

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи та виконання
контрольної роботи з дисципліни
ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

для студентів І курсу заочної та дистанційної форм навчання

Спеціальність – менеджмент

“Узгоджено”
у навчально-консультативному
центрі

Одеса 2018

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Методичні вказівки

**для самостійної роботи та виконання
контрольної роботи з дисципліни**

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

для студентів I курсу заочної та дистанційної форм навчання

Спеціальності – менеджмент

Одеса 2018

Методичні вказівки до СРС та виконання контрольної роботи з дисципліни “Вища та прикладна математика” для студентів І курсу заочної та дистанційної форми навчання. Спеціальності – менеджмент.

Одеса, ОДЕКУ, 2018р., 49 с., укр.мова.

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Свинаренко А.А., д.ф.-м.н., проф., Буяджи В.В., к.ф.-м.н., доц., Вітавецька Л.А., к.ф.-м.н., доц..

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої та прикладної математики

ЗМІСТ

I	ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА.....
1.1	Передмова.....
1.2	Зміст дисципліни.....
1.3	Перелік навчальної та методичної літератури.....
II	ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА.....
2.1	Загальні поради.
2.2	Загальні рекомендації студентам заочної форми навчання до виконання контрольної роботи
2.3	Рекомендації до вивчення теми „Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії ”.....
2.4	Перелік завдань контрольної роботи для змістовного модуля №1 (табл.1, Блок №1, завдання 1-40)
2.5	Рекомендації до вивчення теми „Аналіз функції однієї змінної. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних”
2.6	Перелік завдань контрольної роботи для змістовного модуля №1 (табл.1, Блок №2, завдання 31-70)
2.7	Рекомендації до вивчення теми „Інтегральне числення функції однієї змінної ”.....
2.8	Перелік завдань контрольної роботи для змістовного модуля №1 (табл.1, Блок №3, завдання 71-110)
2.9	Рекомендації до вивчення теми „Диференціальні рівняння ”.....
2.10	Перелік завдань контрольної роботи для змістовного модуля №2 (табл.1, Блок №3, завдання 71-110)
2.11	Рекомендації до вивчення теми «Ряди».....
2.12	Перелік завдань контрольної роботи для змістовного модуля №2 (табл.1, Блок №3, завдання 71-110)
2.13	Рекомендації до вивчення теми «Теорія імовірності»
2.14	Перелік завдань контрольної роботи для змістовного модуля №2 (табл.1, Блок №3, завдання 71-110)
III	ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ.....
3.1	Система контролю знань та вмінь.....
3.2	Форми контролю знань та вмінь студентів.....
3.2.1	Поточний контроль.....
3.2.2	Підсумковий контроль.....
3.3	Перелік базових знань та вмінь.....

І ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1 Передмова

Вища та прикладна математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців зі спеціальності менеджмент. Вона спрямована на вивчення основних положень лінійної алгебри, диференціального та інтегрального числення, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу вищої та прикладної математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої та прикладної математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівень знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни “Вища та прикладна математика” - навчити студентів правильно використовувати вивчені методи при розв’язанні задач й аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення дисципліни “Вища та прикладна математика” базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок. Роз’яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв’язанні задач даної дисципліни.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен **знати** основні визначення, положення та теореми лінійної і векторної алгебри, диференціального і інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, теорії диференціальних рівнянь, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії імовірності; **вміти** використовувати теоретичні знання та навички при розв’язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, розв’язанні диференціальних рівнянь, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики до розв’язання прикладних математичних задач.

1.2 Зміст дисципліни

1.2.1 Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Системи координат на прямої, площині і просторі. Вектори. Лінійні операції над векторами. Проекція вектора на вісь. Напрямні косинуси і довжина вектора. Скалярний добуток векторів і його властивості. Довжина вектора і кут між двома векторами в координатній формі. Умова ортогональності двох векторів. Визначники другого і третього порядків, їх властивості та обчислення. Алгебраїчні доповнення і мінори. Визначники n -го порядку. Векторний добуток двох векторів, його властивості. Умова колінеарності двох векторів. Мішаний добуток трьох векторів.

Рівняння ліній на площині. Різні форми рівняння прямої на площині. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої. Криві другого порядку, їхні геометричні властивості і рівняння. Рівняння площини і прямої в просторі. Кут між площинами. Кут між прямими. Кут між прямою і площиною. Рівняння поверхні в просторі. Циліндричні поверхні, сфера. Конуси. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди. Геометричні властивості цих поверхонь, дослідження їхніх форм методом перетинів. Полярні координати на площині.

Матриці, дії над ними. Поняття оберненої матриці.

Системи двох і трьох лінійних рівнянь. Матричний запис системи лінійних рівнянь. Правило Крамера. Система n лінійних рівнянь з n невідомими. Метод Гауса. Обчислення оберненої матриці методом Гаусса.

Поняття лінійного (векторного) простору. Вектор як елемент лінійного простору. Лінійні оператори.

1.2.2 Аналіз функції однієї змінної.

Основні елементарні функції, їх властивості і графіки.

Числові послідовності, їх роль в обчислювальних процесах. Границя числової послідовності. Існування границі монотонної обмеженої послідовності. Складні і зворотні функції, їх графіки.

Границя функції у точці. Границя функції на нескінченності. Теореми про границі. Визначні границі.

Безперервність функцій у точці. Безперервність основних елементарних функцій. Нескінченно малі в точці функції, їхні властивості. Порівняння нескінченно малих. Властивості функцій, безперервних на відрітку: обмеженість, існування найбільшого і найменшого значень, існування проміжних значень.

1.2.3 Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних.

Поняття функції, диференційованої у точці.

Диференціал функцій. Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст у різних задачах. Правило здобування похідної і диференціалу. Похідна складеної і оберненої функції. Інваріантність форми диференціалу. Диференціювання функцій, заданих параметрично.

Точка екстремуму функцій. Теорема Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші, їх застосування.

Похідні і диференціали вищих порядків. Правило Лопітала розкриття невизначеностей. Розвинення функцій по формулі Тейлора. Умови монотонності функції. Екстремуми функції, необхідна та достатні умови.

Відшукування найбільшого і найменшого значень функцій, диференційованої на відрізку. Дослідження опуклості функції. Точки перегину. Асимптоти графіку функції. Поняття про асимптотичне розкладання. Загальна схема дослідження функцій і побудова її графіка.

Функції багатьох змінних. Частинні похідні, повний диференціал. Частинні похідні другого порядку, диференціал другого порядку.

1.2.4 Інтегральне числення функцій однієї змінної.

Первісна. Невизначений інтеграл і його властивості. Таблиця основних первісних.

Безпосереднє інтегрування функцій. Інтегрування частинами та підстановкою. Приклади інтегрування раціональних функцій за допомогою розкладання на найпростіші дробі. Приклади тригонометричних підстановок і метод «раціоналізації» інтегралів. Приклади, коли первісні не можуть бути виражені елементарними функціями.

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу. Найпростіші властивості визначеного інтегралу, теорема про середнє.

Похідна від інтегралу по верхній границі. Формула Ньютона-Лейбниця. Геометричний зміст визначеного інтегралу.

Обчислення інтеграла за допомогою інтегрування частинами і заміни змінної. Обчислення інтеграла за допомогою застосування формули Тейлора.

Наближене обчислення інтегралів по формулах трапецій і Симпсона.

Невласні інтеграли. Основні властивості, ознаки збіжності, абсолютна і умовна збіжності. Наближене обчислення невластних інтегралів. Інтеграли, що залежать від параметра. Їхня безперервність, правило Лейбниця.

Поняття про невластні інтеграли, що залежать від параметра.

1.2.5 Диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Теорема існування та єдності розв'язку задачі Коші.

Диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші. Поняття про крайові задачі для диференціальних рівнянь.

Рівняння, що допускають зниження порядку.

Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Рівняння з правою частиною спеціального вигляду. Застосування до опису лінійних моделей.

Задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь. Теорема існування й єдиності розв'язку задачі Коші.

Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1.2.6 Ряди

Числові ряди. Збіжність і суми рядів. Необхідна умова збіжності. Ознаки збіжності. Методи дослідження збіжності рядів.

Функціональні ряди, область збіжності, методи її визначення, степеневі ряди. Розкладання функцій у степеневі ряди. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях.

Ряди Фур'є.

1.2.7 Теорія імовірності

Предмет теорії імовірності. Аксиоматика теорії імовірності. Серія іспитів із випадковими наслідками. Частота. Властивості частот. Математична систематизація випадкових явищ. Поняття випадкової події. Класифікація подій. Простір елементарних подій. Операції над подіями та відносини між ними.

Алгебра подій. Імовірність – адитивна функція події. Аксиоми теорії імовірностей. Імовірнісні простори. Класичне і геометричне визначення імовірності. Визначення умовної імовірності. Незалежність подій. Імовірність добутку подій. Теорема про повну імовірність, формула Байєса. Послідовність незалежних іспитів, схема Бернуллі. Граничні теореми Муавра-Лапласа та Пуассона.

Випадкові дискретні величини. Ряд розподілу. Функції розподілу випадкової величини та її властивості. Неперервні та дискретні розподіли. Приклади розподілів: нормальне, пуасонівське, біноміальне, рівномірне, показникове. Сумісний розподіл декількох випадкових величин. Функції від випадкових величин. Незалежність випадкових величин. Розподіл суми

незалежних випадкових величин. Математичне чекання і дисперсія випадкової величини. Інші моменти випадкових величин та їх властивості. Коваріація, коефіцієнт кореляції.

