

**Б.В. Перелигін
Т.Б. Ткач
С.А. Гор'єв**

**СПЕКТРАЛЬНО-ЧАСОВИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ
МОНІТОРИНГА**

Навчальний посібник

**Одеса
ТЕС**

2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**Б.В. Перелигін
Т.Б. Ткач
С.А. Гор'єв**

СПЕКТРАЛЬНО-ЧАСОВИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ МОНІТОРИНГА

Затверджено Вченою Радою
Одеського державного екологічного університету
Міністерства освіти і науки України
як навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти за спеціальностями
Екологія, Науки про Землю, Комп'ютерні науки,
Технології захисту навколишнього середовища
(протокол № 7 від „29” червня 2017р.)

**Одеса
ТЕС**

2018

БК22.161

П27

УДК517.4:551.583.7

Рецензенти:

Ковальчук В.В., д.ф.-м.н., проф.

Гончарова Л.Д., к.г.н., доц.

П27 Перелигін Б.В., Ткач Т.Б., Гор'єв С.А.

Спектрально-часовий аналіз даних моніторинга: навчальний посібник/Одеський державний екологічний університет. Одеса: ТЕС, 2017. 124 с.

В навчальному посібнику викладені основні поняття про спектрально-часовий аналіз даних моніторинга. Розглянуті два види спектрально-часового аналізу, які базуються на застосуванні перетворення Фур'є в ковзному вікні та на застосуванні вейвлетного перетворення. Достатньо докладно наводяться особливості спектрально-часового аналізу, який ґрунтується на застосуванні перетворення Фур'є. Більш докладно викладені питання спектрально-часового аналізу, ґрунтованого на застосуванні вейвлетного перетворення: розглянута ідея вейвлетного перетворення, поняття про вейвлети, їхню класифікацію та ознаки, безперервне і дискретне вейвлет-перетворення, як пряме, так і зворотне, властивості та можливості вейвлетних перетворень, порядок вейвлет-обробки одновимірних і двовимірних даних, наводяться прості приклади такої обробки. Стосовно до даних палеокліматичного моніторинга, як одного з прикладів моніторинга, докладно розглядаються питання спектрально-часового аналізу, як ґрунтовані на використанні перетворення Фур'є в ковзному вікні, так і ґрунтовані на використанні вейвлетного перетворення.

Посібник розрахований на студентів, які навчаються за спеціальністю „Комп'ютерні науки”, може бути корисним для метеорологів і гідрологів, які навчаються за спеціальністю „Науки про Землю”, а також для екологів, які навчаються за спеціальностями „Екологія” та „Технології захисту навколишнього середовища”.

ISBN 978-617-7337-79-8

© Одеський державний
екологічний університет, 2018

ЗМІСТ

	стор.
Вступ	5
1 Поняття про спектрально-часовий аналіз даних моніторинга ..	7
1.1 Моніторинг стану довкілля.....	7
1.2 Дані моніторинга та їх аналіз.....	10
1.3 Поняття про спектрально-часовий аналіз.....	11
2 Спектрально-часовий аналіз на основі ковзного віконного перетворення Фур'є	15
2.1 Спектральний аналіз ковзним вікном.....	15
2.2 Приклад спектрально-часового аналізу ковзним вікном.....	18
3 Спектрально-часовий аналіз на основі вейвлет-перетворення ..	25
3.1 Загальні відомості про вейвлет-перетворення.....	25
3.1.1 Ідея вейвлет-перетворення.....	25
3.1.2 Поняття про вейвлети. Визначення й ознаки вейвлета..	25
3.1.3 Пряме і зворотне безперервне вейвлет-перетворення....	28
3.1.4 Дискретне вейвлет-перетворення.....	32
3.1.5 Кратномасштабний аналіз і синтез.....	35
3.1.6 Представлення результатів вейвлет-перетворення.....	36
3.2 Властивості вейвлет-перетворення.....	39
3.3 Класифікація і приклади вейвлетів.....	44
3.4 Можливості вейвлет-аналіза.....	49
3.5 Вейвлет-обробка.....	53
3.6 Приклади вейвлет-обробки.....	63
4 Застосування ковзного віконного перетворення Фур'є і вейвлет-перетворення для спектрально-часової обробки даних моніторинга	83
4.1 Опис даних палеокліматичного моніторинга.....	83
4.2 Спектрально-часовий аналіз довгоперіодного кліматичного ряду із застосуванням ковзного віконного перетворення Фур'є.....	86
4.3 Спектрально-часовий аналіз даних палеореконструкції температури в центральній частині Гренландії із застосуванням вейвлет-аналіза.....	94
4.4 Уточнення віку подій Хайнріха методом спектрально-	

часової обробки із застосуванням вейвлет-перетворення.....	109
Предметний покажчик.....	114
Іменний покажчик.....	116
Бібліографічний список.....	117

ВСТУП

У рамках дисципліни "Спектрально-часова обробка даних" студентам належить засвоїти два великих розділи, присвячених обробці даних моніторинга: "Спектральний аналіз даних моніторинга" і "Спектрально-часовий аналіз даних моніторинга".

Запропонована книга є навчальним посібником з другого розділу, а саме, зі спектрально-часового аналізу даних моніторинга.

Оскільки з першим розділом дисципліни студенти вже знайомі, то автори визнали за необхідне і достатнє надати студентам мінімум інформації зі спектрального аналізу з використанням перетворення Фур'є. Додаткова інформація дається лише в області, пов'язаній зі спектрально-часовим аналізом на основі використання ковзного віконного перетворення Фур'є. Основна ж частина посібника присвячена опису вейвлет-перетворення, як дуже зручному математичному інструментарію спектрально-часового аналізу функцій, сигналів, процесів, рядів й інших даних.

Термін "вейвлет" (дослівний переклад – маленька хвиля) виник порівняно недавно – в середині 80-х років ХХ століття у зв'язку з аналізом властивостей сейсмічних і акустичних сигналів.

Вейвлет-перетворення одновимірного сигналу полягає в його розкладанні за базисом, сконструйованим з солітоноподібної функції (вейвлета), яка має певні властивості, за допомогою масштабних змін і перенесень. Кожна з функцій цього базису характеризує як певну просторову (часову) частоту, так і її локалізацію у фізичному просторі (часі).

Таким чином, на відміну від традиційно застосовуваного для аналізу сигналів перетворення Фур'є вейвлет-перетворення забезпечує двовимірну розгортку досліджуваного одновимірного сигналу, при цьому частота і координата розглядаються як незалежні змінні. В результаті створюється можливість аналізу властивостей сигналу одночасно у фізичному (час, координата) і в частотному просторі.

В зарубіжній літературі заведено спектр Фур'є називати *single spectrum* на відміну від спектра, отриманого на основі коефіцієнтів вейвлет-перетворення (вейвлет-спектра), – *time-scale spectrum*.

Вейвлет-аналіз виявляється дуже зручним для аналізу процесів з переміжністю. Він дозволяє виявити просторово розподілені властивості об'єкта, що вивчається, визначити наявність переміжності й розподіл її областей, отримати локальну високочастотну і глобальну

великомасштабну інформацію про об'єкт і багато чого іншого достатньо точно і без надмірності.

Відомі труднощі, що зустрічаються при обробці коротких високочастотних сигналів або сигналів з локалізованими частотами. Вейвлет-перетворення виявляється дуже зручним інструментом для адекватного дешифрування таких даних, оскільки елементи його базису добре локалізовані і мають рухливе частотно-часове вікно.

Область використання вейвлетів не обмежується аналізом властивостей сигналів і полів різної природи. Вейвлети застосовуються і для прямого чисельного моделювання.

Нині сімейство аналізаторів, названих вейвлетами, широко застосовується при розв'язанні різних завдань, – це розпізнавання образів, аналіз і синтез мовних сигналів, вивчення властивостей турбулентних полів, згортка і упакування великих об'ємів інформації, аналіз зображень різноманітної природи – веселкової оболонки ока, рентгенограми нирки, супутникових зображень хмар або поверхні планети, знімків мінералів, довгих числових рядів різної природи і т.ін.

1 ПОНЯТТЯ ПРО СПЕКТРАЛЬНО-ЧАСОВИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ МОНІТОРИНГА

1.1 Моніторинг стану довкілля

Екологічна напруженість у світі вимагає всебічного і повсякденного аналізу стану довкілля. Лише на основі точних кількісних даних можна приймати рішення щодо вживання необхідних заходів, які запобігають погіршенню стану довкілля.

Діагноз і лікування хвороби будь-якого живого організму повинні спиратися на певну систему спостережень, контролю параметрів, що відбивають стан організму, розвиток хвороби і ефективність заходів щодо її лікування.

Біосфера – така ж, як і організм, жива система, але глобального рівня. І її стан також необхідно характеризувати певним набором параметрів, методикою "лікування" і прогнозування результату екологічних "захворювань". Для здійснення цих заходів організується система моніторингу стану довкілля.

Моніторинг (від англ. monitoring, від лат. monitor – що стежить, стеження) – це система спостережень, оцінки і прогнозу стану довкілля. Термін "моніторинг" виник незадовго перед проведенням Стокгольмської конференції ООН по довкіллю (5-16 червня 1972 р.) [1].

На першій міжурядовій нараді з моніторингу (Кенія, 1974 р.), скликаній Радою Програми ООН з проблем довкілля (ЮНЕП), були визначені основні цілі глобальної системи моніторингу довкілля. Першочерговим напрямом в системі глобального моніторингу були названі спостереження над забрудненням довкілля на імпактіному (рівень сильного глобального забруднення), регіональному і фоновому рівнях. Була запропонована структура моніторингу, яка відбита на рис. 1.1 [2].

З рисунка видно, що моніторинг не включає управління (регулювання) якістю довкілля. Проте очевидно, що для організації управління якістю довкілля абсолютно необхідною умовою є організація системи моніторингу.

Моніторинг охоплює спостереження за джерелами і чинниками антропогенних дій – хімічними, фізичними (випромінювання, механічні дії), біологічними – і за ефектами, які утворюються внаслідок цих дій на довкілля, і передусім за зворотною реакцією біологічних систем на їх вплив.

Спостереження можуть здійснюватися за фізичними, хімічними і

біологічними показниками; особливо перспективними є інтегральні (комплексні) показники стану природних систем. Моніторинг може проводитися по окремих компонентах екосистем або по екосистемах різного рівня. При проведенні моніторингу використовуються фізико-хімічні, біологічні, географічні й інші методи, широко впроваджуються космічні методи моніторингу.

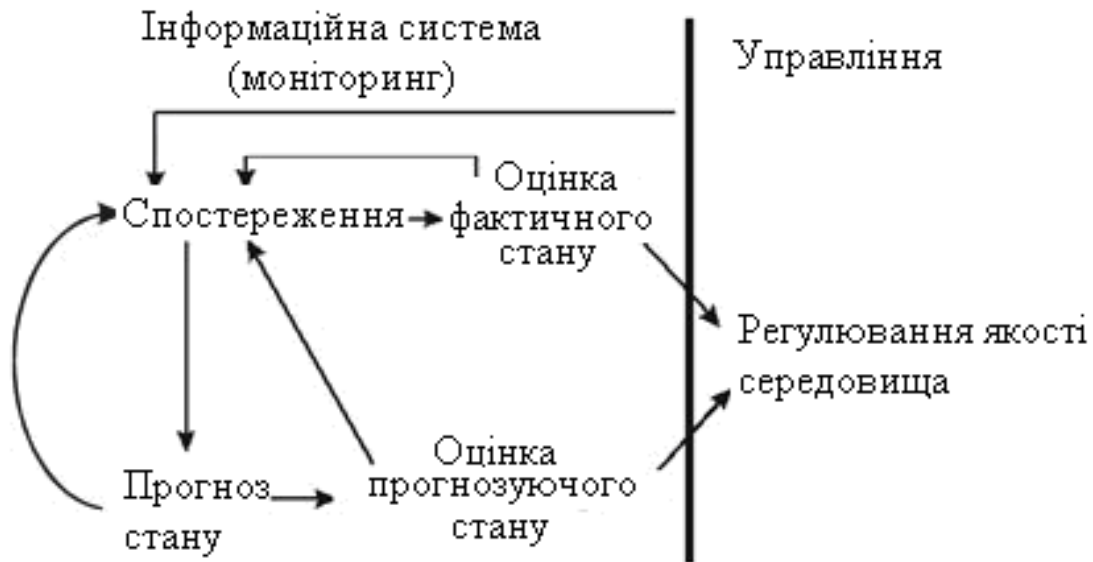


Рис. 1.1 – Структура моніторингу

Моніторинг підрозділяють на такі рівні: біоекологічний, геоекологічний і біосферний.

Перший рівень – біоекологічний (біологічний, санітарно-гігієнічний, санітарно-токсикологічний) моніторинг включає спостереження:

- за станом довкілля;
- за мірою забруднення природних об'єктів шкідливими речовинами;
- за дією джерел забруднення на людину і біоту в цілому (сукупність флори, фауни і мікроорганізмів);
- за наявністю в довкіллі алергенів, патогенних організмів, пилу;
- за вмістом в атмосфері оксидів азоту і сірки, важких металів;
- за якістю водних об'єктів, мірою їх забруднення і т.ін.

Об'єктами біоекологічного моніторингу є: приземні шари атмосфери, поверхневі й ґрунтові води, ґрунти, промислові і побутові стоки і викиди, радіоактивні випромінювання і відходи.

Біоекологічний моніторинг здійснюють різні служби: гідрометеорологічна (метеостанції, гідропости, обсерваторії), санітарно-гігієнічна і епідеміологічна (санепідемстанції) та ін. Біоекологічний моніторинг дає експрес-інформацію про стан довкілля і дуже важливий для всіх районів, міст, населених пунктів.

Другий рівень – системний геоекологічний (природно-господарський) моніторинг. Суть його полягає в спостереженні за змінами в екологічних системах (біогеоценозах), природних комплексах, в спостереженні за їх продуктивністю, динамікою запасів корисних копалин, водних, земельних і рослинних ресурсів.

Об'єктами геоекологічного моніторингу є: зникаючі види рослин, тварин, мікроорганізмів, природні еко- і геосистеми, агросистеми, лісові насадження, рекреаційні системи. Спостереження ведуться на географічних стаціонарах і спеціальних полігонах (тестових ділянках). Тестові ділянки призначені для контрольних вимірювань і спостережень, на них розробляються тести (індикатори) біологічної продуктивності, природної здатності до самоочищення і т.ін. Результати, отримані на тестових ділянках, розглядаються як типові, характерні для цієї екосистеми. Велику роботу в цьому напрямку виконують гідрометеорологічна служба, сільськогосподарські дослідні станції, гідромеліоративні станції та ін.

Третій рівень – глобальний біосферний моніторинг. Метою цього моніторингу є контроль за станом довкілля в глобальному масштабі, спостереження за глобально-фоновими змінами в природі, прогноз можливих змін біосфери й усієї географічної оболонки в результаті господарської діяльності людини.

Об'єктами глобального біосферного моніторингу є: радіаційний баланс, прозорість атмосфери та її антропогенна зміна, світовий водний баланс і забруднення Світового океану, великомасштабні зміни в біогеохімічних циклах елементів і речовин (CO_2 , O_2 , N , P , S , H_2O та ін.), енергетичний обмін географічної оболонки з космосом, світова міграція птахів, тварин, рослин і комах, зміна клімату на планеті та ін.

З метою проведення фонових спостережень по всьому світу створюється мережа біосферних заповідників, на території яких забороняється виробнича діяльність, яка становить небезпеку для всього живого. Нині в 62 країнах світу створено більше 230 біосферних заповідників.

