МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Диференційні рівняння вищих порядків»)
для студентів І курсу денної форми навчання
Спеціальність: Комп'ютерні науки

Затверджено
На засіданні групи забезпеченості спеціальності
Протокол №____ від ______Голова групи Мещеряков В.І.

Затверджено
На засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №____________ від ______________
Завідуючий кафедрою Глущков О.В._________

Одеса-2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для практичних занять з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Розділ «Диференційні рівняння вищих порядків»)
для студентів I курсу денної форми навчання
Спеціальність: Комп'ютерні науки

Затверджено
На засіданні групи забезпеченості спеціальності
Протокол №____ від ______Голова групи Мещеряков В.І.

Затверджено
На засіданні кафедри вищої та прикладної математики
Протокол №____________ від _______________
Завідуючий кафедрою Глущков О.В._________

Одеса-2020

Методичні вказівки для виконання практичних робіт для студентів I курсу денної форми навчання по вивченню дисципліни «Вища математика» розділ «Диференційні рівняння вищих порядків». Спеціальність: комп'ютерні науки.

Укладачі: Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф., кафедри вищої та прикладної математики

Дубровська Ю.В., к.ф.-м.н., доц.,кафедри вищої та прикладної математики

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедрою вищої та прикладної математики

ПЕРЕДМОВА

«Вища математика» є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків комп'ютерні науки. Розділ спрямован на вивчення основних положень диференціального і інтегрального числення, узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при розв'язанні практичних задач у науково-практичній діяльності. Курс взагалом та розділ окремо, відображує нові вимоги, що пред'являються до математичної освіти сучасного інженера. Інтегрування вищих навчальних закладів України до міжнародного освітнього простору зумовлює необхідність розробки та втілення у практику навчального процесу заходів, спрямованих на підвищення якості вищої освіти. Одним з них є застосування тестового контролю для діагностики рівня засвоєння навчального матеріалу студентами.

Мета вивчення розділу дисципліни «Вища математика» - забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного та практичного курсу вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, комп'ютерних наук, взагалі інформаційних технологій,та математичного моделювання задач.

Завдання розділу «Диференційні рівняння вищих порядків» - навчити студентів: використовувати вивчені методи вирішення задач, аналізувати отримані результати математичних обчислень. Вивчення розділу базується на використанні теоретичних та практичних знань, отриманих студентами у загально - освітніх навчальних закладах.

Мета методичних вказівок. Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь - один з найважливіших розділів курсу «Вища математика», так як вони дають можливість виражати співвідношення між змінами фізичних величин. Вивчення методів розв'язання диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь дає можливість застосовувати ці навички для постановки та розв'язку практичних задач у конкретній науково - практичній діяльності. Вивчення цього розділу базується на теоретичних та практичних знаннях курсу диференціального та інтегрального обчислення функції однієї та багатьох змінних. Після вивчення студент має засвоїти основні визначення, положення та теореми, вміти використовувати їх для рішення звичайних диференціальних рівнянь. Вивчення матеріалу поданого розділу базується на основі теоретичного матеріалу, який викладається на лекціях, на практичних заняттях, самоперевірках та модульного контролю.

В результаті студент повинен:

- знати основні методи рішення диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь;
- вміти використовувати отримані знання при розв'язанні конкретних задач, застосовувати ці знання для подальшого вивчення дисциплін професійно-орієнтованого циклу, а також наукової роботи.

1. ПРОГРАМА РОЗДІЛУ «ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ» ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ

Найпростіші Диференційні Рівняння (ДР), які допускають зниження порядку.
Лінійні неоднорідні ДР. Фундаментальна система розв'язку.
Лінійні неоднорідні ДР. Теорема про структуру загального розв'язку. Метод варіації довільних сталих.
Однорідні лінійні ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
Неоднорідні ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів.
Системи ДР.

2. ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНОЇ ТА МЕТОДИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

При вивченні цього розділу дисципліни використовується така навчальна та методична література:

ЛІТЕРАТУРА:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. М.: Наука, 1978.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.2. – М.: "Высшая школа", 1986.
3. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. «Вища математика» - К.: Вища шк., 1987.
4. Мышкис А. С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1966, 1969.
5. Г.М. Фихтенгольц «Основи математического анализа» М., «Наука», 1968.
6. Глушков О.В., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Чернякова Ю.Г., Дубровська Ю.В., Свинаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій. Ч.2. –Одеса, 2013.

3. ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ СТУДЕНТУ ПО ПІДГОТОВЦІ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ЗА РОЗДІЛОМ «ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ»

Основною формою навчання студента є аудиторна та самостійна робота над навчальним матеріалом. За допомогою методичних вказівок, студент має можливість побачити та розв'язати приклади типових завдань завдання роботи. Також досить цікавим є те, що вказівки містять опорний конспект до теми ДР, та короткий довідник модуля. Це все подано в доступній, розгорнутій формі і стане у нагоді студентам. Матеріал методичних вказівок дозволяє виробити практичні навички в розв'язуванні та дослідженні диференціальних рівнянь та їх систем, що описують еволюційні процеси в різних областях.

Модульні роботи на протязі навчального семестру (ОМ). Підсумки роботи студентів за досліджуваним розділом підводять виконані та зараховані модульні роботи (теоретичні та практичні) Роботи повинні виконуватися самостійно, тобто бути гарантією того, що даний розділ є засвоєний студентом.

Студент повинний виконувати завдання по варіантах, номер якого збігається з останньою цифрою його номера залікової книжки (шифру).