Закон великих чисел. Нерівність Чебишева. Закон великих чисел для послідовностей незалежних випадкових величин. Теореми Бернуллі та Чебишева. Центральна гранична теорема. Характеристичні функції та їх властивості (теореми про взаємно однозначну та неперервну відповідність характеристичних функцій і функцій розподілу). Центральна гранична теорема для однаково розподілених доданків. Теореми Ляпунова та Хінчіна.

1.3 Перелік навчальної та методичної літератури

Основна:

1. О.В.Глушков, Ю.О.Кругляк, Ю.Г. Чернякова. Лінійна алгебра. Конспект лекцій.- Одеса, ОДЕКУ, «ТЭС»-2004.
2. Сборник задач по математике для ВТУЗов: Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.- М.: Наука, 1986.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М. «Высшая школа», 1986.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Ч. 1, 2. М., «Наука», 1976.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1972.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., «Высшая школа», 1975.
7. Глушков О.В., Чернякова Ю.Г., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Лобода А.В., Середенко С.С. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.1,2,3 – Одеса, 2011, 2012, 2013
8. www.library-odeku.16mb.com
9. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., «Высшая школа», 1983.
10. Амбросов С.В., Глушков О.В., Малиновська С.В. Элементы теории клеточных автоматов в курсах «Теория вероятностей та випадкових процесів» та «Обчислювальні методи» // В кн.: Актуальні проблеми математики. – Київ, 2000.

Додаткова:

11. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., «Наука», 1986.

12. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., «Наука», 1984.
13. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М., «Просвещение», 1976.
14. Мышкис А.С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1973.

2 ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА

2.1 Загальні поради.

1. Насамперед студент повинен розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеної у пункті 1.3 навчальної та методичної літератури, зокрема конспекту лекцій , а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати іншу основну та додаткову літературу та повчання до цієї теми.
2. Коли зміст теми засвоєно, треба відповісти на "запитання до самоперевірки", що наведені наприкінці кожної теми. Якщо виникають труднощі - зверніться ще раз до конспекту лекцій або до іншої наведеної у п. 1.3 літератури та знайдіть відповіді на свої запитання.
3. Якщо попередні пункти виконано, переходьте до виконання завдань контрольної роботи, що відповідає вивченій темі), використовуючи наведені розв'язання типових задач.
4. Далі переходьте до вивчення наступної теми .
Якщо виникли питання, на які Ви не в змозі відповісти самостійно, звертайтеся за консультацією до викладача за електронною адресою кафедри вищої та прикладної математики ОДЕКУ (e-mail: math@odeku.edu.ua) .

2.2 Загальні рекомендації студентам заочної форми навчання до виконання контрольної роботи

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над навчальним матеріалом, що складається з наступних елементів: вивчення матеріалу по підручниках, розв'язання задач, самоперевірка, виконання контрольних робіт.

У допомогу заочникам університетом влаштовуються читання лекцій та практичні заняття.

Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації.

Вказівки студенту по поточній роботі даються також в процесі рецензування контрольних робіт.

Студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і завзятій самостійній роботі допомога університету виявиться досить ефективною.

Завершальним етапом вивчення окремих частин курсу вищої математики є складання заліків і іспитів відповідно до навчальних планів.

В зв'язку зі збільшенням інтенсивності навчання підсилюється значення дистанційної форми навчання, що обумовлює структуру і зміст даних методичних вказівок.

Попередні підсумки роботи студента підводить контрольна робота, мета якої – допомога в засвоєнні матеріалу та перевірка того, наскільки успішно студенти опанували курс дисципліни "Вища та прикладна математика".

Робота повинна виконуватися самостійно і бути деякою мірою і гарантією того, що даний розділ засвоєний студентом.

Контрольна робота має вигляд індивідуальних завдань.

Номер варіанту відповідає останній цифрі шифру залікової книжки студента.

Кожен варіант контрольної роботи містить практичні завдання відповідно до представлених в змістовних модулях темах курсу.

Структура контрольної роботи має вигляд окремих блоків. Тематика контрольних завдань представлена у табл.1.

Оформлення контрольної роботи здійснюється на комп'ютері в текстовому редакторі "Microsoft Word" з використанням редактора формул.

Дані, що повинні бути відображені на титульному аркуші, вказані нижче.

Завдання та розв'язання в контрольній роботі формулюються безпосередньо перед відповіддю.

Виконані завдання кожного блоку надсилаються викладачеві в строки, зазначені в таблиці 1 електронною поштою (e-mail: **math@odeku.edu.ua**) у електронному вигляді.

У міжсесійний період провідним викладачем проводяться консультації на кафедрі згідно з розкладом.

Консультації також можна отримати по телефону або письмово, по електронній пошті, чітко виклавши суть питання, що викликало ускладнення при виконанні контрольної роботи.

При перевірці самостійної роботи в міжсесійний період використовуються елементи дистанційної форми контролю вивчення дисципліни за блоками змістовних модулів, терміни виконання яких наведені у таблиці 1.

По закінченні виконання усіх блоків роботи та отримання позитивних відгуків на них від викладача на кафедру вищої та прикладної математики на перевірку надається електронний варіант роботи (відправити по електронній пошті або принести на флешці), який зберігається у електронній бібліотеці викладача на кафедрі.

Крім того, студент повинен надати на кафедру роздрукований титульний аркуш, на якому вказуються: дата отримання завдання, дати поетапного виконання КР, дата надання КР на перевірку та оформлення титульного аркуша, варіант та відомості про студента (ПІБ, номер залікової книжки, курс, спеціальність, домашня адреса).

На оберненій стороні цього аркуша викладач пише рецензію на міжсесійну контрольну роботу та виставляє оцінку в балах, як вказано у таблиці 2.

Таблиця 1 – Терміни перевірки контрольної роботи №1 у міжсесійний період.

Змістовний модуль	Блок	Строк контролю
1 курс		
№1 Лінійна алгебра та аналітична геометрія	1) Визначники. Властивості, засоби обчислення. Векторна алгебра. Скалярний, векторний та мішаний добуток. Матриці. Дії над матрицями. Системи лінійних рівнянь. Правило Крамера, матричний метод, метод Гаусса. Дослідження СЛАР на сумісність та визначеність. Пряма на площині. Різні види рівнянь прямої. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Пряма та площина у просторі. Взаємне розташування. <i>Завдання 1-40</i>	26-31 жовтня
Аналіз функції однієї змінної. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних.	2) Елементарні функції та їх основні властивості. Границя та неперервність функції. Похідна, її геометричний та фізичний зміст. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Диференціал функції. Застосування похідної. Частинні похідні, повний диференціал. Частинні похідні другого порядку, диференціал другого порядку. <i>Завдання 41-90</i>	26-30 листопада
Інтегральне числення функцій однієї змінної	3) Первісна. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування: заміна змінної, інтегрування частинами. Інтегрування різних класів функцій. Визначений інтеграл. Його геометричний та фізичний зміст. Властивості та обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона–Лейбниці. Заміна змінних та інтегрування частинами. Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії, механіки і фізики. Невласні інтеграли. <i>Завдання 91-110</i>	26-30 грудня

№2 Диференціальні рівняння. Ряди	4) Основні типи диференціальних рівнянь I-го порядку та засоби їх розв'язання. Диференціальні рівняння вищих порядків. Диференц. рівняння, що розв'язуються пониженням порядку. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння II-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Системи лінійних диференц. рівнянь. Числові ряди. Додатні ряди та основні ознаки їх збіжності. Знакозмінні ряди. Абсолютно та умовно збіжні ряди. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Тейлора і Маклорена. Ряди Фур'є для періодичних функцій. Теорема Діріхле. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій <i>Завдання 111-140</i>	28-31 січня
Теорія імовірності	5) Класичне і геометричне означення імовірності. Умовна імовірність. Незалежність подій. Імовірність добутку подій. Теорема про повну імовірність, формула Байєса. Послідовність незалежних іспитів, схема Бернуллі. Граничні теореми Муавра-Лапласа та Пуасона. Випадкові дискретні та неперервні величини та їхні числові характеристики. Ряд розподілу. Функції розподілу. Неперервні та дискретні розподіли. Коваріація, коефіцієнт кореляції. Закон великих чисел. Нерівність Чебишева. Теореми Бернуллі та Чебишева. Центральна гранична теорема. <i>Завдання 141-180</i>	24-28 лютого

Нижче наводиться таблиця 2 номерів задач, що входять у контрольну роботу, та балів, якими вони оцінюються.

Студент повинен виконати контрольні завдання за варіантом, номер якого збігається з останньою цифрою його навчального номеру (шифру).

Таблиця 2 – Номери задач контрольної роботи згідно з варіантом та розподіл балів за виконання завдань та блоків.

Варіант	Номери завдань для виконання																	
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101	111	121	131	141	151	161	171
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102	112	122	132	142	152	162	172
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103	113	123	133	143	153	163	173
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104	114	124	134	144	154	164	174
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125	135	145	155	165	175
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106	116	126	136	146	156	166	176
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	157	167	177
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108	118	128	138	148	158	168	178
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109	119	129	139	149	159	169	179
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
Бали за викон. завдань	1 блок				2 блок				3 блок		4 блок			5 блок				
	5	5	5	5	4	4	7	4	4	12	5	5	5	10	5	5	5	5
Бали за викон. блоків	20				23				17		20			20				
Загальна сума 100 балів																		

2.3 Рекомендації до вивчення теми «Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії»

Література: [2] гл. II, гл. III, [3] гл. II, § 1-3; гл. IV, § 1-7;
[4] гл. II, § 1-10; [9] гл. I, § 2-3, § 7-12, гл. II, § 14-21;

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

- вміти обчислити визначник 2 та 3 порядку
- вміти виконувати арифметичні дії з матрицями, знаходити обернену матрицю і ранг матриці.