Починаючи з 60-х років ХХ сторіччя, величезну роль в організації глобального моніторингу стали відігравати методи космічної зйомки. Дистанційне зондування Землі включає всі роботи, пов'язані з дослідженням стану довкілля з космосу [3]. Особливо ефективні космічні дослідження, коли вони поєднуються з аеровізуальними методами і наземними спостереженнями. Дистанційне зондування Землі проводиться зі штучних супутників, пілотованих космічних кораблів, орбітальних станцій. Спостереження з космічних кораблів дозволили отримати дані про будову Землі, без яких важко прогнозувати пошуки нафти і газу, зібрана інформація про розподіл пилу в атмосфері на різних широтах і в різних регіонах Землі. Космічні методи широко використовуються при

проведенні екологічних досліджень в багатьох країнах світу.

Створення глобальних моніторингових систем є якісно новим етапом в розвитку моніторингу і потребує великих фінансових витрат. Успіхи інформатики й обчислювальної техніки в останні десятиріччя відкрили двері в екологію методам моделювання. Модель повинна якомога точніше описувати реальний об'єкт, а живі об'єкти характеризуються безліччю параметрів, які до того ж безперервно змінюються. Повну інформацію про живий об'єкт отримати практично неможливо, тому принципово неможливо створити ідеальну модель. Проблема ще більше ускладнюється, якщо за допомогою моделі спробувати описати функціонування окремих екосистем або біосфери в цілому. Проте моделювання в здійсненні глобального моніторингу має велику перспективу.

1.2 Дані моніторингу та їх аналіз

Поняття "дані" має досить широку інтерпретацію і використовується в багатьох галузях науки і техніки.

В інформатиці й інформаційних технологіях.

Дані – представлення інформації, що піддається багатократній інтерпретації, у формалізованому вигляді, придатному для передачі, зв'язку або обробки (ISO/IEC 2382-1:1993).

Дані – форми представлення інформації, з якими мають справу інформаційні системи та їх користувачі (ISO/IEC 10746-2:1996).

Дані – зареєстрована інформація, представлення фактів, понять або інструкцій у формі, прийнятній для спілкування, інтерпретації, обробки людиною або за допомогою автоматичних засобів (ISO/IEC/IEEE 24765-2010).

В метрології.

Дані – сукупність значень, порівнюваних з основним або похідним заходом і/або показником (ISO/IEC 15939:2007, ISO/IEC 25000:2005).

Хоча інформація повинна набути деякої форми представлення (тобто перетворитися на дані), щоб нею можна було обмінюватися, інформація є в першу чергу інтерпретація (сенс) такого представлення (ISO/IEC/IEEE 24765:2010). Тому в строгому сенсі інформація відрізняється від даних, хоча в неформальному контексті ці два терміни дуже часто використовують як синоніми.

Даними називають інформацію, коли роблять акцент на тому, що вона надходить як вхідні параметри деякого алгоритму обробки. Дані – від слова "дано", так само як в записі умови завдання ми записуємо "дано" і "знайти".

Цей термін часто вживається, коли йдеться про комп'ютерні системи. Одні й ті ж дані, записані в комп'ютерній пам'яті, можуть відображатись

залежно від обраної програми обробки або як графічна інформація, або як символна, або як звукова, або як числова.

Дані також – це будь-які зареєстровані сигнали. Слово "інформація" частіше використовується у вузькому сенсі, ніж просто усе, що відбивається в матеріальному об'єкті в результаті дії на нього іншого матеріального об'єкта. Передбачається, що отримання інформації дає тому, що отримало її, можливість приймати рішення, діяти, здійснювати вибір або поповнити (і/або реструктурувати) свою систему знань. Якщо отримані дані не призводять ні до чого з перерахованого, тоді з суб'єктивної точки зору вважається, що для отримувача вони інформації не несуть, хоча і займають певний об'єм його пам'яті.

Моніторинг розглядає зміну стану довкілля і життєзабезпечення, через наявність в ній великого числа динамічних параметрів з укрій різноманітними характеристиками, які включають як екзогенні чинники на зразок температури, вологості повітря, швидкості і напряму повітряних потоків. Кінцевою метою роботи є створення набору методик, що дозволяє розв'язувати практичні завдання з автоматичного виділення аномалій в динамічній зміні стану системи довкілля, візуалізації стану для оператора.

Алгоритм аналізу даних моніторингу полягає, крім всього іншого, в побудові адекватних статистичних і спектрально-часових моделей:

- моделі, що описують набір зібраних раніше даних, т.з. "безліч первинних даних";
- моделі, що дозволяють обчислювати можливі майбутні стани системи (моніторинг динаміки);
- моделі просторово-часового аналізу із застосуванням моделі "безліч первинних даних" для класифікації станів, отриманих за допомогою спектрального аналізу.

1.3 Поняття про спектрально-часовий аналіз

Спектрально-часовий аналіз (СЧАН) – це метод дослідження нестационарних випадкових сигналів, що полягає в оцінці "поточного" спектра частини сигналу, відповідного ковзному часовому вікну деякої малої довжини [4, 5]. При подібній оцінці визначається залежність спектра потужності сигналу, як від частоти, так і від положення (середини або правого краю) вікна. Ця залежність візуалізується у вигляді двовимірних ліній або рівнів, або тривимірних рельєфів, які називаються СЧАН-діаграмами (рис. 1.2).

Максимальним значенням такої залежності відповідають періоди часу збільшення потужності коливань в тих або інших частотних смугах. СЧАН часто застосовуються для виявлення нестационарних сигналів в дискретних в часі протяжних випадкових процесах.

Будується спектрограма таким чином. Часове вікно величиною в задану кількість відліків ряду зміщується вздовж ряду зліва направо із заданим кроком. Для кожного кроку розраховується спектр потужності фрагмента ряду, що потрапив у вікно.

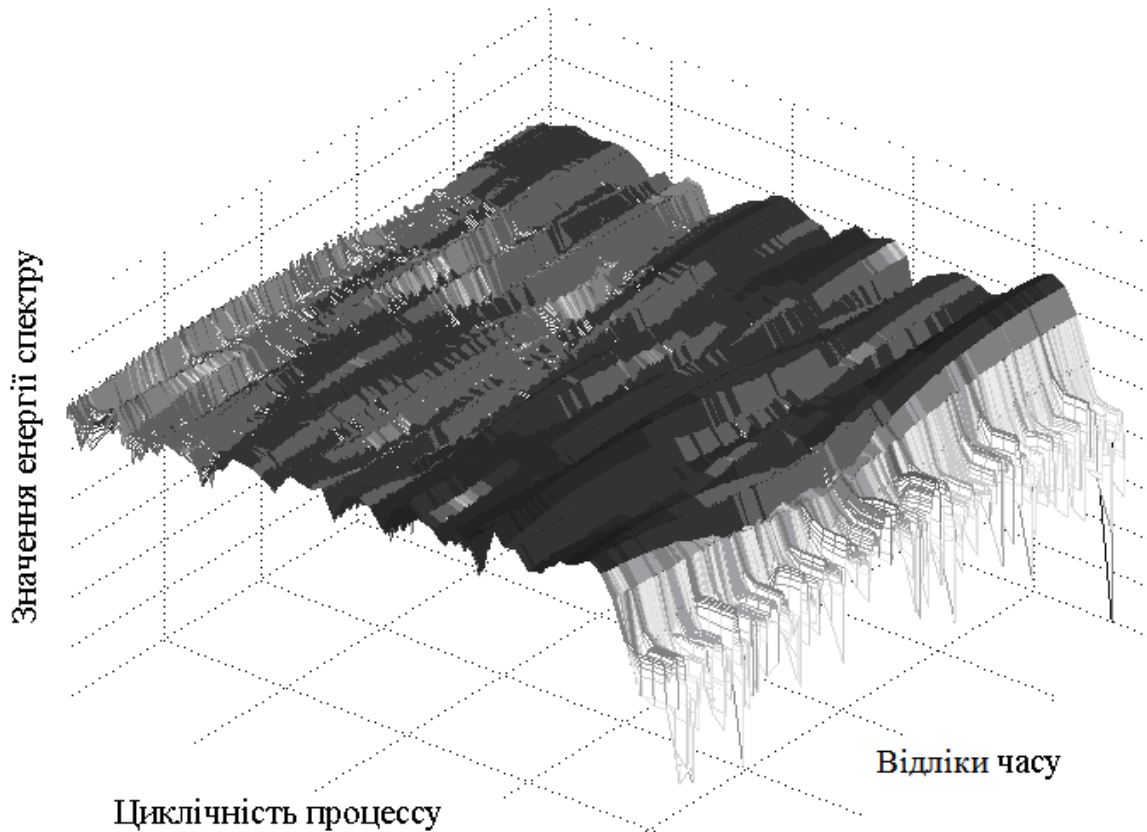


Рис. 1.2 – Тривимірна СЧАН-діаграма

Отриманий спектр потужності розгортається вдовж осі ординат зі значенням абсциси, яка відповідає положенню середини вікна. В результаті виходить залежність оцінки спектра потужності від двох параметрів у вигляді рельєфу, а саме, від частоти і від положення часового вікна. Простежуючи хребти на рельєфі, можна отримати уявлення про те, як інтенсивність прояву тієї або іншої циклічності змінювалася з часом.

Зіставляючи звичайне і віконне перетворення Фур'є, можна дійти висновку про те, що останнє вирішило всі проблеми з аналізом і синтезом функцій і сигналів. Але принцип невизначеності Гейзенберга, відомий з курсу фізики, свідчить про те, що неможливо одночасно отримати високе часове і частотне розділення. Вибираючи вікно з малою шириною за часом, отримаємо високе часове розділення і низьке частотне; вибираючи вікно з великою шириною за часом, отримаємо високе частотне розділення і низьке часове. Віконне перетворення Фур'є оперує з вікнами однакової ширини і тому це протиріччя для нього нерозв'язне.

І, крім того, в ньому використовується єдина базисна функція –

синусоїда – з усіма властивими їй недоліками і, значить, недоліками перетворення Фур'є:

- непридатність до аналізу нестационарних сигналів, у яких певні частотні компоненти існують лише в певні проміжки часу або, коли параметри сигналів змінюються в часі;
- перетворення Фур'є навіть для однієї заданої частоти потребує знання сигналу не лише у минулому, але і в майбутньому, що є теоретичною абстракцією;
- в умовах практично неминучого обмеження числа гармонік або спектра коливань точне відновлення сигналу після прямого і зворотного перетворень Фур'є теоретично і практично неможливе через наявність ефекту Гіббса;
- базисною функцією при розкладанні в ряд Фур'є є гармонійне коливання, яке математично визначене в нескінченному інтервалі часу і має незмінні в часі параметри;
- при чисельній інтеграції в нескінченних межах при прямому і зворотному перетворенні відповідно в часовій і в частотній області виникають значні обчислювальні труднощі;
- істотні особливості сигналу у вигляді розривів або піків спричиняють несуттєві зміни частотного образу сигналу в усьому нескінченному інтервалі частот, які "розмазуються" по всій частотній осі, що робить їх виявлення в спектрі практично неможливим;
- навіть уможливно зрозуміло, що плавна синусоїдальна базисна функція в принципі не може представляти перепади сигналів з нескінченною крутизною, хоча на практиці подібні імпульсні сигнали застосовуються дуже широко;
- єдине застосування до представлення швидких змін сигналів – це різке збільшення числа гармонік, які, проте, чинять вплив на форму сигналу і за межами локальних особливостей сигналу;
- за складом вищих гармонік спектра практично неможливо оцінити місце розташування особливостей на часовій залежності сигналу і їх характер;
- для нестационарних сигналів при прямому і зворотному перетворенні Фур'є істотно збільшується обчислювальна складність.

Через недоліки і особливості перетворення Фур'є в останні декілька десятиліть для спектрально-часового аналізу функцій, рядів, сигналів, процесів і так далі широко використовується вейвлетне перетворення через свої властивості.

Питання для самоконтролю

1. Поясніть значення терміна "Моніторинг".

2. Що включає моніторинг?
3. Назвіть рівні моніторингу довкілля.
4. Назвіть об'єкти біоекологічного моніторингу.
5. Перерахуйте об'єкти геоекологічного моніторингу.
6. Які об'єкти є предметом глобального біосферного моніторингу?
7. Які Ви знаєте інтерпретації поняття "Дані"?
8. Назвіть приклади кількісного аналізу величин, вимірюваних при моніторингу.
9. Поясніть суть спектрально-часового аналізу.

2 СПЕКТРАЛЬНО-ЧАСОВИЙ АНАЛІЗ НА ОСНОВІ КОВЗНОГО ВІКОННОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Спектральне представлення періодичної функції комплексним рядом Фур'є [6], а також і довільного скінченного сигналу, якщо нас не цікавить його поведінка за межами завдання, відповідає виразу:

$$s(t) = \sum_{n=0}^N S_n \exp(jtn\Delta\omega), \quad S_n = (1/T) \int_0^T s(t) \exp(-jtn\Delta\omega). \quad (2.1)$$

де $\Delta\omega = 2\pi/T$ – частотний аргумент, кратний частоті першої гармоніки.

Ряд Фур'є, як правило, є наближеним і обмежується певною кількістю членів ряду N , які забезпечують необхідну точність обробки даних. З позицій точного представлення довільних сигналів і функцій, перетворення Фур'є має ряд недоліків, які призвели до появи віконного перетворення Фур'є і стимулювали розвиток вейвлетного перетворення. Відмітимо основні з них:

- обмежена інформативність аналізу нестационарних сигналів і практично повна відсутність можливостей аналізу їх особливостей (сингулярностей), оскільки в частотній області відбувається "розмазання" особливостей сигналів (розривів, сходинок, піків і тому подібне) по всьому частотному діапазону спектра;
- прояв ефекту Гіббса на скачках функцій, при усіканнях сигналів і при вирізці відрізків сигналів для локального детального аналізу;
- гармонійний характер базисних функцій, визначених в інтервалі від $-\infty$ до $+\infty$.

2.1 Спектральний аналіз ковзним вікном

Класичне перетворення Фур'є має справу зі спектром функції, взятим в усьому діапазоні існування змінної. Нерідко інтерес представляє лише локальний розподіл частот, тоді як вимагається зберегти первинну змінну (звичайний час). Тому перетворення Фур'є не підходить для нестационарних функцій, у яких певні частотні компоненти існують лише в певні проміжки часу. В цьому випадку використовується непараметричне узагальнення перетворення Фур'є, так зване ковзне віконне перетворення Фур'є. Спершу необхідно обрати деяку віконну функцію W , ця функція повинна мати добре локалізований спектр.

Застосування вікон принципово потрібне, оскільки в реальних приладах досліджується завжди деяка вирізка з досліджуваної функції

(сигналу). При цьому розриви сигналу внаслідок вирізки різко спотворюють спектр через накладення спектрів стрибків на спектр сигналу.

Ідея цього перетворення [7, 8] полягає в розбитті часового інтервалу на ряд проміжків – вікон. Для кожного з вікон обчислюється своє Фур'є перетворення. Таким чином, можна перейти до частотно-часового представлення аналізованої функції. Це дозволяє отримувати, досліджувати і будувати у вигляді спектрограм динамічні спектри і аналізувати їх поведінку в часі. Спектрограма будується в трьох координатах – частота, час і амплітуда. Подібні аналізатори спектра називають аналізаторами спектра реального часу або миттєвого спектра, залежного від часу.

При виконанні віконного Фур'є-перетворення, наприклад, за методом Бартлетта, весь інтервал спостереження сигналу з N відліків функції (ряду, сигналу) розбивається на K вибірок, що не перекриваються, по M відліків в кожній і в подальшому обчислюються спектри вибірок за допомогою дискретного перетворення Фур'є (рис. 2.1).

