

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Крижанівська Тетяна Валентинівна
Бойцова Ірина Аркадіївна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

„ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ”

Крижанівська Т.В., Бойцова І.А. Конспект лекцій з дисципліни „Чисельні методи”. Одеса, 2013. – 152 с.

Курс лекцій розраховано на студентів факультету комп’ютерних наук ОДЕКУ напряму підготовки „Комп’ютерні науки”. Може бути корисним для студентів відповідних факультетів, спеціальностей та напрямів підготовки ВНЗ України.

ЗМІСТ

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ.....	6
1.1. ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ	6
1.1.1 Постановка та математична модель задачі.....	6
1.1.2 Вибір обчислювального методу	8
1.1.3 Алгоритм розв'язання задачі	9
1.1.4 Реалізація методу обчислень.....	18
1.2 ОЦІНКА ПОХИБКИ РЕЗУЛЬТАТУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ.....	19
1.2.1 Джерела виникнення похибок	19
1.2.2 Похибка вихідних даних	19
1.2.3 Похибка при арифметичних діях з наближеними числами.....	23
1.2.4 Похибки при обчисленні наближених значень функції одної змінної	26
1.2.5 Похибки при обчисленні наближених значень функції декількох змінних	28
1.2.6 Похибки обчислювальних методів.....	29
2 ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ.....	30
2.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ.....	30
2.2 ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН ЛАГРАНЖА	31
2.3 КІНЦЕВІ РІЗНИЦІ.....	33
2.3.1 Визначення кінцевих різниць	33
2.3.2 Властивості кінцевих різниць	35
2.4 ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН НЬЮТОНА	38
2.4.1 Перша інтерполяційна формула Ньютона.....	38
2.4.2 Друга інтерполяційна формула Ньютона	40
2.5 ПОРІВНЯННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ БАГАТОЧЛЕНІВ.....	41
2.6 БАГАТОІНТЕРВАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ.....	42
2.6.1 Лінійна багатоінтервальна інтерполяція	42
2.6.2 Квадратична багатоінтервальна інтерполяція.....	43
2.6.3 Кубічна багатоінтервальна інтерполяція.....	44
3 СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ	45
3.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЇ.....	45
3.2 ЛІНІЙНИЙ СПЛАЙН.....	45
3.3 КВАДРАТИЧНИЙ СПЛАЙН	46
3.4 КУБІЧНИЙ СПЛАЙН	49
4 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ.....	52
4.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ АПРОКСИМАЦІЇ І МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ	52
4.2 ЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ	53
4.3 КВАДРАТИЧНА АПРОКСИМАЦІЯ	55
4.4 СТЕПЕНЕВА АПРОКСИМАЦІЯ	55
4.5 ПОКАЗОВА АПРОКСИМАЦІЯ	56
4.6 ЛОГАРИФМІЧНА АПРОКСИМАЦІЯ.....	57
4.7 ДРОБОВО-ЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ	57

4.8 ГІПЕРБОЛІЧНА АПРОКСИМАЦІЯ	58
4.9 ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ	59
5 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ І ЇХ СИСТЕМ	60
5.1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	60
5.2 МЕТОД ЕЙЛЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	63
5.3 МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЕЙЛЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	66
5.4 УДОСКОНАЛЕНИЙ МЕТОД ЕЙЛЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ (МЕТОД ЕЙЛЕРА-КОШІ).....	68
5.5 МЕТОДИ РУНГЕ–КУТТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	69
5.5.1 Метод Рунге-Кутта першого порядку	70
5.5.2 Методи Рунге-Кутта другого порядку	71
5.5.3 Методи Рунге-Кутта третього порядку	74
5.5.4 Методи Рунге-Кутта четвертого порядку	75
5.5.5 Методи Рунге-Кутта більш високих порядків	76
5.6 МЕТОДИ РУНГЕ–КУТТА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	77
5.7 МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ	78
5.7.1 Метод кінцевих різниць розв'язання задачі Коші для лінійних диференційних рівнянь другого порядку	78
5.7.2 Метод кінцевих різниць розв'язання задачі Коші для нелінійних диференційних рівнянь другого порядку	81
5.7.3 Метод кінцевих різниць розв'язання крайових задач для лінійних диференційних рівнянь другого порядку	82
5.7.4 Метод кінцевих різниць розв'язання крайових задач для нелінійних диференційних рівнянь другого порядку	83
6 ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ	85
6.1 ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДУ КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ	85
6.2 МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДИРИХЛЄ В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ	86
6.3 ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ КІНЦЕВО- РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ	91
6.4 МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ	92
6.5 МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ	97
6.6 РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ОБЛАСТЕЙ	102

7 НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯНЬ І СИСТЕМ	103
7.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ РІВНЯННЯ..	103
7.2 ВІДДІЛЕННЯ КОРЕНЯ РІВНЯННЯ	103
7.2.1 Умови відділення кореня.....	103
7.2.2 Графічний метод відділення кореня.....	105
7.2.3 Відділення коренів методом проб	107
7.2.4 Метод виділення інтервалів монотонності.....	108
7.3 МЕТОДИ ПОСЛІДОВНОГО НАБЛИЖЕННЯ ДО КОРЕНЯ	109
7.3.1 Метод половинного ділення	109
7.3.2 Метод простих ітерацій.....	110
7.3.3 Метод хорд.....	113
7.3.4 Метод дотичних (метод Ньютона)	116
7.3.5 Комбінований метод.....	120
8 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	122
8.1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ТА ВИЗНАЧЕННЯ.....	122
8.1.1 Матриці та вектори	122
8.1.2 Визначник матриці. Властивості визначника. Методи його обчислення	124
8.1.3 Мінори та алгебраїчні доповнення.....	125
8.1.4 Обернена матриця	126
8.1.5 Поняття про систему лінійних рівнянь.....	127
8.2 ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКА ЗА СХЕМОЮ ГАУСА	128
8.3 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (СЛАР).....	132
8.3.1 Розв'язання СЛАР за методом Гауса (метод послідовного виключення невідомих).....	132
8.3.2 МЕТОД ГАУСА З ВИБОРОМ ГОЛОВНОГО ЕЛЕМЕНТА	135
8.4 НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	136
8.4.1 Метод послідовних наближень (метод ітерації).....	136
8.4.2 Умови збіжності ітераційного процесу.....	139
8.4.3 Оцінка погрішності наближеного процесу методу ітерацій.....	140
8.4.5 Метод Зейделя. Умови збіжності процесу Зейделя	141
8.4.6 Оцінка погрішності процесу Зейделя.....	142
8.4.7 Приведення системи лінійних рівнянь до виду, зручного для ітерацій	142
9 ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ.....	143
9.1 ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦІ. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ	143
9.2 МЕТОД А. М. ДАНИЛЕВСЬКОГО ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ І ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ МАТРИЦЬ	145
9.3 МЕТОД СКАЛЯРНИХ ДОБУТКІВ ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВЛАСНОГО ЗНАЧЕННЯ СИМЕТРИЧНОЇ МАТРИЦІ.....	148

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ПРО ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

1.1. ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

Більшість прикладних задач (інженерних, економічних, біологічних і ін.), результат яких повинен представляти числову інформацію, зводяться до математичних, які розв'язуються різними обчислювальними методами. Процес розв'язання таких задач можна надати у вигляді наступних етапів.

1. Постановка задачі.
2. Побудова математичної моделі задачі.
3. Вибір обчислювального методу.
4. Вивчення (або складання) алгоритму розв'язання задачі.
5. Реалізація алгоритму за допомогою обчислювальних засобів.
6. Аналіз отриманих результатів.

1.1.1. Постановка та математична модель задачі

Постановка задачі припускає словесне формулювання задачі, умов, яким вона повинна задовольняти, і вимог, пропонованих до її розв'язання.

Наприклад:

- a) розв'язати квадратне рівняння;
- b) визначити зміну швидкості при падінні тіла, враховуючи опір середовища;
- c) знайти площу заданої ділянки землі;
- d) вибрати найкращий денний раціон відгодівлі худоби.

У процесі формулювання задачі необхідно відповісти на запитання:

- 1) чи зрозуміла термінологія, використовувана у формулюванні задачі?
- 2) що є вихідними даними для розв'язання задачі?
- 3) що потрібно знайти при розв'язанні задачі?
- 4) як визначити розв'язання?
- 5) яких даних не вистачає і чи всі пропоновані дані потрібні?
- 6) які можна зробити допущення?

Математична модель – це математичний опис співвідношень у постановці задачі.

При побудові моделі потрібно звернути увагу на запитання:

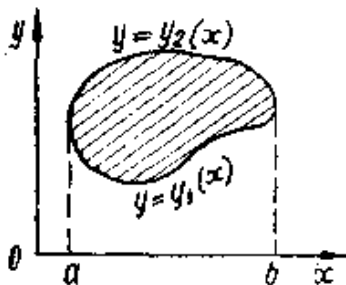
- 1) чи розв'язувалися аналогічні задачі?
- 2) які математичні структури найбільше підходять для розв'язання даної задачі?
- 3) які математичні величини визначають вихідні дані?
- 4) які математичні величини визначають результат?
- 5) які математичні співвідношення існують між об'єктами моделі?
- 6) як працювати з обраною моделлю?

В одних випадках запис математичної моделі не має труднощів, а в інших потрібне уточнення постановки задачі, виділення головних факторів, відкидання умов, що мало впливають на результат.

Для задачі а) математична модель очевидна. Розв'язати рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – задані дійсні числа, причому $a \neq 0$, x – шукане невідоме.

В задачі б) припускаємо, що тіло є матеріальна точка маси m , на яке діють сила ваги $F_1 = mg$ та сила опору, пропорційна швидкості падіння $F_2 = -kv$, тоді, на підставі законів механіки, одержимо рівняння $ma = mg - kv$, або $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$. Це диференціальне рівняння з урахуванням початкової умови $v(t_0) = v_0$ є математичною моделлю задачі для визначення функції $v(t)$.



В задачі с) варто з'ясувати форму ділянки землі, її границі, зобразити її в системі координат у відповідному масштабі. Тоді задача зведеться до обчислення певного інтеграла $\int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx$, що і буде математичною моделлю даної задачі.

Постановка задачі д) повинна містити перелік кормів денного раціону, денну норму споживання живильних речовин, і розкритий зміст поняття «найкращий раціон».

Денний раціон складається із двох видів кормів, середній денний запас яких дорівнює відповідно b_1, b_2 . У раціон повинні входити три поживних речовини, щоденна норма споживання яких становить a_1, a_2, a_3 . Зміст цих речовин в одиниці кожного із двох видів кормів відповідно a_{11}, a_{12}, a_{13} і a_{21}, a_{22}, a_{23} . Якщо позначити через x_1, x_2 кількість одиниць розглянутих видів кормів, а через p_1, p_2 відповідно задані вартості одиниці кожного корму, то математичну модель задачі можна сформулювати так:

знайти найменше значення функції

$$r = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

при обмеженнях

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 \geq a_1,$$

$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \geq a_2,$$

$$a_{13} x_1 + a_{23} x_2 \geq a_3,$$

$$0 \leq x_1 \leq b_1, \quad 0 \leq x_2 \leq b_2.$$

Таким чином, всі поставлені задачі виражені в математичних співвідношеннях і зведені вже до чисто математичних задач.

Складання математичної моделі в прикладній задачі є найбільш складним і відповідальним етапом розв'язання і, як правило, виконується

спільно математиком і фахівцем у даній галузі. Що ж стосується математичної задачі (наприклад, задачі а)), то її модель в основному міститься в самій постановці.

1.1.2. Вибір обчислювального методу

Математична задача абстрагована від конкретної сутності прикладної задачі. Для її розв'язання створюються спеціальні обчислювальні методи, причому *до одній і тій же математичній моделі* можуть зводитися абсолютно різні прикладні задачі.

Так, задача б) звелася до розв'язання диференційного рівняння, яке може бути моделлю і для багатьох інших задач (зміна швидкості при пружних лінійних коливаннях, зміна струму в найпростішому електричному колі, зміна швидкості при розмноженні бактерій).

Для розв'язання задачі с) необхідно обчислити певний інтеграл. До обчислення певних інтегралів приходять і при визначенні об'єму тіла або довжини дуги плоскої кривої, визначенні статичного моменту або моменту інерції, розрахунку роботи змінної сили та у багатьох інших фізичних задачах.

Математична модель задачі d) приводить до відшукування розв'язання системи лінійних нерівностей, що задовольняє певній вимозі, що, в остаточному підсумку, зводиться до багаторазового розв'язання систем лінійних рівнянь. Лінійні системи доводиться розв'язувати і у багатьох інших прикладних задачах.

Розв'язання математичної моделі задачі здійснюється обчислювальним методом, причому *ту саму задачу можна розв'язувати декількома методами*. Вибір методу для даної задачі – важливий елемент процесу розв'язання, що істотно впливає на результат.

Методи обчислень поділяються на точні і наближені.

Точні методи – які після кінцевого числа дій приводять до точного результату за умови, що обчислення проводяться без округлення чисел.

Наближені методи дозволяють одержати результат з деякою похибкою. При виборі наближеного методу істотними є обсяг обчислень, швидкість збіжності (як швидко виходить результат) і інші фактори. Вибір методу, зокрема, залежить і від вихідних даних. Крім того, на вибір методу впливають засоби його реалізації (ручний рахунок, обчислювальна машина, наявність готової програми і т.п.). Так, якщо будуть використані швидкодіюча ЕОМ і готова програма, то обсяг обчислень не повинен бентежити виконавця і бути визначальним фактором при виборі методу. При ручному рахунку варто віддати перевагу методу, що вимагає певних попередніх досліджень, з меншим числом обчислень.

Наприклад, для розв'язання задачі а) краще використовувати точний метод, тобто формулу

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

але можна застосовувати і інші способи, наприклад різні наближені методи.

Диференційне рівняння задачі б) краще розв'язувати, розділивши змінні, тобто привівши його до вигляду

$$\frac{m \cdot dv}{mg - kv} = dt.$$

Однак його можна розглядати і як лінійне рівняння, або розв'язувати наближеними методами.

При розв'язанні задачі с) варто користуватися методами наближеного обчислення певного інтеграла, причому можна застосувати найбільш простий з них – метод прямокутників, оскільки постановка задачі не вимагає високої точності розв'язання.

Що ж стосується розв'язання систем лінійних рівнянь, то вже зі шкільного курсу математики відомі точні методи: метод підстановки, метод алгебраїчного додавання, метод визначників. Однак для лінійних систем високого порядку вони виявляються неефективними, тому для їхнього розв'язання звичайно використовуються наближені методи.

1.1.3. Алгоритм розв'язання задачі

Алгоритмом називається система правил, що задає строго певну послідовність операцій, які приводять, при заданих початкових даних, до шуканого результату (точного або наближеного).

Виділимо *основні властивості алгоритму*, що впливають із визначення:

1. *Дискретність алгоритму* – представлення алгоритму у вигляді послідовності окремих кроків, елементарних операцій, виконуваних у строго певному порядку.
2. *Визначеність алгоритму* – кожний крок алгоритму повинен бути описаний за допомогою певної системи правил для того, щоб виконавець його сприймав однозначно, без невизначеностей.
3. *Результативність алгоритму* – через кінцевий час алгоритм повинен привести до результату або до повідомлення про його відсутність.
4. *Масовість алгоритму* – алгоритм, складений для розв'язання однієї задачі, повинен застосовуватися для розв'язання аналогічних задач при всіх припустимих значеннях вихідних даних.

Способи опису алгоритмів:

- словесно-формульний опис алгоритму;
- графічний опис алгоритму у вигляді блок-схеми;
- опис алгоритму алгоритмічною мовою.

Словесно-формульний опис алгоритму – це опис алгоритму за допомогою слів і формул, представлений у вигляді перенумерованих кроків,

виконуваних один за одним. Якщо необхідно змінити порядок виконання кроків, варто вказати це явно.

Приклад 1. Словесно-формульний опис алгоритму розв'язання задачі а) по заданій формулі має такий вигляд:

1. Обчислити $D = b^2 - 4ac$.
2. Якщо $D \geq 0$, то перейти до 3, інакше – до 5.
3. Обчислити $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.
4. Перейти до 6.
5. Представити $x_1 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{-D}}{2a}$, $x_2 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{-D}}{2a}$.
6. Кінець обчислень.

При складанні алгоритму перехід від однієї дії до іншої відбувається строго в порядку їхнього запису. Якщо ж треба перервати природний хід дій (перевірити виконання якої-небудь умови), то варто вказувати на це (див. дія 2 у наведеному алгоритмі).

Приклад 2. Скласти алгоритм обчислення значення функції $y = \sin x$ при заданому значенні аргументу x ($|x| < \frac{\pi}{2}$) із заданою точністю ε .

Розв'язання. Відомо, що функцію $y = \sin x$ можна представити у вигляді степеневого ряду

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$

тому обчислення значення функції $y = \sin x$ при заданому значенні аргументу x є нескінченним процесом підсумовування, що не може бути виконане. Для обчислення задаємо деяке мале число $\varepsilon > 0$ і підсумовування припиняємо тоді, коли абсолютна величина чергового члена ряду буде менше ε . Послідовне обчислення членів ряду і їхнє підсумовування виконуємо за формулами:

$$\begin{aligned} u_1 &= x, & S_1 &= x, \\ u_n &= -u_{n-1} \cdot \frac{x^2}{(2n-2)(2n-1)} & n &= 2, 3, \dots; \\ S_n &= S_{n-1} + u_n & n &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Словесно-формульний опис алгоритму має наступний вигляд:

1. Задати $S = 0$, $n = 1$, $u_1 = x$.
2. Якщо $|u_n| > \varepsilon$, то перейти до 3, інакше – до 6.
3. Обчислити $S = S + u_n$.
4. Задати $n = n + 1$.

5. Обчислити $u_n = -u_{n-1} \cdot \frac{x^2}{(2n-2)(2n-1)}$, перейти до 2.

6. Задати $\sin x = S$; кінець обчислень.

Припиняючи нескінченний процес, одержуємо лише наближене значення обчислюваної величини. У даному прикладі число ε є похибкою шуканого значення $\sin x$.

Блок-схемою алгоритму називається графічне зображення послідовності дій обчислювального процесу.

У блок-схемі кожна дія береться в певний геометричний символ (блок):

початок і кінець процесу звичайно зображують овалом;

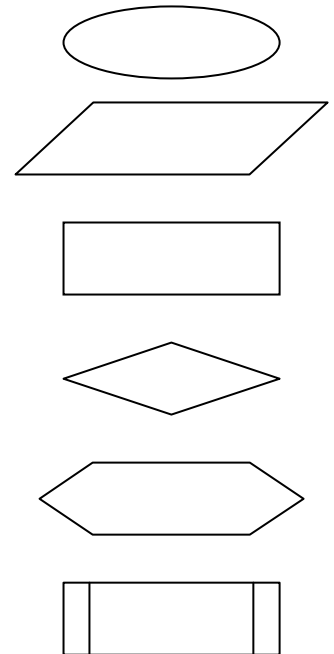
введення даних і висновок результатів – у вигляді паралелограма;

обчислювальні операції беруться у прямокутники;

операції перевірки умов зображуються у вигляді ромбів;

заголовок циклу, у якому задаються границі зміни параметра циклу, зображується у вигляді шестикутника;

стандартний процес зображується у вигляді прямокутника з подвійними бічними границями.

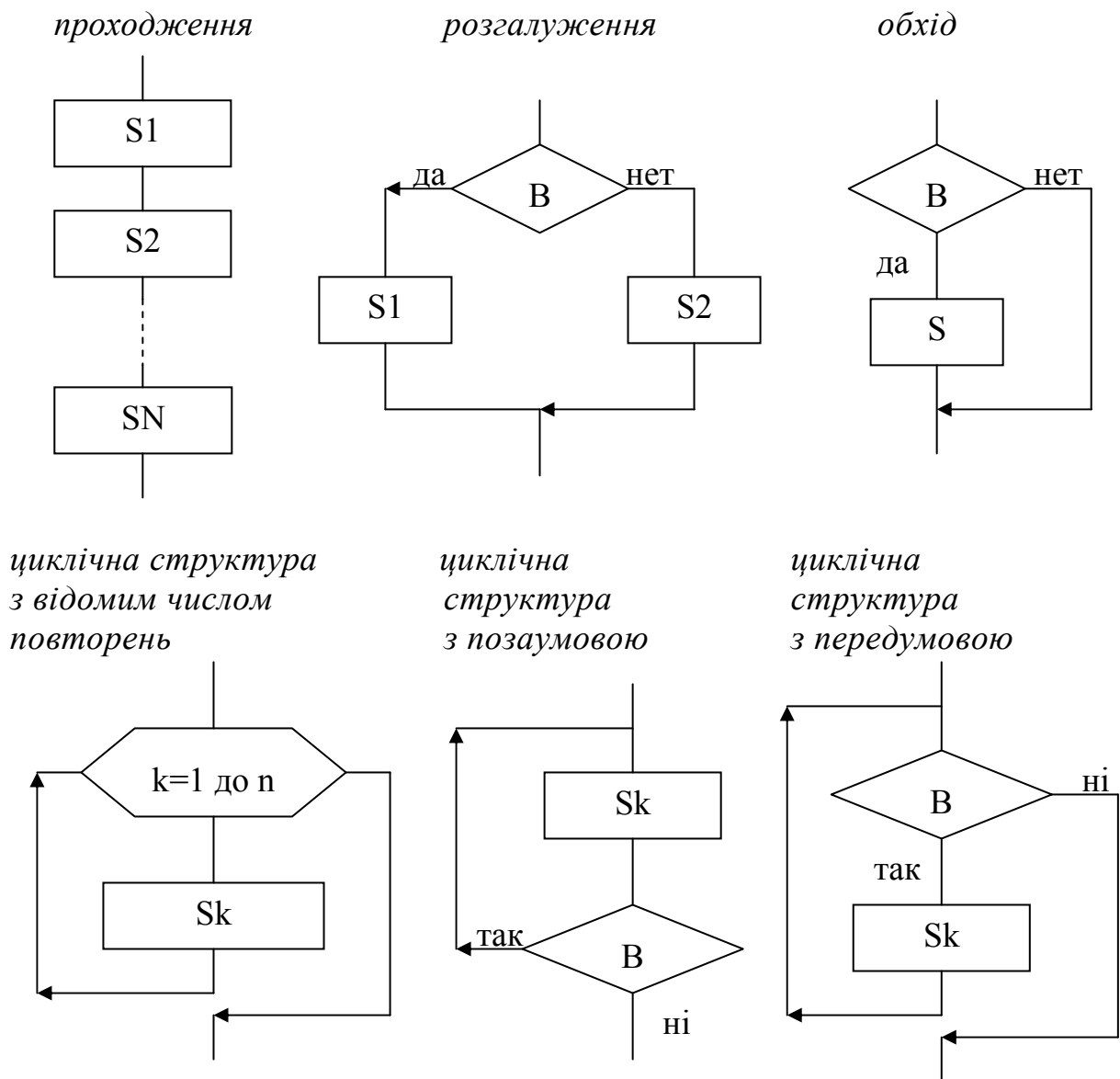


Всередині кожного блоку приводиться короткий (в основному формульний) опис відповідної операції.

Блоки з'єднуються лініями або стрілками, що вказують на операцію, до виконання якої потрібно перейти. *Рух праворуч і вниз* береться за замовчуванням і може відзначатися лінією. *Рух уліво і нагору* повинен обов'язково показуватися стрілкою.

Блоки операцій перевірки умови повинні мати два виходи: «Так» і «Ні». Стрілка або лінія з написом «Так» указує на операцію, до виконання якої необхідно перейти, якщо перевіряється виконувана умова. Стрілка або лінія з написом «Ні» указує на операцію, до виконання якої потрібно перейти у випадку, якщо перевіряється умова, що не виконується.

З перелічених блоків складають *алгоритмічні структури*, що дозволяють зобразити певні види дій:



У зображених алгоритмічних структурах S1, S2, ..., SN, S – обчислювальні оператори, B – логічний вираз, Sk – тіло циклічної структури, що виконується певне число раз.

Особливістю наведених алгоритмічних структур є те, що кожна з них має тільки один вхід і тільки один вихід.

Блок-схема, складена з наведених алгоритмічних структур, називається структурною. А суттю структурного програмування є процес розробки алгоритму за допомогою структурних блок-схем.

Серед множини різноманітних алгоритмів можна виділити три основних види алгоритмів:

- лінійні;
- розгалужені;
- циклічні.

Розмаїтість алгоритмів визначається тим, що будь-який алгоритм розпадається на частини, фрагменти і кожний фрагмент є алгоритмом одного із зазначених видів.

Лінійним називається *алгоритм*, у якому всі етапи розв'язання задачі виконуються строго послідовно. Лінійний алгоритм зображується за допомогою алгоритмічної структури *проходження*.

Розгалуженим алгоритмом називається алгоритм, у якому вибирається один із двох можливих шляхів обчислювального процесу. Кожний такий шлях називається *гілкою алгоритму*. Розгалужений алгоритм можна зобразити за допомогою алгоритмічних *структур розгалуження* або *обхід*.

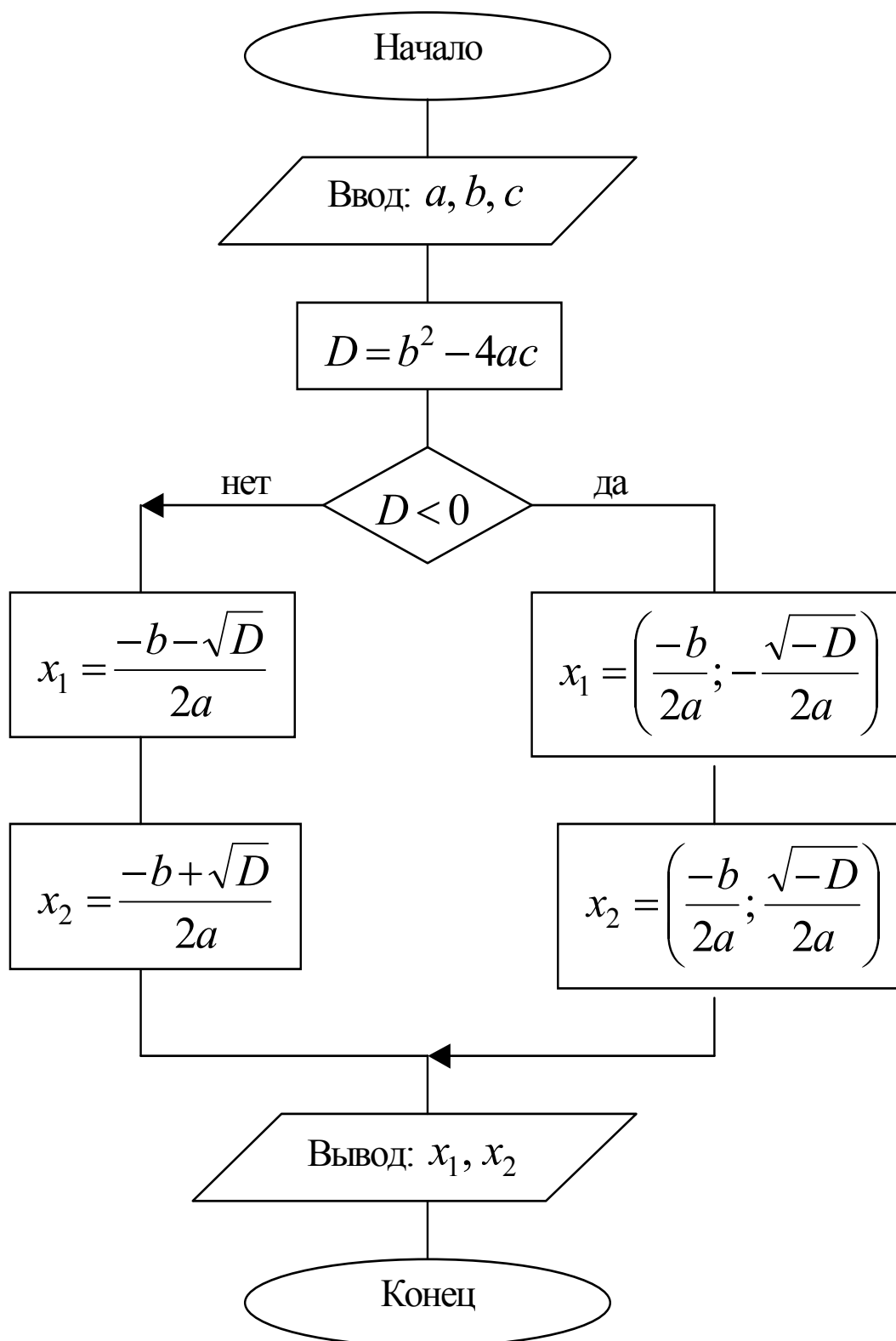
Циклічним називається *алгоритм*, у якому одержання результату забезпечується багаторазовим виконанням тих самих операцій. Циклічний алгоритм зображується за допомогою *циклічної структури з відомим числом повторень*, *циклічної структури з позаумовою* або *циклічної структури з передумовою*. Кожна з перелічених структур вибирається залежно від умов організації циклічного процесу і умов виходу з нього.

Якщо кількість *ітерацій* (однотипних операцій, повторюваних багато разів) визначається значенням заданої змінної, то використовується *циклічна структура з відомим числом повторень*. Така структура звичайно застосовується при роботі з елементами масиву, над якими виконуються однотипні операції.

Якщо вихід із циклічного процесу відбувається на деякій ітерації при виконанні умови виходу, що визначає досягнення заданої точності обчислень, то використовуються *циклічні структури з позаумовою* або *передумовою*. Вибір структури з умовою залежить від того, де необхідно перевіряти умову виходу: на початку ітерації або наприкінці. Варто звернути увагу на те, що коли використовується *структура з позаумовою*, то циклічний процес буде виконуватися хоча б один раз. Якщо ж використовується *структура з передумовою*, то циклічна структура за певних умов може не виконатися жодного разу. Саме цю особливість варто враховувати при виборі циклічної структури з умовою.

При розробці складних алгоритмів використовується *структурний підхід*, основними складовими якого є: спадне покрокове проектування, структурне програмування, модульне програмування, структурний контроль.

Зупинимося на характеристиці *структурного програмування*, яке припускає складання алгоритму розв'язання задачі із конструкцій строго певного виду. Будь-який алгоритм може бути представлений комбінацією базових алгоритмічних структур, кожна з яких має тільки один вхід і тільки один вихід. Проілюструємо це на прикладах.

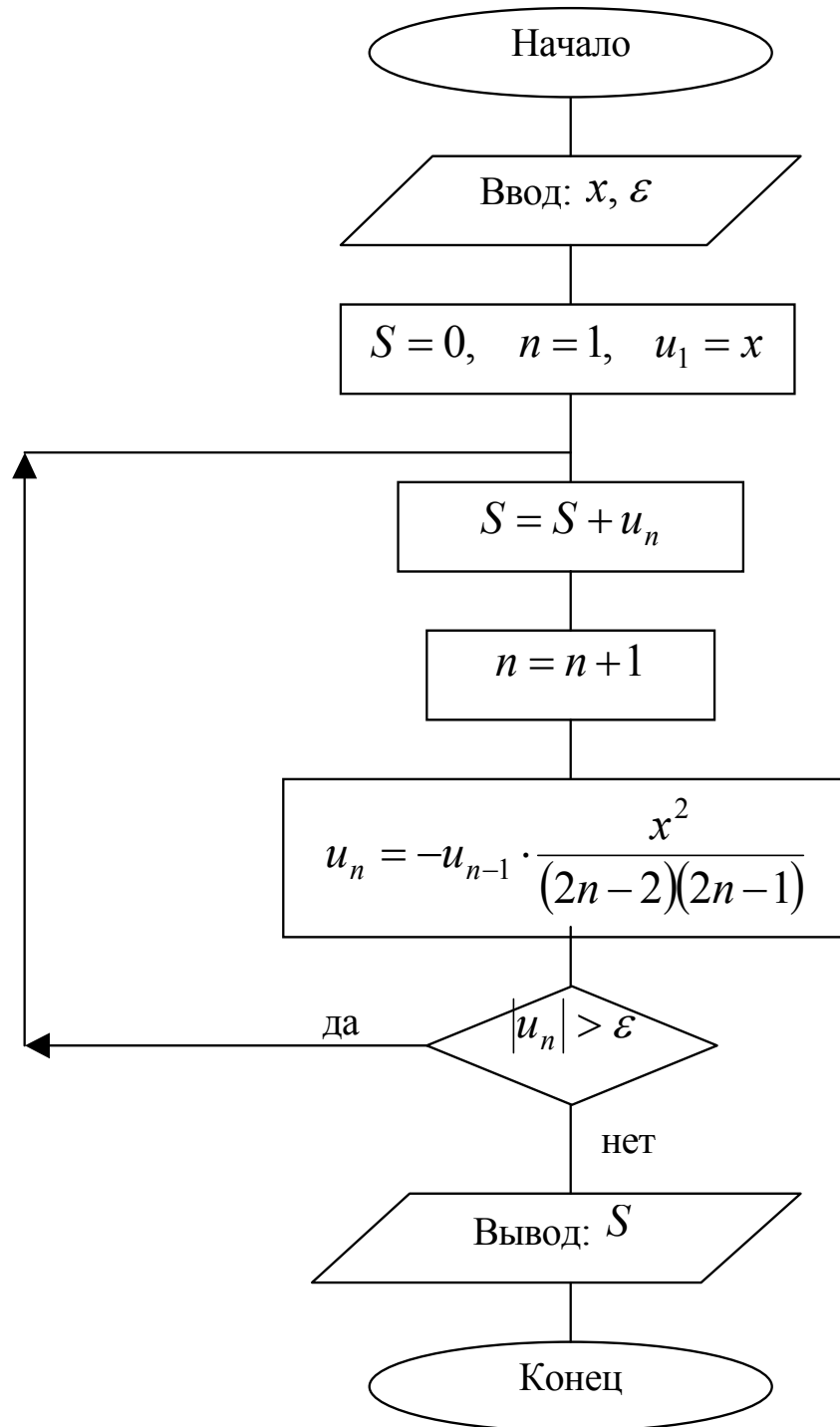


Приклад 3. Приведемо блок-схему алгоритму знаходження коренів квадратного рівняння

Блок-схема складена на основі алгоритмічної структури розгалуження, що відображає два можливих шляхи розв'язання задачі залежно від значення дискримінанта. Якщо при заданих коефіцієнтах квадратного рівняння дискримінант набирає негативне значення, то

обчислюються комплексні коріння, у противному випадку обчислюються дійсні коріння. Якщо значення дискримінанта буде дорівнювати нулю, то два дійсних корені будуть рівні між собою.

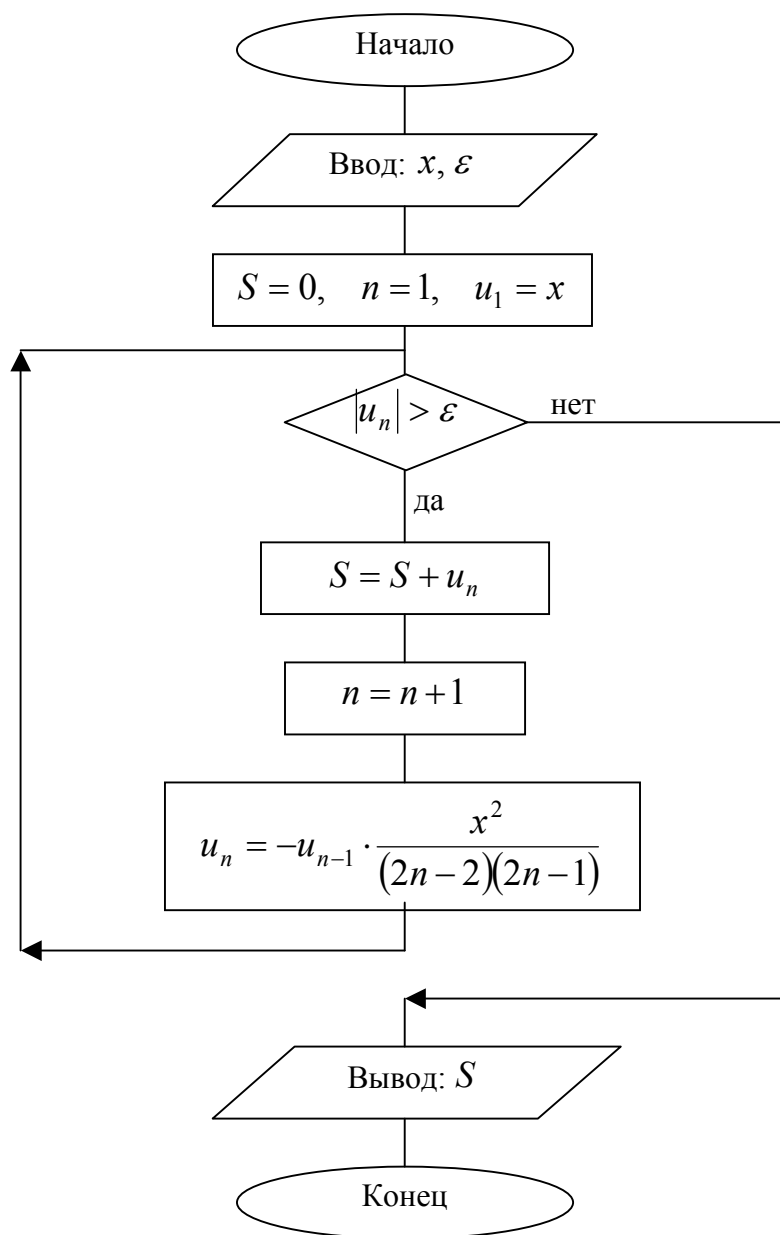
Приклад 4. Зобразимо блок-схему алгоритму обчислення значення функції $y = \sin x$ із заданою точністю ε , використовуючи розкладання функції в степеневий ряд. Математична модель задачі і словесно-формульний алгоритм розв'язання були отримані раніше.



В блок-схемі використовується циклічна структура з позаумовою. Особливістю даної структури є те, що тіло циклу виконається хоча б один раз. Тому, якщо при введенні даних аргумент x виявиться відразу менше ε , проте, він як доданок буде доданий до суми і результат обчислення функції буде дорівнювати x .

Далі наведена блок-схема розв'язання цієї ж задачі, яка використовує циклічну структуру з передумовою, що в описаній вище ситуації залишить суму рівною нулю, тому що тіло циклу не буде виконуватися жодного разу.

У всіх інших випадках, коли $|x| > \varepsilon$, використання обох структур призведе до одержання того самого результату.



Принцип спадного покрокового проектування, застосовуваний для розв'язання складних задач, передбачає розробку укрупнених блок-схем, що містять блоки, які можуть бути винесені окремо для більш докладної

деталізації виконуваних дій. Блок-схеми кожного рівня деталізації повинні бути структурними, тобто складатися з алгоритмічних структур з одним входом і одним виходом. Якщо блок-схема містить тільки елементарні блоки, тобто блоки, які не можуть бути далі деталізовані, то така блок-схема є докладною.

Опис алгоритму алгоритмічною мовою.

Алгоритмічна мова – це засіб для запису алгоритмів в аналітичному вигляді, проміжному між записом алгоритму природною мовою і записом мовою програмування. При записі алгоритму використовується обмежений набір термінів, більш строгі правила запису операцій для забезпечення однозначності розуміння алгоритму. Проілюструємо застосування алгоритмічної мови для оформлення алгоритмів розв'язання попередніх прикладів.

Приклад 5. Приведемо алгоритм розв'язання квадратного рівняння алгоритмічною мовою.

Алгоритм розв'язання квадратного рівняння

вхідні дані: a, b, c

вихідні дані: x_1, x_2

$$D = b^2 - 4ac$$

якщо $D \geq 0$ то

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

інакше

$$x_1 = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\sqrt{-D}}{2a} \right)$$

$$x_2 = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{\sqrt{-D}}{2a} \right)$$

кон якщо

кінець алгоритму

Приклад 6. Наведемо два варіанти алгоритму обчислення функції $y = \sin x$ алгоритмічною мовою, що відповідають блок-схемам.

Алгоритм обчислення функції (вар. 1)

вхідні дані: x, ε

вихідні дані: S

$$S = 0$$

$$n = 1, \quad u_1 = x$$

виконати

$$S = S + u_n$$

$$n = n + 1$$

$$u_n = -u_{n-1} \cdot \frac{x^2}{(2n-2)(2n-1)}$$

поки $|u_n| > \varepsilon$

кінець алгоритму

Алгоритм обчислення функції (вар 2)

вхідні дані: x, ε

вихідні дані: S

$$S = 0$$

$$n = 1, \quad u_1 = x$$

поки $|u_n| > \varepsilon$ виконати

$$S = S + u_n$$

$$n = n + 1$$

$$u_n = -u_{n-1} \cdot \frac{x^2}{(2n-2)(2n-1)}$$

кон поки

кінець алгоритму

1.1.4. Реалізація методу обчислень

Обчислення по алгоритмах здійснюються за допомогою різних обчислювальних засобів.

При ручному (безпосередньому) рахунку звичайно використовуються найпростіші обчислювальні засоби: таблиці, калькулятори, електронні обчислювальні машини без програмного керування і т.п. Проміжні результати дій алгоритму варто записувати в спеціальний розрахунковий бланк.