- знати застосування скалярного, векторного та мішаного добутків
- вміти розв'язувати системи лінійних рівнянь
- знати різні види рівнянь прямої та площини

Питання для самоперевірки

1. Що таке визначник другого порядку?
2. Як позначають визначник n-го порядку?
3. Що називається мінором n-1 порядку визначника n-го порядку?
4. Що називається алгебраїчним доповненням?
5. Як знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера, методом Гаусса?
6. Що є матриця?
7. Що є рангом матриці, як його знайти?
8. Як помножити матрицю на матрицю?
9. Як знайти алгебраїчну суму двох матриць?
10. Що є оберненою матрицею? Як її знайти?
11. Що таке вектор? Довжина вектора?
12. Скалярний та векторний добутки векторів. Їх властивості.
13. Мішаний добуток. Його властивості.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Дано два лінійних перетворення координат

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_3' = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2' - 2x_3' \\ x_2'' = 5x_1' - x_2' - x_3' \\ x_3'' = 2x_1' + 3x_2' + x_3' \end{cases}$$

Засобами матричного числення знайти перетворення, що виражають X_1'' , X_2'' , X_3'' через X_1 , X_2 , X_3 .

Розв'язання.

Позначимо матрицю перетворення X в X' через A , а X' в X'' через B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

а X , X' , X'' через

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad X'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді перетворення X в X'' буде мати вигляд: $X'' = BAX$, тобто

$$\begin{pmatrix} X''_1 \\ X''_2 \\ X''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 8 & -6 & 18 \\ 8 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

чи в іншій формі

$$\begin{cases} x''_1 = 2x_1 + 7x_2 - x_3 \\ x''_2 = 8x_1 - 6x_2 + 18x_3 \\ x''_3 = 8x_1 + 5x_2 + 8x_3 \end{cases}$$

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 y(2 - x - y)$ в трикутнику, обмеженому лініями $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$.

Розв'язання. Знаходимо стаціонарні точки функції,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= xy(4 - 3x - 2y) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x^2(2 - x - 2y), \end{aligned}$$

прирівнюючи частинні похідні до нуля. Усередині області $x > 0$, $y > 0$ на x та y ми скорочуємо.

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$x = 1$; $y = 1/2$ — розв'язки системи, координати критичної точки $P(1, 1/2)$.

Знайдемо значення функції в цій точці: $z(1, 1/2) = 1 \cdot 1/2 \cdot (2 - 1 - 1/2) = 1/4$. Для знаходження найбільшого і найменшого значення функції в області потрібно дослідити функцію на межах області. У нашому випадку на межах $x = 0$ і $y = 0$ функція дорівнює нулю ($z = 0$).

Знайдемо найбільше і найменше значення функції на стороні трикутника $x + y = 6$. На цій стороні $y = 6 - x$, $0 \leq x \leq 6$ і $z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$

На кінцях інтервалу $x = 0$ і $x = 6$ значення функції $z(0) = z(6)$. Знайдемо стаціонарні точки функції на цій лінії:

$$z' = -48x + 12x^2 = 0; 12x(x - 4) = 0; x_1 = 0, x_2 = 4.$$

Залишається $x = 4$, тому що $x = 0$ - гранична точка і нами вже розглянута. $z(4) = -4 \cdot 16 \cdot (6 - 4) = -128$; при $x = 4$; $y = 2$, тобто $z(4; 2) = -128$

Очевидно, що найбільше і найменше значення функції варто шукати серед її значень у критичній точці P , на сторонах трикутника й у його вершинах, тобто

$$z(1; 1/2) = 1/4 - \text{значення в точці } P;$$

$z = 0$ - на сторонах $x = 0$ і $y = 0$, а також у вершинах трикутника;

$$z = -128 - \text{у точці } (4; 2) \text{ на стороні } x + y = 6.$$

Звідси випливає, що найбільшого значення $z = 1/4$ функція досягає всередині області в точці $P(1; 1/2)$, а найменшого значення $z = -128$ функція досягає в точці $P_1(4; 2)$, що лежить на лінії $x + y = 6$.

Приклад 3. Знайти власні значення і власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею A .

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння.

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5 - \lambda & -5 \\ 2 & -5 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ чи } \lambda^3 - 18\lambda^2 + 72\lambda = 0, \text{ відкіля } \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 6; \lambda_3 = 12$$

Підставляючи по черзі власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ у систему

$$\begin{cases} (8 - \lambda)x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + (5 - \lambda)x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + (5 - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

знайдемо для $\lambda = \lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

У цій системі третє рівняння збігається з другим, тому його можна опустити і розв'язати систему

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Вона сумісна, і її розв'язок одержуємо за відомою методикою

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} \cdot k = 0; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \cdot k = -18k; \quad x_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = -18k.$$

Таким чином, першим власним вектором буде $x_1 = (0; 18; 18) \cdot k$. Подібним чином знаходимо (для $\lambda = 6$) $x_2 = (-6; 6; 3) \cdot k$ і (для $\lambda = 12$), $x_3 = (12; -12; 12) \cdot k = (1; -1; 1) \cdot k$.

Приклад 4. Нехай задані чотири координати вершини піраміди: $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$.

Розв'язання :

Тоді:

1) довжина ребра A_1A_2 обчислюється за формулою

$$A_1A_2 = |\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 визначаємо з формули

$$\cos\left(\widehat{A_1A_2, A_1A_4}\right) = \cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}},$$

Де $X_1 = x_2 - x_1$; $Y_1 = y_2 - y_1$; $Z_1 = z_2 - z_1$; $X_2 = x_4 - x_1$; $Y_2 = y_4 - y_1$;

$Z_2 = z_4 - z_1$;

3) рівняння грані $A_1A_2A_3$ (тобто площини, що проходить через точки A_1 , A_2 , A_3), має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

4) якщо рівняння з дії 3 привести до вигляду $Ax + By + Cz + D = 0$, то кут між площиною, що проходить через точки A_1 , A_2 , A_3 , і прямою A_1A_4 обчислюється за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|A(x_4 - x_1) + B(y_4 - y_1) + C(z_4 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2}};$$

- 5) площу грані $A_1A_2A_3$ знайдемо, як половину модуля векторного добутку

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}|;$$

- 6) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ визначається за формулою

$$V = \frac{1}{6} (\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4};$$

- 7) рівняння ребра A_1A_2 є рівняння прямої, що проходить через ці точки A_1 і A_2 :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};$$

- 8) щоб знайти рівняння висоти, опущеної з точки A_4 на площину $A_1A_2A_3$, потрібно через точку A_4 провести пряму, перпендикулярну площині $Ax + By + Cz + D = 0$, що проходить через три точки A_1 , A_2 , A_3 , тобто скласти рівняння

$$\frac{x - x_4}{A} = \frac{y - y_4}{B} = \frac{z - z_4}{C}.$$

2.4 Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модулю №1 (табл.1, Блок №1, завдання 1-40)

1-10. Дано два лінійних перетворення

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x''_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3 \\ x''_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3 \\ x''_3 = b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3 \end{cases}$$

Засобами матричного числення знайти перетворення, що виражає X_1'' , X_2'' , X_3'' через X_1 , X_2 , X_3 . Вихідні дані наведені в таблицях 3;4

Таблиця 3

Номери задач	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
1	1	-1	-1	-1	4	7	8	1	-1
2	7	0	4	0	4	-9	3	1	0
3	4	3	5	6	7	1	9	1	8
4	0	2	0	-2	3	2	4	-1	5
5	3	-1	5	1	2	4	3	2	-1
6	4	3	8	6	9	1	2	1	8
7	4	3	2	-2	1	-1	3	1	1
8	1	-3	4	2	1	-5	-3	5	1
9	1	2	2	0	-3	1	2	0	3
10	3	0	5	1	1	1	0	3	-6

Таблиця 4

Номери задач	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{31}	b_{32}	b_{33}
1	9	3	5	2	0	3	0	1	-1
2	0	1	-6	3	0	7	1	1	-1
3	-1	3	-2	-4	1	2	3	-4	5
4	-3	0	1	0	2	1	0	-1	3
5	4	3	1	3	1	2	1	-2	1
6	-1	8	-2	-4	3	2	3	-8	5
7	1	-2	-1	3	1	2	1	2	2
8	4	5	-3	1	-1	-1	7	0	4
9	3	1	0	1	-2	-1	0	3	2
10	2	-1	-5	7	1	4	6	4	-7

11-20. Дано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} .$$

Довести її сумісність і розв'язати двома способами: методом Гаусса і засобами матричного числення. Вихідні дані до задач наведені в таблиці 5.

Таблиця 5.

Номери задач	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
11	2	-3	4	3	-2	6	2	-3	-5	-4	-1	-13
12	4	3	-9	2	3	-5	1	8	-7	9	7	12
13	2	-4	1	1	-5	3	1	-1	1	3	-1	1
14	1	2	4	5	1	2	3	-1	1	31	20	10
15	5	-8	-2	3	-12	-5	2	-6	-1	-6	-4	0
16	2	5	-8	4	3	-9	2	3	-5	8	9	7
17	1	-2	-3	2	3	-1	3	-2	-5	6	20	6
18	3	5	-1	1	-4	2	1	3	-1	0	2	4
19	1	1	-1	8	3	-6	4	1	-3	1	2	3
20	7	-5	0	4	0	11	2	3	4	31	-43	-20

21-30. Знайти власні значення і власні вектори лінійного перетворення, заданого матрицею A .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Дані до задач наведені в таблиці 6.

