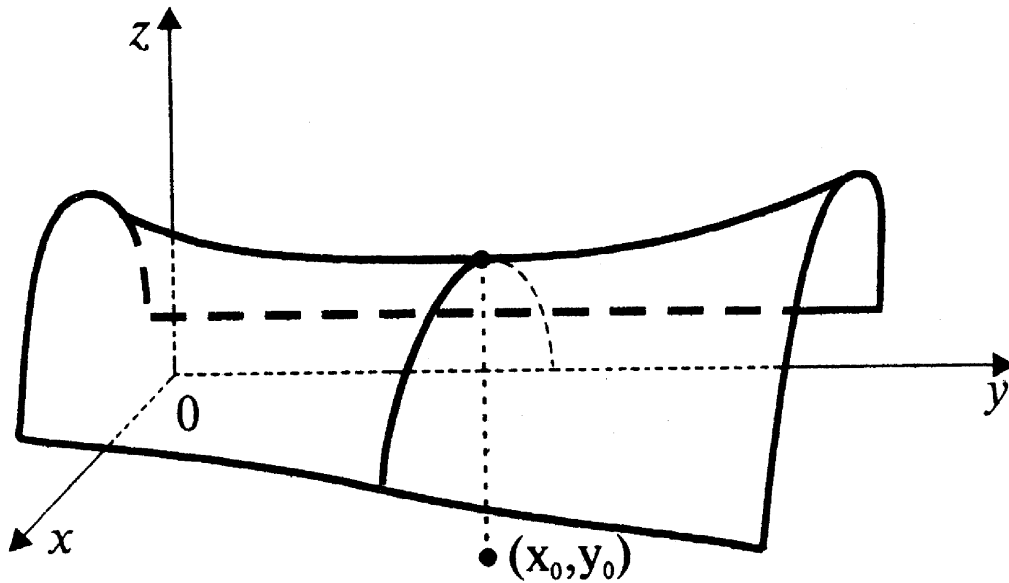


Рис. 4.6

Для функції Лагранжа замість y необхідно підставити λ . Введемо функцію

$$L_*(x) = \min_{\lambda \in \Lambda} L(x, \lambda), \quad (4.20)$$

де Λ — область зміни $\lambda_i (i=1, \dots, m)$. Для задачі (13), (14) Λ складається з обмежень $\lambda_i \geq 0 (i=1, \dots, m)$;

$$L^*(\lambda) = \max_{x \in X} L(x, \lambda), \quad (4.21)$$

X — складають обмеження (4.13)

$$(g_i(x) \geq 0 (i=1, \dots, m)).$$

У термінах функцій $L_*(x)$ і $L^*(\lambda)$ пряму задачу формулюють у вигляді: знайти $\max_{x \in X} L_*(x)$ серед таких x , що

$$g_i(x) \geq 0 (i=1, \dots, n).$$

Двоїсту задачу з вигнутими функціями $f(x)$, $g_i(x) (i=1, \dots, n)$ запишемо у вигляді: знайти

$$\min \left[f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) \right]$$

при

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Для вихідної і двоїстої задач можна сформулювати умови Куна-Таккера, суть яких зводиться до такого твердження: для того щоб задача НЛП мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб відповідна функція Лагранжа мала сідлову точку. Додаткову інформацію можна отримати в літературі [2], [3].

Розділ 5

ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

§5.1. Основні ідеї обчислювального методу динамічного програмування

У динамічному програмуванні розглядаються методи, що дозволяють шляхом поетапної оптимізації отримати загальний (результуючий) оптимум ([2], [4], [5]).

Звичайно методами динамічного програмування оптимізують роботу деяких керованих систем, ефект якої оцінюється адитивною, або мультиплікативною, цільовою функцією. **Адитивною** називається така функція декількох змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значення якої обчислюється як сума деяких функцій f_j , що залежать тільки від однієї змінної x_j :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (5.1)$$

Доданки адитивної цільової функції відповідають ефекту рішень, що приймаються на окремих етапах керованого процесу. Аналогічно, **мультиплікативна** функція розпадається на добуток додатних функцій різних змінних:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (5.2)$$

Оскільки логарифм функції типу (5.2) є адитивною функцією, досить розглянути функції вигляду (5.1).

Викладемо суть обчислювального методу динамічного програмування на прикладі задачі оптимізації

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \rightarrow \max \quad (5.3)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, a_j > 0, x_j \geq 0. \quad (5.4)$$

Зазначимо, що про лінійність і диференційованість функцій $f_j(x_j)$ не робиться ніяких припущень, тому застосування класичних методів оптимі-

зації (наприклад, методу Лагранжа) для розв'язання задачі (5.3)-(5.4) або проблематично, або просто неможливо.

Змістовно задача (5.3)-(5.4) може бути інтерпретована як проблема оптимального вкладення деяких ресурсів j коефіцієнтів, що приводяться до єдиної розмірності (наприклад, грошей) за допомогою a_j , в різні активи (інвестиційні проекти, підприємства і т.п.), що характеризуються функціями прибутку f_j , тобто такого розподілу обмеженого об'єму ресурсу (b), який максимізує сумарний прибуток. Уявимо ситуацію, коли вона вирішується послідовно для кожного активу. Якщо на першому кроці прийнято рішення про вкладення в n -й актив x_n одиниць, то на інших кроках ми зможемо розподілити $b - a_n x_n$ одиниць ресурсу. Абстрагуючись від міркувань, на основі яких приймалося рішення на першому кроці (припустимо, ми з будь-яких причин не могли на нього вплинути), буде цілком природним вчинити так, щоб на кроках, що залишилися розподіл поточного об'єму ресурсу стався оптимально, що рівнозначно розв'язанню задачі

$$\max \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \quad (5.5)$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leq b - a_n x_n, \quad a_j > 0, \quad x_j \geq 0. \quad (5.6)$$

Очевидно, що максимальне значення (5.5) залежить від розміру залишку, що розподіляється, і якщо кількість ресурсів, що залишилися визначити через ξ , то величину (5.5) можна виразити як функцію від ξ :

$$\Lambda_{n-1}(\xi) = \max_{x_1, \dots, x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \quad \text{при } \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leq \xi \quad (5.7)$$

де індекс $n-1$ вказує на кількість кроків, що залишилися. Тоді сумарний прибуток, що отримується як наслідок рішення, прийнятого на першому кроці, і оптимальних рішень, прийнятих на інших кроках, буде

$$\Omega_n(x_n) = f_n(x_n) + \Lambda_{n-1}(b - a_n x_n). \quad (5.8)$$

Якби була можливість впливати на x_n , то ми для отримання максимального прибутку повинні були б максимізувати Ω_n по змінній x_n , тобто знайти $\Lambda_{n-1}(b)$ і фактично розв'язати задачу:

$$\max_{0 \leq x_n \leq \frac{b}{a_n}} \Omega_n(x_n) = \max_{0 \leq x_n \leq \frac{b}{a_n}} \{f_n(x_n) + \Lambda_{n-1}(b - a_n x_n)\} = \Lambda_n(b). \quad (5.9)$$

В результаті ми отримуємо вираз для значення цільової функції задачі при оптимальному поетапному процесі прийняття рішень про розподіл ресурсу. Воно внаслідок побудови даного процесу дорівнює глобальному оптимуму цільової функції

$$\max_{x_1, \dots, x_n} \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(s_j) \right\} = \Lambda_n(b), \quad (5.10)$$

тобто значенню цільової функції при одномоментному розподілі ресурсу.

Якщо у виразі (5.9) замінити значення b на ξ і n на k , то його можна розглядати як *рекурентну формулу*, що дозволяє послідовно обчислювати оптимальні значення цільової функції при розподілі об'єму ресурсу ξ за k кроків:

$$\Lambda_k(\xi) = \max_{0 \leq x_k \leq \frac{\xi}{a_k}} \{f_k(x_k) + \Lambda_{k-1}(\xi - a_k x_k)\}. \quad (5.11)$$

Значення змінної x_k , при якому досягається максимум, позначимо $\hat{x}_k(\xi)$.

При $k = 1$ формула (5.11) виглядає

$$\Lambda_1(\xi) = \max_{0 \leq x_1 \leq \frac{\xi}{a_1}} f_1(x_1),$$

тобто допускає безпосереднє обчислення функцій $\Lambda_1(\xi)$ і $\hat{x}_1(\xi)$.

Скориставшись (5.12) як базою рекурсії, можна з допомогою (5.11) послідовно обчислити $\Lambda_k(\xi)$ і $\hat{x}_k(\xi)$, $k \in 1:n$. Поклавши на останньому кроці $\xi = b$, в силу (5.9), знайдемо глобальний максимум функції (5.3), який дорівнює $\Lambda_n(b)$, і компоненту оптимального плану $x_n^* = \hat{x}_n(b)$. Отримана компонента дозволяє обчислити нерозподілений залишок на наступному кроці при оптимальному плануванні: $\xi_{n-1} = b - a_n x_n^*$, і, в свою чергу, знайти $x_{n-1}^* = \hat{x}_{n-1}(\xi_{n-1})$. Внаслідок подібних обчислень послідовно будуть знайдені всі компоненти оптимального плану.

Таким чином, динамічне програмування являє собою цілеспрямований перебір варіантів, який призводить до знаходження глобального максимуму. Рівняння (5.11), яке виражає оптимальне рішення на k -м кроці че-

рез рішення, прийняті на попередніх кроках, називається *основним рекурентним співвідношенням динамічного програмування*. У той же час потрібно помітити, що описана схема рішення при загальній постановці задачі має чисто теоретичне значення, оскільки замикає обчислювальний процес на побудову функцій $\Lambda_k(\xi)$ ($k \in 1:n$), тобто зводить вихідну задачу (5.3)-(5.4) до іншої вельми складної проблеми. Однак при певних умовах застосування рекурентних співвідношень може виявитися корисним. Насамперед це відноситься до задач, які допускають табличне завдання функцій $\Lambda_k(\xi)$. Додаткову інформацію з розглянутих питань можна отримати в [4], [5].

