МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

для студентів III курсу

Напрям підготовки: гідрометеорологія

Одеса 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
до СРС і практичних робіт
з дисципліни

Вища математика
«Диференційне та інтегральне числення»
для студентів III курсу, які навчаються за інтегрованим планом
Напрям підготовки - гідрометеорологія

"Затверджено"
на засіданні науково-
методичної ради ОДЕКУ

Одеса-2009

Методичні вказівки до самостійної роботи і практичних робіт з дисципліни “Вища математика“ для студентів ІІІ курсу, які навчаються за інтегрованим планом

Укладач: Дубровська Юлія Володимирівна, к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої та прикладної математики

Передмова

Поданий розділ відноситься до одного з основних у дисципліні «Вища математика», він спрямован на вивчення основних положень диференціального та інтегрального числення, в тому числі кратних та криволінійних інтегралів , теорії поля, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення розділу – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу поданого розділу, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, гідрометеорології, екології та охороні навколишнього середовища, тощо, навиків творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та умінь при вивченні розділу визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання розділу “Диференційне та інтегральне числення” - навчити студентів:

-правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач;

-правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Вивчення розділу “Диференційне та інтегральне числення” базується на використанні теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах.

Обсяги вивчення окремих розділів і тем визначаються робочими програмами, розробленими на основі даної програми з урахуванням професійного спрямування потоків і окремих груп. Після вивчення студенти складають іспит.

Мета методичних вказівок. Після вивчення розділу “Диференційне та інтегральне числення” студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати– основні визначення, положення та теореми диференціального і інтегрального обчислення функцій однієї та багатьох змінних, теорії диференційних рівнянь, кратних і криволінійних інтегралів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, теорії рядів; вміти – використовувати теоретичні знання та навички при розв’язанні задач математичного аналізу, обчисленні похідних та інтегралів, рішенні звичайних та у частинних похідних диференційних рівнянь, застосовувати низку практичних навичок при реалізації методів вищої математики до рішення прикладних математичних задач.

ПРОГРАМА РОЗДІЛУ «ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

1. Основний курс.

1. Диференційні рівняння.

Основні поняття (порядок ДР, розв'язок ДР,загальний і частинний розв'язок ДР, загальний інтеграл ДР). Задача Коші, Геометричний зміст початкових умов у випадку ДР 1-го, 2-го порядків. Теорема існування та єдиності розв'язку ДР. Найпростіші ДР. Лінійні однорідні ДР. Фундаментальна система розв'язків ДР. Лінійні неоднорідні ДР.Метод варіації довільних сталих. Лінійні ДР із сталими коефіцієнтами і спеціальним виглядом правої частини. Системи лінійних ДР.

2. Числові ряди. Функціональні ряди. Ряди Фур'є.

Числові ряди. Збіжність і суми рядів. Необхідна умова збіжності. Дії з рядами. Методи дослідження збіжності рядів. Розкладання функцій у статечні ряди. Застосування степених рядів у наближених обчисленнях. Ряди Фур'є по тригонометричним системах. Розкладання функцій у тригонометричні ряди Фур'є. Застосування тригонометричних рядів Фур'є.

3. Кратні інтеграли. Кріволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля.

Подвійні та потрійні інтеграли та їхні основні властивості. Обчислення подвійних та потрійних інтегралів у декартовій системі координат. Заміна змінних у кратних інтегралах. Перехід від декартових координат координат до полярних, циліндричних та сферичних. Визначення криволінійних інтегралів першого та другого роду, їхні основні властивості й методи обчислення. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду. Формула Гріна. Площа поверхні. Визначення поверхневих інтегралів. Їх властивості та обчислення. Скалярне поле. Похідна по напрямку. Градієнт скалярного поля. Векторне поле. Потік векторного поля через поверхню. Теорема Остроградського. Циркуляція векторного поля. Теорема Стокса. Ротор поля. Потенційне поле. Умови потенційного поля.

4. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення.

Похідна функції комплексної змінної. Умови Коши –Рімана. Геометричний зміст похідної. Конформні відображення. Інтеграл від аналітичної функції, його властивості, основна теорема Коші. Ряд Тейлора, коло збіжності. Ряд Лорана. Ізольовані особливі точки аналітичної функції. Теорема Коші про відрахування. Застосування до обчислення інтегралів.

Перетворення Лапласа та його основні властивості. Зображення простіших оригіналів. Таблиці зображень. Обернене перетворення образу Лапласа. Розкладання прообразу в суму. Метод розв'язання лінійних диференційних рівнянь з постійними коефіцієнтами і їх систем. Інші додатки операційного числення.

2. Загальні рекомендації студенту по вивченню розділу

Основною формою навчання студента є робота над навчальним матеріалом, що складається з наступних елементів: вивчення матеріалу по підручниках, рішення задач, самоперевірка, виконання контрольних робіт. У допомогу студентам університет організує читання лекцій, практичні та модульні контрольні роботи. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації. Вказівки студенту по поточній роботі даються так само в процесі рецензування модульних робіт. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і завзятій роботі допомога університету виявиться досить ефективною. Останнім етапом завершення вивчення окремих частин курсу вищої математики є виконання модульних контрольних робіт та підсумкова контрольна робота, відповідно до навчального плану.

Модульна контрольна робота. Попередні підсумки роботи студентів за вивченим курсом підводить модульна контрольна робота. Робота повинна виконуватися самостійно і служити деякою мірою і гарантією того, що даний розділ є засвоєний студентом.

2. Питання до самоперевірки

Тема1. Диференціальні рівняння.

Література:

[3] Гл.XV, §1-7, [2] Гл.XIII, §1-12, §16-25

-Означення диференціального рівняння.

-Що означає вирішити задачу Коші.

-Яким чином розв'зуються лінійні неоднорідні ДР першого порядку.

-Загальний вигляд ДР вищих порядків, які допускають зниження порядку, засоби розв'язання.

