МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійного вивчення та виконання модульних робіт

з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

для студентів І курсу
усіх напрямків підготовки

ЗАТВЕРДЖЕНО
Методичною комісією факультету КН
Протокол №____ від____ ____2007р.

Одеса 2007

Методичні вказівки до самостійного вивчення та виконання модульних завдань з дисципліни “Вища математика” розділ “Функції багатьох змінних” для студентів I курсу усіх напрямків підготовки.

Укладач:

Чернякова Ю.Г., канд. фіз.-мат. наук, доцент; Одеса, ОДЕКУ,

2007 р., 30 с., укр. мова.

Відповідальний редактор:

Глушков О.В., доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики ОДЕКУ.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків гідрологія, метеорологія,екологія, комп”ютерні науки тощо, яка спрямована на вивчення основних положень диференціального і інтегрального числення, функцій багатьох змінних, кратних та криволінійних інтегралів , теорії поля, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, рівнянь математичної фізики, теорії імовірності та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при розв’язанні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності. Вона відображує нові вимоги, що пред”являються до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для вирішення прикладних задач.

Мета вивчення дисципліни – забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичних курсів з вищої математики , сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів вищої математики в різних галузях, навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач.

Завдання дисципліни “Вища математика”- навчити студентів :

- Правильно використувати вивчені методи при розв’язанні задач;

- Правильно аналізувати результати математичних обчислень. Розділ «Функції багатьох змінних» вивчається на першому курсі навчання і передбачає лекційні та практичні заняття, а також самостійну роботу студентів. Функції багатьох змінних – одна з важливих галузей математичного аналізу, яка використовується у фізиці, механиці, електротехніці та інших науках під час створення математичних моделей та при розв’язанні різноманітних задач. Вивчення цього розділу потребує від студентів знання таких розділів вищої математики, як диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної, а також лінійної алгебри. В результаті вивчення розділу студент повинен: знати математичну символіку, визначення, основні теореми, передбачені програмою; вміти влучно і стисло виражати математичну думку під час розв”язання конкретних задач, самостійно розв”язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього отримані під час вивчення даної дисципліни знання, аналізувати отримані результати. Отримані у процесі навчання знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

1. ПРОГРАМА РОЗДІЛУ

Теорію функцій багатьох змінних можна розглядати як розділ вищої математики, в якому вивчаються методи розв’язання задач математичного аналізу, а саме диференціювання, дослідження на екстремуми, розклад за формулою Тейлора стосовно функцій двох та більшої кількості змінних.

Методичні вказівки розроблено відповідно до програми курсу “Вища математика” для усіх напрямків підготовки.

Одним з найважливіших факторів засвоєння матеріалу є самостійна робота студентів (СРС).

Мета та завдання даних методичних вказівок – надання студенту загальних рекомендацій для самостійної роботи (СР) над розділом “Функції багатьох змінних” та для виконання домашніх та модульних завдань під час вивчення розділу. Матеріал поділено на підрозділи, до яких зазначено рекомендовані посібники із списку літератури. Додаткові посібники рекомендовані для використання, якщо необхідний для вивчення матеріал відсутній у основних посібниках або недостатньо повно у них викладений. Наприкінці кожної теми наведені питання до самоперевірки.

ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1 М.: Наука, 1978.
2. Крепак В.М. Короткий курс вищої математики. К.: УМК ВО, 1990.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.1. – М.: “Высшая школа”, 1986.

Додаткова література

4. Фихтенгольц В.М. Основы математического анализа. Т.1. М.: Наука, 1964.
5. Сборник задач по математике. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. Т.1. – М.: Наука, 1986.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Простір. Евклідовий простір. Окіл точки. Зв'язна множина, область. Поняття функції багатьох змінних, приклади. Область визначення та геометрична інтерпретація функції 2-х змінних.Границя та неперервність функції 2-х змінних. (на СРС 2 год.)

Література: [1, гл.8, §1,2],[2,розд.4, §1],[3,гл.8, §1].

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.

Частинні та повні прирости. Частинні похідні першого порядку. Диференційованість. Частинний та повний диференціал. Диференційованість складної та неявної функції. Частинні похідні та диференціали вищого порядку. Теорема Шварца. (на СРС 4 год.)