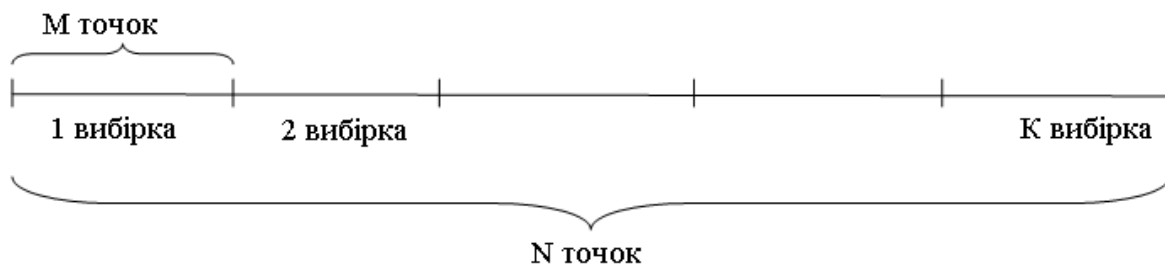


Рис. 2.1 – Розбиття функції (ряду, сигналу) на вікна за методом Бартлетта

Відомий також метод Уелша, який ґрунтується на дещо модифікованому методі сегментації за рахунок застосування вікна даних і використання сегментів, що перекриваються. Обчислення спектра кожного сегмента передус зважуванням цих даних на віконну функцію. Це дозволяє за рахунок невеликого погіршення відрізнення ослабити ефекти, зумовлені бічними пелюстками. За допомогою перекриття сегментів вдається збільшити число миттєвих спектрів всіх сегментів (рис. 2.2).

Загальний принцип. Повний часовий інтервал сигналу, особливо при великій його тривалості, розділяється на підінтервали – часові вікна, і перетворення проводиться послідовно для кожного вікна окремо. Тим самим здійснюється перехід до частотно-часового (частотно-координатного) представлення функцій (рядів, сигналів) і це, певною мірою, дозволяє виділяти на координатній осі і аналізувати особливості нестационарних функцій (рядів, сигналів).

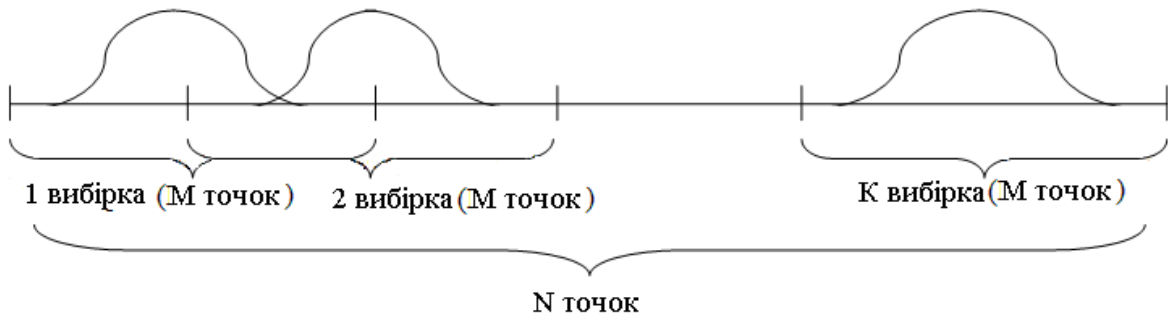


Рис. 2.2 – Розбиття і зважування спектральних оцінок за методом Уелша

Віконне перетворення Фур'є виконується відповідно до виразу

$$S(\omega, b_k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) w(t-b_k) \exp(-j\omega t) dt. \quad (2.2)$$

Функція $w(t-b)$ є функцією вікна зсуву перетворення по координаті t , де параметром b задаються фіксовані значення зсуву при зсуві вікон з рівномірним кроком $b_k = k\Delta b$. В якості вікна перетворення може використовуватися як просте прямокутне вікно ($w(t)=1$ в межах вікна і 0 за його межами), так і спеціальні вагові вікна (Бартлетта, Гаусса, Кайзера та ін.), які забезпечують малі спотворення спектра за рахунок граничних умов вирізки віконних відрізків сигналів і нейтралізацію явища Гіббса. При цьому для кожного положення вікна на часовій осі сигналу обчислюється свій комплексний спектр. Ефективна ширина віконної функції, як правило, зберігається постійною по всьому інтервалу сигналу.

На практиці перетворення Фур'є зазвичай замінюється на дискретне перетворення Фур'є (ДПФ), а як вікно, наприклад, часто використовується вікно Ханна. Зафіксуємо ширину M вікна Ханна

$$g_M(j) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi j}{M} \right). \quad (2.3)$$

Ділянка сигналу, локалізована поблизу моменту часу k , визначається формулою

$$x_M(j, k) = x_{k+j} g_M(j). \quad (2.4)$$

Обчислимо для цього сигналу дискретне перетворення Фур'є

$$X_M(n, k) = \sum_{j=0}^M x_M(j, k) W_M^{-jn}. \quad (2.5)$$

Тут $W_N = \exp[i(2\pi/N)]$.

Локальний дискретний спектр $X_M(n, k)$ визначає спектральний склад сигналу $x(j)$ в M -околі моменту часу k . Відзначимо, що при практичному використанні локального спектрального аналізу перед виконанням ДПФ кожної ділянки сигналу виконують звичайні для спектрального аналізу операції виключення постійної складової і доповнення нулями.

Локальний дискретний спектр є функцією двох індексів і зазвичай зображується у вигляді так званої спектрограми. Спектрограма зображується на координатній площині, у якої вісь абсцис представляє час (індекс k), а по осі ординат відкладається частота (індекс n). Сама спектрограма є картинкою в градаціях сірого, яскравість точки з координатами $(k; n)$ визначається потужністю $|X_M(n, k)|^2$ відповідних спектральних складових. Слід зазначити, що зазвичай при зсуві вікна на один відлік зміна спектра виявляється дуже малою, тому при рисуванні спектрограми можна використовувати більший крок за часом k .

Розглянемо питання про вибір ширини M вікна, яка визначає довжину ділянки, яка аналізується на кожному кроці. Довжина часового ряду при ДПФ визначає граничне розрізнення по частоті і саму низькочастотну гармоніку, яка може ідентифікуватись за спектром. Таким чином, ширину вікна при локальному спектральному аналізі слід вибирати, виходячи з того, яку точність локалізації спектральних складових по частоті ми хочемо отримати. З іншого боку, ширина вікна визначає також точність локалізації спектральної складової за часом. Широке вікно дозволяє отримати високе розрізнення по частоті, але точність часової локалізації не перевищує ширини вікна. Вузьке вікно дає хорошу локалізацію за часом, але частота самої спектральної складової визначається дуже грубо.

При ширині віконної функції, рівною M , частотна роздільна здатність визначається значенням $\Delta\omega = 2\pi/M$. При необхідній величині частотного відрізнення $\Delta\omega$ відповідно ширина віконної функції має дорівнювати $M = 2\pi/\Delta\omega$. Для віконного перетворення Фур'є ці обмеження є принциповими.

2.2 Приклад спектрально-часового аналізу ковзним вікном

Розглянемо два сигнали, кожен з яких складається з двох радіоімпульсів тривалістю 0,02 с. Час початку першого імпульсу 0,02 с, а другого 0,06 с, частоти заповнення 400 Гц і 1200 Гц. Сигнали відрізняються один від одного тим, що імпульси надходять в різному

порядку (рис. 2.3).

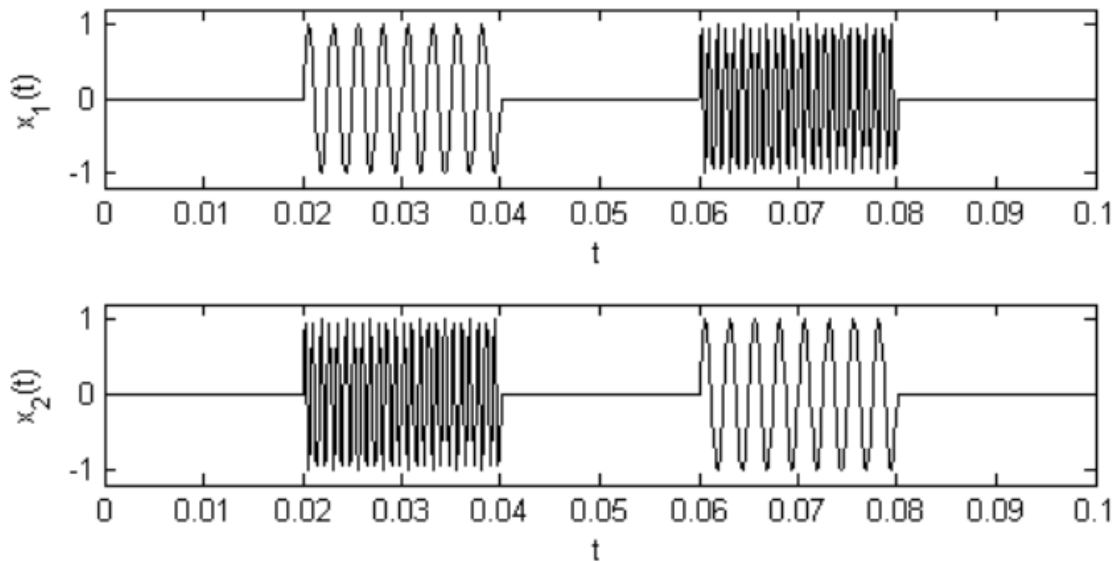


Рис. 2.3 – Представлення сигналів в часовій області

Маючи представлення сигналу в часовій області, можна встановити момент часу, в який проходять імпульси, але не можна визначити їх частоту [9]. І навпаки, маючи представлення сигналу в частотній області, отримане за допомогою перетворення Фур'є, можна визначити їх частоти, але не можна визначити час надходження імпульсів (рис. 2.4).

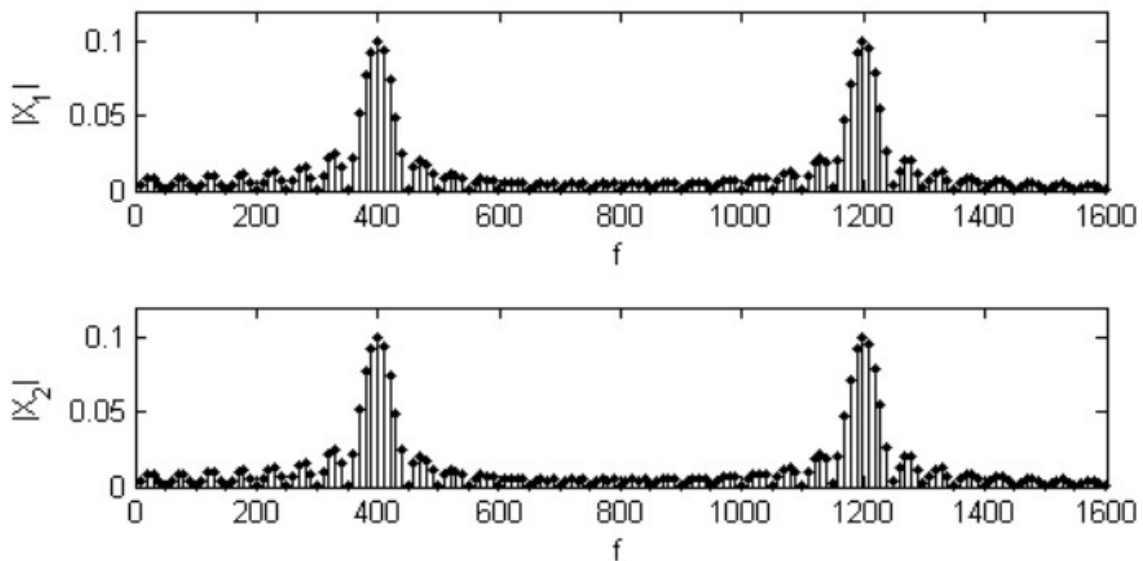


Рис. 2.4 – Представлення сигналів в частотній області

Амплітудні спектри побудовані лише на позитивній півосі. Амплітудні спектри обох сигналів співпадають, фазові спектри будуть різними, оскільки на фазу впливає момент приходу імпульсу і початкова фаза заповнення.

Виконаємо моделювання віконного перетворення на основі застосування Matlab-функції побудови спектрограм – `specgram`.

Для візуалізації віконного швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) служить функція побудови спектрограм `specgram`. Це засіб візуалізації спектру апаратним чином реалізований в аналізаторах спектру реального часу. Спектрограма представляється залежністю амплітуди спектральних складових швидкого перетворення Фур'є, які обчислюються у вікні, що переміщається, від моменту часу, який завдає положення вікна. Фактично спектрограма будується в площині частота–час, а амплітуда кожної спектральної складової визначає амплітуду кожної точки спектрограми. При побудові спектрограми використовується функціональне забарвлення, іноді з застосуванням шкали кольорів.

Формою запису можуть задаватися різні вхідні параметри і визначатися додаткові вихідні параметри

$$[B, f, t] = \text{specgram}(a, nfft, fs)$$
$$B = \text{specgram}(a, nfft, fs, window, numoverlap)$$

У простому випадку $B = \text{specgram}(x)$ обчислюється спектрограма сигналу, з відліками у векторі x . При цьому ряд параметрів використовується за умовчанням:

$$nfft = \min(256, \text{length}(x)); fs = 2;$$

window - періодичне вікно Хеннінга з довжиною *nfft* і

$$numoverlap = \text{length}(window)/2.$$

Параметр `windows` може бути скаляром або вектором. Відповідно, він задає або довжину вікна, або коефіцієнти для вікна, що довільно задаються.

Разом з амплітудами спектральних складових B може повертатися вектор частот БПФ f і вектор часу t . Довжина вектора t дорівнює числу стовпців матриці B . Параметр `numoverlap` задає число відліків, на яке впливає перекриття блоків.