Наявність обчислювальної машини із програмним керуванням дозволяє реалізувати обчислення автоматично, під керівництвом програми. При цьому, можливо, що для обраного методу існує готова (стандартна) програма, що вводять у машину і здійснюють рахунок. Якщо ж задача не є типовою, а має свої особливості, то по розробленому алгоритму потрібно скласти програму. Програму записують вхідною мовою використовуваної обчислювальної машини. В ній у строгій послідовності вказують дії алгоритму з використанням даних задачі.

Істотним є контроль обчислень, що проводять по так званому *контрольному прикладу*. Результат контрольного приклада або очевидний, або його заздалегідь знаходять яким-небудь іншим способом. При ручному рахунку контроль рекомендується проводити поетапно. При розрахунках на ЕОМ по складеній програмі контрольний приклад заздалегідь прораховують вручну.

Останнім етапом розв'язання прикладної задачі є видача конкретних рекомендацій на підставі даних розрахунку.

1.2. ОЦІНКА ПОХИБКИ РЕЗУЛЬТАТУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

1.2.1. Джерела виникнення похибок

Розв'язання прикладних і математичних задач, як правило, пов'язане з наближеними значеннями величин, з використанням наближених методів розв'язання і наближених обчислень.

Математична модель задачі – це вже наближене подання реального об'єкта. Вихідні дані, одержувані з експерименту, можна в основному визначити лише приблизно. Навіть точні числа, такі, як π , e , $\sqrt{3}$, $\frac{6}{7}$ і т.п., при обчисленнях заміняють десятковими дробами, залишаючи певне число знаків після коми.

Похибка, яку допускають при переході від постановки задачі до відповідної математичної моделі, і похибка вихідних даних разом утворюють *непереборну похибку*.

Обчислювальні методи в основному також є наближеними і тому утворюють *похибку обчислювальних методів*.

Навіть при використанні найпростішої формули результат, як правило, одержують наближеним, тому що арифметичні дії виконуються над наближеними значеннями. При цьому утвориться обчислювальна похибка.

Похибка результату при розв'язанні задачі з використанням чисельних методів складається із суми:

- неперевірної похибки;
- похибки обчислювального методу;
- обчислювальної похибки.

Тому, перш ніж приступитися до вивчення обчислювальних методів, варто ознайомитися з різними видами похибок, загальними правилами дій над наближеними числами і оцінкою похибок при обчисленнях.

1.2.2. Похибка вихідних даних

Абсолютна похибка наближеного числа. Якщо a_0 – деяке число (відоме точно або не точно), a – число, взяте за наближене значення числа a_0 , то число $\Delta(a) > 0$, що задовольняє нерівності

$$|a_0 - a| \leq \Delta(a),$$

називається *абсолютною похибкою* (точніше *граничною абсолютною похибкою*) наближеного числа a .

Очевидно, таке визначення абсолютної похибки не є однозначним. Так, якщо $a_0 = \pi$, а за наближене значення взяти $a = 3,14$, то, враховуючі, що $3,140 < \pi < 3,142$, можна записати

$$|\pi - a| < 0,002, \quad |\pi - a| < 0,01, \quad |\pi - a| < 0,1.$$

Кожне із чисел 0,002, 0,01, 0,1 буде абсолютною похибкою числа a . Але чим ближче між собою числа $|a_0 - a|$ та $\Delta(a)$, тим точніше абсолютна похибка оцінює фактичну помилку.

Як абсолютну похибку $\Delta(a)$ наближеного числа a беруть по можливості найменше із чисел, що задовольняють наведеній нерівності, що рівносильно подвійній нерівності

$$a - \Delta(a) \leq a_0 \leq a + \Delta(a),$$

котрі умовно записують наступним чином:

$$a_0 = a \pm \Delta(a),$$

тобто a_0 приблизно дорівнює a з абсолютною похибкою $\Delta(a)$.

Так, у попередньому прикладі можна записати $\pi = 3,14 \pm 0,002$.

Абсолютна похибка є оцінкою точності числа.

Відносна похибка наближеного числа. Абсолютна похибка $\Delta(a)$ числа a , взятого за наближене значення числа a_0 , не завжди є зручною характеристикою ступеня точності a як наближення к a_0 . Похибка в один метр є дуже грубою помилкою при вимірюванні довжини приміщення, але її можна розглядати як малу помилку при вимірюванні відстані між двома вилученими точками земної поверхні. Отже, крім величини абсолютної похибки, необхідно ще знати її відношення до вимірюваної (або обчислюваної) величині, яке в основному виражається у відсотках.

Відносною похибкою $\delta(a)$ наближеного числа a називається відношення абсолютної похибки $\Delta(a)$ до модуля цього числа

$$\delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \quad \text{або в процентах} \quad \delta(a) = \frac{\Delta(a)}{|a|} \cdot 100\%.$$

Так, відносна похибка числа 3,14, взятого за наближене значення числа π , при $\Delta(3,14) = 0,002$ дорівнює

$$\delta(3,14) = \frac{0,002}{3,14} = 0,00064, \text{ или } 0,064\%.$$

У технічних розрахунках точність вимірювань характеризують відносною похибкою. Результат вважають гарним, якщо відносна похибка не перевищує 0,1 %.

З визначення відносної похибки випливає, що

$$\Delta(a) = |a| \cdot \delta(a).$$

Правило округлення чисел. Округлення числа полягає у відкиданні в ньому всіх цифр, що впливають за деяким розрядом. При цьому, якщо округлене число ціле, то відкинуті цифри цілої частини заміняють нулями.

Округлення звичайно виконують за наступним *правилом*:

- якщо перша цифра, що відкидається, менше п'яти, то остання цифра, що залишається не змінюється;

- якщо перша цифра, що відкидається, більше п'яти, то остання цифра, що залишається, збільшується на одиницю;
- якщо перша цифра, що відкидається, дорівнює п'яти, то додатно кожне із зазначених правил, але найчастіше округляють *за правилом парної цифри*: якщо остання цифра, що зберігається, непарна, то до неї додають одиницю, якщо ж парна, то залишають без змін.

Приклад 1. Округлити число $\pi = 3,14159\dots$ до:

- а) одного; б) трьох; в) чотирьох десяткових знаків.

Розв'язання.

- а) $3,14159 \approx 3,1$ (округлення до 0,1);
- б) $3,14159 \approx 3,142$ (округлення до 0,001);
- в) $3,14159 \approx 3,1416$ (округлення до 0,0001).

Якщо при округленні числа останні цифри, що зберігаються, нулі, то їх потрібно записувати.

Так, число 1,2997, округлене до 0,001, набирає вигляд 1,300.

Приклад 2. Округлити число 246250 до:

- а) сотень тисяч; б) десятків тисяч; в) сотень.

Розв'язання.

- а) $246250 \approx 2 \cdot 10^5$ (округлення до 10^5);
- б) $246250 \approx 25 \cdot 10^4$ (округлення до 10^4);
- в) $246250 \approx 2462 \cdot 10^2$ (округлення до 10^2).

При округленні цілих чисел звичайно замість відкинутих цифр записують не нулі, а число 10 у відповідному ступені. Ступінь числа 10 указує на число округлених знаків.

При округленні наближеного числа виникає додаткова похибка – *похибка округлення* $\Delta_0(a)$, що не перевершує половини одиниці розряду останньої цифри, що зберігається, (або п'яти одиниць першого відкинутого розряду).

Так, у прикладах 1, 2 маємо наступні похибки округлення:

$$\Delta_0(3,1) = 0,04159 \leq 0,05, \quad \Delta_0(3,142) = 0,00041 \leq 0,0005;$$

$$\Delta_0(25 \cdot 10^4) = 3750 \leq 0,5 \cdot 10^4.$$

Абсолютна похибка округленого числа є сума його первісної абсолютної похибки та похибки округлення.

Наприклад, нехай $\Delta(3,142) = 0,2$, при округленні 3,142 до 0,1 одержуємо 3,1 і $\Delta_0(3,1) = 0,042$, тоді $\Delta(3,1) = 0,2 + 0,042 = 0,242$.

Звичайно абсолютну та відносну похибки округляють до однієї, рідше до двох цифр, відмінних від нуля. *Округлення похибок виконують тільки убік збільшення до тих же розрядів, що й наближене число.*

Так, при $\Delta(3,1) = 0,242$ беруть $\Delta(3,1) = 0,3$.

Значущі, вірні і сумнівні цифри.

Значущою цифрою наближеного числа називається будь-яка його цифра, починаючи з першої ненульованої (рахуючи зліва направо).

Наприклад, у числі 0,00030900 перші чотири нулі не є значущими цифрами. Всі інші цифри (включаючи і наступні три нулі) – значущі.

У цілому округленому числі значущими звичайно вважають всі збережені цифри. Так, в округленому числі $120 \cdot 10^3$ цифри 1, 2, 0 – значущі.

Вірною цифрою (вірним знаком) наближеного числа a називається будь-яка його значуща цифра, для якої абсолютна похибка $\Delta(a)$ не перевершує половини розряду цієї цифри. Інші значущі цифри числа a називаються сумнівними.

Таким чином, якщо $\Delta(a) \leq 0,5 \cdot 10^{-n}$, то цифри числа a , починаючи з першої значущої та закінчуючи цифрою, що знаходиться в n -м розряді після коми, – вірні, а розташовані далі – сумнівні. Наприклад, число 647,326 при $\Delta(a) = 0,03 \leq 0,5 \cdot 10^{-1}$ має чотири вірні цифри 6, 4, 7, 3 і дві сумнівні 2, 6.

У математичних таблицях значень функцій приводяться тільки вірні цифри. Абсолютна похибка табличних значень, наприклад, у тризначних таблицях, не перевершує $0,5 \cdot 10^{-3}$, у семизначних – $0,5 \cdot 10^{-7}$.

Точність наближеного числа залежить не від кількості значущих цифр, а від кількості вірних цифр.

Остаточний наближений результат звичайно округляють до його вірних цифр, залишаючи одну сумнівну.

При розрахунках з наближеними числами в проміжних результатах зберігають одну, дві, а іноді і три сумнівні цифри.

Приклад 3. Задані числа з абсолютною похибкою округлити до вірних цифр. Визначити абсолютну похибку результату:

$$1) \quad a_1 = 2,6219, \quad \Delta(a_1) = 0,024;$$

$$2) \quad a_2 = 47,35, \quad \Delta(a_2) = 1,3;$$

$$3) \quad a_3 = 6,9971, \quad \Delta(a_3) = 0,0009;$$

$$4) \quad a_4 = 0,648, \quad \Delta(a_4) = 0,04.$$

Розв'язання.

1) Оскільки $0,024 < 0,05$, то число a_1 потрібно округлити до 0,1. Одержимо число $a_1 \approx 2,6$ із двома вірними цифрами.

Визначимо абсолютну похибку результату

$$\Delta(2,6) = 0,024 + |2,6219 - 2,6| = 0,0459 \approx 0,05.$$

2) Оскільки $1,3 < 0,5 \cdot 10^1$, то число a_2 потрібно округлити до десятків. Одержимо число $a_2 \approx 5 \cdot 10$ з одною вірною цифрою. Абсолютна похибка результату

$$\Delta(5 \cdot 10) = 1,3 + 2,65 = 3,95 \approx 4.$$

- 3) Оскільки $0,0009 < 0,005$, то округлення числа виконуємо до $0,01$. Одержимо число $a_3 \approx 7,00$ із трьома вірними цифрами. Абсолютна похибка результату

$$\Delta(a_3) = 0,0009 + |7,00 - 6,9971| = 0,0038 \approx 0,004.$$

У числі $7,00$ записані нулі свідчать про три його вірні знаки і цей запис відрізняється від 7 або $7,0$.

- 4) Оскільки $0,04 < 0,05$, то число a_4 , округляємо до $0,1$. Одержимо число $a_4 \approx 0,6$ з одною вірною цифрою. Абсолютна похибка результату

$$\Delta(0,6) = 0,04 + 0,048 = 0,088 > 0,05,$$

тобто цифра 6 уже сумнівна. Тому при округленні рекомендується залишати одну-дві сумнівні цифри, тобто

$$a_4 \approx 0,65, \Delta(0,65) = 0,042 \approx 0,05.$$

Зауважимо, що термін «вірні цифри» не слід розуміти буквально. Так, у числі $7,00$, що заміняє число $6,9971$, всі знаки вірні $|6,9971 - 7,00| < 0,005$, але жодна із цифр чисел $6,9971$ і $7,00$ не збігається. Однак вірні знаки наближеного числа часто збігаються з відповідними цифрами точного числа.

1.2.3. Похибка при арифметичних діях з наближеними числами

Похибки при арифметичних діях з наближеними числами виражаються через похибки первісних величин.

Абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох чисел дорівнює сумі абсолютних похибок доданків:

$$\Delta(a_1 + \dots + a_n) = \Delta(a_1) + \dots + \Delta(a_n).$$

З рівності випливає, що якщо всі доданки a_1, \dots, a_n (незалежно від їхніх знаків) мають ту саму абсолютну похибку $\Delta(a)$, то

$$\Delta(a_1 + \dots + a_n) = n \cdot \Delta(a).$$

Однак при великій кількості доданків ця формула дає завищені результати, оскільки відхилення доданків від їхніх точних значень можуть мати різні знаки і в сумі великої кількості доданків частково компенсуватися.

У теорії ймовірностей доводиться *правило Чеботарева*, по якому абсолютна похибка суми великої кількості доданків ($n > 10$) з однаковою абсолютною похибкою визначається по формулі

$$\Delta(a_1 + \dots + a_n) = \sqrt{3n} \cdot \Delta(a).$$

Якщо ж доданки мають різні абсолютні похибки, то абсолютна похибка суми наближених чисел не менше найбільшої з абсолютних похибок доданків.

Тому при обчисленні суми наближених чисел всі доданки потрібно округляти до кількості десяткових знаків числа з найбільшою абсолютною

похибкою, залишаючи один сумнівний знак (а при великій кількості доданків – два).

Приклад 4. В трикутнику сторони $a = 17,3\text{см}$, $b = 23,6\text{см}$, $c = 14,2\text{см}$, причому $\Delta(a) = \Delta(b) = \Delta(c) = 0,1\text{см}$. Визначити периметр p і $\Delta(p)$.

Розв'язання.

$$p = 17,3 + 23,6 + 14,2 = 55,1 \text{ (см)},$$

$$\Delta(55,1) = 3 \cdot 0,1 = 0,3 \text{ (см)}.$$

В числі $p = 55,1$ остання цифра сумнівна. Результат можна записати у вигляді $p = 55,1 \pm 0,3 \text{ (см)}$.

Відносна похибка суми декількох чисел визначається по формулі

$$\delta(a_1 + \dots + a_n) = \frac{\Delta(a_1 + \dots + a_n)}{|a_1 + \dots + a_n|} = \frac{\Delta(a_1) + \dots + \Delta(a_n)}{|a_1 + \dots + a_n|}.$$

Якщо a_1, \dots, a_n – числа одного знака, то *відносна похибка* $\delta(a_1 + \dots + a_n)$ знаходиться між найменшою та найбільшою з відносних похибок доданків:

$$\min\{\delta(a_1), \dots, \delta(a_n)\} \leq \delta(a_1 + \dots + a_n) \leq \max\{\delta(a_1), \dots, \delta(a_n)\}.$$

Так, в попередньому прикладі

$$\delta(a) = 0,58\%, \quad \delta(b) = 0,42\%, \quad \delta(c) = 0,70\%, \quad 0,42\% \leq \delta(p) \leq 0,70\%.$$

В дійсності

$$\delta(p) = \frac{0,3}{55,1} \cdot 100\% = 0,54\%$$

При відніманні двох чисел одного знака *відносна похибка різниці*

$$\delta(a_1 - a_2) = \frac{\Delta(a_1 - a_2)}{|a_1 - a_2|} = \frac{\Delta(a_1) + \Delta(a_2)}{|a_1 - a_2|}$$

може виявитися значно більше відносних похибок кожного з даних чисел. Це в основному буває, якщо $|a_1 - a_2|$ – мале число.

Приклад 5. Обчислити абсолютну і відносну похибки різниці чисел $a_1 = 9,78$, $\Delta(a_1) = 0,01$ і $a_2 = 9,22$, $\Delta(a_2) = 0,01$.

Розв'язання.

$$a_1 - a_2 = 0,56, \quad \Delta(a_1 - a_2) = 0,01 + 0,01 = 0,02,$$

$$\delta(a_1 - a_2) = \frac{0,02}{0,56} \cdot 100\% \approx 3,57\%,$$

хоча

$$\delta(a_1) = \frac{0,01}{9,78} \cdot 100\% \approx 0,102\%, \quad \delta(a_2) = \frac{0,01}{9,22} \cdot 100\% \approx 0,108\%.$$

Звичайне віднімання близьких чисел намагаються уникнути, замінюючи його, по можливості, іншими діями.

Відносна похибка добутку декількох чисел дорівнює сумі відносних похибок співмножників:

$$\delta(a_1 \cdot \dots \cdot a_n) = \delta(a_1) + \dots + \delta(a_n).$$

Абсолютна похибка добутку обчислюється по формулі

$$\Delta(a_1 \cdot \dots \cdot a_n) = |a_1 \cdot \dots \cdot a_n| \cdot \delta(a_1 \cdot \dots \cdot a_n).$$

Зокрема, якщо в добутку ca число c точне, то $\delta(c) = 0$ и $\delta(ca) = \delta(a)$; $\Delta(ca) = |ca \cdot \delta(a)| = |c| \cdot \Delta(a)$. Звідки одержимо

$$\Delta(c_1 a_1 + \dots + c_n a_n) = |c_1| \cdot \Delta(a_1) + \dots + |c_n| \cdot \Delta(a_n).$$

Приклад 6. Нехай $a = 4,3$ см, $b = 1,6$ см, $c = 2,8$ см – ребра прямокутного паралелепіпеда, причому

$$\Delta(a) = \Delta(b) = \Delta(c) = 0,1.$$

Знайти об'єм паралелепіпеда, відносну і абсолютну похибки результату.

Розв'язання.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда

$$V = abc = 19,264 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відносну похибку знаходимо по формулі

$$\delta(V) = \delta(19,264) = \frac{0,1}{4,3} + \frac{0,1}{1,6} + \frac{0,1}{2,8} \approx 0,121.$$

Абсолютну похибку обчислюємо по формулі

$$\Delta(19,264) = 19,264 \cdot 0,121 \approx 2,330$$

(похибки округлялися до тих же розрядів, що й V). Тому що $2,330 < 0,5 \cdot 10^1$, то в числі 19,264 вірна лише цифра десятків, а інші цифри сумнівні. Округляючи V , залишивши два сумнівних знаки, одержимо

$$V \approx 19,3 \text{ см}^3, \quad \Delta(V) = 2,4 \text{ (см)}, \quad \delta(V) = 12,5\%.$$

Відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника:

$$\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \delta(a_1) + \delta(a_2).$$

Зокрема, $\delta\left(\frac{1}{a}\right) = \delta(a)$.

Абсолютну похибку частки визначають по формулі

$$\Delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \left|\frac{a_1}{a_2}\right| \cdot \delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right).$$

Якщо кількість чисел у добутку або відношенні велика, а відносна похибка кожного числа приблизно однакова (дорівнює $\delta(a)$), то відносна похибка результату обчислюється по формулах Чеботарева

$$\delta(a_1 a_2 \dots a_n) = \sqrt{3n} \cdot \delta(a) \quad (n > 10),$$

$$\delta\left(\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m}\right) = \sqrt{3(n+m)} \cdot \delta(a) \quad (n+m > 10).$$

Приклад 7. Катети прямокутного трикутника $a = 2,6$ см, $b = 3,4$ см обчислені з абсолютною похибкою $\Delta(a) = \Delta(b) = 0,1$ см. Визначити $\operatorname{tg}(B)$ та $\Delta(\operatorname{tg}(B))$, $\delta(\operatorname{tg}(B))$.

Розв'язання.

$$\operatorname{tg}(B) = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg}(B) = \frac{3,4}{2,6} \approx 1,308.$$

Знаходимо відносну похибку

$$\delta(\operatorname{tg}(B)) = \delta(b) + \delta(a), \quad \delta(1,308) = \delta(3,4) + \delta(2,6) = \frac{0,1}{3,4} + \frac{0,1}{2,6} \approx 0,067.$$

Абсолютну похибку обчислюємо по формулі

$$\Delta(\operatorname{tg}(B)) = |\operatorname{tg}(B)| \cdot \delta(\operatorname{tg}(B)) \quad \Delta(1,308) = 1,308 \cdot 0,067 \approx 0,088.$$

Оскільки $0,088 < 0,5$, то в числі 1,308 вірні лише цифри цілої частини, тобто один знак, а інші сумнівні. Округляючи результат, залишивши один сумнівний знак, одержимо

$$\operatorname{tg}(B) \approx 1,3, \quad \Delta(\operatorname{tg}(B)) = 0,1, \quad \delta(\operatorname{tg}(B)) = 7,7\%.$$

При наявності декількох співмножників, у одного з яких відносна похибка у багато разів більше, ніж в інших (він обчислений найменш точно), *відносна похибка добутку буде визначатися саме по цій похибці*. Тому число вірних знаків в інших співмножниках треба вибирати по найменш точному числу, залишаючи один сумнівним. Аналогічно надходимо і при діленні.

1.2.4. Похибки при обчисленні наближених значень функції одної змінної

Нехай задана деяка диференційна функція $y = f(x)$ та x -наближене значення аргументу x_0 .

Наближеним значенням y функції y_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближеному значенні аргументу, тобто $y = f(x)$, а $y_0 = f(x_0)$. Виникає запитання про похибку цього наближення. Як відомо з курсу математичного аналізу, при досить малому приросту аргумента $\Delta(x)$ приріст функції $\Delta(y)$ приблизно дорівнює її диференціалу:

$$\Delta(y) = f(x) - f(x_0) \approx f'(x) \cdot \Delta(x).$$

Якщо відома абсолютна похибка аргументу $\Delta(x) > |x - x_0|$, то *абсолютну похибку функції* можна визначити по формулі

$$\Delta(y) = |f'(x)| \cdot \Delta(x).$$

Відносна похибка функції, визначається по формулі

$$\delta(y) = \frac{\Delta(y)}{|y|} = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot \Delta(x).$$

Як приклади визначимо абсолютні і відносні похибки деяких основних елементарних функцій.

1) *Логарифмічна функція* $f(x) = \log_a(x)$.

Абсолютна похибка логарифмічної функції має вигляд

$$\Delta(\log_a(x)) = \frac{1}{|x|} \cdot |\log_a(e)| \cdot \Delta(x) = |\log_a(e)| \cdot \frac{\Delta(x)}{|x|} = |\log_a(e)| \cdot \delta(x),$$

$$\text{где } \delta(x) = \frac{\Delta(x)}{|x|}.$$

Зокрема, якщо $a = 10$, то $\lg(e) \approx 0,5$ і $\Delta(\lg(x)) \approx 0,5 \cdot \delta(x)$, якщо ж $a = e$, то $\Delta(\ln(x)) = \delta(x)$ ($\ln(e) = 1$). Абсолютна похибка логарифмічної функції з підставою e дорівнює відносній похибці аргументу. Відносну похибку функції знаходимо по формулі

$$\delta(\log_a(x)) = \left| \frac{\log_a(e)}{\log_a(x)} \right| \cdot \delta(x).$$

2) *Степенева функція* $f(x) = x^a$, (a – кожне дійсне число).

$$\Delta(x^a) = |a \cdot x^{a-1}| \cdot \Delta(x),$$

$$\delta(x^a) = \left| \frac{ax^{a-1}}{x^a} \right| \cdot \Delta(x) = |a| \cdot \frac{\Delta(x)}{|x|} = |a| \cdot \delta(x).$$

Отже, відносна похибка степеневі функції пропорційна відносній похибці аргументу. Зокрема,

$$\delta(x^2) = 2\delta(x), \quad \delta(x^3) = 3\delta(x),$$

$$\delta(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\delta(x), \quad \delta(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\delta(x).$$

3) *Показова функція* $f(x) = a^x$.

$$\Delta(a^x) = a^x |\ln(a)| \cdot \Delta(x),$$

$$\delta(a^x) = |\ln(a)| \cdot \Delta(x).$$

4) *Тригонометричні функції* $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$.

$$\Delta(\sin x) = |\cos x| \cdot \Delta(x) \leq \Delta(x),$$

$$\Delta(\cos x) = |\sin x| \cdot \Delta(x) \leq \Delta(x).$$

Отже, абсолютні похибки функцій синус і косинус не перевершують абсолютної похибки свого аргументу. Відносні похибки можна оцінити по формулах

$$\delta(\sin x) = |\operatorname{ctgx}| \cdot \Delta(x),$$

$$\delta(\cos x) = |\operatorname{tgx}| \cdot \Delta(x).$$

1.2.5. Похибки при обчисленні наближених значень функції декількох змінних

Розглянемо тепер функцію, що диференціюється, наприклад, трьох змінних $u = f(x, y, z)$. Нехай x, y, z – наближені значення аргументів x_0, y_0, z_0 , обчислені з абсолютними похибками $\Delta(x), \Delta(y), \Delta(z)$. Наближеним значенням u функції u_0 вважають то значення, яке вона набирає при наближених значеннях аргументів $u = f(x, y, z)$, а точним значенням вважають $u_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. Для визначення похибок, як і у випадку функції одної змінної, скористаємося формулою диференціала, замінивши їм приріст функції:

$$\Delta u = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Delta z.$$

Абсолютну похибку $\Delta(u)$ функції при відомих абсолютних похибках аргументів $\Delta(x), \Delta(y), \Delta(z)$ знаходимо по формулі

$$\Delta(u) = \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right| \Delta z.$$

Відносну похибку визначимо наступним виразом

$$\delta(u) = \frac{\Delta(u)}{|u|}.$$

Приклад 8. Обчислити абсолютну і відносну похибки функції $u = xyz$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xy$, то абсолютна похибка обчислюється по формулі

$$\Delta(u) = |yz| \cdot \Delta x + |xz| \cdot \Delta y + |xy| \cdot \Delta z,$$

а відносна похибка по формулі

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \frac{|yz| \cdot \Delta x + |xz| \cdot \Delta y + |xy| \cdot \Delta z}{|xyz|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta z}{|z|} = \\ &= \delta(x) + \delta(y) + \delta(z) \end{aligned}$$

Отримана формула є формулою відносної похибки добутку.

1.2.6. Похибки обчислювальних методів

Похибки, що виникають при розв'язанні математичних задач чисельними методами, можна розділити на дві групи. Першу групу складають похибки, що не залежать від конкретного змісту задачі, а також похибки, викликані діями над наближеними числами. До другої групи належать похибки, що виникають за рахунок того, що математична задача, як правило, заміняється спрощеною, близькою за результатами наближеною задачею. Ці похибки (*похибки методу*) визначаються залежно від характеру задачі.

Надалі, в основному, у кожній задачі будуть розглядатися і похибки методу її розв'язання.

2. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Нехай функція $y = f(x)$ задана у вигляді таблиці:

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

тобто на відрізку $[a, b]$ в $n+1$ точці $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ відомі значення:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \dots, \quad y_n = f(x_n),$$

точки x_0, x_1, \dots, x_n називають вузлами інтерполяції, а y_0, y_1, \dots, y_n – значеннями функції у вузлах.

Задача інтерполяції полягає у визначенні значення таблично заданої функції $y = f(x)$ в точці $x \in [a, b]$, що не збігається с заданими вузловими точками.

Для розв'язання задачі інтерполяції потрібно побудувати функцію, що інтерполіує $y = F(x)$:

- 1) приналежну класу безперервних функцій;
- 2) приймаючу в заданих вузлових точках x_i значення $F(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n},$ задані в таблиці.

Тоді значення таблично заданої функції $y = f(x)$ в деякій точці $x \in [a, b]$ приблизно беруть рівним значенню функції, що інтерполіує, у цій точці $f(x) \approx F(x)$.

Функцію, що інтерполіує, звичайно знаходять серед багаточленів $P_n(x)$, степінь яких не перевищує числа n за умови, що в таблиці заданий $n+1$ вузол. Багаточлен $P_n(x)$, що набирає у вузлових точках значення $P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n},$ задані в таблиці, називають інтерполяційним багаточленом для функції $y = f(x)$.

Доведено, що існує тільки один багаточлен $P_n(x)$ степеня не вище n , що є інтерполяційним багаточленом для $y = f(x)$.

Заміна функції її інтерполяційним багаточленом $f(x) \approx P_n(x)$ при $x \in [a, b]$ називається інтерполяцією функції. Звичайно, при цьому виникає запитання про оцінку похибок такої заміни.

Геометричний зміст інтерполяції полягає в подаванні функції $y = f(x)$ у вигляді параболи $y = P_n(x)$ степені n , яка проходить через задані в таблиці точки $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$.

Формулу одержання значення функції в точці $x \in [x_0, x_n]$, що знаходиться між вузлами інтерполяції, вважають інтерполяційною, якщо ж

$x \notin [x_0, x_n]$, тобто знаходиться поза відрізком, то формулу називають екстраполяційною. Однак, надалі це розходження не враховується.

2.2. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Нехай функція представлена у вигляді таблиці

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Для зручності припустимо, що $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Побудуємо інтерполяційний багаточлен $P_n(x)$ ступеня n , що має в заданих $n+1$ вузлах інтерполяції ті ж значення, що й задана функція

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Для цього попередньо побудуємо допоміжні багаточлени степеня n , визначені наступним чином:

$$L_n(x, x_i) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Багаточлен $L_n(x_k, x_i)$ має наступні властивості:

- 1) є багаточленом n -ої степені, тому що в чисельнику знаходиться n множників, що містять змінну x ;
- 2) при $x = x_k$, $k \neq i$ багаточлен $L_n(x_k, x_i)$ перетворюється на нуль, тому що, в чисельнику дробі один з множників $(x_k - x_k) = 0$;

при $x = x_i$ багаточлен $L_n(x_i, x_i)$ дорівнює 1, тому що всі множники чисельника скоротяться з відповідними множниками знаменника

$$L_n(x_k, x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i. \end{cases}$$

Якщо тепер записати шуканий багаточлен $P_n(x)$ у вигляді

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^n L_n(x, x_i) \cdot y_i = L_n(x, x_0) \cdot y_0 + L_n(x, x_1) \cdot y_1 + \dots + L_n(x, x_n) \cdot y_n = \\ &= \frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_n)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \cdot y_1 + \\ &\quad + \dots + \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n \end{aligned}$$

то одержимо інтерполяційний багаточлен Лагранжа, що є розв'язанням поставленої задачі інтерполяції, тому що є багаточленом степені n , що набирає у вузлових точках задані в таблиці значення $P_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

Розглянемо часткові випадки багаточлена Лагранжа.

1) Нехай $n = 1$, тобто задані два вузла інтерполяції x_0 і x_1 , тоді

$$P_1(x) = L_1(x, x_0) \cdot y_0 + L_1(x, x_1) \cdot y_1 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1$$

є інтерполяційним багаточленом Лагранжа першої степені.

Заміна таблично заданої функції $y = f(x)$ багаточленом $P_1(x)$ є лінійна інтерполяція. Геометрично це означає, що через точки з координатами (x_0, y_0) та (x_1, y_1) на площині проводиться єдина пряма, яка і визначає значення функції в будь-якій проміжній точці.

2) Нехай $n = 2$, тобто задані три вузла інтерполяції x_0 , x_1 та x_2 , тоді

$$P_2(x) = L_2(x, x_0) \cdot y_0 + L_2(x, x_1) \cdot y_1 + L_2(x, x_2) \cdot y_2 = \\ = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot y_2$$

є інтерполяційним багаточленом Лагранжа другої степені. Заміна табличної функції багаточленом $P_2(x)$ є квадратичною інтерполяцією. Геометрично це означає, що через точки з координатами (x_0, y_0) , (x_1, y_1) і (x_2, y_2) на площині проводиться єдина парабола, яка і визначає значення функції в будь-якій проміжній точці.

Ясно, що в кожній точці $x \in [a, b]$, яка не є вузлом інтерполяції, задана функція $y = f(x)$ відрізняється від інтерполяційного багаточлена $P_n(x)$. Позначимо

$$R_n(x) = |f(x) - P_n(x)|.$$

Функція $R_n(x)$ називається похибкою інтерполяції в точці x . З теорії обчислювальних методів відома оцінка для $R_n(x)$: якщо функція $y = f(x)$ $n+1$ раз диференціюється на відрізку $[a, b]$, що містить всі вузлы інтерполяції $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ та точку x , то

$$R_n(x) \leq M_{n+1} \cdot \frac{|(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|}{(n+1)!}, \quad \text{де} \quad M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Приклад 1. Побудувати інтерполяційний багаточлен Лагранжа для функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Оцінити похибку інтерполяційного багаточлена при $x = 2,5$.

Розв'язання. Вихідні дані представимо у вигляді таблиці

x_i	1	2	3
$y_i = \sqrt[3]{x_i}$	1,000	1,260	1,442

Тут $n = 2$, тоді інтерполяційний багаточлен запишеться у вигляді:

$$P_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \cdot 1,000 + \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \cdot 1,260 + \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \cdot 1,442 =$$

$$= -0,039x^2 + 0,377x + 0,662.$$

Оцінимо похибку інтерполяції, використовуючи формулу

$$R_2(x) \leq M_3 \cdot \frac{|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|}{3!},$$

де $M_3 = \max_{1 \leq x \leq 3} |f'''(x)|.$

За умовою $f(x) = \sqrt[3]{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$,

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}.$$

На відрізку $x \in [1, 3]$ функція $f'''(x)$ позитивна і спадаюча.

Отже, $M_3 = \max_{1 \leq x \leq 3} |f'''(x)| = f'''(1) = \frac{10}{27} \approx 0,37$, тоді

$$R_2(2,5) \leq 0,37 \cdot \frac{|(2,5-1)(2,5-2)(2,5-3)|}{3!} \leq 0,023.$$

Представимо багаточлен Лагранжа в більш компактном вигляді, зручним для програмування

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \right) \cdot y_i.$$

2.3. КІНЦЕВІ РІЗНИЦІ

2.3.1. Визначення кінцевих різниць

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Вузли інтерполяції є рівновіддаленими з кроком h , тобто для кожного $i = \overline{1, n}$ $x_i - x_{i-1} = h$. Звідки випливає, що $x_1 = x_0 + h$,

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad \dots \quad x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh.$$

Складемо різниці між значеннями функції з таблиці

$$\begin{aligned}
 y_1 - y_0 &= \Delta y_0, \\
 y_2 - y_1 &= \Delta y_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_{i+1} - y_i &= \Delta y_i, \\
 &\dots\dots\dots \\
 y_n - y_{n-1} &= \Delta y_{n-1}.
 \end{aligned}$$

і назвемо їх *кінцевими різницями першого порядку*.

Різниці перших кінцевих різниць

$$\begin{aligned}
 \Delta y_1 - \Delta y_0 &= \Delta^2 y_0, \\
 \Delta y_2 - \Delta y_1 &= \Delta^2 y_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \Delta y_{i+1} - \Delta y_i &= \Delta^2 y_i, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} &= \Delta^2 y_{n-2}.
 \end{aligned}$$

називають *кінцевими різницями другого порядку*.

Кінцеві різниці k-го порядку визначаються через кінцеві різниці (k - 1)-го порядку по формулах

$$\begin{aligned}
 \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0 &= \Delta^k y_0, \\
 \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1 &= \Delta^k y_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i &= \Delta^k y_i, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \Delta^{k-1} y_{n-k+1} - \Delta^{k-1} y_{n-k} &= \Delta^k y_{n-k}.
 \end{aligned}$$

при цьому $k = \overline{1, n}$; $i = \overline{0, n-k}$.

Кінцева різниця n-го порядку тільки одна і визначається через кінцеві різниці (n - 1)-го порядку по формулі

$$\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0 = \Delta^n y_0.$$

Послідовні різниці звичайно записують у вигляді таблиці. Найчастіше їх розташовують у формі діагональної таблиці, у якій різниці записані в одному рядку з від'ємниками.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$...
$x_3 = x_0 + 3h$	y_3	Δy_3	...	
$x_4 = x_0 + 4h$	y_4	...		
...	...			

Приклад 2. Скласти таблицю кінцевих різниць до третього порядку для функції $y = e^x$ на відрізку $x \in [1; 2]$ з кроком $h = 0,2$.

Розв'язання. Відповідні обчислення представлені в таблиці.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,0	2,718	0,602	0,133	0,030
1,2	3,320	0,735	0,163	0,036
1,4	4,055	0,898	0,199	0,043
1,6	4,953	1,097	0,242	
1,8	6,050	1,339		
2,0	7,389			

2.3.2. Властивості кінцевих різниць

1) Вираз кінцевих різниць через значення функцій.

По визначенню кінцеві різниці k -го порядку визначаються через кінцеві різниці $(k-1)$ -го порядку. Однак послідовні різниці можна виразити і безпосередньо через значення функції. Дійсно,

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Далі, знаходимо

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_i &= \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = \\ &= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \end{aligned}$$

Кінцева різниця $\Delta^k y_i$ дорівнює сумі $(k+1)$ значення функції, узяті з біноміальними коефіцієнтами і знаками, що чергуються

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k \cdot y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot y_{i+k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot y_{i+k-3} + \dots + (-1)^k \cdot y_i.$$

2) Вираз значень функції через кінцеві різниці.

З визначення кінцевих різниць першого порядку випливає, що

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

аналогічно

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \Delta y_1 = (y_0 + \Delta y_0) + \Delta y_1 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta y_1 - \Delta y_0 = \\ &= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \end{aligned}$$

Також аналогічно, можна визначити значення y_k при кожному k через y_0 та різниці до k -го порядку

$$y_k = y_0 + k \cdot \Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_0 + \dots + \Delta^k y_0.$$

3) Кінцеві різниці для багаточленів.

Якщо $P_n(x)$ – багаточлен степені n , то

- для кожного $k < n$ кінцеві різниці $\Delta^k P_n(x_i)$ є багаточленами степені $n - k$;
- кінцеві різниці n -го порядку стали $\Delta^n P_n(x_i) = const$;
- для кожного $k > n$ кінцеві різниці $\Delta^k P_n(x_i) = 0$.

Справедливо і зворотне твердження: якщо n -е кінцеві різниці функції, утворені для рівновіддалених значень аргументу, стали $\Delta^n f(x_i) = const$, то функція є багаточленом степені n , тобто $f(x) = P_n(x)$.

Це означає – якщо для деякої функції $y = f(x)$ кінцеві різниці n -го порядку практично стали, то функцію приблизно можна представити багаточленом степені n .

Приклад 3. Скласти таблицю кінцевих різниць для багаточлена другої степені $f(x) = x^2 - 3x + 2$ $x \in [1; 2,8]$ з кроком $h = 0,2$.

Розв'язання. Всі обчислення наведені в таблиці.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,0	0,00	-0,16	0,08	0,00
1,2	-0,16	-0,08	0,08	0,00
1,4	-0,24	0,00	0,08	0,00
1,6	-0,24	0,08	0,08	0,00
1,8	-0,16	0,16	0,08	0,00
2,0	0,00	0,24	0,08	0,00
2,2	0,24	0,32	0,08	0,00
2,4	0,56	0,40	0,08	
2,6	0,96	0,48		
2,8	1,44			

Як видно з таблиці, кінцеві різниці другого порядку є сталими, а кінцеві різниці третього порядку дорівнюють нулю.

Приклад 4. Функція задана таблицею. За допомогою послідовних кінцевих різниць визначити степінь багаточлена, яким можна інтерполювати дану функцію.

Розв'язання. Послідовні обчислення наведені в таблиці.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0,30	1,0313	-0,0330	-0,0038	0,0006
0,35	0,9983	-0,0368	-0,0032	0,0005
0,40	0,9615	-0,0400	-0,0027	0,0004
0,45	0,9215	-0,0427	-0,0023	0,0007
0,50	0,8788	-0,0450	-0,0016	0,0005
0,55	0,8338	-0,0466	-0,0011	0,0006
0,60	0,7872	-0,0477	-0,0005	
0,65	0,7395	-0,0482		
0,70	0,6913			

Кінцеві різниці третього порядку можна вважати практично сталими, а кінцеві різниці четвертого порядку рівними нулю.

Отже, на розглянутому проміжку функцію доцільно інтерполювати багаточленом третьої степені.

4) Зв'язок кінцевих різниць із похідними.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ достатнє число раз безупинно диференцює на відрізку $x \in [a, b]$, що містить всі вузли інтерполяції.