Література: [1,гл.8, §5-12,16],[2,розд.4, §1,2,3,4],[3,гл.8],[4,гл.9, §1,2].

СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Поняття скалярного поля. Лінії та поверхні рівня. Похідна за напрямком. Градієнт і його фізичний зміст. (на СРС 2 год.)

Література: [1,гл.8, §14, 15],[2,гл.8, §1,2].

ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Формула Тейлора. Дотична площина та нормаль до поверхні. Екстремум функції багатьох змінних (необхідна і достатня умови). (на СРС 4 год.)

Література: [1, гл.8, §16, 17, 18], [2,розд.4, §5],[3,гл.8, §2],[4,гл.9, §3],[5,гл.7, §3.] .

Після вивчення дисципліни студент повинен мати:

Знання: основних понять та властивостей функцій багатьох змінних, основних теорем диференціального числення функцій багатьох змінних, властивостей основних характеристик скалярного поля, застосування частинних похідних.

Вміння: визначати та зображувати на рисунку область визначення функцій двох змінних, знаходити частинні похідні першого та вищих порядків, а також відповідні диференціали, похідну за напрямком та градієнт функції, складати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, знаходити екстремуми функції двох змінних.

Вміти використовувати набуті знання при розв’язку практичних задач.

Правильно аналізувати отримані результати математичних обчислень.

Вид контролю знань після вивчення розділу “Функції багатьох змінних” – модульна контрольна робота, усне опитування.

Модульна контрольна робота оцінюється у 10 балів, що складає 20 % від загальної суми балів. Перше та друге завдання оцінюються по 2 бали, якщо виконані повністю, або по 1 балу, якщо виконані не до кінця або з помилками, які не торкаються основної схеми розв’язання. Третє та четверте завдання оцінюються по 3 бали, якщо виконані повністю, по 2 бали, якщо виконані не до кінця або з помилками, які не торкаються основної схеми розв’язання, та по 1 балу, якщо є грубі помилки..

2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Перелік тем самостійної роботи

1. Арифметичний n-мірний простір.
2. Повторні границі.
3. Інваріантність форми першого диференціала.
4. Застосування повного диференціала у наближених обчисленнях.

5. Лінії та поверхні рівня.
6. Формула Тейлора для функції двох змінних.
7. Умовний екстремум функції двох змінних.
8. Найбільше та найменше значення функції у замкненій області.

Вивчення розділу "Функції багатьох змінних" потребує від студентів знання основ вищої математики в обсязі програми курсу вищої математики відповідної спеціалізації: вступу до аналізу, теорії границь, диференціального числення функцій однієї змінної, а також основ лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Вивчення теоретичного матеріалу обов'язково треба супроводжувати практичним розв'язанням задач за відповідною тематикою. Слід також приділити увагу тим прикладам, які надаються з розв'язанням у тексті матеріалу, що рекомендований до вивчення.

Тема 1. Основні поняття теорії функцій багатьох змінних.

Література: [1, гл.8, §1,2],[2,розд.4, §1],[3,гл.8, §1].

Питання для самоперевірки

1. Дати означення функції багатьох змінних.
2. Дати геометричну інтерпретацію області визначення та графіка функції двох змінних.
3. Дати означення границі функції двох змінних.
4. Яка функція називається неперервною? Записати означення у вигляді формули.

Тема 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Література: [1,гл.8, §5-12,16],[2,розд.4, §1,2,3,4],[3,гл.8],[4,гл.9, §1,2].

Питання для самоперевірки

1.Що таке частинний та повний приріст функції?

2. Дати означення частинної похідної.

3. Що розуміють під повним приростом та повним диференціалом?

4. Як обчислюється похідна складної функції декількох змінних?

5. Означення мішаної похідної, теорема Шварца.

6. Частинні похідні вищих порядків.

Тема 3. Скалярне поле та його характеристики

Література: [1,гл.8, §14, 15],[2,гл.8, §1,2].

Питання для самоперевірки

1. Дати означення скалярного поля та навести приклади.
2. Що таке лінії та поверхні рівня? Навести приклади.
3. Похідна за напрямком, її обчислення через частинні похідні та фізичний зміст.
4. Градієнт скалярного поля, зміст його модуля та напрямку. Формула обчислення.

Тема 4. Застосування частинних похідних.

Література: [1, гл.8, §16, 17, 18], [2,розд.4, §5],[3,гл.8, §2],[4,гл.9, §3],[5,гл.7, §3.] .

