МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
до самостійної роботи студентів та виконання
контрольної роботи
з дисципліни

“ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ”

для студентів III, IV курсів (у тому числі підготовки за інтегрованим планом) заочної форми навчання
Напрям підготовки – "Гідрометеорологія"

“Узгоджено”
Начальник навчально-консультативного центру

Волошина О.В.

“Затверджено”
на засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №___від _________
Завідувач кафедри
Глушков О.В.

Одеса 2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
до самостійної роботи студентів та виконання
контрольної роботи
з дисципліни

“ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ”

для студентів ІІІ, IV курсів (у тому числі підготовки за інтегрованим планом) заочної форми навчання
Напрям підготовки – "Гідрометеорологія"

Одеса 2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
до самостійної роботи студентів та виконання
контрольної роботи
з дисципліни

"ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ"

для студентів III, IV курсів (у тому числі підготовки за інтегрованим планом) заочної форми навчання
Напрям підготовки – "Гідрометеорологія"

"Узгоджено"
у навчально-консультативному
центрі

Одеса 2017

Методичні вказівки до самостійного вивчення та виконання контрольної роботи з дисципліни “Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ” для студентів ІІІ, IV курсів (у тому числі підготовки за інтегрованим планом) заочної форми навчання Напрям підготовки – "Гідрометеорологія" / Укладачі:
Глушков О.В., д.ф.-м.наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики; Свинаренко А.А., д.ф.-м.наук, професор; Сєрга І.М., к.ф.-м.наук, доцент; Витавецька Л.А., к.ф.-м.наук, доцент; Одеса, ОДЕКУ, 2017р., 31 с., укр.мова

Відповідальний редактор:

Глушков О.В., д.ф.-м.наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики

Методичні вказівки
до самостійної роботи студентів та виконання
контрольної роботи
з дисципліни
“Обчислювальні методи динаміки суцільних
середовищ”

для студентів III, IV курсів (у тому числі підготовки за інтегрованим
планом) заочної форми навчання
Напрям підготовки – "Гідрометеорологія"

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф.,Свинаренко А.А., д.ф.-м.н., проф.,
Сєрга І.М., к.ф.-м.н., доц., Вітавецька Л.А., к.ф.-м.н., доц.
Відп. ред: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф.

Підп. до друку ______ Формат _____ Папір друк.

Умовн. друк. арк. Тираж _________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала- макета

ЗМІСТ

I. ЗАГАЛЬНА ЧАСТИНА

1.1. Передмова.

Дисципліна “ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДИНАМІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ” відноситься до однієї з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці бакалаврів з напряму підготовки "Гідрометеорологія". Тут розглядаються проблеми наближеного розв’язку математичних моделей різноманітних задач гідрометеорології та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів для розв'язування практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Метою методичних вказівок до самостійної роботи студентів та виконанню контрольної роботи з дисципліни “Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ” є навчити студентів спроможності будувати алгоритми математичних моделей для рішення виникаючих проблем у гідрометеорології, засвоєння основних обчислювальних методів розв’язання моделей та аналіз отриманих результатів.

В результаті вивчення дисципліни студент одержує базові знання, використовуючи які він повинен:

<u>знати</u> основні математичні моделі та обчислювальні методи розв’язання задач гідрометеорології;

<u>вміти</u> використовувати отримані знання при розв’язанні конкретних гідрометеорологічних задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Отримані у процесі вивчення дисципліни знання повинні створити базу, необхідну для вивчення дисциплін: Гідродинамічні методи прогнозу погоди, Хвильові процеси.

1.2. Зміст дисципліни.

1. ВСТУП ДО ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МЕТОДІВ.

Етапи розв’язку прикладних задач за допомогою обчислювальних методів. Джерела виникнення помилок. Загальна помилка розв’язку задач за допомогою обчислювальних методів. Правила наближених обчислень при додаванні, відніманні, множенні та діленні наближених чисел. Помилка при обчислені функції однієї та багатьох змінних.

2. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ.

Задача інтерполяції. Інтерполяційний багаточлен Лагранжа. Кінцеві різниці і їх властивості. Зв’язок кінцевих різниць із похідними. Перша та друга інтерполяційні формули Ньютона. Порівняльний аналіз інтерполяційних багаточленів. Елементи загальної теорії сплайнів. Сплайн - інтерполяції. Метод найменших квадратів.

3. ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.

Апроксимація похідних. Помилка чисельного диференціювання. Використання інтерполяційних формул. Частинні похідні.

4. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ.

Постановка задачі. Найпростіші квадратурні формули. Інтерполяційне квадратурне правило. Квадратурні формули Ньютона-Котеса, оцінка помилок. Квадратурні формули Гауса. Інші методи чисельного інтегрування.

5. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.

Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку. Метод Ейлера, метод Рунге-Кутта розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. Застосування методів до розв'язку систем диференціальних рівнянь першого порядку. Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку. Метод кінцевих різниць. Одержання кінцево-різницевих формул.

6. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

Постановка задачі. Відділення коренів рівняння. Умови відділення коренів. Графічний метод відділення коренів рівняння. Метод перебору. Методи розв'язку нелінійних рівнянь: метод половинного розподілу, метод хорд, метод дотичних (Ньютона), метод хорд і дотичних, метод простої ітерації. Помилки методів.

7. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

Визначення, позначення, загальні відомості. Метод Гаусса розв'язку систем лінійних рівнянь. Модифікація методу Гауса з вибором головного елемента. Застосування методу Гауса до обчислення визначника матриці та до обчислення оберненої матриці. Застосування методу простої ітерації до розв'язку систем лінійних рівнянь. Метод Зейделя розв'язку систем.

8. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ.

Метод кінцевих різниць розв'язку крайової задачі для рівняння коливання струни. Метод кінцевих різниць розв'язку крайової задачі теплопровідності. Метод кінцевих різниць розв'язку задачі Дирихле для рівняння Лапласа.

9. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛООБМІНУ, КОНВЕКЦІЇ, ВИПРОМІНЮВАННЯ, ПЕРЕНОСУ ЕНЕРГІЇ І МАСИ.