Зв'язок між кінцевими різницями і похідними того ж порядку встановлюється за допомогою формули кінцевих приростів Лагранжа

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi)(x_{i+1} - x_i), \quad x_i < \xi < x_{i+1},$$

яку запишемо в позначеннях кінцевих різниць

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi) \cdot h, \\ x_i < \xi < x_{i+1}, \quad h = x_{i+1} - x_i.$$

Двічі застосовуючи формулу кінцевих приростів Лагранжа, одержимо співвідношення між другою кінцевою різницею і похідною другого порядку

$$\Delta^2 y_i = f''(\xi) \cdot h^2, \quad x_i < \xi < x_{i+2}.$$

Аналогічно одержимо

$$\Delta^k y_i = f^{(k)}(\xi) \cdot h^k, \quad x_i < \xi < x_{i+k}.$$

З формул випливає, що при малому кроці h можна приблизно обчислювати похідні від таблично заданих функцій по кінцевих різницях на відповідних ділянках таблиці

$$f'(\xi) \approx \frac{\Delta y_i}{h}, \quad x_i < \xi < x_{i+1},$$

$$f''(\xi) \approx \frac{\Delta^2 y_i}{h^2}, \quad x_i < \xi < x_{i+2},$$

.....

$$f^{(k)}(\xi) \approx \frac{\Delta^k y_i}{h^k}, \quad x_i < \xi < x_{i+k}.$$

Однак для $k > 2$ формули застосовувати не рекомендується, тому що зростає похибка.

З ростом порядку кінцевих різниць точність їхніх обчислень швидко убуває. Це відбувається в основному за рахунок того, що абсолютна похибка різниць зростає, а їхні абсолютні значення убувають. Дійсно, якщо $\Delta y = \varepsilon$ – абсолютна похибка значень функції, то похибка першої кінцевої різниці $\Delta(\Delta y) = 2\varepsilon$, похибка другої кінцевої різниці $\Delta(\Delta^2 y) = 4\varepsilon$.

2.4. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ БАГАТОЧЛЕН НЬЮТОНА

2.4.1. Перша інтерполяційна формула Ньютона

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Вузли інтерполяції є рівновіддаленими з кроком h , тобто для кожного $i = \overline{1, n}$ $x_i - x_{i-1} = h$. Звідси випливає, що $x_1 = x_0 + h$,

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad \dots \quad x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh.$$

Розглянемо багаточлен степені n , записаний у вигляді

$$P_n(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \dots + q_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) + \dots + q_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

і визначимо його коефіцієнти q_0, q_1, \dots, q_n так, щоб у вузлах інтерполяції значення багаточлена збігалося зі значеннями, заданими в таблиці, тобто

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

$$P_n(x_0) = y_0, \text{ звідки } q_0 = y_0.$$

$$P_n(x_1) = y_1, \text{ тобто } q_0 + q_1(x_1 - x_0) = y_1, \quad y_0 + q_1 h = y_1, \text{ звідки } q_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

$$P_n(x_2) = y_2, \text{ тобто } q_0 + q_1(x_2 - x_0) + q_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2,$$

$$y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot 2h + q_2 2h^2 = y_2, \quad q_2 = \frac{y_2 - 2 \cdot \Delta y_0 + y_0}{2h^2}, \text{ звідки } q_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}.$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$q_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \quad \dots, \quad q_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}, \quad \dots, \quad q_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Підставимо всі отримані коефіцієнти у формулу для багаточлена і одержимо

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Це і буде *перша інтерполяційна формула Ньютона*.

Отриману формулу називають інтерполяційною формулою для інтерполяції вперед, тому що вона будується з використанням значення функції і її різниць у початковому вузлі інтерполяції x_0 . Її звичайно застосовують при інтерполяції в точках x , близьких до x_0 (для зменшення похибки інтерполяції).

Оцінка похибки використання інтерполяційної формули Ньютона визначається так само, як і для багаточлена Лагранжа.

Однак, враховуючи, що вузли інтерполяції рівновіддалені, і вважаючи, що додатковий вузол інтерполяції відомий x_{n+1} , для оцінки похибки $R_n(x)$ можна скористатися формулою

$$R_n(x) \leq \left| \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}} \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(n + 1)!} \right|.$$

Приклад 5. Побудувати інтерполяційний багаточлен Ньютона для функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Порівняти результат з результатом Прикладу 1 з п. 2.2.

Розв'язання. Вузлів інтерполяції три, так що будемо будувати багаточлен Ньютона другого порядку. Для цього обчислимо відповідні кінцеві різниці, результати наведемо в таблиці.

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	1	1,000	0,260	-0,078
1	2	1,260	0,182	
2	3	1,442		

Підставимо отримані значення в інтерполяційну формулу Ньютона, враховуючи, що $h = 1$, одержимо

$$P_2(x) = 1 + 0.260 \cdot (x - 1) - \frac{0.078}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = -0.039x^2 + 0.377x + 0.662.$$

Отриманий багаточлен тотожно збігається з інтерполяційним багаточленом Лагранжа. Додатковий вузол не заданий, тому похибка визначається по тій же формулі, що і для багаточлена Лагранжа.

2.4.2. Друга інтерполяційна формула Ньютона

Нехай функція $y = f(x)$ як і раніше задана таблицею

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Вузли інтерполяції є рівновіддаленими з кроком h , тобто для кожного $i = \overline{1, n}$ $x_i - x_{i-1} = h$. Звідки випливає, що $x_1 = x_0 + h$,

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad \dots \quad x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh.$$

Якщо необхідно інтерполювати функцію в точках x , близьких до вузла інтерполяції x_n , то краще користуватися так званою формулою для інтерполяції назад.

Для висновку цієї формули представимо багаточлен $P_n(x)$ у вигляді

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_n) + \dots + b_k(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_{n-(k-1)}) + \dots + b_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

і визначимо його коефіцієнти b_0, b_1, \dots, b_n так, щоб у вузлах інтерполяції значення багаточлена збігалося зі значеннями, заданими в таблиці, тобто

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

$$P_n(x_n) = y_n, \quad \text{звідки } b_0 = y_n.$$

$$P_n(x_{n-1}) = y_{n-1}, \quad \text{тобто } b_0 + b_1(x_{n-1} - x_n) = y_{n-1}, \quad \text{звідки } b_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

$$P_n(x_{n-2}) = y_{n-2}, \quad b_0 + b_1(x_{n-2} - x_n) + b_2(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) = y_{n-2},$$

$$y_n - \frac{\Delta y_{n-1}}{h} \cdot 2h + b_2 2h^2 = y_{n-2}, \quad b_2 = \frac{y_n - 2 \cdot \Delta y_{n-1} + y_{n-2}}{2h^2}, \quad \text{звідки } b_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}.$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$b_3 = \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}, \quad \dots, \quad b_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Підставимо всі отримані коефіцієнти у формулу для багаточлена і одержимо

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_{n-(k-1)}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

Це і буде друга інтерполяційна формула Ньютона.

Оцінка похибки використання інтерполяційної формули Ньютона визначається так само, як і для багаточлена Лагранжа.

Однак, якщо відомий додатковий вузол інтерполяції x_{n+1} , для оцінки похибки $R_n(x)$, як і в першій формулі Ньютона, можна скористатися співвідношенням

$$R_n(x) \leq \left| \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}} \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} \right|.$$

Інтерполяційні формули Ньютона можна представити в більш компактному вигляді, зручному для програмування.

Перша інтерполяційна формула Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x-x_i) \right).$$

Друга інтерполяційна формула Ньютона

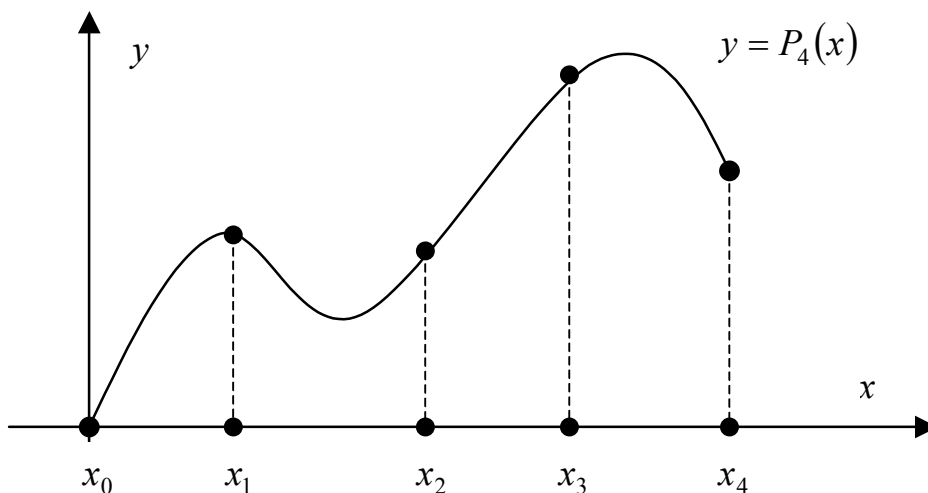
$$P_n(x) = y_n + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x-x_{n-i}) \right).$$

2.5. ПОРІВНЯННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ БАГАТОЧЛЕНІВ

Приведемо порівняльну характеристику розглянутих інтерполяційних багаточленів Лагранжа, першої, другої формул Ньютона:

1. Інтерполяційні багаточлени Лагранжа та Ньютона мають степінь, не вище n за умови, що побудова багаточленів виконується по таблиці, у якій заданий $n+1$ вузол. При побудові багаточлена Лагранжа вузли можуть бути розташовані довільно, при побудові багаточленів Ньютона вузли повинні бути рівновіддаленими.
2. Багаточлен Лагранжа складається із суми рівноправних доданків, кожний з яких є багаточленом n -ої степені і повинний брати участь у всіх обчисленнях. У багаточленів Ньютона степені їхніх доданків постійно підвищуються, починаючи від нульового в першому доданку до n -ої в останньому. Крім того, у формулах Ньютона знаменники коефіцієнтів містять величину $k!$. Ці числа зі збільшенням k швидко зростають, отже, коефіцієнти зменшуються і при обчисленнях, починаючи з деякого номера, останніми доданками більш високої степені можна зневажити.
3. При додаванні додаткового вузла в таблицю кожний доданок багаточлена Лагранжа зміниться, що вплине на значення багаточлена в цілому. Додаток же нового вузла інтерполяції у формулах Ньютона додасть лише новий доданок, але не змінить всіх попередніх доданків.

4. Якщо при побудові багаточленів Лагранжа і Ньютона вузли інтерполяції збігаються, то багаточлени будуть тотожно рівні, тобто рівні коефіцієнти при однакових степенях. Це впливає з одиничності побудови багаточлена степені n за умови проходження функцій через задані точки. Зазначені багаточлени відрізняються лише способом їхньої побудови.



2.6. БАГАТОІНТЕРВАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

Якщо при розв'язанні задачі інтерполяції в таблиці задана велика кількість вузлів, то доводиться будувати інтерполяційний багаточлен досить високої степені, що приводить до великої кількості обчислень, нагромадженню похибок обчислень, збільшенню кількості машинного часу, необхідно для розв'язання задачі. Все це сильно ускладнює розв'язання задачі інтерполяції.

Щоб позбутися зазначених недоліків при розв'язанні задачі інтерполяції, іноді використовують багатоінтервальну інтерполяцію, що дозволяє визначити шукане значення функції в заданій точці за допомогою лінійної або квадратичної функції, побудованої на значеннях, заданих у сусідніх вузлах.

2.6.1. Лінійна багатоінтервальна інтерполяція

Нехай функція задана у вигляді таблиці

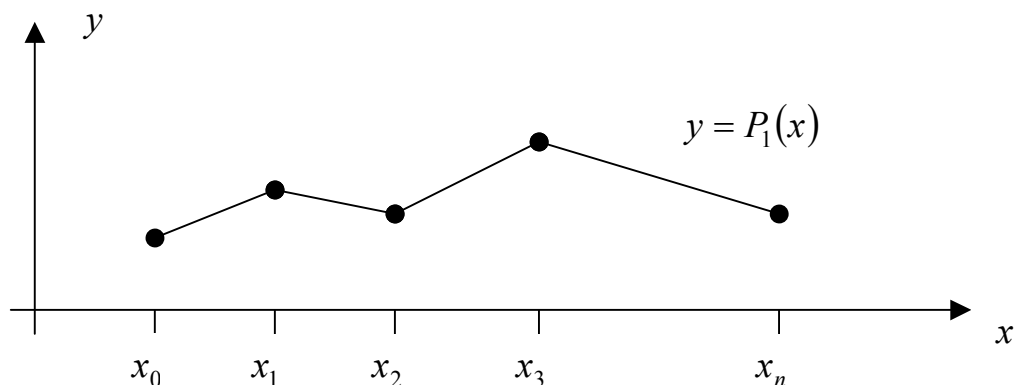
x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Будемо вважати, що $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Побудуємо інтерполюючу функцію $P_1(x)$, що складається з відрізків лінійних функцій $L_1^i(x)$, $i = \overline{1, n}$, побудованих на значеннях, заданих у послідовних вузлах.

Нехай $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, на кожному такому проміжку побудуємо багаточлен Лагранжа першої степені вигляду

$$L_1^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i.$$

Сукупність багаточленів Лагранжа першої степені, побудованих на всіх часткових проміжках, є інтерполююча функція $P_1(x)$. З геометричної точки зору інтерполююча функція є – ламана лінія, що з'єднає точки площини, координати яких задані в таблиці.



2.6.2. Квадратична багатоінтервальна інтерполяція

Для таблично заданої функції

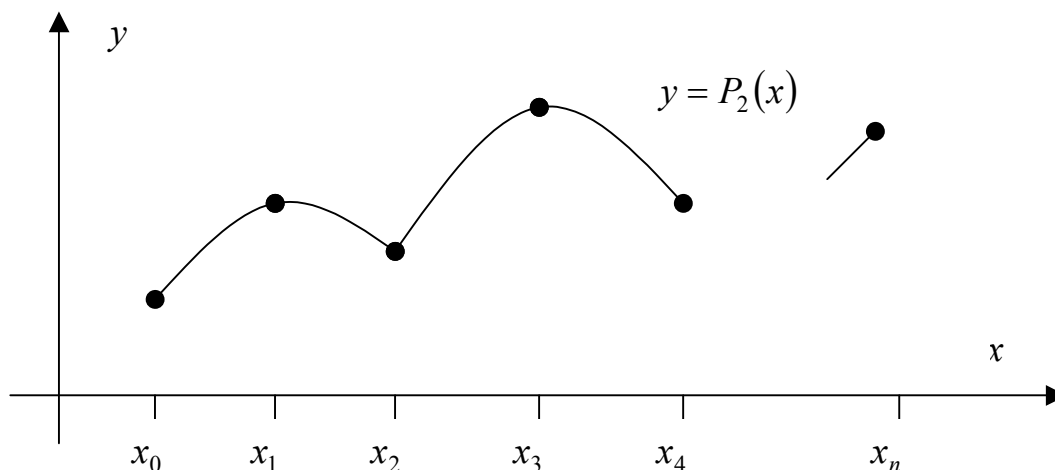
x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

побудуємо інтерполюючу функцію $P_2(x)$, що складається з послідовності квадратичних функцій $L_2^i(x)$, $i = 1, 3, \dots, n-1$, побудованих на трьох послідовних значеннях з таблиці.

Нехай $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i = 1, 3, 5, \dots, n-1$, де n – парне число. На кожному проміжку побудуємо багаточлен Лагранжа другої степені вигляду

$$L_2^i(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}$$

З геометричної точки зору інтерполююча функція є сукупністю парабол, проведених по трьох послідовних точках на площині, координати яких визначені в таблиці.



2.6.3. Кубічна багатоінтервальна інтерполяція

Для таблично заданої функції

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

побудуємо інтерполюючу функцію $P_3(x)$, що складається з послідовності кубічних функцій $L_3^i(x)$, $i = 2, 5, \dots, n-1$, побудованих на чотирьох послідовних значеннях з таблиці.

Нехай $x \in [x_{i-2}, x_{i+1}]$, $i = 2, 5, \dots, n-1$, де n – кратно трьом. На кожному такому проміжку побудуємо багаточлен Лагранжа третьої степені вигляду

$$L_3^i(x) = \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-2}-x_{i-1})(x_{i-2}-x_i)(x_{i-2}-x_{i+1})} \cdot y_{i-2} + \frac{(x-x_{i-2})(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_{i-2})(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} \cdot y_i + \frac{(x-x_{i-2})(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-2})(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} \cdot y_{i+1}$$

З геометричної точки зору інтерполююча функція є сукупністю кубічних парабол, проведених по чотирьох послідовних точках на площині, координати яких визначені в таблиці.

Особливістю побудованих інтерполюючих функцій є те, що вони складаються із частин лінійних, квадратичних або кубічних функцій, по'єднаних між собою в точках стикування, при цьому є функціями безперервними. Однак у точках стикування ці функції не диференціюються, тому що в цих точках не існує дотична до графіка функції.

3. СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Нехай функція задана у вигляді таблиці

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Якщо задана таблиця значень функції містить велику кількість вузлів, то при розв'язанні задачі інтерполяції доводиться будувати багаточлени Лагранжа або Ньютона досить високої степені, що приводить до великого об'єму обчислень і нагромадженню похибок.

Якщо для розв'язання задачі інтерполяції з великою кількістю вузлів використовувати багатоінтервальну інтерполяцію, то інтерполуюча функція буде не всюди диференціюватися. Похідна інтерполуюча функція не буде існувати в точках стикування лінійних, квадратичних або кубічних функцій.

Перерахованих недоліків можна уникнути, якщо вибрати сплайн-інтерполуючу функцію як інтерполуючу функцію.

Інтерполяційним сплайном називається функція, гладко склеєна з частин функцій деякого класу і набираюча у вузлах значення, задані в таблиці. Для побудови інтерполяційного сплайна на практиці звичайно використовуються багаточлени першої $y = P_1(x)$, другої $y = P_2(x)$ або третьої $y = P_3(x)$ степені.

Функцію $y = S_k(x)$ будемо називати інтерполяційним сплайном k -ої степені, якщо вона задовольняє умовам:

- 1) на кожному i -ом частковому проміжку сплайн є багаточленом k -ої степені, тобто $S_k(x) = P_k^i(x)$ для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$;
- 2) сплайн $y = S_k(x)$ є функцією безперервної разом з своїми похідними до $k - 1$ -го порядку;
- 3) у вузлових точках сплайн повинен набирати значення, задані в таблиці, тобто $S_k(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$.

Гладке склеювання окремих функцій досягається за рахунок безперервності похідних до $k - 1$ -го порядку у вузлових точках.

3.2. ЛІНІЙНИЙ СПЛАЙН

Нехай функція задана таблицею

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Побудуємо сплайн-інтерполюючу функцію, що називається *лінійним* сплайном, тобто на кожному i -ом частковому проміжку вона повинна представлятися багаточленом першої степені

$$S_1(x) = P_1^i(x) \quad \text{для } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Крім того, лінійний сплайн повинен бути безперервним і мати безперервні похідні нульового порядку. Похідною нульового порядку лінійного сплайна є сама функція, що по побудові і так буде безперервною.

Сплайн-інтерполюючу функцію будемо шукати у вигляді

$$P_1^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) \quad \text{при } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів $a_i, b_i, i = \overline{1, n}$ скористаємося умовою, що у вузлових точках кожного часткового проміжку сплайн повинен набирати значення, задані в таблиці

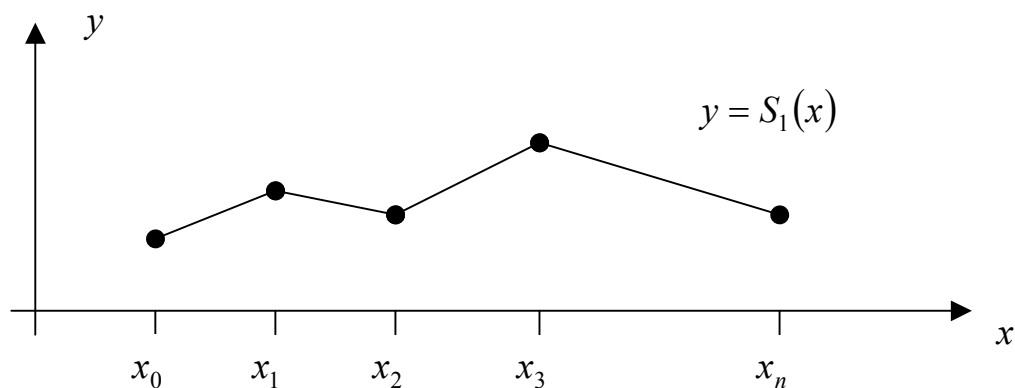
$$P_1^i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad a_i + b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad a_i = y_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$P_1^i(x_i) = y_i \quad a_i + b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = y_i, \quad b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

На кожному частковому проміжку сплайн-інтерполююча функція складається з лінійних функцій вигляду

$$P_1^i(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Тому що похідні нульового порядку – це і є функції, то гладкого склеювання функцій не відбудеться і тому лінійний сплайн повністю збіжиться з інтерполюючою функцією, побудованою за допомогою лінійного багатоінтервальної інтерполяції.



3.3. КВАДРАТИЧНИЙ СПЛАЙН

Нехай функція задана таблицею

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Побудуємо сплайн-інтерполюючу функцію, що називається *квадратичним* сплайном, тобто на кожному i -ом частковому проміжку будемо представляти її багаточленом другої степені

$$S_2(x) = P_2^i(x) \quad \text{для } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Сплайн-інтерполюючу функцію на кожному частковому проміжку будемо шукати у вигляді

$$P_2^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 \quad \text{при } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\text{Введемо позначення } h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i , $i = \overline{1, n}$ скористаємося тими умовами, що квадратичний сплайн повинен бути безперервним і мати безперервну похідну першого порядку.

Безперервність функції забезпечується тим, що квадратичний сплайн у вузлових точках кожного проміжку повинен набувати значення, задані в таблиці

$$P_2^i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad a_i + b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^2 = y_{i-1},$$

$$\text{звідки} \quad a_i = y_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$P_2^i(x_i) = y_i \quad a_i + b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 = y_i,$$

$$\text{звідки} \quad b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 = y_i - y_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для того, щоб склеювання квадратичних функцій відбувалося гладко, потрібно щоб похідна першого порядку інтерполюючої функції була безперервною, тобто щоб у внутрішніх вузлових точках виконувалася умова

$$\lim_{x \rightarrow x_i - 0} S_2'(x) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} S_2'(x), \quad i = \overline{1, n-1}$$

або

$$\left(P_2^i(x_i - 0) \right)' = \left(P_2^{i+1}(x_i + 0) \right)', \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Одержимо вираз для похідної від інтерполюючої функції

$$\left(P_2^i(x) \right)' = b_i + 2c_i \cdot (x - x_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Граничні значення ліворуч і праворуч від внутрішньої вузлової точки буде залежати від того, з якого проміжку відбувається спрямування до граничної точки

$$\left(P_2^i(x_i - 0) \right)' = b_i + 2c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = b_i + 2c_i h_i,$$

$$\left(P_2^{i+1}(x_i + 0) \right)' = b_{i+1} + 2c_{i+1} \cdot (x_i - x_i) = b_{i+1}.$$

Порівняємо отримані вирази

$$b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Для однозначного визначення всіх коефіцієнтів необхідне завдання ще однієї рівності. Воно може бути отримано, якщо взяти, що на першому проміжку парабола має лінійне продовження. Цього можна досягти, якщо

кривизну на лівому кінці першого проміжку вважати рівною нулю, що виражається рівністю

$$S''(x_0) = 0, \quad \text{це означає, що} \quad (P_2^1(x_0))'' = 0,$$

$$(a_1 + b_1 \cdot (x - x_0) + c_1 \cdot (x - x_0)^2)'' \Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$(b_1 + 2c_1 \cdot (x - x_0))' \Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$c_1 = 0.$$

Отже, на кожному частковому проміжку квадратичний сплайн складається з функцій вигляду

$$P_2^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 \quad \text{при } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n},$$

де коефіцієнти $a_i, b_i, c_i, i = \overline{1, n}$ є розв'язаннями системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1}, & i = \overline{1, n}, \\ b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 = y_i - y_{i-1}, & i = \overline{1, n}, \\ b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

Приклад 1. Побудувати квадратичний сплайн для функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ з вузлами інтерполяції $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$.

Розв'язання. Вихідні дані представимо у вигляді таблиці

x_i	1	2	3
$y_i = \sqrt[3]{x_i}$	1,000	1,260	1,442

У таблиці задані два проміжки $x \in [1, 2]$ і $x \in [2, 3]$, $n = 2$, на кожному із проміжків побудуємо квадратичну функцію так, щоб вони утворювали сплайн. Квадратичний сплайн будемо шукати у вигляді

$$S_2(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2, & x \in [x_0, x_1]; \\ a_2 + b_2(x - x_1) + c_2(x - x_1)^2, & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

або

$$S_2(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x - 1) + c_1(x - 1)^2, & x \in [1, 2]; \\ a_2 + b_2(x - 2) + c_2(x - 2)^2, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Невідомі коефіцієнти будемо шукати як розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ при $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ умові, що $h_1 = x_1 - x_0 = 1, h_2 = x_2 - x_1 = 1$

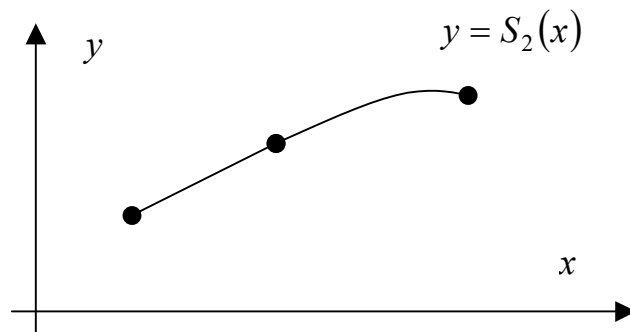
$$\begin{cases} a_i = y_{i-1}, & i = \overline{1, 2}, \\ b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 = y_i - y_{i-1}, & i = \overline{1, 2}, \\ b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}, & i = 1, \\ c_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = y_0, \\ a_2 = y_1, \\ b_1 \cdot h_1 + c_1 \cdot h_1^2 = y_1 - y_0, \\ b_2 \cdot h_2 + c_2 \cdot h_2^2 = y_2 - y_1, \\ b_1 + 2c_1 h_1 = b_2, \\ c_1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1,000, \\ a_2 = 1,260, \\ b_1 \cdot 1 + c_1 \cdot 1^2 = 1,260 - 1,000, \\ b_2 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2 = 1,442 - 1,260, \\ b_1 + 2c_1 \cdot 1 = b_2, \\ c_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1,000, \\ a_2 = 1,260, \\ b_1 = 0,260, \\ b_2 = 0,260, \\ c_1 = 0, \\ c_2 = -0,078. \end{cases}$$

Одержали квадратичний сплайн у вигляді

$$S_2(x) = \begin{cases} 1,000 + 0,260 \cdot (x-1), & x \in [1, 2]; \\ 1,260 + 0,260 \cdot (x-2) - 0,078 \cdot (x-2)^2, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

який складається з лінійної функції на першому проміжку і квадратичної функції на другому проміжку, при цьому стикування цих функцій відбувається гладко. Проілюструємо це графічно.



3.4. КУБІЧНИЙ СПЛАЙН

Нехай функція задана таблицею

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Побудуємо сплайн-інтерполюючу функцію, що називається кубічним сплайном, тобто на кожному i -ом частковому проміжку будемо представляти її багаточленом третьої степені

$$S_3(x) = P_3^i(x) \quad \text{для } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

Сплайн-інтерполюючу функцію на кожному частковому проміжку $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ будемо шукати у вигляді

$$P_3^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3.$$

Введемо позначення $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, d_i , $i = \overline{1, n}$ скористаємося умовою, що кубічний сплайн повинен бути безперервним і мати безперервні першу і другу похідні.

Безперервність функції забезпечується тим, що кубічний сплайн у вузлових точках кожного проміжку повинен набувати значення, задані в таблиці

$$P_3^i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad a_i + b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^3 = y_{i-1},$$

звідки $a_i = y_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

$$P_3^i(x_i) = y_i, \quad a_i + b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x_i - x_{i-1})^3 = y_i,$$

звідки $b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 + d_i \cdot h_i^3 = y_i - y_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Безперервність першої похідної інтерполюючої функції забезпечується рівністю границь ліворуч і праворуч від всіх внутрішніх вузлових точок

$$\lim_{x \rightarrow x_i - 0} S_3'(x) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} S_3'(x), \quad i = \overline{1, n-1}$$

або

$$(P_3^i(x_i - 0))' = (P_3^{i+1}(x_i + 0))', \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Одержимо вираз для похідної від інтерполюючої функції

$$(P_3^i(x))' = b_i + 2c_i \cdot (x - x_{i-1}) + 3d_i \cdot (x - x_{i-1})^2, \quad i = \overline{1, n}.$$

Граничні значення ліворуч і праворуч від внутрішньої вузлової точки визначаються виразом

$$(P_3^i(x_i - 0))' = b_i + 2c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + 3d_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2,$$

$$(P_3^{i+1}(x_i + 0))' = b_{i+1} + 2c_{i+1} \cdot (x_i - x_i) + 3d_{i+1} \cdot (x_i - x_i)^2 = b_{i+1}.$$

Порівняємо отримані вирази

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Безперервність другої похідної інтерполюючої функції забезпечується рівністю

$$\lim_{x \rightarrow x_i - 0} S_3''(x) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} S_3''(x), \quad i = \overline{1, n-1}$$

або

$$(P_3^i(x_i - 0))'' = (P_3^{i+1}(x_i + 0))'', \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Одержимо вираз для другої похідної

$$(P_3^i(x))'' = 2c_i + 6d_i \cdot (x - x_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Граничні значення ліворуч і праворуч від внутрішньої вузлової точки визначаються виразами

$$\begin{aligned} (P_3^i(x_i - 0))'' &= 2c_i + 6d_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = 2c_i + 6d_i h_i, \\ (P_3^{i+1}(x_i + 0))' &= 2c_{i+1} + 6d_{i+1} \cdot (x_i - x_i)^2 = 2c_{i+1}. \end{aligned}$$

Порівняємо отримані вирази

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Виконаємо лінійне продовження кубічного сплайна на обох кінцях проміжку інтерполяції. Для цього задамо нульову кривизну в точках $x = x_0$ і $x = x_n$, обумовлену значенням другої похідної в цих точках

$$S''(x_0) = 0 \quad \text{і} \quad S''(x_n) = 0.$$

Додаткові умови дозволяють однозначно визначити всі коефіцієнти кубічного сплайна

$$\begin{aligned} (P_3^1(x_0))'' &= 2c_1 + 6d_1 \cdot (x_0 - x_0), \quad \text{звідки} \quad c_1 = 0, \\ (P_3^n(x_n))'' &= 2c_n + 6d_n \cdot (x_n - x_{n-1}), \quad \text{звідки} \quad c_n + 3d_n h_n = 0. \end{aligned}$$

Отже, на кожному частковому проміжку $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ кубічний сплайн складається з функцій вигляду

$$P_3^i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3,$$

де коефіцієнти a_i, b_i, c_i, d_i , $i = \overline{1, n}$ є розв'язаннями системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1}, & i = \overline{1, n}, \\ b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 + d_i \cdot h_i^3 = y_i - y_{i-1}, & i = \overline{1, n}, \\ b_i + 2c_i h_i + 3d_i \cdot h_i^2 = b_{i+1}, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, & i = \overline{1, n-1}, \\ c_1 = 0, \\ c_n + 3d_n h_n = 0. \end{cases}$$

4. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ АПРОКСИМАЦІЇ І МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Нехай результати спостережень представлені у вигляді таблиці

x_1	x_2	...	x_n
y_1	y_2	...	y_n

Задача апроксимації полягає в тому, що на підставі даних спостережень двох кількісних ознак x і y потрібно визначити вид функціональної залежності однієї з них від іншої для подальшої обробки експериментальних даних.

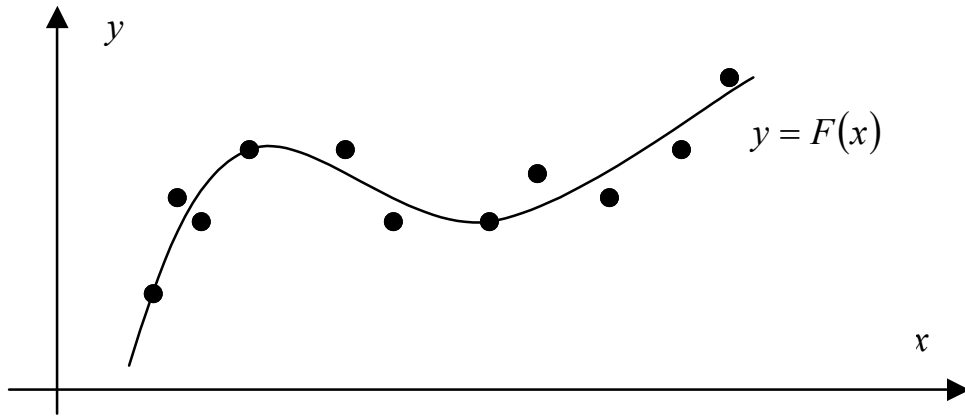
Для розв'язання задачі апроксимації варто побудувати апроксимуючу функцію, що відображає характер залежності випадкових величин y і x , згладивши випадкові відхилення, які обумовлені різного роду похибками спостережень.

Функція $y = F(x)$ називається апроксимуючою, якщо вона задовольняє умовам:

- 1) є безперервною;
- 2) не обов'язково проходить через всі задані в таблиці точки;
- 3) відображає загальне поведіння множини точок, заданих в таблиці, згладжуючи випадкові відхилення.

З теоретичного розуміння аналізу досліджуваних величин або по виду поля розсіювання потрібно вибрати вид апроксимуючої функції, що згладжує випадкові відхилення. Це може бути лінійна, квадратична, експонентна, дробово-раціональна або будь-яка інша функція, що найбільше точно відображає поле розсіювання точок на площині, заданих у таблиці.

Після того як вид залежності обраний, ставиться запитання про знаходження параметрів цієї залежності, які і визначають апроксимуючу функцію $y = F(x)$.



Однозначність побудови апроксимуючої функції визначається методом найменших квадратів.

Відповідно до принципу максимальної правдоподібності необхідно вибрати функцію виду $y = F(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$, що визначається параметрами a_1, a_2, \dots, a_k так, щоб сума квадратів відхилень значень функції $y = F(x_i)$ від спостережуваних значень y_i , $i = \overline{1, n}$, була мінімальною

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a_1, a_2, \dots, a_k))^2 \rightarrow \min.$$

Для знаходження невідомих параметрів a_1, a_2, \dots, a_k потрібно скористатися необхідною умовою існування екстремума функції багатьох змінних, для цього прирівняти до нуля частки похідної функції $y = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_k)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(a_1, \dots, a_k)}{\partial a_1} = 0, \\ \frac{\partial \Phi(a_1, \dots, a_k)}{\partial a_2} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi(a_1, \dots, a_k)}{\partial a_k} = 0. \end{cases}$$

і розв'язати систему k алгебраїчних рівнянь відносно k невідомих параметрів a_1, a_2, \dots, a_k .

Функція $y = F(x, a_1, a_2, \dots, a_k)$ зі знайденими значеннями параметрів є апроксимуючою і також розв'язанням задачі апроксимації.

4.2. ЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ

Нехай згладжуюча крива – є прямою лінією, рівняння якої визначається двома параметрами

$$F(x, a, b) = ax + b.$$

За даними спостережень $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ знайдемо такі значення параметрів a і b , щоб точки (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, побудовані на площині xOy (поле розсіювання), якнайближче розташовувалися до шуканої прямої, тобто – сума квадратів відхилень $(y_i - (ax_i + b))$ була мінімальною

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \rightarrow \min$$

Скористаємося необхідною умовою існування екстремума і дорівнюємо до нуля частки похідних

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$$

Тоді параметри a та b знайдемо як розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^2 - bx_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right), \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right), \\ n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - an \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i + a \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right). \end{cases}$$

Отримані значення параметрів визначають лінійну апроксимуючу функцію $y = ax + b$.

4.3. КВАДРАТИЧНА АПРОКСИМАЦІЯ

Якщо згладжувальну криву взяти як квадратичну параболу, рівняння якої визначається трьома параметрами

$$F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c,$$

то, застосовуючи метод найменших квадратів, одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів a , b та c за даними спостережень $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \dots$

$$\Phi(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)x_i = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (x_i y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Значення параметрів a , b і c , що є розв'язаннями системи лінійних алгебраїчних рівнянь, визначають квадратичну апроксимуючу функцію $y = ax^2 + bx + c$.

4.4. СТЕПЕНЕВА АПРОКСИМАЦІЯ

Нехай апроксимуюча функція належить до класу степеневих функцій і визначається двома параметрами a та m

$$F(x, a, m) = a \cdot x^m.$$

Прологарифмуємо рівність

$$\ln F(x, a, m) = \ln a + m \cdot \ln x$$

і одержимо лінійну залежність $\ln F$ від $\ln x$.

Мінімізуючу функцію представимо у вигляді

$$\Phi(a, m) = \sum_{i=1}^n (\ln y_i - \ln a - m \ln x_i)^2 \rightarrow \min$$

і застосуємо до неї необхідну умову існування екстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = -\frac{2}{a} \cdot \sum_{i=1}^n (\ln y_i - m \ln x_i - \ln a) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial m} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (\ln y_i - m \ln x_i - \ln a) \ln x_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (\ln y_i - m \ln x_i - \ln a) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (\ln y_i - m \ln x_i - \ln a) \ln x_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \ln y_i - m \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \cdot \ln a = 0, \\ \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln y_i - m \cdot \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 - \ln a \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot \sum_{i=1}^n \ln y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot \ln y_i}{\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2}, \\ a = \exp \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \ln y_i - m \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i \right) \right]. \end{cases}$$

Отримані значення параметрів a та m визначають степеневу апроксимуючу функцію $y = a \cdot x^m$.

У ряді випадків, коли згладжуюча крива не є багаточленом першої або другої степені, можна за допомогою підходящої заміни змінних звести її до відповідного багаточлена.

Формули знаходження значень параметрів степеневі апроксимуючої функції можуть бути отримані з формул лінійної апроксимації, якщо y замінити на $\ln y$, x замінити на $\ln x$, a замінити на m , b замінити на $\ln a$.

4.5. ПОКАЗОВА АПРОКСИМАЦІЯ

Нехай апроксимуюча функція належить до класу показових функцій, тобто має вигляд

$$F(x, a, m) = a \cdot e^{mx}$$

і характеризується двома параметрами a та m .

Прологарифмував рівність, одержимо

$$\ln F(x, a, m) = \ln a + m \cdot x,$$

який буде представляти лінійну залежність $\ln F$ від x .

Формули знаходження значень параметрів показової апроксимуючої функції можуть бути отримані з формул лінійної апроксимації, якщо y замінити на $\ln y$, a замінити на m , b замінити на $\ln a$, x залишити без змін.

$$\begin{cases} m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n \ln y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2}, \\ a = \exp\left[\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \ln y_i - m \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right)\right]. \end{cases}$$

Отримані значення параметрів a і m визначають показову апроксимуючу функцію $y = a \cdot e^{mx}$.

4.6. ЛОГАРИФМІЧНА АПРОКСИМАЦІЯ

Нехай апроксимуюча функція належить класу логарифмічних функцій, тобто має вигляд

$$F(x, a, b) = a \cdot \ln x + b$$

і характеризується двома параметрами a та b .

Формули знаходження значень параметрів логарифмічної апроксимуючої функції можуть бути отримані з формул лінійної апроксимації, якщо x замінити на $\ln x$.

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot y_i}{\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2}, \\ b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i\right). \end{cases}$$

Отримані значення параметрів a та b визначають логарифмічну апроксимуючу функцію $y = a \cdot \ln x + b$.

4.7. ДРОБОВО-ЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ

Нехай апроксимуюча функція належить до класу дробово-лінійних функцій, тобто має вигляд

$$F(x, a, b) = \frac{1}{ax + b}$$

і характеризується двома параметрами a й b .

Розглянемо функцію, зворотну до обраного,

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = ax + b$$

і одержимо лінійну залежність $\frac{1}{F}$ от x .

Формули знаходження значень параметрів дробово-лінійної апроксимуючої функції можуть бути отримані з формул лінійної апроксимації, якщо y замінити на $\frac{1}{y}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} - n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{y_i}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}, \\ b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right). \end{array} \right.$$

Отримані значення параметрів a та b визначають дробово-лінійну апроксимуючу функцію $y = \frac{1}{ax + b}$.

4.8. ГІПЕРБОЛІЧНА АПРОКСИМАЦІЯ

Нехай апроксимуюча функція належить до класу гіперболічних функцій, тобто має вигляд

$$F(x, a, b) = \frac{a}{x} + b \quad \text{або} \quad F(x, a, b) = a \cdot \frac{1}{x} + b,$$

характеризується двома параметрами a та b , і є лінійною залежністю F від $\frac{1}{x}$.

Формули знаходження значень параметрів гіперболічної апроксимуючої функції можуть бути отримані з формул лінійної апроксимації, якщо x замінити на $\frac{1}{x}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i}\right)^2}, \\ b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right). \end{array} \right.$$

Отримані значення параметрів a та b визначають гіперболічну апроксимуючу функцію $y = \frac{a}{x} + b$.

4.9. ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ

Нехай апроксимуюча функція належить до класу дробово-раціональних функцій, тобто має вигляд

$$F(x, a, b) = \frac{x}{ax + b}$$

і характеризується двома параметрами a та b .

Розглянемо функцію, зворотну до обраного,

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = a + b \cdot \frac{1}{x}$$

і одержимо лінійну залежність $\frac{1}{F}$ від $\frac{1}{x}$.