Приклад віконного перетворення Фур'є в Matlab (`wnd_dft.m`):

```
clear, clc, close all
Fs = 8000; % частота квантування
f1 = 400; % частота заповнення одного з імпульсів
f2 = 1200; % частота заповнення іншого імпульсу
```

```

tau = 0.02; % тривалість імпульсів
t1 = 0.02; % час приходу першого імпульсу
t2 = 0.06; % час приходу другого імпульсу
dt = 1/Fs; % період квантування
t = 0: dt :0.1; % час
N = length(t); % кількість відліків

% створюємо сигнали, що складаються з двох імпульсів
% сигнали відрізняються тим, що імпульси з різною частотою
% надходять в різному порядку

x1 = (t >= t1 & t < t1 + tau) .* sin(2*pi*f1*t) + ..
      (t >= t2 & t < t2 + tau) .* sin(2*pi*f2*t);
x2 = (t >= t1 & t < t1 + tau) .* sin(2*pi*f2*t) + ..
      (t >= t2 & t < t2 + tau) .* sin(2*pi*f1*t);

% % будуємо графіки сигналів

figure
subplot(2,1,1), plot(t, x1, 'k'), xlabel('t'), ylabel('x_1(t)')
subplot(2,1,2), plot(t, x2, 'k'), xlabel('t'), ylabel('x_2(t)')
X1 = fft(x1); % дискретне перетворення Фур'є першого сигналу
X2 = fft(x2); % дискретне перетворення Фур'є другого сигналу

% частоти, які відповідають гармонікам

f = (ceil(N/2) - N : ceil(N/2) - 1) * Fs / N;

% % будуємо графіки амплітудних спектрів сигналів

figure
subplot(2,1,1), stem(f, abs(fftshift(X1))/N, 'k.')
xlabel('f'), ylabel('|X_1|'), axis([0 1600 0 0.12])
subplot(2,1,2), stem(f, abs(fftshift(X2))/N, 'k.')
xlabel('f'), ylabel('|X_2|'), axis([0 1600 0 0.12])

% обчислюємо віконне дискретне перетворення Фур'є

[Xw1, F, T] = spectrogram(x1, triang(128), 64, 128, Fs);
Xw2 = spectrogram(x2, triang(128), 64, 128, Fs);
c = (1:-0.05:0)' * [1 1 1]; % палітра кольорів для побудови графіків
% будуємо контурні графіки модуля віконного перетворення Фур'є

```

```

figure
subplot(2,1,1), contourf(T, F, abs(Xw1))
colormap(c), colorbar, grid on, axis([min(T) max(T) 0 1600])
xlabel('t'), ylabel('f'), title('|Xw_1(t, f)|')
subplot(2,1,2), contourf(T, F, abs(Xw2))
colormap(c), colorbar, grid on, axis([min(T) max(T) 0 1600])
xlabel('t'), ylabel('f'), title('|Xw_2(t, f)|')

```

% обчислюємо віконне дискретне перетворення Фур'є

```

% % зменшили розмір вікна в 4 рази
[Xw1, F, T] = spectrogram(x1, triang(32), 16,32, Fs);
Xw2 = spectrogram(x2, triang(32), 16,32, Fs);

```

% будуємо контурні графіки модуля віконного перетворення Фур'є,
% обчисленого з вікном іншого розміру

```

figure
subplot(2,1,1), contourf(T, F, abs(Xw1))
colormap(c), colorbar, grid on, axis([min(T) max(T) 0 1600])
xlabel('t'), ylabel('f'), title('|Xw_1(t, f)|')
subplot(2,1,2), contourf(T, F, abs(Xw2))
colormap(c), colorbar, grid on, axis([min(T) max(T) 0 1600])
xlabel('t'), ylabel('f'), title('|Xw_2(t, f)|')

```

За допомогою віконного перетворення Фур'є можна отримати частоту і час надходження імпульсів одночасно, але імпульси виявляться розмитими як по частоті, так і за часом. Якщо збільшити розмір вікна, тоді на спектрограмі сигнал ставатиме менш розмитим по частоті і більше розмитим за часом, і навпаки, якщо зменшити розмір вікна, тоді на спектрограмі сигнал буде менш розмитим за часом і більше розмитим за частотою.

У прикладі створюються два сигнали з двох радіоімпульсів, таких в різному порядку, обчислюється дискретне перетворення Фур'є і віконне перетворення Фур'є з вікнами різного розміру.

В ідеальному випадку, на спектрограмі мали б бути два горизонтальні відрізки по осі часу, які відповідають часу початку і кінця імпульсів, а по осі частот – миттєві частоти заповнення імпульсів. На практиці це недосяжно. Щоб приблизно оцінити, наскільки розширюються спектральні лінії, знайдемо ширину спектра трикутного імпульсу як відстань між нулями. У першому випадку ширина вікна 16 мс, відповідна ширина спектра трикутного імпульсу $2/16$ мс = 125 Гц, для вікна шириною 4 мс відповідно до $2/4$ мс = 500 Гц. Ці оцінки відповідають графікам на

рис. 2.5 і 2.6.

Наведений приклад показав проблему відрізнення, властиву віконному перетворенню Фур'є. Тому при застосуванні віконного перетворення Фур'є завжди виникає питання: який вигляд і розмір вікна використовувати? Вузьке вікно забезпечує краще часове відрізнення, а широке краще – частотне. Проблема полягає в тому, що доводиться обрати вікно "раз і назавжди", тобто для аналізу усього сигналу, тоді як різні його ділянки можуть потребувати застосування різних вікон. Якщо сигнал складається з частотних компонентів, що далеко відстають один від одного, тоді можна пожертвувати спектральним відрізненням на користь часового відрізнення і навпаки.

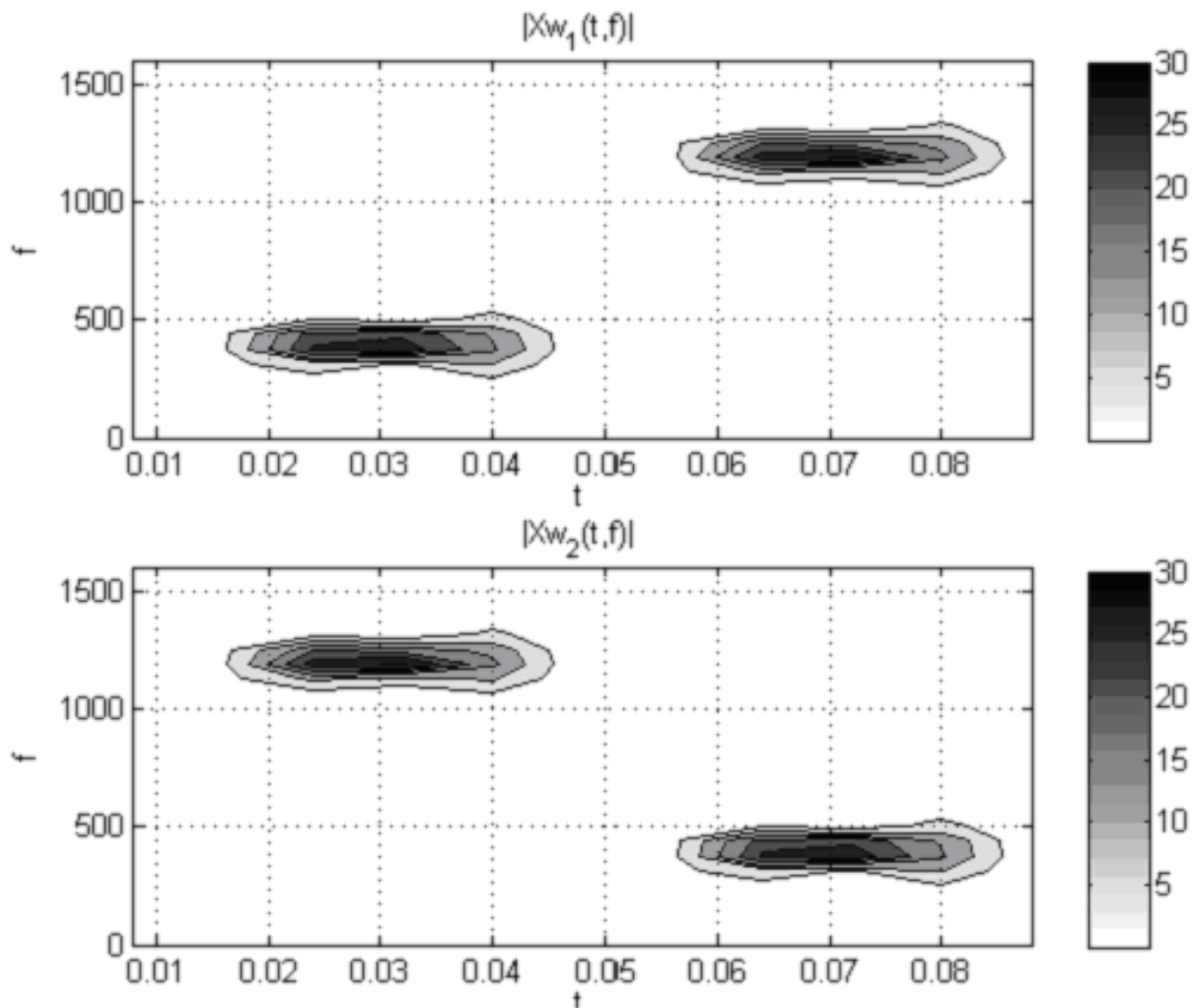


Рис. 2.5 – Спектрограми сигналів, обчислені з широким вікном

Вейвлет-перетворення вирішує певною мірою цю проблему відрізнення, як буде показано в наступному розділі.

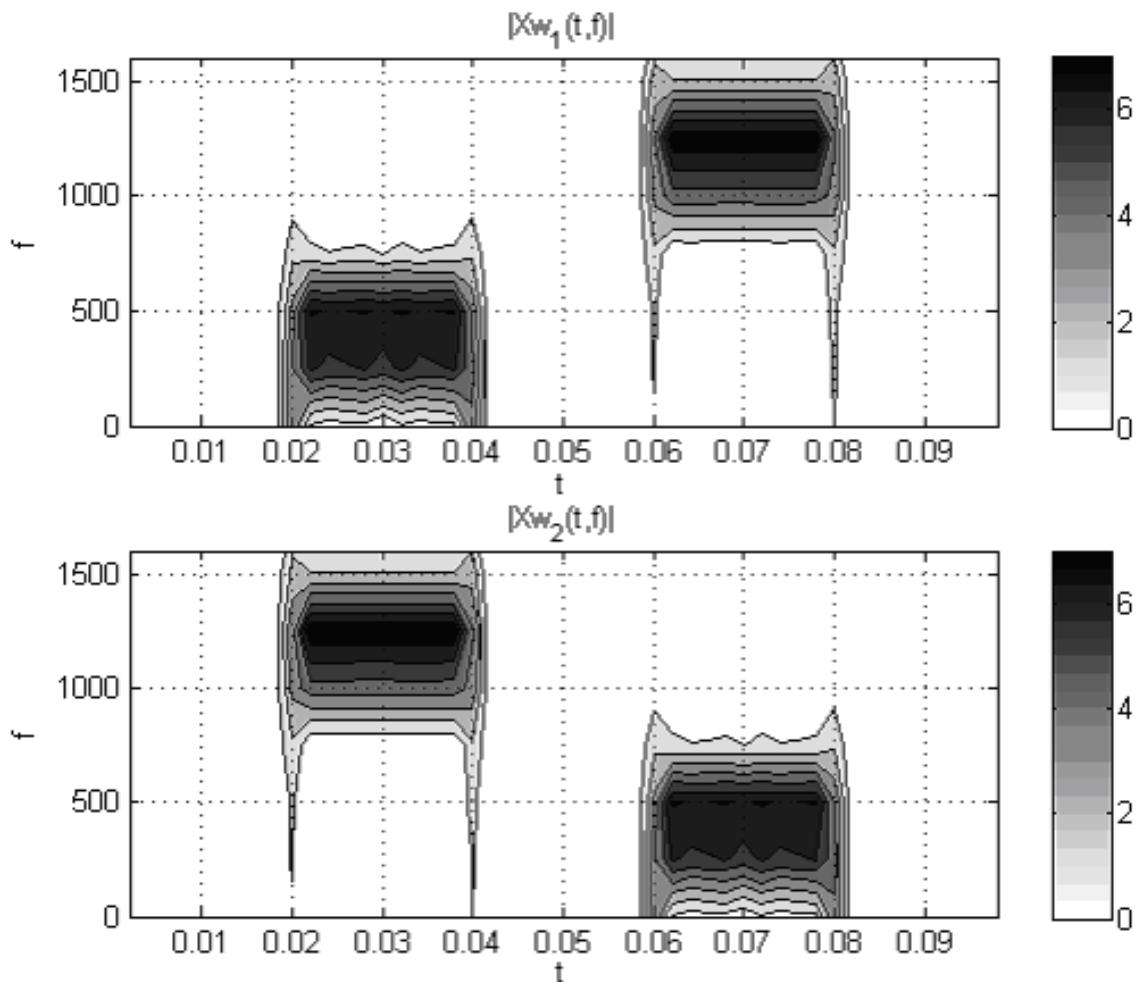


Рис. 2.6 – Спектрограми сигналів, обчислені з вузьким вікном

Питання для самоконтролю

1. Перелічіть недоліки спектрального представлення періодичної функції рядом Фур'є
2. У чому полягає ідея ковзного віконного перетворення Фур'є?
3. Назвіть методи виконання ковзного віконного перетворення Фур'є.
4. Запишіть вираз ковзного віконного перетворення Фур'є і поясніть сенс його змінних.
5. Опишіть принцип побудови спектрограми.
6. Чим визначається точність частотної локалізації спектральних складових при віконному перетворенні Фур'є?
7. Чим визначається точність часової локалізації спектральних складових при віконному перетворенні Фур'є?

3 СПЕКТРАЛЬНО-ЧАСОВИЙ АНАЛІЗ НА ОСНОВІ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

3.1 Загальні відомості про вейвлет–перетворення

3.1.1 Ідея вейвлет-перетворення

На підставі поняття про векторний простір загальноприйнятим підходом до аналізу сигналів $s(t)$ стало їх представлення у вигляді зваженої суми простих складових – базисних функцій $\psi_k(t)$, помножених на коефіцієнти C_k :

$$s(t) = \sum_k C_k \psi_k(t). \quad (3.1)$$

Оскільки базисні функції $\psi_k(t)$ передбачаються заданими як функції цілком певного виду, тоді лише коефіцієнти C_k містять інформацію про конкретний сигнал. Таким чином, можна говорити про можливість представлення довільних сигналів на основі рядів з різними базисними функціями.

Наприклад, ряд Фур'є $s(t) = \sum_k C_k e^{jtk}$ використовує як базисну функцію синусоїди $e^{jtk} = \cos(tk) + j \sin(tk)$, $j = \sqrt{-1}$. Вони гранично локалізовані в частотній області і взагалі не локалізовані в часовій області.

Прямо протилежний приклад – ряд Шенона $s(t) = \sum_k C_k \delta_k(t)$, в якому використовується як базисна функція функція Кронекера $\delta_k(t) = \begin{cases} 1, & k = t \\ 0, & k \neq t \end{cases}$, яка добре локалізована в часі, але не несе ніякої інформації про частоту і тому погано пристосована для представлення сигналів, які повільно змінюються на заданому відрізку часу і, тим більше, періодичних сигналів.

В обох приведених випадках базисні функції мають принциповий недолік – вони не здатні адаптуватися до локальних змін сигналів.

Таким чином, виникла нагальна необхідність в створенні класу функцій, вільних від вказаних недоліків. Ними стали вейвлети.

3.1.2 Поняття про вейвлети. Визначення й ознаки вейвлета

Поняття про вейвлети.

Термін "вейвлет" (англ. wavelet) в перекладі з англійської мови означає "коротка або маленька хвиля" [10, 11]. Його використання ввів сейсмолог Морле, тому що подібні хвилі поширюються в об'ємі Землі при

тектонічних процесах. Термін "вейвлет" вдалих через віддзеркалення ним суті процесу, оскільки більшість вейвлетів мають часові залежності з яскраво вираженою коливальною компонентою, як в хвилях. Вейвлети займають проміжне положення між наведеними вище базисними функціями – синусоїдою і функцією Кронекера.

Досить грубо можна представити вейвлети як деякі хвильові функції, здатні здійснювати перетворення Фур'є не по всій часовій осі, а локально по місцю свого розташування. Для цього, природно, окрім зміни "середньої частоти" вейвлети повинні переміщатися до того місця сигналу або функції, в якому повинне здійснюватися "локальне перетворення Фур'є" і масштабуватися. Така інтерпретація вейвлетів дуже спрощена і дає про них тільки найгрубіше представлення, яке часом навіть принципово помилкове через те, що переважна більшість вейвлетів не є модульованою по амплітуді синусоїдальною хвилею і властивості вейвлетів принципово і сильно відрізняються від властивостей синусоїди.

Базисними функціями вейвлетів можуть бути різні функції, у тому числі ті, що нагадують модульовані синусоїди, функції зі скачками рівня і так далі. Це забезпечує різне уявлення сигналів з локальними скачками і розривами наборами вейвлетів того або іншого типу і відкриває простір в підборі найбільш відповідних вейвлетів, виходячи з умов вирішуваних завдань.