§5.2. Принцип оптимальності Беллмана

Ще раз підкреслимо, що значення підходу, що реалізовується в динамічному програмуванні, полягає в *заміні розв'язання вихідної багатомірної задачі послідовністю задач меншої розмірності*.

Сформулюємо основні вимоги до задач, виконання яких дозволяє застосувати даний підхід:

- ✓ об'єктом дослідження повинна служити *керована система* (об'єкт) із заданими допустимими станами і допустимими управліннями;
- ✓ задача повинна дозволяти інтерпретацію як , багатокроковий процес, кожний крок якого складається з прийняття *рішення* про вибір одного з допустимих управлінь, що призводять до *зміни стану* системи;
- ✓ задача не повинна залежати від кількості кроків і бути визначеною на кожному з них;
- ✓ стан системи на кожному кроці повинен описуватися однаковою (по складу) набором параметрів;
- ✓ подальший стан, в якому з'являється система після вибору рішення на k -му кроці, залежить тільки від даного рішення і початкового стану на початок k -го кроку. Дана властивість є основною з точки зору ідеології динамічного програмування і називається *відсутністю післядії*.

Розглянемо питання застосування моделі динамічного програмування в узагальненому вигляді. Нехай стоїть задача управління деяким абстрактним *об'єктом*, який може перебувати в різних станах. Поточний стан об'єкта ототожнюється з деяким набором параметрів, що позначаються надалі ξ і іменуються *вектором стану*. Передбачається що задано множину Ξ всіх можливих станів. Для об'єкта визначено також множину *допустимих управлінь* (керуючих впливів X), яку, не поменшуючи спільності, мож-

на вважати числовою множиною. Керуючі впливи можуть здійснюватися в дискретні моменти часу k ($k \in 1:n$), причому управлінське рішення полягає у виборі одного з управлінь $x_k \in X$. Планом задачі або стратегією управління називається вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, компонентами якого служать управління, вибрані на кожному кроці процесу. У зв'язку з передбачуваною відсутністю післядії між кожними двома послідовними станами об'єкта ξ_k і ξ_{k+1} існує відома функціональна залежність, що включає також вибране управління: $\xi_{k+1} = \varphi(x_k, \xi_k)$, $k \in 1:n-1$. Тим самим задання початкового стану об'єкта $\xi_1 \in \Xi$ і вибір плану x однозначно визначають траєкторію поведінки об'єкта, як це показано на рис. 5.1.

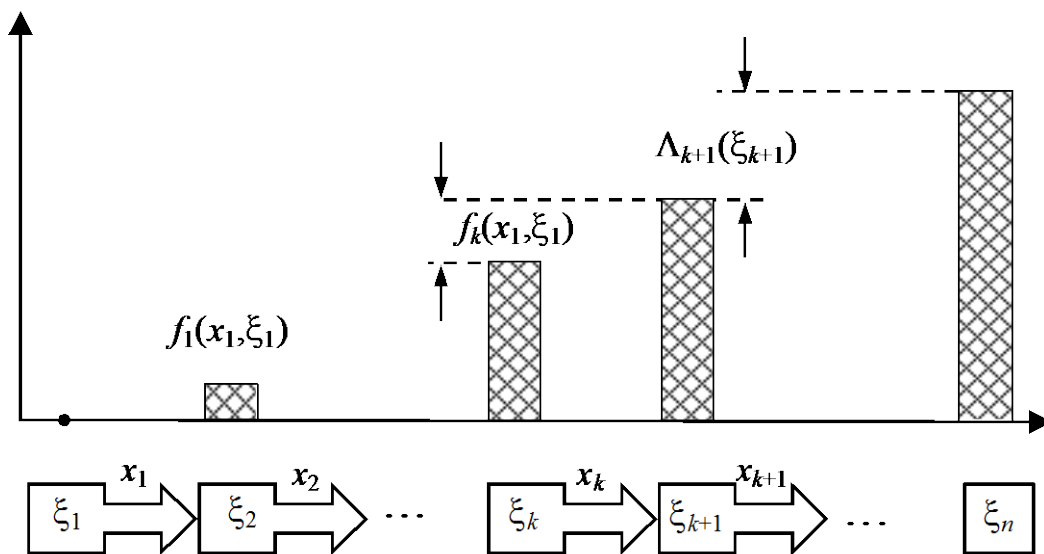


Рис. 5.1

Ефективність управління на кожному кроці k залежить від поточного стану ξ_k , вибраного управління x_k і кількісно оцінюється за допомогою функцій $f_k(x_k, \xi_k)$, що є складовими адитивної цільової функції, що характеризує загальну ефективність управління об'єктом. (Зазначимо, що у визначення функції включається область допустимих значень x_k , і ця область, як правило, залежить від поточного стану ξ_k). Оптимальне управління, при заданому початковому стані ξ_1 , зводиться до вибору такого оптимального плану x^* , при якому досягається максимум суми значень f_k на відповідній траєкторії.

Основний принцип динамічного програмування полягає в тому, що на кожному кроці потрібно прагнути не до ізольованої оптимізації функції $f_k(x_k, \xi_k)$, а вибирати оптимальне управління x_k^* в припущенні про оптимальність всіх подальших кроків. Формально вказаний принцип реалізову-

ється шляхом відшукування на кожному кроці k умовних оптимальних управлінь, що забезпечують найбільшу сумарну ефективність, починаючи з цього кроку, в припущенні, що поточним є стан ξ .

Позначимо $\Lambda_k(\xi)$ максимальне значення суми функцій f_k протягом кроків від k до n (що отримується при оптимальному управлінні на даному відрізку процесу), при умові, що об'єкт на початку кроку k знаходиться в стані ξ . Тоді функції $\Lambda_k(\xi)$ повинні задовольняти рекурентному співвідношенню:

$$\Lambda_k(\xi) = \max_{x_k} \{f_k(x_k, \xi) + \Lambda_{k+1}(\xi_{k+1})\}, \quad k \in 1:(n-1), \quad (5.12)$$

де $\xi_{k+1} = \Phi_k(x_k, \xi)$.

Співвідношення (5.12) називають *основним рекурентним співвідношенням* динамічного програмування. Воно реалізовує базовий принцип динамічного програмування, відомий також як *принцип оптимальності Беллмана*.

Оптимальна стратегія управління повинна задовольняти наступній умові: *які б не були початковий стан ξ_k k -му кроці і вибране на цьому кроці управління x_k , подальші управління (управлінські рішення) повинні бути оптимальними по відношенню до стану $\xi_{k+1} = \Phi_k(x_k, \xi)$, що виходить внаслідок рішення, прийнятого на k -му кроці.*

Основне співвідношення (5.12) дозволяє знайти функції $\Lambda_k(\xi)$ тільки в поєднанні з початковою умовою, якою в нашому випадку є рівність

$$\Lambda_n(\xi) = \max_{x_n} \{f_n(x_n, \xi)\}.$$

Важливо ще раз підкреслити, що сформульований вище принцип оптимальності застосуємо тільки для управління об'єктами, у яких вибір оптимального управління не залежить від передісторії керованого процесу, тобто від того, яким шляхом система прийшла в поточний стан. Саме ця обставина дозволяє здійснити декомпозицію задачі і зробити можливим її практичне розв'язання.

Розділ 6

ТЕОРІЯ ІГОР

§6.1. Предмет теорії ігор. Термінологія і класифікація ігор

Задачі теорії гри відносяться до області прийняття рішень в умовах невизначеності, а їх специфіка полягає в тому, що, як правило, мається на увазі невизначеність, що виникає внаслідок дій двох або більш «розумних» противників, здатних оптимізувати свою поведінку за рахунок інших. Серед типових прикладів такої поведінки можуть бути названі дії конкуруючих фірм на одному ринку або планування військових операцій.

Одним з основних питань в задачах з колективним вибором рішень є питання про визначення оптимальності, тобто питання, які рішення потрібно визнавати найкращими в ситуації оптимізації по декількох критеріях, що відображають різні інтереси. Багато які методи розв'язання проблем теорії гри засновані на зведенні їх до задач математичного програмування. На найбільш простих з них ми зупинимося в цьому розділі.

Теорія гри починається з робіт Е.Бореля (1921 р.), а принциповим етапом в її становленні як самостійного наукового напрямку стала монографія Дж.Неймана, що вийшла в 1944 р.

Особливістю теорії ігор як наукової дисципліни стала специфічна термінологія, що вживається в ній. Термін «гра» застосовується для позначення сукупності правил і угод, якими керуються суб'єкти, поведінку яких ми вивчаємо. Кожний такий суб'єкт k , де $k \in 1:K$, або *гравець*, характеризується наявністю індивідуальної системи цільових установок і стратегій $s_1^k, s_2^k, \dots, s_{m_k}^k$, тобто можливих варіантів дій в грі.