4. Основні поняття та розв'язання типових завдань практичної роботи

4.1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Символічно диференціальне рівняння другого порядку записується так

$F(x, y, y', y'') = 0,$ (1)

або, якщо воно розв`язано відносно y'',

$y'' = f(x, y, y').$ (2)

Теорема існування і єдиності. *Якщо в рівнянні*

$y'' = f(x, y, y')$

функція $f(x, y, y')$, *і її частинні похідні по* y *і* y' *неперервні в деякій області, що містить значення*

$x = x_0, y = y_0, y' = y_0',$

то існує єдиний розв`язок цього рівняння, що задовольняє початковим умовам

$y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = y_0'.$ (3)

Означення. *Загальним розв`язком диференціального рівняння другого порядку називається функція*

$y = \varphi(x, C_1, C_2),$

яка залежить від довільних сталих C_1 *і* C_2, *що задовольняє дане диференціальне рівняння при будь-яких* C_1, C_2, *і для будь-якої пари значень* x_0, y_0 *значення* C_1 *і* C_2 *визначаються однозначно.*

Розв`язати диференціальне рівняння (1) або (2) - означає знайти його загальний розв`язок. Розв`язати задачу Коші - означає виділити із загального розв`язку частинний розв`язок, що задовольняє заданим початковим умовам.

4.2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ПОНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

У деяких випадках розв`язок диференціального рівняння другого порядку спрощується за рахунок пониження його порядку.

1. Диференціальне рівняння виду

$y'' = f(x).$

Інтегруємо по x обидві частини цієї рівності

$y' = \int f(x)dx + C_1,$

де C_1 - стала інтегрування. Шуканий розв`язок

$y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2$.

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$y'' = \cos 2x.$

Розв`язок: $y' = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1, \quad y = \int \frac{1}{2}\sin 2x dx + C_1x + C_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2.$

2. Диференціальне рівняння не містить явно шукану функцію y

$y'' = f(x, y').$

Введемо нову невідому $p(x) = y'(x),$ тоді $y'' = \frac{dp}{dx}.$ А рівняння звелося до рівняння першого порядку щодо шуканої функції $p = p(x, C_1).$ Загальний розв`язок даного рівняння

$y = \int p(x, C_1)dx + C_2.$

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$

Покладемо $y' = p.$ Тоді $y'' = \frac{dp}{dx}.$ Підставляємо в рівняння і розділяємо змінні

$\frac{dp}{1 + p^2} = -\frac{dx}{1 + x^2}; \quad \Rightarrow arctgp = arctgC_1 - arctgx.$ Звідси (у відповідністю із формулою $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$) , $\quad p = \frac{C_1 - x}{1 + C_1x}$ або $y' = \frac{C_1 - x}{1 + C_1x}.$ Остаточно маємо

$$y = \int \frac{C_1 - x}{1 + C_1x}dx = -\frac{1}{C_1}\int dx + (C_1 + \frac{1}{C_1})\int \frac{dx}{1 + C_1x} = -\frac{x}{C_1} + \frac{C_1 + \frac{1}{C_1}}{C_1}\ln|1 + C_1x| + C_2.$$

3. Диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну x

$y'' = f(y, y').$

Покладемо $y' = p(x);$ тоді $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p.$ Підставляємо у вихідне рівняння $p\frac{dp}{dy} = f(y, p), \quad \Rightarrow \quad p = p(y, C_1)$ або $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$ Розділяємо змінні $\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$

Загальний розв`язок диференціального рівняння знайдемо із співвідношення

$x = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$y'' = 2yy'.$

$y' = p; \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dx}.$ Підставляємо в рівняння $p\frac{dp}{dx} = 2yp$ або $p(\frac{dp}{dx} - 2y) = 0.$

1. $p = y' = 0 \Rightarrow y = C(const).$

2. $\frac{dp}{dy} = 2y; \;\Rightarrow\; dp = 2ydy; \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = p = y^2 + C_1$

а) $C_1 = 0$, тоді $\frac{dy}{y^2} = dx; \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C; \Rightarrow y = -\frac{1}{x + C_2};$

б) C_1>0. Так як стала довільна, покладемо C_1^2, маємо $\frac{dy}{C_1^2 + y^2} = dx \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{C_1} arctg\,\frac{y}{C_1} + C_2.$

в) C_1<0. Якщо $(-C_1^2)$, маємо : $\frac{dy}{y^2 - C_1^2} = dx,$ а розв`язок

$x = \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| + C_2.$

Зауваження. У загальному випадку розв`язок диференціального рівняння може бути отриманий і у неявному виді: $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0.$

4.3 ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Означення. Диференціальне рівняння називається лінійним, якщо воно лінійне щодо шуканої функції і її похідних

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$ (4)

де a_i *(i=1,2,…,n)або неперервні функції, або постійні.*

Означення. Диференціальне рівняння (4) називається неоднорідним, якщо $f(x) \neq 0$, *і однорідним, якщо* $f(x) \equiv 0.$

Розв'яжемо рівняння (4) щодо старшої похідної

$y^{(n)} = f(x) - a_1 y^{(n-1)} - ... - a_{n-1} y' - a_n y.$

Воно задовольняє умовам теореми існування і єдиності.

Зауваження. Надалі ми іноді будемо посилатися на диференціальні рівняння $n-$го порядку, але основні доведення будемо проводити лише для рівнянь не вище другого порядку.

ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ

Обмежимося диференціальними рівняннями другого порядку

$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0.$ (5)

1.Теорема. Якщо y_1 і y_2 *- розв`язки рівняння (5), то і їхня сума* $y_1 + y_2$ *також є розв`язком цього рівняння.*

Доведення. Так як y_1 і y_2 є розв`язками рівняння (5), тоді при підстановці їх у рівність (5) вони обертають його в тотожність

$y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1 \equiv 0$ і $y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2 \equiv 0.$

Підставимо в рівняння (5) замість y суму $y_1 + y_2$ і у відповідність із властивостями похідних перегрупуємо доданки

$$(y_1 + y_2)'' + a_1(x)(y_1 + y_2)' + a_2(x)(y_1 + y_2) = (y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1) + (y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2) \equiv$$
$$\equiv 0 + 0 \equiv 0.$$

2. *Теорема. Якщо* y_0 *є розв`язом рівняння (5), тоді і* $Cy_0$ *також є розв`язком цього рівняння, де* $C = const$.