Слід зазначити, що майже всі вейвлети не мають аналітичного уявлення у вигляді однієї формули, але можуть задаватися ітераційними виразами, які легко обчислюються.

Вейвлети характеризуються своїм часовим і частотним образами. Часовий образ визначається функцією часу $\psi(t)$. А частотний вигляд визначається її Фур'є-образом $\Psi(\omega) = F(\omega)$, який задає оригінальну спектра вейвлета. При цьому Фур'є-образ визначається виразом $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt$.

З цього виразу видно, що неможлива достатня локалізація вейвлетів одночасно в часовій області і в частотній області. Але було б помилкою вважати цю властивість недоліком. Порівняно з віконним перетворенням Фур'є саме хороша часова локалізація вейвлетів дає засіб для підвищення частоти тих спектральних складових вейвлетів, які потрібні для уявлення локальних короткострокових особливостей сигналу.

Визначення вейвлета.

Будь-яка локалізована \mathbf{R} -функція $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ називається \mathbf{R} -вейвлетом або просто вейвлетом, якщо для неї існує функція $\psi^* \in L^2(\mathbf{R})$ (її пара, двійник) така, що сімейства $\{\psi_{ik}\}$ і $\{\psi_{ik}^*\}$, побудовані відповідно до $\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j}t - k)$ і $\psi_{j,k}^*(t) = a_0^{-j/2} \psi^*(a_0^{-j}t - k)$, є парними базисами функціонального простору $L^2(\mathbf{R})$.

Кожен, визначений таким чином, вейвлет ψ , незалежно від того, ортогональний він або ні, дозволяє будь-яку функцію $f \in L^2(\mathbf{R})$ представити у вигляді ряду

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t), \quad (3.2)$$

коефіцієнти якого визначаються інтегральним вейвлет-перетвореннями f відносно ψ^* .

Вейвлет-двійник ψ^* – єдиний і сам є \mathbf{R} -вейвлетом. Пара (ψ, ψ^*) симетрична в тому сенсі, якщо ψ у свою чергу є двійником для ψ^* .

Якщо \mathbf{R} -вейвлет ψ має властивість ортогональності, тоді $\psi^* \equiv \psi$, і $\{\psi_{ik}\} \equiv \{\psi_{ik}^*\}$ – ортогональний базис.

Для багатьох практичних цілей достатньо, щоб вейвлет ψ мав властивість напівортогональності, тобто щоб його базис Рісса $\{\psi_{ik}\}$ задовольняв умові $\langle \psi_{ik}, \psi_{lm} \rangle = 0$ при $j, k, l, m \in I$.

\mathbf{R} -вейвлет називається неортогональним, якщо він не є напівортогональним вейвлетом. Проте, будучи \mathbf{R} -вейвлетом, він має двійника, і пара (ψ, ψ^*) дає можливість сформувати сімейства $\{\psi_{ik}\}$ і $\{\psi_{ik}^*\}$, що задовольняють умову біортогональності $\langle \psi_{ik}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{il} \delta_{km}$, $j, k, l, m \in I$ і що дозволяють побудувати повноцінний ряд по вейвлетах і реконструктивну формулу.

З необхідністю мати зворотне вейвлет-перетворення (чи реконструктивну формулу) пов'язана більшість обмежень, що накладаються на вейвлет.

Ознаки вейвлета.

1) *Локалізація.* Вейвлет-перетворення на відміну від перетворення Фур'є використовує локалізовану базисну функцію. Вейвлет має бути локалізований і в часовому просторі, і по частоті.

2) *Нульове середнє.* $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$. Часто необхідно, щоб не лише нульовий, але і усі перші m моментів дорівнювали нулю $\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0$.

Такий вейвлет називається вейвлетом m -го порядку. Вейвлети, які мають велике число нульових моментів, дозволяють, ігноруючи найбільш регулярні поліноміальні складові сигналу, аналізувати дрібномасштабні флуктуації і особливості високого порядку.

3) *Обмеженість.* $\int |\psi(t)|^2 dt < \infty$. Оцінку доброї локалізації і обмеженості можна записати у вигляді $|\psi(t)| < (1 + |t|^n)^{-1}$ або $|\hat{\psi}(\omega)| < (1 + |\kappa - \omega_0|^n)^{-1}$, тут ω_0 – домінантна частота вейвлета, число n має бути якомога більшим.

4) *Автомодельність базису.* Характерною ознакою базису вейвлет-перетворення є його самоподібність. Всі вейвлети цього сімейства $\psi_{ab}(t)$ мають однакове число осциляцій з базисним вейвлетом $\psi(t)$,

оскільки отримані з нього за допомогою масштабних перетворень і зсувів. Завдяки цьому вейвлет-перетворення з успіхом застосовується для аналізу фрактальних сигналів.

3.1.3 Пряме і зворотне безперервне вейвлет-перетворення

Пряме безперервне вейвлет-перетворення (ПБВП) [12] – означає розкладання (декомпозицію) довільного вхідного сигналу за базисом у вигляді сукупності хвилевих пакетів – вейвлетів, які характеризуються чотирма основними властивостями:

- мають вигляд коротких, локалізованих в часі або в просторі хвилевих пакетів з нульовим значенням інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$;
- мають можливість зсуву в часі;
- здатні до масштабування, тобто до стискання і розтягування;
- мають обмежений або локальний частотний спектр.

Якщо базис ортогональний, тоді аналіз істотно полегшується, з'являється можливість відновлення (реконструкції) сигналу і реалізації алгоритмів швидких вейвлет-перетворень.

Але існують і не ортогональні вейвлети (майже базисні вейвлети), які, проте, корисні в задачах аналізу і виявлення локальних особливостей сигналів і функцій.

Образно кажучи, при ПБВП сигнал представляється сукупністю хвилевих пакетів – вейвлетів, утворених на основі деякої початкової (базової, утворюючої) функції $\psi_0(t)$. Ця сукупність, різна в різних частинах часового інтервалу визначення сигналу і коригована множниками, що мають вигляд складних часових функцій, і представляє сигнал з тією або іншою мірою деталізації.

Число використовуваних при розкладанні сигналу вейвлетів задає рівень розкладання або рівень декомпозиції сигналу. За нульовий (вищий) рівень береться сам сигнал, а наступні рівні розкладання утворюють дерево розкладання (декомпозиції) або вейвлет-дерево. Точність представлення сигналу в міру переходу на нижчі рівні розкладання знижується, але з'являється можливість вейвлет-фільтрації сигналів, усунення шумів з суміші сигнал+шум, стискування (компресії) сигналів, тобто стає можливою їх вейвлет-обробка.

Також однією із засадничих ідей вейвлет-представлення сигналів є розбиття наближення до сигналу на дві складові – груба або апроксимована і уточнена або деталізована – з наступним уточненням цих складових ітераційним методом. Кожен крок такого уточнення відповідає певному рівню декомпозиції (розкладання) або реставрації (відновлення) сигналу. Ці операції можливі як в часовій, так і в частотній області представлення сигналів вейвлетами.

Також в основі ПБВП лежить використання двох безперервних і інтегрованих по всій осі t (або x) функцій:

- вейвлет-функція $\psi(t)$ з нульовим значенням інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$, що визначає деталі сигналу і що породжує детальні коефіцієнти;
- масштабувальна (апроксимовна) або скейлінг-функція $\varphi(t)$ з одиничним значенням інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$, визначає грубе наближення сигналу і породжує апроксимовні коефіцієнти.

Апроксимовні функції $\varphi(t)$ властиві не всім вейвлетам, а лише ортогональним.

Функції $\psi(t)$ створюються на основі тієї або іншої базисної функції $\psi_0(t)$, яка, як і $\psi(t)$, визначає тип вейвлета. Базисна функція $\psi_0(t)$ повинна задовольняти всім тим вимогам, які відносяться до $\psi(t)$, а саме:

- зміщення по осі часу $t - \psi_0(t - b)$ при $b \in \mathbf{R}$;
- масштабування $-\frac{1}{\sqrt{a}} \psi_0\left(\frac{t}{a}\right)$ при $a > 0$ и $a \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$.

Параметр a задає ширину функції, а параметр b – його положення на осі t .

Ці властивості відбиваються при наступному записі функції $\psi(t)$

$$\psi(t) \equiv \psi(a, b, t) = a^{-1/2} \psi_0\left(\frac{t - b}{a}\right). \quad (3.3)$$

Для заданих a і b функція $\psi(t)$ і є вейвлет. Вейвлети, які означають подібним чином, називають ще батьківськими або материнськими вейвлетами, оскільки вони породжують цілий ряд вейвлетів певного роду.

Вейвлети є дійсними функціями часу t і коливаються навколо осі t (або осі x , якщо вейвлети – функції простору). Параметр b задає положення вейвлетів, а параметр a – його масштаб. Коефіцієнт $a^{-1/2}$ забезпечує нормування енергії при зміні масштабу.

Стосовно до сигналів, як до функцій часу, параметр $b \in \mathbf{R}$ задає положення вейвлета на осі часу, а параметр a – задає його масштабування по осі часу. Оскільки параметр масштабу a реально може бути лише позитивним і його не можна брати рівним 0, тоді і вважається, що $a \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, а на практиці $-\{0\}$ опускаються і не пишуть.

У частотній області малі значення a відповідають високим частотам, а великі – низьким частотам. Таким чином, операція завдання вікна, використовувана у віконному перетворенні Фур'є, закладена в самій базисній функції вейвлетів, а це і створює передумови їх застосування до сигналів, які можуть бути представлені сукупністю вейвлетів.

Нехай енергія сигналу $s(t)$ дорівнює $\int_R s^2(t) dt$ і вона $< \infty$.

Пряме безперервне вейвлет-перетворення сигналу $s(t)$ задається за

формальною аналогією з перетворенням Фур'є, відповідно до приведеної раніше ідеї вейвлет-перетворення, шляхом обчислення вейвлет-коефіцієнтів за формулою

$$C(a, b) = \langle s(t), \psi(a, b, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (3.4)$$

З врахуванням обмеженої області визначення сигналів і $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$

$$C(a, b) = \int_{\mathbf{R}} s(t) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (3.5)$$

Таким чином, вейвлет-коефіцієнти визначаються інтегральним значенням скалярного добутку сигналу на вейвлет-функцію заданого вигляду, а ПБВП можна розглядати як розкладання сигналу $s(t)$ по всіх можливих зсувах і по розтягуваннях (стисканнях) сигналу $s(t)$ або якої небудь довільної функції. При цьому параметри a і b можуть набувати будь-яких значень в межах областей їх визначення.

Слід зазначити декілька важливих обставин.

Практично неможливо вести обчислення з безперервними вейвлетами. На практиці доводиться задавати дискретні значення a і b .

Безперервне вейвлет-перетворення має велику надмірність, що веде до невиправдано великих витрат машинного часу. Але, крім того, надмірність ще може бути і небезпечна при аналізі результатів вейвлет-перетворення. При відображенні спектрограм штатними засобами систем комп'ютерної математики локальні особливості сигналу можуть відображатися по-різному. Це може призвести до помилкової інтерпретації рентгенівських або томографічних знімків, до помилок геологорозвідки і тому подібне.

Зворотне безперервне вейвлет-перетворення (ЗБВП) – здійснюється за формулою реконструкції в часовій області, яка має цілий ряд форм, залежних від математичного стилю запису і від визначення областей існування сигналу.

Один з варіантів:

$$f = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dad b}{a^2} \langle f, \psi^{a,b} \rangle \psi^{a,b}, \quad (3.6)$$

де $\psi^{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ і $C_{\psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi |\psi(\xi)|^2 |\xi|^{-1} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|^{-1}} d\omega$.

Тут дещо незвичний запис інтеграла і параметрів масштабу і зсуву. Параметри зсуву і стискання (розтягування) змінюються безперервно вздовж \mathbf{R} з обмеженням $a \neq 0$. Вважається, що $C_{\psi} < \infty$, оскільки в іншому

виразі для f не має сенсу.

Якщо Ψ є дійсною функцією, тоді справедливий такий вираз:

$$C_{\Psi} = 2\pi \int_0^{\infty} d\xi |\hat{\Psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} = 2\pi \int_{-\infty}^0 d\xi |\hat{\Psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} < \infty. \quad (3.7)$$

В цьому випадку:

$$f = C_{\Psi}^{-1} \int_0^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db \langle f, \Psi^{a,b} \rangle \Psi^{a,b}. \quad (3.8)$$

Існують й інші варіанти запису ЗБВП. Практичний інтерес мають лише ті формули реконструкції, які реально використовуються в системах комп'ютерної математики при прямому і зворотному безперервному вейвлет-перетворенні. Наприклад:

$$s(t) = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_{R^+ - \{0\}} \int_R C(a,b) a^{-1/2} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2}. \quad (3.9)$$

В теорії вейвлет-перетворень строго доведено, що не всі вейвлети є ортогональними, тому за допомогою перетворень не завжди вдається відновити будь-який сигнал в цілому. Проте також доведено, що довільний сигнал з відмінним від нуля інтегральним значенням може відновлюватись за допомогою вейвлетів з нульовим інтегральним значенням, якщо вираз для C_{Ψ} належить з деякими обмеженнями до норми $L^1(\mathbf{R})$.

Логічно допустити, що вейвлет-перетворення лише на основі деталізуючої ортогональної вейвлет-функції $\psi(t)$ здатно відновити, принаймні, тонкі деталі часової залежності сигналу $s(t)$. Для відновлення повної форми сигналу необхідно вдаватися до допомоги ще однієї часової функції – апроксимуючої $\varphi(t)$. детальніше це буде розглянуто в кратномасштабному аналізі.

Вейвлети, які допускають розкладання сигналу і забезпечують його повну реконструкцію, є ортогональними вейвлетами. Вони є найбільш важливим типом вейвлетів, здатних повноцінно наближати довільні функції і сигнали.

Проте не всі типи вейвлетів гарантують точну реконструкцію сигналів в цілому або навіть реконструкцію взагалі. Проте, застосування і таких вейвлетів може бути корисним для виявлення тонких особливостей сигналів або зображень, які добре погоджуються з певними типами вейвлетів.

3.1.4 Дискретне вейвлет-перетворення

Діадне вейвлет-перетворення безперервних сигналів. Безперервне вейвлет-перетворення потребує великих обчислювальних витрат. Тому для практичного його застосування потрібна дискретизація значень a і b . Щоб уникнути надмірності вейвлет-перетворення можна задавати дискретні значення a і b на деякій множині $Z = \{\dots - 1, 0, 1, 2, \dots\}$ дорівнюють $a = 2^j$ і $b = k \cdot 2^j$, де J і k - цілі числа. Можливі і інші способи завдання дискретних значень a і b . Параметр J , що іноді означає як m , називається параметром масштабу.

Описана дискретизація є найбільш поширеною, а сітка дискретизації називається діадичною. Відповідно і це перетворення заведено називати діадним вейвлет-перетворення [12].

Важливою особливістю діадного вейвлет-перетворення є виключення перекриття носіїв вейвлетів, тобто усунення надмірності в ході вейвлет-перетворення.

Виділення діадного вейвлет-перетворення в окремий клас виправдане ще і тим, що і безперервне вейвлет-перетворення на практиці використовується в тому або іншому дискретному варіанті, але при цьому не накладається особливих обмежень на характер дискретизації параметрів a і b . Дискретизація може бути і іншою, наприклад, часто використовується рівномірний ряд значень a і b .

На відміну від дискретного вейвлет-перетворення безперервних сигналів, що має велику надмірність, діадне перетворення такої надмірності не має. Це означає, що компактні носії вейвлетів щільно укладаються на осі t (чи осі x), не перекриваючись.