Метод кінцевих різностей. Метод Гальоркіна і варіаційний метод у кінцево-елементному формулюванні Чисельні методи, використовувані в задачах теплообміну (II) Метод Гальоркіна і варіаційний метод з використанням глобальних базисних - функцій. Метод центрального

інтегрування. Метод найменших квадратів. Метод коллокаций Одновимірні елементи вищих порядків. Інтегральний метод — окремий випадок методу моментів. Метод збурень. Нелінійні двоточкові крайові задачі. Автомодельне рівняння Блазиуса. Сплайни - апроксимації і співвідношення більш високого порядку. Метод кінцевих елементів.
Двовимірний потік випромінювання. Спільна дія теплопровідності, конвекції і випромінювання.

1.3. Перелік навчальної та методичної літератури.

Основна:

1. Глушков О.В., Шпінарева І.М., Амбросов С.В. Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. Конспект лекцій. - Одеса, ОДЕКУ, "ТЭС"-2004. – 111С.
2. Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Лобода А.В., Свинаренко А.А., Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. Спеціальні розділи. - Одеса: Екологія, 2007.-126С.
3. Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Лобода А.В., Свинаренко А.А., Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. - Одеса: Екологія, 2008.-152С.
4. www.library-odeku.16mb.com

Додаткова:

5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений М.: Наука,1972.
6. Волков Е.А. Численные методы.- М.: Наука,1982.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука,1980.
8. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы.- М.: Просвещение,1990.
9. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах.-М.: Наука,1972.
10. Глушков О.В., Сербов М.Г., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Флорко Т.О., Прикладна математика .- Одеса: Екологія, 2009.-132С.
11. Данко П.Е., Попов А.Г., Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II.– М.: Высшая школа, 1974.

II. ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТА

2.1. Загальні поради.

1. Розібратися у змісті окремої теми курсу за допомогою наведеного у пункті 1.3 переліку навчальної та методичної літератури (основною літературою є конспект лекцій [1], а якщо при його вивченні виникли питання - використовувати як додаткову літературу [2]-[10]) та повчання до цієї теми.
2. Коли зміст вивченої теми засвоєно, треба відповісти на "запитання до самоперевірки", що наведені наприкінці кожної теми. Якщо виникають труднощі - зверніться ще раз до конспекту лекцій або до додаткової літератури та знайдіть відповіді на свої запитання.
3. Якщо попередні пункти виконано, приступайте до виконання завдань контрольної роботи, що відповідає вивченій темі (див. п.2.6), використовуючи рішення типових задач, які наводяться у пп. 2.2. - 2.5.
4. Далі переходіть до вивчення наступної теми за пунктами 2.2. - 2.5.
5. Якщо виникли питання, на які Ви не в змозі відповісти самостійно, звертайтесь за консультацією до викладача усно чи письмово за адресою університету.

2.2 Загальні рекомендації студентам заочної форми навчання до виконання контрольної роботи

Мета контрольної роботи - перевірити, наскільки успішно студенти освоїли курс дисципліни "Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ".

Контрольна робота має вигляд індивідуальних завдань за темами які вказані у табл.1 (стовпчик "Блоки") відповідно до змістовних модулів. Кількість індивідуальних завдань відповідає 7-ми у змістовому модулі №1, які поділені на два блока, та 1-ому – у змістовому модулі №2, яке складає один блок (табл.1).

Номер варіанту відповідає останній цифрі шифру залікової книжки студента. Кожен варіант контрольної роботи містить практичні завдання відповідно до представлених в змістових модулях темам курсу.

Оформлення контрольної роботи здійснюється на комп’ютері в текстовому редакторі "Microsoft Word". На титульному аркуші вказуються варіант контрольної роботи і відомості про студента. Завдання в контрольній роботі формулюються безпосередньо перед відповіддю. Робота роздруковується на принтері й надається викладачу у період заліково - екзаменаційної сесії.

У міжсесійний період провідним викладачем проводяться консультації. На кафедрі консультації також можна отримати по телефону або письмово, чітко виклавши суть питання, що викликало ускладнення при виконанні контрольної роботи (e-mail: **math@odeku.edu.ua**).

При перевірці самостійної роботи в міжсесійний період використовуються елементи дистанційної форми контролю вивчення дисципліни за відповідними блоками змістовних модулів терміни виконання яких наведені у таблиці 1.

Таблиця 1 – Терміни перевірки контрольної роботи у міжсесійний період

Змістовний модуль	Блоки	Строк контролю
1. Вступ до обчислювальних методів. Інтерполяція функцій. Чисельне диференціювання	№1	1-5 листопада
	1. Правила наближених обчислень при додаванні, відніманні, множенні та діленні наближених чисел. Помилка при обчислені функції однієї та багатьох змінних. 2. Інтерполяційний багаточлен Лагранжа. Перша та друга інтерполяційні формули Ньютона. 3. Помилка чисельного диференціювання. Використання інтерполяційних формул. Частинні похідні.	
Чисельне інтегрування. Обчислювальні методи розв’язку звичайних диференціальних рівнянь. Обчислювальні методи розв’язку нелінійних рівнянь.	№2	1-5 лютого
	1. Формули лівих прямокутників, правих прямокутників, середніх прямокутників, трапецій, Сімпсона. 2. Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку. Метод Ейлера. 3. Метод Рунге-Кутта розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. 4. Відділення коренів рівняння. Умови відділення коренів. Метод перебору. Методи розв’язку нелінійних рівнянь: метод половинного розподілу, метод хорд, метод дотичних (Ньютона), метод хорд і дотичних, метод простої ітерації. Помилки методів.	

2. Обчислювальні методи розв’язку крайових задач для рівнянь математичної фізики.	№3 Метод кінцевих різниць розв’язку крайової задачі для рівняння коливання струни. Метод кінцевих різниць розв’язку крайової задачі теплопровідності.	1-5 квітня

2.3. Повчання по вивченню теми „Інтерполювання функцій”.

Основна література: [1, §2.1-2.9].

Ця тема знайомить студентів з типовою задачею апроксимації функцій: інтерполяцією і її видами.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові завдання та вміння:

1. Види інтерполяції: глобальна й локальна. Інтерполяційний поліном Лагранжа ([1], стор. 13).
2. Кінцеві різниці ([1], стор. 15), зв’язок кінцевих різниць з похідними.
3. Перша й друга інтерполяційні формули Ньютона ([1], стор. 18-20).