Дійсно, $y_0'' + a_1(x)y_0' + a_2(x)y_0 \equiv 0.$ Підставляємо Cy_0:

$(Cy_0)'' + a_1(x)(Cy_0)' + a_2(x)(Cy_0) = C(y_0'' + a_1(x)y_0' + a_2(x)y_0) \equiv 0.$

Означення. Два розв`язки $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ *рівняння (5) називаються лінійно незалежними на відрізку* $[a,b]$, *якщо* $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \lambda(const)$; *і лінійно залежними, якщо* $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \lambda.$

Означення. Визначником Вронського або вронскіаном для функцій $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ *називається визначник виду*

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

3. *Теорема. Якщо функції* $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ *лінійно залежні на відрізку* $[a,b]$, *то їхній визначник Вронського на цьому відрізку тотожно дорівнює нулю.*

Доведення. Зі співвідношення $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ слідує, що $y_1 = \lambda y_2.$ Визначник Вронського

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

як визначник із двома пропорційними стовпцями.

4. *Теорема Ліувіля. Якщо визначник Вронського для розв`язків* $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$ *рівняння (1) не дорівнює нулю при якому-небудь значенні* $x_0 \in [a,b]$, *то він не перетворюється на нуль на всьому цьому відрізку.*

Доведення. Підставляючи y_1 та y_2 у рівняння (5), отримаємо рівності

$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0$ і $y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0.$

Множимо перше із цих рівностей на y_2, а друге на y_1 і від другої віднімаємо першу

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0. \qquad (6)$$

З іншої сторони визначник Вронського

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, а $W' = (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$

У результаті рівність (6) запишеться у вигляді

$W' + a_1 W = 0,$

або за умови, що $W \neq 0,$

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx. \Rightarrow \ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx + \ln C, \Rightarrow$$

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \qquad (7)$$

Покладаючи в останній рівності $x = x_0$, отримаємо $\int_{x_0}^{x_0} a_1 dx = 0$, а $C = W(x_0) \neq 0$. І, виходить, $W = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx} \neq 0$ для будь-якого $x \in [a,b]$.

Зауваження. Якщо для якогось значення $x_1 \in [a,b]$ визначник Вронского $W(x_1) = 0$, то він буде дорівнювати нулю на всьому відрізку $[a,b]$.

5. *Теорема. Якщо розв`язки y_1 і y_2 рівняння (5) лінійно незалежні на відрізку $[a,b]$, то визначник Вронського $W(y_1, y_2)$ не перетворюється на нуль ні при якому $x \in [a,b]$.*

Доведення. Припустимо, що в деякій точці відрізка $[a,b]$ $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$. За теоремою Лиувіля він буде дорівнювати нулю на всьому цьому відрізку. Припускаючи, що y_1 не дорівнює нулю на відрізку $[a,b]$, розділимо визначник Вронського на y_1^2. Отримаємо

$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = 0$, із чого слідує, що $\Rightarrow$ $(\frac{y_2}{y_1})' = 0$, а $\frac{y_2}{y_1} = \lambda = const.$

Але це означає лінійну залежність функцій y_1 і y_2, що суперечить умові теореми про їхню незалежність. Виходить, визначник Вронського не повинен перетворюватись на нуль.

Теорема про загальний розв`язок лінійного однорідного диференціального рівняння (ЛОДУ).Якщо $y_1$ і $y_2$ - лінійно незалежні розв`язки рівняння (5), то загальний розв`язок цього рівняння запишеться у вигляді

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \qquad (8)$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Те, що рівність (8) є розв`язком рівняння (5), слідує із властивостей 1 і 2 ЛОДУ.

Покажемо, що для будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ сталі C_1 і C_2 визначаються однозначно, щоб відповідний частинний розв`язок $y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0)$ задовольняв заданим початковим умовам.

Підставимо початкові умови у функцію (8) і її похідну

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

Отримали систему двох рівнянь із двома невідомими C_1 і C_2, визначник якої відмінний від нуля, тому що є визначником Вронського

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x\ ) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

для лінійно незалежних функцій y_1 і y_2. За правилом Крамера система має єдиний розв`язок. Теорема доведена.

Означення. Система n лінійно незалежних розв`язків лінійного однорідного диференціального рівняння $n-$го порядку (ЛОДУ-n) називається її фундаментальною системою.

Загальний розв`язок ЛОДУ-$n$ є лінійна комбінація з довільними постійними коефіцієнтами його розв`язків, що становлять фундаментальну систему.

Теорема. Якщо відомо один розв`язок $y_1$ ЛОДУ-2 (5) $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то другий розв`язок можна знайти зі співвідношення

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx.$$

Доведення. Скористаємося рівністю для визначника Вронського з теореми Ліувіля $W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-\int a_1 dx}$, де y_1 відома функція. Розділимо цю рівність на y_1^2. Отримаємо $\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = (\frac{y_2}{y_1})' = \frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a_1 dx}$, звідки $\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{Ce^{-\int a_1 dx}}{y_1^2}dx + C_1$, а $y_2 = y_1(\int \frac{Ce^{-\int a_1 dx}}{y_1^2}dx + C_1)$. З огляду на те, що ми шукаємо частинний розв`язок, візьмемо С=1, а $C_1 = 0$.

Тоді шуканий розв`язок $y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2}dx$, а загальний розв`язок рівняння (5)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2}dx.$$

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0.$$

Методом підбору знаходимо $y_1 = x$. $y_1' = 1, y_1'' = 0$. Підставляємо в рівняння: $0 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} = 0$.

$$y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2}dx = x\int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}dx}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{-\ln x}}{x^2}dx = x\int \frac{\frac{1}{x}}{x^2}dx = x\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{2}{x}.$$

Шуканий розв`язок

$$y = C_1 x + C_2(-\frac{2}{x}).$$

4.4 ІІ ЛОДУ - 2 ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

де коефіцієнти p і q - постійні дійсні числа.