Тема 2. Числові ряди. Функціональні ряди. Ряди Фур'є
Література:
[3] Гл.XVIII, §1-4, [2] Гл.XVI, §1-9, §13-28, Гл.XVII, §1-9,[4] Гл.XI, §1-4.
-Який ряд називається збіжним, необхідна умова збіжності ряду.
-Ознаки Даламбера, Коші (радікальна , інтегральна).
-Ознака Лейбніца (абсолютна, умовна) збіжність ряда.
-Ряди Тейлора та Макларена.
-Ряд Фур'є та його коефіцієнти.

Тема 3. Кратні інтеграли. Кріволінійні та поверхневі інтеграли. Теорія поля.
Література:
[3] Гл.XVI, §1-5, Гл.XVII, §, [2] Гл. XIV, §1-12, Гл.XV, §1-9
-Визначення подвійного та потрійного інтеграла та їх основні властивості.
-Сформулюйте метод заміни змінних у кратних інтегралах.
-Дайте означення криволінійних інтегралів першого та другого роду.
-Дайте означення поверхневих інтегралів, їх властивостей.
-Дайте означення похідної за напрямком, та градієнта скалярного поля.

Тема 4. Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення.
Література:
[5] Гл.V, §1-6, Гл.V, §1-5, [2] Гл. XIX, §1-9, Гл.XIX, §13, Гл. XX, §1-19, Гл.XX, §23-26
-Елементарні функції комплексної змінної. Дійсна та уявна чистини.
-Аналітичність ФКЗ. Умови Коші – Рімана. Аналітичнисть функції комплексної змінної.
-Інтегрування по комплексному аргументу.
-Означення ряду Лорана: головна та правильна частини.

4. Розв'язання типових завдань модульного контролю

Типові завдання модульної контрольної роботи № 1

Приклад 1. Розв'язати рівняння та знайти його частинний розв'язок $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, який задовольняє умові: $y\big|_{x=0} = 2; y'\big|_{x=0} = 2$.

Розв'язання А) $y''-2y'=0$. Характеристичне рівняння $k^2-2k=0$, $k_1=0,\ k_2=2$. Одержуємо $y_1=e^{ox}=1$ і $y_2=e^{2x}$. Це фундаментальна система, тому що $\frac{y_1}{y_2}\neq const$. Тому загальний розв'язок однорідного рівняння $\overline{y}=c_1+c_2e^{2x}$.

Б) Права частина заданого рівняння має вигляд $e^{\alpha x}p_n(x)$, тому часткове рішення шукаємо в такій же формі $(k_1\neq\alpha;\ k_2\neq\alpha)$

$y=l^x(ax^2+bx+c),\ y'=e^x(ax^2+bx+c)+c^x(2ax+b);$

$y''=e^x(ax^2+bx+c)+2e^x(2ax+b)+2ue^x.$

Підставляємо ці значення в задане рівняння і приходимо до тотожності (яку попередньо скоротимо на $e^x\neq 0$)

$-ax^2-bx+2a-c=x^2+x-3$. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч і праворуч, приходимо до системи рівнянь для визначення a, b і c: $-a=1;-b=1;\ 2a-c=-3,$ звідки $a=-1;\ b=-1;\ c=1,$ і частка рішення набуває вигляду: $y=e^x(-x^2-x+1)$.

В). Складаємо загальне рішення неоднорідного рівняння

$$y=c_1+c_2e^{2x}+e^x(-x^2-x+1)\ .$$

Г) Визначаємо c_1 і c_2 з початкових умов

$y'=2c^2e^{2x}+e^x(-x^2-x+1)-e^x(x+1)$

$$\begin{matrix} y|_{x=0}=2=c_1+c_2+1 \\ y'|_{x=0}=2=2c_2+1-1 \end{matrix} \quad \text{чи} \quad \begin{cases} c_1+c_2=1 \\ 2c_2=2 \end{cases}.$$

З останньої рівності $c_2=1$. Тоді $c_1=0$ і часткове рішення неоднорідного рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам, одержуємо у вигляді:

$$y=e^{2x}+e^x(-x^2-x+1)=e^x(e^x-x^2-x+1).$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи за допомогою характеристичного рівняння. Записати в матричній формі систему, її розв'язок.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2 \\ \dfrac{dx^2}{dt}=3x_1+4x_2 \end{cases}$$

Розв'язання .Нагадаємо, що частки розв'язання системи шукаються у вигляді $x_1 = \alpha_1 e^{kt}$ і $x_2 = \alpha_2 e^{kt}$. Після підстановки в задану систему і скорочення на e^{kt} одержуємо алгебраїчну систему

$$\begin{cases} (2-k)\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + (4-k)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Вона має нетривіальні (відмінні від нуля) розв'язки тільки в тому випадку, якщо її визначник дорівнює нулю. Записавши цю умову, ми одержуємо характеристичне рівняння для системи лінійних, однорідних, диференціальних рівнянь

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваємо визначник і одержуємо $(2-k)(4-k)=0$ чи $k^2 - 6k + 5 = 0$, відкіля $k_1 = 1$, $k_2 = 5$.

Підставляючи кожне із знайдених значень k у систему алгебраїчних рівнянь, визначаємо значення α_1 і α_2, отже і частинні розв'язки x_1 і x_2

Візьмемо $k_1 = i$` і підставимо його в систему. Одержимо

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0 \\ 3a_1^{(1)} + 3a_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

(тут невідомі a_1 і a_2, що відповідає значенню k_1 позначені $a_1^{(1)}$ і $a_2^{(1)}$). Отримані рівняння залежні. Тому визначаємо (з точністю до постійного множника $a_1^{(1)}$ і $a_2^{(1)}$) з першого рівняння

$a_1^{(1)} = 1$, $a_2^{(1)} = -1$

і одержуємо перші частинні розв'язки $x_1^{(1)} = e^t$ і $x_2^{(1)} = -e^t$.

Візьмемо $k_1 = 1$ і підставимо його в систему. Одержимо

$$\begin{cases} -3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} = 0 \\ 3a_1^{(1)} - a_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Як і в попередньому випадку, з першого рівняння знайдемо $a_1^{(2)} = \frac{1}{3} a_2^{(2)}$ і, прийнявши $a_2^{(2)} = 3$, одержимо $a_1^{(2)} = 1$.