Додаткова література: [6, Гл.2, §3].

Питання для самоперевірки:

1. Що таке апроксимація? Інтерполяційний поліном?
2. За якою формулою складається інтерполяційний поліном Лагранжа?
3. Що називається кінцевими різницями I порядку, ...n-го порядку?
4. Яку формулу Ньютона, першу або другу, використовують при знаходженні значень функції у початковому (кінцевому) вузлі?
5. Що таке точність інтерполяцій (залишковий член)?

Приклади практичних завдань.

Приклад 1. Побудувати інтерполяційний багаточлен Ньютона для функції $f(x)=\ln x$ з вузлами $x=2, 3, 4, 5$. Значення функції *у* вузлах інтерполяції

x	2	3	4	5
y	0,693	1.098	1,3	1.6

Побудуємо таблицю для обчислення різниць

x	y	Δ y	Δ^2 y	Δ^3 y
2 3 4 5	0.6931 1,0986 1,3863 1.6094	4055 2877 2231	-1178 -646	532

В силу формули

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\times$$
$$\times \ldots \times (x - x_{n-1})$$

якщо $n=3,\ h=1$ маємо

$$P_3(x) = 0.6931 + 0.4055(x-2) - \frac{0.78}{2}(x-2)(x-3) + \frac{0.0532}{6}(x-2)(x-3)(x-4)$$

Приклад 3. Обчислити в точках $x = 0.1,\ 0.9$ значення функції $y=f(x)$, заданої таблицею, процес обчислень також зручно звести у цю таблицю. Кожна наступна кінцева різниця виходить шляхом вирахування в попередній стовпчику верхнього рядка з нижньої.

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y	Δ^4y	Δ^5y
0	1.2715	1.1937	-0.0146	0.0007	-0.0001	0.0000
0.2	2.4652	1.1791	-0.0139	0.0006	-0.0001	
0.4	3.6443	1.1652	-0.0133	0.0005		
0.6	4.8095	1.1519	-0.0128			
0.8	5.9614	1.1391				
1.0	7.1005					

При $x = 0.1$ маємо $t = (x - x_0)/h = (0{,}1-0)/0.2 = 0.5$. За формулою

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

одержимо

$$f(0,1)=P_4(0,1)= 1.2715 + 0.5*1.1937 + \frac{0,5(0,5-1)}{2!}(-\ 0.0146) +$$

$$+\frac{0,5(0,5-1)(0,5-2)}{3!}0.0007+\frac{0,5(0,5-1)(0,5-2)(0,5-3)}{4!}(-0.00004)=-\ 1.8702.$$

Для порівняння за формулою лінійної інтерполяції одержуємо

$$f(0,1)= 1.8684.$$

Значення функції у точці $x = 0.9$ потрібно обчислювати за формулою

$$P_n(x)=P_n(x_n+th)=y_n+t\Delta y_{n-1}+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\ldots+$$
$$+\frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

У цьому випадку маємо $t = (x-x_n)/h= (0.9 - 1) /0.2= -0.5$. Тоді

$$F(0,9)= P_n(0.9) = 7.1,005 - 0.5.1.1391 - \frac{0.5(-0.5+1)}{2!}\ (-0.0128)-$$

$$-\frac{0.5(-0.5+1)(-0.5+2)}{3!}\ 0.0005-\frac{0.5(-0.5+1)(-0.5+2)(-0,5+3)}{4!}\ (-0.0001)=$$

$$=7.1005 - 0.5698 + 0.0016 -i\ 0.00003 +0.000004=6.5325.$$

Ми розглянули побудову інтерполяційного багаточлена Ньютона для рівновіддалених вузлів.

2.4. Повчання по вивченню теми „Чисельне диференціювання функцій”.

Основна література: [1, §3.1-3.4].

Ця тема знайомить студентів з апроксимацією похідних.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові завдання та вміння:

1. Вміти побудувати формули чисельного диференціювання за першою інтерполяційної формулою Ньютона ([1], стор. 28-29).
2. Вміти побудувати формули чисельного диференціювання за другою інтерполяційної формулою Ньютона ([1], стор. 30-31).
3. Вміти побудувати формули чисельного диференціювання за інтерполяційної формулою Лагранжа ([1], стор. 31-32).

Додаткова література: [10, Гл.9, §4].

Питання для самоперевірки:

1. Чим відрізняються формули чисельного диференціювання, побудовані за першою та другою інтерполяційними формулами Ньютона?
2. Чим відрізняються формули чисельного диференціювання, побудовані за вище означеними формулами та формулою Лагранжа?

Приклади практичних завдань.

Приклад 1. Обчислити в точці *x = 0.1* першу і другу похідні функції, заданою таблицею.

x	У	Δy	Δ^2y	Δ^3y	Δ^4y	Δ^5y
0	1.2833	0.5274	0.0325	0.0047	0.0002	0.0000
0.1	1.8107	0.5599	0.0372	0.0049	0.0002	
0.2	2.3606	0.5971	0.0421	0.0051		
0.3	2.9577	0.6392	0.0472			
0.4	3.5969	0.6864				
0.5	4.2833					

При *h= 0.1, t=(0.1 — 0)/0.1 = 1*. Використовуючи отримані формули

$$y' \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots \right),$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + \frac{6t-6}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots \right),$$

знаходимо

$$y' = 10\ (0.5274 + \frac{2*1-1}{2} \bullet 0.0325 + \frac{3*1-6*1+2}{6} * 0.0047 +$$
$$+ \frac{4*1-18*1+22*1-6}{24} * 0.0002) = 5.436,$$

$$y'' = 100(0.0325 + \frac{6*1-6}{6} * 0.0047 + \frac{12-36+22}{24} * 0.0002) = -\ 3.25.$$

Інтерполяційні багаточлени Ньютона надають можливість отримати вираження для похідних через різниці $\Delta^k y$ *(k=1, 2, ...)*. Однак на практиці часто вигідніше виражати значення похідних не через різниці, а безпосередньо через значення функції у вузлах. Для одержання таких формул зручно скористатися формулою Лагранжа з рівномірним розташуванням вузлів (X_i - X_{i-1}= h = $const$, i = 1, 2, ..., n).