Розв`язки рівняння (1) шукаємо у вигляді $y = e^{kx}$. $y' = ke^{rx}, y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи в рівняння, отримаємо

$e^{kx}(k^2+pk+q)=0.$

Тому що $e^x \neq 0,$ маємо $k^2+pk+q=0.$ (2)

Назвемо цей вираз характеристичним рівнянням. Воно являє собою квадратне рівняння відносно k. Корені квадратного рівняння $k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$ Розглянемо три випадки:

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$.

У цьому випадку розв\`язки $y_1=e^{k_1}, y_2=e^{k_2}$ лінійно незалежні, тому що відношення $\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}}=e^{(k_1-k_2)x}\neq const.$ І загальний розв\`язок рівняння запишеться у вигляді

$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$

Приклад. Знайти загальний розв\`язок диференціального рівняння $y''-9y'+14y=0.$

Характеристичне рівняння: $k^2-9k+14=0,\ \ k_1=2, k_2=7.$

Відповідь: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{7x}.$

2. *Корені характеристичного рівняння* $k^2+pk+q=0$ *дійсніій рівні:* $k_1=k_2.$

За теоремою Вієта $k_1+k_2=-p.$ Але $k_1=k_2.$ Тому $2k_1+p=0$ і $k_1=-\frac{p}{2}.$ Один частинний розв\`язок $y_1=e^{-\frac{p}{2}x}.$ Другий, лінійно незалежний із цим, отримаємо із співвідношення $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2(x)}dx$. Маємо

$$y_2=e^{-\frac{p}{2}x}\int\frac{e^{-\int pdx}}{\left(e^{-\frac{p}{2}x}\right)^2}dx=e^{-\frac{p}{2}x}\int\frac{e^{-px}}{e^{-px}}dx=xe^{-\frac{p}{2}x},$$

а загальний розв\`язок рівняння

$y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k\ x}.$

Приклад. Знайти загальний розв\`язок диференціального рівняння $y''-8y'+16y=0.$

Характеристичне рівняння: $k^2-8k+16=0,\ \ k_1=k_2=4.$

Відповідь: $y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}.$

3. *Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені:* $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$.

У цьому випадку можна покласти $y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}, y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}.$

Справедлива

Теорема. Якщо розв\`язком диференціального рівняння (2) є комплексна функція дійсного аргументу* $y=u(x)+iv(x),$*, то розв\`язками рівняння (1) будуть його дійсна $u(x)$ *та уявна* $v(x)$ *частини.*

Підставляємо $y=u(x)+iv(x)$ в рівняння (2)

$(u+iv)'' + p(u+iv)' + q(u+iv) = 0$

або, у силу властивостей похідних,

$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + q) = 0.$

Відомо, що комплексне число дорівнює нулю, якщо дорівнюють нулю його дійсна та уявна частини. Тому маємо

$u''(x) + pu'(x) + qu(x) = 0$ і $v''(x) + pv'(x) + qv(x) = 0.$

Теорема доведена.

У відповідність із формулами Ейлера, записані вище розв`язки рівняння (1) подамо у вигляді

$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ і $y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$

В силу доведеної теореми розв`язками рівняння (1) зручніше взяти їх дійсну й уявну частини $u(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ й $v(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$ Вони лінійно незалежні

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = ctgx \neq const.$$

Загальний розв`язок набуде вигляду

$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$y'' - 4y' + 20y = 0.$

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 20 = 0,\quad k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-20} = 2 \pm 4i.$

Відповідь: $y = e^{2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x).$

4.5 ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ (ЛНДУ-2)

ЛНДУ - 2 має вигляд

$y'' + a_1y' + a_2y = f(x).$ (3)

Теорема. (Структура загального розв`язку рівняння (3)). Загальний розв`язок рівняння (3) являє собою суму загального розв`язку $y_{\text{одн}}$ відповідного йому однорідного рівняння

$y'' + a_1y' + a_2y = 0$ (4)

і деякого частинного розв`язку $y_{\text{ч}}$ неоднорідного рівняння (3)

$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}}.$ (5)

Спочатку доведемо, що функція $y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}}$ взагалі є розв`язком рівняння (3). Дійсно, те, що $y_{\text{одн}}$ є розв`язком рівняння (4), а $y_{\text{ч}}$ - розв`язком рівняння (5), означає $y''_{\text{одн}} + a_1y'_{\text{одн}} + a_2y_{\text{одн}} \equiv 0$ і $y''_{\text{ч}} + a_1y'_{\text{ч}} + a_2y_{\text{ч}} = f(x).$ Підставляємо в рівняння (3) $y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}}$

$(y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}})'' + a_1(y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}})' + a_2(y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}})' = (y''_{\text{одн}} + a_1y'_{\text{одн}} + a_2y_{\text{одн}}) + (y''_{\text{ч}} + a_1y'_{\text{ч}} + a_2y_{\text{ч}}) =$

$= 0 + f(x) = f(x).$

Тепер доведемо, що рівність (5) є загальним розв`язком рівняння (3). Нагадаємо, що $y_{\text{одн}} = C_1y_1 + C_2y_2$. Потрібно довести, що для будь-яких початкових умов

$y\Big|_{x=x_0}=y_0, y_1\Big|_{x=x_0}=y_{10}, y_2\Big|_{x=x_0}=y_{20}, y_ч\Big|_{x=x_0}=y_{ч0}, y'\Big|_{x=x_0}=y_0', y_1'\Big|_{x=x_0}=y_{10}', y'_2\Big|_{x=x_0}=y'_{20}, y_ч'\Big|_{x=x_0}=y_{ч0}'$

постійні C_1 і C_2 знаходяться однозначно. Маємо $C_1y_{10}+C_2y_{20}+y_{ч0}=y_0$, $C_1y_{10}'+C_2y_{20}'+y_{ч0}'=y_0'$. Отримали систему

$$\begin{cases} C_1y_{10}+C_2y_{20}=y_0-y_{ч0} \\ C_1y_{10}'+C_2y_{20}'=y_0'-y_{ч0}' \end{cases}$$

двох рівнянь із двома невідомими C_1 і C_2, визначником якої є визначник Вронського для лінійно незалежних функцій. Визначник системи відмінний від нуля, а система має єдиний розв`язок.