Отже, другими частинними розв'язками будуть $x_1^{(2)} = e^{5t}$; $x_2^{(2)} = 5e^{5t}$.

Помножуючи $x_i^{(1)}$ на C_1, а $x_i^{(2)}$ на C_2 і складаючи відповідні розв'язки, знаходимо загальний розв'язок системи

$$x_1 = c_1 x_1^{(1)} + c_2 x_1^{(2)} = c_1 e^t + c_2 e^{5t}$$
$$x_2 = c_1 x_2^{(1)} + c_2 x_2^{(2)} = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}$$

Запишемо в матричній формі задану систему і її розв'язки. Система:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ Розв'язок: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & 3c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Типові завдання модульної роботи № 2

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!}{3^k \; k!}$

Використаємо ознаку Даламбера при дослідженні ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!}{3^k \; k!}$:

$a_{\text{k}} = \dfrac{(2k-1)!!}{3^k \; k!}$, тому

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim \frac{\dfrac{(2(k+1)-1)!}{3^{k+1} \; (k+1)!}}{\dfrac{(2k+1)!}{3^k \; k!}} = \lim \frac{(2k+1)! \, 3^k \; k!}{(2k-1)! \, 3^{k+1} \; (k+1)!} = \frac{1}{3} \lim \frac{2k+1}{k+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

А це означає, що ряд збігається.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum \left(\frac{k+3}{k+2} \right)^{k^2}$

Використовуючи радикальну ознаку Коші до ряду $\sum \left(\frac{k+3}{k+2} \right)^{k^2}$: тому

$a_k = \left(\dfrac{k+3}{k+2} \right)^{k^2}$, $\lim \sqrt[k]{a_k} = \lim \left(\dfrac{k+3}{k+2} \right)^{k} = \exp\left(\lim k \ln(1+\dfrac{1}{k+2}) \right) = \exp\left(\lim \dfrac{k}{k+2} \right) = e > 1.$

А це означає, що ряд розбігається.

Приклад 3.

Нехай $f_k(\text{x}) = \text{x}^{k-1}$, x$\in$ **R.** Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = 1 + x + \ldots + x^{k-1} + \ldots$$

Маємо:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \begin{cases} n, & якщо\ x = 1; \\ \frac{1-x^n}{1-x}, & якщо\ x \neq 1. \end{cases}$$

Неважко помітити, що $S_n(x) \to \frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$; якщо же $|x| \geq 1$, то послідовність $\{S_n(x)\}$ розбігається. А це означає, що ряд який розглядається , збіжний на інтервалі X_0 =(-1 ; 1), а його суммою є S(x) $= \frac{1}{1-x}$.

Типові завдання модульної роботи № 3

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл

$$I = \int_{(1,1)}^{(4,4)} (x^3 + 4x^2 y)dx + (y^3 + \frac{4}{3}x^3)dy$$

Розв'язання

Перевіряємо, чи виконується умова $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

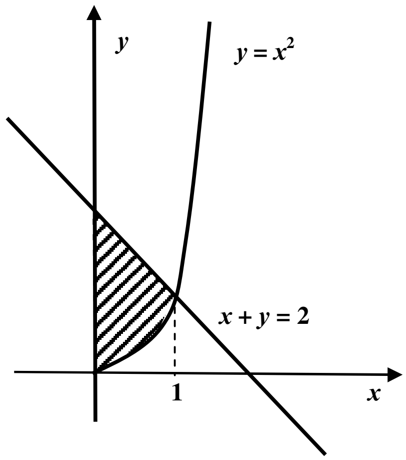
$\frac{\partial(x^3 + 4x^2 y)}{\partial y} = 4x^2$, $\frac{\partial(y^3 + \frac{4}{3}x^3)}{\partial x} = 4x^2$. Інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування. Як шлях інтегрування від точки А (І, І) до точки В (4,4) виберемо шлях спочатку уздовж лінії АС, потім уздовж СВ Рівняння АС: У= І; dy=0; Рівняння СВ Х = 4, dx=0.

$$I = \int_1^4 (x^3 + 4x^2 1)dx + \int_1^4 (y^3 + \frac{4}{3}4^3)dy = \left(\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 + \left(\frac{y^4}{4} + \frac{4^4}{3}y\right)\Big|_0^4 = 467{,}5$$

Приклад 2. Знайти об'єм тіла V, обмеженого поверхнями: $x + y = 2,\ x = \sqrt{y},\quad z = \frac{9x}{5},\ z = 0.$

Розв'язання

Знайдемо проєкцію тіла на площину Оху (при цьому відзначимо, що площина $z = \frac{9x}{5}$ проєктується на площину у вигляді прямої х = 0):



Знайдемо абсцису точки перетину кривих $y = x^2$ та $x + y = 2$:

$x^2 = 2 - x, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = 1, x_2 = -2 < 0 -$ сторонній корінь. Тоді використовуючи формулу, отримаємо шуканий об'єм тіла:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} dy \int\limits_0^{\frac{9x}{5}} dz = \frac{9}{5}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_{x^2}^{2-x} dy =$$

$$= \frac{9}{5}\int\limits_0^1 x(2 - x - x^2)dx = \frac{9}{5}\left(x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{9}{5}\cdot\frac{5}{12} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 3. Знайти масу поверхні $G: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ y \ge 0 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$, яка має густину γ = $2z^2 + 3$. (Рис.1)

Розв'язання

На поверхні, яка розглядається $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}. \text{ Тоді}$$

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2}}dxdy = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}dxdy.$$

Проєкцією D цієї поверхні на координатну площину Oxy виявляється напівкільце з межами у вигляді дуг концентричних окружностей радіусів 3 та 4. (Рис.2)