Формули знаходження значень параметрів дробово-раціональної апроксимуючої функції можуть бути отримані з формул лінійної апроксимації, якщо y замінити на $\frac{1}{y}$, x замінити на $\frac{1}{x}$, коефіцієнти a та b поміняти місцями.

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} - n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i y_i}}{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i}\right)^2}, \\ a = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i} - b \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right). \end{array} \right.$$

Отримані значення параметрів a та b визначають дробово-раціональну апроксимуючу функцію $y = \frac{x}{ax + b}$.

5. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ І ЇХ СИСТЕМ

5.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Багато інженерних задач потребують знаходження розв'язання диференційного рівняння, що задовольняє певним початковим умовам. Однак одержати точне розв'язання диференційного рівняння вдається лише в окремих спеціальних випадках, але часто при цьому одержують вираз, що містить шукану функцію в неявному вигляді, що утрудняє використання такого розв'язання.

Тому в інженерній практиці доводиться користуватися наближеними методами інтегрування диференційних рівнянь. Ці методи умовно поділяються на аналітичні, або методи побудови наближених формул, чисельні методи, коли шукане розв'язання одержують у табличному вигляді, і графічні. Ми зупинимось на вивченні чисельних методів. Але для початку згадаємо основні визначення з теорії диференціальних рівнянь.

Диференційним рівнянням першого порядку називається співвідношення, що пов'язує між собою незалежну змінну x , невідому функцію $y(x)$ і її першу похідну $y'(x)$, вигляду

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

або рівняння, дозволене відносно похідної, вигляду

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Розв'язати диференційне рівняння першого порядку означає знайти таку функцію $y = y(x)$, при підстановці якої в рівняння виходить вірна тотожність. Таких функцій може бути нескінченна множина, відрізняються вони друг від друга значенням числового параметра, що отримується при інтегруванні. Кожна така функція є частинним *розв'язанням* диференційного рівняння.

Загальним розв'язком диференційного рівняння першого порядку називається однопараметрична множина функцій $y = \varphi(x, C)$, що задовольняють умовам:

- 1) кожному числовому значенню параметра C відповідає частинне розв'язання диференційного рівняння;
- 2) кожне частинне розв'язання міститься в загальному при певному числовому значенні параметра C .

Задачею Коші для диференційного рівняння першого порядку називається задача знаходження розв'язання диференційного рівняння

$$y' = f(x, y)$$

при заданій початковій умові

$$y(x_0) = y_0.$$

Розв'язком задачі Коші вважається функція $y = y(x)$, що є розв'язанням диференційного рівняння, графік якої проходить через точку з координатами (x_0, y_0) .

Диференційним рівнянням n -го порядку називається співвідношення, що пов'язує між собою незалежну змінну x , невідому функцію $y(x)$ і її похідні до n -го порядку включно $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$, вигляду

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

або рівняння, дозволене щодо старшої похідної, вигляду

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Розв'язати диференційне рівняння n -го порядку означає знайти таку функцію $y = y(x)$, при підстановці якої в рівняння виходить вірна тотожність. Таких функцій може бути нескінченна множина, а кожна з них відрізняється друг від друга значеннями n числових параметрів, що одержуються при інтегруванні рівняння n -го порядку. Кожна така функція називається *частинним розв'язанням*.

Загальним розв'язком диференційного рівняння n -го порядку називається n -параметрична множина функцій $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, що задовольняють умовам:

- 3) кожному набору числових значень параметрів відповідає частинний розв'язок диференційного рівняння;
- 4) кожний частинний розв'язок міститься в загальному при певному наборі числових значень параметрів.

Задачею Коші для диференційного рівняння n -го порядку називається задача знаходження розв'язання диференційного рівняння

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

при заданих початкових умовах

$$y(x_0) = a_1, \quad y'(x_0) = a_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_n.$$

Розв'язком задачі Коші вважається функція $y = y(x)$, що є розв'язанням диференційного рівняння та задовольняє всім початковим умовам $y(x_0) = a_1,$

$$y'(x_0) = a_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_n \dots$$

Системою диференційних рівнянь першого порядку називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Розв'язати систему диференційних рівнянь означає знайти такі функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, при підстановці яких кожне рівняння системи звертається у вірну тотожність.

Загальним розв'язком системи диференційних рівнянь першого порядку називається n -параметрична множина функцій $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, ..., $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, що задовольняє умовам:

- 1) кожному набору числових значень параметрів відповідає n функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, що представляють собою частковий розв'язок системи диференційних рівнянь;
- 2) кожний частковий розв'язок міститься в загальному при певному наборі числових значень параметрів.

Задачею Коші для системи диференційних рівнянь першого порядку називається задача знаходження розв'язання системи рівнянь вигляду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

при заданих початкових умовах

$$y_1(x_0) = a_1, \quad y_2(x_0) = a_2, \dots, \quad y_n(x_0) = a_n.$$

Розв'язком задачі Коші вважаються функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, що є розв'язанням системи рівнянь і задовольняють початковим умовам $y_1(x_0) = a_1, y_2(x_0) = a_2, \dots, y_n(x_0) = a_n$.

При розв'язанні диференційних рівнянь n -го порядку чисельними методами часто потрібно перетворювати їх у відповідні системи диференційних рівнянь першого порядку.

Приведемо алгоритм такого перетворення. Для цього розглянемо задачу Коші для рівняння n -го порядку

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \\ y(x_0) &= a_1, \quad y'(x_0) = a_2, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_n. \end{aligned}$$

Введемо допоміжні функції

$$z_1(x) = y(x), \quad z_2(x) = y'(x), \quad \dots, \quad z_n(x) = y^{(n-1)}(x).$$

Продиференціюємо введені рівності

$$z_1'(x) = y'(x), \quad z_2'(x) = y''(x), \quad \dots, \quad z_n'(x) = y^{(n)}(x)$$

і запишемо їх в нових змінних

$$z_1'(x) = z_2(x), \quad z_2'(x) = z_3(x), \quad \dots, \quad z_n'(x) = f(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)).$$

З врахуванням введених позначень, запишемо початкові умови

$$z_1(x_0) = a_1, \quad z_2(x_0) = a_2, \dots, \quad z_n(x_0) = a_n.$$

Поєднуючи отримані рівності, запишемо задачу Коші для системи диференційних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} z'_1(x) = z_2(x), & z_1(x_0) = a_1, \\ z'_2(x) = z_3(x), & z_2(x_0) = a_2, \\ \dots & \dots \\ z'_n(x) = f(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_n(x)), & z_n(x_0) = a_n, \end{cases}$$

еквівалентну заданій задачі Коші для диференційного рівняння n -го порядку. Розв'язанням системи з початковими умовами є функції $z_1(x)$, $z_2(x)$, ..., $z_n(x)$, які дозволяють визначити розв'язання диференційного рівняння n -го порядку у вигляді функції $y(x) = z_1(x)$.

При розв'язанні диференційних рівнянь і їхніх систем на практиці будемо застосовувати чисельні методи, які дозволяють визначити шукані функції в табличному вигляді.

5.2. МЕТОД ЕЙЛЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу чисельного розв'язання диференційного рівняння

$$y' = f(x, y)$$

при заданій початковій умові

$$y(x_0) = y_0$$

на відрізку $x \in [a; b]$.

Для знаходження чисельного розв'язання задачі розіб'ємо проміжок інтегрування $[a; b]$ на n рівних частин, довжина яких $h = \frac{b-a}{n}$.

Число h називається *кроком інтегрування*. Значення шуканої функції $y = y(x)$ будемо визначати в точках ділення

$$x_0 = a, \quad x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = \overline{1, n}, \quad x_n = b.$$

Метод Ейлера є найбільш простим із всіх методів чисельного розв'язання диференційних рівнянь. Геометрично він полягає в тому, що на малому відрізку $x \in [x_k; x_{k+1}]$ розв'язання $y = y(x)$ диференційного рівняння заміняється відрізком її дотичної в точці $(x_k; y(x_k))$.

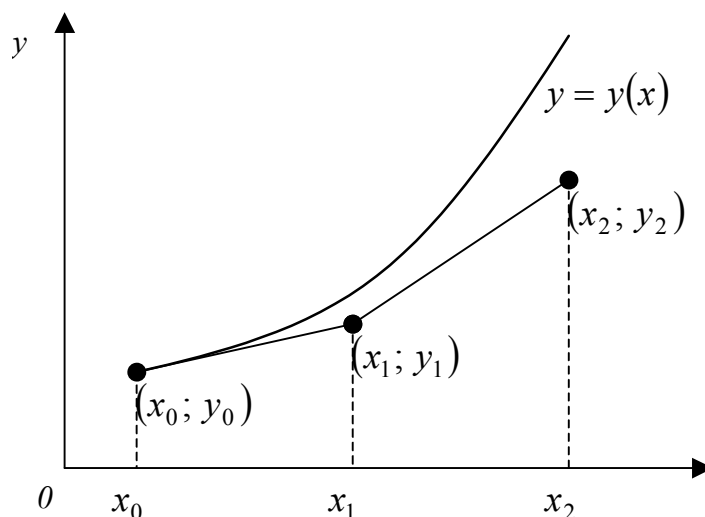
На першому відрізку $x \in [x_0; x_1]$ проводимо дотичну до графіка шуканої функції $y = y(x)$ в точці з координатами $(x_0; y_0)$, тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, рівняння якої

$$y - y_0 = f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0).$$

Визначимо значення $y = y_1$ на дотичній в точці $x = x_1$, при цьому одержимо

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) \quad \text{или} \quad y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h.$$

Число y_1 вважаємо наближеним значенням шуканого розв'язання в точці x_1 .



Повторюємо ту ж процедуру на відрізку $x \in [x_1; x_2]$. А саме, будемо дотичну до графіка шуканої функції, що проходить через точку з координатами $(x_1; y_1)$, тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $y'(x_1) = f(x_1, y_1)$, рівняння якої

$$y - y_1 = f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1),$$

і знаходимо ординату y_2 точки $(x_2; y_2)$, що лежить на цій прямій,

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1) \quad \text{або} \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h.$$

Число y_2 вважаємо наближеним значенням шуканого розв'язання в точці x_2 .

Продовжуємо цю процедуру доти, поки не одержимо відрізок $x \in [x_{n-1}; x_n]$ і не визначимо

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot h$$

Число y_n вважаємо наближеним значенням шуканого розв'язання в точці x_n .

У результаті застосування методу Ейлера одержимо множину значень аргументу x_0, x_1, \dots, x_n і відповідну множину значень шуканої функції y_0, y_1, \dots, y_n , які є розв'язанням диференційного рівняння в табличному вигляді.

З'єднавши точки $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$ відрізками прямих, одержимо ламану лінію, що приблизно представляє графік функції, що є розв'язанням диференційного рівняння із заданою початковою умовою. Цю ламану лінію називають *ламаною Ейлера*. Ця ламана є кусково-лінійною функцією і вона є наближеним розв'язанням задачі на відрізку $x \in [a; b]$.

Алгоритм метода Ейлера.

Нехай відомі:

- функція $f(x, y)$ з диференційного рівняння $y' = f(x, y)$,
- початкові значення x_0, y_0 ,
- проміжок інтегрування $[a; b]$.

1. Задамо число n точок ділення відрізка $[a; b]$ на часткові та обчислимо

крок інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$. Візьмемо $k = 0$.

2. На k -ом кроці виконаємо обчислення по ітераційних формулах методу Ейлера

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + f(x_k, y_k) \cdot h, \\x_{k+1} &= x_k + h, \\k &= k + 1.\end{aligned}$$

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.

4. Отримані значення y_0, y_1, \dots, y_n є значеннями шуканого розв'язання рівняння в точках x_0, x_1, \dots, x_n .

Обчислення по методу Ейлера доцільно оформляти у вигляді таблиці. Для наочності можна побудувати ламану Ейлера, що приблизно є інтегральною кривою задачі Коші.

У теорії диференціальних рівнянь доводиться, що якщо функція $f(x, y)$ в диференціальному рівнянні, задовольняє умовам Коші, то послідовність ламаних Ейлера при необмеженому збільшенні числа точок розбивки (при $n \rightarrow \infty$) прагне до певної межі $y = y(x)$, що є єдиним розв'язанням задачі Коші.

Похибка при заміні розв'язання $y = y(x)$ ламаної Ейлера, що обчислюється в точці x_n , має порядок $\frac{1}{n}$ або h . Тому, чим менше крок інтегрування h , тим краще наближене розв'язання представляє точне.

Звичайно для оцінки точності наближеного розв'язання y_n в точці x_n , отриманого із кроком h , повторюють обчислення з подвоєним кроком $2h$ і абсолютною похибкою $\Delta(y_n)$ визначають по формулі

$$\Delta(y_n) = |y_n - \hat{y}_n|,$$

де \hat{y}_n – наближене розв'язання в точці x_n , отримане з кроком $2h$.

Приклад. Знайти чисельне розв'язання диференціального рівняння $y' = \frac{1}{2}xy$; $y(0) = 1$; $x \in [0; 1]$; $n = 5$.

Розв'язання. Розв'язанням рівняння є функція $y = y(x)$, одержана у вигляді таблиці, де $h = 0.2$:

$k = 0,$	$x_0 = 0.0,$	$y_0 = 1.000000;$	
$k = 1,$	$x_1 = 0.2,$	$y_1 = y_0 + 0.5x_0y_0h,$	$y_1 = 1.000000;$
$k = 2,$	$x_2 = 0.4,$	$y_2 = y_1 + 0.5x_1y_1h,$	$y_2 = 1.020000;$
$k = 3,$	$x_3 = 0.6,$	$y_3 = y_2 + 0.5x_2y_2h,$	$y_3 = 1.060800;$
$k = 4,$	$x_4 = 0.8,$	$y_4 = y_3 + 0.5x_3y_3h,$	$y_4 = 1.124448;$
$k = 5,$	$x_5 = 1.0,$	$y_5 = y_4 + 0.5x_4y_4h,$	$y_5 = 1.214404.$

5.3. МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЕЙЛЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо модифікацію методу Ейлера, суть якої в тому, що на малому відрізку $x \in [x_k; x_{k+1}]$ розв'язання $y = y(x)$ диференційного рівняння заміняється відрізком прямої лінії, що проходить через точку $(x_k; y(x_k))$, але з кутовим коефіцієнтом, обумовленим з урахуванням поведінки шуканої функції в задачі $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Нехай відрізок $x \in [a; b]$ розділений на n рівних частин ($h = \frac{b-a}{n}$)

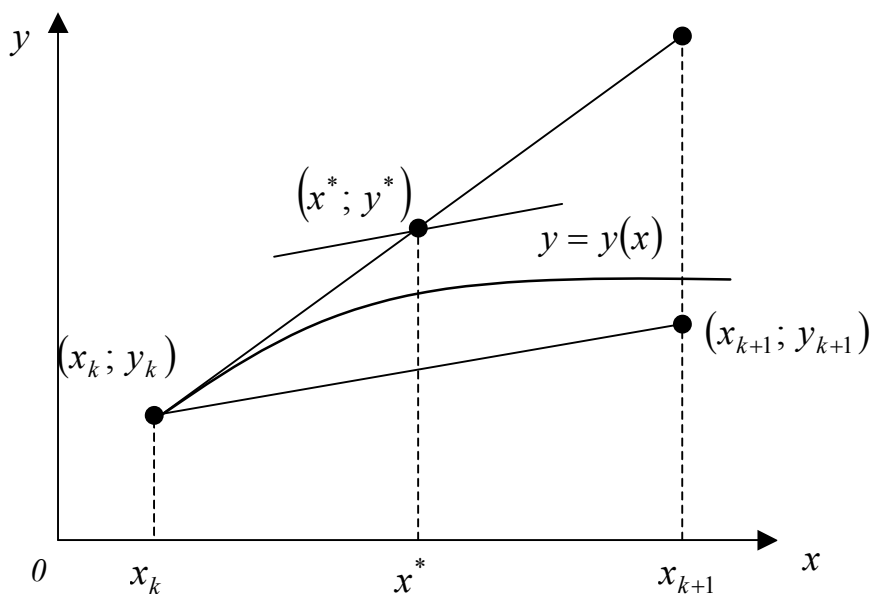
точками $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$, $x_n = b$ та знайдени y_0, y_1, \dots, y_k – наближені значення розв'язання відповідно в точках x_0, x_1, \dots, x_k . Розглянемо відрізок $x \in [x_k; x_{k+1}]$ і для визначення y_{k+1} використаємо наступний геометричний аналіз.

До графіка шуканої функції проведемо дотичну в точці (x_k, y_k) , тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $\alpha_1 = f(x_k, y_k)$, рівняння якої

$$y - y_k = f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k).$$

На дотичній визначимо проміжне значення y^* , відповідне $x^* = x_k + \frac{h}{2}$:

$$y^* = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x^* - x_k) \quad \text{або} \quad y^* = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \frac{h}{2}.$$



У точці (x^*, y^*) визначимо кутовий коефіцієнт дотичної до графіка шуканої функції $\alpha_2 = f(x^*, y^*)$, і із точки (x_k, y_k) проведемо пряму в цьому напрямку

$$y - y_k = f(x^*, y^*) \cdot (x - x_k).$$

На отриманій прямій визначимо значення $y = y_{k+1}$, відповідне значенню $x = x_{k+1}$:

$$y_{k+1} = y_k + f(x^*, y^*) \cdot h.$$

Випишемо ітераційні формули модифікованого методу Ейлера:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= f(x_k, y_k), \\ \alpha_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \alpha_1 \cdot \frac{h}{2}\right), \\ y_{k+1} &= y_k + \alpha_2 \cdot h, \\ x_{k+1} &= x_k + h. \end{aligned}$$

Алгоритм модифікованого методу Ейлера.

Нехай відомі:

- функція $f(x, y)$ з диференційного рівняння $y' = f(x, y)$,
- початкові значення x_0, y_0 ,
- проміжок інтегрування $[a, b]$.

1. Задамо число n точок ділення відрізка $[a, b]$ на часткові і обчислимо крок інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$. Візьмемо $k = 0$.

2. На k -ом кроці виконаємо обчислення по ітераційних формулах модифікованого методу Ейлера

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= f(x_k, y_k), \\ \alpha_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \alpha_1 \cdot \frac{h}{2}\right), \\ y_{k+1} &= y_k + \alpha_2 \cdot h, \\ x_{k+1} &= x_k + h, \\ k &= k + 1. \end{aligned}$$

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.

4. Отримані значення y_0, y_1, \dots, y_n є наближеними значеннями шуканого розв'язання рівняння в точках x_0, x_1, \dots, x_n .

Обчислення доцільно оформляти у вигляді таблиці.

Відшуковуючи наближене розв'язання задачі Коші для диференційного рівняння першого порядку модифікованим методом Ейлера, ми на кожному кроці уточнюємо кутовий коефіцієнт ланок ламаної лінії й одержуємо розв'язання точніше, ніж по методу Ейлера. З теорії наближених методів відомо, що різниця між наближеним значенням y_k у точці x_k і точним значенням $y(x_k)$ оцінюється нерівністю

$$|y_k - y(x_k)| < Ch^3.$$

Ця похибка має порядок h^3 на кожному кроці (тобто при переході від y_k до y_{k+1}). Однак з кожним кроком відбувається нагромадження похибки, і в

точці $x_n = b$ похибка вже буде мати порядок h^2 (точніше, ніж у методі Ейлера, де похибка порядку h).

Для оцінки похибки наближеного розв'язання y_n в точці x_n , отриманого із кроком h , повторюють обчислення із кроком $2h$, і абсолютну похибку $\Delta(y_n)$ беруть рівною

$$\Delta(y_n) = \frac{1}{3} |y_n - \widehat{y}_n|.$$

де \widehat{y}_n – наближене розв'язання в точці x_n при кроці $2h$.

Ця оцінка – є оцінкою модифікованого методу Ейлера і не враховує похибку, одержану за рахунок округлення чисел при обчисленнях.

5.4. УДОСКОНАЛЕНИЙ МЕТОД ЕЙЛЕРА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ (МЕТОД ЕЙЛЕРА-КОШІ)

Розглянемо задачу Коші для диференційного рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Нехай відрізок $x \in [a; b]$ розділений на n рівних частин ($h = \frac{b-a}{n}$) точками $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$, $x_n = b$ і знайдені y_0, y_1, \dots, y_k – наближені значення розв'язання відповідно у точках x_0, x_1, \dots, x_k . Розглянемо відрізок $x \in [x_k; x_{k+1}]$ і визначимо y_{k+1} наступним чином.

До графіка шуканої функції проведемо дотичну в точці (x_k, y_k) , тобто пряму з кутовим коефіцієнтом $\alpha_1 = f(x_k, y_k)$, рівняння якої

$$y - y_k = f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k).$$

На дотичній визначимо проміжне значення y^* в точці x_{k+1} :

$$y^* = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad \text{або} \quad y^* = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h.$$

В точці (x_{k+1}, y^*) визначимо кутовий коефіцієнт дотичної до графіку шуканої функції $\alpha_2 = f(x_{k+1}, y^*)$.

З точки (x_k, y_k) проведемо пряму в напрямку $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, враховуючи поведження шуканої функції на поточному і наступному проміжках

$$y - y_k = \alpha \cdot (x - x_k).$$

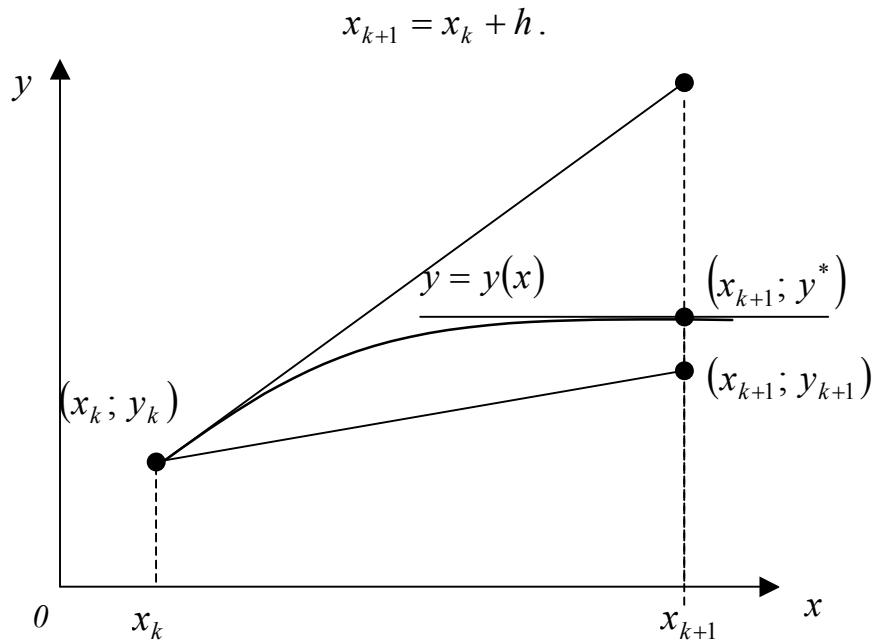
На отриманій прямій визначимо значення $y = y_{k+1}$, в точці $x = x_{k+1}$:

$$y_{k+1} - y_k = \alpha \cdot (x_{k+1} - x_k) \quad \text{або} \quad y_{k+1} = y_k + \alpha \cdot h.$$

Випишемо ітераційні формули вдосконаленого методу Ейлера (методу Ейлера-Коші):

$$\alpha_1 = f(x_k, y_k), \quad \alpha_2 = f(x_k + h, y_k + \alpha_1 \cdot h),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot h,$$



Алгоритм удосконаленого методу Ейлера.

Нехай відомі:

- функція $f(x, y)$ з диференційного рівняння $y' = f(x, y)$,
- початкові значення x_0, y_0 ,
- проміжок інтегрування $[a, b]$.

1. Задамо число n точок ділення відрізка $[a, b]$ на часткові й обчислимо крок інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$. Візьмемо $k = 0$.
2. На k -ом кроці виконаємо обчислення по ітераційних формулах удосконаленого методу Ейлера (методу Ейлера-Коші)

$$\alpha_1 = f(x_k, y_k), \quad \alpha_2 = f(x_k + h, y_k + \alpha_1 \cdot h),$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cdot h,$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = k + 1.$$

3. Якщо $k < n$, то переходимо до пункту 2, інакше до пункту 4.
4. Отримані значення y_0, y_1, \dots, y_n є наближеними значеннями шуканого розв'язання рівняння в точках x_0, x_1, \dots, x_n .

Оцінка похибки розв'язання задачі Коші для диференційного рівняння першого порядку вдосконаленим методом Ейлера виконується як і в модифікованому методі Ейлера.

5.5. МЕТОДИ РУНГЕ-КУТТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Група методів Рунге-Кутта дозволяє одержати розв'язання задачі Коші для диференційного рівняння першого порядку із заданим ступенем точності

залежно від обраного порядку методу. Ітераційні формули методів можуть бути отримані за загальною схемою, що пропонується до розгляду.

Для диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y)$$

при заданій початковій умові

$$y(x_0) = y_0$$

потрібно одержати ітераційні формули для знаходження значення $y(x+h)$ по відомим значенням x , $y(x)$ та h .

Необхідне значення будемо шукати у вигляді

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot k_1(h) + p_2 \cdot k_2(h) + \dots + p_q \cdot k_q(h),$$

де

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2(h) = h \cdot f(x + a_2 \cdot h, y + b_{21} \cdot k_1(h)),$$

$$k_3(h) = h \cdot f(x + a_3 \cdot h, y + b_{31} \cdot k_1(h) + b_{32} \cdot k_2(h)),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k_q(h) = h \cdot f(x + a_q \cdot h, y + b_{q1} \cdot k_1(h) + \dots + b_{q,q-1} \cdot k_{q-1}(h)).$$

У наведених формулах $k_1(h), k_2(h), \dots, k_q(h)$ – допоміжні напрямки, які використовуються на кожному кроці інтегрування для одержання значення $y(x+h)$ за відомим значенням $y(x)$, що дозволяє найбільш точно досліджувати поведінку шуканої функції на проміжку довжиною h .

При цьому кількість обраних допоміжних напрямків визначає число q – порядок ітераційного методу.

Параметри $p_1, p_2, \dots, p_q, a_2, a_3, \dots, a_q, b_{21}, b_{31}, b_{32}, \dots, b_{q,q-1}$ невідомі.

Для їх визначення розглянемо ще одну функцію

$$R(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 \cdot k_1(h) - p_2 \cdot k_2(h) - \dots - p_q \cdot k_q(h),$$

визначальну різницю між точним значенням шуканої функції й значенням, отриманим за допомогою методу Рунге-Кутта.

Якщо похибка $R(h)$ задовольняє умовам

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad \dots, \quad R^{(s)}(0) = 0, \quad R^{(s+1)}(0) \neq 0,$$

те найвищий порядок похідної, відмінної від нуля, тобто число s , називається порядком похибки ітераційного методу, це означає, що похибка обраного методу Рунге-Кутта визначається величиною h^s .

5.5.1. Метод Рунге-Кутта першого порядку

Розглянемо методи Рунге-Кутта при $q=1$ і одержимо ітераційні формули методів першого порядку

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot k_1(h), \quad \text{где} \quad k_1(h) = h \cdot f(x, y).$$

Звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot h \cdot f(x, y).$$

Перевіримо виконання умов для величини, що визначає похибку методу $R(h)$:

$$R(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 \cdot h \cdot f(x, y).$$

$$R(0) = y(x+0) - y(x) - p_1 \cdot 0 \cdot f(x, y) = 0 \quad \text{для кожного} \quad f(x, y) \neq 0.$$

$$R'(h) = y'(x+h) - p_1 \cdot f(x, y).$$

$$R'(0) = y'(x+0) - p_1 \cdot f(x, y) = f(x, y) - p_1 \cdot f(x, y) = (1 - p_1) \cdot f(x, y) = 0,$$

звідки $p_1 = 1$ для кожного $f(x, y) \neq 0$.

$$R''(h) = y''(x+h).$$

$$R''(0) = y''(x+0) = f'_x + f'_y \cdot f(x, y) \neq 0.$$

Одержали виконання умов

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R''(0) \neq 0.$$

Це означає, що похибка методу Рунге-Кутта першого порядку визначається величиною h , тобто порядок похибки дорівнює $s = 1$.

При знайденому значенні $p_1 = 1$ ітераційні формули методу Рунге-Кутта першого порядку набирають вигляду

$$y(x+h) \approx y(x) + h \cdot f(x, y)$$

або

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h,$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Отримані формули відповідають ітераційним формулам методу Ейлера. Можна зробити висновок, що метод Ейлера є методом першого порядку і при його застосуванні допускається похибка, обумовлена величиною h , а порядок похибки дорівнює $s = 1$.

5.5.2. Методи Рунге-Кутта другого порядку

Розглянемо методи Рунге-Кутта при $q = 2$ і одержимо ітераційні формули методів другого порядку

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot k_1(h) + p_2 \cdot k_2(h),$$

де

$$k_1(h) = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2(h) = h \cdot f(x + a_2 \cdot h, y + b_{21} \cdot k_1(h)),$$

Звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot h \cdot f(x, y) + p_2 \cdot h \cdot f(x + a_2 \cdot h, y + b_{21} \cdot h \cdot f(x, y)).$$

Перевіримо виконання умов для величини, що визначає похибку методу

$R(h)$:

$$R(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 \cdot h \cdot f(x, y) - p_2 \cdot h \cdot f(x + a_2 \cdot h, y + b_{21} \cdot h \cdot f(x, y)).$$

$$R(0) = y(x+0) - y(x) - p_1 \cdot 0 \cdot f(x, y) - p_2 \cdot 0 \cdot f(x, y) = 0.$$

$$R'(h) = y'(x+h) - p_1 \cdot f(x, y) - p_2 \cdot f(x + a_2 \cdot h, y + b_{21} \cdot h \cdot f(x, y)) - p_2 \cdot h \cdot (f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot b_{21} \cdot f(x, y)).$$

$$\begin{aligned}
R'(0) &= y'(x+0) - p_1 \cdot f(x, y) - p_2 \cdot f(x, y) - p_2 \cdot 0 = \\
&= f(x, y) - p_1 \cdot f(x, y) - p_2 \cdot f(x, y) = \\
&= (1 - p_1 - p_2) \cdot f(x, y) = 0,
\end{aligned}$$

звідки

$$p_1 + p_2 = 1 \text{ для кожного } f(x, y) \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
R''(h) &= y''(x+h) - 2p_2 \cdot (f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot b_{21} \cdot f(x, y)) - \\
&\quad - p_2 \cdot h \cdot (f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot b_{21} \cdot f(x, y))' \\
R''(0) &= y''(x+0) - 2p_2 \cdot (f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot b_{21} \cdot f(x, y)) - p_2 \cdot 0 = \\
&= f'_x + f'_y \cdot f(x, y) - 2p_2 \cdot (f'_x \cdot a_2 + f'_y \cdot f(x, y) \cdot b_{21}) = \\
&= (1 - 2p_2 a_2) \cdot f'_x + (1 - 2p_2 b_{21}) \cdot f'_y \cdot f(x, y) = 0.
\end{aligned}$$

З останньої рівності одержимо систему ще двох рівнянь для визначення невідомих параметрів

$$\begin{cases} 1 - 2p_2 a_2 = 0, \\ 1 - 2p_2 b_{21} = 0. \end{cases}$$

Як би ми не підбирали параметри, третю похідну

$$\begin{aligned}
R'''(0) &= (1 - 3p_2 a_2^2) \cdot f''_{xx} + 2 \cdot (1 - 3p_2 a_2 b_{21}) \cdot f \cdot f''_{xy} + (1 - 3p_2 b_{21}^2) \cdot f \cdot f''_{yy} + \\
&\quad + (f'_x + f \cdot f'_y) \cdot f'_y
\end{aligned}$$

перетворити у нуль неможливо $R'''(0) \neq 0$ для довільної функції $f(x, y) \neq 0$ через останній доданок.

Одержали виконання умов

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R''(0) = 0, \quad R'''(0) \neq 0.$$

Це означає, що похибка методів Рунге-Кутта другого порядку визначається величиною h^2 , тобто порядок похибки дорівнює $s = 2$.

Для визначення невідомих параметрів одержали систему рівнянь

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ 1 - 2p_2 a_2 = 0, \\ 1 - 2p_2 b_{21} = 0. \end{cases}$$

Довільно задаючи значення одного з параметрів і визначаючи значення інших параметрів із системи, ми будемо одержувати різні методи Рунге-Кутта другого порядку з порядком похибки $s = 2$.

$$1) \quad \text{Нехай} \quad p_1 = 0, \text{ тоды} \quad p_2 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_{21} = \frac{1}{2}.$$

Ітераційні формули одного з методів Рунге-Кутта другого порядку набирають вигляду

$$\begin{aligned}
k_1(h) &= h \cdot f(x, y), \\
k_2(h) &= h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1(h)}{2}\right),
\end{aligned}$$

звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} \cdot f(x, y)\right)$$

або

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}\right), \\ y_{k+1} &= y_k + k_2, \\ x_{k+1} &= x_k + h. \end{aligned}$$

Отримані формули збігаються з ітераційними формулами модифікованого методу Ейлера, що є одним з методів Рунге-Кутта другого порядку і при його застосуванні допускається похибка, обумовлена величиною h^2 , а порядок похибки $s = 2$.

2) Нехай $p_1 = \frac{1}{2}$, тоді $p_2 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $b_{21} = 1$.

Ітераційні формули ще одного методу Рунге-Кутта другого порядку набирають вигляду

$$\begin{aligned} k_1(h) &= h \cdot f(x, y), \\ k_2(h) &= h \cdot f(x+h, y+k_1(h)), \end{aligned}$$

звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{2} \cdot f(x, y) + \frac{h}{2} \cdot f(x+h, y+h \cdot f(x, y))$$

або

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ k_2 &= h \cdot f(x_k + h, y_k + k_1), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{k_1 + k_2}{2}, \\ x_{k+1} &= x_k + h. \end{aligned}$$

Отримані формули збігаються з ітераційними формулами вдосконаленого методу Ейлера, що також є методом Рунге-Кутта другого порядку і при його застосуванні допускається похибка, обумовлена величиною h^2 , а порядок похибки $s = 2$.

3) Розглянемо ще одну модифікацію методу Рунге-Кутта другого порядку. Нехай $p_1 = \frac{1}{4}$, тоді $p_2 = \frac{3}{4}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $b_{21} = \frac{2}{3}$.

Ітераційні формули ще одного методу Рунге-Кутта другого порядку набирають вигляду

$$\begin{aligned} k_1(h) &= h \cdot f(x, y), \\ k_2(h) &= h \cdot f\left(x + \frac{2}{3} \cdot h, y + \frac{2}{3} \cdot k_1(h)\right), \end{aligned}$$

звідки

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{4} \cdot f(x, y) + \frac{3h}{4} \cdot f\left(x + \frac{2}{3} \cdot h, y + \frac{2h}{3} \cdot f(x, y)\right)$$

або

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{2}{3} \cdot h, y_k + \frac{2}{3} \cdot k_1\right), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{4} \cdot k_1 + \frac{3}{4} \cdot k_2, \\ x_{k+1} &= x_k + h. \end{aligned}$$

Представлені ітераційні формули одного з методів Рунге-Кутта другого порядку, при його застосуванні допускається похибка порядку h^2 , де порядок похибки $s = 2$.

Різних модифікацій методів Рунге-Кутта другого порядку може бути отримано багато, який з них краще застосувати при розв'язанні того або іншого диференційного рівняння залежить від особливостей самого рівняння.

5.5.3. Методи Рунге-Кутта третього порядку

Розглянемо методи Рунге-Кутта при $q = 3$ і одержимо ітераційні формули методів третього порядку

$$y(x+h) \approx y(x) + p_1 \cdot k_1(h) + p_2 \cdot k_2(h) + p_3 \cdot k_3(h),$$

де

$$\begin{aligned} k_1(h) &= h \cdot f(x, y), \\ k_2(h) &= h \cdot f(x + a_2 \cdot h, y + b_{21} \cdot k_1(h)), \\ k_3(h) &= h \cdot f(x + a_3 \cdot h, y + b_{31} \cdot k_1(h) + b_{32} \cdot k_2(h)). \end{aligned}$$

Для знаходження восьми невідомих параметрів, що входять у рівності, будемо використовувати умови

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R'''(0) = 0, \quad R^{IV}(0) \neq 0,$$

з яких одержимо систему із шести рівнянь

$$\begin{cases} a_2 &= b_{21}, \\ a_3 &= b_{31} + b_{32}, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\ 2 \cdot (p_2 a_2 + p_3 a_3) &= 1, \\ 3 \cdot (p_2 a_2^2 + p_3 a_3^2) &= 1, \\ 6 a_2 p_3 b_{32} &= 1. \end{cases}$$

Ця система має два сімейства розв'язань: двопараметричне з вільними параметрами a_2, a_3 , причому $a_2 \neq a_3$ і $a_2 \neq \frac{2}{3}$, та однопараметричне з вільним параметром b_{32} (при $a_2 = a_3 = \frac{2}{3}$).

Розглядаючи різні варіанти розв'язання системи, можна визначити числові значення параметрів для одержання ітераційних формул методів Рунге-Кутта третього порядку. При цьому буде допускатися похибка, обумовлена величиною h^3 , а порядок похибки буде дорівнювати $s = 3$.

Нехай $a_2 = 0.5$, $a_3 = 1$, тоді

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{2}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{6}, \quad b_{21} = \frac{1}{2}, \quad b_{31} = -1, \quad b_{32} = 2.$$

Ітераційні формули метода набирають вигляду

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{2} \cdot h, y_k + \frac{1}{2} \cdot k_1\right), \\ k_3 &= h \cdot f(x_k + h, y_k - k_1 + 2k_2), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_2 + k_3), \\ x_{k+1} &= x_k + h. \end{aligned}$$

Отримані рівності є квадратурними формулами методу Симпсона, які мають похибку, обумовлену величиною h^4 , а порядок похибки $s = 4$. У розглянутому окремому випадку порядок похибки методу більш високий, чим для інших методів третього порядку, у яких похибка визначається величиною h^3 при $s = 3$.

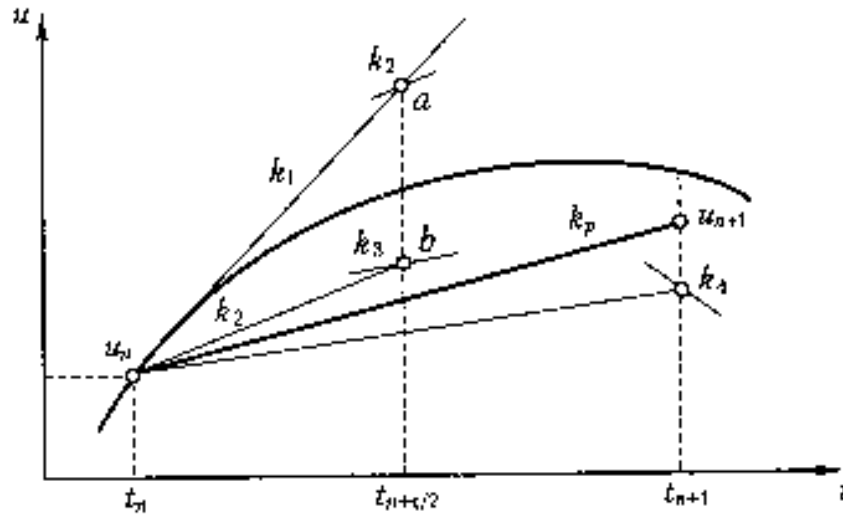
5.5.4. Методи Рунге-Кутта четвертого порядку

Існує сімейство методів Рунге-Кутта четвертого порядку, для яких $q = 4$, $s = 4$. Ці методи є найбільш застосовними при розв'язанні диференціальних рівнянь першого порядку по співвідношенню кількості обчислень і похибки, що допускається при цьому, обумовлено величиною h^4 .

Приведемо ітераційні формули класичного методу Рунге-Кутта четвертого порядку

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{2} \cdot h, y_k + \frac{1}{2} \cdot k_1\right), \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{2} \cdot h, y_k + \frac{1}{2} \cdot k_2\right), \\ k_4 &= h \cdot f(x_k + h, y_k + k_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4), \\ x_{k+1} &= x_k + h. \end{aligned}$$

Графічна інтерпретація методу Рунге-Кутта четвертого порядку показує, як вибираються допоміжні напрямки для побудови основного напрямку, у якому і визначається наступне значення шуканої функції.



Напрямок $k_p = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ є зваженим середнім чотирьох допоміжних напрямків k_1, k_2, k_3, k_4 , в якому і обчислюється наступне значення $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} \cdot k_p$.