4.6 МЕТОД ВАРІАЦІЇ ДОВІЛЬНОЇ СТАЛОЇ

Нехай $y=C_1y_1+C_2y_2$

- загальний розв`язок рівняння (4). Розв`язок неоднорідного рівняння (5) будемо шукати в такому ж самому вигляді, тільки будемо вважати $C_1=C_1(x)$ і $C_2=C_2(x)$ деякими функціями від x.

Похідна

$y'=C_1(x)y_1'+C_2(x)y_2'+C_1'(x)y_1+C_2'y_2.$

Підберемо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ таким чином, щоб виконувалася рівність

$$C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0. \qquad (6)$$

Тоді

$y'=C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2$, а $y''=C_1(x)y_1''+C_2(x)y_2''+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'.$

Підставляємо в рівняння (4)

$$C_1(x)y_1''+C_2(x)y_2''+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+a_1\left[C_1(x)y_1'+C_2y_2'\right]+a_2\left[C_1(x)y_1+C_2(x)y_2\right]=f(x)$$

або

$$C_1(x)(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+C_2(x)(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x).$$

Так як y_1 і y_2 - розв`язки однорідного рівняння (5), то

$y_1''+a_1y_1'+a_2y_2'=0$ і $y_2''+a_1y_2'+a_2y_2=0.$

Отримали рівність

$C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x),$

яка разом з рівністю (6) утворюють систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x) \end{cases}$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського для лінійно незалежних функцій y_1 і y_2. Система має єдиний розв`язок

$C_1'(x)=\varphi_1(x), C_2'(x)=\varphi_2(x),$

звідки

$C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+\overline{C_1},\ C_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+\overline{C_2},$

де $\overline{C_1}=const, \overline{C_2}=const.$

Будемо вважати, що $C_1=C_2=0$, бо нам досить знайти частинний розв`язок рівняння (4).

Загальний розв`язок рівняння (4)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx.$$

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$y'' - \frac{2}{x} y' = x^2.$$

Знайдемо загальний розв`язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' - \frac{2}{x} y' = 0.$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{2}{x}; \Rightarrow \ln y' = 2\ln|x| + \ln C; \Rightarrow y' = Cx^2; \Rightarrow y = C_1 x^3 + C_2.$$

Частинний розв`язок неоднорідного рівняння шукаємо із системи

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot x^3 + C_2'(x) \cdot 1 = 0 \\ 3C_1'(x) \cdot x^2 + C_2'(x) \cdot 0 = x^2 \end{cases}$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{3}; C_2'(x) = -\frac{1}{3}x^3; \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{3}x; C_2(x) = -\frac{x^4}{12}.$$

Шуканий розв`язок

$$y = C_1 x^3 + C_2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^4}{12} = C\ x^3 + C_2 + \frac{1}{4}x^4.$$

4.7 ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай задане диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (1)$$

права частина якого має спеціальний вигляд, що дозволяє знайти його частинний розв`язок за допомогою невизначених коефіцієнтів

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}, \qquad (2)$$

де $P_n(x)$ - многочлен n- го порядку.

Візьмемо функцію $y = Q(x)e^{\lambda x}$, де $Q(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n$ - многочлен n-го порядку з невизначеними коефіцієнтами, і підставимо в рівняння (1). Після очевидних перетворень отримаємо

$$Q_n''(x) + (2\lambda + p)Q_n'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q_n(x) = P_n(x) \qquad (3)$$

Відзначимо, що, якщо $Q_n(x)$ - многочлен n-го порядку, то $Q_n'(x) - (n-1)$-го, а $Q_n''(x) - (n-2)$-го порядку.

1. Нехай λ - дійсне число, що не є коренем характеристичного рівняння. Тоді ліва і права частини рівності (3) є многочлени n-го порядку. Частинний розв`язок неоднорідного рівняння потрібно шукати у вигляді

$$y_ч = Q_n(x)e^{\lambda x}. \qquad (4)$$

2. Нехай λ - дійсний однократний корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку в правій частині рівності (3) залишиться многочлен n-го порядку, а в лівій – n-1-го, тому що $\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$ Частинний розв`язок

$$y_ч = xQ_n(x)e^{\lambda x}. \qquad (5)$$

3. λ - дійсний дворазовий корінь характеристичного рівняння. У рівності (3) не тільки $\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$ але і у силу теореми Вієта $2\lambda + p = 0.$ Частинний розв`язок

$$y_ч = x^2 Q_n(x) e^{\lambda x}. \qquad (6)$$

4. Запишемо праву частину рівняння (1) так

$$f(x) = P_n(x)e^{\lambda_1 x} + Q_n(x)e^{\lambda_2 x}, \qquad (7)$$

де $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексні числа, що не є коренями характеристичного рівняння. Повторюючи міркування, проведені для однорідних рівнянь у випадку комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння, отримаємо

$$y_ч = U_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (8)$$

Можна також показати, що якщо $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta x$ є однократними коренями характеристичного рівняння, то

$$y_ч = x\left[U_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.\right] \qquad (9)$$