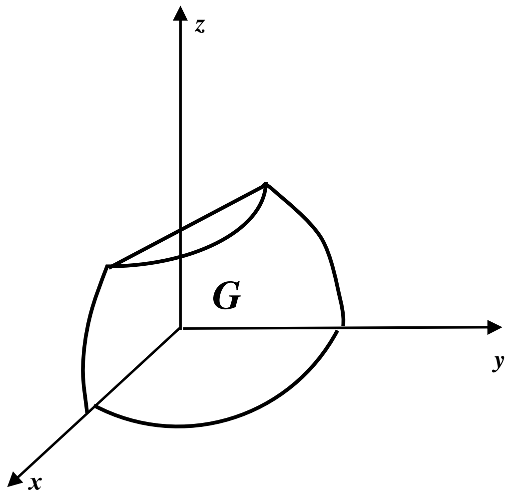


Рис.1

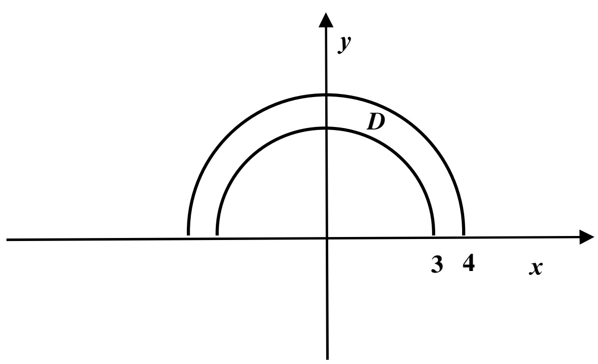


Рис.2

Використовуючи формули та переходячи до полярної системи координат, отримаємо:

$$M = 4\iint_D \frac{2(16-x^2-y^2)+3}{\sqrt{16-x^2-y^2}}dxdy = 4\int_0^{\pi} d\varphi \int_3^4 \frac{2(16-\rho^2)+3}{\sqrt{16-\rho^2}}\rho d\rho =$$

$$= 4\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int_7^0 \frac{2t+3}{\sqrt{t}}dt = 2\pi\int_0^7 \left(2t^{\frac{1}{2}} + 3t^{-\frac{1}{2}}\right)dt = 2\pi\left(\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + 6t^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^7 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{28}{3}\sqrt{7} + 6\sqrt{7}\right) = \frac{92\sqrt{7}}{3}\pi.$$

Типові завдання модульної роботи № 4

Приклад 1.

$$w = z^2$$

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u = x^2 - y^2; v = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$ $\Rightarrow$ умови Коші -Рімана виконуються,

тому функція аналітична та має похідну:

$$(z^2)' = 2z.$$

Приклад 2. Встановити дійсну частину аналітичної функції *f(z),* якщо відома її явна частина $v=2xy$

Розв'язання: Якщо функція аналітична, то для неї виконуються умови Коші –Рімана, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

Використовуючи ці умови, запишемо

$$v=2xy \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \quad x_0 = y_0 = 0$$

$$u = \int_0^x 2x dx - \int_0^y 2y dy = x^2 - y^2$$

Приклад 3. Розкласти у ряд Лорана функцію $f(z) = \frac{1}{z(2-z)}$

Розв'язання Розкладаємо цю функцію на простіші дроби за методом невизначених коефіцієнтів\ $f(z) = \frac{1}{z(2-z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} = \otimes$

$$A(z+2) + Bz = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}, A = -\frac{1}{2}$$

$\otimes = -\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2}$, тому функція набуває вигляду

$$f(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{z+2-2}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+2-4}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(z+2)\left(1-\dfrac{2}{z+2}\right)}+\frac{1}{2}\frac{1}{4\left(1-\dfrac{z+2}{4}\right)}=$$

$$==-\frac{1}{2}\frac{1}{z+2}\left(1+\frac{2}{z+2}+...+\left(\frac{2}{z+2}\right)^{n}+...\right)+\frac{1}{8}\left(1+\frac{z+2}{4}+...+\left(\frac{z+2}{4}\right)^{n}+...\right)$$

Перший доданок збігається при $\left|\dfrac{2}{z+2}\right|<1$, тобто $|z+2|>2$, тобто поза малим колом.

Другий доданок збігається при $\left|\dfrac{z+2}{4}\right|$, $|z+2|<4$, тобто усередині великого кола. Таким чином отримаємо ряд Лорана у кільці $2<|z+2|<4$.

Приклад 4. Розв’язати рівняння $x''+x'-2x=e^{t}$, якщо x(0)==, x'(0)=1.

Переходимо до зображень $\left[p^{2}\bar{x}-px(0)-x'(0)\right]+\left[p\bar{x}-x(0)\right]-2\bar{x}=\dfrac{1}{p+1}$

Після декількох перетворень**:** $x=\dfrac{p+2}{(p+1)(p^{2}+p-2)}=\dfrac{1}{p^{2}+1}$**,** чи x=sht

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ МОДУЛЬНОГО КОНТОЛЮ

Завдання модульної работи №1

Варіант №1

1.1 Знайти частинний розв’язок ДР I-го порядку:

а) $x^{3}y'+y=7$, $y(1)=5$ б) $(2xy+y)\,y'=3-y^{2}$, $y(0)=2$

в) $\left(x^{2}+y^{2}\right)dx-2\,xy\,dy=0$

1.2 Знайти частинний розв’язок ДР вищих порядків:

а) $\left(1+x^{2}\right)y'+y=\operatorname{arctg}x$ б) $(y+2)dx=(2x+y-4)dy$

в) $x^{3}y''+x^{2}y'=1$

г) $y'' - 3\,y' + 2\,y = (2\,x - 1)\,e^{2\,x},\ y(0) = y'(0) = 1$

д) $y'' - 2\,y' + 2\,y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Варіант №2

2.1 Знайти частинний розв'язок ДР І-го порядку: :

а) $y' - \frac{1}{x}\,y = x^2,\ \ y(1) = 0{,}5$ б) $x \cdot \ln y \cdot y' = x^3 y,\ y(0) = e$

в) $y - x\,y' = y\,\ln\frac{x}{y}$

2.2 Знайти частинний розв'язок ДР вищих порядків:

а) $\left(\frac{\sin 2\,x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin 2\,x}{y^2}\right)dy = 0$ б) $y^2 + x^2 y' = x\,y\,y'$