5.5.5. Методи Рунге-Кутта більш високих порядків

Приведемо ітераційні формули модифікації методу Рунге-Кутта, що запропонував Мерсон. Метод Рунге-Кутта-Мерсона є методом п'ятого порядку $q = 5$, при його застосуванні допускається похибка, обумовлена величиною h^5 , а порядок похибки $s = 5$.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\
 k_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{3} \cdot h, y_k + \frac{1}{3} \cdot k_1\right), \\
 k_3 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{3} \cdot h, y_k + \frac{1}{6} \cdot k_1 + \frac{1}{6} \cdot k_2\right), \\
 k_4 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{2} \cdot h, y_k + \frac{1}{8} \cdot k_1 + \frac{3}{8} \cdot k_3\right), \\
 k_5 &= h \cdot f\left(x_k + h, y_k + \frac{1}{2} \cdot k_1 - \frac{3}{2} \cdot k_3 + 2k_4\right) \\
 y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_4 + k_5),
 \end{aligned}$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Приведемо ітераційні формули ще однієї модифікації методу Рунге-Кутта, що запропонував Фельберг. Метод Рунге-Кутта-Фельберга є методом шостого порядку $q = 6$, при його застосуванні допускається похибка, обумовлена величиною h^5 , а порядок похибки $s = 5$.

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{2}{9} \cdot h, y_k + \frac{2}{9} \cdot k_1\right), \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{1}{3} \cdot h, y_k + \frac{1}{12} \cdot k_1 + \frac{1}{4} \cdot k_2\right), \\ k_4 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{3}{4} \cdot h, y_k + \frac{69}{128} \cdot k_1 - \frac{143}{128} \cdot k_2 + \frac{135}{64} \cdot k_3\right), \\ k_5 &= h \cdot f\left(x_k + h, y_k - \frac{17}{12} \cdot k_1 + \frac{27}{4} \cdot k_2 - \frac{27}{5} \cdot k_3 + \frac{16}{15} \cdot k_4\right), \\ k_6 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{5}{6} \cdot h, y_k + \frac{65}{432} \cdot k_1 - \frac{5}{16} \cdot k_2 + \frac{13}{16} \cdot k_3 + \frac{4}{27} \cdot k_4 + \frac{5}{144} \cdot k_5\right), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 4 \cdot k_4 + k_5), \\ x_{k+1} &= x_k + h. \end{aligned}$$

5.6. МЕТОДИ РУНГЕ-КУТТА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Наведені формули методів Рунге-Кутта застосовуються також для розв'язання систем звичайних диференційних рівнянь

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

при заданих початкових умовах

$$y_1(x_0) = c_1, \quad y_2(x_0) = c_2, \dots, \quad y_n(x_0) = c_n.$$

Розв'язанням задачі є функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, що задовольняють всім рівнянням системи і заданих початкових умов. Застосовуючи методи Рунге-Кутта, шукані функції одержують у вигляді таблиць, що містять значення всіх функцій у точках $x_k = x_0 + k \cdot h$, $k = \overline{1, m}$.

Введемо в розгляд наступні векторні позначення

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \\ \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) &= (f_1(x, \mathbf{y}), f_2(x, \mathbf{y}), \dots, f_n(x, \mathbf{y})), \\ \mathbf{c} &= (c_1, c_2, \dots, c_n), \end{aligned}$$

де незалежна змінна $x \in [x_0, x_m]$, тоді систему диференціальних рівнянь можна записати у векторному вигляді

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

з початковими умовами вигляду

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{c}.$$

Припустимо, що відомі значення x , $\mathbf{y}(x)$ та h . Тоді значення $\mathbf{y}(x+h)$ будемо шукати у вигляді

$$\mathbf{y}(x+h) \approx \mathbf{y}(x) + p_1 \cdot \mathbf{k}_1(h) + p_2 \cdot \mathbf{k}_2(h) + \dots + p_q \cdot \mathbf{k}_q(h),$$

де

$$\mathbf{k}_1(h) = h \cdot \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

$$\mathbf{k}_2(h) = h \cdot \mathbf{f}(x + a_2 \cdot h, \mathbf{y} + b_{21} \cdot \mathbf{k}_1(h)),$$

$$\mathbf{k}_3(h) = h \cdot \mathbf{f}(x + a_3 \cdot h, \mathbf{y} + b_{31} \cdot \mathbf{k}_1(h) + b_{32} \cdot \mathbf{k}_2(h)),$$

.....

$$\mathbf{k}_q(h) = h \cdot \mathbf{f}(x + a_q \cdot h, \mathbf{y} + b_{q1} \cdot \mathbf{k}_1(h) + \dots + b_{q,q-1} \cdot \mathbf{k}_{q-1}(h)).$$

Для розв'язання системи диференціальних рівнянь можна вибрати метод Рунге-Кутта будь-якого порядку, застосувавши відповідні формули до векторного подавання системи. Для цього всі обчислення потрібно проводити з використанням циклічних процесів по всіх компонентах векторів, що беруть участь у формулах.

5.7. МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

5.7.1. Метод кінцевих різниць розв'язання задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

Застосуємо метод кінцевих різниць для розв'язання лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

з заданими початковими умовами

$$y(x_0) = c_1, \quad y'(x_0) = c_2.$$

Тут $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані безперервні функції при $x \in [a, b]$, c_1 , c_2 – задані постійні.

Потрібно знайти функцію $y = y(x)$ на проміжку $x \in [a, b]$, що задовольняє заданому рівнянню й початковим умовам. Розв'язання будемо шукати у вигляді таблиці значень функції $y_i = y(x_i)$ в точках

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{де } x_0 = a, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad h \text{ – крок інтегрування.}$$

Суть методу кінцевих різниць стосовно до задачі Коші полягає в тім, що всі похідні в диференційному рівнянні і початкових умовах виражаються через кінцеві різниці відповідних порядків. Це дозволяє одержати розрахункові ітераційні формули для визначення всіх значень шуканої функції $y_i = y(x_i)$ в точках $x_i \in [a, b]$.

Розглянемо першу початкову умову.

$$y(x_0) = c_1 \quad \text{це означає, що} \quad y_0 = c_1.$$

Розглянемо другу початкову умову, у якій похідну виразимо через кінцеву різницю першого порядку в точці x_0 .

$$y'(x_0) = c_2, \quad \frac{y_1 - y_0}{h} = c_2, \quad \text{звідки} \quad y_1 = y_0 + c_2 \cdot h.$$

Всі інші значення шуканої функції ми одержимо із заданого диференційного рівняння. Для цього скористаємося одним з наступних подавань похідних першого порядку через кінцеві різниці.

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (\text{використовується кінцева різниця вперед}),$$

$$y'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (\text{використовується кінцева різниця назад}),$$

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (\text{використовується центральна кінцева різниця}).$$

Для похідної другого порядку скористаємося її подаванням через кінцеву різницю другого порядку

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Замінімо задане диференційне рівняння на відповідне кінцево-різницеве. Для цього першу похідну представимо за допомогою кінцевої різниці вперед

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q(x_i) \cdot y_i = f(x_i).$$

Виразимо y_{i+1} через інші значення, помноживши обидві частини на $h^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + p(x_i) \cdot h \cdot (y_{i+1} - y_i) + q(x_i) \cdot h^2 \cdot y_i &= h^2 \cdot f(x_i), \\ y_{i+1} \cdot (1 + p(x_i) \cdot h) &= y_i \cdot (2 + p(x_i) \cdot h - q(x_i) \cdot h^2) - y_{i-1} + h^2 \cdot f(x_i), \\ y_{i+1} &= \frac{y_i \cdot (2 + p(x_i) \cdot h - q(x_i) \cdot h^2) - y_{i-1} + h^2 \cdot f(x_i)}{(1 + p(x_i) \cdot h)}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що y_0 і y_1 визначено з початкових умов, наведена ітераційна формула дозволяє обчислити всі шукані значення функції, починаючи з y_2 , при цьому $i = 1, n - 1$.

Така схема обчислень є явною схемою одержання розв'язання рішення задачі Коші для диференційного рівняння другого порядку.

Аналогічно можна одержати ітераційні формули знаходження розв'язання, якщо першу похідну представити за допомогою кінцевої різниці назад

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + q(x_i) \cdot y_i = f(x_i),$$

звідки

$$y_{i+1} = y_i \cdot (2 - p(x_i) \cdot h - q(x_i) \cdot h^2) - y_{i-1} \cdot (1 - p(x_i) \cdot h) + h^2 \cdot f(x_i),$$

$$i = \overline{1, n-1}.$$

Більш точні результати виходять, якщо першу похідну в диференційному рівнянні представити за допомогою центральної кінцевої різниці

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i) \cdot y_i = f(x_i),$$

звідки

$$y_{i+1} = \frac{y_i \cdot (4 - 2q(x_i) \cdot h^2) - y_{i-1} \cdot (2 - p(x_i) \cdot h) + 2h^2 \cdot f(x_i)}{(2 + p(x_i) \cdot h)}.$$

$$i = \overline{1, n-1}.$$

Вибір однієї з наведених схем для розв'язання задачі Коші визначається особливостями задачі або вимогами, пропонованими до її розв'язання.

Оцінка похибки методу кінцевих різниць для розглянутої задачі Коші визначається величиною

$$\Delta y(x) \leq \frac{h^2 M_4}{96} (b-a)^2, \quad \text{де} \quad M_4 = \max_{[a,b]} |y^{(4)}(x)|.$$

Приклад. Методом кінцевих різниць знайти розв'язання наступної задачі Коші на проміжку $x \in [1.0; 1.4]$ із кроком інтегрування $h = 0.1$

$$x^2 y'' + xy' = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.0566.$$

Розв'язання. Розв'язання задачі будемо шукати у вигляді таблиці.

Скористаємося початковими умовами.

$$y(1) = 0.$$

Отже $x_0 = 1.0, \quad y_0 = 0.0.$

$$y'(1) = 0.0566.$$

Отже $x_1 = x_0 + h = 1.1, \quad y_1 = y_0 + 0.0566 \cdot h = 0.00566.$

Для визначення інших значень скористаємося центральними кінцево-різницевиими відношеннями для похідних, підставимо їх у задане рівняння

$$x_i^2 \cdot \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 1, \quad i = \overline{1, n-1}$$

і одержимо

$$y_{i+1} = \frac{4x_i^2 y_i - (2x_i^2 - x_i h) \cdot y_{i-1} + 2h^2}{2x_i^2 + x_i h}, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Звідки

$$\begin{array}{lll}
i = 1, & x_2 = x_1 + h = 1.2 & y_2 = 0.01873. \\
i = 2, & x_3 = x_2 + h = 1.3 & y_3 = 0.03743. \\
i = 3, & x_4 = x_3 + h = 1.4 & y_4 = 0.06043.
\end{array}$$

У практичних задачах зустрічаються рівняння, у яких функції $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ задані таблично з деяким кроком h . Природно такі рівняння розв'язувати різницеvim методом з даним кроком h .

5.7.2. Метод кінцевих різниць розв'язання задачі Коші для нелінійних диференційних рівнянь другого порядку

Застосуємо метод кінцевих різниць для розв'язання нелінійного диференційного рівняння другого порядку

$$y'' = f(x, y, y')$$

з заданими початковими умовами

$$y(x_0) = c_1, \quad y'(x_0) = c_2.$$

Розв'язання задачі Коші будемо шукати на проміжку $x \in [a, b]$ у вигляді таблиці значень функції $y_i = y(x_i)$ в точках $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$, де $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$, h – крок інтегрування.

Як і у випадку розв'язання лінійного рівняння, початкові умови дозволяють визначити значення y_0 і y_1 :

$$\begin{array}{ll}
y(x_0) = c_1, & \text{отже} \quad y_0 = c_1, \\
y'(x_0) = c_2, & \text{отже} \quad y_1 = y_0 + c_2 \cdot h.
\end{array}$$

Заміняючи похідні їхніми виразами через кінцеві різниці, рівняння можна записати одним з наступних способів:

$$\begin{array}{l}
1) \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right), \\
2) \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right), \\
3) \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right).
\end{array}$$

В обраному варіанті рівність розв'язується відносно y_{i+1} і отримуються розрахункові формули для визначення всіх значень шуканої функції в точках $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{1, n}$.

Метод кінцевих різниць можна застосовувати для розв'язання задачі Коші для диференційних рівнянь довільного порядку. При цьому похідні більш високих порядків заміняються їхніми подаваннями через кінцеві різниці відповідних порядків.

5.7.3. Метод кінцевих різниць розв'язання крайових задач для лінійних диференційних рівнянь другого порядку

Розглянемо лінійне диференційне рівняння другого порядку

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$$

з лінійними крайовими умовами

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A,$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B.$$

Тут $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані безперервні функції при $x \in [a, b]$, α_0 , α_1 , β_0 , β_1 , A , B – задані постійні, причому $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ и $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$. Якщо $A = B = 0$, то крайові умови називаються однорідними.

Потрібно знайти функцію $y = y(x)$ на проміжку $x \in [a, b]$, що задовольняє заданому рівнянню і крайовим умовам.

Розв'язання будемо шукати у вигляді таблиці значень функції $y_i = y(x_i)$ в точках $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$, де $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$, h – крок інтегрування.

Замінімо приблизно у кожному внутрішньому вузлі похідні $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ кінцево-різницевиими відношеннями

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

а на кінцях проміжку візьмемо

$$y'(a) = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'(b) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Використовуючи наведені формули, замінимо диференційне рівняння та крайові умови системою кінцево-різницевиих рівнянь

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q(x_i) y_i = f(x_i), & i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, & \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases}$$

Більш точні формули виходять, якщо замінити $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ центральнорізницевиими відношеннями

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

Тоді одержуємо систему

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i) y_i = f(x_i), & i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, & \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases}$$

Застосовуючи метод кінцевих різниць для розв'язання крайової задачі, одержимо лінійну алгебраїчну систему $n+1$ рівняння з $n+1$ невідомим.

Розв'язавши її, одержимо таблицю наближених значень шуканої функції $y_i = y(x_i)$ в точках $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{0, n}$.

Саме в цьому є принципова відмінність застосування методу кінцевих різниць до задачі Коші, де вдається одержати ітераційні формули для знаходження невідомих значень функції по вже знайдених значеннях.

Приклад. Методом кінцевих різниць знайти розв'язання наступної крайової задачі на проміжку $x \in [1.0; 1.4]$ із кроком інтегрування $h = 0.1$

$$x^2 y'' + xy' = 1, \quad y(1) = 0, \quad y(1.4) = 0.06043$$

Розв'язання Розв'язання задачі будемо шукати як розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} x_i^2 \cdot \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 1, & i = \overline{1, 3}, \\ y_0 = 0, & y_4 = 0.06043, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_i \cdot (2x_i + h) \cdot y_{i+1} - 4x_i^2 y_i + x_i \cdot (2x_i - h) \cdot y_{i-1} = 2h^2, & i = \overline{1, 3}, \\ y_0 = 0, & y_4 = 0.06043. \end{cases}$$

Враховуючи, що $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.2$, $x_3 = 1.3$, $x_4 = 1.4$, розпишемо всі рівняння отриманої системи.

$$\begin{cases} y_0 & = 0, \\ 2.31y_0 - 4.84y_1 + 2.53y_2 & = 0.02, \\ 2.76y_1 - 5.76y_2 + 3.00y_3 & = 0.02, \\ 3.25y_2 - 6.76y_3 + 3.51y_4 & = 0.02, \\ y_4 & = 0.06043. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему яким-небудь відомим методом, одержимо наступні значення

$$y_0 = 0.0, \quad y_1 = 0.00566, \quad y_2 = 0.01873, \quad y_3 = 0.03742, \quad y_4 = 0.06043,$$

які і будуть значеннями шуканої функції в точках

$$x_0 = 1.0, \quad x_1 = 1.1, \quad x_2 = 1.2, \quad x_3 = 1.3, \quad x_4 = 1.4.$$

Розв'язання систем, отриманих за допомогою методу кінцевих різниць, при великому n стає досить громіздким. Існують спеціальні методи, наприклад, методом прогону, розроблені спеціально для розв'язання систем такого виду.

5.7.4. Метод кінцевих різниць розв'язання крайових задач для нелінійних диференційних рівнянь другого порядку

Розглянемо нелінійне диференційне рівняння

$$y'' = f(x, y, y')$$

з крайовими умовами

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B.$$

Візьмемо на відрізку $x \in [a, b]$ систему рівновіддалених вузлів $x_0 = a$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{1, n}$, з деяким кроком $h = \frac{b-a}{n}$ і замінимо наближено диференційне рівняння та крайові умови системою

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right), & i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, & \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \end{cases}$$

Одержуємо нелінійну систему $n+1$ рівнянь із $n+1$ невідомими y_i , $i = \overline{0, n}$. Розв'язання системи знаходимо методом ітерацій по наступних формулах:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^{(k+1)} - 2y_i^{(k+1)} + y_{i-1}^{(k+1)}}{h^2} = f\left(x_i, y_i^{(k)}, \frac{y_{i+1}^{(k)} - y_{i-1}^{(k)}}{2h}\right), & i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0^{(k+1)} + \alpha_1 \frac{y_1^{(k+1)} - y_0^{(k+1)}}{h} = A, & \beta_0 y_n^{(k+1)} + \beta_1 \frac{y_n^{(k+1)} - y_{n-1}^{(k+1)}}{h} = B. \end{cases}$$

Тут індекс k зверху означає номер наближення. На кожному кроці ітерацій доводиться вирішувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Використовуючи спеціальний вид цієї системи, можна одержати її розв'язання в явному вигляді:

$$y_i^{(k+1)} = \frac{h}{\Delta} [A\beta_0(b-a) + A\beta_1 + \alpha_1 B] + \frac{i}{\Delta} (\alpha_0 B - A\beta_0) + h^2 \sum_{j=1}^{n-1} g_{ji} f_j^{(k)},$$

де числа $a, b, A, B, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ відомі, а Δ та g_{ji} обчислюються по формулах

$$\Delta = \frac{1}{h} [\alpha_0 \beta_0 (b-a) + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0],$$

$$g_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \left(j\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h} \right) \left(i\beta_0 - \beta_0 n - \frac{\beta_1}{h} \right), & \text{если } j \leq i, \\ \frac{1}{\Delta} \left(i\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h} \right) \left(j\beta_0 - \beta_0 n - \frac{\beta_1}{h} \right), & \text{если } j > i. \end{cases}$$

Помітимо, що в розрахунковій формулі тільки $f_j^{(k)}$ залежить від номера ітерації.

Таким чином, знаходження розв'язання системи зводиться до досить простої ітераційної схеми.

6. ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

6.1. ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДУ КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Метод кінцевих різниць, або метод сіток, є одним з найпоширеніших методів чисельного розв'язку крайових задач для рівнянь математичної фізики, які описуються диференціальними рівняннями другого порядку в частинних похідних. В основі методу лежить ідея заміни частинних похідних відповідними кінцево-різницевиими відношеннями.

Ми обмежимося розглядом невідомих функцій, що залежать від двох незалежних змінних. Нехай у площині xOy є деяка область G із границею Γ . Побудуємо на площині xOy два сімейства паралельних прямих:

$$x = x_0 + i \cdot h_1, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$y = y_0 + j \cdot h_2, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Точки перетину цих прямих назвемо *вузлами сітки*.

Два вузли називаються *сусідніми*, якщо вони віддалені один від одного в напрямку осі Ox або Oy на відстань, що дорівнює кроку сітки h_1 або h_2 відповідно.

Виділимо вузли, що належать області $G + \Gamma$, а також деякі вузли, що не належать цієї області, але розташовані на відстані, меншій, ніж крок, від границі Γ .

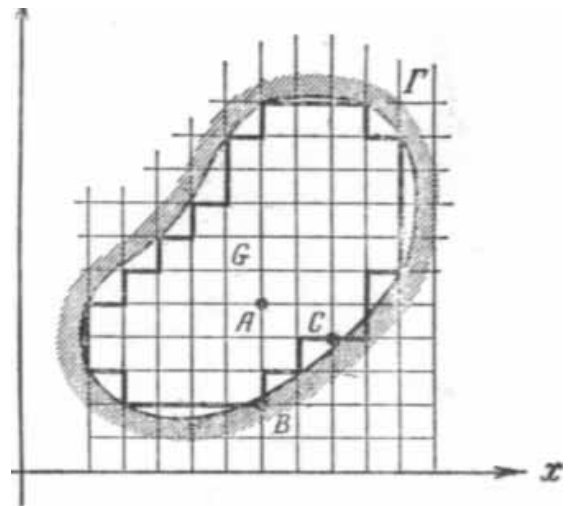
Такі вузли, для яких усі чотири сусідні вузли належать виділеній множині вузлів, називаються *внутрішніми* (вузол A). Вузли, що залишилися з виділених вузлів, називаються *граничними* (вузли B, C).

Значення шуканої функції $u = u(x, y)$ у вузлах сітки будемо позначати через $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. У кожному внутрішньому вузлі (x_i, y_j) , де $x_i = x_0 + i \cdot h_1$, $y_j = y_0 + j \cdot h_2$ замінимо частинні похідні першого порядку центральними кінцево-різницевиими відношеннями:

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1},$$

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_2},$$

у граничних точках ми вимушені користуватися менш точними формулами



$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1}, \quad \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2},$$

Аналогічно замінюються частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2}.$$

Зазначені заміни похідних у кожному вузлі сітки дозволяють звести розв'язок рівнянь у частинних похідних до розв'язку системи різницьових рівнянь.

6.2. МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДИРИХЛЄ В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянемо крайову задачу для диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку, що відноситься до еліптичного типу.

Задача Дирихле полягає в знаходженні функції $u(x, y)$, що задовольняє усередині деякої заданої області G рівнянню Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

або рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

а на границі області Γ граничним умовам

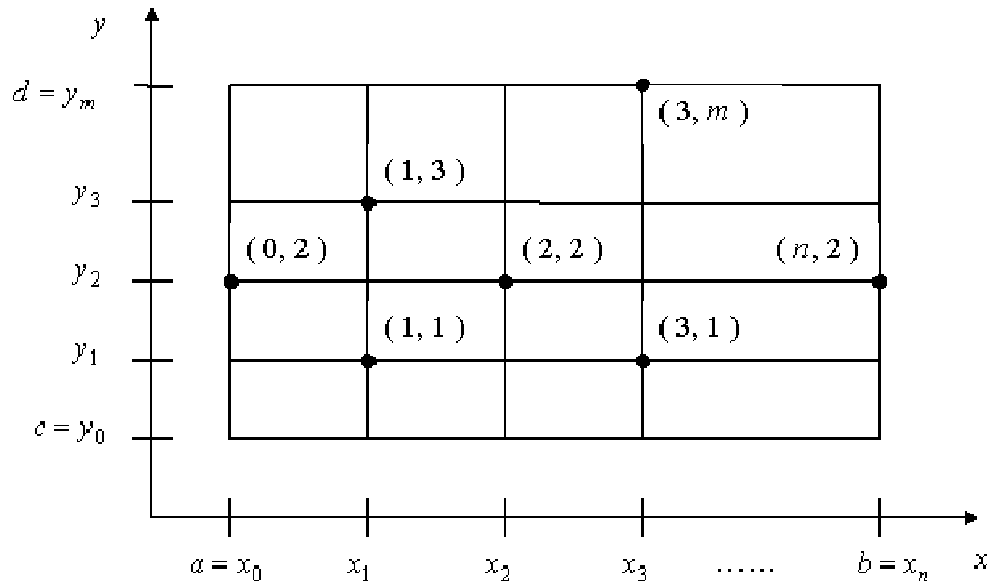
$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y),$$

де $\varphi(x, y)$ – задана безперервна функція.

Розглянемо спочатку прямокутну область зміни змінних $G = \{(x, y), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, а граничні умови задамо на кожній стороні прямокутної області:

$$\begin{aligned} u(a, y) &= \varphi_1(y), & u(b, y) &= \varphi_2(y), & y &\in [c, d], \\ u(x, c) &= \psi_1(x), & u(x, d) &= \psi_2(x), & x &\in [a, b]. \end{aligned}$$

Для розв'язку крайової задачі застосуємо метод кінцевих різниць. Для цього в області $G = \{(x, y), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ побудуємо два сімейства паралельних прямих, що проходять через точки $x_i = a + ih_1$, $i = \overline{0, n}$, $y_j = c + jh_2$, $j = \overline{0, m}$ на осях координат, де $h_1 = \frac{b-a}{n}$, $h_2 = \frac{d-c}{m}$.



Значення невідомої функції $u = u(x, y)$ у вузлах сітки позначимо через $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$.

Значення шуканої функції в граничних точках визначимо із заданих граничних умов.

Гранична умова

$$u(a, y) = \varphi_1(y), \quad y \in [c, d]$$

виконується для $x = x_0$ і всіх $y = y_j$, де $y_j \in [y_0, y_m]$: $u(x_0, y_j) = \varphi_1(y_j)$,
або

$$u_{0j} = \varphi_1(y_j), \quad j = \overline{0, m}.$$

Гранична умова

$$u(b, y) = \varphi_2(y), \quad y \in [c, d]$$

виконується для $x = x_n$ і всіх $y = y_j$, де $y_j \in [y_0, y_m]$: $u(x_n, y_j) = \varphi_2(y_j)$,
або

$$u_{nj} = \varphi_2(y_j), \quad j = \overline{0, m}.$$

Гранична умова

$$u(x, c) = \psi_1(x), \quad x \in [a, b]$$

виконується для $y = y_0$ і всіх $x = x_i$, де $x_i \in [x_0, x_n]$: $u(x_i, y_0) = \psi_1(x_i)$,
або

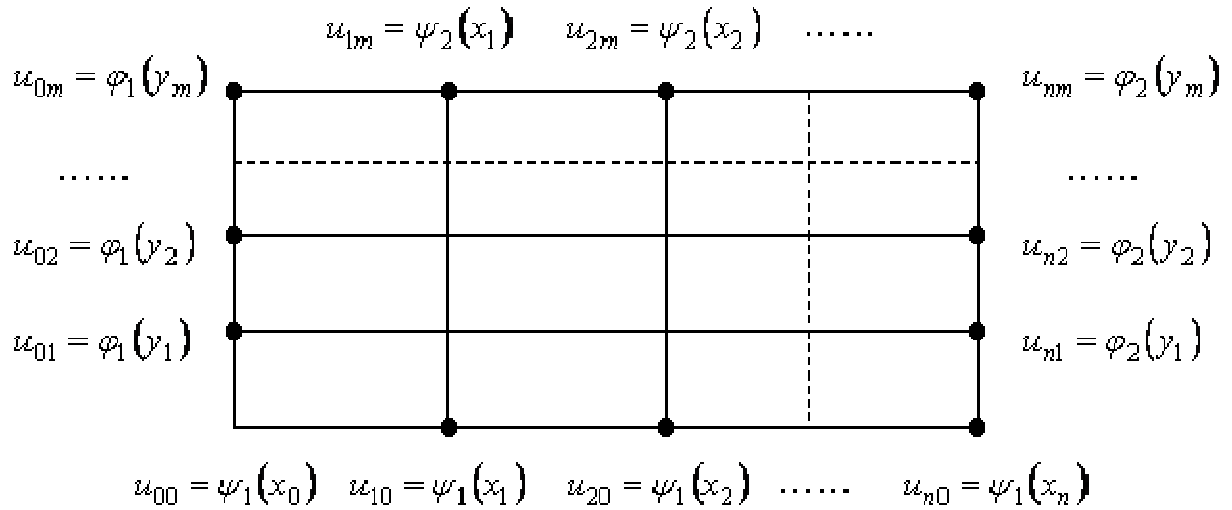
$$u_{i0} = \psi_1(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Гранична умова

$$u(x, d) = \psi_2(x), \quad x \in [a, b]$$

виконується для $y = y_m$ і всіх $x = x_i$, де $x_i \in [x_0, x_n]$: $u(x_i, y_m) = \psi_2(x_i)$,
або

$$u_{im} = \psi_2(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$



Значення шуканої функції у внутрішніх точках області визначимо із заданого рівняння, замінивши похідні їх виразами через кінцеві різниці

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2}.$$

При цьому замість диференціального рівняння в частинних похідних одержимо відповідне кінцево-різницеve рівняння

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = f(x_i, y_j)$$

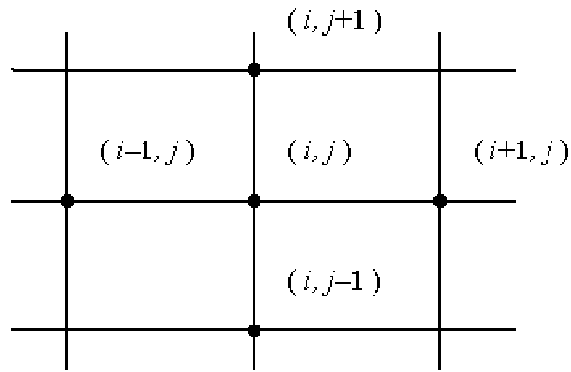
для рівняння Пуассона і

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = 0$$

для рівняння Лапласа.

Отримані рівняння є вірними для всіх $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ і разом із граничними умовами утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо значень функції $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ у внутрішніх вузлах сітки, а значення в граничних вузлах у точності дорівнюють значенням заданих граничних функцій.

У кожному такому рівнянні задіяні значення шуканої функції у вузлах, обумовлених наступної схемою.



Найбільш простий вигляд ця система одержує, якщо крок розбивки області уздовж осі OX буде дорівнювати кроку розбивки області уздовж осі OY

$$h_1 = h_2 = h.$$

У цьому випадку кінцево-різницеві рівняння приймуть вигляд:

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = h^2 f(x_i, y_j)$$

для рівняння Пуассона і

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 0$$

для рівняння Лапласа, якщо $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$.

Похибка заміни диференціального рівняння кінцево-різницеvim оцінюється величиною

$$\left| R(x_i, y_j) \right| \leq \frac{h^2}{6} M_4, \quad \text{де} \quad M_4 = \max_{(x_i, y_j) \in G} \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}.$$

Однак похибка наближеного розв'язку, отримана кінцево-різницеvim методом, складається з трьох видів похибок:

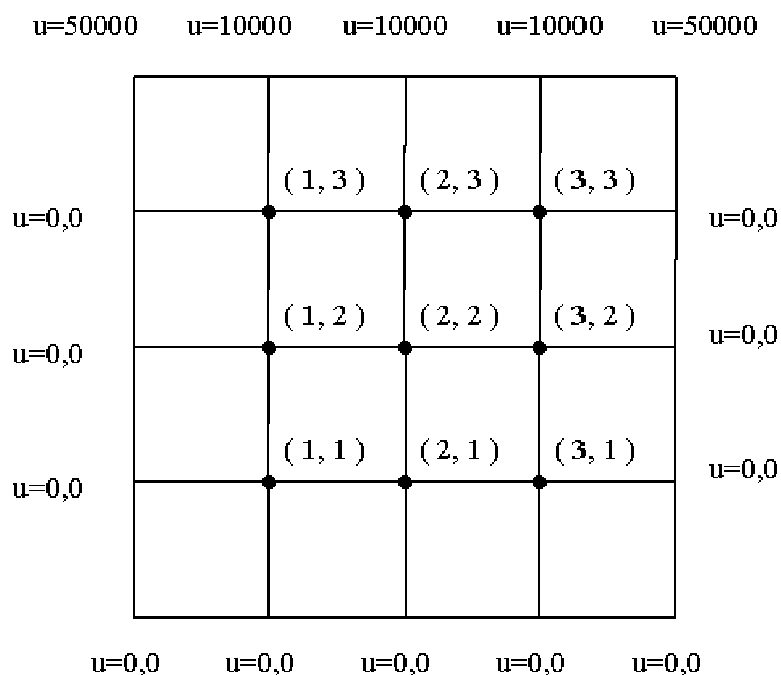
- 1) похибки заміни диференціального рівняння кінцево-різницеvim;
- 2) похибки апроксимації крайових умов;
- 3) похибки, отримані в результаті того, що система кінцево-різницевих рівнянь розв'язується наближеним методом.

Приклад. Розглянемо задачу про стаціонарний розподіл тепла в плоскій квадратній ізольованій пластині зі стороною, рівної 1, якщо на границі пластинки підтримується постійна температура.

Відомо, що функція $u(x, y)$, що задає розподіл температури в пластині, є розв'язком рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Значення функції в граничних точках області показані на рисунку.



Розв'язок. Побудуємо сітку із кроком $h=1/4$. Одержимо дев'ять внутрішніх вузлів, у яких необхідно визначити значення функції. Для цих вузлів запишемо кінцево-різницеві рівняння.

Враховуючи симетрію граничних умов, маємо:

$$u_{11} = u_{31} \quad u_{12} = u_{32} \quad u_{13} = u_{33},$$

що скорочує кількість невідомих значень функції і у внутрішніх вузлах до шести. Таким чином, у вузлах (3, 1), (3,2), (3, 3) кінцево-різницеві рівняння записувати не потрібно. А для інших шести внутрішніх вузлів (1, 1), (2, 1), (1,2), (2,2), (1,3), (2, 3) одержуємо відповідно шість рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} u_{01} + u_{21} + u_{10} + u_{12} - 4u_{11} &= 0, & u_{11} + u_{31} + u_{20} + u_{22} - 4u_{21} &= 0, \\ u_{02} + u_{22} + u_{11} + u_{13} - 4u_{12} &= 0, & u_{12} + u_{32} + u_{21} + u_{23} - 4u_{22} &= 0, \\ u_{03} + u_{23} + u_{12} + u_{14} - 4u_{13} &= 0, & u_{13} + u_{33} + u_{22} + u_{24} - 4u_{23} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Крім невідомих значень у внутрішніх вузлах у ці рівняння входять ще 12 значень функції в граничних точках. Ці значення слід узяти із крайових умов

$$\left. \begin{aligned} u_{i0} &= 0, & i &= 1, 2, 3, \\ u_{0j} &= 0, & j &= 1, 2, 3, \\ u_{14} &= u_{24} = u_{34} = 10000. \end{aligned} \right\}$$

Помітимо, що в інших вузлах граничні умови не використовуються. Остаточно, система рівнянь прийме вигляд

$$\begin{aligned} u_{21} + u_{12} - 4u_{11} &= 0, & 2u_{11} + u_{22} - 4u_{21} &= 0, \\ u_{22} + u_{11} + u_{13} - 4u_{12} &= 0, & 2u_{12} + u_{21} + u_{23} - 4u_{22} &= 0, \\ u_{23} + u_{12} - 4u_{13} &= -10000, & 2u_{13} + u_{22} - 4u_{23} &= -10000. \end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему методом Гауса, одержимо

$$u_{11} = 714, \quad u_{21} = 928, \quad u_{12} = 1875, \quad u_{22} = 2500, \quad u_{13} = 4286, \quad u_{23} = 5268.$$

6.3. ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ КІНЦЕВО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Безпосередній розв'язок системи кінцево-різницевих рівнянь методами послідовного виключення при великій кількості вузлів виявляється занадто громіздким. Тут більш зручні ітераційні методи розв'язку, які враховують спеціальний вигляд таких систем і виявляються зручними для реалізації на ЕОМ.

Розглянемо один з найбільш простих методів – процес усереднення Лібмана для систем. Згідно з методом Лібмана обчислення ведуться в такий спосіб: вибравши початкові наближення $u_{ij}^{(0)}$, послідовні наближення $u_{ij}^{(k+1)}$ для внутрішніх вузлів сіткової області $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ визначаємо по формулах:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} - h^2 f(x_i^{(k)}, y_j^{(k)}) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

для рівняння Пуассона і

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

для рівняння Лапласа, які впливають із кінцево-різницевих рівнянь.

Для одержання початкових наближень можна вказати два способи:

- 1) значення $u_{ij}^{(0)}$ у внутрішніх вузлах одержують шляхом інтерполяції, що використовує відомі граничні умови;

2) становлять систему кінцево-різницевих рівнянь для сітки з більшим кроком і розв'язують її методом виключення, а потім отримані значення інтерполюють на вузли даної сітки.

Доведено, що для будь-якого кроку h процес Лібмана сходиться до точного розв'язку незалежно від вибору початкових значень.

Ітераційний процес буде сходиться значно швидше, якщо при обчисленні наступних середніх арифметичних використовувати не тільки значення попереднього наближення, але й знов знайдені значення. Звичайно ітерації продовжують доти, поки у двох послідовних наближеннях не збіжиться необхідна кількість десяткових знаків.

6.4. МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Розглянемо крайову задачу для диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку параболічного типу. Задача полягає в знаходженні функції $u(x, t)$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t),$$

початковій умові

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, s]$$

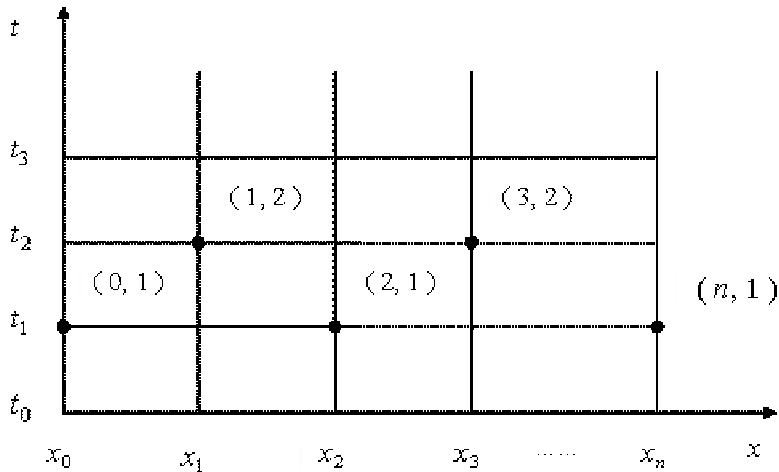
і граничним умовам

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t), \quad t \geq 0.$$

Якщо $F(x, t) \neq 0$, то розглядається крайова задача для неоднорідного рівняння, якщо $F(x, t) = 0$ – крайова задача для однорідного рівняння.

Сформульована задача, зокрема, є задачею теплопровідності, тобто задачею про поширення тепла в однорідному стрижні довжини s . Початкові умови задають розподіл тепла в стрижні в початковий момент часу $t = 0$. Граничні умови задають закони зміни температури із часом у граничних точках стрижня $x = 0$ й $x = s$. Функція $F(x, t)$ визначає наявність усередині стрижня теплових джерел. Якщо $F(x, t) = 0$, то внутрішні теплові джерела в стрижні відсутні.

Для розв'язку крайової задачі застосуємо метод кінцевих різниць. Для цього в області $t \geq 0$, $0 \leq x \leq s$ побудуємо два сімейства паралельних прямих, що проходять через точки $x_i = ih_1$, $i = \overline{0, n}$, $t_j = jh_2$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ на осях координат.



Значення невідомої функції $u = u(x, t)$ у вузлах сітки позначимо через $u_{ij} = u(x_i, t_j), i = \overline{0, n}, j = 0, 1, 2, \dots$

Для знаходження значень шуканої функції на границях заданої області скористаємося заданими крайовими умовами.

З початкових умов

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, s]$$

випливає, що вони виконуються для $t = t_0$ й усіх $x = x_i$, де $x_i \in [x_0, x_n]$:

$$u(x_i, t_0) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}$$

або

$$u_{i0} = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Із граничних умов

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t), \quad t \geq 0$$

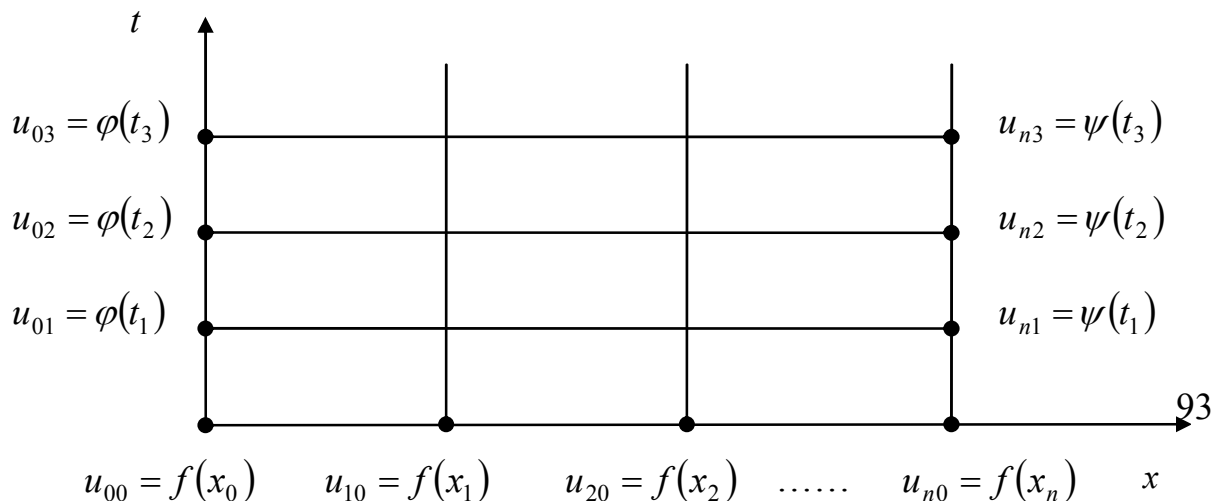
випливає, що вони виконуються для всіх $t = t_j$, де $t_j \in [t_0, t_m]$. Перша умова виконується для $x = x_0$, а друге – для $x = x_n$:

$$u(x_0, t_j) = \varphi(t_j), \quad u(x_n, t_j) = \psi(t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

або

$$u_{0j} = \varphi(t_j), \quad u_{nj} = \psi(t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

як показано на рисунку.