Нехай тепер

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (10)$$

Покажемо, що рівність (10) можна записати у вигляді (7). Дійсно, застосовуючи формули Ейлера, запишемо

$$f(x) = P_{n_1}(x)e^{\alpha x}\,\frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} + Q_{n_2}(x)e^{\alpha x}\,\frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) + \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha+\beta i)x} + \left[\frac{1}{2}P_{n_1}(x) - \frac{1}{2i}Q_{n_2}(x)\right]e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Тут у кожній із квадратних дужок многочлен степеня $n = \max(n_1, n_2).$

Зауваження. Якщо $f(x) = f_1(x) + f_2(x),$ то $y_ч = y_{ч_1} + y_{ч_2}.$

Приклад. Знайти загальний розв`язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = x + 2 + 9xe^{2x} + e^x\cos x. \qquad (11)$$

Це неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Відповідне йому однорідне рівняння

$$y'' - y' = 0. \qquad (12)$$

Характеристичне рівняння $k^2 - k = 0; \quad k_1 = 0, k_2 = 1.$

Загальний розв`язок рівняння (12) $y_{одн} = C_1 + C_2 e^x.$

Подамо праву частину рівняння (11) у вигляді $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$ де $f_1(x) = x + 2;\ f_2(x) = 9xe^{2x};\ f_3(x) = e^x\cos x.$

Шукаємо частинний розв`язок неоднорідного рівняння (11). $f_1(x) = x + 2$ можна записати в такому вигляді $f_1(x) = (x+2)e^{0x}.$ А так як серед коренів характеристичного рівняння є $k = 0,$ то розв`язок $y_{ч_1}$ шукаємо у вигляді $y_{ч_1} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx.$ Знаходимо $y'_{ч_1} = 2Ax + B, y''_{ч_1} = 2A$ і підставляємо в рівняння

$$2A - 2Ax - B = x + 2.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях x ліворуч і праворуч

$$\left.\begin{array}{l|l} x & 2A=1 \\ x^0 & 2A-B=2 \end{array}\right\} \qquad A=\frac{1}{2}, B=-1. \qquad y_{ч_1}=\frac{1}{2}x^2-x.$$

Частинний розв`язок

$$y_{ч_2}=(Ax+B)e^{2x}, \Rightarrow y'_{ч_2}=\left[2Ax+(A+2B)\right]e^{2x}, y''_{ч_2}=\left[4Ax+(4A+4B)\right]e^{2x}.$$

Підставляємо в рівняння (11)

$$\left[4Ax+(4A+4B)\right]e^{2x}-\left[2Ax+(A+2B)\right]e^{2x}=9xe^{2x} \quad \text{або} \quad 2Ax+(3A+2B)=9x.$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x & 2A=9 \\ x^0 & 3A+2B=0 \end{array}\right\} \qquad A=4{,}5: B=-6{,}75. \qquad y_{ч_2}=(4{,}5x-6{,}75)e^{2x}.$$

Частинний розв`язок

$$y_{ч_3}=e^x(A\cos x+B\sin x) \Rightarrow y'_{ч_3}=e^x\left[(A+B)\cos x+(B-A)\sin x\right], y''_{ч_3}=\left[2B\cos x-2A\sin x\right]e^x.$$

Підставляємо в рівняння (11)

$$\left[2B\cos x-2A\sin x-(A+B)\cos x-(B-A)\sin x\right]e^x=e^x\cos x; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B-A)\cos x+(-A-B)\sin x=\cos x.$$

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos x & B-A=1 \\ \sin x & -A-B=0 \end{array}\right\} \qquad A=-\frac{1}{2}; B=\frac{1}{2}. \qquad y_{ч_3}=(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x)e^x.$$

Загальний розв`язок рівняння (11)

$$y=y_{одн}+y_ч=C_1+C_2e^x+\frac{1}{2}x^2-x+(4{,}5x-6{,}75)e^{2x}+(-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x)e^x.$$

4.8 СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=f_1(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt}=f_2(t,x,y) \end{cases}$$

де t - незалежна змінна, x і y - шукані функції.

Система, у лівій частині якої знаходяться похідні шуканих функцій першого порядку, а праві не містять похідних, називається нормальною.

Розв`язувати систему будемо зведенням її до рівняння другого порядку щодо однієї з невідомих функцій.

Диференціюємо по t перше рівняння системи

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Заміюючи $\dfrac{dx}{dt}$ і $\dfrac{dy}{dt}$ на $f_1(t,x,y)$ і $f_2(t,x,y),$ отримаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F(t,x,y).$$

Припускаючи, що y можна виразити через t,x і $\dfrac{dx}{dt}$ із системи $(y=\psi(t,x,\dfrac{dx}{dt})),$ отримаємо диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2}=F(t,x,\frac{dx}{dt}).$$

Розв`язуючи це рівняння, знаходимо $x=\varphi(t,C_1,C_2)$. Невідому функцію y знайдемо із співвідношення $y=\psi(t,x,\frac{dx}{dt})=\psi(t,C_1,C_2)$.

Зауваження. Система n диференціальних рівнянь із n невідомими функціями зводиться до диференціального рівняння $n-$го порядку.

Приклад. Знайти загальний розв`язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+4y \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+3y \end{cases}$$

Диференціюємо перше рівняння: $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}$. Робимо заміну у відповідності із другим рівнянням системи: $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+4(2x+3y)$. Виражаємо $y=\frac{1}{4}(\frac{dx}{dt}-x)$ з першого рівняння системи і підставляємо в останню рівність

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+8x+3\frac{dx}{dt}-3x \text{ або } \frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-5x=0.$$

Це однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичне рівняння

$k^2-4k-5=0;\ k_1=-1, k_2=5.$

Розв`язок системи

$$\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{5t} \\ y=\dfrac{1}{4}(\dfrac{dx}{dt}-x)=\dfrac{1}{4}(-C_1e^{-t}+5C_2e^{5t}-C_1e^{-t}-C_2e^{5t})=C_2e^{5t}-\dfrac{1}{2}C_1e^{-t}. \end{cases}$$

4.9 СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай задана система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y \end{cases} \qquad (1)$$

Її розв`язок шукаємо у вигляді $x=\alpha_1e^{\lambda t}, y=\alpha_2e^{\lambda t}$. Тоді $\frac{dx}{dt}=\lambda\alpha_1e^{\lambda t}, \frac{dy}{dt}=\lambda\alpha_2e^{\lambda t}$.