Досить поширений спосіб математичного опису гри заснований на завданні функцій $f_k(s_{i_1}^1, s_{i_2}^2, \dots, s_{i_k}^k, \dots, s_{i_K}^K)$, кожна з яких визначає результат (платіж, виграш), що отримується k -м гравцем в залежності від набору стратегій $S = (s_{i_1}^1, s_{i_2}^2, \dots, s_{i_k}^k, \dots, s_{i_K}^K)$, застосованого всіма учасниками гри. Функції $f_k, k \in 1:K$ також називають функціями виграшу, або платіжними функціями. У тому випадку, якщо для будь-яких S

$$\sum_{k=1}^K f_k(S) = 0,$$

гра називається грою з нульовою сумою. Гру з двома учасниками і нульовою сумою називають *антагоністичною*. Антагоністична гра, тобто гра, в якій виграш одного учасника дорівнює програшу іншого, в силу відносно простої постановки задачі є найбільш вивченим розділом теорії гри. Однак зміст теорії гри, безумовно, не вичерпується ними. У класифікації ігрових моделей виділяють гру з кінцевими і нескінченними наборами стратегій у

гравців, виділяють гру по можливих кількостях ходів у учасників. Також ігри діляться на *некооперативні* і *кооперативні*, тобто ті, в яких функції виграшу учасників залежать від коаліцій, що утворюються ними. Крім цього ігра можна розрізняти по обсягу інформації, що є у гравців відносно минулих ходів. У зв'язку з цим вони діляться на гру з *повною* і *неповною інформацією*. Зацікавлений читач може звернутися до таких джерел, як [12], [13].

§6.2. Матрична гра і поняття сідлової точки

Розглянемо більш детально антагоністичні ігри і їх основні властивості. Зручним способом завдання гри двох учасників з нульовою сумою є *платіжна матриця*. Звідси, до речі, з'являється ще одна з назва - *матрична гра*. Кожний елемент платіжної матриці a_{ij} містить числове значення *виграшу гравця I* (програшу гравця II), якщо перший застосовує стратегію i , а другий – стратегію j . Терміни *виграш* і *програш* потрібно розуміти в широкому значенні, так як вони можуть приймати негативні значення і з життєвої точки зору означати протилежне. Нетривіальність задачі передусім полягає в тому, що кожний з гравців робить свій вибір, не знаючи про вибір іншого, що істотно ускладнює процес оптимізації вибраної стратегії.

Класичним прикладом антагоністичної гри є гра з двома учасниками, що загадують незалежно один від одного числа. Передбачається, що якщо їх сума виявляється парною, то виграш, рівний 1, досягається першому гравцеві, а якщо непарної, то другому. Поклавши, що для обох гравців загадання непарного числа є першою стратегією, а парного - другою, можемо записати платіжну матрицю даної гри:

$$\begin{array}{c|cc}
 & \text{н/ч} & \text{ч} \\
 \hline
 \text{н/ч} & 1 & -1 \\
 \text{ч} & -1 & 1
 \end{array} \tag{6.1}$$

Рядки матриці (6.1) відповідають стратегіям гравця I, стовпці - стратегіям гравця II, а її елементи - результатам першого гравця. Також з визначення гри маємо, що елементи даної матриці, взяті із зворотним знаком, відповідають виграшам другого гравця.

Більш складна і змістовна платіжна матриця може бути отримана, якщо дещо модифікувати запропоновану гру. Припустимо, що обидва учасника мають право загадувати числа від 1 до 4, що складає їх відповідні стратегії. У випадку, якщо результат складання задуманих чисел буде пар-

ним, то другий гравець, виплачує першому суму, що вийшла, а якщо непарним, то перший - другому. Запишемо платіжну матрицю для такої гри:

$$A = \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & -5 & 6 & 2 \\ 4 & -5 & 9 & -7 & 3 \\ 5 & 6 & -7 & 8 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad (6.2)$$

Деяка умовність і штучність в постановці проблеми не повинні в цьому випадку нас бентежити, оскільки до подібної форми може бути зведена модель, що описує, наприклад, змагання двох фірм за ринок збуту продукції, що знову відкрився і т.п.

Як вже зазначалося, найважливішим в теорії гри є питання про оптимальність рішення (вибору стратегії) для кожного з гравців. Проаналізуємо з цієї точки зору деяку матричну гру, для якої задана платіжна матриця $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$. При виборі гравцем I стратегії i його гарантований прибуток незалежно від дій гравця II складе $\min_j a_{ij}$. Оскільки він може вибирати i самостійно, то доцільно цей вибір зробити таким, щоб він при будь-якій стратегії противника максимізував величину гарантованого прибутку, тобто забезпечував отримання $\min_j \max_i a_{ij}$. Такий принцип вибору стратегії

отримав назву «принцип максиміна». З іншого боку, аналогічні міркування можуть бути проведені з приводу дій другого гравця. Його найбільший програш при виборі стратегії j складе, $\max_i a_{i,j}$, і, отже, йому потрібно вибирати стратегію так, щоб мінімізувати величину програшу при будь-яких діях суперника, тобто забезпечити $\min_j (\max_i a_{i,j})$. У цьому суть принципу мінімакса.

Можна довести справедливність наступного співвідношення:

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}. \quad (6.3)$$

Однак очевидний інтерес представляє ситуація, при якій значення виграшу (платежу), що отримується гравцем I при виборі ним максимінної стратегії, дорівнює платежу (програшу) II-го гравця при мінімаксовій стратегії

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}. \quad (6.4)$$

У цьому випадку кажуть, що гра має *сідлову точку*. Збіг значень гарантованих вигравів гравців при максимінній і мінімаксній стратегії означає можливість досягнення в грі деякого оптимального (стабільного) стану, від якого не вигідно відхилитися жодному з учасників. Поняття «оптимальність» тут означає, що жоден розумний (обережний) гравець не прагне змінити свою стратегію, оскільки його противник, в принципі, зможе вибрати таку стратегію, яка дасть гірший для першого результат. Стратегії i^* і j^* , що створюють сідлову точку, називаються *оптимальними*, а значення $v = a_{i^*, j^*}$ називають *ціною гри*. Трійка (i^*, j^*, v) вважається *розв'язком матричної гри з сідловою точкою*.

Неважко помітити, що не всяка гра володіє сідловою точкою. Зокрема, як гра (6.1), так і гра (6.2) сідлової точки не мають. Прикладом гри, що має сідлову точку, є гра з платіжною матрицею (6.5).

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 & 17 \\ 8 & -3 & 2 & 11 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

У даній матриці мінімальні (гарантовані) виграти першого гравця по рядках рівні 1, 5 і (-3). Отже, його максимінному вибору буде відповідати стратегія 2, що гарантує вигреш 5. Для другого гравця максимальні програші по стовпцях матриці становитимуть 8, 10, 5, 17, тому доцільно зупинитися на стратегії 3, при якій він програє тільки 5. Таким образом, друга стратегія першого гравця і третя стратегія другого утворять сідлову точку зі значенням 5, тобто для гри з матрицею (6.5) має рішення (2; 3; 5).

§6.3. Змішані стратегії

Подальший розвиток теорії матричної гри засновується на дослідженні гри як деякого процесу, що повторюється. Дійсно, навряд чи можна дати змістовні рекомендації з такого питання, як слід чинити учасникам гри, що проводиться однократно і не має сідлової точки. У разі ж її багаторазових повторів природною і плідною представляється ідея *рандомизації* вибору стратегії гравцями, тобто внесення в процес вибору елемента випадковості. Дійсно, систематичне відхилення, наприклад, гравця I від максимінної стратегії з метою збільшення виграшу може бути зафіксовано другим гравцем і покарано. У той же час абсолютно хаотичний вибір стратегій не принесе в середньому найкращого результату.

Змішаною стратегією гравця I в грі з матрицею $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ називається впорядкований набір дійсних чисел $x_i, i \in 1:m$, що задовольняють умовам

$$x_i \geq 0, i \in 1:m; \sum_{i=1}^m x_i = 1. \quad (6.6)$$

Числа інтерпретуються як імовірності застосування гравцем I стратегій 1, 2, ..., m, які, на відміну від змішаних, також називають *чистими стратегіями*.

Аналогічно вводиться поняття змішаних стратегій гравця II які визначаються як набір чисел $y_j, j \in 1:n$, що задовольняють умовам

$$y_j \geq 0, j \in 1:n; \sum_{j=1}^n y_j = 1. \quad (6.7)$$

Тоді, якщо гравець I застосовує змішану стратегію $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, а гравець II змішану стратегію $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то математичне очікування виграшу гравця I (програшу гравця II) визначається співвідношенням

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j. \quad (6.8)$$

Надалі через X будемо позначати множину допустимих змішаних стратегій гравця I, що визначається умовою (6.7), а через Y - що визначається умовою (6.8) множину допустимих змішаних стратегій гравця II.

До пошуку рішення гри в змішаних стратегіях, так само як і в попередньому пункті, можуть бути застосовані критерії максиміна-мінімакса. Відповідно до них гравець I буде вибирати свою змішану стратегію $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ таким чином, щоб максимізувати найменший середній виграш:

$$\max_{x \in X} \left[\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right], \quad (6.9)$$

який, як можна довести, дорівнює

$$\max_{x \in X} \left[\min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{i,1} x_i, \sum_{i=1}^m a_{i,2} x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{i,n} x_i \right\} \right], \quad (6.10)$$

а гравець II - свою змішану стратегію так, щоб мінімізувати найбільший середній програш:

$$\min_{y \in Y} \left[\max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right], \quad (6.11)$$

також рівний

$$\min_{y \in Y} \left[\max \left\{ \sum_{j=1}^n a_{1,j} y_j, \sum_{j=1}^n a_{2,j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{m,j} y_j \right\} \right]. \quad (6.12)$$

Аналогічно з (6.3) для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ справедлива нерівність

$$\max_{x \in X} \left[\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right] \leq \min_{y \in Y} \left[\max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right]. \quad (6.13)$$

Стратегії $x^* \in X$ і $y^* \in Y$ називають **оптимальними змішаними стратегіями**, якщо для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ справедлива рівність

$$F(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \left[\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right] = \min_{y \in Y} \left[\max_{x \in X} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right]. \quad (6.14)$$

$v = F(x^*, y^*)$ називають ціною гри, і якщо x^* і y^* існують, то кажуть, що гра має розв'язок в змішаних стратегіях (x^*, y^*, v) .