Для знаходження значень шуканої функції у внутрішніх вузлах області скористаємося заданим рівнянням, у якому похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в кожному внутрішньому вузлі приблизно замінимо різницеvim відношенням

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2},$$

а похідну $\frac{\partial u}{\partial t}$ – одним на два різницеvim відношення:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2} \quad \text{або} \quad \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_2}.$$

Тоді для диференціального рівняння одержимо два типи кінцево-різницеvim рівнянь при $i = \overline{1, n-1}$, $j = 1, 2, \dots$:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + F(x_i, t_j)$$

або

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + F(x_i, t_j).$$

Після множення рівнянь на $h_2 \neq 0$ одержимо

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{h_2}{h_1^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + h_2 F(x_i, t_j)$$

або

$$u_{i,j} - u_{i,j-1} = \frac{h_2}{h_1^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + h_2 F(x_i, t_j).$$

Позначивши $\sigma = \frac{h_2}{h_1^2}$, приводимо ці рівняння при $i = \overline{1, n-1}$, $j = 1, 2, \dots$ до

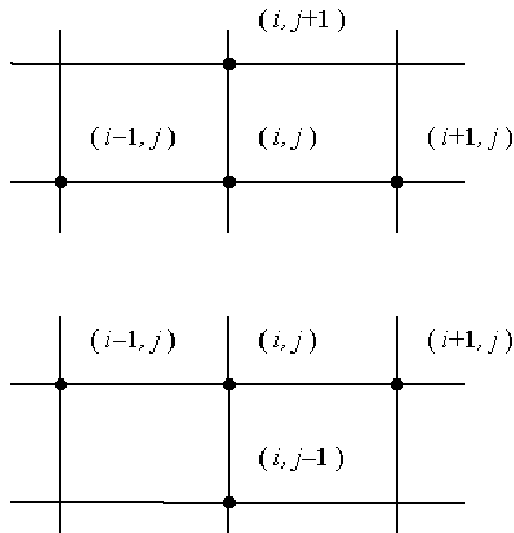
вигляду

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + h_2 F(x_i, t_j)$$

або

$$(1 + 2\sigma)u_{i,j} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = h_2 F(x_i, t_j).$$

Відзначимо, що для складання першого рівняння була використана явна схема вузлів, а для другого рівняння – неявна схема.



При виборі числа σ у рівняннях слід ураховувати дві обставини:

- 1) похибка заміни диференціального рівняння різницевим повинна бути найменшою;
- 2) різницеве рівняння повинне бути стійким.

Доведено, що рівняння з явною схемою вузлів буде стійким при $0 \leq \sigma \leq 1/2$, а рівняння з неявною схемою вузлів – при кожному σ .

Найбільш зручний вигляд перше рівняння з явною схемою вузлів має при $\sigma = 1/2$:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2} + h_2 F(x_i, t_j), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

і при $\sigma = 1/6$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}) + h_2 F(x_i, t_j), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Оцінки похибок наближених розв'язків отриманих кінцево-різницевих рівнянь у області $0 \leq x \leq s$, $0 \leq t \leq T$ мають вигляд

$$\Delta u \leq \frac{T}{4} \left(M_2 + \frac{1}{3} M_4 \right) h_1^2, \quad \text{для явної схеми вузлів при } \sigma = 1/2,$$

$$\Delta u \leq \frac{T}{72} \left(\frac{1}{3} M_2 + \frac{1}{5} M_4 \right) h_1^4, \quad \text{для явної схеми вузлів при } \sigma = 1/6,$$

$$\Delta u \leq \frac{T}{72} \left(\frac{1}{3} M_2 + \frac{1}{5} M_4 \right) h_1^4, \quad \text{для неявної схеми вузлів,}$$

де

$$M_2 = \max \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \quad M_3 = \max \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|, \quad M_4 = \max \left| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right|, \quad M_6 = \max \left| \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} \right|,$$

Порівнюючи отримані кінцево-різницеві співвідношення для визначення шуканої функції і наведені оцінки похибок можна зробити наступний висновок:

- 1) перше рівняння з явною схемою вузлів при $\sigma = 1/2$ має найпростіший вигляд і дозволяє обчислити всі значення шуканої функції, якщо відомі значення на початковому рівні, співвідношення між кроками інтегрування $h_2 = \frac{h_1^2}{2}$, погрішність застосовуваної формули визначається величиною h_1^2 ;
- 2) перше рівняння з явною схемою вузлів при $\sigma = 1/6$ більш громіздке, співвідношення між кроками $h_2 = \frac{h_1^2}{6}$ означає, що крок за часом t повинен бути значно менше кроку по змінній x , що приводить до більшого об'єму обчислень, однак ця формула має більш високу точність одержуваних значень у порівнянні з іншими формулами;
- 3) друга формула з неявною схемою вузлів приводить до розв'язку системи рівнянь щодо невідомих значень функції, дає меншу точність, однак кроки інтегрування вибираються довільно, незалежно одне від одного.

Приклад. Знайти наближений розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

задовольняючого умовам

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin \pi x, & x &\in [0; 1], \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, & t &\in [0; 0,06]. \end{aligned}$$

Розв'язок. Будемо використовувати явну схему вузлів з $\sigma = 1/2$. Виберемо по аргументу x крок $h_1 = 0,2$. Тому що $\sigma = 1/2$, одержуємо по аргументу t крок $h_2 = h_1^2 / 2 = 0,02$. Розіб'ємо проміжок $x \in [0; 1]$ на частини точками ділення $x_i = ih_1$, $i = \overline{0, 5}$, а проміжок $t \in [0; 0,06]$ точками $t_j = jh_2$, $j = \overline{0, 3}$. Тоді

$$x_0 = 0,0; \quad x_1 = 0,2; \quad x_2 = 0,4; \quad x_3 = 0,6; \quad x_4 = 0,8; \quad x_5 = 1,0.$$

$$t_0 = 0,0; \quad t_1 = 0,02; \quad t_2 = 0,04; \quad t_3 = 0,06.$$

Скористаємося початковими умовами й визначимо значення функції $u(x,t)$ на початковому шарі по формулах:

$$t_0 = 0,0; \quad u_{i0} = \sin(\pi \cdot x_i), \quad i = \overline{0, 5}.$$

Одержимо

$$\begin{aligned} u_{00} &= \sin(\pi \cdot 0,0) = 0,0; & u_{10} &= \sin(\pi \cdot 0,2) = 0,5878; \\ u_{20} &= \sin(\pi \cdot 0,4) = 0,9511; & u_{30} &= \sin(\pi \cdot 0,6) = 0,9511; \\ u_{40} &= \sin(\pi \cdot 0,8) = 0,5878; & u_{50} &= \sin(\pi \cdot 1,0) = 0,0; \end{aligned}$$

Скористаємося граничними умовами й визначимо значення функції $u(x, t)$ на лівій і правій границях області по формулах:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,0; & u_{0j} &= 0,0; & j &= \overline{0, 3}; \\ x_5 &= 1,0; & u_{5j} &= 0,0; & j &= \overline{0, 3}. \end{aligned}$$

Значення функції $u(x, t)$ на першому шарі при $t_1 = 0,02$ знаходимо по формулі з явною схемою вузлів, якщо $\sigma = 1/2$, при $j = 0$:

$$u_{i,1} = \frac{u_{i+1,0} + u_{i-1,0}}{2}; \quad i = \overline{1, 4};$$

При цьому використовуються значення функції на початковому шарі й граничні значення. Таким чином, одержуємо

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{1}{2}(u_{20} + u_{00}) = \frac{1}{2}(0,9511 + 0,0) = 0,4755; \\ u_{21} &= \frac{1}{2}(u_{30} + u_{10}) = \frac{1}{2}(0,9511 + 0,5878) = 0,7694; \\ u_{31} &= \frac{1}{2}(u_{40} + u_{20}) = \frac{1}{2}(0,5878 + 0,9511) = 0,7694; \\ u_{41} &= \frac{1}{2}(u_{50} + u_{30}) = \frac{1}{2}(0,0 + 0,9511) = 0,4755; \end{aligned}$$

Значення функції $u(x, t)$ на другому шарі при $t_1 = 0,04$, $j = 1$ знаходимо по формулі:

$$u_{i,2} = \frac{u_{i+1,1} + u_{i-1,1}}{2}; \quad i = \overline{1, 4}$$

і т.д.

У результаті одержимо наступні значення:

3	0,06	0	0,3112	0,5036	0,5036	0,3112	0
2	0,04	0	0,3847	0,6225	0,6225	0,3847	0
1	0,02	0	0,4755	0,7694	0,7694	0,4755	0
0	0	0	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0
j	t						
	x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
	i	0	1	2	3	4	5

6.5. МЕТОД КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

Розглянемо крайову задачу для диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку гіперболічного типу. Задача полягає в знаходженні функції $u(x, t)$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + F(x, t)$$

початковим умовам

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad x \in [0, s]$$

і граничним умовам

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t), \quad t \geq 0.$$

Якщо $F(x, t) \neq 0$, то розглядається крайова задача для неоднорідного рівняння, якщо $F(x, t) = 0$ – крайова задача для однорідного рівняння.

Сформульована задача, зокрема, описує коливання струни, функція $u(x, t)$ визначає положення кожної точки струни в момент часу t . Початкові умови для кожної точки струни описують початкове положення й початкову швидкість. Граничні умови описують зміну положення граничних точок струни $x = 0$ й $x = s$ із часом. Функція $F(x, t)$ визначає наявність збудливих сил, що діють на струну.

Для розв'язку крайової задачі застосуємо метод кінцевих різниць. Для цього в області $t \geq 0$, $0 \leq x \leq s$ побудуємо два сімейства паралельних прямих, що проходять через точки $x_i = ih_1$, $i = \overline{0, n}$, $t_j = jh_2$, $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ на осях координат. Значення невідомої функції $u = u(x, t)$ у вузлах сітки позначимо через $u_{ij} = u(x_i, t_j)$, $i = \overline{0, n}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Для знаходження значень шуканої функції на границях заданої області скористаємося заданими крайовими умовами.

Із граничних умов

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t), \quad t \geq 0$$

впливає

$$u_{0j} = \varphi(t_j), \quad u_{nj} = \psi(t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

З першої початкової умови

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, s]$$

впливає

$$u_{i0} = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Зупинимося докладніше на другій початковій умові

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad x \in [0, s],$$

яке виконуються для $t = t_0$ й усіх $x = x_i$, де $x_i \in [x_0, x_n]$:

$$\frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} = g(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

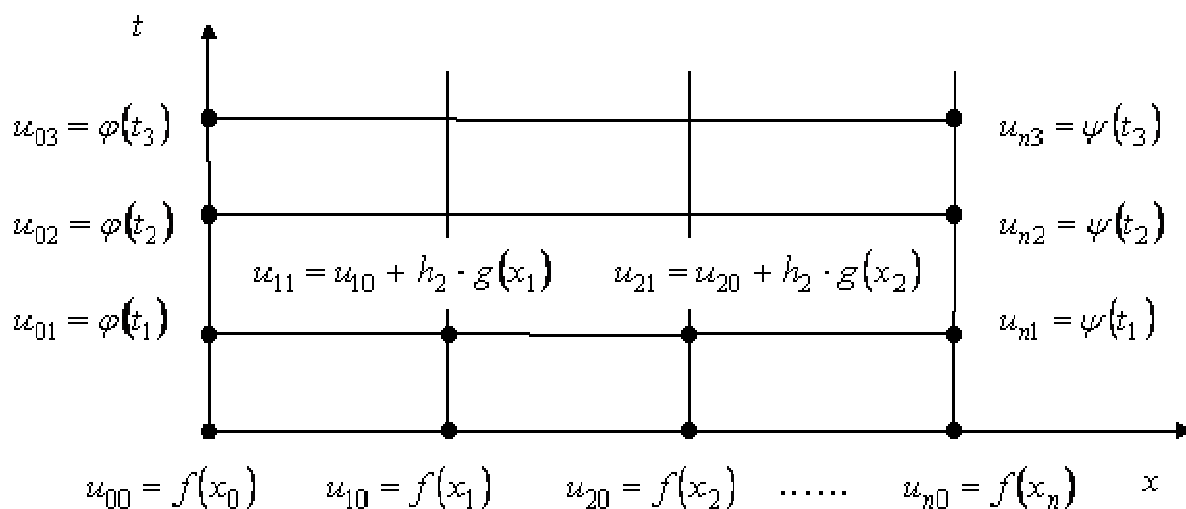
Частинну похідну за часом представимо через відповідну кінцеву різницю

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h_2} = g(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

звідки випливає, що

$$u_{i,1} = u_{i,0} + h_2 \cdot g(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Отримана формула дозволяє обчислити значення шуканої функції при $t = t_1$. Отже, початкові умови дозволяють обчислити значення функції на перших двох шарах сітки.



Усі інші значення одержуємо з рівняння, заміною в ньому часток похідних відповідними виразами через кінцеві різниці при $i = \overline{1, n-1}$, $j = 1, 2, \dots$

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + F(x_i, t_j)$$

Після множення рівняння на $h_2^2 \neq 0$ одержимо

$$u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = \frac{h_2^2}{h_1^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + h_2^2 F(x_i, t_j),$$

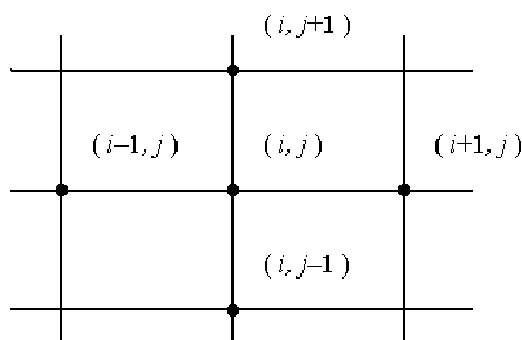
$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Позначивши $\sigma = \frac{h_2}{h_1}$, приводимо ці рівняння до вигляду

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \sigma^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + h_2^2 F(x_i, t_j),$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Відзначимо, що в отриманій рівності використовується явна схема вузлів, тому що дозволяє знайти значення функції $u(x, t)$ на шарі $j + 1$, якщо відомі значення на двох попередніх шарах.



Дві початкові умови дали можливість знайти наближене значення шуканої функції на двох початкових шарах сітки, що дозволяє використовувати отриману рівність для знаходження значень функції, починаючи із другого шару при $j = 1$.

Доведено, що при $\sigma \leq 1$ отримане різницеве рівняння стійке. Зокрема, при $\sigma = 1$ рівність має найбільш простий вигляд:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + h_2^2 F(x_i, t_j), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Оцінка похибки наближеного розв'язку, отриманого з кінцево-різницевого рівняння в області $0 \leq x \leq s$, $0 \leq t \leq T$ має вигляд

$$\Delta u \leq \frac{h_1^2}{12} ((M_4 h_1 + 2M_3)T + T^2 M_4),$$

$$M_2 = \max \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|, \quad M_3 = \max \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|, \quad M_4 = \max \left| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right|, \quad M_6 = \max \left| \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} \right|,$$

Приклад. Знайти наближений розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

задовольняючого умовам

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad x \in [0; 1],$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0; 1].$$

Розв'язок. Будемо використовувати кінцево-різницеву рівність при $\sigma = 1$. Виберемо по аргументу x крок $h_1 = 0,2$. Так як $\sigma = 1$, одержуємо по аргументу t крок $h_2 = h_1 = 0,2$. Разіб'ємо проміжок $x \in [0; 1]$ на частини точками ділення $x_i = ih_1$, $i = \overline{0, 5}$, а проміжок $t \in [0; 1]$ точками $t_j = jh_2$, $j = \overline{0, 5}$. Тоді

$$x_0 = 0,0; x_1 = 0,2; x_2 = 0,4; x_3 = 0,6; x_4 = 0,8; x_5 = 1,0.$$

$$t_0 = 0,0; t_1 = 0,2; t_2 = 0,4; t_3 = 0,6; t_4 = 0,8; t_5 = 1,0.$$

Скористаємося першою початковою умовою й визначимо значення функції $u(x, t)$ на нульовому шарі по формулах:

$$t_0 = 0,0; \quad u_{i0} = \sin(\pi \cdot x_i), \quad i = \overline{0, 5}.$$

Одержимо

$$u_{00} = \sin(\pi \cdot 0,0) = 0,0; \quad u_{10} = \sin(\pi \cdot 0,2) = 0,5878;$$

$$u_{20} = \sin(\pi \cdot 0,4) = 0,9511; \quad u_{30} = \sin(\pi \cdot 0,6) = 0,9511;$$

$$u_{40} = \sin(\pi \cdot 0,8) = 0,5878; \quad u_{50} = \sin(\pi \cdot 1,0) = 0,0.$$

Скористаємося другою початковою умовою й визначимо значення функції $u(x, t)$ на першому шарі по формулах:

$$t_1 = 0,2; \quad u_{i,1} = u_{i,0} + h_2 \cdot 0, \quad i = \overline{0, 5}.$$

Одержимо

$$u_{01} = 0,0; \quad u_{11} = 0,5878; \quad u_{21} = 0,9511;$$

$$u_{31} = 0,9511; \quad u_{41} = 0,5878; \quad u_{51} = 0,0.$$

Скористаємося граничними умовами й визначимо значення функції $u(x, t)$ на лівій і правій границях області по формулах:

$$x_0 = 0,0; \quad u_{0j} = 0,0; \quad j = \overline{0, 5};$$

$$x_5 = 1,0; \quad u_{5j} = 0,0; \quad j = \overline{0, 5}.$$

Обчислюємо значення u_{ij} на наступних шарах $j = \overline{1, 4}$ по формулі

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

При $j = 1$ для $t_2 = 0,4$ послідовно одержуємо

$$u_{12} = u_{21} - u_{10} + u_{01} = 0,9511 - 0,5878 + 0,0 = 0,3633;$$

$$u_{22} = u_{31} - u_{20} + u_{11} = 0,9511 - 0,9511 + 0,5878 = 0,5878;$$

$$u_{32} = u_{41} - u_{30} + u_{21} = 0,5878 - 0,9511 + 0,9511 = 0,5878;$$

$$u_{42} = u_{51} - u_{40} + u_{31} = 0,0 - 0,5878 + 0,9511 = 0,3633;$$

і т.д.

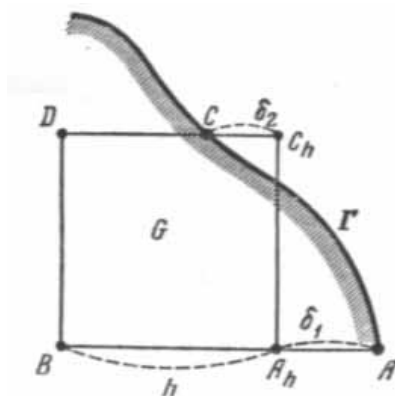
У результаті одержимо наступні значення:

10	2	0	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0
9	1,8	0	0,3633	0,5878	0,5878	0,3633	0
8	1,6	0	0	0	0	0	0
7	1,4	0	-0,363	-0,588	-0,588	-0,363	0
6	1,2	0	-0,588	-0,951	-0,951	-0,588	0
5	1	0	-0,588	-0,951	-0,951	-0,588	0
4	0,8	0	-0,363	-0,588	-0,588	-0,363	0
3	0,6	0	0	0	0	0	0
2	0,4	0	0,3633	0,5878	0,5878	0,3633	0
1	0,2	0	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0
0	0	0	0,5878	0,9511	0,9511	0,5878	0

j	t	x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
		i	0	1	2	3	4	5

6.6. РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ОБЛАСТЕЙ

Якщо границя Γ області G криволінійна, то значення $u_{i,j}$ для граничних вузлів одержують шляхом переносу значень із точок границі Γ . Похибку, одержувану в результаті такого переносу, можна значно зменшити, якщо для кожного граничного вузла становити рівняння наступного вигляду:



$$1) \text{ для вузла } A_h: u_{A_h} = \frac{\delta_1 \cdot u_B + h \cdot u_A}{\delta_1 + h};$$

$$2) \text{ для вузла } C_h: u_{C_h} = \frac{\delta_2 \cdot u_D - h \cdot u_C}{\delta_2 - h}.$$

Одержавши одне з таких рівнянь для кожного граничного вузла й приєднавши їх до відповідних алгебраїчних рівнянь щодо значень $u_{i,j}$ у вузлах сітки, ми одержимо розв'язок задачі.

6.7. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ КОРЕНІВ РІВНЯННЯ

Задача розв'язку рівняння найчастіше зустрічається при вивченні загальнотехнічних і спеціальних дисциплін, в інженерній практиці. Відшукати точне значення кореня рівняння можливо лише в деяких рідких окремих випадках, причому навіть у цих випадках формули знаходження коренів бувають настільки громіздкими, що ними важко користуватися. Крім того, часто константи, що входять у рівняння, відомі приблизно. Тому при розв'язку рівнянь широко використовуються методи, що дозволяють одержати наближений розв'язок з будь-якою заданою точністю.

Нехай задане рівняння

$$f(x) = 0,$$

де функція $y = f(x)$ визначена і безперервна на деякому відрізку й має в ньому безперервні першу $f'(x)$ й другу $f''(x)$ похідні. Корні заданого рівняння є нулями функції $y = f(x)$ і геометрично являють собою точки перетину її графіка з віссю Ox .

Розглянемо задачу відшукування наближених значень дійсного кореня заданого рівняння з будь-якою заданою точністю. Розв'язок задачі складається із двох етапів.

1. *Відділення кореня*, тобто відшукування відрізка $[a; b]$, що належить області визначення функції $y = f(x)$, на якому перебуває один і тільки один корінь рівняння $f(x) = 0$.
2. *Уточнення значення кореня* із заданою точністю.

6.8. ВІДДІЛЕННЯ КОРЕНЯ РІВНЯННЯ

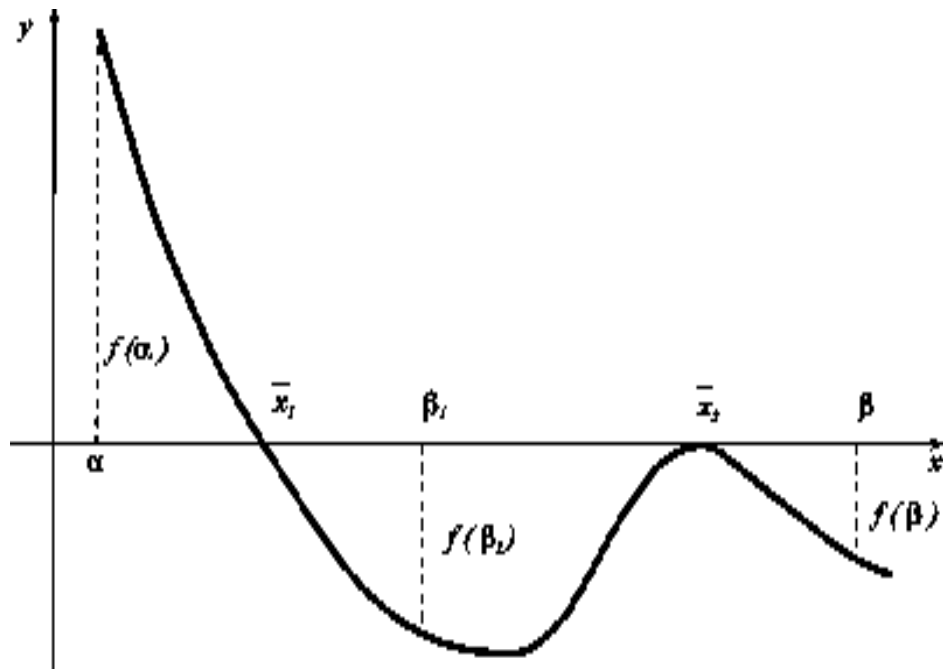
6.8.1. Умови відділення кореня

Перша умова заснована на поведінці функції в окілї кореня, яке виражається в тому, що на кінцях відрізка $[a; b]$ функція має значення різних знаків, тобто

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Очевидно, що при цьому усередині відрізка $[a; b]$ є, принаймні, один корінь рівняння $f(x) = 0$. Геометрично це означає, що графік функції $y = f(x)$ в точках a і b перебуває по різні сторони від осі Ox і, отже, усередині відрізка $[a; b]$ обов'язково повинен перетинати вісь Ox . Однак ця умова не гарантує існування єдиного кореня.

Так, наприклад, на рисунку графік функції проходить таким чином, що $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) < 0$, тобто $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, а усередині відрізка $[\alpha; \beta]$ знаходяться два різні корені.



Помітимо, що якщо на кінцях відрізка значення функції мають той самий знак, те це зовсім не означає, що корінь відсутній. Наприклад, відрізок $[\beta_1; \beta]$ містить корінь, але $f(\beta_1) < 0$ і $f(\beta) < 0$, а значить $f(\beta_1) \cdot f(\beta) > 0$. Точка \bar{x}_2 в цьому випадку є кратним коренем рівняння $f(x) = 0$. Надалі такий корінь розглядати не будемо.

Для існування єдиного кореня на відрізку $[a; b]$ повинна виконуватися ще одна умова. На відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ монотонна, тобто її похідна $f'(x)$ не змінює знак на $[a; b]$.

Обидві умови є достатніми для існування єдиного кореня рівняння $f(x) = 0$.

З рисунка бачимо, що обом умовам задовольняє відрізок $[\alpha; \beta_1]$, а на відрізку $[\alpha; \beta]$ функція не є монотонною.

Задача відділення кореня рівняння $f(x) = 0$ полягає в знаходженні відрізка $[a; b]$ області визначення функції $y = f(x)$, на якому виконані наступні три умови:

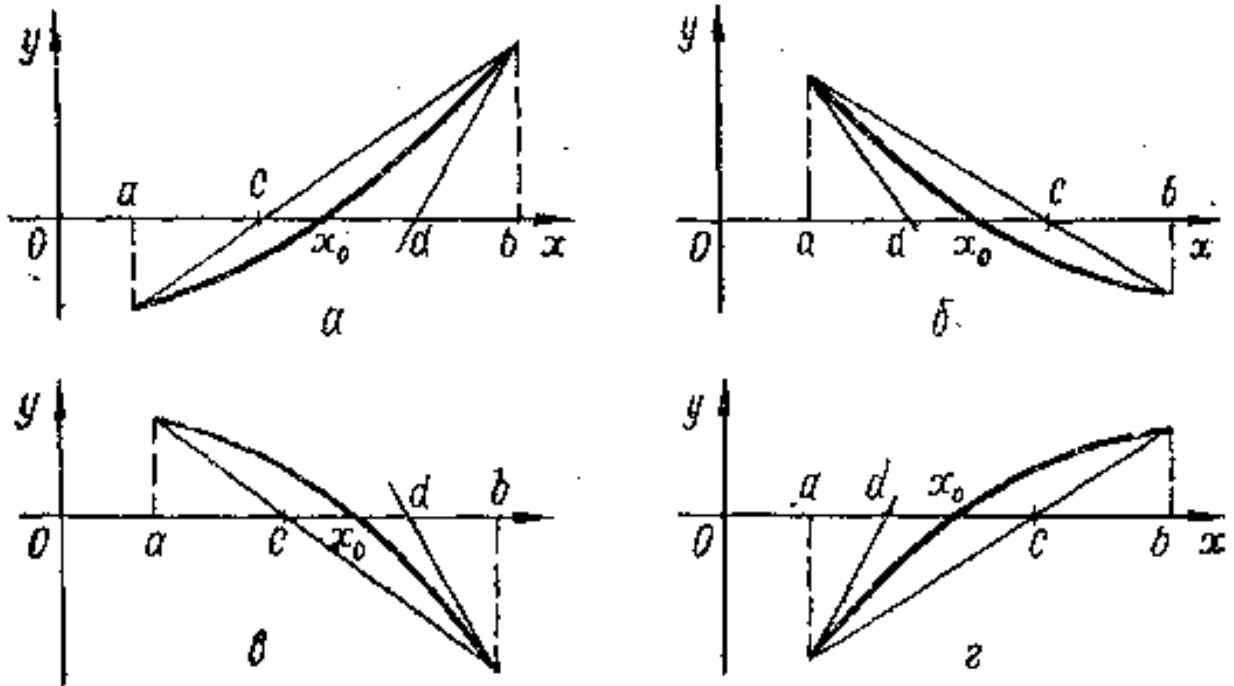
- 1) $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- 2) $f'(x)$ не змінює знак для $x \in [a; b]$;
- 3) $f''(x)$ не змінює знак для $x \in [a; b]$.

Третя умова означає, що графік функції або тільки опуклий, або тільки угнутий на відрізку $[a; b]$.

Відрізок $[a; b]$ при виконанні умов 1)–3) для функції $y = f(x)$ називають *відрізком, що відокремлює корінь даної функції*.

Розглянемо всі можливі варіанти розташування графіка функції на відрізку $[a; b]$, якщо виконуються умови 1)–3). При цьому для $x \in [a; b]$

похідна $f'(x) > 0$ на рисунках *a*) і *з*), і $f'(x) < 0$ на рисунках *б*) і *в*). Друга ж похідна $f''(x) > 0$ на рисунках *a*) і *б*) і $f''(x) < 0$ на рисунках *в*) і *з*) для всіх $x \in [a; b]$.



Відділення кореня можна робити як аналітично, так і графічно.

6.8.2. Графічний метод відділення кореня

Графічно корні рівняння $f(x) = 0$ можна відокремити, побудувавши графік функції $y = f(x)$ і приблизно визначивши точки його перетину з віссю Ox . Однак задача побудови графіка не завжди проста. Звичайне рівняння

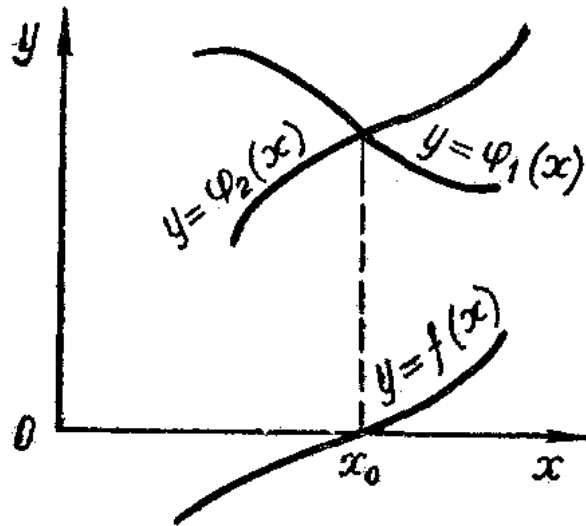
$$f(x) = 0$$

заміняють еквівалентним рівнянням

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0, \quad \text{де} \quad f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x),$$

$$\text{або} \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x),$$

підбираючи функції $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ так, щоб будувати їх графіки було простіше, чим графік функції $y = f(x)$. Абсиси точок перетину графіків $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ будуть шуканим корнями заданого рівняння.



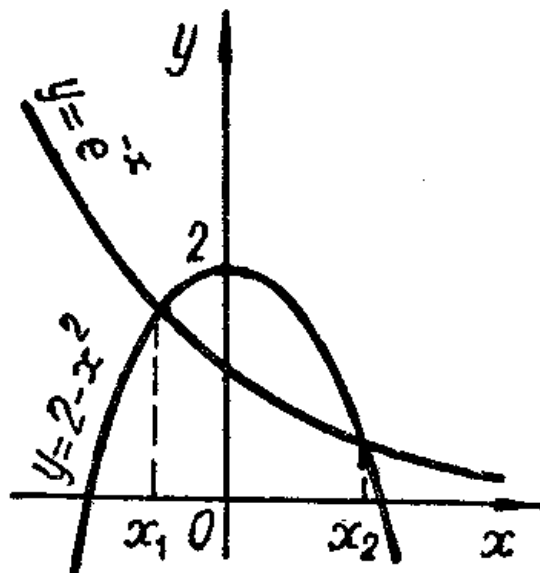
Приклад 1. Відокремити графічним методом коріння рівняння

$$e^{-x} - 2 + x^2 = 0.$$

Розв'язок. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$e^{-x} = 2 - x^2$$

і розглянемо дві функції $y = e^{-x}$ й $y = 2 - x^2$. Побудуємо графіки цих функцій і визначимо абсциси точок їх перетину.



Як видно з рисунка, задане рівняння має два дійсні корені (графіки перетинаються у двох точках), причому один з коренів від'ємний, а другий — додатний. Оба кореня по абсолютній величині не перевершують $\sqrt{2}$, а саме $-\sqrt{2} < x_1 < 0$ і $0 < x_2 < \sqrt{2}$.

6.8.3. Відділення коренів методом проб

Цей метод полягає в тому, що навмання вибирають точку $x = a$ з області визначення функції (або з більш вузької області), знаходять знак $f(a)$, а потім підбирають точку $x = b$ так, щоб значення функції $f(b)$ мало знак, протилежний знаку $f(a)$.

Далі визначають знак $f'(x)$ усередині відрізка $[a; b]$. Якщо $f'(x)$ не змінює знак на $[a; b]$, то корінь відділений, а якщо ні, то відрізок $[a; b]$ звужують, побравши точку $c = \frac{a+b}{2}$, що лежить посередині відрізка $[a; b]$. Визначають знак $f(c)$ і в якості нового відрізка розглядають або $[a; c]$ (якщо $f(a) \cdot f(c) < 0$), або $[c; b]$ (якщо $f(c) \cdot f(b) < 0$).

Позначивши новий відрізок через $[a_1; b_1]$, повторюють ті ж дії, що й на відрізку $[a; b]$, поки не буде знайдений відрізок $[a_n; b_n]$, що відокремлює корінь.

Приклад 2. Методом проб відокремити додатний корінь рівняння

$$x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0.$$

Розв'язок. Функція $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$ визначена на всій числовій прямій. Оскільки потрібно відокремити додатний корінь рівняння, розглянемо напівінтервал $[0; +\infty)$.

Знаходимо $f(0) = -20 < 0$. Потім вибираємо будь-яку точку, наприклад $x = 1$, і обчислюємо $f(1) = -54 < 0$. Так як $f(0) \cdot f(1) > 0$, то нічого певного про відрізок $[0; 1]$ сказати не можна. Треба підібрати так точку $x = b$, щоб було $f(b) > 0$, а для цього $x^4 + x^3$ повинне бути більше, чим $36x + 20$. Виберемо, наприклад, $x = 4$, тоді $f(4) = 156 > 0$, а отже, на відрізку $[1; 4]$ є корінь, $f(1) \cdot f(4) < 0$.

Оскільки $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 36 = 4(x^3 - 9) + 3x^2$, то безпосередньою перевіркою переконуємося, що на відрізку $[1; 4]$ похідна $f'(x)$ змінює знак, тому що $f'(1) = -29 < 0$ і $f'(4) = 268 > 0$.

Звужуємо відрізок $[1; 4]$. Виберемо, наприклад, точку $x = 3$. Тоді $f(3) = -20 < 0$ і $f(3) \cdot f(4) < 0$. Отже, на відрізку $[3; 4]$ є корінь. Перевіряємо знак $f'(x)$. Маємо $f'(3) = 99 > 0$, а для $x > 3$, мабуть, похідна зростає, тому залишається додатною. На відрізку $[3; 4]$ знаходиться додатний дійсний корінь заданого рівняння. Замітимо, що $f''(x) = 12x^2 + 6x > 0$ для всіх $x \in [3; 4]$.

Функція $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$ на проміжку $x \in [3; 4]$ задовольняє всім умовам віддільності кореня.

6.8.4. Метод виділення інтервалів монотонності

Цей метод полягає в тому, що спочатку визначаємо інтервали монотонності функції $y = f(x)$ (якщо це не складно), тобто інтервали області визначення функції, у яких $f'(x)$ зберігає знак. Потім обчислюємо знаки $y = f(x)$ на кінцях цих інтервалів і визначаємо інтервал $[a; b]$, на якому $f'(x)$ зберігає знак і $f(a) \cdot f(b) < 0$. Задача відділення кореня виконана. Таким способом можна відокремити всі дійсні корені рівняння $f(x) = 0$.

Якщо ж серед інтервалів монотонності функції $y = f(x)$ не існує інтервалу, на кінцях якого функція має різні знаки, то це означає, що або рівняння $f(x) = 0$ не має дійсного кореня, або такими є границі інтервалів монотонності, тобто для цих точок $f'(x) = 0$ і $f(x) = 0$. Це вже так звані кратні корені.

Приклад 3. Відокремити дійсні корені рівняння

$$x - \sin x - 1 = 0.$$

Розв'язок. Розглядаємо функцію $f(x) = x - \sin x - 1$, яка визначена на всій числовій прямій.

Знаходимо першу похідну і інтервали монотонності функції. Одержуємо

$$f'(x) = 1 - \cos x,$$

звідки

$$\begin{aligned} 1 - \cos x &= 0, \\ \cos x &= 1, \\ x &= 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

так що інтервалами монотонності функції є всі інтервали вигляду $[2\pi n; 2\pi(n+1)]$.

Визначаємо знаки функції в граничних точках інтервалів монотонності. Вибравши відрізок $[0; 2\pi]$, знаходимо

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(2\pi) = 2\pi - 1 > 0.$$

і переконуємося, що на цьому відрізку є один корінь рівняння. По вигляду функції містимо, що для $x > 2\pi$ буде $f(x) > 0$ (тому що $\sin x \leq 1$ і $x > \sin x + 1$), а для $x < 0$ буде $f(x) < 0$ (тому що $\sin x \geq -1$ і $\sin x > -1 + x$). Отже, в інших інтервалах монотонності функція $y = f(x)$ знака не змінює. Рівняння має єдиний корінь, який знаходиться на відрізку $[0; 2\pi]$.

Враховуючи третю умову, знаходимо другу похідну $f''(x) = \sin x$, яка на відрізку $[0; 2\pi]$ змінює знак. Тому відрізком, що відокремлює корінь, буде $[0; \pi]$, оскільки

- 1) $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi - 1 > 0$, $f(0) \cdot f(\pi) < 0$;
- 2) $f'(x)$ не змінює знака на $[0; \pi]$;
- 3) $f''(x)$ не змінює знака на $[0; \pi]$.

Функція $f(x) = x - \sin x - 1$ на проміжку $x \in [0; \pi]$ задовольняє всім умовам віддільності кореня.

7.3 МЕТОДИ ПОСЛІДОВНОГО НАБЛИЖЕННЯ ДО КОРЕНЯ

Існують різні методи послідовних наближень при відшуванні дійсного кореня рівняння на проміжку, на якому виконані умови віддільності кореня.

7.3.1 Метод половинного ділення

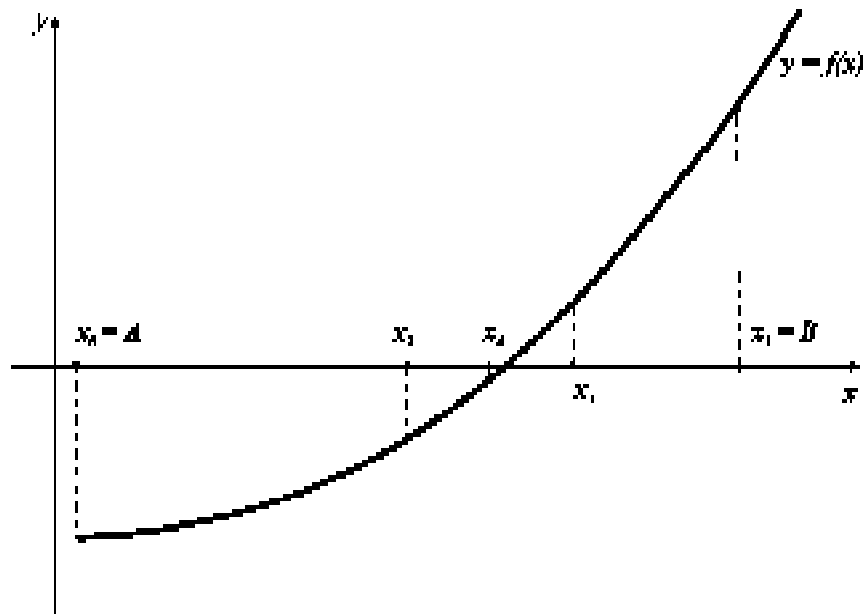
Метод половинного ділення називають ще методом ділення відрізка навпіл або методом дихотомії. Метод досить простий, тому що не вимагає виконання обмежуючих умов для першої і другої похідних, але його реалізація пов'язана із тривалими обчисленнями (більшим числом ітерацій).

Нехай відомо, що на відрізку $[a; b]$ перебуває один дійсний корінь рівняння $f(x) = 0$, отже, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Треба визначити цей корінь із заданою точністю ε .

Суть методу полягає в тому, що відрізок $[a; b]$ ділимо навпіл точкою $x_1 = \frac{a+b}{2}$ (перше наближення) і розглядаємо той з відрізків $[a; x_1]$ або $[x_1; b]$, який містить шуканий корінь. Позначивши цей відрізок через $[a_1; b_1]$, причому $|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b - a|$, визначаємо точку $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ (друге наближення) і розглядаємо відрізок $[a_1; x_2]$ або $[x_2; b_1]$, що містить шуканий корінь, тобто $[a_2; b_2]$, де $|b_2 - a_2| = \frac{1}{2^2}|b - a|$, і т.д. доти, поки не одержимо відрізок $[a_n; b_n]$, що містить шуканий корінь x^* , для якого

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}|b - a| < \varepsilon.$$

Точку $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \bar{x}$ беремо за наближене значення кореня x^* , при цьому очевидно, що $|x^* - \bar{x}| < \varepsilon$.