в) $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$

г) $y'' - 2\,y' + 5\,y = \left(x^2 + 1\right)e^{3\,x},\ y(0) = 1, y'(0) = -1$

д) $y'' - 2\,y' + 10\,y = 0, y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

Варіант №3

3.1 Знайти частинний розв'язок ДР І-го порядку: :

а) $y' - 3\,y = e^{-2\,x},\ y(0) = 0$ б) $y' = xy + e^x \cdot y,\ \ y(0) = 3$

в) $y' = \frac{2\,xy}{x^2 - y^2}$

3.2 Знайти частинний розв'язок ДР вищих порядків:

а) $y'' - 7\,y' + 6\,y = 0,\ \ y(0) = 6,\ y'(0) = 7$

б) $\left(x\,y^2 + x\right)dx + \left(x^2 y - y\right)dy = 0$

в) $y - x\,y' = 2\left(1 + x^2 y'\right)$ г) $2\,x\,y'' = y'$

д) $y'' + 4\,y' + 4\,y = (x + 2)\sin 3x, y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

Варіант №4

4.1 Знайти частинний розв'язок ДР I-го порядку: :

а) $y' + \frac{1}{x} y = e^{x^2}$, $y(1) = \frac{e}{2}$ б) $x\, y' \ln y - y = 0$, $y(1) = e^2$

в) $\left(y^2 - 3x^2\right) dy + 2\, xy\, dy = 0$

4.2 Знайти частинний розв'язок ДР вищих порядків:

а) $y'' - 6\, y' + 9\, y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ б) $(y+2)\, dx = (2\, x + y - 4)\, dy$

в) $y^3 (2\, y' + y) = x$ г) $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$

д) $y'' - 2\, y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$

Варіант №5

5.1 Знайти частинний розв'язок ДР I-го порядку: :

а) $x\, y' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$ б) $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$

в) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

5.2 Знайти частинний розв'язок ДР вищих порядків:

а) $y'' + 4\, y' + 29\, y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$

б) $\left(2\, x + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right) dx = \dfrac{x^2 + y^2}{x\, y^2} dy$

в) $xy\, y' = 1 - x^2$ г) $yy'' + (y')^2 = 0$

д) $y'' - 6\, y' + 9\, y = x\, e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

Варіант №6

6.1 Знайти частинний розв'язок ДР I-го порядку: : :

а) $y' + \frac{1}{x} y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $y(1) = \ln\sqrt{2}$ б) $y^2 + x^2 y' = 0$, $y(-1) = 1$

в) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

6.2 Знайти частинний розв'язок ДР вищих порядків:

а) $y'' - 4\ y' + 13\, y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$ б) $y' \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x$

в) $x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$ г) $2\, yy'' = 1 + y'^2$

д) $y'' + y' - 2\ y = (3\,x + 1)\, e^{4\,x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

Варіант №7

7.1 Знайти частинний розв'язок ДР I-го порядку: : :

а) $y' - \frac{1}{x} y = x^3 + 2$, $y(1) = \frac{1}{3}$ б) $2\,x\sqrt{1 - y^2}\, dx + y\, dy = 0$

в) $x\, dy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx$

7.2 Знайти частинний розв'язок ДР вищих порядків:

а) $y'' + -8\, y' + 25\ y = (3\,x + 5) \cos 2\,x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ б) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$

в) $y'' = x \sin x$

г) $(x + 2\,y + 1) dx - (2\,x + 4\,y + 3) dy = 0$

д) $y'' - 5\ y' + 6\,y = 0$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1/9$

Варіант №8

8.1 Знайти частинний розв'язок ДР I-го порядку:

а) $y' - \frac{1}{x} y = x \ln x$, $y(2) = 2$ б) $(y + xy)\, dx + (x - xy) dy = 0$

в) $\left(y^2 - 2\,xy \right) dx + x^2 dy = 0$

8.2 Знайти частинний розв'язок ДР вищих порядків:

а) $y'' - 4\ y' + 3\,y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ б) $x\sqrt{1 - y^2}\, dx + y\sqrt{1 - x^2}\, dy = 0$

в) $y - x\,y' = 5\left(1 + x^2 y'\right)$ г) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$

д) $y'' + 4\,y' + 4\,y = e^{-2\,x}\ln x,\;\; y(2) = 1,\;\; y'(2) = 0$

Варіант №9

9.1 Знайти частинний розв'язок ДР I-го порядку: : :

а) $y' - 3y = e^{-2x},\;\; y(0) = 0$ б) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0$

в) $y\,dy + \left(x - 2\,y\right)dx = 0$

9.2 Знайти частинний розв'язок ДР вищих порядків

а) $y'' - 4\,y' + 13\,y = \left(5\,x + 1\right)e^{3\,x},\;\; y(0) = 2,\;\; y'(0) = 2$

б) $\left(\sin xy + xy\cos xy\right)dx + x^2\cos xy\,dy = 0$

в) $y'' + 2\,y' + y = 0,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0$ г) $xy'' + y' = x + 1$

д) $\left(x + 4\,y\right)y' = 2\,x + 3\,y - 5$

Варіант №10

10.1 Знайти частинний розв'язок ДР I-го порядку: : :

а) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2,\;\; y(1) = 0{,}5$ б) $\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0,\;\; y(0) = 1$

в) $y' = \dfrac{2\,xy}{x^2 - y^2}$

10.2 Знайти частинний розв'язок ДР вищих порядків:

а) $y'' - 3\,y' - 4\,y = 0,\;\; y(0) = 5,\; y'(0) = 6$

б) $\left(x - 2\,y - 1\right)dx + \left(3\,x - 6\,y + 2\right)dy = 0$

в) $y' = \dfrac{2\,xy}{x^2 - y^2}$ г) $y'' = x\cos 2x$

д) $y'' + 10\,y' + 25\,y = \left(x + 3\right)e^{-5\,x},\;\; y(0) = 1,\;\; y'(0) = 3$

Завдання модульної контольної работи №2

Варіант №1

1.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{2^n}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \dfrac{1}{2^n}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)^2 \cdot 5^n}{7^n}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(2n-1)}$

1.2 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$.