Справедлива фундаментальна теорема Дж. Неймана, яку ми приведемо без доказу [14].

Теорема (основна теорема матричної гри). *Будь-яка матрична гра має розв'язок в змішаних стратегіях*

§6.4. Розв'язування матричної гри методами лінійного програмування

Розглянемо деякі способи рішення матричної гри. Задача, що вирішується першим гравцем, (6.10) була сформульована як максимізація найменшої з сум

$$\sum_{i=1}^m a_{i,j} x_i,$$

але якщо визначити деяке x_{m+1} , для якого виконується

$$x_{m+1} \leq \sum_{i=1}^m a_{i,j} x_i, \quad j \in 1:n, \quad (6.15)$$

то вона може бути зведена до задачі лінійного програмування:

$$f : x_{m+1} \rightarrow \max \quad (6.16)$$

з обмеженнями

$$D = \{x \in R^{m+1} / \sum_{i=1}^m a_{i,j} x_i \geq x_{m+1}, j \in 1:n; \sum_{i=1}^m x_i = 1; x_i \geq 0, i \in 1:m\}. \quad (6.17)$$

Провівши аналогічні міркування, приходимо до того, що задача мінімізації найбільшого очікуваного програшу, що вирішується гравцем II (6.12), зводиться до задачі лінійного програмування

$$f^* : y_{n+1} \rightarrow \min, \quad (6.18)$$

$$D = \{y \in R^{n+1} / \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \geq y_{n+1}, i \in 1:m; \sum_{j=1}^n y_j = 1; y_j \geq 0, j \in 1:n\}. \quad (6.19)$$

Таким чином, ми отримуємо можливість застосовувати всі можливості апарату лінійного програмування для пошуку оптимальних стратегій обох гравців.

Досить легко перевірити, що задачі (6.16)-(6.17) і (6.18)-(6.19) утворюють двоїсту пару. Тут в певному значенні ми повернулися до проблем, що вже розглядалися, а саме до взаємозв'язку між наявністю рішення у деякої оптимізаційної задачі і існуванням сідлової точки у відповідної функції Лагранжа. У цьому випадку аналогічний зв'язок простежується між сідловою точкою гри і розв'язком пари задач оптимізації.

Стохастичне програмування

§ 7.1. Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування

Головною умовою побудови та використання детермінованих моделей є припущення про те, що всі початкові параметри задачі мають бути чітко визначеними. З погляду економіки така умова означає, що на етапі постановки задачі абсолютно точною є інформація стосовно всіх параметрів моделі. Однак загальновідомо, що економічні системи функціонують і розвиваються за умов невизначеності, тобто досить важко, а іноді і неможливо, мати точні значення деяких параметрів математичної моделі, особливо коли прогнозується розвиток процесів у майбутньому. Фактичні значення можуть суттєво відрізнятися від тих, які були взяті за основу при побудові математичних моделей та визначенні оптимальних планів, що породжує ризик прийнятих рішень. Невизначеність може бути різного ступеня залежно від того, яку інформацію ми маємо про досліджуваний процес чи явище. Якщо відомий розподіл відповідних параметрів, то для прийняття рішень використовують методи стохастичного програмування, суть яких полягає в тому, що відшукуючи оптимальне рішення $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, тобто значення керованих змінних, необхідно враховувати також вплив ряду випадкових чинників $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, керувати якими немає можливості. Наприклад, у разі планування діяльності сільськогосподарських підприємств є можливість точно передбачати площі посівів сільськогосподарських культур, рівні внесення добрив, поголів'я тварин (керовані змінні), але кінцевий результат діяльності у значній мірі залежить також від погодних умов, податкової та кредитної політики тощо (некеровані змінні).

Умовні екстремальні задачі, в яких параметри умов або складові розв'язку - випадкові величини, є предметом стохастичного програмування.

У стохастичному програмуванні частіше, ніж в інших розділах математичного програмування, значні труднощі виникають не лише за розроблення методів розв'язування задач, а також у разі їх постановки. Адже у постановці кожної задачі мають відобразитися особливості прийняття рішень за умов невизначеності. Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить від її цільових засад та інформаційної структури.

Типову задачу математичного програмування в детермінованій постановці формулюють так: визначити вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, для компонент якого:

$$\begin{aligned} \max(\min) F &= f(X), \\ q_i(X) &\leq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Якщо функції в даній задачі крім керованих параметрів X залежать ще і від деяких випадкових величин $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, то маємо **задачу стохастичного програмування**:

$$\begin{aligned} \max(\min) F &= f(X, \omega), \\ q_i(X, \omega) &\leq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \\ X &\geq 0, \quad \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

де Ω — простір подій ω .

Залежно від можливості отримати та врахувати інформацію стосовно детермінованості (стохастичності) функцій $f(X, \omega)$, $q_i(X, \omega)$ постановки задач стохастичного програмування можуть містити:

- I) стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження;
- II) детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;
- III) стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени і коефіцієнти системи обмежень.

Конкретні постановки задач стохастичного програмування мають свою специфіку. Передусім необхідно визначити:

1. Детермінованим чи випадковим є вектор X . Якщо вектор X є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів моделі. Якщо ж він випадковий, то тоді X є функцією від ω — $X(\omega)$, тобто залежить від випадкових змінних.

2. Як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції — як абсолютну (для всіх значень $\omega \in \Omega$) чи як максимізацію її математичного сподівання або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або як мінімізацію середнього квадратичного відхилення? Наприклад, що краще мати: платню 500 ± 200 чи 450 ± 50 ? У першому разі платня може змінюватися в межах від 300 до 700 гривень, а у другому — лише від 400 до 500.

3. Як виконуються обмеження: абсолютно для всіх $\omega \in \Omega$ чи в середньому, або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала?

При постановці задач стохастичного програмування необхідно виходити не лише з математичних міркувань, а й з економічного змісту та з врахуванням евристичних міркувань. Наприклад, детермінованість чи стохастичність вектора X зумовлюється сутністю економічних, технологічних процесів тощо. Для сільськогосподарського підприємства, наприклад, вектор, що визначатиме площі посіву сільськогосподарських культур, обов'язково має бути детермінованим. Якщо ж шуканий вектор для того

самого підприємства за тих самих умов визначатиме, приміром, обсяги кредитів, то його компоненти мають бути стохастичними величинами, бо достеменно невідомо, чи вони будуть отримані.

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на дві групи - прямі та непрямі.

Прямі методи використовують для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X, \omega)$ і $g_i(X, \omega) \leq 0, i = \overline{1, m}$ на базі інформації щодо параметра ω . Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

§ 7.2. Особливості математичної постановки задач стохастичного програмування

В задачах детермінованого характеру за певним набором початкових даних однозначно визначається вигляд цільової функції та обмежень задачі. У стохастичному програмуванні особливості побудови математичних моделей задач пов'язані з можливостями вибору виду функції мети та обмежень, тобто за одного набору початкових значень можна отримати математичні моделі, що суттєво відрізняться, а отже, значні розбіжності матимуть і отримані за ними оптимальні плани. Розглянемо основні відмінності будови математичних моделей задач стохастичного програмування.

Довільна математична модель задачі математичного програмування складається з двох частин: цільової функції і обмежень. У задачах стохастичного програмування важливим є вибір як виду цільової функції так і виду обмежень. Цільова функція визначає ефективність функціонування і розвитку економічної системи. Якщо відомі основні характеристики випадкових параметрів задачі, то цільовою функцією може бути:

- максимізація математичного сподівання відповідного економічного показника (прибутку, рівня рентабельності тощо); в такому разі задачі мають назву *M*-моделей;
- мінімізація дисперсії деякого економічного показника за умови обмеження на певному бажаному рівні середньої величини того ж показника, тоді задачі мають назву *V*-моделей;
- ймовірність перевищення (неперевищення) економічним показником певного фіксованого рівня (порога), тоді задача належить до *P*-моделей.

Обмеження в стохастичних економіко-математичних моделях можуть також задаватися різними способами, а значить, отримані оптимальні плани будуть мати відповідний рівень ймовірності їх виконання. При цьому потрібно брати до уваги як внутрішню невизначеність (технологічних про-

цесів), так і невизначеність зовнішнього середовища (постачання сировини, попиту на вироблену продукцію, загальної суми податків тощо).

Нехай задано обмеження задачі математичного програмування в загальному вигляді:

$$g(X, \omega) \leq 0. \quad (7.1)$$

Неможливість, а іноді й недоцільність вимоги, щоб знайдене рішення задовольняло обмеження (7.1) за будь-яких реалізацій випадкових параметрів $\omega \in \Omega$, породжує таку ідею: накласти дещо менш жорсткі умови, зокрема замість (7.1) можна допускати невиконання умов з певною ймовірністю.

Наприклад:

$$P\{g(X, \omega) > 0\} \leq \gamma, \quad (7.2)$$

або

$$P\{g(X, \omega) \leq 0\} \geq 1 - \gamma. \quad (7.3)$$

Обмеження (7.2) трактується так: ймовірність того, що $g(X, \omega) > 0$, не перевищує величину γ . Відповідно вираз (7.3) гарантує, що з ймовірністю $1 - \gamma$ буде виконуватися обмеження (7.1). Наприклад, якщо $\gamma = 0,05$, то обмеження у 95 випадках із 100 буде виконуватися і тільки у п'яти випадках не буде виконуватися.

Крім того, система обмежень задачі може бути змішаною, тобто частина обмежень може виконуватися в середньому, частина — в жорсткій постановці, а частина — з деякою ймовірністю.

Наведемо кілька варіантів постановок задач стохастичного програмування.