Таблиця 6

Номери задач	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
21	4	-5	7	1	-4	9	-4	0	5
22	2	-1	2	5	-3	3	-1	0	-2
23	0	1	0	-3	4	0	-2	1	2
24	2	-1	-1	0	-1	0	0	2	1
25	1	-3	3	-2	-6	13	-1	-4	8
26	5	6	3	-1	0	1	1	2	-1

27	4	-5	2	5	-7	3	6	-9	4
28	3	1	0	-4	-1	0	4	-8	-2
29	0	7	4	0	1	0	1	13	0
30	7	0	0	10	-19	10	12	-24	13

31-40. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Знайти: 1) довжину ребра A_2A_3 ; 2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 ; 3) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 4) площа грані $A_1A_2A_3$; 5) об'єм піраміди; 6) рівняння ребра A_1A_2 ; 7) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Вихідні дані до задач наведені в таблиці 7

Таблиця 7

Номери задач	A_1	A_2	A_3	A_4
31	2; 1; 2	0; 0; 3	1; 2; 4	-1; 1; 3
32	3; 2; 1	0; 2; 0	2; 5; 3	0; 4; 0
33	-1; 4; 2	2; 0; 3	3; 1; 0	4; 0; 5
34	0; 3; 6	2; -3; 1	1; 2; 1	3; 2; 2
35	-1; 0; 2	0; 4; 0	2; 1; 3	2; 3; 1
36	-1; 1; 4	0; -5; -1	3; 1; 0;	2; 2; 5;
37	0; 1; -2;	2; 3; 4	5; 1; 1	3; 1; 4
37	-2; 1; 1	1; 4; 0	2; 4; 1	0; 2; 0
38	3; -1; 0	0; 0; 2	2; -1; 4	3; 1; 5
40	5; 1; 2	1; 0; 5	-2; 1; -3	-4; 0; 5

2.5 Рекомендації до вивчення теми «Аналіз функції однієї змінної. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних.»

Література: [4]] гл. II, §1-10; гл. III, §1-19; гл. V, §1-7; гл. X, §1-10; [5] гл. XI, гл. XIII; [10] гл. IV, § 1-7; гл. XIII, § 1-2; гл. XIV, § 1-7

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

- знати означення границі функції в точці, основні теореми про границі
- вміти обчислювати границі
- знати означення похідної та таблицю похідних
- вміти використовувати різні правила та прийоми диференціювання для обчислення похідних та диференціалів
- знати застосування похідної
- вміти досліджувати функцію та будувати її графік.
- вміти зобразити на малюнку область визначення функції 2 змінних
- вміти обчислювати частинні похідні першого та другого порядків
- знати геометричний зміст функції 2-х змінних
- знати алгоритм відшукування найбільшого та найменшого значення функції 2-х змінних.

Питання для самоперевірки

- 1.Визначення границі послідовності, границі функції.
- 2.Нескінченно мала і нескінченно велика функції та їх властивості.
- 3.Основні теореми про границі функцій.
- 4.Перша та друга чудові границі.
- 5.Безперервна функція в точці і на відрізку.
- 6.Сформулюйте визначення похідної. Який її механічний і геометричний зміст? Таблиця похідних.
- 7.Формули похідних суми, добутку, частки двох функцій.
- 8.Формула диференціювання складної функції.
- 10.Правило логарифмічного диференціювання.
- 11.Означення диференціалу функції.
- 12.Означення функції двох змінних. Область визначення функції двох змінних. Геометричний зміст функції двох змінних.
- 13.Лінія рівня функції двох змінних.
Означення границі функції двох змінних у точці.
- 14.Яка функція двох змінних називається неперервною в точці.
- 15.Дайте означення частинних похідних функції двох змінних. Як обчислюються частинні похідні?
- 16.Яка функція називається диференційованою в точці? Що таке повний диференціал?
- 17.Частинні похідні та диференціали вищих порядків.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{3x^3 - 4x + 5}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{3x^3 - 4x + 5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\frac{x^3}{x^3} - 5\frac{x^2}{x^3} + 3\frac{x}{x^3} - \frac{2}{x^3}}{3\frac{x^3}{x^3} - 4\frac{x}{x^3} + \frac{5}{x^3}} = \frac{4}{3}$$

Приклад 2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

Розв'язання.

Для розкриття невизначеності використовуємо першу чудову границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1.$$

Маємо
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = (\sin x + 4)^3$

Розв'язання.

Для обчислення похідної скористаємося спочатку правилом обчислення похідної складної степеневої функції, а потім суми двох функцій $\sin x + 4$:

$$y' = 3(\sin x + 4)^2 (\sin x + 4)' = 3(\sin x + 4)^2 \cos x$$

Приклад 4. Знайти похідну функції y'_x :
$$\begin{cases} x(t) = \ln \operatorname{ctgt} \\ y(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо
$$x'_t = \frac{1}{\operatorname{ctgt}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 t} \right) = -\frac{1}{\sin t \cos t}; \quad y'_t = -2 \cos^{-3} t (-\sin t) = \frac{2 \sin t}{\cos^3 t}$$

Тоді $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2 \sin t \sin t \cos t}{\cos^3 t} = -2 \operatorname{tg}^2 t.$

Приклад 5. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = \cos^2(3x + 2y).$$

Розв'язання. Шукаємо частинні похідні першого порядку, при цьому частинна похідна по x береться в припущенні, що $y = \text{const}$, а частинна похідна по y береться в припущенні що $x = \text{const}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cos(3x + 2y)(-\sin(3x + 2y)) \cdot 3 = -3 \sin(6x + 4y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \cos(3x + 2y)(-\sin(3x + 2y)) \cdot 2 = -2 \sin(6x + 4y);$$

Для одержання похідних вищих порядків диференціюємо першу рівність по x , а другу — по y .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -3 \cos(6x + 4y) \cdot 6 = -18 \cos(6x + 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \cos(6x + 4y) \cdot 4 = -8 \cos(6x + 4y);$$

Щоб одержати змішану похідну, потрібно частинну похідну першого порядку по x продиференціювати по y , або навпаки, частинну похідну першого порядку по y продиференціювати по x . Результати збігаються по теоремі про незалежність мішаних частинних похідних від порядку диференціювання.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3 \sin(6x + 4y) \cdot 4 = -12 \sin(6x + 4y);$$

Приклад 6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 y(2 - x - y)$ в трикутнику, обмеженому лініями $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$.

Розв'язання. Знаходимо стаціонарні точки функції,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy(4 - 3x - 2y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(2 - x - 2y),$$

прирівнюючи частинні похідні до нуля. Усередині області $x > 0, y > 0$ на x та y ми скорочуємо.

$$\begin{cases} 4 - 3x - 2y = 0 \\ 2 - x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

$x = 1; y = 1/2$ — розв'язки системи, координати критичної точки $P(1, 1/2)$.

Знайдемо значення функції в цій точці: $z(1, 1/2) = 1 \cdot 1/2 \cdot (2 - 1 - 1/2) = 1/4$. Для знаходження найбільшого і найменшого значення функції в області потрібно дослідити функцію на межах області. У нашому випадку на межах $x = 0$ і $y = 0$ функція дорівнює нулю ($z = 0$).

Знайдемо найбільше і найменше значення функції на стороні трикутника $x + y = 6$. На цій стороні $y = 6 - x$, $0 \leq x \leq 6$ і $z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x)$

На кінцях інтервалу $x = 0$ і $x = 6$ значення функції $z(0) = z(6)$. Знайдемо стаціонарні точки функції на цій лінії:

$$z' = -48x + 12x^2 = 0; 12x(x - 4) = 0; x_1 = 0, x_2 = 4.$$

Залишається $x = 4$, тому що $x = 0$ - гранична точка і нами вже розглянута. $z(4) = -4 \cdot 16 \cdot (6 - 4) = -128$; при $x = 4; y = 2$, тобто $z(4; 2) = -128$

Очевидно, що найбільше і найменше значення функції варто шукати серед її значень у критичній точці P , на сторонах трикутника й у його вершинах, тобто

$z(1; 1/2) = 1/4$ — значення в точці P ;

$z = 0$ — на сторонах $x = 0$ і $y = 0$, а також у вершинах трикутника;

$z = -128$ — у точці $(4; 2)$ на стороні $x + y = 6$.

Звідси випливає, що найбільшого значення $z = 1/4$ функція досягає всередині області в точці $P(1; 1/2)$, а найменшого значення $z = -128$ функція досягає в точці $P_1(4; 2)$, що лежить на лінії $x + y = 6$.

2.6 Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модуля №1 (табл.1, Блок №2, завдання 41-70)

41-50. Знайти границю функції.

41. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^7 - 3x^2 + 5}{1 - x^2 + 2x^7};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x};$

42. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + 4x^2 + 1}{7x^5 - x^3 + x^3};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{x^2};$

43. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^{11} - 11x^5 - 5}{5 - x - 7x^{11}};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \cos x};$

44. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 + 7x + 1}{2 - x + 9x^5};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x};$

45. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x + 5}{7x^2 + x + 4};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x \sin 3x};$

46. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + x + 8x^7}{14x^7 - x^3 + 1};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{\arcsin x};$

47. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 8x^3 + 7}{2x^4 + 5x^2 - 1};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 7x}{\sin^2 x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{3x} + 16 - 5};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} (5 - 4x)^{\frac{2x}{x-1}};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{4+x}}{x^2 - x - 2};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-4} \right)^{5+x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}};$

г) $\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{6x}{1-6x}};$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+2}};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+7}{2x+5} \right)^{3x+2};$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{10-x}}{2x^2 + 5x - 7};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x[\ln(x+4) - \ln x]);$

б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x^2 - 3x - 28};$

г) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{x}{3x-4}};$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 5x + 4};$

г) $\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{3x}{2-x}};$

$$48. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^9 + 9}{3 + x^7 + 7x^9};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \tan^{-1} 2x}{\sin 3x};$$

$$49. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 17x^2}{6x^2 - x + 1};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{\sin^2 x};$$

$$50. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 5x - 7x^3}{5x^3 + 2x^2 - 1};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{x^2 - x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x + 4} - 3}{x^2 - 4x - 5};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x + 1) - \ln x];$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 2x}}{7x + x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2)[\ln(x - 5) - \ln x];$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x^3 + 2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5x + 1}{5x - 1} \right)^{8x};$$

51–60. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ для заданих функцій.

$$51. \text{ a) } y = \ln \cos x + 0.5 \operatorname{tg}^2 x;$$

$$\text{б) } y = (x^2 + 1)^{\operatorname{arctg} x};$$

$$\text{в) } (x - y)e^x = e^y;$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = a \sin^3 t, t \in (0, \pi). \end{cases}$$

$$52. \text{ a) } y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 2};$$

$$\text{б) } y = (\ln x)^{\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } y = \operatorname{ctg}(xy);$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \frac{t}{t - 1}; \\ y = \frac{t^2}{t - 1}, t \neq 1 \end{cases}$$

$$53. \text{ a) } y = \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{x + 2} + 0.5 \ln(x^2 + 1);$$

$$\text{б) } y = (x^2 + 1)^{\cos x};$$

$$\text{в) } \sqrt{y} - \sqrt[3]{x} = 2;$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = e^y \\ y = e^t \cos t, t \in (0, \pi). \end{cases}$$

$$54. \text{ a) } y = \ln \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} - 1};$$

$$\text{б) } y = (\arcsin x)^{0.5x};$$

$$\text{в) } \cos y = x - y;$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = a \sin 2t; \\ y = b \cos 2t, t \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$55. \text{ a) } y = e^{2x^2} (3 + 2x^2 + 2x^4);$$

$$\text{в) } 3y = \sin(x - y);$$

$$56. \text{ a) } y = \frac{2}{\operatorname{ctgx} - 1} + \ln \operatorname{tg} x;$$

$$\text{в) } x - y = e^{x+y};$$

$$57. \text{ a) } y = \left(\arccos \frac{1}{x}\right)^3 + \sqrt{x^2 - 1};$$

$$\text{в) } y^2 = x \sin y;$$

$$58. \text{ a) } y = \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$\text{в) } e^y \sin y = \cos x;$$

$$59. \text{ a) } y = (x^2 + 4) \operatorname{arctg} \frac{x}{2};$$

$$\text{в) } \ln y + y/x = 2;$$

$$60. \text{ a) } y = 4\sqrt{x^2 - 4} - \left(\arcsin \frac{2}{x}\right)^2;$$

$$\text{в) } \cos(xy) - 3x = 0;$$

$$\text{б) } y = (\operatorname{tg} \sqrt{x})^{2x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = t + \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln(1 + t^2), t \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (x - 5)^{\sin 3x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = t^3 - 1 \\ y = \frac{1}{3}(t^2 - 1), t \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (\sqrt{x})^{\ln 2x};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln 2t, t \in (0, \infty). \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (x^3 + 1)^{\operatorname{ctg} 2x}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = a \arccos t; \\ y = e^{\sqrt{1-t^2}}, t \in [-1, 1]. \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (\sin 2x)^{\sqrt{x}};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = 3e^{-t}; \\ y = e^{2t}, t \in (0, \infty) \end{cases}$$

$$\text{б) } y = (\ln 3x)^{2/3};$$

$$\text{г) } \begin{cases} x = 2 \operatorname{ctg} t; \\ y = \ln \sin t, t \in (0, \pi). \end{cases}$$

61–70. Дослідити методами диференціального числення функцію $y = f(x)$; використовуючи результати дослідження, побудувати її графік.

$$61. \text{ a) } y = x + \frac{x}{2};$$

$$\text{б) } y = x + e^{-x}.$$

$$62. \text{ a) } y = \frac{x^2}{x^2 + 1};$$

$$\text{б) } y = \ln(x^2 - 4).$$

$$63. \text{ a) } y = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$\text{б) } y = \frac{\ln x - 1}{x}.$$

$$64. \text{ a) } y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4};$$

$$\text{б) } y = xe^{-x/2}.$$

$$65. a) y = \frac{(x-1)^2}{x};$$

$$б) y = xe^x.$$

$$66. a) y = x + \frac{4}{x^2};$$

$$б) y = \ln \frac{x-1}{x+1}.$$

$$67. a) y = \frac{x}{2-x^2};$$

$$б) y = \ln \frac{x}{x-1}.$$

$$68. a) y = x^4 - 2x^2 + 3;$$

$$б) y = \ln(x^2 + 1).$$

$$69. a) y = \frac{x}{(x+1)^2};$$

$$б) y = \frac{1}{e^x - 1}.$$

$$70. a) y = x - \frac{1}{x};$$

$$б) y = xe^{-x}.$$

№ 71-80 Знайти частинні похідні другого порядку наступних функцій:

$$71. z = e^{3x-y}$$

$$76. z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x}}$$

$$72. z = e^{xy}$$

$$77. z = \sqrt{2xy + y^2}$$

$$73. z = \ln(x^2 + y^2)$$

$$78. z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$$

$$74. z = \arctan \frac{y}{x}$$

$$79. z = x^n \cdot y^m$$

$$75. z = \sin(xy)$$

$$80. z = e^{3x} \cos 2y$$

№ 81-90 Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в зазначеній області. Зробити креслення області.

$$81. z = x^2 + y^2 - 9xy + 27, \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 3$$

$$82. z = x^2 + 2y^2 + 1, \quad x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad x + y \leq 3$$

$$83. z = 3 - 2x^2 - xy - y^2, \quad x \leq 1; \quad y \geq 0; \quad y \leq x$$

$$84. z = x^2 + 3y^2 + x - y, \quad x \geq 1; \quad y \geq -1; \quad x + y \leq 1$$

$$85. z = x^2 + 2xy + 2y^2, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 2.$$

$$86. z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad x \geq -1; \quad y \geq -1; \quad x + y \leq 1.$$

$$87. z = 10 + 2xy - x^2, \quad 0 \leq y \leq 4 - x^2.$$

$$88. z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x, \quad x \leq 0; \quad y \leq 0; \quad x + y + 2 \geq 0.$$

89. $z = x^2 + xy - 2, \quad 4x^2 - 4 \leq y \leq 0.$
 90. $z = x^2 + xy, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 3.$

2.7 Рекомендації до вивчення теми „Інтегральне числення функції однієї змінної”

Література: [1] гл. XVI- XVII; [2] гл. XVII; [5] гл. IV, [6] гл. XV, [7] гл. III.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

- знати таблицю невизначених інтегралів та правила інтегрування
- знати властивості визначеного інтеграла
- вміти застосовувати заміну змінної та інтегрування частинами для обчислення інтегралів
- знати формулу Ньютона-Лейбніца
- вміти застосовувати визначений інтеграл для розв'язання фізичних та геометричних задач.

Питання для самоперевірки

1. Визначення первісної (невизначений інтеграл).
2. Таблиця невизначених інтегралів.
3. Методи заміни змінної в невизначеному інтегралі.
4. Формула інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.
5. Методи інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції та найпростіших ірраціональних виразів.
6. Викладіть правило інтегрування раціональних дробів.
7. Теорема існування й єдності визначеного інтеграла.
8. Властивості визначеного інтеграла та його геометричний зміст.
9. Формула Ньютона-Лейбніца.
10. Визначення невластивих інтегралів першого і другого роду.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{4 + \ln x}}{x} dx.$

Розв'язання.

Приводимо інтеграл до табличного заміною: $U = 4 + \ln x; \quad dU = \frac{1}{x} dx.$

$$\text{Тоді } I = \left| \begin{array}{l} U = 4 + \ln x \\ dU = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \sqrt{U} \, dU = \frac{U^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(4 + \ln x)^3} + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int x^2 \sin x \, dx$.

Розв'язання.

Інтеграл береться з використанням формули інтегрування вроздріб:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Застосовуємо формули інтегрування вроздріб:

$$I = \left| \begin{array}{l} u = x^2; \, du = 2x dx \\ dv = \sin x dx; \, v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$$

Для обчислення подібного інтеграла формули інтегрування вроздріб потрібно застосувати ще раз. Позначимо:

$$\int x \cos x dx \left| \begin{array}{l} u = x; \, du = dx \\ dv = \sin x dx; \, v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Підставляючи, маємо $I = -x^2 \cos x + x \sin x + \cos x + C$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} \cdot (1 + \sqrt[3]{x+3})}$.

Розв'язання.

Інтеграл містить ірраціональність. Позначимо $x + 3 = t^6$; $dx = 6t^5 dt$;

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{1+t^2} = 6t - 6 \arctg t + C = \\ &= 6\sqrt[6]{x+3} - 6 \arctg \sqrt[6]{x+3} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4 Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x = 3 \cos^3 t$; $y = 3 \sin^3 t$.

Розв'язання.