2.5. Перелік завдань для контрольної роботи для змістового модулю №1 (табл.1, Блок №1, завдання 1 - 3):

Варіант №1.

1. Використовуючи першу чи другу формули Ньютона, обчислити значення функції при $x=0,541$,$x=0,594$.

x	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,6
y	1,7333	1,7507	1,7683	1,7860	1,8040	1,8221

2. Обчислити похідну функції при $x=0,55$.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

Варіант №2.

1. Використовуючи першу чи другу формули Ньютона, обчислити значення функції при $x=1,02$, $x=1,254$.

x	1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25
y	2,7183	2,8577	3,0042	3,1582	3,3201	3,4903

2. Обчислити похідну функції при $x=1$.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

Варіант №3.

1. Використовуючи першу чи другу формулами Ньютона обчислити значення функції при $x=0,658$, $x=1$.

X	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
Y	1,9155	2,0138	2,117	2,2255	2,3396	2,4596

2. Обчислити похідну функції при $x=0,65$.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

Варіант №4.

1. Використовуючи першу чи другу формули Ньютона, обчислити значення функції при $x=1,333$, $x=1,554$.

x	1,3	1,35	1,4	1,45	1,5	1,55
y	3,6693	3,8574	4,0552	4,2631	4,4817	4,7115

2. Обчислити похідну функції при *x=1,3*.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

Варіант №5.

1. Використовуючи першу чи другу формули Ньютона, обчислити значення функції при *x=1,633* , *x=1,854*.

x	1,6	1,65	1,7	1,75	1,8	1,85
y	4,953	5,207	5,4739	5,7546	6,0496	6,3598

2. Обчислити похідну функції при *x=1,6*.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

Варіант №6.

1. Використовуючи першу чи другу формули Ньютона, обчислити значення функції при *x=1,133* , *x=1,554*.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	0,8912	0,932	0,9636	0,9854	0,9975	0,9996

2. Обчислити похідну функції при *x=1,1*.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

Варіант №7.

1. Використовуючи першу чи другу формули Ньютона, обчислити значення функції при *x=1,733* , *x=2,354*.

x	y
1,8	0,9738
1,9	0,9463
2	0,9093
2,1	0,8632
2,2	0,8085
2,3	0,7457

2. Обчислити похідну функції *при x=1,8*.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

Варіант №8.

1. Використовуючи першу чи другу формули Ньютона, обчислити значення функції при *x=2,433 , x=2,954*.

x	y
2,4	0,6755
2,5	0,5985
2,6	0,5155
2,7	0,4274
2,8	0,3350
2,9	0,2392

2. Обчислити похідну функції при *x=2,4*.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

Варіант №9.

1. Використовуючи першу чи другу формули Ньютона, обчислити значення функції при *x=0,633 , x=1,154*.

x	y
0,6	0,5646
0,7	0,6442
0,8	0,7174
0,9	0,7833
1	0,8415
1,1	0,8912

2. Обчислити похідну функції при *x=0,6*.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

Варіант №10.

1. Використовуючи першу чи другу формули Ньютона, обчислити значення функції при *x=3,033 , x=3,554*.

x	y
3	0,1411
3,1	0,0416
3,2	-0,0584
3,3	-0,1577
3,4	-0,2555
3,5	-0,3508

2. Обчислити похідну функції при $x=3$.
3. Скласти багаточлен Лагранжа, використовуючи перші три вузла.

2.6. Повчання по вивченню теми „Чисельне інтегрування функцій”.

Основна література: [1, §4.1-4.6].

Ця тема знайомить студентів з формулами механічних квадратур: формулою прямокутників, формулою трапецій, формулою Сімпсона. Порівнює й практично оцінює похибки квадратурних формул.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові завдання та вміння:

1. Вміти знайти наближене значення інтеграла за формулами: лівих, правих, середніх прямокутників, трапецій, Сімпсона ([1], стор. 35-39).
2. Визначати й порівнювати оцінки похибки для різних квадратурних формул ([1], стор. 39-42).

Додаткова література: [10, Гл.9, §3].

Питання для самоперевірки:

1. Якій вигляд мають формули: лівих прямокутників, правих прямокутників, середніх прямокутників? Чим вони відрізняються
2. Як виглядає узагальнена формула трапецій?
3. Яким чином побудувати три точкову квадратичну формулу з рівновіддаленими вузлами для обчислення наближеного значення інтегралу?
4. Як виглядає квадратурна формула Сімпсона?

Приклади практичних завдань.

Приклад 1. Методом прямокутників обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Тому що крок у нас постійний h=0.1, за формулою «лівих» прямокутників

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$$

маємо:

$$I= 0.1(1+0.990+0.962+0.917+ \\ +0.862+0.800+0.735+0.671+0.610+0.552)=0,8099.$$

За формулою «правих» прямокутників

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = h(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

одержимо наступний результат:

$$I = 0.1(0.990+0.962+0.917+0.862+0.800+0.735+ \\ +0.671+0.610+0.552+0.5)=0.7599.$$

Похибка в обчисленні інтеграла становить $\Delta I_2=I_2-I=0.00021$ (близько 0.027%)

Для обчислення інтеграла за формулою «середніх» прямокутників

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-\frac{1}{2}}$$

треба спочатку обчислити значення функції в точках $X_{i-1/2}$

$X_{i-1/2}$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75
$Y_{i-1/2}$	0,9975	0,9779	0,9411	0,8908	0,8316	0,7677	0,7029	0,64

Продовження табл.

$X_{i-1/2}$	0,85	0,95
$Y_{i-1/2}$	0,58055	0,5256

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{i-1/2} + \ldots + y_{n-1/2} \right) = 0.7856$$

Приклад 2. Методом трапецій обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, з двома вірними десятковими знаками.

Для вибору кроку, з яким ми будемо обчислювати значення підінтегральної функції, оцінимо величину залишкового члена.