Питання для самоперевірки

1. Як виглядає формула Тейлора для функції двох змінних?
2. Що таке дотична площина до поверхні у даній точці? Яке рівняння цієї площини?
3. Написати рівняння нормалі до поверхні у даній точці та пояснити, як воно складене.
4. Сформулювати необхідну умову екстремуму функції двох змінних. Що таке стаціонарні точки?

5. Достатня умова екстремуму функції двох змінних.

3. РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

Тема 1. Основні поняття теорії функцій багатьох змінних.

Приклад №1. Знайти і зобразити на рисунку область визначення функції $z = \sqrt{x} - \sqrt{x + y}$;

Розв'язок. Область визначення функції двох змінних z(x,y)- це сукупність точок площини xOy, у яких функція має дійсне значення. Тобто, це уся площина або її частина (декілька частин), що обмежена лініями (межами), які можуть належати або не належати до області визначення.

Функція z приймає дійсні значення за умовами:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}; \text{ або } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -x \end{cases}$$

Межі області визначення визначаються рівняннями: x=0 та y=-x. Таким чином, шукана область- частина площини в середині кута, що утворений прямими x=0 та y=-x (див. рис.1).

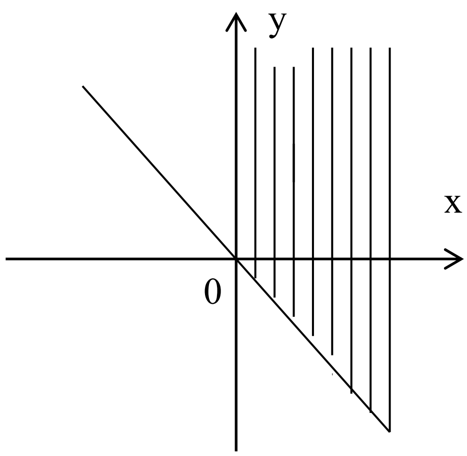

Рис.1

Приклад №2. Знайти і зобразити на рисунку лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$;

Розв'язок. Лінією рівня функції двох змінних z(x,y) називається лінія z(x,y)=c=const на площині xOy, у точках якої функція зберігає стале значення z(x,y)=c. Рівняння сімейства ліній рівня даної функції має вигляд: $x^2 + y^2 = C$ (C>0). Якщо надавати С різні дійсні значення, отримаємо концентричні кола з центром у початку координат (див. рис. 2)

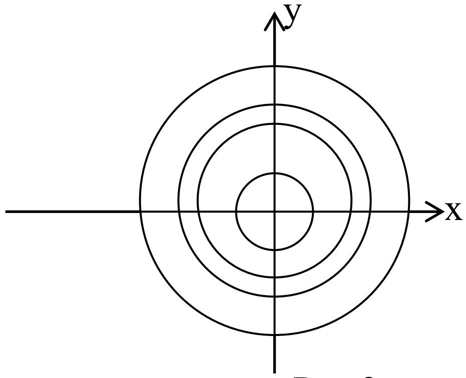

Рис.2

Тема 2. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Приклад №3. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = arctg\frac{x+y}{x-y}.$$

Розв'язок. Шукаємо частинні похідні першого порядку, при цьому частинна похідна по x береться у припущенні, що y=const, а частинна похідна по y береться у припущенні, що x=const. Функцію z диференціюємо за правилом диференціювання складної функції, а її внутрішню функцію – за правилом диференціювання частки двох функцій.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{(x+y)'_x(x-y)-(x+y)(x-y)'_x}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{(x+y)'_y(x-y)-(x+y)(x-y)'_y}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+(x+y)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Приклад №4. Знайти повний диференціал другого порядку d^2z функції

$$z = \cos^2(3x + 2y).$$

Розв'язок. Шукаємо частинні похідні першого порядку, при цьому частинна похідна по x береться у припущенні, що $y = const$, а частинна похідна по y береться у припущенні, що $x = const$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(3x + 2y)(-\sin(3x + 2y)) \cdot 3 = -3\sin(6x + 4y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\cos(3x + 2y)(-\sin(3x + 2y)) \cdot 2 = -2\sin(6x + 4y);$$