Алгоритм. Нехай відомий відрізок $[a; b]$, для якого $f(a) \cdot f(b) < 0$, і рівняння $f(x) = 0$ має на цьому відрізку тільки один корінь (виконання умов 2), 3) відділення кореня для цього методу не обов'язково), задана точність наближення до кореня $\varepsilon > 0$.

1. Позначимо $a_0 = a, b_0 = b, k = 0$.

2. Нехай визначений відрізок $[a_k; b_k]$. Знаходимо $x_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$.

Обчислюємо $f(x_{k+1})$.

3. Якщо $f(x_{k+1}) = 0$, то $\bar{x} = x_{k+1}$ – корінь заданого рівняння. А якщо ні, то визначаємо знак добутку $f(a_k) \cdot f(x_{k+1})$.

4. Якщо $f(a_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0$, то позначаємо $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_{k+1}$ і переходимо до дії 6.

5. Якщо $f(a_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0$, то позначаємо $a_{k+1} = x_{k+1}, b_{k+1} = b_k$ і переходимо до дії 6.

6. Якщо $|b_{k+1} - a_{k+1}| < \varepsilon$, то $\bar{x} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$ – корінь заданого рівняння, а якщо ні, то вважаємо $k = k + 1$ і переходимо до дії 2.

7.3.2 Метод простих ітерацій

Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0.$$

Нехай відомо, що на відрізку $[a; b]$ знаходиться єдиний корінь рівняння x^* , тобто $f(x^*) = 0$, і на цьому відрізку виконуються всі умови відокремлювання кореня. Потрібно визначити цей корінь із заданою точністю ε .

Замість заданого рівняння розглянемо еквівалентне рівняння

$$x = \varphi(x),$$

яке виходить із заданого наступними перетвореннями

$$\lambda \cdot f(x) = 0, \quad \text{де } \lambda = \text{const}, \quad \lambda \neq 0,$$

$$x = x + \lambda \cdot f(x),$$

тоді

$$\varphi(x) = x + \lambda \cdot f(x).$$

Отримане еквівалентне рівняння $x = \varphi(x)$ має цей же корінь $x^* \in [a; b]$, тобто виконується рівність $x^* = \varphi(x^*)$, а $[a; b]$ – відрізок, що відокремлює корінь цього рівняння.

Вибираємо довільну точку $x_0 \in [a; b]$ і першим наближенням до розв'язку назвемо число x_1 , де $x_1 = \varphi(x_0)$, по першому наближенню будемо друге $x_2 = \varphi(x_1)$ і т.д.

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

У такий спосіб будується послідовність наближень

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

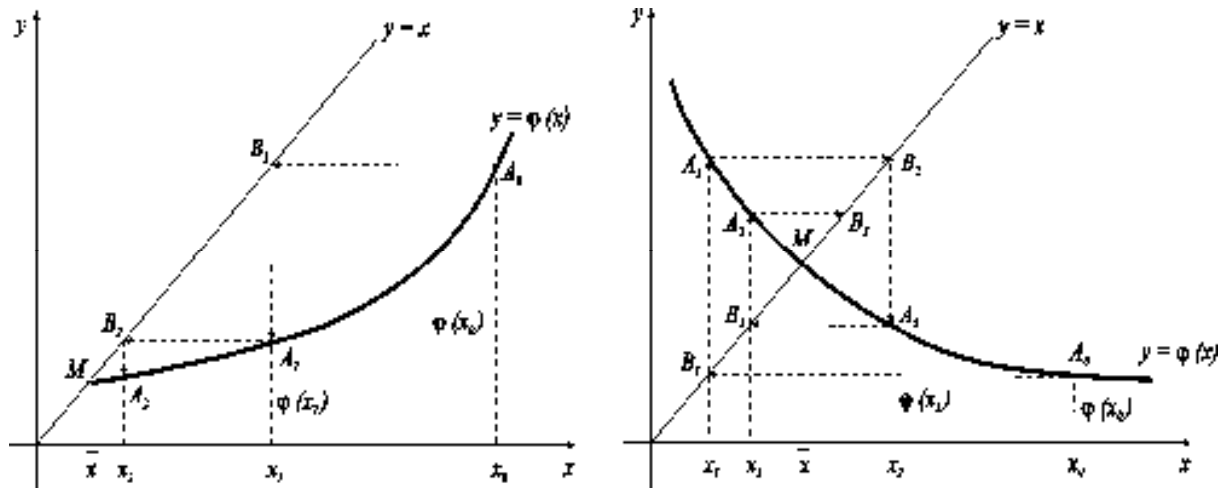
Якщо отримана послідовність сходиться, причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*,$$

то за кінцеве число ітерацій буде отримане наближення x_n , що представляє наближене значення кореня із заданою точністю ε

$$|x_n - x^*| < \varepsilon.$$

З'ясуємо спочатку геометричний зміст процесу і його збіжності.



Корінь рівняння $x = \varphi(x)$ – це абсциса x^* точки перетинання прямої $y = x$ і графіка функції $y = \varphi(x)$. Точка x_0 – довільна точка проміжку $[a; b]$, x_1 – абсциса точки B_1 – точки перетину прямих $y = x$ і $y = \varphi(x_0)$. По x_1 визначаємо x_2 – абсцису точки B_2 – точки перетину прямих $y = x$ і $y = \varphi(x_1)$ і т.д. На рисунках показана послідовність $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, яка сходиться до кореня рівняння.

Установимо умови збіжності методу. Оскільки x^* – точне значення кореня рівняння, то $x^* = \varphi(x^*)$, а побудована послідовність будується по формулі $x_n = \varphi(x_{n-1})$, тоді

$$|x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x_{n-1} - x^*| \leq M \cdot |x_{n-1} - x^*|,$$

де $\xi \in [x_{n-1}; x^*]$, а $|\varphi'(\xi)| \leq M$. Послідовно застосовуючи отримане співвідношення, приходимо до нерівності

$$|x_n - x^*| \leq M \cdot |x_{n-1} - x^*| \leq M^2 \cdot |x_{n-2} - x^*| \leq \dots \leq M^n \cdot |x_0 - x^*|,$$

яке в межі задовільняє значення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = Const \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$$

за умови, що $|\varphi'(\xi)| \leq M < 1$. У цьому випадку одержуємо, що побудована послідовність $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ прямує до розв'язку рівняння x^* .

Умову збіжності методу можна виконати за рахунок вибору значення параметра λ , що входить у вираз для функції $\varphi(x) = x + \lambda \cdot f(x)$. Одержуємо, що

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)| < 1 \quad \text{для всіх} \quad x \in [a; b] \quad \text{або} \\ |1 + \lambda \cdot f'(x)| < 1 \quad \text{для всіх} \quad x \in [a; b], \\ -1 < 1 + \lambda \cdot f'(x) < 1 \quad \text{або} \quad -2 < \lambda \cdot f'(x) < 0. \end{aligned}$$

При $f'(x) > 0$ вибираємо λ з умови $-\frac{2}{f'(x)} < \lambda < 0$.

При $f'(x) < 0$ вибираємо λ з умови $0 < \lambda < -\frac{2}{f'(x)}$.

Якщо функція $y = f(x)$ має на $[a; b]$ обмежену похідну $|f'(x)| \leq C$, то при $f'(x) > 0$ вибираємо $-\frac{2}{C} < \lambda < 0$, при $f'(x) < 0$ вибираємо $0 < \lambda < \frac{2}{C}$. При цьому виконуються умови збіжності методу простої ітерації для заданого рівняння $f(x) = 0$.

Алгоритм. Нехай на відрізку $[a; b]$ відділений корінь рівняння $f(x) = 0$ і задана точність обчислень $\varepsilon > 0$.

1. Заміняємо рівняння $f(x) = 0$ на еквівалентне $x = x + \lambda \cdot f(x)$ і вибираємо λ так, щоб була виконана умова $|1 + \lambda \cdot f'(x)| < 1$.
Вибираємо $x_0 \in [a; b]$.

2. Нехай визначене $(n-1)$ -ше наближення x_{n-1} . Обчислюємо

$$x_n = x_{n-1} + \lambda \cdot f(x_{n-1})$$

3. Якщо $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, то корінь рівняння знайдений $x^* = x_n$. Якщо ж $|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon$, то вважаємо $n = n + 1$ і переходимо до кроку 2.

Приклад 4. Рівняння $2 \ln x - \frac{1}{x} = 0$ перетворити до вигляду, що допускає застосування методу ітерацій. Відомо, що корінь відділений на відрізку $[1; 2]$.
Розв'язок. Перетворимо рівняння до вигляду

$$x = x + \lambda \cdot \left(2 \ln x - \frac{1}{x} \right).$$

Тоді $\varphi(x) = x + \lambda \cdot \left(2 \ln x - \frac{1}{x} \right)$. Виберемо λ так, щоб $|\varphi'(x)| < 1$ для всіх $x \in [1; 2]$. Маємо $\varphi'(x) = 1 + \lambda \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$. Звідси $\left| 1 + \lambda \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right| < 1$.

Розв'язуючи цю нерівність, одержуємо

$$-1 < 1 + \lambda \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) < 1, \quad -2 < \lambda \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) < 0.$$

Тому що при $x \in [1; 2]$ функція $-3 \leq \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} < 0$ обмежена, то $-2 < 3\lambda < 0$, $-\frac{2}{3} < \lambda < 0$. Нехай $\lambda = -\frac{1}{3}$, тоді будемо збіжну до розв'язку послідовність

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{3} \cdot \left(2 \ln x_{n-1} - \frac{1}{x_{n-1}} \right).$$

7.3.3 Метод хорд

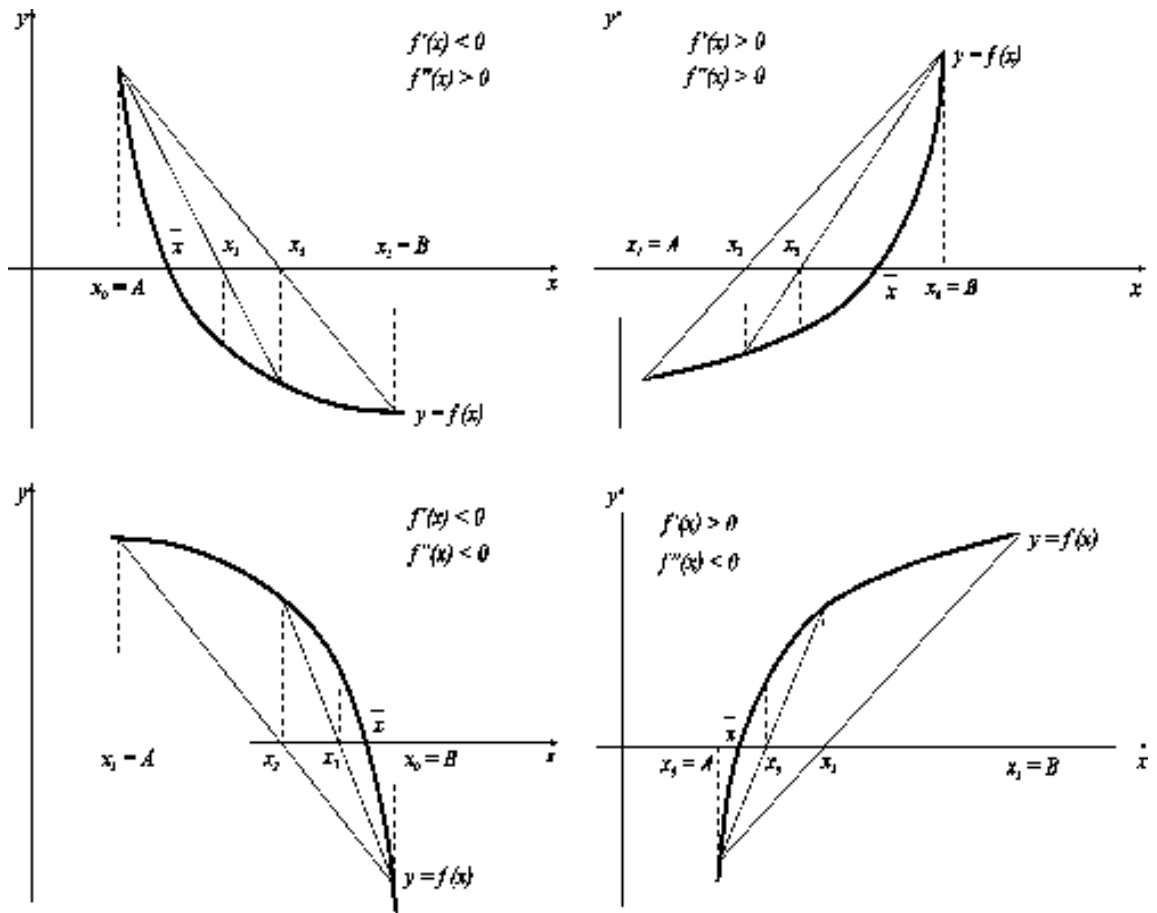
Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0.$$

Нехай відомо, що на відрізку $[a; b]$ знаходиться єдиний корінь рівняння x^* , тобто $f(x^*) = 0$, і на цьому відрізку виконуються всі умови відокремлювання кореня. Потрібно визначити цей корінь із заданою точністю ε .

Ідея методу полягає в тому, що на відрізку $[a; b]$ будується хорда AB , що стягує кінці дуги графіка функції $y = f(x)$, і в якості наближеного значення кореня x^* вибирається число x , що є абсцисою точки перетину цієї хорди з віссю Ox .

Проаналізуємо різні варіанти поведінки функції на проміжку $[a; b]$ залежно від знаків похідних $f'(x)$ і $f''(x)$.



На рисунку видно, що для одержання послідовності точок перетинання хорд із віссю абсцис, що прагне до розв'язку рівняння, треба, щоб одна із точок заданого проміжку залишалася нерухливою. У випадку, коли $f'(x)$ й $f''(x)$ мають протилежні знаки (тобто $f'(x) \cdot f''(x) < 0$), нерухливою буде точка A , зафіксуємо її абсцису $x_0 = a$, тоді абсцису другої точки B позначимо як $x_1 = b$. Якщо ж $f'(x)$ і $f''(x)$ мають однакові знаки (тобто $f'(x) \cdot f''(x) > 0$), то нерухливою залишається точка B , зафіксуємо її абсцису $x_0 = b$, тоді $x_1 = a$.

Отримані дві точки з координатами $(x_0, f(x_0))$ й $(x_1, f(x_1))$ з'єднаємо хордою й знайдемо точку перетину хорди з віссю Ox . Для цього складемо рівняння прямої, що проходить через ці дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}.$$

Поклавши $y = 0, x = x_2$, одержимо абсцису точки перетину першої хорди з віссю Ox

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot (x_1 - x_0).$$

Далі через точки з координатами $(x_0, f(x_0))$ й $(x_2, f(x_2))$ знову проводимо хорду і знаходимо точку її перетину з віссю абсцис і т.д.

У результаті одержимо ітераційну формулу для побудови послідовності x_n , що прагне до розв'язку рівняння

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot (x_n - x_0).$$

Процес припиняємо тоді, коли оцінка отриманого наближення задовольняє заданої точності. Для спрощення обчислень звичайно задають деяке досить мале число $\varepsilon > 0$. Процес припиняють тоді, коли абсолютна величина різниці між двома наступними наближеннями задовольняє нерівності:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Знайдене значення x_{n+1} вважають за наближене значення кореня, тобто $x^* = x_{n+1}$.

Переконаємося, що побудована в такий спосіб послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ прямує до розв'язку заданого рівняння. Дійсно, послідовність є монотонною й обмеженою, тому що при $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ маємо $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots > x^*$, а при $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ маємо $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots < x^*$, отже, послідовність сходиться до деякого граничного значення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

Визначимо числове значення межі послідовності, для цього перейдемо до межі в ітераційній формулі:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot (x_n - x_0), & n \rightarrow \infty, \\ c &= c - \frac{f(c)}{f(c) - f(x_0)} \cdot (c - x_0), \\ \frac{f(c)}{f(c) - f(x_0)} \cdot (c - x_0) &= 0, \end{aligned}$$

звідки випливає, що $f(c) = 0$, тому що $c \neq x_0, f(c) \neq f(x_0)$, а це означає, що c – корінь рівняння. Довели, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*,$$

а це означає, що за кінцеве число ітерацій буде отримане наближення x_n , що представляє наближене значення кореня із заданою точністю ε

$$|x_n - x^*| < \varepsilon.$$

Алгоритм. Нехай на відрізку $[a; b]$ відділений корінь рівняння $f(x) = 0$ й задана точність обчислень $\varepsilon > 0$.

1. Визначаємо знак добутку $f'(x) \cdot f''(x)$ для кожного $x \in [a; b]$. Якщо $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то позначаємо $x_0 = a$, $x_1 = b$. А якщо ні, то, при $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, позначаємо $x_0 = b$, $x_1 = a$. Знаходимо $f(x_0)$, а x_1 будемо вважати першим наближенням до розв'язку.
2. Нехай визначене x_n , тобто n -е наближення до розв'язку. Обчислюємо $f(x_n)$, а потім $(n+1)$ -е наближення по формулі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot (x_n - x_0).$$

3. Обчислюємо $|x_{n+1} - x_n|$. Якщо $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, то процес припиняємо й вважаємо $x^* = x_{n+1}$. А якщо ні, то, при $|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon$, повторюємо дії 2, 3, замінивши x_{n+1} на x_n .

Приклад 5. Використовуючи метод хорд, уточнити корінь рівняння $x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0$, який відділений на відрізку $[3; 4]$. Обмежитися третім наближенням.

Розв'язок. Згідно з умовою, маємо $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$, $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 36$, $f''(x) = 12x^2 + 6x$.

Уточнення кореня будемо проводити по описаному алгоритму.

1. Для $x \in [3, 4]$ маємо $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, так що $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, отже, уводимо позначення $x_0 = 4$, $x_1 = 3$.

Знаходимо $f(x_0) = f(4) = 4^4 + 4^3 - 36 \cdot 4 - 20 = 156$, $x_1 = 3$ вважаємо першим наближенням до розв'язку.

2. Скористаємося формулою $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot (x_n - x_0)$ для знаходження наступних наближень.

- 2а. Знайдемо друге наближення x_2 до розв'язку при $n = 1$.

Обчислимо $f(x_1) = 3^4 + 3^3 - 36 \cdot 3 - 20 = -20$, а потім

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot (x_1 - x_0) = 3 - \frac{-20}{-20 - 156} \cdot (3 - 4) = 3,1136.$$

- 2б. Знайдемо третє наближення x_3 до розв'язку при $n = 2$.

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_0)} \cdot (x_2 - x_0) = 3,1564.$$

- 2в. Знайдемо четверте наближення x_4 до розв'язку при $n = 3$.

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f(x_3) - f(x_0)} \cdot (x_3 - x_0) = 3,1719.$$

Отже, шуканий корінь знаходиться на відрізку $[3,1719; 4]$.

7.3.4 Метод дотичних (метод Ньютона)

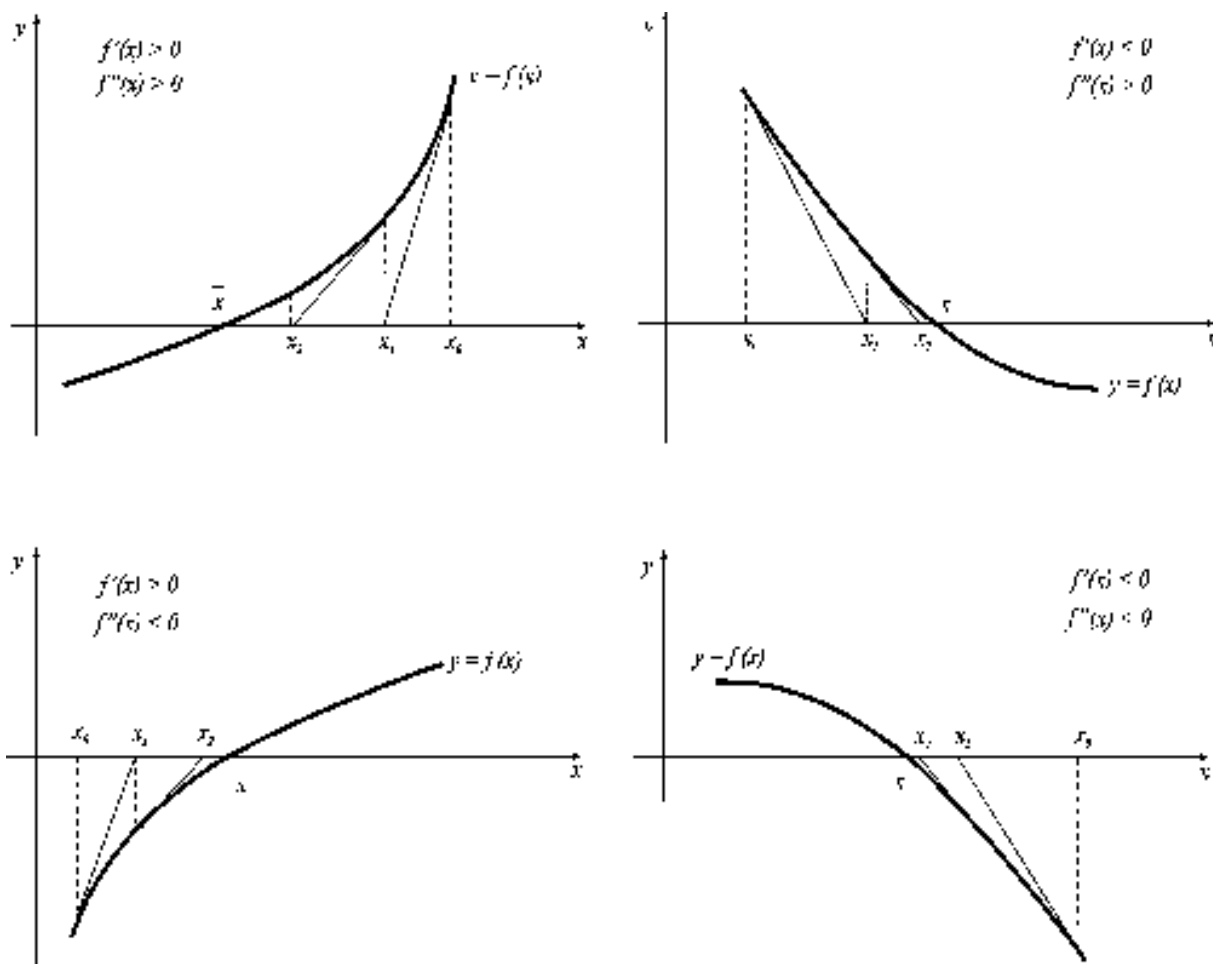
Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0.$$

Нехай відомо, що на відрізку $[a; b]$ знаходиться єдиний корінь рівняння x^* , тобто $f(x^*) = 0$, і на цьому відрізку виконуються всі умови відокремлювання кореня. Потрібно визначити цей корінь із заданою точністю ε .

Ідея методу полягає в тому, що в одному з кінців дуги AB графіка функції $y = f(x)$ проводиться дотична до цієї дуги і у якості наближеного значення кореня x^* вибирається число x – абсциса точки перетину цієї дотичної з віссю Ox .

Проаналізуємо різні варіанти поведінки функції на проміжку $[a; b]$ залежно від знаків похідних $f'(x)$ і $f''(x)$ на цьому проміжку, і визначимо, яку із граничних точок проміжку $[a; b]$ треба вибрати в якості початкової для побудови дотичної до графіка функції. Початкова точка вибирається так, щоб абсциса точки перетинання дотичної з віссю Ox належала проміжку $[a; b]$.



На рисунку видно, що для одержання послідовності точок перетинання дотичних з віссю абсцис, що прямує до розв'язку рівняння, треба в якості початкової точки вибрати точку $x_0 = a$, якщо $f'(x)$ й $f''(x)$ мають протилежні

знаки (тобто $f'(x) \cdot f''(x) < 0$), або точку $x_0 = b$, якщо $f'(x)$ й $f''(x)$ мають однакові знаки (тобто $f'(x) \cdot f''(x) > 0$).

У точці $(x_0, f(x_0))$ записуємо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Поклавши $y = 0, x = x_1$, визначаємо абсцису точки перетину дотичної з віссю Ox :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Очевидно, що точка $(x_1, 0)$ буде перебувати з боку опуклості кривої. Далі через точку $(x_1, f(x_1))$ проводимо наступну дотичну й знаходимо точку її перетину з віссю абсцис і т.д.

У результаті одержимо ітераційну формулу для побудови послідовності x_n , що наближається до розв'язку рівняння

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Процес припиняємо тоді, коли оцінка отриманого наближення задовольняє заданої точності. Для спрощення обчислень звичайно задають деяке досить мале число $\varepsilon > 0$. Процес припиняють тоді, коли абсолютна величина різниці між двома наступними наближеннями задовольняє нерівності:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Знайдене значення x_{n+1} вважають за наближене значення кореня, тобто

$$x^* = x_{n+1}.$$

Покажемо, що послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ збіжна й має своєю межею значення кореня x^* . Відзначимо, що при $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ маємо $x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots < x^*$, а при $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ маємо $x_0 > x_1 > \dots > x_n > \dots > x^*$. При цьому послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ монотонно змінюється й обмежена. Отже, існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

Переходячи до межі в ітераційній формулі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$c = c - \frac{f(c)}{f'(c)},$$

$$\frac{f(c)}{f'(c)} = 0$$

звідки випливає, що $f(c)=0$, а це означає, що c – корінь рівняння. Довели, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*,$$

а це означає, що за кінцеве число ітерацій буде отримане наближення x_n , що представляє наближене значення кореня із заданою точністю ε

$$|x_n - x^*| < \varepsilon.$$

Алгоритм. Нехай відомий відрізок $[a; b]$, що відокремлює корінь рівняння $f(x)=0$, і задана точність обчислень $\varepsilon > 0$.

1. Визначаємо знак добутку $f'(x) \cdot f''(x)$ для кожного $x \in [a; b]$. Якщо $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то позначаємо $x_0 = a$, якщо ж $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, то позначаємо $x_0 = b$. Значення x_0 будемо вважати нульовим наближенням до розв'язку рівняння.

2. Нехай визначене x_n , тобто n -е наближення. Обчислюємо $f(x_n)$ й $f'(x_n)$, а потім $(n+1)$ -ше наближення по формулі

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

3. Обчислюємо $|x_{n+1} - x_n|$. Якщо $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, то процес припиняємо й вважаємо $x^* = x_{n+1}$. А якщо ні, то, при $|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon$, повторюємо дії 2, 3, замінивши x_{n+1} на x_n .

Приклад 6. Користуючись методом дотичних, уточнити корінь рівняння $x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0$, який відділений на відрізку $[3; 4]$. Обмежитися третім наближенням.

Розв'язок. Згідно з умовою, маємо $f(x) = x^4 + x^3 - 36x - 20$, $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 36$, $f''(x) = 12x^2 + 6x$. Уточнення кореня будемо проводити по описаному алгоритму.

1. Для $x \in [3, 4]$ буде $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, так що $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, тому вважаємо $x_0 = b = 4$.

2. Скористаємося формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

для знаходження наступних наближень.

2а. Маємо нульове наближення x_0 . Обчислюємо послідовно $f(x_0) = 4^4 + 4^3 - 36 \cdot 4 - 20 = 156$, $f'(x_0) = 4 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 - 36 = 268$.
Визначаємо перше наближення по формулі

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{156}{268} = 3,4179.$$

2б. Визначаємо друге наближення по формулі

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3,2078.$$

2в. Аналогічно знаходимо третє наближення

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3,1809$$

3. Обчислюємо $|x_3 - x_2| = |3,1809 - 3,2078| = 0,0269 \approx 0,03$. Третє наближення $x_3 = 3,1809$ є наближеним значенням кореня рівняння з точністю $\varepsilon \approx 0,03$.

7.3.5 Комбінований метод

Ідея методу полягає в об'єднанні методу хорд і методу дотичних. З описів цих методів і відповідних рисунків видно, що наближення \hat{x}_n , що обчислюються по методу хорд, прагнуть до кореня x^* з боку ввігнутості кривої, а наближення \bar{x}_n , що обчислюються по методу дотичних, – з боку опуклості кривої. При цьому для будь-якого наближення маємо

$$\begin{aligned} \hat{x}_n < x^* < \bar{x}_n \text{ при } f'(x) \cdot f''(x) > 0, \\ \bar{x}_n < x^* < \hat{x}_n \text{ при } f'(x) \cdot f''(x) < 0. \end{aligned}$$

Отже, комбінуючи ці два методи і визначаючи числа \hat{x}_n й \bar{x}_n , послідовно на кожному кроці звужуємо із двох сторін відрізок, усередині якого знаходиться корінь x^* . Процес припиняємо тоді, коли $|\hat{x}_n - \bar{x}_n| < \varepsilon$, де ε – задана точність наближення.

За наближене значення кореня звичайно беремо точку, що належить середині відрізка, тобто

$$\tilde{x} = \frac{\hat{x}_n + \bar{x}_n}{2},$$

$$\text{так що } |x^* - \tilde{x}| \leq |\hat{x}_n - \bar{x}_n| < \varepsilon.$$

Алгоритм. Нехай на відрізку $[a; b]$ відділений корінь рівняння $f(x) = 0$ і задана точність обчислень $\varepsilon > 0$.

Визначаємо знак добутку $f'(x) \cdot f''(x)$ для кожного $x \in [a; b]$. Якщо $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то позначаємо $\hat{x}_0 = b$, $\bar{x}_0 = a$. А якщо ні, то, при $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, позначаємо $\hat{x}_0 = a$, $\bar{x}_0 = b$.

Нехай відомі \hat{x}_n й \bar{x}_n , що визначають n -е наближення до розв'язку і задають кінці відрізка, що відокремлює корінь рівняння. Визначимо $(n+1)$ -ий відрізок по формулах

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n - \frac{f(\hat{x}_n)}{f(\hat{x}_n) - f(\bar{x}_n)} \cdot (\hat{x}_n - \bar{x}_n), \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}.$$

Оцінюємо різницю $|\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1}|$. Якщо $|\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1}| < \varepsilon$, то процес припиняємо і знаходимо $\tilde{x} = \frac{\hat{x}_{n+1} + \bar{x}_{n+1}}{2}$; якщо ж $|\hat{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+1}| \geq \varepsilon$, то повторюємо дії 2, 3, вважаючи значення \hat{x}_{n+1} й \bar{x}_{n+1} відомими кінцями наступного відрізка, що відокремлює корінь рівняння.

Зауваження. Роблячи обчислення з наближеними числами, можна пропустити корінь через округлення наближень. Тому ліві кінці відрізків слід округляти з недоліком, а праві – з надлишком. Контролем на кожному кроці обчислень може служити те, що знаки $f(\hat{x}_0)$ й $f(\bar{x}_0)$ повинні збігатися відповідно зі знаками $f(\hat{x}_{n+1})$ й $f(\bar{x}_{n+1})$.

8 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

8.1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

8.1.1 Матриці та вектори

Прямокутна таблиця, яка складається із елементів, наприклад, чисел і має n рядків та m стовпців, називається матрицею. Елементи матриці позначаються іменем матриці, біля якого записуються індекси – координати елемента в матриці. Першою координатою записується номер рядка, а другою – номер стовпця.

Наприклад.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Матриця A має $n=3$ рядків і $m=4$ стовпців ($n \times m$ елементів).

Скорочений запис матриці $A = [a_{ij}]$, де $i=1, 2, 3, \dots, n$, $j=1, 2, 3, \dots, m$.

Якщо в матриці $n \neq m$, то матриця називається прямокутною.

Матриця, яка має 1 рядок, тобто $n=1$, називається матрицею-рядком, або вектором-рядком

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1m}]$$

Матриця, яка має 1 стовпець, тобто $m=1$, називається матрицею-стовпцем, або вектором-стовпцем

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Далі матрицю-рядок і матрицю-стовпець будемо називати векторами.

Якщо в матриці поміняти місцями рядки і стовпці, то така матриця називається транспонованою.

Наприклад

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Якщо в матриці кількість рядків і стовпців однакова ($n=m$), то така матриця називається квадратною, а кількість рядків (стовпців) – порядком матриці.

В квадратній матриці діагональ, яка проходить з верхнього лівого кута вниз до нижнього правого кута, називається *головною* діагоналлю. Квадратна матриця, у якої всі елементи поза головної діагоналі дорівнюють 0, називається діагональною.

Діагональна матриця, у якої елементи, що розташовані на головній діагоналі, дорівнюють 1, називається *одиничною*.

Наприклад

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Квадратна матриця, в якій всі елементи розташовані симетрично відносно головної діагоналі, називається симетричною. Для симетричної матриці має місце рівність $a_{ij}=a_{ji}$.

Дві матриці $A=[a_{ij}]$ і $B=[b_{ij}]$ називаються *рівними*, якщо:

- 1) кількість рядків і кількість стовпців однакові;
- 2) відповідні елементи матриці А та В дорівнюють один одному: $a_{ij} = b_{ij}$

Сумою двох матриць А та В однакового типу буде матриця того ж типу, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць А та В

$$C=A+B; \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

Різниця двох матриць А та В однакового типу визначається аналогічно сумі.

Добутком матриці $A=[a_{ij}]$ на число α буде матриця, елементи якої визначені як добуток елементів матриці А на число α .

$$D = A\alpha = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1m} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{n1} & \alpha \cdot a_{n2} & \dots & \alpha \cdot a_{nm} \end{bmatrix}$$

Добутком матриці $A=[a_{ij}]_{n \times m}$ та $B=[b_{ij}]_{p \times q}$, буде матриця $C=[c_{ij}]_{n \times q}$. Добуток можливий, коли кількість стовпців m матриці А дорівнює кількості рядків p матриці В

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nq} \end{bmatrix}$$

Для отримання елемента c_{ij} , що стоїть в i -ому рядку та в j -ому стовпці добутку, необхідно елементи i -го рядка матриці A помножити на відповідні елементи j -го стовпця матриці B і отримані добутки скласти, тобто

$$C_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Необхідно відмітити, що $AB \neq BA$, тобто добуток двох матриць не володіє якістю переміщеності. Це значить, що міняти місцями матриці-співмножники не можна, не змінивши їх добуток. Про добуток AB двох матриць A та B говорять, що матриця A множиться на матрицю B справа, або що матриця B множиться на матрицю A зліва.

Добуток декількох матриць ABC слід розуміти так: матриця A множиться на матрицю B , а отримана матриця множиться на матрицю C .

8.1.2 Визначник матриці. Властивості визначника. Методи його обчислення

З квадратною матрицею пов'язано *детермінант* (визначник), який позначається $\det A$ або $|A|$.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Детермінант матриці є число, яке обчислюється за деякими правилами.

В матриці для визначника визначають дві діагоналі – головну і побічну.

Побічна діагональ проходить від лівого нижнього кута квадратної матриці до верхнього правого кута.

Порядок визначника відповідає порядку матриці. Визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної діагоналі та побічної

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Визначник третього порядку

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Іншим правилом обчислення детермінанта третього порядку є правило трикутників.

Властивості визначника:

1. Визначник не змінюється при транспонуванні .
2. Якщо один рядок або стовпець містить одні нулі, то визначник дорівнює нулю.
3. Від перестановки двох рядків або стовпців визначник міняє знак на протилежний.
4. Визначник, який містить два однакових рядки або стовпці, дорівнює нулю.
5. Якщо всі елементи деякого рядка або стовпця помножити на число $k \neq 0$, то сам визначник помножиться на це число. Або, іншими словами, спільний множник всіх елементів деякого рядка або стовпця ми можемо виносити за знак детермінанта.
6. Детермінант, що має два пропорційні рядки або стовпця, дорівнює нулю.
7. Якщо один з рядків (стовпців) детермінанта є сумою інших рядків (стовпців) або сумою добутків інших рядків (стовпців) детермінанта на число k , то детермінант дорівнює нулю.
8. Детермінант не зміниться, якщо до елементів одного з його рядків (стовпців) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), що помножені на одне й теж число.

Детермінант n -го порядку може бути виражений через детермінанти більш низьких порядків.

8.1.3 Мінори та алгебраїчні доповнення

Мінором k -го порядку ($1 \leq k \leq n-1$) детермінанта D називається визначник, який отримується після викреслення в вихідному детермінанті деяких $n-k$ рядків та $n-k$ стовпців.

Так, наприклад, мінором k -го порядку детермінанта

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

при $k=1$ є визначник з викресленими трьома рядками та трьома стовпчиками, при $k=2$ - детермінант з викресленими двома рядками та двома стовпцями і при $k=3$ – детермінант з викресленими рядком та стовпцем.

Максимальне число k для детемінанта n -го порядку може бути рівне $n-1$. При $k=n-1$ викреслюється тільки один рядок та один стовпець.

Зокрема, якщо в детермінанті викреслюється тільки один рядок (i -й) та один стовпець (j -й), то на їх перехресті опиниться єдиний елемент a_{ij} та отриманий мінор $(n-1)$ -го порядку зветься відповідним цьому елементу та

позначається через M_{ij} . Наприклад, елементу a_{11} відповідає мінор $(n-1)$ -го порядку

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

тому що елемент a_{11} знаходиться на перехресті першого рядка та першого стовпця.

Якщо присвоїти мінору $(n-1)$ -го порядку знак „+” або „-” в залежності від суми номерів рядків і стовпців, на перехресті яких знаходиться відповідний цьому мінору елемент, то даний мінор називається *алгебраїчним доповненням* та позначається $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Наприклад для детермінанта

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

алгебраїчне доповнення елемента a_{21} обчислюється таким чином:

$$A_{21} = (-1)^{i+j} M_{ij} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-3-20) = 23.$$

Взагалі, детермінант дорівнює сумі всіх добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні їм алгебраїчні доповнення, тобто:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

Ранг матриці

Рангом матриці зветься найбільший порядок мінорів для даної матриці, які відмінні від нуля. Звідси виходить, що якщо ранг матриці дорівнює r , то в матриці ми можемо знайти хоча б один мінор r -го порядку, що не дорівнює нулю, а всі мінори $(r+1)$ -го порядку дорівнюють нулю. Зауважимо, що ранг нульової матриці дорівнює нулю, а ранг матриці-рядка, або матриці-стовпця, дорівнює одиниці.

8.1.4 Обернена матриця

Матриця називається оберненою по відношенню до даної, якщо при добутку її як справа так і зліва на дану матрицю, ми отримуємо одиничну матрицю.

По відношенню до матриці A обернена матриця позначається A^{-1} .

По визначенню $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Обернену матрицю знаходять по такій схемі:

1. Обчислюють визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. Обчислити алгебраїчні доповнення до елементів матриці А і складають матрицю, союзну по відношенню до даної. Якщо матрицю, складену із алгебраїчних доповнень, транспонувати, то ми отримаємо союзну матрицю. Її позначають

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

3. Знаходять обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$$

8.1.5 Поняття про систему лінійних рівнянь

В загальному вигляді система n лінійних рівнянь з n невідомими записується так

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ – називаються коефіцієнтами при невідомих, $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ – невідомими, а b_1, b_2, \dots, b_n – вільними членами системи.

Система (1) може бути записана скорочено

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (j=1,2,\dots,n)$$

Рішенням системи (1) називається будь-яка сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, така, що при її підстановці замість $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ в рівняння цієї системи вони перетворюються в тотожності.

Система лінійних рівнянь (1) називається сумісною, якщо вона має рішення, а якщо немає рішення – несумісною або протирічною.

Сумісна система, якщо має одне рішення, називається визначеною, а якщо декілька рішень – невизначеною.

Матрична форма запису системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Користуючись матричними позначеннями можна записати

$$AX=B$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

В матричному виді систему запишемо так

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

8.2 ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКА ЗА СХЕМОЮ ГАУСА

Нехай нам необхідно обчислити визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

при умові, що $a_{11} \neq 0$.

1. Винесемо за межі визначника елемент a_{11} (провідний елемент першого рядка), розділивши на нього всі елементи першого рядка і позначивши

$$\beta_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, \dots, n)$$

Запишемо визначник

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. Помножимо перший рядок на перший елемент кожного наступного рядка і віднімемо перший рядок із кожного з наступних рядків; то всі елементи першого стовпця, окрім першого рядка, дорівнюватимуть 0.