Маємо: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x)=-2*\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$

і на відрізку $0 \le x \le 1$ $\quad |f''(x)| \le 2|1-3x^2| \le 4.$

За умовою задачі похибка не повинна перевищувати *0,005*. Маємо:

$\frac{1}{12n^2}4 \le 0.005$ *чи* $n^2 \ge 200/3.$

Для зручності обчислень бажано щоб крок виражався круглим числом. Тому візьмемо n=10, тоді крок h=0,1. Похибка обчислень буде значно менш за похибку формули, якщо ординати будуть обчислені з точністю до трьох десяткових знаків. Бланк розрахунку тепер набере вигляд в таблиці:

i	X_i	X_i^2	$1+x_i^2$	$Y_i=1/(1+x_i^2)$
0	0	0	1	1
1	0,1	0,01	1,01	0,990
2	0,2	0,04	1,04	0,962
3	0,3	0,09	1,09	0,917
4	0,4	0,16	1,16	0,862
5	0,5	0,25	1,25	0,800
6	0,6	0,36	1,36	0,735
7	0,7	0,49	1,49	0,671
8	0,8	0,64	1,64	0,610
9	0.9	0,81	1,81	0,552
10	1	1	2	0,5

				1,5 7,099

Звідси в силу узагальненої формули трапеції :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i(y_{i-1}+y_i) \approx h(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)),$$

$$h=(b-a)/n$$

Маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}1\ (0{,}5*1{,}5+7.099)=0{,}1*7{,}849=0{,}7854981.$$

Для порівняння знайдемо значення заданого інтеграла за формулою Ньютона - Лейбница (з чотирма вірними десятковими знаками):

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\ \Big|_0^1 = arctg1 — arctg\ 0 = 0{,}7854.$$

Таким чином, у даному випадку формула трапецій дала результат більш точний. Похибка тут дорівнює $\Delta I_2=-0.00042$ (близько 0.*054%*).

Приклад 3. Методом *Сімпсона* обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Всі обчислення будемо проводити в наступній таблиці

i	X_i	$Y_i=1/(1+x_i^2)$		
		$i=0,\ \ i=10$	Непарні	Парні i
0	0	1		
1	0,1		0,990	
2	0,2			0,962
3	0,3		0,917	
4	0,4			0,862
5	0,5		0,800	
6	0,6			0,735
7	0,7		0,671	
8	0,8			0,610
9	0.9		0,552	

10	1	0,5		

Знайдемо значення інтеграла за формулою:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n] + R(f)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{0.1}{3}[1 + 4(0.990 + 0.917 + 0.800 + 0.671 + 0.552)$$
$$+ 2(0.962 + 0.862 + 0.735 + 0.610) + 0.5] = 0.785398$$

Якщо порівняти результати обчислень інтеграла, отримані трьома різними методами, тоді можна зробити такий висновок:

- метод Сімпсона має більш високу точність;
- для методу Сімпсона потрібно майже вдвічі менше табличних значень функції, оскільки для методу прямокутників потрібні додаткові дані в середніх точках.

2.7. Перелік завдань для контрольної роботи для змістового модулю №1 (табл.1, Блок №2, завдання 1 - 4)

Варіант №1.

1. Обчислити інтеграл за формулами прямокутників і трапецій та оцінити точність *(n=5)*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}.$$

2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=x+(y/5)$, що задовольняє початкові умови $y_0(0)=1$ на відрізку $[0;1]$ крок $h=0,2$. Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.
3. Використовуючи модифікований метод Ейлера, знайти 2 значення функції y.
4. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до $0,1$ $2x^3-12x-5=0$.

Варіант №2.

1. Обчислити інтеграл за формулами Сімпсона і трапеції й оцінити точність *(n=4)*.

$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$$

2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=x+x^2+y$, що задовольняє початкові умови $y_0(0)=5$ на відрізку *[0;1]* крок *h=0,2*. Обчислення вести з 3-ма десят. знаками.
3. Використовуючи модифікований метод Ейлера, знайти 2 значення функції *y* .
4. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до *0,1* $x^3-3x+3=0$.

Варіант №3.

1. Обчислити інтеграл за формулами Сімпсона і трапеції й оцінити точність *(n=4)* $\int_1^2 \frac{\ln x dx}{x}$.
2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=x+y^2$, що задовольняє початкові умови $y_0(0)=2$ на відрізку *[0;1]* крок *h=0,2*. Обчислення вести з трьома десят. знаками.
3. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції *y*.
4. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до *0,1* $2x^3-24x-10=0$.

Варіант №4.

1. Обчислити інтеграл за формулами «середніх» прямокутників і трапеції й оцінити точність *(n=5)* $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}$
2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=y^2+xy$, що задовольняє початкові умови $y_0(0)=1$ на відрізку *[0;1]* крок *h=0,2*. Обчислення вести з трьома десят. знаками.
3. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції у.
4. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до *0,1* $x^3+9x-2=0$.

Варіант №5.

1. Обчислити інтеграл за формулами прямокутників і Сімпсона й оцінити точність *(n=4)* $\int_1^3 \frac{dx}{x+1}$.

2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=xy$, що задовольняє початкові умови $y_0(0)=1$ на відрізку $[0;1]$ крок $h=0{,}2$. Всі обчислення вести з трьома десятковими знаками.

3. Використовуючи модифікований метод Ейлера знайти 2 значення функції y .

4. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до $0{,}1$ $x^3+3x-2=0.$

Варіант №6.

1. Обчислити інтеграл за формулами Сімпсона і трапеції й оцінити точність *(n=4)*

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$$

2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=y-x^2$, що задовольняє початкові умови $y_0(0)=1$ на відрізку $[0;1]$ крок $h=0{,}2$. Всі обчислення вести з трьома десятковими знаками.

3. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції y.

4. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до $0{,}1$ $x^3-6x-3=0.$

Варіант №7.

1. Обчислити інтеграл за формулами Сімпсона і трапеції й оцінити точність *(n=4)*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=x^2-y^2$, що задовольняє початкові умови $y_0(0)=2$ на відрізку $[0;1]$ крок $h=0{,}2$. Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.

3. Використовуючи модифікований метод Ейлера, знайти 2 значення функції y .

4. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до $0{,}01.$ $x^3-12x+6=0.$

Варіант №8.