Підставляємо в систему (1)

$$\begin{cases} \lambda\alpha_1e^{\lambda t}=(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2)e^{\lambda t} \\ \lambda\alpha_2e^{\lambda t}=(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2)e^{\lambda t} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0 \\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2=0 \end{cases} \qquad (2)$$

Це однорідна система двох рівнянь із двома невідомими α_1 і α_2. Вона має ненульові розв`язки тільки в тому випадку, якщо її визначник дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Назвемо його характеристичним рівнянням, і знайдемо з нього значення λ.

Підставляючи характеристичні числа λ в систему (2), знайдемо α_1 і α_2, а, отже, і розв`язок системи.

Приклад. Знайти загальний розв`язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 9y \end{cases}$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0.$$

Його корінь $\lambda_1 = 3$ і $\lambda_2 = 7$.

Розв`язок системи шукаємо у вигляді

$x^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{3t}$, $y^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{3t}$ і $x^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{7t}, y^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{7t}$.

Складаємо систему для кореня $\lambda_1 = 3$ і визначаємо $\alpha_1^{(1)}$ й $\alpha_2^{(1)}$

$$\begin{cases} (1-3)\alpha_1^{(1)} + 6\alpha_2^{(1)} = 0 \\ -2\alpha_1^{(1)} + (9-3)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} -2\alpha_1^{(1)} + 6\alpha_2^{(1)} = 0 \\ -2\alpha_1^{(1)} + 6\alpha_2^{(1)} = 0, \end{cases}$$

звідки $\alpha_2^{(1)} = \frac{1}{3}\alpha_1^{(10}$. Припускаючи, що $\alpha_1^{(1)} = 1$, одержимо $\alpha_2^{(1)} = \frac{1}{3.}$ Таким чином, ми одержали розв`язок системи

$x^{(1)} = e^{3t}, y^{(1)} = \frac{1}{3}e^{3t}$.

Складемо систему для $\lambda_2 = 7$ і визначимо $\alpha_1^{(2)}$ й $\alpha_2^{(2)}$:

$$\begin{cases} -6\alpha_1^{(2)} + 6\alpha_2^{(2)} = 0 \\ -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0, \end{cases}$$

звідки $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$ й $\alpha_1^{(2)} = 1, \alpha_2^{(2)} = 1$. Отримали другий розв`язок системи:

$x^{(2)} = e^{7t}, y = e^{7t}$.

Загальний розв`язок системи

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{7t} \\ y = \frac{1}{3}C_1 e^{3t} + C_2 e^{7t} \end{cases}$$

Приклад. Знайти загальний розв`язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases} \qquad (3)$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0. \text{ Його корінь } \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i.$$

Розглянемо систему для кореня $\lambda_1 = 1 + 3i$

$$\begin{cases} (1-1-3i)\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + (1-1-3i)\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \alpha_2 = -\alpha_1 i.$$

Нехай $\alpha_1 = 1,$ тоді $\alpha_2 = -i.$

Для кореня $\lambda_2 = 1 - 3i$ маємо систему

$$\begin{cases} (1-1+3i)\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + (1-1+3i)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_2 = \alpha_1 i,$ а при $\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = i.$

Розв`язок системи - це комплексно спряжені функції

$$x = e^{(1+3i)t} = e^t(\cos 3t + i \sin 3t), \quad \overline{x} = e^{(1-3i)t} = e^t(\cos 3t - i \sin 3t);$$

$$y = -ie^t(\cos 3t + i \sin 3t) = e^t(\sin 3t - i \cos 3t), \quad \overline{y} = ie^t(\cos 3t - i \sin 3t) = e^t(\sin 3t + i \cos 3t).$$

Системі (3) будуть задовольняти й дійсні функції, отримані з даних за допомогою формул Ейлера

$$x_1 = \frac{x + \overline{x}}{2} = e^t \cos 3t, \quad x_2 = \frac{x - \overline{x}}{2i} = e^t \sin 3t; \quad y_1 = \frac{y + \overline{y}}{2i} = e^t \sin 3t, \quad y_2 = \frac{y - \overline{y}}{2i} = -e^t \cos 3t.$$

Загальний розв`язок системи

$$\begin{cases} x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t) \\ y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t) \end{cases}$$

Приклад. Знайти загальний розв`язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \; \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Розв`язок системи варто шукати у вигляді

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, y = (C_3 + C_4 t)e^{3t}.$$

Знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = (3C_1 + 3C_2 t + C_2)e^{3t}, \frac{dy}{dt} = (3C_3 + 3C_4 t + C_4)e^{3t}.$$

Підставляючи ці значення в систему, отримаємо

$$\begin{cases} 3C_1 + 3C_2 t + C_2 = 2C_1 + 2C_2 t - C_3 - C_4 t \\ 3C_3 + 3C_4 t + C_4 = C_1 + C_2 t + 4C_3 + 4C_4 t \end{cases} \text{або} \begin{cases} C_1 + C_2 + C_2 t = -C_3 - C_4 t \\ C_1 + C_2 t = -C_3 + C_4 - C_4 t \end{cases}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t в обох рівностях, отримаємо $C_3 = -(C_1 + C_2), C_4 = -C_2,$ а загальний розв`язок системи

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} \\ y = -(C_1 + C_2)e^{3t} - C_2 t e^{3t}. \end{cases}$$

Для порівняння приведемо ще один розв`язок системи.