Нехай $f(X, \omega)$ — функція, яка виражає ефективність плану для заданих X та ω . Тоді задачу визначення оптимального детермінованого плану X за випадкових параметрів ω можна сформулювати у таких варіантах:

$$а) \max Mf(X, \omega),$$

за умов:

$$P\{g(X, \omega) \leq 0\} \geq 1 - \gamma;$$

$$X \geq 0, \omega \in \Omega;$$

$$б) \max \xi$$

за умов:

$$P\{f(X, \omega) \geq \xi, g(X, \omega) \leq 0\} \geq 1 - \gamma;$$

$$X \geq 0, \omega \in \Omega.$$

Отже, за постановки задачі варіанту а) необхідно максимізувати середню сподівану ефективність за умов, що обмеження, наприклад, щодо ресурсів, виконання контрактів тощо виконуються з імовірністю $1 - \gamma$. За постановки

задачі варіанту б) крім цього вимагається, щоб значення функції ефективності, наприклад, прибутку було не менше величини ξ з імовірністю $1-\gamma$, а також, щоб величина ξ була максимальною. Зазначимо, що перевага варіанту а) полягає у тому, що він простіший стосовно обчислення. Оскільки у моделі як критерій оптимальності використано математичне сподівання $f(X, \omega)$, то маємо M -модель, а плани, отримані за такою моделлю, називають M -планами.

Зрозуміло, що можна формулювати задачі стохастичного програмування також і по-іншому, поєднуючи або комбінуючи у певний спосіб умови наведених вище першої та другої моделей. Так, приміром, задача стохастичного програмування може мати такий вигляд:

$$P\{f(X, \omega) \geq \alpha\} \rightarrow \max,$$

за умов:

$$\begin{aligned} M(g_i(X, \omega)) &\leq 0 \quad (i = \overline{1, k}; k < m); \\ g_i(X, \omega) &\leq 0 \quad (i = \overline{k+1, m}); \\ X &\geq 0 \quad \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Отже, очевидно, що конкретних постановок задач стохастичного програмування досить багато і вибір певного їх виду для розв'язування практичних задач залежить від конкретних умов задачі, наявної інформації та мети дослідження.

Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить також від того, чи є можливість під час вибору (прийняття) рішень уточнювати стан економічного середовища (природи) на підставі певних спостережень.

Відомо, що для економічних систем розробляють стратегічні та тактичні плани. Розробляючи стратегічні плани, враховують всі можливі значення ω , тобто стан зовнішнього та внутрішнього середовища, та приймають рішення щодо траєкторії розвитку системи. Однак зустрічаються задачі, коли є можливість провести спостереження над ω (у певний момент стан економічного середовища стає відомим) і вибрати розв'язок з урахуванням результатів спостережень. Наприклад, плануючи виробничу діяльність підприємства, рішення щодо обсягів випуску продукції приймаються з урахуванням дослідження поточного стану структури ринку. Тоді розробляють тактичний план, тобто знаходять рішення $X(\omega)$ при заданому $\omega \in \Omega$, тобто розв'язують задачу:

$$\max f(X(\omega)),$$

за умов:

$$\begin{aligned} g_i(X(\omega)) &\leq 0; \quad i = \overline{1, m}, \\ X(\omega) &\geq 0. \end{aligned}$$

У загальному випадку спостереження уможливають неповне описування стану середовища, а тому етапи вибору рішень можуть чергуватися з

етапами спостережень за станом зовнішнього середовища. Отже, відбуваються багатоетапні процеси вибору рішень у такій послідовності:

рішення — спостереження — рішення — спостереження або спостереження — рішення — спостереження — рішення.

Якщо ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається N раз, то модель називають N -етапною задачею (моделлю) стратегічного стохастичного програмування, а якщо зі слова «спостереження» — то задачею (моделлю) тактичного стохастичного програмування.

Кожен з N етапів у свою чергу також може бути поділений. У такому разі маємо одноетапні чи двоетапні задачі стохастичного програмування.

Одноетапна задача стохастичного програмування використовується в тому разі, коли рішення приймаються на підставі відомих характеристик розподілу ймовірностей випадкових параметрів умови задачі до спостережень за їхніми реалізаціями. У такому разі має прийматися найкраще в середньостатистичному розумінні рішення. Тобто випадкові параметри задачі замінюють їх середніми величинами і початкову задачу стохастичного програмування зводять до детермінованої.

Двоетапна задача стохастичного програмування виникає тоді, коли процес прийняття рішення поділяють на два етапи.

На першому етапі вибирається попередній план, який задовольняє умови задачі за будь-якої реалізації випадкових параметрів. На другому етапі розраховується величина компенсації відхилень розробленого плану від фактичних значень, що були визначені після спостереження за реалізацією випадкових параметрів. Оптимальний план задачі визначають так, щоб забезпечити мінімум середнього значення загальних витрат, які виникають на обох етапах розв'язування задачі. Для існування розв'язку двоетапної задачі вибір плану на першому етапі має гарантувати існування плану-компенсації.

Приклад 7.1. Побудуємо математичну модель відомої задачі про визначення оптимального виробничого плану в термінах стохастичного програмування. Необхідно розрахувати оптимальний план виробництва трьох видів продукції $X = (x_1, x_2, x_3)$, за якого максимізується загальний прибуток підприємства. Для спрощення розглянемо використання лише двох видів ресурсів, обсяги яких відомі: $b_1 = 550$ од., $b_2 = 205$ од. Прибуток від реалізації одиниці j -го виду продукції c_{kj} ($k, j = \overline{1,3}$) є випадковим, але відомі ймовірності одержання k -ої величини прибутку від реалізації одиниці j -го виду продукції p_{kj} ($k, j = \overline{1,3}$). Норми витрат i -го виду ресурсу на одиницю j -го виду продукції a_{ij} ($i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3}$) детерміновані. Початкові дані наведені в таблицях 7.1- 7.4.

Таблиця 7.1

Прибуток від одиниці першого виду продукції, ум. од. (c_1)	Ймовірність (p_1)
10	0,3
13	0,4
15	0,3

Таблиця 7.2

Прибуток від одиниці другого виду продукції, ум. од. (c_2)	Ймовірність (p_2)
12	0,2
15	0,5
13	0,3

Таблиця 7.3

Прибуток від одиниці третього виду продукції, ум. од. (c_3)	Ймовірність (p_3)
12	0,3
11	0,5
14	0,2

Таблиця 7.4

Вид продукції	Норма витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції, ум. од.	
	першого виду	другого виду
Перший	5	1
Другий	4	2
Третій	3	1,5

Розв'язання. Як зазначалось, математична постановка задачі стохастичного програмування може бути подана в різних варіантах залежно від вигляду цільової функції. Розглянемо кілька можливих варіантів постановок для умов даної задачі.

І варіант.

Цільова функція залежить від випадкової величини, отже, математична модель даної задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} \max F &= C(\omega) X, \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2; \end{cases} \\ x_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{aligned}$$

Маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з випадковими параметрами цільової функції. Очевидно, що величина F є також випадковою величиною з законом розподілу ймовірностей $N(\overline{F}, \sigma_F^2)$, де \overline{F} — математичне сподівання, а σ_F^2 — дисперсія.

Щоб розв'язати таку задачу, необхідно знайти математичне сподівання \overline{F} .

Позначимо символами $M(c_j)$, $j = \overline{1,3}$ — математичне сподівання прибутку від j -го виду продукції, тоді математична модель набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \max \overline{F} &= M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 = M(C^T(\omega) X), \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2; \end{cases} \\ x_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{aligned}$$

У наведеній постановці маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з M -моделлю, оскільки цільова функція є математичним сподіванням випадкової величини (прибутку).

Оскільки випадкова величина прибутку є дискретною і відомі значення відповідних ймовірностей p_{kj} ($k = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}$), то можна безпосередньо обчислити значення $M(c_j)$ ($j = \overline{1,3}$). Отже, в числовому вигляді маємо:

$$\begin{aligned} M(c_1) &= \sum_{k=1}^3 c_{k1} p_{k1} = c_{11}p_{11} + c_{21}p_{21} + c_{31}p_{31} = 10 \cdot 0,3 + 13 \cdot 0,4 + 15 \cdot 0,3 = 12,7; \\ M(c_2) &= \sum_{k=1}^3 c_{k2} p_{k2} = c_{12}p_{12} + c_{22}p_{22} + c_{32}p_{32} = 12 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,5 + 13 \cdot 0,3 = 13,8; \\ M(c_3) &= \sum_{k=1}^3 c_{k3} p_{k3} = c_{13}p_{13} + c_{23}p_{23} + c_{33}p_{33} = 12 \cdot 0,3 + 11 \cdot 0,5 + 14 \cdot 0,2 = 11,9. \end{aligned}$$

Математична модель задачі набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \max F &= 12,7x_1 + 13,8x_2 + 11,9x_3, \\ \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 205; \end{cases} \\ x_j &\geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{aligned}$$

Початкова задача зведена до задачі лінійного програмування, яку можна розв'язати симплексним методом, але оптимальний план детермінованої задачі є наближеним розв'язком початкової стохастичної.

Оптимальним планом є $X_1^* = (x_1^* \approx 46,67; x_2^* = 0; x_3^* \approx 105,56)$, причому прибуток становить $F_{\max} \approx 1848,78$.

II варіант.