Для одержання похідних другого порядку диференціюємо першу рівність по x, а другу — по y.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -3\cos(6x + 4y) \cdot 6 = -18\cos(6x + 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\cos(6x + 4y) \cdot 4 = -8\cos(6x + 4y);$$

Щоб одержати змішану похідну, потрібно знайти частинну похідну по y від частинної похідної першого порядку по x, або навпаки, знайти частинну похідну по x від частинної похідної першого порядку по y. Результати збігаються по теоремі про незалежність частинних похідних від порядку диференціювання.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3\cos(6x + 4y) \cdot 4 = -12\cos(6x + 4y).$$

Повний диференціал другого порядку обчислюється за формулою:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Підставляючи отримані частинні похідні другого порядку у формулу, маємо:

$$d^2z=-18\cos(6x+4y)dx^2-24\cos(6x+4y)dxdy-8\cos(6x+4y)dy^2$$

Тема 3. Скалярне поле та його характеристики

Приклад №5. Знайти похідну функції $u=xy^2z^3$ у точці M(3;2;1) за напрямком вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо N(5;4;2).

Розв'язок. Похідна за напрямком вектора $\vec{a}$ функції u(x,y,z) обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ - частинні похідні функції u(x,y,z), а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора $\vec{a}$.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{MN}$ та його напрямні косинуси:

$$\overline{MN} = (5-3)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k};$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}; \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}};$$

тобто $\cos\alpha = \frac{2}{3}; \cos\beta = \frac{2}{3}; \cos\gamma = \frac{1}{3}.$

Обчислимо тепер значення частинних похідних функції u(x,y,z) у точці M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3; \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3; \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2 z^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_M = 4; \frac{\partial u}{\partial y}|_M = 12; \frac{\partial u}{\partial z}|_M = 36$$

Підставимо отримані результати у формулу похідної за напрямком:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{MN}}|_M = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

Приклад №6. Знайти величину та напрямок градієнта функції

$u = tgx - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + ctgz$ у точці М($\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$).

Розв'язок. Градієнтом функції багатьох змінних називається вектор, що має своїми координатами частинні похідні цієї функції. Знайдемо частинні похідні у точці М:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1; \frac{\partial u}{\partial y} = 3\cos y - 3\sin^2 y \cos y; \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \frac{1}{\sin^2 z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_M = 2 - 1 = 1; \frac{\partial u}{\partial y}|_M = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}; \frac{\partial u}{\partial z}|_M = 1 - 1 = 0.$$

Координати вектора градієнта $\overrightarrow{gradu}|_M (1; \frac{3}{8}; 0)$.

Модуль (величина) градієнта дорівнює :

$$\left|\overrightarrow{gradu}\right|_M = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{73}}{8}.$$

Його напрямок визначають напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{73}}; \cos\beta = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{73}} : \cos\gamma = \frac{0}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = 0.$$

Тема 4. Застосування частинних похідних.

Приклад №7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 y(2 - x - y)$ у трикутнику, обмеженому лініями $x = 0;\ y = 0;\ x + y = 6.$

Розв'язок. Знаходимо стаціонарні точки функції, дорівнюючи частинні похідні до нуля.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy(4 - 3x - 2y) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2(2 - x - 2y) = 0,$$

У середині області $x > 0,\ y > 0$ і на xy ми скорочуємо, тоді :

$$\begin{cases} 4 - 3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 0 \\ 2 - \mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 4 \\ \mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = 1 \\ \mathrm{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$x = 1;\ y = 1/2$ — координати стаціонарної точки P(1, 1/2).

Знайдемо значення функції в точці P: $z(1,\ 1/2) = 1 \cdot 1/2 \cdot (2 - 1 - 1/2) = 1/4$. Для перебування найбільшого і найменшого значення функції в області потрібно досліджувати функцію на межах області. У нашому випадку на межах $x = 0$, $y = 0$ функція дорівнює нулю ($z = 0$).