Формула обчислення площі плоскої фігури, обмеженої кривою, заданою в

параметричній формі $S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt$, де $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$

У нашому випадку $\varphi'(t) = 3 \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) = -9\cos^2 t \sin t$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= - \int_0^{\pi/2} 3\sin^3 t \cdot (-9) \cdot \cos^2 t \cdot \sin t \, dt = 27 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t \, dt = \\ &= 27 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{27}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t) \cdot (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{27}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t) dt = \\ &= \frac{27}{8} t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8} \frac{t}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 4t}{2} dt + \frac{27}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 2t) \cdot \cos 2t \, dt = \\ &= \frac{27}{8} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} - \frac{27}{8} \cdot \frac{\sin^3 2t}{3} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{27}{32} \pi. \end{aligned}$$

2.8 Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модуля №1 (табл.1, Блок №3, завдання 91-110)

91–100. Обчислити невизначений інтеграл:

91. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 4}} dx$; $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3} dx$; $\int \frac{x}{x^2 - 7x + 13} dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$;
92. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^3}} dx$; $\int x 3^x dx$; $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{(x+3)^2}}$;
93. а) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^3 3x}} dx$; $\int \frac{5x^2}{5-2x^3} dx$; $\int x \cos 5x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}}$;

$$\begin{aligned}
94. & \int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x + 1)}; \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}; \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx; \\
95. & \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx; \int x \arcsin \frac{1}{x} dx; \int \frac{(x+3)}{x^3 + x^2 - 2x} dx; \int \frac{\sqrt[4]{x+1}}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}} dx; \\
96. & \int \frac{\cos 3x}{4 + \sin 3x} dx; \int x^2 e^{3x} dx; \int \frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx; \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx; \\
97. & \int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx; \int x \ln(x^2 + 1) dx; \int \frac{x^2 - 3}{x^4 + 5x^2 + 6} dx; \int \frac{\sqrt{x+5}}{1 + \sqrt[3]{x+5}} dx; \\
98. & \int \frac{ax}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} dx; \int e^{3-5x} dx; \int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}} dx; \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx; \\
99. & \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx; \int x \sin x \cos x dx; \int \frac{x^2}{x^4 - 81} dx; \int \frac{1}{3\cos x + 4\sin x} dx; \\
100. & \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}} dx; \int x^2 \sin 4x dx; \int \arcsin x dx; \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx;
\end{aligned}$$

101–110. Використовуючи поняття визначеного інтеграла, розв'язати задачі:

101. Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди
 $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$

102. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею кривої
 $x = 3t^2$; $y = 3t - t^3$

103. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = 3 + \sin \varphi$

104. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою
 $r = 3(1 + \cos \varphi)$ і окружністю $r = 3\cos \varphi$

105. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 5(1 + \sin \varphi)$

106. Знайти площу фігури, обмеженої равником Паскаля

107. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою
 $x = 5\cos t$, $y = 4\sin t$

108. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x = 4\cos 3\varphi$ і $r = 2$

109. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = 5\sin 3\varphi$

110. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = 4\cos 2\varphi$

2.9 Рекомендації до вивчення тем «Диференціальні рівняння» та «Ряди»

Література: [1] гл. VIII ; [2] гл. XV, [5] гл. I, [6] гл. XIV, [7], т.2, гл. IV
- [1] гл. XVI- XVII; [2] гл. XVII; [5] гл. IV, [6] гл. XV, [7] гл. III.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

- вміти розв'язувати диференціальні рівняння 1 порядку
- вміти розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків
- вміти розв'язувати системи диференціальних рівнянь 1 порядку
- знати класифікацію диференціальних рівнянь 1 та вищих порядків
- вміти застосовувати теорію ДР до задач фізики та геометрії..
- знати ознаки збіжності числових рядів
- знати перелік та властивості еталонних рядів
- знати вигляд рядів Маклорена основних елементарних функцій
- вміти дослідити ряд на збіжність
- вміти знайти область збіжності функціонального ряду
- вміти розвинути функцію в ряд Фур'є

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення диференціального рівняння (ДР) I порядку, його загального та частинного розв'язку. Наведіть приклад задачі Коші для ДР I порядку.
2. Сформулюйте теорему існування та єдності розв'язку задачі Коші для ДР I порядку.
3. Перелічіть відомі вам типи ДР I порядку та коротко методи їх розв'язання.
4. Яке ДР називається таким, що припускає зниження порядку? Які класи таких рівнянь ви знаєте?
5. Запишіть загальний вигляд лінійного ДР n -го порядку.
6. Як виглядає визначник Вронського та для чого його використовують?
7. Яка структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n -го порядку?
8. Яка структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку?
9. У чому полягає метод виключення для розв'язання лінійних систем ДР I порядку?

10. Що називається числовим рядом, сумою ряду? Який ряд називають збіжним?
11. У чому полягає необхідна ознака збіжності? Для чого її використовують?
12. Вкажіть еталонні ряди та їхні властивості. Сформулюйте I і II теореми порівняння.
13. Сформулюйте ознаки збіжності Даламбера і Коші (радикальну).
14. Для яких рядів застосовується ознака Лейбниця та в чому вона полягає?
15. Як знайти інтервал збіжності для степеневих рядів за степенями x ?
16. Як застосовуються ряди для наближених обчислень?
17. Як знайти похибку наближення для знакопереміжних рядів?
18. Сформулюйте теорему Діріхле.
19. Як обчислюються коефіцієнти Фур'є у випадках парних, непарних та загального вигляду функцій?

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

Розв'язання. Рівняння не містить y і належить до типу $y' = f(x, y')$. Тому зробимо заміну $y' = p$ і $y'' = p'$. Приходимо до лінійного рівняння першого порядку

$$p' = -\frac{1}{x}p = x.$$

Розв'яжемо його, використавши підстановку $p = uv$. $p' = u'v + v'u$. Рівняння приводиться до вигляду $u'v + v'u - \frac{1}{x}uv = x$. За методом Бернуллі

одержуємо два рівняння з роздільними змінними: $v' - \frac{1}{x}v = 0$ і $u'v = x$

З першого $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$; $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$; $\ln v = \ln x$; і $v = x$. Підставимо значення v у друге рівняння й інтегруємо його: $u'x = x$ або $u' = 1$, звідкіля $u = x + c$.

Таким чином, ми знайшли $p = x(x + c) = x^2 + cx$.

Замінюючи $p = \frac{dy}{dx}$ й інтегруючи це рівняння, одержимо остаточний розв'язок

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + cx; \quad dy = (x^2 + cx)dx; \quad y = \frac{x^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + c_1.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, що задовольняє умови $y|_{x=0} = 2; y'|_{x=0} = 2$.

Розв'язання. Розглянемо відповідне однорідне рівняння $y'' - 2y' = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k = 0$, звідкіля $k_1 = 0, k_2 = 2$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння $\bar{y} = c_1 + c_2 e^{2x}$.

Оскільки права частина заданого рівняння має вигляд $e^{\alpha} p_n(x)$, частинний розв'язок шукаємо у подібній формі ($k_1 \neq \alpha; k_2 \neq \alpha$):

$$y = l^x(ax^2 + bx + c), \quad y' = e^x(ax^2 + bx + c) + c^x(2ax + b);$$

$$y'' = e^x(ax^2 + bx + c) + 2e^x(2ax + b) + 2ue^x.$$

Підставляємо ці значення в задане рівняння і приходимо до тотожності (яку попередньо скоротимо на $e^x \neq 0$): $-ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x - 3$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч і праворуч, приходимо до системи рівнянь для визначення a, b і c :

$-a = 1; -b = 1; 2a - c = -3$, звідкіля $a = -1; b = -1; c = 1$, і частинний розв'язок набуває вигляду: $y = e^x(-x^2 - x + 1)$.

Складаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Визначаємо c_1 і c_2 з початкових умов:

$$y' = 2c_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) - e^x(x + 1);$$

$$y|_{x=0} = 2 = c_1 + c_2 + 1 \quad \text{чи} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2 = 2 \end{cases}$$

$$y'|_{x=0} = 2 = 2c_2 + 1 - 1$$

З останньої рівності $c_2 = 1$. Тоді $c_1 = 0$ і частинний розв'язок неоднорідного рівняння, що задовольняє задані початкові умови, одержуємо у вигляді:

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) = e^x(e^x - x^2 - x + 1).$$

Приклад 3. Дослідити збіжність числового ряду:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots + \frac{2n-1}{2n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{ряд розбігається.}$$

Приклад 4. Дослідити збіжність числового ряду:

$$1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{21} + \frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{1+10n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+10n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+10n}.$$

Розв'язання. Порівнюючи даний ряд з гармонійним $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, за

ознакою порівняння одержимо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\tau_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+10n} = \frac{1}{10} \neq 0$.

Приклад 5. Дослідити збіжність числового ряду:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Розв'язання. Запишемо $u_n = \frac{1}{n!}$ і $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, застосуємо ознаку

Даламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \Rightarrow \text{ряд збігається.}$

Приклад 6. Дослідити збіжність числового ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$.

Розв'язання. Запишемо $u_n = \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$ і застосуємо радикальну ознаку Коші.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = 1/2 < 1, \Rightarrow \text{ряд збігається.}$$

2.10 Перелік завдань для контрольної роботи для змістовного модулю №2 (табл.1, Блок №4, завдання 111-140)

№ 111-120 Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

- 111) $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0;$ 116) $y' - \frac{1}{x} = x + 1, \quad y(1) = 1;$
 112) $y' - y \operatorname{ctgx} = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$ 117) $y' - \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 1;$
 113) $y' + yx = \frac{1}{2}x, \quad y(1) = 0;$ 118) $y' + \frac{y}{x} = x^3, \quad y(1) = 2;$
 114) $y' - yx = x^2, \quad y(1) = \frac{1}{2};$ 119) $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1;$
 115) $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2};$ 120) $y' + \frac{y}{2x} = x, \quad y(1) = \frac{2}{3};$

№ 121-130 Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$, що задовольняє початкові умови $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0$.

121. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
 122. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3; \quad y(0) = 4/3, \quad y'(0) = 1/27$
 123. $y'' + 4y = e^{-2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
 124. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
 125. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$
 126. $y'' - 5y' + 6y = (12 - 7)e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
 127. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
 128. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$
 129. $y'' - 2y' + y = 16e^x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
 130. $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}; \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 2$

№ 131-140 Дослідити збіжність числового ряду.

- № 131. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n+4}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-5}{n+n^2-4} \right)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3n!};$
 №132. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+1} \right)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-7}{3+n} \right)^{\frac{n}{2}};$
 №133. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3-n}{n^3+n^2-1} \right)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n!};$

$$\text{№134. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{4^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-n}{n^2+n-3} \right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n}{1+n} \right)^{\frac{n}{3}};$$

$$\text{№135. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n-3}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-n^3}{n^3+n} \right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{11^n}{13n!};$$

$$\text{№136. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{5^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+n} \right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n-8}{3+4n} \right)^{\frac{n}{4}};$$

$$\text{№137. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n-7}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n+n^2} \right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{n};$$

$$\text{№138. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{9^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-n^2}{n^2} \right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n-8}{2+n} \right)^{\frac{n}{2}};$$

$$\text{№139. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5-n^2}{5+n^2} \right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n-1}}{n+1};$$

$$\text{№140. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+4n} \right)^n; \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-8}{1+4n} \right)^{\frac{n}{4}};$$

2.11 Рекомендації до вивчення теми „Теорія імовірності”

Література : [1], гл. 7, [3], гл. 1-4, [5], гл. 1-5.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові знання та вміння:

- знати формули комбінаторики та вміти їх застосовувати, класифікацію випадкових подій
- знати класичне означення імовірності, теореми суми і добутку, формулу повної імовірності, формулу Байєса.
- знати означення випадкової величини та її числових характеристик математичне чекання, дисперсія та ін..
- знати характеристики розподілів
- вміти виконувати теоретико-імовірнісні розрахунки характеристик випадкових величин, функцій розподілу
- вміти досліджувати випадкових процесів, застосовувати низку практичних навичок для рішення широкого кола теоретично-імовірнісних та статистичних задач.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте аксіоми теорії імовірності та наслідки з них.
2. Сформулюйте класичне означення імовірності. В чому є різниця між імовірністю та відносною частотою?
3. Сформулюйте теореми суми і добутку. Наведіть формулу повної імовірності, формулу Байєса.
4. Дайте визначення випадкової величини та її властивостей. Як визначаються математичне чекання, дисперсія та інші моменти?
5. Дайте характеристику для таких розподілів: нормальне, пуасонівське, біноміальне, рівномірне, показникове.
6. Як розрахувати імовірність покращення нормально розподіленої випадкової величини X в заданому інтервалі, якщо відомі параметри a і σ закону нормального розподілу.
7. Нерівність Чебишева та закон великих чисел для послідовностей незалежних випадкових величин. Теореми Бернуллі та Чебишева.
8. Центральна гранична теорема. Характеристичні функції, їх властивості.
9. Центральна гранична теорема для однаково розподілених доданків. Сформулюйте теорему Ляпунова.
10. Сформулюйте теореми про взаємнооднозначну та неперервну відповідність характеристичних функцій і функцій розподілу.
11. Дайте визначення ланцюгів Маркова. Яка процедура розрахунку імовірностей переходу? Обчислення граничних імовірностей.
12. Дайте визначення пуасонівського процесу. Простіший потік однорідних подій. Ступінчасті випадкові процеси.

Приклад 1. На складі мається 10 кінескопів, з яких 4 виготовлені мінським заводом. Навмання беруть 3 кінескопи. Обчислити імовірність того, що всі узяті кінескопи виявляться мінськими.

Розв'язок. Шукана імовірність визначається класичною формулою: $P(A) = \frac{m}{n}$, де $m = C_4^3$ – число наслідків, що сприяють появі кінескопа Мінського заводу, $n = C_{10}^3$ число всіх можливих ісходів. Тому шукана імовірність є: $P(A) = C_4^3 / C_{10}^3 = 4/120 = 1/3$.

Приклад 2. Для сигналізації про аварію встановлені два незалежно працюючі пристрої, імовірності спрацьовування яких при аварії рівні відповідно 0,6 і 0,9. Знайти імовірність того, що при аварії спрацює: 1) тільки один пристрій; 2) обоє пристрою.

Розв'язок. Позначимо через C – подія, імовірність якої потрібно обчислити, а через A і B – події, що складаються в спрацьовуванні першого і другого пристрою. Тоді $P(A) = 0,8$ і $P(B) = 0,9$ за умовою задачі.

1) Подію C , що складається в тім, що при аварії спрацює тільки один пристрій, можна представити у вигляді $C = A\bar{B} + \bar{A}B$, де події $\bar{A}$ і $\bar{B}$ є подіями, протилежними A і B , причому $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$. Шукана імовірність обчислюється

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = \\ &= 0,8 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,9 = 0,26. \end{aligned}$$

2) Подія C в тім, що при аварії спрацюють обоє пристрою, можна записати у вигляді $C = AB$, і тоді шукана імовірність

$$P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$

Приклад 3. Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Знайти закон розподілу величини X , якщо відомі імовірність $P_1 = 0,6$ можливого значення X , математичне чекання $M(X) = 1,4$ і дисперсія $D(X) = 0,24$.

Розв'язок. Сума імовірностей усіх можливих значень X дорівнює одиниці, тому імовірність p_2 того, що X прийме значення x_2 , дорівнює $1 - 0,6 = 0,4$. Запишемо закон розподілу:

X	x_1	x_2
p	0,6	0,4

Для визначення x_1 і x_2 складемо два рівняння. Перше рівняння з обліком однієї з умов задачі, а саме $M(X) = 1,4$, можна записати у вигляді

$$M(X) = \sum_{i=1}^2 x_i p_i \quad \text{чи} \quad 0,6 x_1 + 0,4 x_2 = 1,4.$$

Приймаючи до уваги, що за умовою $D(X) = 0,24$, і використовуючи формулу для визначення дисперсії $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$ напишемо друге рівняння: $0,24 = 0,6 x_1^2 + 0,4 x_2^2 - 1,4^2$ чи $0,6 x_1^2 + 0,4 x_2^2 = 2,2$.

Значення x_1 і x_2 одержимо з рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0,6 x_1 + 0,4 x_2 = 1,4 \\ 0,6 x_1^2 + 0,4 x_2^2 = 2,2 \end{cases}$$

В результаті рішення системи одержимо: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ і $x_1 = 1,8$, $x_2 = 0,8$, за умовою $x_1 < x_2$, тому умові задачі задовольняє тільки перше рішення. Таким чином, шуканий закон розподілу

X	1	2
p	0,6	0,4

Приклад 4. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3 \\ 0,0625(x-3)^2 & \text{при } 3 < x \leq 7 \\ 1 & \text{при } x \geq 7 \end{cases}$$

Потрібно знайти щільність імовірності $f(x)$, також знайти математичне чекання і дисперсію випадкової величини X .

Розв'язок. Знаходимо щільність імовірності (диференціальну функцію розподілу)

$$f(x) = F'(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3 \\ 0,125(x-3)^2 & \text{при } 3 < x \leq 7 \\ 1 & \text{при } x \geq 7 \end{cases}$$

Математичне чекання неперервної випадкової величини з щільністю імовірності $f(x)$, заданої на інтервалі (a, b) , обчислюється по формулі:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx,$$

або в нашому випадку

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_a^b x \times 0,125(x-3) dx = 0,125 \int_3^7 (x^2 - 3x) dx = \\ &= 0,125 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_3^7 = 5,67. \end{aligned}$$

Дисперсія неперервної випадкової величини обчислюється так:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2(X), \quad D(X) = \int_a^b x^2 \cdot 0,125(x-3) dx - 5,67^2 = 0,851.$$

Таким чином, числові характеристики заданої випадкової величини X : $M(X) = 5,67$ і $D(X) = 0,851$.

Далі розглянемо задачі, для розв'язання яких студенту необхідно засвоїти поняття імовірності покращення нормально розподіленої випадкової величини X в заданому інтервалі, якщо відомі параметри a і σ закону нормального розподілу. Шукану імовірність знаходять по формулі

$$p(\alpha < X < \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

функція Лапласа, яка розраховується по таблицям. Однієї із широко розповсюджених модифікацій формули, є формула

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

що дозволяє обчислювати імовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного чекання не перевищує заданої величини δ .

Приклад 5. Знайти імовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини X в заданий інтервал $(3,7)$ і імовірність того, що відхилення значення від середнього не перевищить 4, якщо відомі математичне чекання $a = 6,5$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$.

Розв'язок. Застосування формули $P(a < x < \beta)$ дозволяє записати

$$\begin{aligned} P(3 < X < 7) &\approx \Phi\left(\frac{7-6,5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3-6,5}{2}\right) = \\ &= \Phi(0,25) + \Phi(1,75) = 0,0987 + 0,4599 = 0,5586. \end{aligned}$$

Отже: $P(3 < X < 7) = 0,5506$.

По формулі одержимо

$$P(|X - 6,5| < 4) = 2\Phi\left(\frac{4}{2}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

Таким чином, $P(|X - 6,5| < 4) = 0,9544$.