Диференціальне рівняння, що відповідає нашій системі для функції x має вигляд $\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+9x=0$. Воно має те ж характеристичне рівняння, що і система.

Кореню $\lambda=3$ буде відповідати два лінійно незалежних розв`язка: $x_1=e^{3t}$ і $x_2=te^{3t}$.

Загальний розв`язок системи

$$\begin{cases} x=C_1e^{3t}+C_2te^{3t} \\ y=2x-\frac{dx}{dt}=2C_1e^{3t}+2C_2te^{3t}-(3C_1e^{3t}+C_2e^{3t}+3C_2te^{3t})=-(C_1+C_2)e^{3t}-C_2te^{3t} \end{cases}$$

5. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНОЇ РОБОТИ

Варіант №1

a) y''' x ln x = y''

b) $4y^3$ y'' = y^4 – 1, y(0) = $\sqrt{2}$, y'(0) = 1/(2$\sqrt{2}$)

c) y''' + 3y'' + 2 y' = 1 - x^2

d) y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 – 12x) e^{-x}

e) y'' + 2y' = 4e^x(sin x + cos x)

f) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=5x+4y \\ \frac{dy}{dt}=4x+5y \end{cases}$

Варіант №2

a) *xy''' + y'' = 1*

b) *y'' = 128y^3, y(0) = 1, y'(0) = 8*

c) *y''' - y'' = 6x^2 + 3x*

d) *y''' - 3y'' + 2y' = (1 – 2x) e^x*

e) *y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} sin 6x*

f) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x-y \\ \frac{dy}{dt}=-4x+y \end{cases}$

Варіант №3

a) *2xy''' = y''*

b) *y''y^3 + 64 = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2*

c) *y''' - y' = x^2 + x*

d) *y''' - y'' - y' + y = (16 – 12x) e^{2x}*

e) *y'' + 2y' = -2e^x(sin x + cos x)*

f) $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x+y \\ \frac{dy}{dt}=3x+4y \end{cases}$

Варіант №4

a) $xy'' + y'' = x + 1$

b) $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$

c) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$

d) $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)\, e^{2x}$

e) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

Варіант №5

a) $tg\, x \cdot y''' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$

b) $y'' = 32\sin^3 y \cos y,\quad y(1) = \pi/2,\quad y'(1) = 4$

c) $y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2$

d) $y''' - 3y'' + 4y' = (18x - 21)\, e^{-x}$

e) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$

Варіант №6

a) $x^2 y'' + xy' = 1$

b) $y'' = 98y^3,\quad y(1) = 1,\quad y'(1) = 7$

c) $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x)$

d) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)\, e^{x}$

e) $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x)$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$

Варіант №7

a) $y'''\, ctg\, 2x + 2y'' = 0$

b) $y'' y^3 + 49 = 0,\quad y(3) = -7,\quad y'(3) = -1$

c) $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$

d) $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)\, e^{x}$

e) $y'' + 2y' = e^{x}(\sin x + \cos x)$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$

Варіант №8

a) $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$

b) $4y^3 y'' = 16y^4 - 1,\quad y(0) = \sqrt{2}/2,\quad y'(0) = 1/\sqrt{2}$

c) $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3$
d) $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)\, e^{2x}$

e) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

Варіант №9
a) $tg\, x \cdot y''' = 2y''$
b) $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
c) $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$
d) $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)\, e^{x}$

e) $y'' + 6y' + 13y = 4e^{-3x} \cos 4x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$

Варіант №10
a) $y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''$
b) $y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6$
c) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$
d) $y''' - 3y'' - 2y = -4x\, e^{x}$

e) $y'' + y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$

Варіант №11
a) $x^4 y'' + x^3 y' = 1$
b) $y'' y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$
c) $y''' + y'' = 5x^2 - 1$
d) $y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)\, e^{2x}$

e) $y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y \end{cases}.$

Варіант №12
a) $xy''' + 2y'' = 0$
b) $y'' = 18 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 3$
c) $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$
d) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)\, e^{x}$

e) $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(-3 \sin x + 4 \cos x)$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 6y \end{cases}.$

Варіант №13

a) $(1 + x^2)\, y'' + 2x\, y' = x^3$

b) $4y^3\, y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = \sqrt{2}/2, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}$

c) $7y''' - y'' = 12x$

d) $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)\, e^{-x}$

e) $y'' + 2y' = 10e^{x}(\sin x + \cos x)$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}.$

Варіант №14

a) $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$

b) $y'' = 50y^3, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5$

c) $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$

d) $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)\, e^{x}$

e) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -10y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = y + x \end{cases}$

Варіант №15

a) $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$

b) $y''y^3 + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1$

c) $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$

d) $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)\, e^{x}$

e) $y'' + y' = 2\cos 5x + 3\sin 5x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}.$

Варіант №16

a) $xy''' + y'' + x = 0$

b) $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$

c) $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$

d) $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^{x}$

e) $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y \end{cases}.$

Варіант №17

a) $thx \cdot y^{IV} = y'''$

b) $y'' = 8\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 2$

c) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$

d) $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^{x}$

e) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y \end{cases}$.

Варіант №18

a) $xy''' + y'' = \sqrt{x}$

b) $y'' = 32y^3, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 4$

c) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$

d) $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$

e) $y'' - 4y' + 8y = e^x (3\sin x + 5\cos x)$

f) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 4y - x \\ \dfrac{dx}{dt} = y + 2x \end{cases}$.

Варіант №19

a) $y''' tgx = y'' + 1$

b) $y'' y^3 + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2$

c) $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$

d) $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$

e) $y'' + 2y' = 6e^x (\sin x + \cos x)$

f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}$

Варіант №20

a) $y''' tg5x = 5y''$

b) $y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$

c) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$

d) $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x$

e) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$

f) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2y - 3x \\ \dfrac{dx}{dt} = 3y + 2x \end{cases}$