Знайдемо найбільше і найменше значення функції на стороні $x + y = 6$. На цій стороні

$$y = 6 - x,\ 0 \le x \le 6;$$

$$z = x^2(6 - x)(2 - x - 6 + x) = -4x^2(6 - x).$$

На кінцях інтервалу $x=0$ і $x=6$ значення функції $z(0)=z(6)$. Знайдемо стаціонарні точки функції на цій лінії:

$$z'=-48x+12x^2=0;\ 12x(x-4)=0;\ x_1=0,\ x_2=4.$$

Залишається $x=4$, тому що $x=0$- гранична точка нами вже розглянута. $z(4)=-4\cdot16\cdot(6-4)=-128;$ при $x=4$; $y=2$, тобто $z(4;\ 2)=-128$

Отже, щоб знайти найбільше і найменше значення функції, треба порівняти значення функції у стаціонарній точці, на сторонах трикутника та у його вершинах, тобто :

$z(1;\ 1/2)=1/4$ – значення в точці P;

$z=0$ – на сторонах $x=0$, $y=0$ та у вершинах трикутника;

$z=-128$ – у точці P_1 $(4;\ 2)$ на стороні $x+y=6$.

Отже, найбільше значення $z=1/4$ функція має у середині області в точці P$(1;\ 1/2)$, а найменше значення $z=-128$ функція має в точці $P_1(4;\ 2)$, що лежить на лінії $x+y=6$.

Приклад №8. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, що є графіком функції $z=x^2-2xy+y^2-x+2y$, у точці M(1;1;1).

Розв'язок. Дотичною площиною до поверхні у її звичайній точці M називається площина, що містить у собі дотичні прямі до усіх кривих, які можуть бути проведені на поверхні через точку M.

Нормаллю до поверхні у точці M називається пряма лінія, що проходить через M перпендикулярно до дотичної площини у цій точці. Якщо поверхня задана рівнянням F(x,y,z)=0, і у точці M частинні похідні

$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ кінцеві та не дорівнюють нулю одночасно, то рівняння дотичної площини до поверхні у точці $M(x_0,y_0,z_0)$ має вигляд:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0) = 0;$$

а рівняння нормалі до поверхні у цієї ж точці має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{(y - y_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{(z - z_0)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

За умовою задачі складемо функцію F:

$$F(x,y,z)=x^2-2xy+y^2-x+2y-z=0;$$

Знайдемо частинні похідні у точці M:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M = (2x - 2y - 1)_M = -1; \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M = (-2x + 2y + 2)_M = 2; \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M = -1;$$

Підставимо у рівняння дотичної площини та нормалі. Тоді рівняння дотичної площини буде

$$-1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 1) - 1 \cdot (z - 1) = 0; \text{ або } \quad x-2y+z=0;$$

Рівняння нормалі буде

$$\frac{(x-1)}{-1} = \frac{(y-1)}{2} = \frac{(z-1)}{-1}$$

Приклад №9. Знайти екстремум функції

$$z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y) \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right).$$

Розв'язок. Якщо диференційована функція $z=f(x,y)$ досягає екстремуму у точці $M_0(x_0,y_0)$, то її частинні похідні першого порядку у цій точці дорівнюють нулю:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M = 0; \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M = 0.$$ (необхідна умова екстремуму).

Точки, у яких частинні похідні дорівнюють нулю одночасно, називають стаціонарними точками. Нехай M_0 – стаціонарна точка функції z=f(x,y). Складемо визначник другого порядку з частинних похідних другого порядку функції z=f(x,y), що обчислені у стаціонарній точці $M_{0.}$

$$\Delta = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}\right|_{M_0}.$$

Якщо $\Delta<0$, то екстремуму у цій точці немає;

якщо $\Delta=0$, то нічого сказати не можна, потрібне додаткове дослідження;

якщо $\Delta>0$, то екстремум є, при чому :

якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 або \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$, то це мінімум;

якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 або \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$, то це максимум.

(достатня умова екстремуму).

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4};$$

За необхідною умовою екстремуму стаціонарні точки знайдемо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{12}y - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{47}{3} = 0; \\ -\dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{12}x + \dfrac{47}{4} = 0. \end{cases} або \begin{cases} 8x + y = 188; \\ x + 6y = 141. \end{cases}$$

звідки x=21; y=20, тобто стаціонарна точка $M_0(21;20)$.