Таким чином, при дискретних значеннях a і b вейвлет-функція може бути представлена у вигляді:

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - k). \quad (3.10)$$

Умова, що множина $\{\psi_{j,k}\}_{j,k} \in Z$ утворює ортонормовану систему, означає, що будь-яка функція $f \in L^2(\mathbf{R})$ може бути представлена поруч:

$$f = \sum_{j,k \in Z} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (3.11)$$

і цей вираз можна розглядати як накладення вейвлетів $\psi_{j,k}$, що створює функцію f .

Зовні останній вираз нагадує розкладання в ряд Фур'є для функції $f \in L^2(\mathbf{R})$ по експоненціальних функціях. Але експоненціальна функція має глобальний носій, і всі члени розкладання Фур'є залежать від значення f в точці x .

Вейвлети мають компактний носій або експоненціальний порядок убуття на нескінченності, і лише члени цього розкладання, відповідають

$\psi_{j,k}$ з $j=2^{-k}$ біля точки x , вносять найбільший вклад у функцію в цій межі. Тому останнє розкладання локальне.

Таким чином, *пряме дискретне вейвлет-перетворення* (ПДВП) зводиться до вже відомого обчислення коефіцієнтів $C(a,b)$

$$C(a,b) = \int_R s(t) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.12)$$

з підстановкою дискретних значень a і b .

І тоді остаточно:

$$C(j,k) = d_{j,k} = \int_R s(t) a^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - k) dt, \quad (3.13)$$

де $C(j,k) = d_{j,k}$ - деталізуючі коефіцієнти для вейвлет-декомпозиції сигналу рівня k , причому коефіцієнти дискретні, тобто обчислюються для заданих j і k .

Зворотнє дискретне вейвлет-перетворення (ЗДВП) для безперервних сигналів задається формулою

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} C(j,k) a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - k). \quad (3.14)$$

При нормуванні базових функцій в частотній області домагаються того, що $C_\psi = 1$. Тоді остаточно формула реконструкції сигналу набере вигляду:

$$s(t) = \sum_{j \in Z} \sum_{k \in Z} C(j,k) \psi_{j,k}(t). \quad (3.15)$$

Відомо, що для ортогональних вейвлетів можливе точне відновлення сигналу після прямого і зворотного дискретного вейвлет-перетворення з використанням додаткової апроксимації сигналу за допомогою Φ функції. В іншому випадку відновлення дає близький до початкового сигналу $s(t)$ наближений сигнал, причому близькість розуміється в сенсі забезпечення мінімуму середньоквадратичної погрішності відновлення.

В результаті видно, що діадне вейвлет-перетворення має ієрархічну структуру у вигляді дерева. При фіксованому індексі відрізнення J вейвлети мають однакові масштаби і лише дискретно зсовуються в часі. При збільшенні відрізнення на 1 величина зсуву зменшується вдвічі, і вейвлети стискаються.

Діадне вейвлет-перетворення часто називають дискретним. Але подібне формулювання не зовсім коректне. Правильніше говорити про діадне перетворення як про різновид безперервного вейвлет-перетворення,

що дозволяє усунути надмірність останнього. Хоча термін дискретного вейвлет-перетворення застосовують дуже часто.

Варто згадати ще один особливий тип вейвлетів - *фрейми*. Вейвлет-фрейми використовують кратне двом масштабування, але безперервну зсуви. Таким чином, вони зберігають надмірність властиву безперервному перетворенню, але в набагато меншій мірі, чим при цьому перетворенні. Тобто вейвлет-фрейми займають проміжне положення між діадним і безперервним вейвлет-перетвореннями. Але слід зазначити, що в системах комп'ютерної математики вони застосовування не знайшли.

3.1.5 Кратномасштабний аналіз і синтез

На підставі викладеного вище тепер зрозуміло, що можливе представлення сигналу на основі підсумовування його грубого представлення з деталізуючими представленнями в його різних місцях [12]. Для цього є ортогональні вейвлети. Їх можна створити, ґрунтуючись на представленні простору сигналів V у вигляді вкладених підпросторів V_j , що відрізняються один від одного лише перемасштабуванням незалежної змінної. Заснований на цьому аналіз і називають кратномасштабним або багатомасштабним аналізом.

Він базується на наступних початкових передумовах:

- простір сигналів V може бути розбитий на ієрархічно вкладені підпростори V_j , які не перетинаються і об'єднання яких в межі дає $L^2(\mathbf{R})$;
- для будь-якої функції $s(t) \in V_j$ її стисла версія належить простору V_{j-1} ;
- існує така функція $\varphi(x) \in V_0$, для якої її зсув $\varphi_{0,j}(t) = \varphi(t - k)$ при $k \in Z$ утворюють ортонормований базис простору V_0 .

Так як функції $\varphi_{0,k}(t)$ утворюють ортонормований базис простору V_0 , тоді функції $\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}t - k)$ утворюють ортонормований базис простору V_j .

Таким чином, функції $\varphi_{j,k}$ називаються такими, що масштабують, саме тому, що вони створюють свої масштабовані версії в просторі сигналу. Їх ще називають батьківськими або материнськими вейвлетами. При цьому сигнал $s(t)$ може бути представлений безліччю послідовних наближень $s_j(t)$ в підпросторах V_j . Тому j і називається масштабним коефіцієнтом і завжди можна сказати, що сигнал $s(t)$ є межа апроксимації $s_j(t) \in V_j$ при $j \rightarrow -\infty$, тобто $s(t) = \lim_{j \rightarrow -\infty} s_j(t)$. Відповідно до цього при великих j виходять грубі наближення сигналу, а при малих – точні. Наближення сигналу відповідає ітераційній формулі

$$s(t) = \sum_j C(j, k) \varphi_{j,k}(t), \quad (3.16)$$

при цьому $\varphi_{0,0}(t) = 2 \sum_k h_k \varphi(2t - k)$, де h_k – деяка послідовність.

У результаті сума наближеної і деталізуючої компонент дає початковий сигнал з тим або іншим наближенням. Як початкове значення часто беруть $j=0$, але можна починати ітераційний процес наближення і з інших значень J .

Як приклад можна привести передачу зображення, коли спочатку передається грубий образ зображення у вигляді функції $\varphi(t)$, а потім воно уточнюється за допомогою вейвлет-коефіцієнтів і набирає звичного вигляду. Причому процес уточнення завжди можна зупинити, якщо, наприклад, досягнута максимальна роздільна здатність пристрою відображення і більше немає необхідності в уточненні зображення або похибка перетворення досягла рівня похибки машинних розрахунків.

Таким чином, в загальному випадку реконструкція сигналу на n -му рівні відрізнення J_n задається виразом:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n, k} \varphi_{j_n, k}(t) + \sum_{j=J_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j, k} \psi_k(t), \quad (3.17)$$

де a – коефіцієнти апроксимації, d – коефіцієнти деталізації.

З теорії кратномасштабного аналізу відомо, що в ході прямого і зворотного діадного вейвлет-перетворення можливе повне відновлення сигналу, якщо для цілих k існують такі коефіцієнти $\{h_k\}$, які задовольняють рішення рівняння масштабування або рівняння уточнення

$$\varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(t - k).$$

3.1.6 Представлення результатів вейвлет-перетворення

Одновимірне перетворення Фур'є дає також одновимірну інформацію про відносний вклад (амплітуди) різних часових масштабів (частот). Результатом вейвлет-перетворення одновимірного ряду є двовимірний масив амплітуд вейвлет-перетворення – значень коефіцієнтів $W(a, b)$ [13]. При аналізі комплексного одновимірного сигналу або при використанні комплексного аналізуючого вейвлета в результаті вейвлет-перетворення виходять двовимірні масиви значень модуля коефіцієнтів і фази

$$W(a, b) = |W(a, b)| \exp[i\Phi(a, b)], \quad (3.18)$$

тобто два двовимірні масиви – для модуля і фази.

Розподіл цих значень в просторі (a, b) (часовий масштаб, часова

локалізація) дає інформацію про еволюцію відносного вкладу компонент різного масштабу в часі і називається спектром коефіцієнтів вейвлет-перетворення, (частотно-часовим) масштабно-часовим спектром або вейвлет-спектром (time-scale spectrum, або wavelet spectrum на відміну від signal spectrum перетворення Фур'є).

Спектр $W(a,b)$ одновимірного сигналу є поверхнею в тривимірному просторі. Способи візуалізації цієї інформації можуть бути різними. Замість зображення поверхонь часто представляють їх проекції на площину ab з ізолініями або ізорівнями, що дозволяють простежити зміну інтенсивності амплітуд вейвлет-перетворення на різних масштабах і в часі, а також картини ліній локальних екстремумів цих поверхонь (skeleton), що чітко виявляють структуру аналізованого процесу. Термін "скелет" або "скелетон" добре відображає характер картин ліній локальних екстремумів.

У випадках, коли необхідно показати дуже широкий діапазон масштабів, візуалізація результатів в логарифмічних координатах ($\log a, b$) прийнятніша, ніж в лінійних координатах.

У системах комп'ютерної математики значного поширення набуло відображення вейвлет-спектрів з колірним розфарбовуванням. Чистому гармонійному сигналу з частотою 50 Гц відповідають яскраві смуги, де модуль деякого коефіцієнта великий (рис. 3.1). Локальним особливостям нерівних сигналів (наприклад, стикованим послідовно в часі синусоїдам), відповідають смуги, що виходять з точки, де знаходиться особливість (рис. 3.2).

Пікам сигналів відповідає згущування світлих областей вейвлет-спектрограм, а западинам – згущування темних областей.

Чим різкіше виражена особливість сигналу, тим сильніше вона виділяється на спектрограмі і тим вище рівень вейвлет-коефіцієнтів. Вейвлет-спектрограми виразно виділяють такі особливості сигналу, як невеликі розриви, зміни знаків першої і другої похідних, зміна частоти складових сигналу в часі і так далі. Це саме ті особливості сигналу, які погано виділяються на Фур'є-спектрі.

Відмінності між Фур'є- і вейвлет-спектрограммами носять принциповий характер. Фур'є-спектрограми зручні для виявлення періодичної стаціонарної компоненти сигналу. Якщо такою компонентою є гармонійний сигнал, то для його представлення достатня всього одна гармоніка ряду Фур'є.

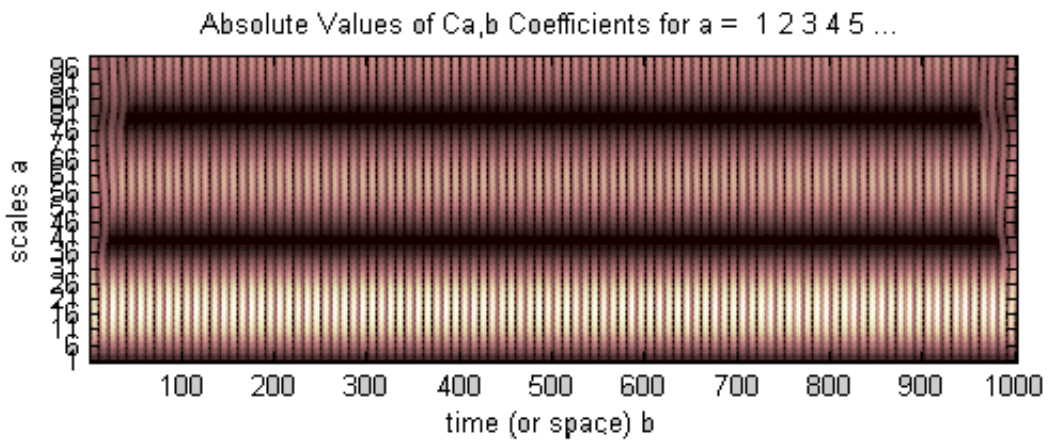
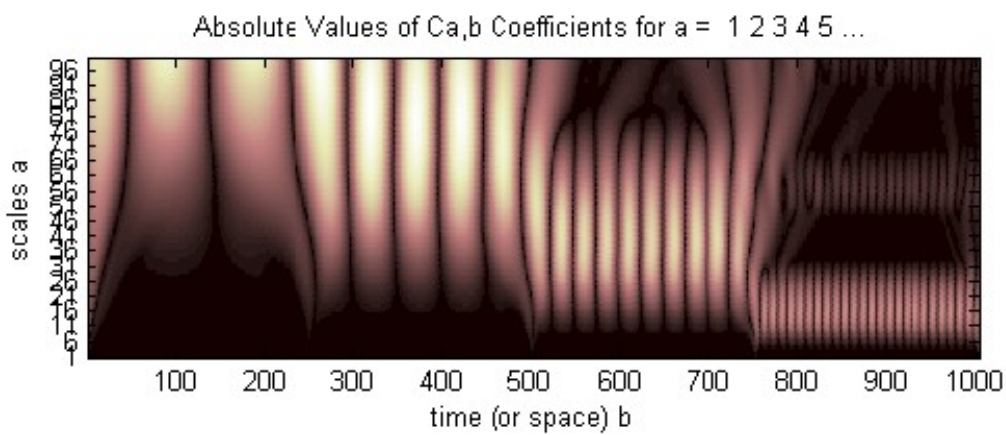
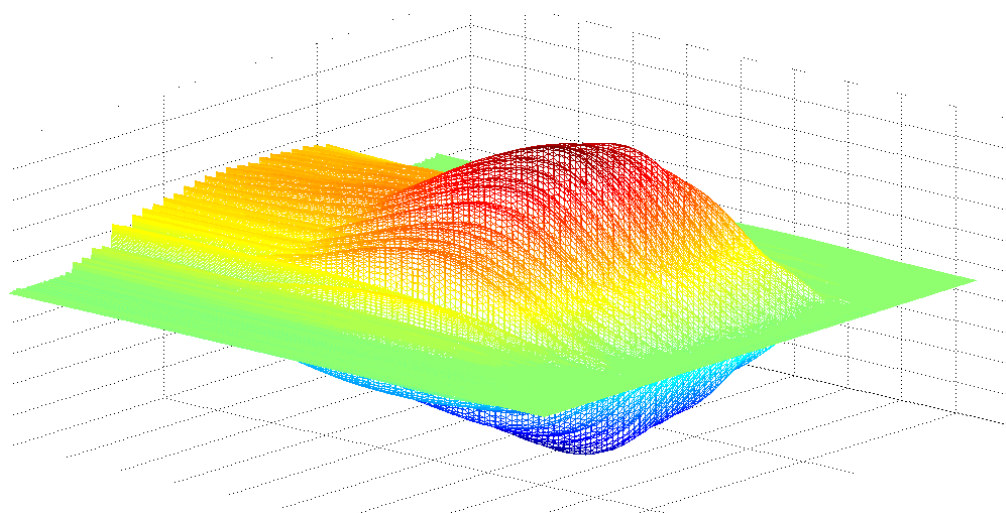


Рис. 3.1 – Вейвлет-спектр гармонійного сигналу



а)



б)

Рис. 3.2 – Вейвлет-спектри сигналів з особливістю:
 а) послідовно стиковані в часі синусоїди з частотами 5, 10, 20 і 50 Гц,
 б) вейвлет-спектр звуку А одного з авторів

При вейвлет-аналізі навіть гармонійного сигналу доведеться використовувати безліч вейвлетів, що перекривають всю вісь часу. Це може здатися невиправданим ускладненням для даного часткового випадку, коли сигнал – проста синусоїда. Але якщо сигнал має локальні особливості, якщо він не періодичний і не стаціонарний, тоді вейвлет-аналіз стає саме тим інструментом для його дослідження, до якого класичний Фур'є-аналіз не пристосований. Великі рівні вейвлет-коефіцієнтів характерні лише для області, розташованої поблизу тієї або іншої локальної особливості функції або сигналу. Це дозволяє легко визначати місце розташування локальних особливостей, що практично неможливе при Фур'є-спектральному аналізі, тобто вейвлет-спектрограми дають уявлення про досліджуваний процес в амплітудно-часовій області.