Отриманий розв'язок може бути основою плану виробництва продукції за даних умов. Однак очевидно, що, оскільки значення випадкових величин були замінені їх математичним сподіванням, то розв'язок задачі знайдено як деяке усереднення всіх можливих за даних умов розв'язків. Для деякого набору фіксованих умов розрахований план може виявитись неоптимальним, тобто справжнє значення прибутку буде значно відрізнятись від очікуваного рівня. Якщо, наприклад, зовнішні умови складаються найнесприятливіше (мінімальні рівні прибутків для кожного з видів продукції), то значення цільової функції для відшуканого оптимального плану буде дорівнювати:

$$F(c_{j\min}) = 10 \cdot 46,67 + 11 \cdot 105,56 = 1627,86.$$

Очевидно, що відхилення даного значення від середнього очікуваного рівня ($1848,78 - 1627,86 = 220,92$) показує можливе завищення прибутку у плані. Відомо, що однією з головних характеристик відхилення значень випадкової величини від її середнього є дисперсія. Розрахуємо значення дисперсії для отриманого оптимального плану:

$$\begin{aligned} D_F &= \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 = \\ &= 3,81 \cdot (46,67)^2 + 1,56 \cdot 0 + 1,29 \cdot (105,56)^2 = 22672,88. \end{aligned}$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_F = \sqrt{D_F} = \sqrt{22672,88} = 150,58$.

Якщо допустити, що випадкова величина має нормальний закон розподілу, то, враховуючи властивості середнього квадратичного відхилення (правило трьох «сігм»), визначимо межі, в яких змінюватиметься прибуток: $\bar{F} \pm 3\sigma_F = 1848,78 \pm 451,74 = [1397,04; 2300,52]$. Якщо розраховані зміни прибутку не можуть влаштувати особу, що приймає рішення, то доцільно ввести обмеження, яке зменшить ризик втрати доходу.

За необхідності зменшення можливих втрат прибутку в систему обмежень вводять умову, що дисперсія прибутку має не перевищувати деякої заданої величини. Розв'яжемо задачу з додатковою умовою, що дисперсія має не перевищувати 5000.

$$\begin{aligned} \max F &= 12,7x_1 + 13,8x_2 + 11,9x_3, \\ &\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 205; \\ 3,81x_1^2 + 1,56x_2^2 + 1,29x_3^2 \leq 5000; \end{cases} \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

Ця задача є нелінійною. Розв'язавши її, маємо такий оптимальний план:

$X_2^* = (x_1^* = 14,23; x_2^* = 37,78; x_3^* = 39,39)$, причому прибуток $F = 1170$ буде змінюватися приблизно на 210 ум. од. (оскільки $\sigma_F = \sqrt{D_F} \approx 70,7$).

III варіант.

Застосування інструментарію математичного програмування до розв'язання економічних задач уможливорює врахування найвибагливіших побажань стосовно набору властивостей розроблюваних планів. Допустимо, що необхідно, орієнтуючись на деякий середній рівень прибутку, досягти мінімального рівня можливих його змін. У такому разі доречно використати V-модель задачі стохастичного програмування:

$$\begin{aligned} \min Z = D_F &= \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2, \\ &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2; \\ M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 \geq W; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}), \end{cases} \end{aligned}$$

де W — бажаний рівень сподіваного прибутку.

Зафіксуємо бажаний прибуток на рівні не нижче, ніж 1500 ум. од., і знайдемо оптимальний план такої задачі:

$$\begin{aligned} \min Z = D_F &= 3,81x_1^2 + 1,56x_2^2 + 1,29x_3^2, \\ &\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 205; \\ 12,7x_1 + 13,8x_2 + 11,9x_3 \geq 1500; \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язавши цю задачу квадратичного програмування, маємо:

$X_3^* = (x_1^* \approx 18,24; x_2^* \approx 48,4; x_3^* \approx 50,47)$, мінімальна дисперсія сподіваного прибутку буде дорівнювати $Z = \min D_F = 8206,125$, тобто зміни прибутку відбуватимуться в межах ± 270 ум. од.

Вибір одного з наведених варіантів математичних моделей залежатиме від конкретної ситуації, поставлених цілей та вимог, однак наведений приклад показує, що використання стохастичних задач дає математично обґрунтовану інформацію, яка може бути основою прийняття рішень за складних реальних умов.

§ 7.3. Одноетапні задачі стохастичного програмування

Розглянемо лінійну одноетапну задачу стохастичного програмування в такій постановці: визначити план X , для якого

$$\begin{aligned} \max M \left\{ \sum_{j=1}^n c_j(\omega) x_j \right\}, \\ P \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega) \right\} \geq p_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ x_j \geq 0, \omega \in \Omega \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned}$$

де вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції $C(\omega) = (c_j(\omega))$ ($j = \overline{1, n}$), матриця коефіцієнтів при змінних у системі обмежень $A(\omega) = (a_{ij}(\omega))$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$), а також вектор $B(\omega) = (b_i(\omega))$ ($i = \overline{1, m}$) є випадковими величинами; ω — випадковий параметр, Ω — множина значень ω , що з'являються з певною ймовірністю. Нехай $A(\omega)$ — нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням \bar{a}_{ij} і дисперсією σ_{ij}^2 , а $B(\omega)$ і $C(\omega)$ — нормально розподілені випадкові величини з математичними сподіваннями відповідно \bar{b}_i та \bar{c}_j і дисперсіями σ_i^2, σ_j^2 .

Оскільки в обмеженнях задачі виду $\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega)$ ($i = \overline{1, m}$) матриця $A(\omega)$ та вектор $B(\omega)$ є нормально розподіленими випадковими величинами, то їх різниці $\Delta_i(X) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega)$ ($i = \overline{1, m}$) також є випадковими величинами з нормальним розподілом, математичним сподіванням $\bar{\Delta}_i(X) = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j - \bar{b}_i$ ($i = \overline{1, m}$) і дисперсією $\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2$.

Обмеження $P \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega) \right\} \geq p_i$ ($i = \overline{1, m}$) еквівалентні нерівностям $P\{\Delta_i(X) \leq 0\} \geq p_i$ ($i = \overline{1, m}$). Враховуючи, що $\Delta_i(X)$ нормально розподілена випадкова величина, використаємо функцію нормального закону розподілу, внаслідок чого наведену нерівність можна записати так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i(X)}} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(\xi - \bar{\Delta}_i)^2}{2\sigma_i^2(X)}\right\} d\xi \geq p_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Позначимо: $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$. Тоді останню нерівність зведемо до вигляду:

$$\Phi\left(-\frac{\bar{\Delta}_i(X)}{\sigma_i(X)}\right) \geq p_i, \text{ звідки } \bar{\Delta}_i(X) + \Phi^{-1}(p_i)\sigma_i(X) \leq 0.$$

Підставивши в цю нерівність значення $\overline{\Delta}_i(X)$ і $\sigma_i(X)$, отримаємо:

$$\Phi^{-1}(p_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \leq \overline{b}_i - \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, m}).$$

Отже, початкову стохастичну задачу зведено до детермінованого аналогу з лінійною цільовою функцією та нелінійними обмеженнями:

$$\max F = \sum_{j=1}^n \overline{c}_j x_j$$

за умов:

$$\Phi^{-1}(p_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \leq \overline{b}_i - \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, m}).$$

Таку задачу можна розв'язати одним з відомих методів розв'язування задач нелінійного програмування, наприклад, методом множників Лагранжа.

Розглянемо одноетапну задачу стохастичного програмування, що задана P -моделлю. Отже, маємо задачу виду:

$$\min F = k$$

за умов:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq k \right\} &= p_0; \\ P \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \right\} &\geq p_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

У даній задачі необхідно мінімізувати величину k , що обмежує витрати на виготовлення продукції $\left(\sum_{j=1}^n c_j x_j \right)$, причому така вимога має виконуватися не строго, а із заданим рівнем імовірності - p_0 . Інші обмеження також виконуються з певною імовірністю - p_i ($i = \overline{1, m}$).

Допустимо, що випадкова величина c_j ($j = \overline{1, n}$) — нормально розподілена з математичним сподіванням \overline{c}_j і кореляційною матрицею $C = (c_{ij})$, де $c_{ij} = M\{(c_i - \overline{c}_i)(c_j - \overline{c}_j)\}$. Тоді вираз $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ буде випадковою величиною, що також нормально розподілена з математичним сподіванням $\sum_{j=1}^n \overline{c}_j x_j$ та дисперсією $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j$. Отже, (з попередніх викладок) можна записати:

$$P\left\{\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq k\right\} = p_0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k - \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j}{\sqrt{\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n c_{tj} x_t x_j}}\right) = p_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k(X) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j + \Phi^{-1}(p_0) \sqrt{\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n c_{tj} x_t x_j}.$$

При $p_0 \geq 0$ величина $k(X)$ є угнутою функцією за змінними x_j . Отже, за зроблених допущень задачі стохастичного програмування

$$\min F = k,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq k\right\} = p_0,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right\} \geq p_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$X \geq 0$$

відповідає детермінований еквівалент:

$$\min k(X) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j + \Phi^{-1}(p_0) \sqrt{\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n c_{tj} x_t x_j}$$

$$\text{за умов: } \Phi^{-1}(p_i) \sqrt{\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n v_{it} x_t x_j + 2 \sum_{j=1}^n v_{ij} x_j^2 + \theta_i^2} \leq \bar{b}_i - \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, m}).$$

Остання задача являє собою задачу опуклого програмування. Для її розв'язування можна застосувати теорему Куна—Таккера, або один з інших методів розв'язування задач нелінійного програмування.

Приклад 7.2. Фермер має змогу купити три види зерна та готувати з нього різні суміші для виробництва свинини. У табл. 7.5 містяться дані про поживність зерна, його вартість і мінімальні та максимальні потреби у поживних речовинах. Потреба у поживних речовинах розподілена рівномірно на зазначених інтервалах від мінімально можливого до максимального рівня $[\min_i; \max_i]$ для кожної i -ої поживної речовини ($i = \overline{1, 4}$).