1.3 Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3}, \text{ при } & 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \\ 0, \text{ при } & \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2\pi}{3} \\ -\dfrac{\pi}{3}, \text{ при } & \dfrac{2\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

Варіант №2

2.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n}{n^6}$ в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{(4n-3)\cdot 8^n}$

2.2 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$

2.3 Розвинути в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}x$, $(0 < x < \pi)$.

Варіант №3

3.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \cdot (n+1)^2}{3^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 7^{3n}}{(2n-5)!}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1} \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

3.2 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{при} \quad -\pi \le x \le 0 \\ x, & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$

3.3 Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = \frac{\pi}{8} \cdot (\pi - 2x)$,

(0; π).

Варіант №4

4.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1) \cdot (n+2)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{e^n}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1} \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

4.2 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x^2$ на відрізку [–π; π].

4.3 Розвинути в ряд Фур'є за синусами

функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

Варіант №5

5.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2+n^3}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^3 \cdot 5^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^4-5}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

5.2 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=e^{x}$ в інтервалі (0; 2π).

5.3 Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi \end{cases}$

Варіант №6

6.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n}+1}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{6n-2n^{2}-1}{3n+3-4n^{2}}\right)^{4n}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)^{3}}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{n}}{2^{n}(n+1)\cdot(n+2)}$

6.2 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2} \\ x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$

6.3 Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=\dfrac{1}{2}(\pi-x)\cdot\sin x$

в інтервалі (0; π).

Варіант №7

7.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{(n+1)^{2}}$ б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{5}}{2^{n}}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{n}}{(2n-1)}$

7.2 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\cos ax$ на відрізку [–π; π]

(*a* – не ціле число).

7.3 Розвинути в ряд синусів функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3}, & 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ 0, & \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3}, & \frac{2\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$

Варіант №8

8.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ б) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^4 - 9}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$

8.2 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi, & \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$

8.3 Розвинути в ряд синусів функцію $f(x) = x \cdot (7 - x)$ в інтервалі (0; 7).

Варіант №9

9.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2n)!}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^2 + 4}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

9.2 Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x - 1$, яка задана на відрізку [1; 2]

9.3 Розвинути в ряд косинусів функцію $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Варіант №10

10.1 Дослідити збіжність ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$ б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\cdot(2n+1)}$ в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4n+1}}$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(x-5)^n$

10.2 Знайти розвинення в ряд Фур'є періодичної функції $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi\le x<0\\ 2,\ 0\le x\le\pi\end{cases}$

10.3 Розвинути в ряд за синусами функцію $f(x)=x$ на відрізку [0; 2]

Завдання модульної контольної работи №3

Варіант №1

1.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\ \text{якщо}\quad D:\ x=1,\ \ x=2,\quad y=0,\ y=2x$$

1.2 Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{AB}\left(y^2+x\right)dx+\frac{2x}{y}dy;\ \text{вздовж}\ \ y=e^x\ \ \text{від т.}A\ (0;1)\ \text{до т.}B\ (1;e)$$

1.3 Обчислити об'єм: $x=0$; $y=0$; $z=0$; $x=2$; $x+y+z=4$

Варіант №2

2.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\ \text{якщо}\quad D:\ x=0,\ \ x=2,\quad y=0,\ y=x^2+1$$

2.2 Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{AB}x^2y\,dx+x^3\,dy;\ \text{вздовж дуги параболи}\ \ y=x^2\ \ \text{від т.}A\ (0;0)\ \text{до т.}B\ (2;3)$$

2.3 Обчислити об'єм: $z=y^2-x^2$; $z=0$; $y=-2$; $y=2$

Варіант №3

3.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\quad \text{якщо}\quad D:\ x=0,\ \ x=1,\quad y=0,\ \ y=x^2+1$$

3.2 Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{AB}\frac{y}{x}dx+x\,dy;$$ вздовж кривої $y=\ln x$ від т.A (1; 0) до т.B (e; 1)

3.3 Обчислити об'єм: $x+y=3;\quad x=0;\quad y=0;\quad z=0;\quad x=2$

Варіант №4

4.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\quad \text{якщо}\quad D:\ x=0,\ \ x=3,\quad y=0,\ \ y=3-x$$

4.2 Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{AB}6x^2y\,dx+10xy^2dy;$$ вздовж кривої $y=x^3$ від т.A (1; 1) до т.B (2; 8)

4.3 Обчислити об'єм: $y=x^2;\quad y=1;\quad x+y+z=4;\quad z=0$

Варіант №5

5.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\quad \text{якщо}\quad D:\ x=0,\ \ x=2,\quad y=0,\ \ y=3-x$$

5.2 Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{AB}\left(x^2-y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy;$$ вздовж відрізка AB від т.A (0; 0) до т.B (3; 4)

5.3 Обчислити об'єм: $z=4-x-y;\quad y=2;\quad x=0;\quad y=0;\quad z=2$

Варіант №6

6.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\quad \text{якщо}\quad D:\ x=2,\ \ x=4,\quad y=0,\ \ y=\sqrt{x}$$

6.2 Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{AB}\left(x^2-y^2\right)dx+xy\,dy;$$ вздовж відрізка AB від т.A (1; 1) до т.B (3; 4)

6.3 Обчислити об'єм: $z=x^2+y^2;\quad y=x^2;\quad y=1;\quad z=0$

Варіант №7

7.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\quad \text{якщо}\quad D:\ y=0,\ \ y=1/2,\ \ x=y,\ \ x=\sqrt{y}$$

7.2 Обчислити інтеграл

$\int\limits_{AB}\left(3x^2y+1\right)dx+\left(x^3+2\right)dy$; вздовж параболи $y=2\sqrt{x}$ від т.A (0; 0) до т.B (1; 2)

7.3 Обчислити об'єм: $z=9-x^2$; $x+y=4$; $y=0$; $z=0$

Варіант №8

8.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\quad \text{якщо}\quad D:\ y=0,\ \ y=1/x,\ \ x=1,\ \ x=2$$

8.2 Обчислити інтеграл

$\int\limits_{AB}\left(2x^2y-1\right)dx+\left(3x^2y^2+5\right)dy$; вздовж відрізка AB від т.A (0; 0) до т.B (2; 4)