Знайдемо значення других похідних у точці М:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

Складемо визначник $\Delta\big|_M = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0;$

Згідно з достатньою умовою екстремуму екстремум у точці $M_0(20;21)$ є, при чому це максимум, оскільки

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0; \qquad z_{max}=282.$$

4. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Варіант №1

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x^3+3x^2y+5xy^2-y^3$
4. $u=\mathrm{arctg}(x^2+y^2+z^2)$; M(1;0;1); N(1;-1;1); Знайти похідну за напрямком у точці М : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №2

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції:

   $z = \arcsin\frac{y}{x}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку: $z = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=5x^4 -6x^2y+10xy^2-3$

4. u=ln(x^2+3xy+4z^2x) ; M(-1;0;1); N(2;1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №3

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = x \cdot \sin(x+y)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: u=6x^5y-4x^2y^2 +10xy
4. u=xyz ; M(2;1;1); N(0;-1;3); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №4

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\ln(y^2-4x+8)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=\dfrac{\cos x^2}{y}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: u=6x^3y^2-4x siny+4

4. u=$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}$; M(-1;0;1); N(5;3;-2); Знайти похідну за напрямком у точці M: $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №5

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\dfrac{1}{9-x^2-y^2}$
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=y^{\ln x}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: u=6x^2y-3xy+10x^3y^3 +5

4. $u = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; M(1;1;1); N(3;2;3); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №6

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\ln(-x-y)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=\arcsin(xy)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x^2y^{3-}3xy+10$
4. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$; M(1;2;1); N(3;6;5); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №7

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=tg\,\frac{x^2}{y}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=5x^2y-6xy+10x^5y^2+4$
4. $u=\ln(x^2+y^2+2xz^3)$; M(1;-1;2); N(0;-1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №8

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=\ln\left(x+y^2\right)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=6x^3y^2-5xy+10y^2$

4. $u=\ln(x^3y+xy^2-4z^2y)$; M(0;1;-1); N(1;1;-2); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №9

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=3y^4x-4y^2x^3+2xy-y$
4. $u=arctg(x^2+y^2+z^2)$; M(1;0;1); N(1;-1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №10

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\ln xy$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=\sin^2(ax+by)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=x^3+12x^2y+3xy^2-2y^3x^3-8$
4. $u=\ln(x^2+3xy+4z^2x)$; M(-1;0;1); N(2;1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №11

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x+y}{x}}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=14x^3-2x^2y^3+5xy^2-1$

4. u=xyz ; M(2;1;1); N(0;-1;3); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №12

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \arcsin\left(x^2 + y^2 - 5\right)$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = xy + \dfrac{x}{y}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4y^2+3x^2y-5x^4y^2+2y^3$

4. u=$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}$; M(-1;0;1); N(5;3;-2); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №13

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = x + \arcsin y$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x^5y^2+3xy^3+5x^4y^2-2y$

4. $u = \arcsin\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$; M(1;1;1); N(3;2;3); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №14

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \ln\left(x^2 + y\right)$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. Знайти частинні похідніі другого порядку: $u=3x^2y+y^2-y^3x^5+x$

4. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$; M(1;2;1); N(3;6;5); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №15

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \sqrt{4x - y^2}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=2x+3y^2+3x^2y^2-2xy$.

4. $u=\ln(x^2+y^2+2xz^3)$; M(1;-1;2); N(0;-1;1); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №16

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \arcsin(1 - y)$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \sqrt{2xy + y^3}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=24x+3y-5xy^5-y^4$

4. $u=\ln(x^3y+xy^2-4z^2y)$; M(0;1;-1); N(1;1;-2); Знайти похідну за напрямком у точці M : $u'_{\overline{MN}}(M)$

Варіант №17

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \ln(x - y)$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \dfrac{x}{y^2}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=y^2+3x^2y^3+6xy^2-2y$

4. $u=\mathrm{arctg}(x^2+y^2+z^2)$; M(1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M: $\mathrm{grad}\, u \,\big|_M$

Варіант №18

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції

$$z = \arcsin\frac{x^2+y^2}{4};$$

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = e^{3x-y}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=4x+2xy^5+x^3y^2-1$

4. $u=\ln(x^2+3xy+4z^2x)$;M(-1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M:$\mathrm{grad}\, u \,\big|_M$

Варіант №19

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=3xy^3 -2x^4y^2 +2y^3 +3$

4. $u=xyz$; M(2;1;1); Знайти градієнт функції у точці M : $\mathrm{grad}\, u \,\big|_M$

Варіант №20

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2+y^2-16};$$

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = x^m y^n$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=24-2xy^6+5y^2-x^3$

4. u=$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}$; M(-1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M: grad u $|_M$