Таблиця 7.5

**ВМІСТ ПОЖИВНИХ РЕЧОВИН В 1 Ц ЗЕРНА
ТА ПОТРЕБА У ПОЖИВНИХ РЕЧОВИНАХ**

Зерно	Поживна речовина				Ціна, грн
	кормові одиниці, ц	перет- равний протеїн, кг	лізін, кг	каль- цій, кг	

Ячмінь, ц	1,15	8,5	0,41	0,2	45
Кукурудза,ц	1,33	7,3	0,21	0,05	40
Горох, ц	1,18	19,2	1,42	0,2	50
Потреба у поживних речовинах:					
а) максимальна (max_i)	106	890	45	12	—
б) мінімальна (min_i)	95,4	801	41	9	—

Необхідно розробити економіко-математичну модель і знайти оптимальний розв'язок, який забезпечував би мінімальні витрати на закупівлю зерна за умов задоволення мінімально допустимих потреб у всіх поживних речовинах з ймовірністю $\gamma = 0,9$.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 — відповідно обсяги ячменю, кукурудзи і гороху, які необхідно закупити.

Критерій оптимальності:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$P\{1,15x_1 + 1,33x_2 + 1,18x_3 \geq a\} \geq 0,9;$$

$$P\{8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq b\} \geq 0,9;$$

$$P\{0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq c\} \geq 0,9;$$

$$P\{0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq d\} \geq 0,9,$$

де a, b, c, d — відповідно потреби кормових одиниць, перетравного протеїну, лізину та кальцію (випадкові, рівномірно розподілені величини). Цю систему ймовірнісних обмежень запишемо детермінованими еквівалентами, тобто:

$$1,15x_1 + 1,33x_2 + 1,18x_3 \geq a_1;$$

$$8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq b_1;$$

$$0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq c_1;$$

$$0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq d_1,$$

де a_1, b_1, c_1, d_1 — відповідно значення випадкових величин, що задовольняють умови:

$$P\{a \geq a_1\} \geq 0,9; \text{ і } P\{b \geq b_1\} \geq 0,9;$$

$$P\{c \geq c_1\} \geq 0,9; \text{ і } P\{d \geq d_1\} \geq 0,9.$$

Визначимо параметри a_1, b_1, c_1, d_1 . З теорії ймовірностей відомо, що:

$$\frac{1}{106 - 95,4} \int_{95,4}^{a_1} d\varphi = 0,9.$$

Отже, маємо: $\frac{1}{10,6} \left(\varphi \Big|_{95,4}^{a_1} \right) = 0,9$. Звідси: $\frac{1}{10,6} (a_1 - 95,4) = 0,9$ або $a_1 - 95,4 = 9,54$,

тому $a_1 = 104,94$.

Відповідно отримаємо: $b_1 = 881,1$; $c_1 = 44,6$; $d_1 = 11,7$.

Запишемо детермінований варіант економіко-математичної моделі купівлі фермером зерна, яке буде використано для відгодівлі свиней:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$1,15x_1 + 1,33x_2 + 1,18x_3 \geq 104,94,$$

$$8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq 881,1,$$

$$0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq 44,6,$$

$$0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq 11,7,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Розв'язавши цю задачу симплексним методом, отримаємо: $x_1 = 30,94$, $x_2 = 35,59$, $x_3 = 18,66$. Оптимальні витрати дорівнюють 3749 гривням.

§ 7.4. Двоетапні задачі стохастичного програмування

Недоліком розглянутих одноетапних задач стохастичного програмування є те, що в них лише фіксується факт можливих відхилень значень випадкових параметрів і усереднені розв'язки вибирають за умови, що відхилення значень від середнього рівня в будь-який бік небажане (зменшується величина дисперсії параметрів у обмеженнях або цільова функція — дисперсія мінімізується). У більшості реальних економічних задач має значення не лише величина відхилення, але також і його напрямок. Двоетапні задачі стохастичного програмування позбавлені зазначеного недоліку.

Розглянемо задачу стохастичного програмування в такій постановці:

$$\max F = \sum_{j=1}^n c_j(\omega) x_j, \quad (7.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j = b_i(\omega) \quad (i = \overline{1, m}); \quad (7.5)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \quad (7.6)$$

Якщо обмеження залежно від значень випадкових параметрів та вектора X виконуються як $\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)$, то можливе існування надлишку (ресурсів, продукції тощо). Позначимо його через Δ_i^+ :

$$\Delta_i^+(X, \omega) = \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \right).$$

За виконання обмежень залежно від значень випадкових параметрів та вектора X у вигляді $\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \geq b_i(\omega)$ виникає дефіцит. Позначимо його через Δ_i^- :

$$\Delta_i^-(X, \omega) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega) \right).$$

Отже, якщо $\Delta_i^+(X, \omega) = \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \right)$, то $\Delta_i^-(X, \omega) = 0$, а якщо $\Delta_i^-(X, \omega) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega) \right)$, то $\Delta_i^+(X, \omega) = 0$.

Інакше кажучи,

$$\Delta_i^+(X, \omega) = \max \left[0, \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \right) \right],$$

$$\Delta_i^-(X, \omega) = \max \left[0, \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega) \right) \right].$$

Очевидно, що система обмежень (7.5) задачі може бути подана в еквівалентній формі:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j + \Delta_i^+ - \Delta_i^- = b_i(\omega) \quad (i = \overline{1, m}).$$

Допустимо також, що відомі величини α_i — питомі витрати на збереження надлишків ($\alpha_i > 0$) та β_i — питомі витрати, що пов'язані з дефіцитом ($\beta_i > 0$) ($i = \overline{1, m}$). Отже, можна визначити штрафну функцію для i -го обмеження за результатом його виконання. Позначимо її через S , тоді:

$$S = \max \{ \alpha_i \Delta_i^+; -\beta_i \Delta_i^- \} = \begin{cases} \alpha_i \Delta_i^+, \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), \\ -\beta_i \Delta_i^-, \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \geq b_i(\omega). \end{cases}$$

Тоді доцільно розв'язувати задачу (7.4) - (7.6) у такій постановці:

$$\min F(X) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j + M \left(\sum_{i=1}^m (\alpha_i \Delta_i^+(X, \omega) + \beta_i \Delta_i^-(X, \omega)) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j + M \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \max \left\{ 0, \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \right) \right\} + \right. \\ \left. + \beta_i \max \left\{ 0, \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j - b_i(\omega) \right) \right\} \right) \quad (7.7)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j = b_i(\omega) \quad (i = \overline{1, m}) \quad (7.8)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (7.9)$$

Змінні Δ_i^+ та Δ_i^- можна розглядати як такі, що забезпечують виконання обмежень (7.5) як рівностей.

Отже, розв'язування задачі відбувається в два етапи: спочатку відшуковують фіксований план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ згідно з апіорною інформацією про стан зовнішнього середовища, який і визначає реалізацію випадкових параметрів. Значення вектора X не задовольняє обмеження задачі для кожного $\omega \in \Omega$. На другому етапі після спостереження за зовнішнім середовищем і отримання точного значення випадкових параметрів ω знаходять значення змінних Δ_i^+ та Δ_i^- , що компенсують відхилення, які виникли за попереднім планом X . Витрати на корекцію початкового плану визначаються як

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i \Delta_i^+ + \beta_i \Delta_i^-).$$

Важливо спочатку отримати такий план, який би вимагав мінімальних витрат не лише на його реалізацію, але і на його коректування.

Коректування планів у процесі їх реалізації є цілком природним при складанні планів для реальних економічних процесів. Необхідність коректування плану зумовлена не недоліками планування, а складністю прийняття рішень за умов невизначеності.

Детерміноване моделювання не дає змоги об'єднати два етапи: прийняття плану та його коректування. Перехід від детермінованих моделей до стохастичних, в яких використовуються випадкові величини, що саме і викликають необхідність корекції, уможливорює отримання математичних моделей, що об'єднують вищезазвані два етапи планування. Отже, в результаті розв'язування двохетапних стохастичних задач отримують плани, що є стійкими за умов невизначеності і мінімізують загальні витрати на реалізацію і корекцію плану, тобто забезпечують загальний ефект від попереднього плану та його корекції.

У моделях двохетапного стохастичного програмування відображаються найхарактерніші особливості планування за умов невизначеності:

- 1) ймовірнісний характер початкової інформації,
- 2) вибір попереднього плану з урахуванням його майбутнього коректування,

3) коректування попередньо вибраного плану по мірі уточнення інформації.

Модель (7.7)-(7.9) - найпростіша двохетапна модель стохастичного програмування. У загальному випадку план-корекція вводиться в систему обмежень з допомогою матриці корекції загального вигляду, елементи якої можуть залежати від ω , тобто розглядається система нерівностей:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j + \sum_{k=1}^r d_{ik}(\omega)y_k + b_i(\omega) \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}); \quad y_k \geq 0 \quad (k = \overline{1, r}),$$

або у векторно-матричній формі:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \geq 0; \quad (7.10)$$

$$X \geq 0, \quad Y \geq 0. \quad (7.11)$$

Попередній план X вибирається до спостережень над ω . Коли ω стає відомим, то визначають план-корекцію Y у такий спосіб, щоб виконувались співвідношення (7.10), (7.11). При цьому ефект від плану-корекції дорівнює:

$$\sum_{k=1}^r d_{ik}(\omega)y_k. \quad (7.12)$$

Оскільки з кожним планом-корекцією Y пов'язаний певний ефект, то при певному X і спостереженому ω його краще за все вибирати з умови максимізації (7.12) за обмежень (7.10), (7.11). Позначимо такий план через $Y(X, \omega)$ і назовемо його оптимальною корекцією плану X за зовнішніх умов ω . Можна допустити, що $Y(X, \omega)$ існує при кожному X і ω , у протилежному разі в (7.10) можна ввести штучні змінні Y' і одночасно — в (7.11) з досить великим штрафом. Сподіваний ефект від плану-корекції дорівнює:

$$M\left(\sum_{k=1}^r d_k(\omega)y_k(X, \omega)\right).$$

Суть задачі полягає у відшукуванні плану X , який максимізував би математичне сподівання ефекту від плану з урахуванням його майбутньої корекції:

$$F(X) = \bar{C}(\omega)X + M\left(\sum_{k=1}^r d_k(\omega)y_k(X, \omega)\right) \quad (7.13)$$