3.2 Властивості вейвлет-перетворення

Коефіцієнти вейвлет-перетворення містять комбіновану інформацію про аналізуючий вейвлет і аналізований сигнал [11]. Незважаючи на це, вейвлет-аналіз дозволяє одержати і об'єктивну інформацію про аналізований сигнал, оскільки деякі властивості вейвлет-перетворення не залежать від вибору аналізуючого вейвлета. Незалежність від аналізатора робить ці прості властивості перетворення дуже важливими.

Основними елементарними властивостями вейвлет-перетворення функції $f(t)$ є: (при цьому використовуватимемо позначення $W[f] = W(a, b)$).

Лінійність.

$$W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha W[f_1] + \beta W[f_2] = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b). \quad (3.19)$$

Звідси, зокрема, витікає, що вейвлет-перетворення векторної функції є вектор з компонентами, які являють собою вейвлет-перетворення кожної з компонент аналізованого вектора окремо.

Інваріантність відносно зрушення.

$$W[f(t - b_0)] = W(a, b - b_0). \quad (3.20)$$

З цієї властивості виходить комутативність дифференціювання, зокрема $\partial_t W[f] = W[\partial_t f]$ (тут $\partial_t = \partial/\partial t$). Разом з першою властивістю це означає переставлюваність і для похідних векторного аналізу.

Інваріантність відносно розтягування (стискування).

$$W\left[f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right] = \frac{1}{a_0} W\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right). \quad (3.21)$$

Ця властивість дозволяє, зокрема, визначати наявність і характер особливостей аналізованої функції.

Окрім трьох описаних, не залежних від вибору аналізуючого вейвлета, елементарних властивостей вейлет-перетворення має ще декілька важливих і корисних властивостей.

Диференціювання.

$$W[\partial_t^m f] = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \partial_t^m [\psi_{ab}^*(t)] dt. \quad (3.22)$$

Так, щоб проігнорувати, наприклад, великомасштабні поліноміальні складові і проаналізувати особливості високого порядку або дрібномасштабні варіації функції f , всеодно, чи диференціювати потрібне число разів аналізуючий вейлет або саму функцію. Це дуже корисна властивість, якщо врахувати, що часто функція f є рядом чисел, а аналізуючий вейлет заданий формулою.

Для вейлет-перетворення існує аналог теореми Парсеваля і виконується рівність

$$\int f_1(t) f_2^*(t) dt = C_{\psi}^{-1} \iint W_1(a, b) W_2^*(a, b) \frac{dadb}{a^2}, \quad (3.23)$$

звідки витікає, що енергія сигналу може бути обчислена через амплітуди (коефіцієнти) вейлет-перетворення подібно до того, як вона обчислюється через значення коефіцієнтів перетворення Фур'є:

$$E_f = \int f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int |A(\omega) - jB(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.24)$$

Частотно-часова локалізація. Правильніше було б говорити про масштабно-часову локалізацію. Перетворення Фур'є і ряди Фур'є є прекрасним математичним апаратом для фізичної інтерпретації процесів при аналізі сигналів, що характеризують їх. Проте іноді вони виявляються недостатньо ефективними. Так, щоб отримати спектральну інформацію на обраній частоті, необхідно мати і минулу, і майбутню часову інформацію; до того ж перетворення Фур'є не враховує, що частота може еволюціонувати з часом. Воно, наприклад, не відрізняє сигнал, що є сумою двох синусоїд з різними частотами, від сигналу, що складається з тих же синусоїд, що включаються послідовно одна за одною.

Для отримання високочастотної інформації з доброю точністю важливо витягати її з відносно малих часових інтервалів, а не з усього сигналу; і навпаки – низькочастотну спектральну інформацію витягати з відносно широких часових інтервалів сигналу.

Частина описаних труднощів знімається при використанні віконного перетворення Фур'є, описаного вище. Проте нескінченно осцилююча базисна функція (синусоїда) не дозволяє отримувати по-справжньому локалізовану інформацію.

Елементом базису вейвлет-перетворення є добре локалізована функція, що швидко прагне до нуля поза невеликим інтервалом, що дозволяє провести "локалізований спектральний аналіз". Іншими словами, вейвлет-перетворення автоматично має рухоме частотно-часове вікно, вузьке на малих масштабах і широке на великих масштабах.

Розглянемо параметри частотно-часового вікна вейвлет-перетворення.

Введемо функцію $\eta(\omega) = \varphi(\omega + \langle \omega \rangle)$. Вона є віконною функцією з центром в нулі і радіусом $\Delta\varphi$. Скориставшись рівністю $\langle f, g \rangle = \hat{f} \cdot \hat{g} / (2\pi)$, можна записати вейвлет-перетворення для Фур'є-виду \hat{f} у вигляді

$$W(a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{jb\omega} \eta^* \left(a \left[\omega - \frac{\langle \omega \rangle}{a} \right] \right) d\omega. \quad (3.25)$$

Якщо абстрагуватися від фазового зсуву, тоді стане очевидним, що останнє перетворення дає і про спектр $\hat{f}(\omega)$ сигналу $f(t)$ локалізовану інформацію з "частотним вікном"

$$[win_{\omega}] = \left[\frac{\langle \omega \rangle}{a} - \frac{1}{a} \Delta\varphi, \frac{\langle \omega \rangle}{a} + \frac{1}{a} \Delta\varphi \right]. \quad (3.26)$$

Частотна локалізація відбувається біля центру вікна в $\langle \omega \rangle / a$ з шириною вікна, яка дорівнює $2\Delta\varphi / a$.

Помітимо, що відношення центральної частоти до ширини вікна, $\frac{\langle \omega \rangle}{a} \left(\frac{2\Delta\varphi}{a} \right)^{-1} = \frac{\langle \omega \rangle}{2\Delta\varphi}$ не залежить від місця розташування центральної частоти, а частотно-часове вікно $[win_t] \cdot [win_{\omega}]$, що має площу $4\Delta\varphi\Delta\varphi$, звужується при високій центральній частоті $\langle \omega \rangle / a$ і розширюється при низькій (рис.3.3, а).

Для порівняння на рис. 3.3 показана локалізація в частотно-часовому просторі перетворень з іншими аналізуючими функціями: перетворення Фур'є (рис. 3.3, б) і перетворення Шенона, аналізуючою функцією якого є функція Кронекера (рис. 3.3, в).

З рис. 3.3 видно, що перетворення Фур'є добре локалізує частоту, але без часового відрізнення; перетворення Шенона не має частотної локалізації при відмінній часовій; вейвлет-перетворення має рухоме вікно, яке локалізоване біля обраного моменту часу і розширюється зі зростанням масштабу, що і є найбільш бажаним при отриманні спектральної інформації. Визначається це тим, що базисними функціями перерахованих

вище перетворень є відповідно синусоїдальна хвиля, яка локалізує лише частоту, функція Кронекера, яка локалізує лише момент часу і вейвлет, який досить добре локалізує і масштаб, і момент часу. Вейвлет-перетворення є як би безперервним банком віконних перетворень Фур'є з різними вікнами для кожної частоти.

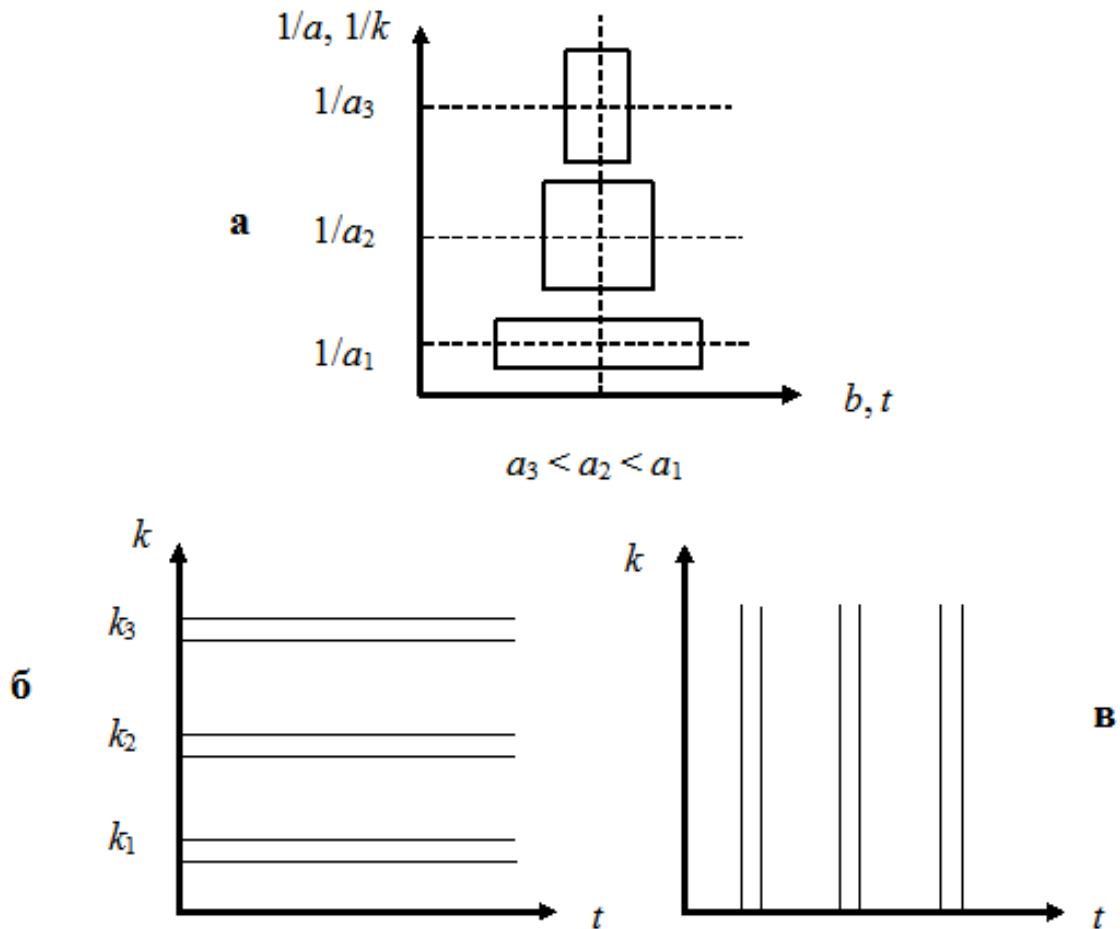


Рис. 3.3 – Частотно-часова локалізація перетворень з різними аналізаторами:

а – вейвлети; б – синусоїди; в – функції Кронекера

Ця властивість вейвлет-перетворення дає йому велику перевагу при аналізі сигналів, оскільки швидкі варіації сигналів (високочастотні характеристики) добре локалізовані, а для виявлення повільно змінюваних характеристик достатньо доброго низькочастотного відрізнення. Вейвлет-перетворення, що має рухоме частотно-часове вікно, однаково добре виявляє і низькочастотні, і високочастотні характеристики сигналів.

Наявність кута впливу або достовірності. Можна відмітити, що значення аналізованої функції в точці t_0 впливає на значення коефіцієнтів перетворення в зростаючих з масштабом часових діапазонах в так званому

куті впливу (рис. 3.4, а). Кут впливу виглядає інакше, якщо масштаб змінюється не лінійно, а за іншим законом (логарифмічному, степеневому).

У свою чергу, коефіцієнт $W(a,b)$ в точці (a_0, b_0) залежить від значень частини ряду з визначаємого тим же кутом впливу часового діапазону (діапазону інтегрування) біля b_0 (рис. 3.4, б), і діапазон цей тим більше, чим більший масштаб a_0 , тобто високочастотна (чи дрібномасштабна) інформація обчислюється на основі малих відрізків ряду, а низькочастотна – на основі великих.

Максимальний кут впливу (кут достовірності) відмічає область достовірності – область, поза якою коефіцієнти $W(a,b)$ обчислюються вже по відрізках, що виходять за межі ряду (за доповненим рядом). Оскільки аналізований ряд завжди скінченний, і необхідно отримати максимум інформації, яка надійшла поза максимальним кутом впливу (з деякою помилкою) наближені значення коефіцієнтів часто зберігаються. Для зменшення помилки ряд доповнюється з урахуванням його поведінки (середнім значенням, відомим часовим ходом і так далі).

Вейвлет-перетворення може бути записане також через образи Фур'є сигналу $\tilde{f}(\omega)$ і вейвлета $\tilde{\psi}(\omega)$. Легко показати, що вплив компоненти Фур'є $\tilde{f}(\omega_0)$ випробовують коефіцієнти $W(a,b)$, які знаходяться в горизонтальній смузі $\omega_{\min} < a\omega_0 < \omega_{\max}$ (рис. 3.4, в); у свою чергу, на коефіцієнт $W(a,b)$ в точці (a_0, b_0) впливають всі компоненти Фур'є $\tilde{f}(\omega)$ сигналу, для яких $\omega_{\min} < a_0\omega < \omega_{\max}$.

Розкрив кута впливу і ширина смуги впливу залежать від базисного вейвлета. Так, наприклад, МНАТ-вейвлет добре локалізований в часі і має вузький енергетичний спектр. Ця влада якість означає, зокрема, що коефіцієнти $W(a,b)$ залежать від малого інтервалу області частот вейвлета, тобто ширина смуги впливу $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ невелика.

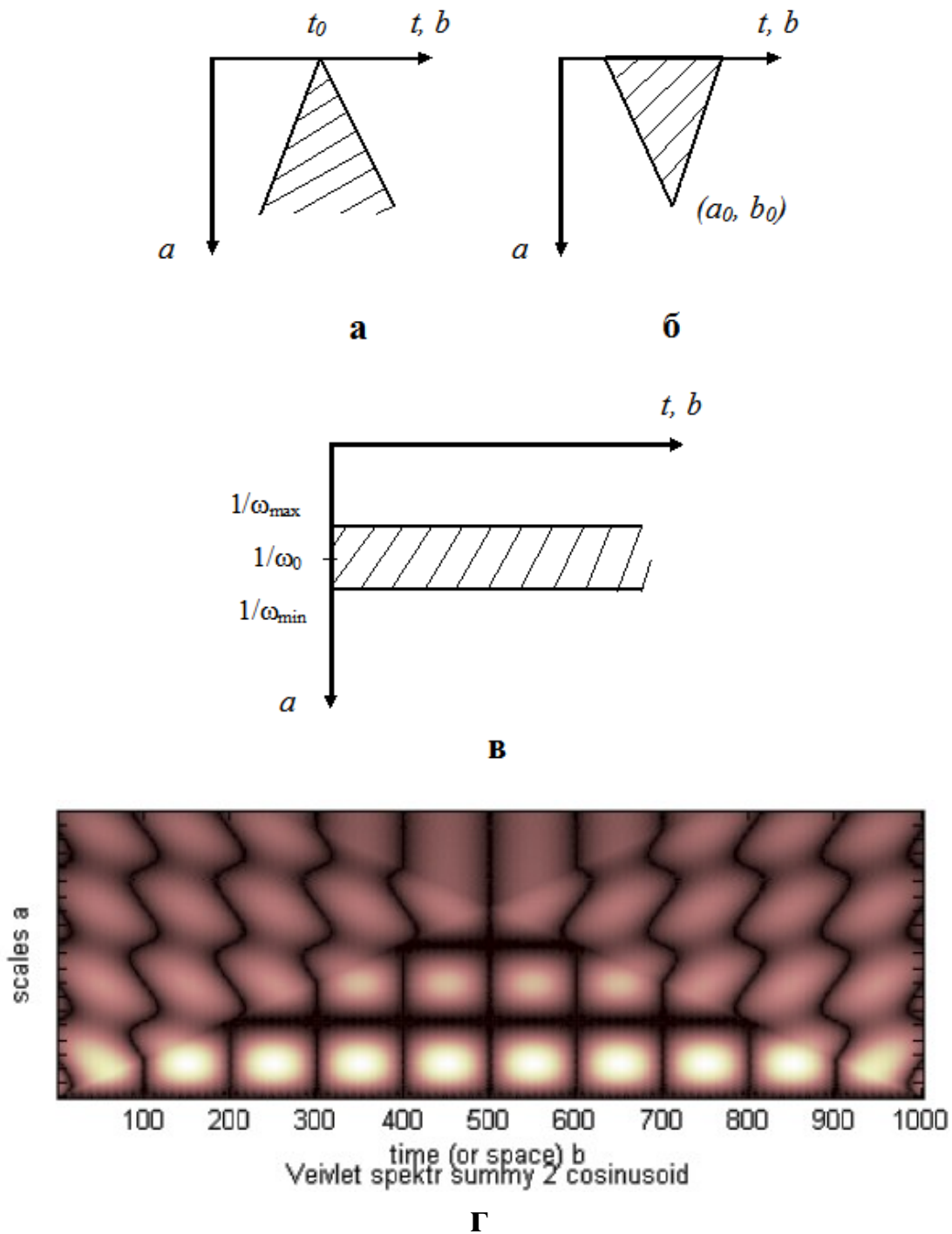


Рис. 3.4 – Кут впливу або достовірності (а, б), смуга впливу або достовірності (в), зображення кута достовірності на вейвлет-спектрі суми двох синусоїд (г)

3.3 Класифікація і приклади вейвлетів

Вибір вейвлетів досить великий. Широко використовуються близько півтора десятка базових типів вейвлетів і безліч варіантів для ряду базових типів вейвлетів [14]. Проте необгрунтоване застосування того або іншого

типу вейвлета може призвести до неотримання очікуваного результату.