1. Обчислити інтеграл за формулами «лівих» прямокутників і трапеції й оцінити точність *(n=5)* $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=2x+y^2$, що задовольняє початковим умовам $y_0(0)=1$ на відрізку $[0;1]$ крок $h=0,2$. Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.
3. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції у.
4. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до *0,1.* $x^3-12x+10=0.$

Варіант №9.

1. Обчислити інтеграл за формулами «середніх» прямокутників і трапеції й оцінити точність *(n=5)* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=x^2+2y$, що задовольняє початкові умови $y_0(0)=0,1$ на відрізку $[0;1]$ крок $h=0,2$. Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.
3. Використовуючи модифікований метод Ейлера, знайти 2 значення функції y .
4. Методом хорд вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до *0,1* $x^3-3x^2+2,5=0.$

Варіант №10.

1. Обчислити інтеграл за формулами прямокутників і трапеції й оцінити точність *(n=5)* $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

2. Використовуючи метод Ейлера, скласти таблицю наближених значень інтеграла диференціального рівняння $y'=0,3x+y^2$, що задовольняє початкові умови $y_0(0)=0,4$ на відрізку $[0;1]$ крок $h=0,2$. Всі обчислення вести з трьома десят. знаками.
3. Використовуючи метод Рунге-Кутта, знайти 1 значення функції у.
4. Методом дотичних вирішити рівняння третього степеня, обчисливши корені з точністю до *0,1* $x^3+3x^2-3,5=0.$

2.8. Повчання по вивченню теми „Метод кінцевих різниць”.

Основна література: [1, §8.1-8.3].

Ця тема відкриває студентам математичну ідею дискретизації. Під дискретизацією розуміється деяка апроксимувальна процедура, при якій безупинна область заміняється сіткою з окремих точок і в цих конкретних точках області знаходимо невідомі фізичні змінні . Частинні похідні при такому підході можуть апроксимуватися за допомогою кінцевих ризниць багатьма способами, деякі з цих апроксимацій представлені в таблиці, яка представлена нижче. Усі вони отримані шляхом розкладання відповідних функцій у ряд Тейлора.

Таблиця. Деякі різницеві схеми і відповідні їм члени похибки апроксимації.

<table>
<tr><th>Похідна</th><th>Різницева апроксимація</th><th>Головні члени</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{\partial \Phi}{\partial z}$</td><td>$\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z}$ (уперед)</td><td>$-\frac{\Delta z}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}-\frac{(\Delta z)^2}{6}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{\Phi(z)-\Phi(z-\Delta z)}{\Delta z}$ (назад)</td><td>$+\frac{\Delta z}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}-\frac{(\Delta z)^2}{6}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z-\Delta z)}{2\Delta z}$ (Центральна)</td><td>$-\frac{(\Delta z)^2}{6}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$</td><td rowspan="2">$\frac{\Phi(x+\Delta x,t+\Delta t)-2\Phi(x,t+\Delta t)+\Phi(x-\Delta x,t+\Delta t)}{(\Delta x)^2}$</td><td>$-\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}-(\Delta t)\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial t}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial t^2}$</td></tr>
<tr><td>$\frac{\Phi(x+\Delta x,t\Delta t)-2\Phi(x,t+\Delta t)+\Phi(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}$</td><td>$-\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}$</td></tr>
</table>

Причому z може означати змінні *x, y* чи t.

При вивченні цієї теми необхідно звернути увагу на такі базові завдання та вміння:

1. Засвоїти метод сіток для рівнянь гіперболічного типу (хвильове рівняння) ([1], стор. 79-80).
2. Засвоїти метод сіток для рівнянь параболічного типу (рівняння теплопровідності) ([1], стор. 81-82).
3. Вміти визначати початкові й граничні умови ([1], стор. 79-82).

Додаткова література: [10, Гл.10, §6-7].

Питання для самоперевірки:

1. Яка ідея лежить в основі методу сітки?
2. Як розв'язати рівняння гіперболічного типу методом сітки ?
3. Які значення повинна мати α, щоби різницеві відношення у змішаної задачі коливанні струни були стійкими?
4. Які є способи обчислення функції на двох початкових шарах?
5. Як розв'язати рівняння параболічного типу методом сітки?
6. Як впливає вибір кроків по осях *x,t* на стійкість різницевого рівняння в задачі теплопровідності?
7. Яким чином виглядає формула кінцево-різницевого рівняння для рівняння параболічного типу?
8. При якому σ рівняння дає більш високу точність розв'язку задачі теплопровідності?

Приклади практичних завдань.

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі для рівняння коливання струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

за початковими умовами $u(x,0)=0{,}2x(1-x)\sin\pi x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$,

і граничними умовами: $u(0,t)=u(1,t)=0$

<u>*Розв'язок*</u> **.** Побудуємо в напівсмузі $0\le x\le 1$, $0\le t\le 0.35$ квадратну сітку з кроком $h=l=0{,}05$ і найдемо значення функції u_{ij} у кожному вузлі сітки.

З огляду на те, що $u(0,t)=u(1,t)=0$, будемо мати $u_{0j}=0$, $u_{1,j}=0$ $(j=0,1,2,\ldots,10)$ Значення $u(x,t)$ на двох початкових шарах знайдемо другим способом :

$$u_{i0}=f_i,\ \ u_{i1}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_{i-1})+l\Phi_i$$

Всі обчислення виконуються в робочій таблиці.

<u>Порядок заповнення таблиці:</u>

1) Обчислюємо значення $u_{i0}=f(x_i)=0{,}2x_i(1-x_i)\sin\pi x_i$ при $x_i=ih$ і записуємо в перший рядок (він відповідає значенню $t_o=0$) У першому стовпці таблиці (він відповідає значенню $x_o=0$) записуємо граничні значення $u_{0j}=0$.

2) За формулою знаходимо $u_{i1}=\frac{1}{2}(f_{i+1}+f_{i-1})+l\Phi_i$,т.к.$\Phi_i=0$, то $u_{i1}=0{,}5(f_{i+1}+f_{i-1})$, $(i=0,1,2,\ldots,10)$, використовуючи значення u_{i0} з першого рядка. Результати записуємо в другий рядок табл.2.