за умов:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \geq 0; \quad (7.14)$$

$$X \geq 0, \quad Y \geq 0. \quad (7.15)$$

Іноді нелінійну задачу (7.13)—(7.15) зручно формулювати дещо в іншому вигляді, а саме: знайти такий детермінований вектор X і такий $Y(\omega)$, щоб

$$\max F(X) = \bar{C}(\omega)X + M(d(\omega), Y(\omega)) \quad (7.16)$$

за обмежень:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y(\omega) + b(\omega) \geq 0; \quad (7.17)$$

$$X \geq 0, Y(\omega) \geq 0. \quad (7.18)$$

У такій постановці двохетапна задача зводиться до одноетапної. Одночасно знаходиться оптимальний план X і його оптимальна корекція $Y(\omega)$. Задача (7.16)—(7.18) на відміну від (7.13)—(7.15) лінійна, однак, якщо в задачі (7.13)—(7.15) розв'язком є n -вимірний вектор X , для пошуку якого можна застосувати чисельні методи, то в задачі (7.16)—(7.18) невідомими є $(X, Y(\omega))$ і застосувати для розв'язування задачі чисельні методи можна лише за умови, якщо Ω — скінченна множина з невеликою кількістю елементів.

Приклад 7.3. Потрібно перевезти однорідну продукцію від двох постачальників трьом споживачам. Обсяг продукції першого постачальника $a_1 = 340$ од., а другого — $a_2 = 560$ од. Попит кожного споживача на продукцію є випадковим і відомий з відповідними ймовірностями, які наведені в табл. 7.6—7.8.

Таблиця 7.6

Попит першого споживача на продукцію, од. (b_1)	Ймовірність
100	0,05
175	0,2
200	0,6
300	0,1
340	0,05

Таблиця 7.7

Попит другого споживача на продукцію, од. (b_2)	Ймовірність
250	0,05
290	0,25

300	0,4
320	0,2
360	0,1

Таблиця 7.8

Попит третього споживача на продукцію, од. (b_3)	Ймовірність
290	0,1
300	0,3
400	0,3
590	0,2
600	0,1

Відомі також витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до кожного споживача, що наведені в табл. 7.9 в умовних одиницях:

Таблиця 7.9

Постачальник	Споживач		
	перший	другий	третій
Перший	30	37	28
Другий	32	26	30

Якщо попит на продукцію буде більшим, ніж її наявність, то необхідно буде сплатити штраф за недопостачання кожної одиниці продукції першому, другому та третьому споживачам обсягом відповідно 105, 169 і 86 ум. од., а якщо попит буде меншим, то необхідно буде зберігати надлишки, що потребуватиме додаткових витрат на одиницю продукції обсягом відповідно 40, 45 та 30 ум. од.

Необхідно визначити обсяги перевезень продукції від постачальників до споживачів, які забезпечили б за заданих умов мінімальні витрати на постачання і зберігання продукції, а також на штрафи за недопостачання.

Розв'язання.

Задача належить до задач транспортно-го типу. Необхідно перевірити умову існування її розв'язку. Оскільки потреби споживачів є випадковими

величинами, то визначимо спочатку математичне сподівання попиту кожного споживача.

$$M(b_1) = 100 \cdot 0,05 + 175 \cdot 0,2 + 200 \cdot 0,6 + 300 \cdot 0,1 + 340 \cdot 0,05 = 207 ;$$

$$M(b_2) = 250 \cdot 0,05 + 290 \cdot 0,25 + 300 \cdot 0,4 + 320 \cdot 0,2 + 360 \cdot 0,1 = 305 ;$$

$$M(b_3) = 290 \cdot 0,1 + 300 \cdot 0,3 + 400 \cdot 0,3 + 590 \cdot 0,2 + 600 \cdot 0,1 = 417 .$$

Загальний обсяг попиту на продукцію становитиме:

$$\sum_{j=1}^3 M(b_j) = 207 + 305 + 417 = 929 ,$$

а пропозиція дорівнює: $\sum_{i=1}^2 a_i = 340 + 560 = 900$ од .

Зіставимо обсяг продукції у постачальників і сподіваний загальний попит:

$$\sum_{i=1}^2 a_i < \sum_{j=1}^3 M(b_j) .$$

Отже, виникає незадоволений попит: $\sum_{j=1}^3 M(b_j) - \sum_{i=1}^2 a_i = 929 - 900 = 29$ од .

Позначимо через x_{ij} — обсяги перевезень продукції від i -го постачальника до j -го споживача, а невідомі величини, що характеризують обсяги недопостачання та надлишки, — відповідно векторами

$$Y = (y_1^-, y_2^-, y_3^-) ,$$

$$Y^+ = (y_1^+, y_2^+, y_3^+) .$$

Тоді математична модель двохетапної задачі стохастичного програмування, зведена до задачі лінійного програмування, відповідно до моделі (16)-(18) має вигляд:

$$\min F = 30x_{11} + 37x_{12} + 28x_{13} + 32x_{21} + 26x_{22} + 30x_{23} +$$

$$105y_1^- + 169y_2^- + 86y_3^- + 40y_1^+ + 45y_2^+ + 30y_3^+$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 340; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 560; \\ x_{11} + x_{21} - y_1^+ + y_1^- = 207; \\ x_{12} + x_{22} - y_2^+ + y_2^- = 305; \\ x_{13} + x_{23} - y_3^+ + y_3^- = 417. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, y_j^+ \geq 0, y_j^- \geq 0, i=1,2; j=1,2,3 .$$

Розв'язуючи цю задачу, отримаємо оптимальний план:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 340 \\ 207 & 353 & 0 \end{pmatrix} ,$$

причому план-корекція $Y^* = (0 \quad 0 \quad 77)$, $Y = (0 \quad 48 \quad 0)$. Мінімальні витрати дорівнюють: $F = 35744$ ум. од.

Список рекомендованої літератури

1. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В. И., Волощенко А.Б. Математическое программирование.- М.: Высшая школа, 1976, 1980.
2. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике. – «Питер», 2000.
3. Бугір М.К. Математика для економістів. – К.: Видавничий центр “Академія”, 1998.
4. Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960.
5. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965.
6. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию - М.: Высшая школа, 1975.
7. Зайченко Ю.П. Исследование операций.- К.: Вища школа, 1988.
8. Ляшенко И.Н. и др. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Вища школа, 1975.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации.- М.: Наука, 1981.
10. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник.- М.: МГУ, Изд-во «ДИС», 1998.
11. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. М., 1973.
12. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., 1964.
13. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. М., 1960.
14. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., 1970.

15. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М., 1977.
16. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М., 1980.
17. Моисеев Н.Н. Современное состояние теории исследования операций.- М., 1979.
18. Муртаф Б. Современное линейное программирование. – М., 1984.

ЗМІСТ

Передмова	3
Розділ 1 ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	5
§1.1. Основні властивості задач лінійного програмування.....	5
§1.2. Основні визначення та теореми лінійного програмування.....	9
§1.3. Симплекс-метод розв'язання задач лінійного програмування.....	11
§1.4. Метод штучного базису.....	15
§1.5. Двоїста задача лінійного програмування.....	16
§1.6. Економічний аналіз вихідної та двоїстої задач.....	19
§1.7. Двоїстий симплекс-метод.....	23
Розділ 2 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА.....	25
§2.1. Постановка транспортної задачі побудова її математичної моделі...25	25
§2.2. Метод найменшої вартості пошуку опорних планів транспортної задачі.....	28
§2.3. Критерій оптимальності опорних розв'язків за методом потенцілів.....	29
§2.4. Пошук опорних розв'язків за допомогою циклу перерахунку.....	32
§2.5. Транспортна задача з неправильним балансом.....	35
Розділ 3 ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	37
§3.1. Нерівність Гоморрі.....	37
§3.2. Метод Гоморрі.....	40
Розділ 4 ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	45
§4.1. Особливості задач нелінійного програмування.....	45
§4.2. Геометрична інтерпретація задач нелінійного програмування.....	46
§4.3. Задачі нелінійного програмування без обмежень. Необхідні та достатні умови оптимальності точки.....	49
§4.4. Задачі нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями.....	52
§4.5. Задачі нелінійного програмування з обмеженнями-нерівностями. Умови Куна-Таккера.....	56
§4.6. Сідлові точки та їх зв'язок з функцією Лагранжа.....	58
Розділ 5 ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	61
§5.1. Основні ідеї обчислювального методу динамічного програмування.....	61

§5.2. Принцип оптимальності Беллмана.....	64
Розділ 6 ТЕОРІЯ ІГОР.....	67
§6.1. Предмет теорії ігор. Термінологія і класифікація ігор.....	67
§6.2. Матрична гра і поняття сідлової точки.....	68
§6.3. Змішані стратегії.....	70
§6.4. Розв'язування матричної гри методами лінійного програмування.....	73
Розділ 7 СТОХАСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	74
§7.1. Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування.....	74
§7.2. Особливості математичної постановки задач стохастичного програмування.....	76
§7.3. Одноетапні задачі стохастичного програмування.....	84
§7.4. Двохетапні задачі стохастичного програмування.....	88
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	95

Навчальне видання

Автори: Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Лобода А.В.,
Вітавецька Л.А., Флорко Т.О.

Математичне програмування

Конспект лекцій

Підп. до друку _____ Формат _____ Папір
Умовн. друк. арк. Тираж _____ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15
Надруковано з готового оригінала-макета