8.3 Обчислити об'єм: $z=5x$; $y^2+x^2=9$; $z=0$

Варіант №9

9.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\quad \text{якщо}\quad D:\ y=0,\ \ y=2-x,\ \ x=1,\ \ x=2$$

9.2 Обчислити інтеграл

$\int\limits_{AB}\left(y^2+x^2\right)dx+\dfrac{2x}{y}dy$; вздовж відрізка AB від т.A (0; 1) до т.B (1; 2)

9.3 Обчислити об'єм: $z=4-x^2$; $2x+y=4$; $x=0$; $y=0$

Варіант №10

10.1 Змінити порядок інтегрування

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;\quad \text{якщо}\quad D:\ y=1,\ \ y=2,\ \ x=0,\ \ x=y^2$$

10.2 Обчислити інтеграл

$\int\limits_{AB} \left(2xy^2 - 1\right) y\,dx + \left(3xy^2 + 5\right) x\,dy$; вздовж відрізка AB від т.A (0; 0) до т.B (2; 4)

10.3 Обчислити об'єм: $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$; $z = 5$; $x = 0$; $y = 0$; $y = 1$

Завдання модульної контольної работи №4

Варіант №1

1.1 Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо

$z_1 = -7 + 4i$; $z_2 = 5 - 6i$; $z_3 = 4 - 3i$;

$z_4 = \dfrac{103}{25} - \left(\dfrac{4}{25} + \sqrt{3}\right) i$

1.2 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах та зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1 + i}$

1.3 Перевірити умови Коші-Рімана і знайти $f'(4 - i)$, якщо

$f(z) = 3\left(1 + z^2\right) + iz$

1.4 Знайти $f(z)$, якщо $u = 2x^2 - 2y^2 + x$

1.5 Обчислити: $\int\limits_{AB} (2\bar{z} - 3z)\,dz$, якщо $z_A = -1$; $z_B = 2$

1.6 Розкласти в ряд Лорана $f(z) = \dfrac{3z}{2z + 1}$; 1) $z = 0$, 2) $z = \infty$

1.7 Обчислити $\int\limits_C \dfrac{z + 1}{(z + 4)(z - 4)}\,dz$, де $C = \{|z| = 6$

Варіант №2

2.1 Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо

$z_1 = 5 - 3i$; $z_2 = 2 + 4i$; $z_3 = 6 - 4i$;

$z_4 = -\dfrac{49}{26} + \left(\dfrac{15}{26} + \sqrt{3}\right)i$

2.2 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{4}{1 + i\sqrt{3}}$

2.3 Перевірити умови Коші-Рімана і знайти $f'(1 + 2i)$, якщо

$f(z) = iz - 3z^2 + 5i$

2.4 Знайти $f(z)$, якщо $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

2.5 Обчислити $\int\limits_{AB} f(x)dz$, якщо $f(z) = y - 5 - 2xi$; $z_A = 2$; $z_B = -2i$

2.6 Розкласти в ряд Лорана $f(z) = \dfrac{3z}{2z + 1}$ в межах точок $z = 0$ та

$z = \infty$

2.7 Обчислити $\int\limits_C \dfrac{z + 4}{z^2 + 5z + 6} dz$, де $C = \{|z| = 4$

Варіант №3

3.1 Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -4 - 5i$; $z_3 = 3 - 2i$; $z_4 = \sqrt{3} - \dfrac{2}{13} - \dfrac{23}{13}i$

3.3 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1 + i}$

3.3 Перевірити умови Коші-Рімана і знайти $f'(1-2i)$, якщо

$f(z) = 3z^2 - 2iz + 5i$

3.4 Знайти $f(z)$, якщо $u = x - y + 5$

3.5 Обчислити $\int\limits_{AB}(3\bar{z} - 4i)\,dz$, де $z_A = -1 - i$; $z_B = i$

3.6 Розкласти в ряд Лорана $f(z) = \dfrac{2}{3z+5}$ в межах точок $z = 0$ та

$z = \infty$

3.7 Обчислити $\int\limits_{C}\dfrac{z+3}{(z-2i)(z+4)}dz$, де $C = \{|z| = 7$

Варіант №4

4.1 Знайти комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо

$z_1 = 4 + 7i$; $z_2 = 6 + 5i$; $z_3 = 3 + 2i$; $z_4 = -\dfrac{11}{13} - \left(\dfrac{10}{13} + \sqrt{3}\right)i$

4.2 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z = -\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$

4.3 Перевірити умови Коші-Рімана і знайти $f'\left(\dfrac{i}{3}\right)$, якщо

$f(z) = 3iz^2 + 5z + 4i$

4.4 Знайти $f(z)$, якщо $u = x^2 - y^2 + 2x$

4.5 Обчислити $\int\limits_{AB}(4 - 2\bar{z})dz$, якщо $z_A = -2$; $z_B = 2 + i$

4.6 Розкласти в ряд Лорана $f(z) = \dfrac{z}{5z+8}$ в межах точок $z = 0$ та

$z = \infty$

4.7 Обчислити $\int\limits_{C}\dfrac{z+1}{z^2 - z - 6}dz$, де $C = \{|z| = 4$

Варіант №5

5.1 Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=2-7i$; $z_2=4+6i$; $z_3=5+2i$; $z_4=\dfrac{94}{29}+\dfrac{3}{29}i$

5.2 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z=-\dfrac{4}{1-i\sqrt{3}}$

5.3 Перевірити умови Коші-Рімана і знайти $f'(2i+1)$, якщо

$f(z)=z^2-2z+3i$

5.4 Знайти $f(z)$, якщо $u=2\cdot e^x\cdot\cos y$

5.5 Обчислити $\int\limits_{AB}\left(x^2+i2xy\right)dz$, де $z_A=i$; $z_B=1+2i$

5.6 Розкласти в ряд Лорана $f(z)=\dfrac{2}{4z+7}$ в межах точок $z=0$ та

$z=\infty$

5.7 Обчислити $\int\limits_C\dfrac{z+5}{z(z-7)}dz$, де $C=\{|z|=10$

Варіант №6

6.1 Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=3-2i$; $z_2=5-4i$; $z_3=2+3i$; $z_4=\dfrac{11}{13}+\dfrac{3}{13}i$