3) Обчислюємо значення u_{ij} на наступних кроках за формулою

$u_{i,j+1}=u_{i+1,j}+ u_{i-1,j} - u_{i,j-1}$, т.щ. $\alpha=l/h=1$. При $j=2$ одержуємо:

$$u_{12}=u_{21}+u_{01}-u_{10}= 0{,}0065 + 0 - 0{,}0015 =0{,}0050,$$
$$u_{22}=u_{31} + u_{11}-u_{20} = 0{,}0122 + 0{,}0028 - 0{,}0056 = 0{,}0094,$$
$$u_{10,2}= u_{11,1} + u_{91} - u_{19,0}=0{,}0478 + 0{,}0478-0{,}0500 = 0{,}0456.$$

Обчислення при $j=3, \ldots, 10$ проводяться аналогічно.

В останньому рядку таблиці, яка представлена нижче, приведені значення точного розв'язку при $t=0{,}5$.

Таблиця. Розв'язок задачі.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i x_i	0	0.05	0,10	0,15	0.20	0.25	0,30	0.35	0,40	0,45	0,50
0	0	0,0015	0,0056	0,0116	0,0188	0,0265	0,0340	0,0405	0,0457	0,0489	0,0500
0,05	0	0,0028	0,0065	0,0122	0,0190	0,0264	0.0335	0,0398	0.0447	0,0478	0,0489
0,10	0	0,0050	0,0094	0,0139	0,0198	0,0260	0,0322	0.0377	0,0419	0,0447	0,0456
0,15	0	0,0066	0,0124	0,0170	0,0209	0.0256	0.0302	0.0343	0,0377	0,0397	0,0405
0,20	0	0,0074	0,0142	0,0194	0,0228	0,0251	0,0277	0,0302	0,0321	0,0335	0,0338
0,25	0	0,0076	0,0144	0,0200	0,0236	0,0249	0,0251	0,0255	0,0260	0,0262	0,0265
0,30	0	0,0070	0,0134	0,0186	0,0221	0,0236	0,0227	0,0209	0,0196	0,0190	0,0186
0,35	0	0,0058	0,0112	0,0155	0,0186	0.0199	0,0194	0,0168	0,0139	0,0120	0,0115
0,40	0	0,0042	0,0079	0,0112	0.0133	0,0144	0,0140	0,0124	0,0092	0,0064	0,0054
0,45	0	0,0021	0,0042	0,0057	0.0070	0,0074	0.0074	0,0064	0,0042	0,0026	0,0013
0,50	0	-0,0001	-0,0001	0,0000	-0,0002	0.0000	-0.0002	-0.0001	-0,0002	-0,0002	-0,0002
$u(x_i,0,5)$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Приклад 2. Використовуючи різницеве рівняння $u_{i,j+1}=(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})/2$, знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

який задовольняє умови

$$u(x, 0) = \sin \pi x \ (0 \le x \le 1) \text{ і } u(0, t)=u(1, t)=0 \ (0\le t\le 0{,}025).$$

Розв'язок .

Виберемо по аргументу x крок $h=0.1$. Тому, що $\sigma=1/2$ одержуємо по аргументу t крок $l=h^2/2=0.005$. Записуємо в робочу таблицю початкові і граничні значення. У силу симетрії задачі заповнюємо таблицю для

$0 \le x \le 0.5$ Значення функції на першому шарі знаходимо, використовуючи значення на початковому шарі і граничні умови, за формулою

$u_{i,j+1}=(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})/2$ якщо $j=0$:

$$u_{i,1}=(u_{i+1,0}+u_{i-1,0})/2$$

Таким чином , одержуємо

$u_{1,1}=(u_{2,0}-u_{0,0})/2 =(0,5878 + 0)/2 = 0,2939,$

$u_{2,1}=(u_{3,0}-u_{1,0})/2= (0,8090 + 0.3090)/2 = 0,5590$ і т.д.

Записуємо одержанні значення u_{i1} $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ у другий рядок у таблиці, яка представлена нижче. Після переходимо до обчислення значень на другому шарі за формулою $u_{i,j+1}=(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})/2$ при $j=1$:

$$u_{i,2}=(u_{i+1,1}+u_{i-1,1})/2$$

Таким ж чином визначаємо послідовно значення u_{ij} при t=*0.05; 0.010;0.015;0.020;0.025*

Таблиця. Розв’язок задачі

i	X_i / t_j	0	0.1	0,2	0,3	0,4	0.5
0	0	0	0,3090	0,5878	0,8090	0,9511	1,0000
1	0.005	0	0.2939	0,5590	0,7699	0,9045	0,9511
2	0.010	0	0,3795	0.5316	0,7318	0,8602	0.9045
3	0,015	0	0,2658	0.5056	0,6959	0.8182	0,8602
4	0,020	0	0,2528	0,4808	0,6619	0,7780	0,8182
5	0,025	0	0,2404	0,4574	0,6294	0,7400	0,7780

Продовження табл.

$\overline{u}$ (x, t)	0.025	0	0,2414	0,4593	0,6321	0,7431	0,7813
$\lvert\overline{u}-u\rvert_u$	0,025	0	0,0010	0.0019	0,0027	0,0031	0,0033

У двох останніх рядках таблиці наведенні значення точного розв’язку задачі $\overline{u}\,(x,t)= e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ і $\lvert\overline{u}-u\rvert$ при t=0,025.