Варіант №21

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: u=$12xy-3x^4y^5+7y^2-2xy+1$

4. $u=\arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; M(1;1;1); Знайти градієнт функції у точці M : grad u $|_M$

Варіант №22

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z=\arcsin\frac{y}{x}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: u=$x^2+2xy-5y^3x^2+8$

4. u=$\ln(x^2+y^2+z^2)$; M(1;2;1); Знайти градієнт функції у точці M : grad u $|_M$

Варіант №23

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції; $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z=x\cdot\sin(x+y)$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: u=$2x\cos y-3y^2\sin x+5y^3$

4.u=ln($x^2+y^2+2xz^3$); M(1;-1;2); Знайти градієнт функції у точці M: grad u $|_M$

Варіант №24

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \dfrac{\cos x^2}{y}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: u=$x^2+2y^3x-2+x^5y^7$
4. u=ln($x^3y+xy^2-4z^2y$); M(0;1;-1);Знайти градієнт функції у точці M:grad u $|_M$

Варіант №25

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \dfrac{1}{9 - x^2 - y^2}$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = y^{\ln x}$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: u=$4x^2y^2+2xy-5xy^3+1$
4. u=arctg($x^2+y^2+z^2$); M(1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M: grad u $|_M$

Варіант №26

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \ln(-x - y)$;
2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \arcsin(xy)$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку: u=$4x^3+2x^2y^6+5x^4y^2-2y^2$

4.u=ln($x^2+3xy+4z^2x$); M(-1;0;1); Знайти градієнт функції у точці M: grad u $|_M$

Варіант №27

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = tg\,\frac{x^2}{y}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=x^2y+3xy^7+2xy-3x$

4. $u=xyz$; $M(2;1;1)$; Знайти градієнт функції у точці M : $\text{grad}\, u\,\big|_M$

Варіант №28

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \arcsin\frac{y-1}{x}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \ln\left(x + y^2\right)$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=\cos x \cdot y^3 -4y^2+7xy+5$

4. $u=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}$; $M(-1;0;1)$; Знайти градієнт функції у точці M: $\text{grad}\, u\,\big|_M$

Варіант №29

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u= x^3 tg\, y+x^4y^2=3xy^5+2x$

4. $u = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; $M(1;1;1)$; Знайти градієнт функції у точці M: $\text{grad}\, u\,\big|_M$

Варіант №30

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = \ln xy$;

2. Знайти частинні похідні першого порядку $z = \sin^2(ax+by)$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку: $u=3xy+2x^2-3y^3+8x^5y^6$

4. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$; M(1;2;1); Знайти градієнт функції у точці М : $\text{grad}\, u\,\big|_M$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати визначення функції багатьох змінних.
2. Дати геометричну інтерпретацію області визначення та графіка функції двох змінних.
3. Дати означення границі функції двох змінних.
4. Яка функція називається неперервною? Записати означення у вигляді формули.
5. Що таке частинний та повний приріст функції?
6. Дати означення частинної похідної.
7. Що розуміють під повним приростом та повним диференціалом?
8. Як обчислюється похідна складної функції декількох змінних?
9. Означення мішаної похідної, теорема Шварца.
10. Частинні похідні вищих порядків.
11. Дати означення скалярного поля та навести приклади.
12. Що таке лінії та поверхні рівня? Навести приклади.
13. Похідна за напрямком, її обчислення через частинні похідні та фізичний зміст.
14. Градієнт скалярного поля, зміст його модуля та напрямку. Формула обчислення.
15. Як виглядає формула Тейлора для функції двох змінних?
16. Що таке дотична площина до поверхні у даній точці? Яке рівняння цієї площини?
17. Написати рівняння нормалі до поверхні у даній точці та пояснити, як воно складене.

18. Сформулювати необхідну умову екстремуму функції двох змінних. Що таке стаціонарні точки?
19. Достатня умова екстремуму функції двох змінних.
20. Як обчислити найбільше та найменше значення функції у замкненій області?

Методичні вказівки

для самостійного вивчення та виконання модульних робіт

з дисципліни “Вища математика” розділ “Функції багатьох змінних”

для студентів I курсу денної форми навчання

усіх напрямків підготовки

Укладач: Чернякова Ю.Г.

Підп. до друку ________ Формат________ Папір офсетний.

Умовн. друк. арк.   Тираж________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала-макета