6.2 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z=-\dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$

6.3 Перевірити умови Коші-Рімана і знайти $f'(i)$, якщо $f(z)=\dfrac{5}{z}$

6.4 Знайти $f(z)$, якщо $u=2xy+3x$

6.5 Обчислити $\int\limits_{AB}\left(3z^2+2z\right)dz$, де $z_A=-1+i$; $z_B=1-i$

6.6 Розкласти в ряд Лорана $f(z)=\dfrac{3z}{z+2}$ в межах точок $z=0$ та $z=\infty$

6.7 Обчислити $\int\limits_C \dfrac{z+7}{(z+3)(z-4)}dz$, де $C=\{|z|=6$

Варіант №7

7.1 Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=3-4i$; $z_2=-7+i$; $z_3=2+5i$; $z_4=-\dfrac{7}{29}+\dfrac{3}{29}i$

7.2 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z=-\dfrac{3\sqrt{2}}{1+i}$

7.3 Перевірити умови Коші-Рімана і знайти $f'(1-i)$, якщо

$f(z)=3i(1-z)^2+3z$

7.4 Знайти $f(z)$, якщо $u=2x^2-2y^2+x$

7.5 Обчислити $\int\limits_{AB}(z+2)^2\,dz$, де $z_A=-2$; $z_B=-2+i$

7.6 Розкласти в ряд Лорана $f(z)=\dfrac{4z}{2z+3}$ в межах точок $z=0$ та

$z=\infty$

7.7 Обчислити $\int\limits_C \dfrac{z+2}{(z-7)(z+3)}dz$, де $C=\{|z|=8$

Варіант №8

8.1 Знайти комплексне число $z=\dfrac{z_1-z_2}{z_3}+z_4$;

якщо $z_1=2+7i$; $z_2=-1+6i$; $z_3=5-i$; $z_4=\dfrac{7}{26}-\dfrac{5}{26}i$

8.2 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$

8.3 Перевірити умови Коші- Рімана і знайти $f'(i)$, якщо

$f(z) = \left(x^2 - y^2\right) + 2xy\,i$

8.4 Знайти $f(z)$, якщо $u = x + y$

8.5 Обчислити $\int\limits_{AB} \frac{\bar{z}}{z}\,dz$, де $z_A = i; \quad z_B = 1 + i$

8.6 Розкласти в ряд Лорана $f(z) = \frac{z}{z+5}$ в межах точок $z = 0$ та $z = \infty$

8.7 Обчислити $\int\limits_{C} \frac{dz}{z^2 + 4}\,dz$, де $C = \{|z| = 5$

Варіант №9

9.1 Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = -3 - 7i; \quad z_2 = 2 - 6i; \quad z_3 = 5 + i; \quad z_4 = \frac{21}{26} + \frac{11}{26}i$

9.2 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z = -\frac{2\sqrt{2}}{2 - i}$

9.3 Перевірити умови Коші- Рімана і знайти $f'(2 - i)$, якщо

$f(z) = y + x\,i$

9.4 Знайти $f(z)$, якщо $u = 2x^2 - 2y^2 + x$

9.5 Обчислити $\int\limits_{AB} (3z + 2)^2\,dz$, де $z_A = -2; \quad z_B = -2 + i$

9.6 Розкласти в ряд Лорана $f(z) = \frac{3z}{z+5}$ в межах точок $z = 0$ та $z = \infty$

9.7 Обчислити $\int\limits_{C} \frac{3z - 1}{(z + i)(z - 2)}\,dz$, де $C = \{|z| = 3$

Варіант №10

10.1 Знайти комплексне число $z = \frac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$;

якщо $z_1 = 7 + i$; $z_2 = -1 - i$; $z_3 = 3 + 2i$; $z_4 = \frac{11}{13} + \frac{7}{13} i$

10.2 Записати z в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах.

Зобразити його на комплексній площині $z = \frac{4\sqrt{2}}{1 - i}$

10.3 Перевірити умови Коші- Рімана і знайти $f'(2i + 1)$, якщо

$f(z) = z^2 - 2z + 3i$

10.4 Знайти $f(z)$, якщо $u = 3x^2 y - y^3$

10.5 Обчислити $\int\limits_{AB} \left(x^2 + i\, 2xy\right) dz$, де $z_A = i$; $z_B = 1 + 2i$

10.8 Розкласти в ряд Лорана $f(z) = \frac{5z}{3z - 1}$ в межах точок $z = 0$ та

$z = \infty$

10.9 Обчислити $\int\limits_{C} \frac{3z - 1}{(z - 4)(z + 4)} dz$, де $C = \{|z| = 5$

ЛІТЕРАТУРА

1. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. «Вища математика» - К.: Вища шк., 1987.
2. Пискунов. Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т. 1, 2. М., «Наука», 1970, 1972, 1976.
3. Мышкис А. С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1966, 1969, 1973.
4. Г.М. Фихтенгольц «Основи математического анализа» М., «Наука», 1968.
5. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова « Высшая математика в упражнениях и задачах» М., «Высшая школа»,1986.
6. Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Свинаренко А.А., Лобода А.В., Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. Одесса: Екологія.-2007.
7. Глушков О.В., Амбросов С.В. , Вітавецька Л.А,. Лобода А.В., Математичне програмування, Одесса: ТЕС.-2003.
8. Глушков О.В., Сербов М.Г., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Флорко Т.О., Прикладна математика.- Одесса: Екологія.-2007.

Методичні вказівки до самостійного вивчення та виконання контрольни робіт
з дисципліни “Вища математика“
(Розділ «Диференційне та інтегральне числення»)
для студентів III курсу денної форми навчання

Укладач: Дубровська Ю.В., доц.
Відп. ред: Глушков О.В., проф.

Підп. до друку ______ Формат _____ Папір друк.

Умовн. друк. арк. Тираж _________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала- макета