2.9. Перелік завдань для контрольної роботи для змістового

модулю №2 (табл.1, Блок №3):

Варіант №1.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x,0)=x(\pi-x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$$

$u(0,t)=u(\pi,t)=0;$ $x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,8;$ $t_j=jh_2,\ j=0,\ldots,10;$ $\alpha=h_1/h_2=1/2.$

Варіант №2.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x,0)=\sin(\pi x/2); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$$

$u(0,t)=u(1,t)=0;$ $x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,8;$ $t_j=jh_2,\ j=0,\ldots,10;$ $\alpha=h_1/h_2=1/2.$

Варіант №3.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x,0)=x(2-x); \quad u(0,t)=u(2,t)=0;$$

$x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,10;$ $t_j=jh_2,\ j=0,\ldots,8;$ $\alpha=h_1/h_2=1/6.$

Варіант №4.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x,0)=x-x^2; \quad u(0,t)=u(1,t)=0;$$

$x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,8;$ $t_j=jh_2,\ j=0,\ldots,12;$ $\alpha=h_1/h_2=1/4.$

Варіант №5.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x,0)=x(1-x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$$

$u(0,t)=u(1,t)=0;$ $x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,8;$ $t_j=jh_2,\ j=0,\ldots,10;$ $\alpha=h_1/h_2=1/2.$

Варіант №6.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(x,\ 0)=\sin\pi x;\quad u(0,\ t)=u(1,\ t)=0;$$

$$x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,8;\quad t_j=jh_2,\ j=0,\ldots,12;\quad \alpha=h_1/h_2=1/6.$$

Варіант №7.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(x,0)=\sin x;\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0;\quad x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,10;\quad t_j=jh_2,\ j=0,\ldots,8;\quad \alpha=h_1/h_2=1/2.$$

Варіант №8.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(x,\ 0)=\sin\pi x/3;\quad u(0,\ t)=u(3,\ t)=0;$$

$$x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,12;\quad t_j=jh_2,\ j=0,\ldots,8;\quad \alpha=h_1/h_2=1/6.$$

Варіант №9.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(x,0)=\sin\pi x;\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0;$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0;\quad x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,12;\quad t_j=jh_2,\ j=0,\ldots,10;\quad \alpha=h_1/h_2=1/3.$$

Варіант №10.

Вирішити задачу наближеним методом сітки.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(x,\ 0)=\sin x;\quad u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0;$$

$$x_i=ih_1,\ i=0,\ldots,15;\quad t_j=jh_2;\quad j=0,\ldots,8;\quad \alpha=h_1/h_2=1/6.$$

ІІІ. ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ

При самостійному вивченні дисципліни „Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ” контроль здійснюється за допомогою системи контролюючих заходів, яка складається з поточного та підсумкового контролю.

Поточний контроль здійснюється на протязі навчального курсу за формами: перевірка контрольної роботи в міжсесійний період (ОМ), перевірка знань та вмінь студентів під час аудиторних занять протягом заліково-екзаменаційної сесії (ОЗЕ) шляхом усного опитування (УО) та аудиторної контрольної роботи.

Підсумковий контроль здійснюється у формі письмової залікової контрольної роботи (за інтегрованим планом – іспит). Термін проведення контролюючих заходів визначається графіком заочної форми навчання.

Міжсесійна контрольна робота складається з 3 блоків (табл.1). Максимальна кількість балів за перший блок – 40 (завдання №1 – 20 балів, завдання №2,3 по 10 балів), за другий – 40 (кожне завдання по 10 балів), за третій – 20 балів. Максимальна кількість балів за повністю виконану контрольну роботу 100.

Студенти, які не отримали за контрольну роботу мінімальної кількості балів (60 балів), повинні виконати інший варіант контрольної роботи, який представляється викладачем, або виправити помилки попереднього варіанту та отримати відповідну кількість балів для допуску до виконання письмової залікової контрольної роботи.

Студенти, які виконали контрольну роботу та отримали за результатами перевірки не менше ніж 60 балів (60%) мають допуск до виконання письмової залікової контрольної роботи. Варіанти письмової залікової контрольної роботи мають вид тестових завдань по 10 у кожному варіанті. За кожну правильну відповідь студент отримує 10 балів.

Максимальна кількість балів, яку студент може отримати за успішне виконання контролюючих заходів у період сесії складає: за аудиторну контрольну роботу – 50 балів (5 завдань – 10 балів за кожне правильне виконане завдання); за усне опитування – 50 балів.

Наприкінці сесії студенти виконують залікову контрольну роботу, а підсумкова оцінка (ПО) засвоєння студентом дисципліни розраховується так:

$$ПО=0{,}75\times[0{,}5\times(ОЗЕ+ОМ)]+0{,}25\times ОЗКР.$$

ОЗКР – кількісна оцінка (у відсотках від максимально можливої) залікової контрольної роботи.

Студент отримує якісну оцінку («зараховано» або «не зараховано») залежно від накопиченої підсумкової оцінки, та за умови що ЗКР виконано не менш ніж на 50%.

Для іспиту (за інтегрованим планом) кожний варіант екзаменаційного білету містить 20 тестових завдань. За кожну правильну відповідь студент отримує 5 балів.

Студент вважається допущеним до підсумкового контролю (ОПК) з конкретної навчальної дисципліни, якщо він виконав всі види робіт поточного контролю (ОМ+ОЗЕ), передбачені робочою навчальною програмою дисципліни і набрав за накопичувальною системою суму балів не менше 50% від максимально можливої за дисципліну, своєчасно виконав міжсесійну контрольну роботу.

Підсумкова оцінка у разі іспиту розраховується таким чином:

$$ПО=0,5\times ОПК+0,25\times(ОЗЕ+ОМ).$$

Одержана накопичена підсумкова оцінка виставляється викладачем у відомість обліку успішності встановленого зразка.

Базові нормативні знання, які забезпечують задовільну оцінку на підсумковому контролі є такими:

1. Знати види інтерполяції: глобальну й локальну. Інтерполяційний поліном Лагранжа.
2. Знати кінцеві різниці, зв'язок кінцевих різниць з похідними.
3. Знати першу й другу інтерполяційні формули Ньютона.
4. Знати, як побудувати формули чисельного диференціювання за першою інтерполяційної формулою Ньютона.
5. Знати, як побудувати формули чисельного диференціювання за другою інтерполяційної формулою Ньютона.
6. Знати, як побудувати формули чисельного диференціювання за інтерполяційної формулою Лагранжа.
7. Знати, як знайти наближене значення інтеграла за формулами: прямокутників, трапецій, Сімпсона.
8. Знати, як визначати й порівнювати оцінки похибки для різних квадратурних формул.
9. Знати метод сіток для рівнянь гіперболічного типу (хвильове рівняння).
10. Знати метод сіток для рівнянь параболічного типу (рівняння теплопровідності).
11. Знати, як визначати початкові й граничні умови.