2.12 Перелік завдань контрольної роботи для змістовного модуля №2 (табл.1, Блок №5, завдання 141-180)

141. Студент знає 45 з 60 питань програми. Кожен екзаменаційний білет містить три питання. Знайти імовірність того, що студент знає: а) всі три питання; б) тільки два питання; в) тільки одне питання екзаменаційного білета.

142. У кожній із двох урн знаходяться 5 білих і 10 чорних куль. З першої урни переклали в другу наудачу одну кулю, а потім із другої урни вийняли навмання одну кулю. Знайти імовірність того, що вийнята куля виявиться чорною.

143. Три стрілки в однакових і незалежних умовах зробили по одному пострілі по одній і тій же цілі. Імовірність поразки цілі першим стрільцем дорівнює 0,9, другим – 0,8, третім – 0,7. Знайти імовірність того, що:

а) тільки один зі стрільців потрапив у ціль; б) тільки два стрільці потрапили в ціль; в) усі три стрільці потрапили в ціль.

144. Імовірність настання події в кожному з однакових, і незалежних іспитів дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що в 1600 іспитах подія наступить 1200 разів.

145. Для сигналізації про аварію встановлені три незалежно працюючі пристрої. Імовірність того, що при аварії спрацює перший пристрій, дорівнює 0,9, другий – 0,95, третій – 0,85. Знайти імовірність того, що при аварії спрацює: а) тільки один пристрій; б) тільки два пристрої; в) усі три пристрої.

146. Імовірність настання події в кожному з однакових і незалежних іспитів дорівнює 0,02. Знайти імовірність того, що в 150 іспитах подія наступить 5 разів.

147. В партії з 1000 виробів є 10 дефектних. Знайти імовірність того, що серед 50 виробів, узятих наудачу з цієї партії, рівно три виявляться дефектними.

148. Імовірність настання події в кожному з однакових і незалежних іспитів дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що в 125 іспитах подія наступить не менш 75 і не більш 90 разів.

149. На трьох верстатах при однакових і незалежних умовах виготовляються деталі одного найменування. На першому верстаті виготовляють 10 %, на другому – 30 %, на третьому – 60 % усіх деталей. Імовірність кожної деталі бути стандартною дорівнює 0,7, якщо вона виготовлена на першому верстаті, 0,8 – якщо на другому верстаті, і 0,9 – якщо на третьому верстаті. Знайти імовірність того, що навмання взята виявиться стандартною.

150. Серед виробів даного підприємства 20 % виробів вищого сорту. Чому дорівнює імовірність того, що з 5 придбаних виробів 3 вищого сорту.

151-160. Дискретна випадкова величина X може приймати тільки два значення: x_1 і x_2 причому $x_1 < x_2$. Відомі імовірність p_1 можливого значення x_1 , математичне чекання $M(X)$ і дисперсія $D(X)$. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

151. $p_1 = 0,1$; $M(X) = 3,9$; $D(X) = 0,09$.

152. $p_1 = 0,3$; $M(X) = 3,7$; $D(X) = 0,21$.

153. $p_1 = 0,5$; $M(X) = 3,5$; $D(X) = 0,25$.

154. $p_1 = 0,7$; $M(X) = 3,3$; $D(X) = 0,21$.

155. $p_1 = 0,9$; $M(X) = 3,1$; $D(X) = 0,09$.

156. $p_1 = 0,9$; $M(X) = 2,2$; $D(X) = 0,36$.

157. $p_1 = 0,8$; $M(X) = 3,2$; $D(X) = 0,16$.

158. $p_1 = 0,6$; $M(X) = 3,4$; $D(X) = 0,24$.

159. $p_1 = 0,4$; $M(X) = 3,6$; $D(X) = 0,24$.
 160. $p_1 = 0,2$; $M(X) = 3,8$; $D(X) = 0,16$.

161-170. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне сподівання і дисперсію випадкової величини.

$$161) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$166) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2/9, & 0 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

$$162) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ (x^2 - x)/2, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$167) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2/4, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$163) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$168) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\pi/2 \\ \cos x, & -\pi/2 < x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$164) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \leq 1/3 \\ 1, & x > 1/3 \end{cases}$$

$$169) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2 \sin x, & 0 < x \leq \pi/6 \\ 1, & x > \pi/6 \end{cases}$$

$$165) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ x/2 - 1, & 2 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$170) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3\pi/4 \\ \cos 2x, & 3\pi/4 < x \leq \pi \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

171-180. Відомі математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X . Знайти імовірність покращення цієї величини в заданому інтервалі $(\alpha; \beta)$.

$$171. \quad a = 10, \sigma = 4, \alpha = 2, \beta = 13;$$

$$176. \quad a = 9, \sigma = 5, \alpha = 5, \beta = 14.$$

$$172. \quad a = 8, \sigma = 1, \alpha = 4, \beta = 9;$$

$$177. \quad a = 7, \sigma = 2, \alpha = 3, \beta = 10.$$

$$173. \quad a = 6, \sigma = 3, \alpha = 2, \beta = 11;$$

$$178. \quad a = 5, \sigma = 1, \alpha = 1, \beta = 12.$$

$$174. \quad a = 4, \sigma = 5, \alpha = 2, \beta = 11;$$

$$179. \quad a = 3, \sigma = 2, \alpha = 3, \beta = 10.$$

$$175. \quad a = 2, \sigma = 5, \alpha = 4, \beta = 9;$$

$$180. \quad a = 2, \sigma = 4, \alpha = 6, \beta = 10.$$

3 ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ СТУДЕНТА

3.1 Система контролю знань та вмінь

При самостійному вивченні дисципліни «Вища та прикладна математика» контроль знань та вмінь студентів-заочників здійснюється за допомогою системи контролюючих заходів *поточного* та *підсумкового* контролю.

Поточний контроль здійснюється протягом навчального року за формами: перевірка контрольної роботи, яку студенти виконують у міжсесійний період (ОМ), перевірка знань та вмінь студентів під час аудиторних занять протягом заліково-екзаменаційної сесії шляхом усного опитування та написання контрольної роботи (ОЗЕ).

Підсумковий контроль (ОПК) здійснюється у формі письмового іспиту.

Термін проведення контролюючих заходів визначається графіком заочної форми навчання.

Загальна максимальна кількість балів, яку студент має змогу отримати за контрольну роботу у міжсесійний період (ОМ), складає 100 балів.

Зарахована контрольна робота свідчить про те, що студент отримав за результатами перевірки не менше ніж 60% .

Студенти, які не отримали за контрольну роботу мінімальної необхідної кількості балів, повинні виконати інший варіант контрольної роботи, який представляється викладачем, або виправити помилки попереднього варіанту та отримати відповідну кількість балів для допуску до іспиту.

Контрольна робота, яку студенти виконують під час аудиторних занять, включає теоретичну та практичну частини, які охоплюють основні питання розділу дисципліни.

Максимальна кількість балів, яку студент може отримати за цей вид роботи складає 60 балів.

Також за усне опитування студент може отримати до 40 балів.

Таким чином, загальна максимальна оцінка під час аудиторних занять складає 100 балів.

Студент вважається допущеним до іспиту з дисципліни, якщо він виконав всі види робіт поточного контролю, передбачені робочою навчальною програмою дисципліни і набрав за накопичувальною системою суму балів не менше 50% від максимально можливої за дисципліну, при цьому своєчасно виконав міжсесійну контрольну роботу.

3.2 Форми контролю знань та вмінь студентів

3.2.1 Поточний контроль

Поточний контроль здійснюється за наступними формами:

- перевірка міжсесійної контрольної роботи із застосуванням дистанційної форми контролю (див. п. 2.2);
- перевірка аудиторної контрольної роботи, яку студент виконує під час аудиторних практичних занять;
- усне опитування під час аудиторних практичних занять.

Усі три форми оцінюються з розрахунку 100%- максимум. Студент має допуск до іспиту у випадку отримання не менш ніж 50% за кожну форму контролю.

3.2.2 Підсумковий контроль

Підсумковий контроль здійснюється під час іспиту, який оцінюється згідно відповідної інструкції. Іспит проводиться тільки у письмовій формі за екзаменаційними білетами, які розробляються викладачами та затверджуються на засіданні кафедри у встановленому порядку. Екзаменаційний білет формується у вигляді тестових завдань закритого типу, які потребують від студента обрання правильних відповідей з запропонованих у запитанні. Кількість тестових завдань в кожному білеті дорівнює 20. Кожна правильна відповідь оцінюється у 5 балів. Загальна екзаменаційна оцінка еквівалентна відсотку правильних відповідей із загального обсягу питань екзаменаційного білету. Накопичена підсумкова оцінка (ПО) засвоєння студентами заочної форми навчальної дисципліни, що закінчується іспитом, розраховується так:

$$ПО = 0,5ОПК + 0,25(ОЗЕ + ОМ).$$

Таким чином студент може отримати максимально 100 балів (%).

Якісна оцінка є такою:

- 91-100 балів – «відмінно»;
- 76-90 балів – «добре»;
- 60-75 балів – «задовільно»;
- менше 60 балів – «незадовільно».

Таким чином, студент може отримати максимально 100 балів (%).

Одержана накопичена підсумкова оцінка виставляється викладачем у відомість обліку успішності встановленого зразка.

3.3 Перелік базових знань та вмінь

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен

Знати :

- основні визначення, положення та теореми
- лінійної алгебри та аналітичної геометрії,
- введення до математичного аналізу,
- диференціального числення функцій однієї та багатьох змінних,
- інтегрального числення,
- диференціальних рівнянь,
- рядів,
- теорії імовірності.

Вміти:

- використовувати теоретичні знання та навички при розв'язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики до розв'язання прикладних математичних задач.