Величина визначника при цьому не зміниться. Тоді ми отримаємо

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= a_{22} - a_{21} \cdot \beta_{12} & a_{32}^{(1)} &= a_{32} - a_{31} \cdot \beta_{12} \\ a_{23}^{(1)} &= a_{23} - a_{21} \cdot \beta_{13} & a_{33}^{(1)} &= a_{33} - a_{31} \cdot \beta_{13} \\ a_{24}^{(1)} &= a_{24} - a_{21} \cdot \beta_{14} & a_{34}^{(1)} &= a_{34} - a_{31} \cdot \beta_{14} \\ \dots & & \dots & \\ a_{2n}^{(1)} &= a_{2n} - a_{21} \cdot \beta_{1n} & a_{3n}^{(1)} &= a_{3n} - a_{31} \cdot \beta_{1n} \end{aligned}$$

В загальному вигляді

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot \beta_{1j}, \quad (i, j = 2, \dots, n)$$

Визначник прийме вид:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник по елементам 1 стовпця, отримаємо

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}$$

Визначник стовпця (n-1) порядку

Виконаємо з цим визначником попередні дії, винісши $a_{22}^{(1)} \neq 0$.

$$\beta_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad (j=3, 4, \dots, n)$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \beta_{23} & \beta_{24} & \dots & \beta_{2n} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & a_{n4}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}$$

Послідовно помножимо елементи 1 рядка на перший елемент кожного наступного рядка і віднімемо перший рядок із кожного з наступних рядків визначника отримаємо

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \beta_{23} & \beta_{24} & \dots & \beta_{2n} \\ 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & \dots & a_{4n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n3}^{(2)} & a_{n4}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & \dots & a_{4n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3}^{(2)} & a_{n4}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix}$$

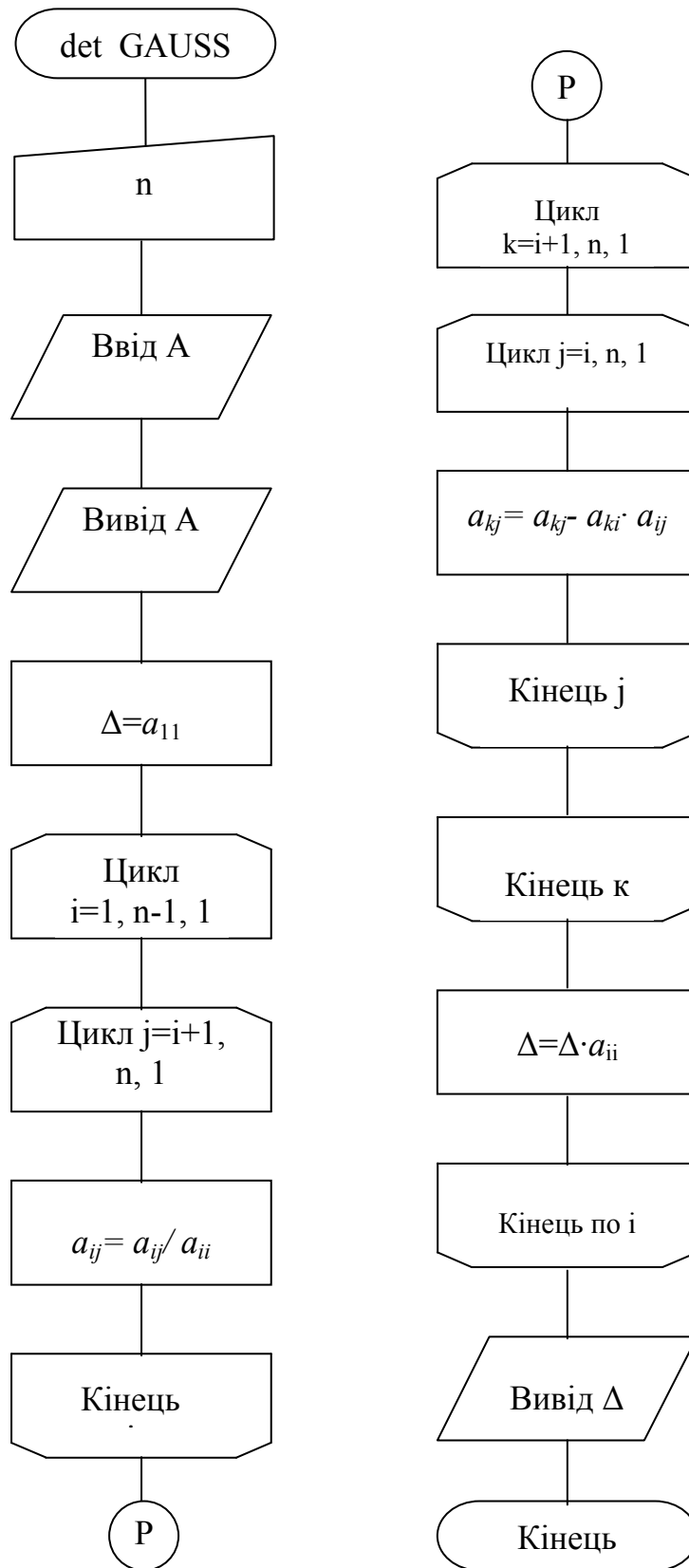
Таким чином визначник дорівнює добутку провідних елементів схеми Гауса. При цьому провідні елементи $\neq 0$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot a_{44}^{(3)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$$

Таблиця символічних імен

Матем. ім'я	символ. ім'я	Значення змінної за змістом	Змінна	
			тип	значення
A	A	матриця коефіцієнтів	масив дійсний	вхідне
B	B	вектор вільних членів	масив дійсний	вхідне
n	n	кількість рівнянь (ранг системи)	ціла	вхідне
X	X	вектор коренів рівняння	масив дійсний	визнач.
-	R	допоміжний вектор для тимчасових значень коренів рівняння	масив дійсний	визнач.
ε	eps	задана точність обчислень	дійсна	вхідне
-	D	допоміжна змінна, признак досягнення точності	ціла	визнач.
-	S	допоміжна змінна, сума	дійсна	визнач.
i	i	поточний індекс рядка	ціла	визнач.
j	j	поточний індекс стовпця	ціла	визнач.

Схема алгоритму обчислення визначника за схемою Гауса



8.3 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (СЛАР)

Для розв'язання СЛАР традиційно використовують дві групи чисельних методів:

- **точні** (метод Гауса, метод Гауса з вибором головного елемента, метод Гауса з одиничною матрицею, метод Гауса з перетвореною матрицею, метод Гауса-Халецького, метод Гауса-Жордана, метод Крамера);

- **наближені** (метод послідовних ітерацій, метод Гауса-Зейделя, метод векторів зміщень).

До точних методів відносять методи, які дозволяють отримати точний розв'язок системи (2.1) за відповідну кількість операцій перетворення без урахування похибок заокруглення.

До наближених методів відносять методи, які дозволяють отримати розв'язок системи у вигляді границі послідовності векторів, яка збігається до точного розв'язку системи.

8.3.1 Розв'язання СЛАР за методом Гауса (метод послідовного виключення невідомих)

Для розв'язання системи рівнянь точними методами необхідно знати як виконуються елементарні перетворення систем лінійних рівнянь. Таких перетворень є три типа:

1. Множення обох частин рівняння на будь-яке ненульове число.
2. Перестановка рівнянь системи місцями.
3. Додавання (або віднімання) до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого рівняння, помноженого на будь-яке ненульове число.

Нехай задана вхідна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases}$$

Введемо нові позначення:

k - номер перетворення;

n - кількість рівнянь;

поняття:

провідне невідоме;

провідне рівняння;

провідний коефіцієнт.

$k=1$ – виконуємо перше перетворення. Умова – $a_{kk} \neq 0$

Розділимо провідне рівняння на провідний коефіцієнт a_{11}

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}}$$

Розв'яжемо рівняння відносно провідної змінної x_1

$$x_1 = \frac{a_{14}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3$$

і підставимо його у всі рівняння нижче провідного

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ a_{21} \left(\frac{a_{14}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \right) + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = a_{24} \\ a_{31} \left(\frac{a_{14}}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \right) + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = a_{34} \end{cases}$$

Виконуємо перетворення в системі

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ \left(a_{22} - \frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21} \cdot a_{13}}{a_{11}} \right) x_3 = \left(a_{24} - \frac{a_{21} \cdot a_{14}}{a_{11}} \right) \\ \left(a_{32} - \frac{a_{31} \cdot a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31} \cdot a_{13}}{a_{11}} \right) x_3 = \left(a_{34} - \frac{a_{31} \cdot a_{14}}{a_{11}} \right) \end{cases}$$

Запишемо дану систему в зручній формі

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 = a'_{14} \\ a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 = a'_{24} \\ a'_{32} x_2 + a'_{33} x_3 = a'_{34} \end{cases}$$

$$a_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}}; \quad k=1; j=k+1, \dots, n+1;$$

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik} \cdot a_{kj}}{a_{kk}}; \quad i=k+1, \dots, n; j=k+1, \dots, n+1;$$

Виконаємо друге перетворення: $k=2$ і $a'_{22} \neq 0$

Розділимо провідне рівняння на провідний коефіцієнт a'_{22}

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \frac{a'_{24}}{a'_{22}}$$

Розв'яжемо рівняння відносно провідного елемента x_2

$$x_2 = \frac{a'_{24}}{a'_{22}} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3$$

і підставимо у всі рівняння нижче провідного

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = a'_{14} \\ x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 = \frac{a'_{24}}{a'_{22}} \\ a'_{32}\left(\frac{a'_{24}}{a'_{22}} - \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3\right) + a'_{33}x_3 = a'_{34} \end{array} \right.$$

Виконаємо перетворення

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = a'_{14} \\ x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 = \frac{a'_{24}}{a'_{22}} \\ \left(a'_{33} - \frac{a'_{32} \cdot a'_{23}}{a'_{22}}\right)x_3 = a'_{34} - \frac{a'_{32} \cdot a'_{24}}{a'_{22}} \end{array} \right.$$

Запишемо систему в іншій формі

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = a'_{14} \\ x_2 + a''_{23}x_3 = a''_{24} \\ a''_{33}x_3 = a''_{34} \end{array} \right.$$

Виконуємо перетворення $k=3$, $a''_{33} \neq 0$

$$x_3 = \frac{a''_{34}}{a''_{33}} \qquad x_3 = a'''_{34}$$

На цьому закінчується прямий хід.

Виведемо загальні залежності прямого ходу:

$$1. \text{ для провідного рівняння } a_{kj} \leftarrow \frac{a_{kj}}{a_{kk}}; j=k+1, \dots, n+1;$$

$$2. \text{ для послідовних рівнянь } a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik} \cdot a_{kj}}{a_{kk}},$$

$$i=k+1, \dots, n; j=k+1, \dots, n+1.$$

Зворотний хід починається з обчислення останнього невідомого системи лінійних рівнянь і закінчується обчисленням першого невідомого. При зворотному ході використовуються лише рядки прямого ходу.

Елемент a_{nn+1} дає значення x_n . Далі невідомі x_{n-1} , x_{n-2} , ... і аж до x_1 знаходяться відніманням від вільного члена відповідного рядка суми добутків коефіцієнтів на раніше обчислені невідомі.

$$x_3 = a_{34}'''$$

$$x_2 + a_{23}'' \cdot x_3 = a_{24}''$$

$$x_2 = a_{24}'' - a_{23}'' x_3$$

$$x_2 = a_{24}'''$$

$$x_1 + a_{12}' x_2 + a_{13}' x_3 = a_{14}'$$

$$x_1 = a_{14}' - a_{12}' x_2 - a_{13}' x_3$$

$$x_1 = a_{14}' - a_{12}' \cdot a_{24}''' - a_{13}' \cdot a_{34}'''$$

$$x_1 = a_{14}'''$$

Формули зворотного ходу $x_n \Leftarrow a_{nn+1}$; $x_i = a_{in+1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j$ $i=n-1, \dots, 1$

8.3.2 МЕТОД ГАУСА З ВИБОРОМ ГОЛОВНОГО ЕЛЕМЕНТА

Основна ідея методу. Може виявитися, що система

$$Ax=f$$

має єдиний розв'язок, хоча який-небудь із кутових мінорів матриці A дорівнює нулю. У цьому випадку звичайний метод Гауса виявляється непридатним, але може бути застосований *метод Гауса з вибором головного елемента*.

Основна ідея методу полягає в тому, щоб на черговому кроці виключати не наступне по номеру невідоме, а те невідоме, коефіцієнт при якому є найбільшим по модулю. Таким чином, у якості провідного елемента тут вибирається головний, тобто найбільший по модулю елемент. Тим самим, якщо $|A| \neq 0$, те в процесі обчислень не буде відбуватися ділення на нуль.

Різні варіанти методу Гауса з вибором головного елемента проілюструємо на прикладі системи із двох рівнянь

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2.$$

Припустимо, що $|a_{12}| > |a_{11}|$. Тоді на першому кроці будемо виключати змінне x_2 . Таке приймання еквівалентне тому, що система запишеться у вигляді

$$a_{12}x_2 + a_{11}x_1 = f_1,$$

$$a_{22}x_2 + a_{21}x_1 = f_2,$$

і до отриманої системи застосовується перший крок звичайного методу Гауса. Зазначений спосіб виключення називається *методом Гауса з вибором*

головного елемента по рядку. Він еквівалентний застосуванню звичайного методу Гауса до системи, у якій на кожному кроці виключення проводиться відповідна перенумерація змінних.

Застосовується також метод Гауса з вибором головного елемента по стовпцю. Припустимо, що $|a_{21}| > |a_{11}|$. Перепишемо систему у вигляді

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= f_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= f_1 \end{aligned}$$

і до нової системи застосуємо на першому кроці звичайний метод Гауса. Таким чином, *метод Гауса з вибором головного елемента по стовпцю* еквівалентний застосуванню звичайного методу Гауса до системи, у якій на кожному кроці виключення проводиться відповідна перенумерація рівнянь.

Іноді застосовується *метод Гауса з вибором головного елемента по всій матриці*, коли в якості ведучого вибирається максимальний по модулю елемент серед усіх елементів матриці системи.

8.4 НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Наближені методи рішення СЛАР (метод ітерацій, метод Зейделя та інші) дозволяють обчислення значень коренів системи із заданою точністю у виді межі послідовності деяких векторів. Процес побудови такої послідовності називають ітераційним (процес, що повторяється). Ефективність використання наближених методів залежить від вдалого вибору початкового вектора та швидкості збіжності процесу.

8.4.1 Метод послідовних наближень (метод ітерації)

Нехай задана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Запишемо систему в матричному виді

$$A \cdot X = B$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Припускаючи, що діагональні елементи $a_{ii} \neq 0$ ($i=1,2,3,\dots,n$), виразимо x_1 через перше рівняння системи, x_2 – через друге і так далі. В результаті ми отримаємо систему, еквівалентну початковій (1)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} \cdot x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} \cdot x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} \cdot x_n \right) \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \left(\frac{a_{21}}{a_{22}} \cdot x_1 + \frac{a_{23}}{a_{22}} \cdot x_3 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}} \cdot x_n \right) \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \left(\frac{a_{n1}}{a_{nn}} \cdot x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}} \cdot x_2 + \frac{a_{n3}}{a_{nn}} \cdot x_3 + \dots + \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} \cdot x_{n-1} \right) \end{cases}$$

Якщо позначити $\frac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i$; $-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij}$, де $i, j=1, 2, 3, \dots, n$, тоді систему

запишемо так:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn-1}x_{n-1} \end{cases}$$

Отримана система називається системою приведеною до нормального виду.

Якщо ввести позначення

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

тоді систему можна записати в матричній формі

$$X = \beta + \alpha \cdot X,$$

або

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Розв'яжемо систему методом послідовних наближень. За нульове наближення приймемо стовпець вільних членів

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad \text{- нульове наближення}$$

На слідуячому кроці використаємо значення нульового наближення

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \quad \text{- перше наближення}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \dots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{- друге наближення}$$

Взагалі, будь-яке $(k+1)$ наближення обчислюють по формулі

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot X^{(k)} \quad k=0,1,2,\dots,n$$

Якщо послідовність $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$ має границю $X = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$,

то ця границя є рішенням системи, тому що за властивостями границі $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$, тобто

$$X = \beta + \alpha \cdot X$$

Для зручності програмування методу ітерацій із заданою точністю розглянемо систему (3) з іншого боку.

Прийmemo за нульове наближення стовпець вільних членів і обчислимо значення коренів на першому кроці, підставивши $x_i^{(0)}$ у всі рівняння.

Перевіримо умову досягнення точності по всім кореням

$$|x_i^{(0)} - x_i^{(1)}| \leq \varepsilon \quad , (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

Якщо по будь-якому кореню не виконується умова, система обчислюється знову, підставляючи в неї $x_i^{(1)}$.

Загальною формулою обчислення будь-якого кореня буде запис

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)}{a_{ii}},$$

з якого видно, що для виконання обчислень необхідно мати два масиви для збереження попередніх і послідуєчих значень коренів системи. Окрім того, необхідно ввести признак досягнення точності.

8.4.2 Умови збіжності ітераційного процесу

Нехай дана приведена до нормального виду СЛАР $X = \beta + \alpha \cdot X$. Ітераційний процес і його збіжність залежить від величини елементів матриці α таким чином: якщо сума модулів елементів рядків або сума модулів елементів стовпців менше одиниці, то процес ітерації для даної системи сходиться до єдиного рішення незалежно від вибору початкового вектора.

Умову збіжності можна записати так

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

або

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (j=1, 2, 3, \dots, n)$$

Наприклад. Дана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3 \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3 \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2 \end{cases}$$

Ітераційний процес сходиться, тому що

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Збіжність ітераційного процесу має зв'язок з нормами матриці α такими співвідношеннями, якщо:

$$\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (\text{перша норма})$$

або

$$\|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (\text{друга норма})$$

або

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1, \quad (\text{третя норма})$$

то процес ітерації СЛАР сходиться до єдиного рішення.

8.4.3 Оцінка погрішності наближеного процесу методу ітерацій

Якщо задана допустима погрішність обчислень ε та X_i – вектор точних значень невідомих лінійної системи, а $x_i^{(k)}$ є k -і наближення значень невідомих, обчислене методом ітерації, то для оцінки погрішності $\|x_i - x_i^{(k)}\| \leq \varepsilon$ метода використовується формула

$$\|x_i - x_i^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|,$$

де $\|\alpha\|$ - одна із трьох норм матриці α

$\|\beta\|$ - та же норма вектора β , а k – число ітерацій, необхідне для досягнення заданої точності.

Приклад. Показати, що для системи

$$\begin{cases} 9,9x_1 - 1,5x_2 + 2,6x_3 = 0 \\ 0,4x_1 + 13,6x_2 - 4,2x_3 = 8,2 \\ 0,7x_1 + 0,4x_2 + 7,1x_3 = -1,3 \end{cases}$$

ітераційний процес сходиться, і обчислити, скільки ітерацій необхідно виконати, щоб обчислити корені системи з точністю до $\varepsilon = 10^{-4}$.

1) Приведемо систему до нормального виду

$$\begin{cases} 10x_1 = 0,1x_1 + 1,5x_2 - 2,6x_3 \\ 20x_2 = -0,4x_1 + 6,4x_2 + 4,2x_3 + 8,2 \\ 10x_3 = -0,7x_1 - 0,4x_2 + 2,9x_3 - 1,3 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = 0,01x_1 + 0,15x_2 - 0,26x_3 \\ x_2 = -0,02x_1 + 0,32x_2 + 0,21x_3 + 0,41 \\ x_3 = -0,07x_1 - 0,04x_2 + 0,29x_3 - 0,13 \end{cases}$$

2) Матриця системи

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,15 & -0,26 \\ -0,02 & 0,32 & 0,21 \\ -0,07 & 0,32 & 0,29 \end{bmatrix}$$

$$\|\alpha\|_2 = \max(0,1; 0,51; 0,76) = 0,76 < 1 - \text{сходиться}$$

$$3) \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,41 \\ -0,13 \end{bmatrix} \quad \|\beta\|_2 = 0 + 0,41 + 0,13 = 0,54;$$

$$4) \|x - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|_2^{k+1} \cdot \|\beta\|}{1 - \|\alpha\|_2} = \frac{0,76^{k+1} \cdot 0,54}{0,24} \leq 10^{-4}; \quad 0,76^{k+1} \cdot 0,54 \leq 10^{-4} \cdot 0,24;$$

$$0,76^{k+1} \leq \frac{10^{-4} \cdot 0,24}{0,54}; \quad (k+1) \lg 0,76 \leq \lg 24 - \lg 54 - 4; \quad -$$

$$(k+1) \cdot 0,1192 \leq 1,3802 - 1,7324 - 4;$$

$$-(k+1) \cdot 0,1192 \leq -4,3522; \quad (k+1) > \frac{4,3522}{0,1192} = 36,5$$

Після логарифмування $k+1 > 36,5 \quad k = 36$.

8.4.5 Метод Зейделя. Умови збіжності процеса Зейделя

Метод Зейделя є деякою модифікацією метода послідовних наближень. В цьому методі при обчисленні $(k+1)$ -го наближення невідомого x_i враховуються вже знайдені раніше $(k+1)$ -ші наближення невідомих x_1, x_2, \dots, x_{i-1} .

Нехай дана лінійна система

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{cases}$$

Вибираємо довільно початкове наближення коренів $x^{(0)}_1, x^{(0)}_2, \dots, x^{(0)}_n$ та підставляємо в перше рівняння системи.

$$x^{(1)}_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x^{(0)}_1 + \alpha_{12}x^{(0)}_2 + \dots + \alpha_{1n}x^{(0)}_n;$$

отримане перше наближення $x^{(1)}_1$ підставимо в друге рівняння системи:

$$x^{(1)}_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x^{(1)}_1 + \alpha_{22}x^{(0)}_2 + \dots + \alpha_{2n}x^{(0)}_n;$$

отримані перші наближення $x^{(1)}_1$ та $x^{(1)}_2$ підставимо в третє рівняння системи:

$$x^{(1)}_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x^{(1)}_1 + \alpha_{32}x^{(1)}_2 + \dots + \alpha_{3n}x^{(0)}_n$$

і т. і. Нарешті

$$x^{(1)}_n = \beta_n + \alpha_{n1}x^{(1)}_1 + \alpha_{n2}x^{(1)}_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x^{(1)}_{n-1} + \alpha_{nn}x^{(0)}_n$$

Аналогічно будуємо другі, треті і т. і. ітерації.

Таким чином, припускаючи, що k -те наближення коренів $x^{(k)}_i$ відомі, методом Зейделя будуємо $(k+1)$ -ше наближення з використанням наступних формул:

$$x^{(k+1)}_1 = \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j}x^{(k)}_j,$$

$$x^{(k+1)}_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x^{(k+1)}_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j}x^{(k)}_j,$$

$$x^{(k+1)}_n = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}x^{(k+1)}_j + \alpha_{nn}x^{(k)}_n,$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Процес Зейделя для лінійної системи $X = \beta + \alpha X$ так же, як і процес послідовних наближень, збігається до єдиного рішення для будь-якого

початкового наближення, якщо будь-яка з норм матриці α менше одиниці, тобто, якщо

$$\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$$

$$\|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$$

$$\|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2} < 1.$$

Процес Зейделя збігається до єдиного рішення системи (1) швидше, ніж процес простої ітерації.

8.4.6 Оцінка похибки процесу Зейделя

Нехай дана лінійна система $X = \beta + \alpha \cdot X$. Якщо X_i – точне значення коренів лінійної системи, а $X_i^{(k)}$ – k -е наближення, що обчислене методом Зейделя, то для оцінки похибки цього методу застосовується формула

$$\|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|_1^{k+1}}{1 - \|\alpha\|_1} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_1$$

8.4.7 Приведення системи лінійних рівнянь до виду, зручного для ітерацій

Процеси послідовних наближень та Зейделя для лінійної системи $X = \beta + \alpha \cdot X$ збігаються до єдиного рішення незалежно від вибору початкового вектора, якщо

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Таким чином для збіжності вищезгаданих ітераційних процесів достатньо, щоб значення елементів α_{ij} матриці α при $i \neq j$ були невеликими по модулю. Це рівнозначно тому, що для лінійної системи $AX=B$ модулі діагональних коефіцієнтів кожного рівняння системи більше суми модулів всіх інших коефіцієнтів (не враховуючи вільних членів), то ітераційні процеси для цієї системи збігаються, тобто, якщо ми маємо систему $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b, (i=1, 2, \dots, n)$, з тим, що $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, то процеси послідовних наближень та Зейделя для даної системи збігаються.

Застосовуючи елементарні перетворення, лінійну систему $AX=B$ можливо замінити такою еквівалентною системою $X = \beta + \alpha X$, для якої умови збіжності будуть виконані.

9 ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ

9.1 ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦІ. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Якщо A — квадратна матриця n -го порядку і $Ax = \lambda x$ при $x \neq 0$, то число λ називається власним значенням матриці, а ненульовий вектор x — відповідним йому власним вектором. Перепишемо задачу в такому вигляді

$$(A - \lambda E)x = 0, \quad x \neq 0.$$

Для існування нетривіального розв'язку задачі (1) має виконуватися умова

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Цей визначник являє собою многочлен n -ї степені від λ ; його називають характеристичним многочленом. Значить, існує n власних значень — коренів цього многочлена, серед яких можуть бути однакові (кратні).

Якщо знайдено деяке власне значення, то, при підстановці його в однорідну систему (1), можна визначити відповідний власний вектор. Будемо нормувати власні вектори. Нормуванням (на одиницю) вектора x називають множення його на $\|x\|^{-1}$; нормований вектор має одиничну довжину. Тоді кожному простому (не кратному) власному значенню відповідає один (з точністю до напрямку) власний вектор, а сукупність всіх власних векторів, що відповідають сукупності простих власних значень, лінійно-незалежна. Таким чином, якщо всі власні значення матриці прості, то вона має n лінійно-незалежних власних векторів, які утворюють базис простору.

Кратному власному значенню кратності p може відповідати від 1 до p лінійно-незалежних власних векторів. Наприклад, розглянемо такі матриці четвертого порядку:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad C_4 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

В кожній з них характеристичне рівняння приймає вигляд $\det(A - \lambda E) = (a - \lambda)^4 = 0$, а отже, власне значення $\lambda = a$ і має кратність $p=4$. Проте в першій матриці є чотири лінійно-незалежних власних вектора

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

У другій матриці є тільки один власний вектор e_1 . Другу матрицю називають простою жордановою (або класичною) підматрицею. Третя матриця має так звану канонічну жорданову форму (по діагоналі стоять або числа, або жорданові підматриці, а інші елементи дорівнюють нулеві).

Таким чином, якщо серед власних значень матриці є кратні, то її власні вектори не завжди утворюють базис. Однак і в цьому випадку власні вектори, що відповідають різним власним значенням, являються лінійно-незалежними.

При розв'язуванні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначити власні значення даної матриці A , тобто обчислити корені її характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

а також знайти відповідні власні вектори матриці A . Друга задача є простішою, оскільки якщо корені характеристичного рівняння відомі, то знаходження власних векторів зводиться до відшукування ненульових розв'язків деяких однорідних лінійних систем. Тому ми в першу чергу будемо займатися першою задачею — відшукуванням коренів характеристичного рівняння.

Тут в основному застосовуються два прийоми: 1) розгортання вікового визначника в поліном n -го степеня

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

з подальшим розв'язком рівняння $D(\lambda) = 0$ одним з відомих наближених, взагалі кажучи, способів (наприклад, методом Лобачевського-Греффе) наближене визначення коренів характеристичного рівняння (найчастіше найбільших по модулю) методом ітерації, без попереднього розгортання вікового визначника.

Розгортання вікового визначника.

Як відомо, віковим визначником матриці $A = [a_{ij}]$ називається визначник вигляду

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Прирівнюючи цей визначник до нуля, одержуємо характеристичне рівняння

$$D(\lambda) = 0$$

Якщо потрібно знайти все коріння характеристичного рівняння, то доцільно заздалегідь обчислити визначник.

Розгортаючи визначник, одержуємо поліном n -го степеня

$$D(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n],$$

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\alpha}$$

де

є сума усіх діагональних мінорів першого порядку матриці А.

$$\sigma_2 = \sum_{\alpha < \beta}^n \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix}$$

є сума всього діагонального мінору другого порядку матриці А;

$$\sigma_3 = \sum_{\alpha < \beta < \gamma}^n \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}$$

— сума всіх діагональних мінорів третього порядку матриці А і т.д. Нарешті

$$\sigma_n = \det A.$$

Легко переконатися, що число діагональних мінорів k-го порядку матриці А дорівнює

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Звідси одержуємо, що безпосереднє обчислення коефіцієнтів характеристичного полінома (2) еквівалентно обчисленню

$$C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$$

визначників різних порядків. Остання задача, взагалі кажучи, технічно важко здійснена для скільки-небудь великих значень n. Тому створені спеціальні методи розгортання вікових визначників (методи А. Н. Крилова, А. М. Данілевського, Леверье, метод невизначених коефіцієнтів, метод інтерполяції та ін.).

9.2 МЕТОД А. М. ДАНИЛЕВСЬКОГО ЗНАХОДЖЕННЯ ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ І ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ МАТРИЦЬ

Суть методу А. М. Данілевського [1] полягає в приведенні вікового визначника до так званого нормального виду Фробеніуса

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \rho_1 - \lambda & \rho_2 & \rho_3 & \dots & \rho_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Якщо нам вдалося записати віковий визначник у формі (1), то, розкладаючи його по елементах першого рядка, матимемо:

$$D(\lambda) = (p_1 - \lambda)(-\lambda)^{n-1} - p_2(-\lambda)^{n-2} + p_3(-\lambda)^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} p_n$$

Або

$$D(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} - p_2 \lambda^{n-2} - p_3 \lambda^{n-3} - \dots - p_n).$$

Таким чином, розгортання вікового визначника, записаного в нормальній формі, не представляє труднощів. Позначимо через

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

дану матрицю, а через

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

— подібну їй матрицю Фробеніуса, тобто

$$P = S^{-1}AS,$$

де S - особлива матриця.

Оскільки подібні матриці володіють однаковими характеристичними поліномами, то маємо:

$$\det(A-\lambda E) = \det(P-\lambda E).$$

Тому для обґрунтування методу досить показати, яким чином, виходячи з матриці A , будується матриця P . Згідно методу А. М. Данілевського, перехід від матриці A до подібної їй матриці P здійснюється за допомогою $n-1$ перетворення подібності, що послідовно перетворюють рядки матриці A , починаючи з останньої, у відповідні рядки матриці P .

Покажемо початок процесу. Нам необхідно рядок

$$a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{n,n-1} \ a_{nn}$$

перевести в рядок $0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0$. Припускаючи, що $a_{n,n-1} \neq 0$, розділимо всі елементи $(n-1)$ -го стовпця матриці A на $a_{n,n-1}$. Тоді її n -й рядок прийме вигляд

$$a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ 1 \ a_{nn}.$$

Потім віднімемо $(n-1)$ -й стовпець перетвореної матриці, помножений відповідно на числа $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$, зі всієї решти її стовпців.

В результаті одержимо матрицю, останній рядок якої має бажаний вигляд $0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0$. Вказані операції є елементарними перетвореннями, що здійснюються над стовпцями матриці A . Виконавши ці ж перетворення над одиничною матрицею, одержимо матрицю

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

де

$$m_{n-1,i} = -\frac{a_{ni}}{a_{n,n-1}} \quad \text{при } i \neq n-1$$

$$m_{n-1,n-1} = \frac{1}{a_{n,n-1}}.$$

Звідси робимо висновок, що проведені операції рівносильні множенню справа матриці M_{n-1} на матрицю A , тобто після вказаних перетворень одержимо матрицю

$$AM_{n-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи правило множення матриць, знаходимо, що елементи матриці B обчислюються за наступними формулами:

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{i,n-1}m_{n-1,j} \text{ при } 1 \leq i \leq n; j \neq n-1;$$

$$b_{i,n-1} = a_{i,n-1}m_{n-1,n-1} \text{ при } 1 \leq i \leq n.$$

Проте побудована матриця $B = AM_{n-1}$ не буде подібна матриці A . Для того щоб мати перетворення подібності, потрібно обернену матрицю M_{n-1}^{-1} зліва помножити на матрицю B :

$$M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = M_{n-1}^{-1}B.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що обернена матриця M_{n-1}^{-1} має вигляд

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нехай $M_{n-1}^{-1}AM_{n-1} = C.$

Отже $C = M_{n-1}^{-1}B.$

Оскільки, очевидно, множення зліва матриці M_{n-1}^{-1} на матрицю B не змінює перетвореного рядка останньої, то матриця C має вигляд

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перемножуючи матриці M_{n-1}^{-1} і B , матимемо:

$$c_{i,j} = b_{ij} \text{ при } 1 \leq i \leq n-2.$$

$$c_{n-1,j} = \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{kj}$$

Таким чином, множення M_{n-1}^{-1} на матрицю B змінює лише $(n-1)$ -й рядок матриці B .

Одержана матриця C подібна матриці A і має один зведений рядок. Цим закінчується перший етап процесу.

Далі, якщо $c_{n-1, n-2} \neq 0$, то над матрицею C можна повторити аналогічні операції, узявши за основу $(n - 2)$ -й її рядок. В результаті одержимо матрицю

$$D = M_{n-2}^{-1} C M_{n-2}$$

з двома зведеними рядками. Над останньою матрицею проробляємо ті ж операції. Продовжуючи цей процес, ми, нарешті, одержимо матрицю Фробеніуса

$$P = M_1^{-1} \dots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1,$$

якщо, звичайно, всі $n - 1$ проміжних перетворень можливі.

9.3 МЕТОД СКАЛЯРНИХ ДОБУТКІВ ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВЛАСНОГО ЗНАЧЕННЯ СИМЕТРИЧНОЇ МАТРИЦІ

Для відшукування першого власного значення λ_1 дійсної матриці A можна вказати дещо інший ітераційний процес, що є іноді вигіднішим. Метод [1] заснований на утворенні скалярних добутоків

$$(A^k y_0, A^k y_0) \text{ і } (A^{k-1} y_0, A^k y_0)$$

($k = 1, 2, \dots$), де A' — матриця, транспонована з матрицею A , і y_0 — вибраний яким-небудь чином початковий вектор.

Переходимо тепер до викладу самого методу.

Нехай A — дійсна матриця і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — її власні значення, які передбачаються різними, причому

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Візьмемо деякий ненульовий вектор y_0 і за допомогою матриці A побудуємо послідовність ітерацій

$$y_k = A y_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Для вектора y_0 утворюємо також за допомогою транспонованої матриці A' другу послідовність ітерацій

$$y'_k = A' y'_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

де $y'_0 = y_0$.

В просторі E_n виберемо два власні базиси $\{x_j\}$ і $\{x'_j\}$ відповідно для матриць A і A' , що задовольняють умовам біортонормування:

$$(x_i, x'_j) = \delta_{ij},$$

де $Ax_i = \lambda_i x_i$ і $A'x'_j = \lambda'_j x'_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Позначимо координати вектора y_0 в базисі $\{x_j\}$ через a_1, \dots, a_n , а в базисі $\{x'_j\}$ — через b_1, \dots, b_n , тобто

$$y_0 = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \text{ і } y_0 = b_1 x'_1 + \dots + b_n x'_n.$$

Звідси

$$y_k = A^k y_0 = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^k x_i$$

$$y'_k = A'^k y_0 = \sum_{i=1}^n b_i \lambda_i^{*k} x'_i$$

Складемо скалярний добуток

$$(y_k, y'_k) = (A^k y_0, A'^k y_0) = (y_0, A'^{2k} y_0) = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i, \sum_{j=1}^n b_j \lambda_j^{*2k} x'_j \right).$$

Звідси через умову ортонормування знаходимо:

$$(y_k, y'_k) = \sum_{j=1}^n a_j b_j^* \lambda_j^{2k} = a_1 b_1^* \lambda_1^{2k} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k}.$$

Аналогічно

$$(y_{k-1}, y'_{k-1}) = a_1 b_1^* \lambda_1^{2k-1} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k-1} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k-1}.$$

Отже, при $a_1 b_1^* \neq 0$ маємо:

$$\frac{(y_k, y'_k)}{(y_{k-1}, y'_{k-1})} = \frac{a_1 b_1^* \lambda_1^{2k} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k}}{a_1 b_1^* \lambda_1^{2k-1} + a_2 b_2^* \lambda_2^{2k-1} + \dots + a_n b_n^* \lambda_n^{2k-1}} = \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}\right).$$

Таким чином,

$$\lambda_1 \approx \frac{(y_k, y'_k)}{(y_{k-1}, y'_{k-1})} = \frac{(A^k y_0, A'^k y_0)}{(A^{k-1} y_0, A'^k y_0)},$$

Цей метод особливо зручний для симетричної матриці A , оскільки тоді $A'=A$, і ми маємо просто

$$\lambda_1 \approx \frac{(A^k y_0, A^k y_0)}{(A^{k-1} y_0, A^k y_0)},$$

і, отже, тут потрібно побудувати тільки одну послідовність $y_k = A^k y_0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Приклад. Методом скалярних добутків знайти найбільше власне значення матриці

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки матриця A — симетрична, то досить побудувати лише одну послідовність ітерацій $A^k y_0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Вибираючи за початковий вектор

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

можна використати результати таблиці. Наприклад, при $k = 5$ і $k = 6$ маємо:

$$A^5 y_0 = \begin{bmatrix} 2268 \\ 1089 \\ 333 \end{bmatrix} \text{ і } A^6 y_0 = \begin{bmatrix} 10161 \\ 4779 \\ 1422 \end{bmatrix}.$$

Звідси

$$(A^5 y_0, A^6 y_0) = 2268 \cdot 10161 + 1089 \cdot 4779 + 333 \cdot 1422 = 28\,723\,005$$

$$I(A^6 y_0, A^6 y_0) = 10161^2 + 4779^2 + 1422^2 = 128\,106\,846.$$

Отже,

$$\lambda_1 \approx \frac{(A^6 y_0, A^6 y_0)}{(A^5 y_0, A^6 y_0)} = \frac{128\,106\,846}{28\,723\,005} = 4,46,$$

що співпадає в написаних знаках із значенням, знайденим раніше за допомогою $A^{10} y_0$.

Зауваження. Методи знаходження найбільшого по модулю кореня характеристичного рівняння можна використовувати для знаходження найбільшого по модулю кореня алгебраїчного рівняння

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

Дійсно, рівняння, як легко безпосередньо перевірити, є віковим для матриці

$$P = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} & -p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

тобто еквівалентно рівнянню

$$\det(xP - E) = 0.$$

Якщо рівняння (9) не має нульового кореня, то аналогічним способом може бути визначений найменший по модулю корінь цього рівняння, а саме,

при $p_n \neq 0$, вважаючи $\frac{1}{x} = y$, одержимо:

$$y^n + \frac{p_{n-1}}{p_n} y^{n-1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 0$$

Зворотна величина найбільшого по модулю кореня першого рівняння, очевидно, дасть нам найменший по модулю корінь даного рівняння.

Знаходження другого власного значення матриці і другого власного вектора.

Нехай власні значення λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) матриці A такі, що

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

тобто є два відмінних один від одного, найбільших по модулю власних значення λ_1 і λ_2 матриці A . У такому разі прийомом, аналогічним

розібраному вище, можна приблизно знайти друге власне значення λ_2 і власний вектор $x^{(2)}$, що відповідає йому.

З формули маємо:

$$A^m y = c_1 \lambda_1^m x^{(1)} + c_2 \lambda_2^m x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^m x^{(n)}$$

$$A^{m+1} y = c_1 \lambda_1^{m+1} x^{(1)} + c_2 \lambda_2^{m+1} x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^{m+1} x^{(n)}$$

Виключимо з формул члени, що містять λ_1 . В результаті одержимо:

$$A^{m+1} y - \lambda_1 A^m y = c_2 \lambda_2^m (\lambda_2 - \lambda_1) x^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^m (\lambda_n - \lambda_1) x^{(n)}$$

Введемо позначення

$$\Delta_{\lambda} A^m y = A^{m+1} y - \lambda A^m y,$$

причому вираз називатимемо λ - різницею від $A^m y$. Якщо $c_2 \neq 0$, то очевидно, що перший доданок в правій частині рівності є її головним членом при $m \rightarrow \infty$, і ми маємо наближену рівність

$$\Delta_{\lambda_1} A^m y \approx c_2 \lambda_2^m (\lambda_2 - \lambda_1) x^{(2)}.$$

Звідси

$$\Delta_{\lambda_1} A^{m-1} y \approx c_2 \lambda_2^{m-1} (\lambda_2 - \lambda_1) x^{(2)}.$$

Нехай

$$A^m y = y^{(m)} = \begin{bmatrix} y_1^{(m)} \\ y_2^{(m)} \\ \vdots \\ y_n^{(m)} \end{bmatrix}.$$

Виводимо:

$$\lambda_2 \approx \frac{\Delta_{\lambda_1} y_i^{(m)}}{\Delta_{\lambda_1} y_i^{(m-1)}} = \frac{y_i^{(m+1)} - \lambda_1 y_i^{(m)}}{y_i^{(m)} - \lambda_1 y_i^{(m-1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Користуючись даною формулою, можна приблизно обчислити друге власне значення λ_2 .

Що стосується власного вектора $x^{(2)}$, то можна покласти:

$$x^{(2)} \approx \Delta_{\lambda_1} y^{(k)}$$

Є розповсюдження даного методу на випадок кратного кореня характеристичного рівняння.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці. – Підручник. К., 2006. – 480с.
2. Сулима И.М., Гавриленко С.И., Радчик И.А., Юдицкий Я.А.. Основные численные методы и их реализация на микрокалькуляторах. – К: Вища школа, 1987.
3. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М: Наука, 1972.
4. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1977.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1972.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
8. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1990.