Велика кількість класів вейвлетів і їх конкретних реалізацій в кожному класі дозволяє легко використовувати для вирішення кожного практичного завдання найбільш відповідний тип вейвлета. Нині створення нових типів вейвлетів раціонально лише при рішенні нових і досить специфічних завдань і за умови, що для цього не вдається підібрати відповідний тип вейвлета з числа описаних.

Тому виникає необхідність провести класифікацію вейвлетів за певними ознаками. Це дозволить підбирати найбільш відповідні типи вейвлетів для вирішення конкретних завдань обробки сигналів і зображень. Але і подібний вибір потрібно розглядати як попередню операцію. При розв'язанні складних завдань в області обробки сигналів і зображень потрібне застосування декількох типів вейвлетів з наступним порівнянням результатів і вибором найкращих з них.

Грубі вейвлети або предвейвлети.

Вони мають мінімум властивостей, якими повинні володіти вейвлети, які забезпечують повноцінні можливості в техніці перетворення сигналів:

- симетричність;
- функція Ψ задається явно (має аналітичний вираз);
- функція Φ у них відсутня (не має аналітичного виразу);
- аналіз не є ортогональним;
- функція Ψ не має компактного носія;
- можливість реконструкції не гарантована;
- можлива безперервна декомпозиція;
- швидкі алгоритми перетворень і точна реконструкція неможливі.

До "грубих" вейвлетів або предвейвлетів відносяться вейвлети типу Гаусса, вейвлети Морле і вейвлет "мексиканський капелюх".

Нескінченні регулярні вейвлети.

Вони мають такі властивості:

- мають функцію Φ і їх аналіз ортогональний;
- функції Ψ і Φ не визначені явно;
- функції Ψ і Φ не мають компактного носія;
- вейвлети є симетричними і регулярними в нескінченності, тобто такі, що нескінченно диференціюються;
- швидкий алгоритм перетворень не підтримується.

У цих вейвлетів можливі такі методи аналізу:

- безперервні перетворення;
- дискретні перетворення, але побудувати для них фільтри зі скінченною імпульсною характеристикою неможливо.

До нескінченних регулярних вейвлетів належать вейвлети Мейера.

Ще один вейвлет цього типу – дискретний вейвлет Мейера. Його властивості:

- можлива апроксимація фільтром зі скінченою імпульсною характеристикою;
- підтримка безперервного і дискретного перетворень.

Ортогональні вейвлети з компактним носієм.

Їх основні властивості:

- функція φ існує, і аналіз відноситься до ортогонального типу;
- функції ψ і φ мають деяке число моментів зникнення (нульових моментів);
- функції ψ і φ мають компактний носій;
- можливі безперервні перетворення і дискретні перетворення з застосуванням швидкого вейвлет-перетворення;
- забезпечується принципова можливість реконструкції сигналів і функцій;
- можлива апроксимація фільтром зі скінченою імпульсною характеристикою.

Деякі труднощі: недостатня періодичність (слабка регулярність).

До цих вейвлетів відносяться вейвлети Добеши, симлети і койфлети.

Специфічні властивості:

- вейвлети Добеши несиметричні;
- вейвлети симлети близькі до симетричних;
- вейвлети койфлети: відсутність симетрії, функцій ψ і φ , наявність моментів зникнення (декілька нульових моментів).

Біортогональні парні вейвлети з компактним носієм.

Вони мають такі властивості:

- функція φ існує, і аналіз відноситься до біортогонального типу;
- обидві функції ψ і φ для декомпозиції і реконструкції мають компактний носій;
- функції ψ і φ для декомпозиції мають моменти зникнення (нульові моменти);
- функції ψ і φ для реконструкції можуть мати періодичність.
- Можливі види аналізу – безперервне перетворення і дискретне перетворення з використанням алгоритму швидкого вейвлет-перетворення.

Найбільш суттєві переваги:

- симетрія з фільтрами
- бажані властивості для розкладання і відновлення розділені.

Найбільш суттєві труднощі: відсутність ортогональності.

До них відносяться *B*-сплайнові біортогональні вейвлети.

Комплексні вейвлети.

Вони мають мінімальні властивості:

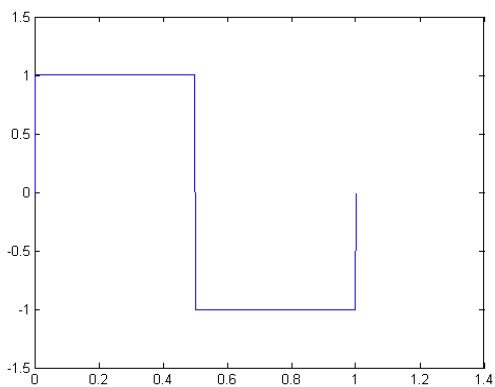
- функція φ відсутня;
- аналіз не ортогональний;
- функція ψ не має компактного носія;

- властивості реконструкції не гарантуються;
 - можливий аналіз типу безперервної комплексної декомпозиції;
- Основні позитивні властивості: симетрія, Ψ має явний вираз.

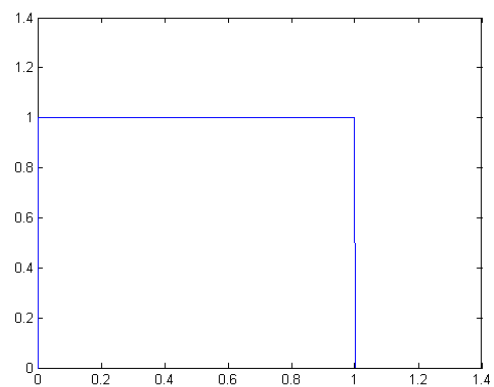
Труднощі застосування: швидкий алгоритм і реконструкція неможливі.

До комплексних відноситься досить велика група вейвлетів: Гауса, Морле, Шенона і частотні B -сплайнові вейвлети.

Приклади вейвлетів. У системах комп'ютерної математики найчастіше використовуються наступні вейвлети: Хаара, Добеши, симлети (симетричні вейвлети Добеши), койфлети (вейвлети Добеши з досить хорошою симетрією), Мейєра, дискретна апроксимація вейвлета Мейєра, Гауса, комплексний вейвлет Гауса, Морле, комплексний вейвлет Морле, Шенона, біртогональний, зворотній біртогональний, мексиканський капелюх, частотний B -сплайновий і деякі інші. Варіанти представлення різних вейвлетів за допомогою системи комп'ютерної математики наведені на рис. 3.5 – 3.7.

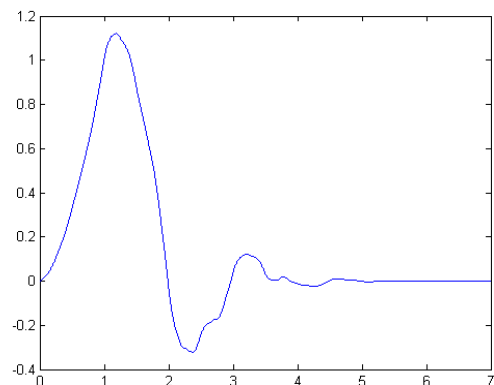
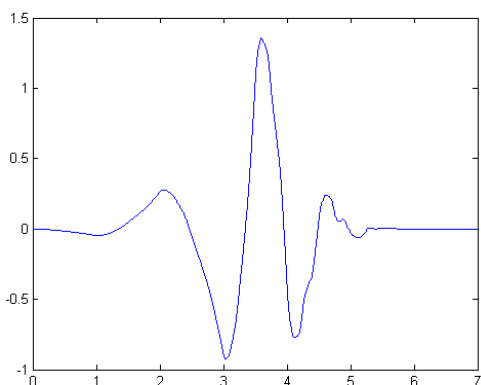


а)



б)

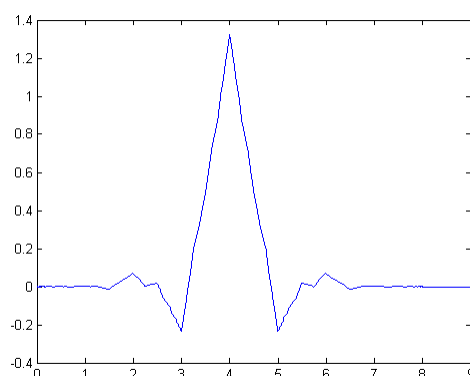
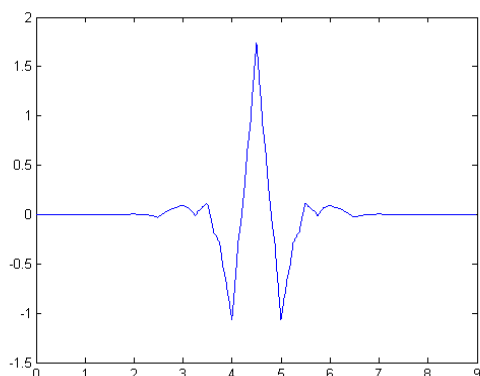
Рис. 3.5 – Вейвлет Хаара:
а – вейвлет; б – масштабуюча функція



а)

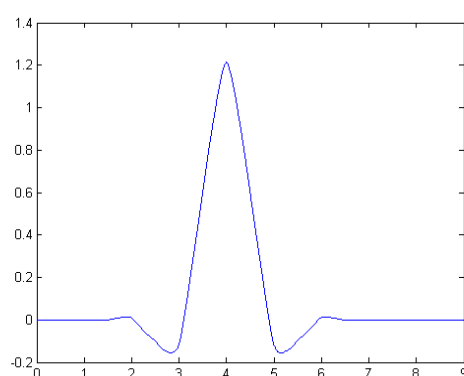
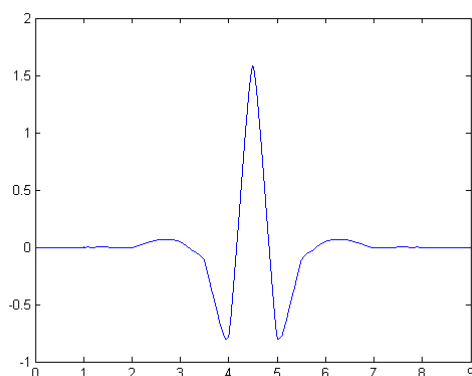
б)

Рис. 3.6 – Вейвлет Добеши (db4):
а – вейвлет; б – масштабуюча функція



а)

б)



в)

г)

Рис. 3.7 – Біортогональні вейвлети (bior4.4) :
а – вейвлет розкладання; б – масштабуюча функція розкладання;
в – вейвлет відновлення; г – масштабуюча функція відновлення

3.4 Можливості вейвлет-аналіза

Маючи вейвлет-спектри, можна вичислити корисні характеристики процесу, що вивчається, і проаналізувати багато його властивостей [11]. Розглянемо детальніше деякі можливості аналізу особливостей сигналу і його енергетичних характеристик.

Аналіз локальної регулярності.

Розглянемо деякі наслідки властивості масштабної інваріантності.

Вейвлет-перетворення так влаштовано, що $W(a,t)$ – регулярна функція навіть при нерегулярній $f(t)$. Вся інформація про можливу

особливість $f(t)$ (локалізація t_0 , інтенсивність c , показник сингулярності α) знаходиться в асимптотичній поведінці коефіцієнтів $W(a, t_0)$ при малих a . Якщо коефіцієнти на малих масштабах розходяться, тоді f має особливість в t_0 і показник сингулярності α визначається нахилом залежності $\log|W(a, t_0)|$ до $\log a$. Якщо вони, навпаки, близькі до нуля в межах t_0 на малих масштабах, тоді f в точці t_0 регулярна.

Описана властивість часто і успішно використовується при аналізі фрактальних і мультифрактальних сигналів. Базис перетворення самоподібний і коефіцієнти перетворення масштабуються з таким же показником, що і аналізована функція

$$W(\lambda a, t_0 + \lambda b) \approx \lambda^{\alpha(t_0)} W(a, t_0). \quad (3.27)$$

Звідси легко отримати шкальний (масштабний) показник $\alpha(t_0)$, пов'язаний з фрактальною мірністю множини. Аналіз мультифрактальної множини дозволяє визначити спектр показників і спектр мірностей.

Можна відмітити, що аналіз локальної регулярності в деякому розумінні універсальний – він не залежить від вибору аналізуючого вейвлета.

Енергетичні характеристики.

З існування для вейвлет-перетворення аналога рівності Парсеваля виходить, що в просторі дійсних функцій повна енергія сигналу f може бути записана через амплітуди вейвлет-перетворення у вигляді

$$E_f = \int f^2(t) dt = C_{\Psi}^{-1} \iint W^2(a, b) \frac{da db}{a^2}. \quad (3.28)$$

Щільність енергії сигналу $E_W(a, b) = W^2(a, b)$ характеризує енергетичні рівні (рівні збудження) досліджуваного сигналу $f(t)$ в просторі $(a, b) = (\text{масштаб}, \text{час})$.

Вейвлет спектр може відбивати той факт, якщо енергія нерівномірно розподілена по масштабах – можуть виявитися виділені масштаби, він може демонструвати стаціонарну або нестаціонарну структуру аналізованого процесу з елементами квазіперіодичності, з еволюціонуючими частотами і з діапазонами локальних періодичностей на різних масштабах.

Локальний спектр енергії. Однією з основних особливостей вейвлет-перетворення являється можливість отримувати локалізовані характеристики і вивчати локальні властивості процесів. Природа вейвлет-перетворення така, що термін "локальний енергетичний спектр" має право на існування.

Знаючи щільність енергії $E_W(a, b)$, можна за допомогою вікна

визначити локальну щільність енергії в точці b_0 (або t_0) :

$$E_{\xi}(a, t_0) = \int E_W(a, b) \xi\left(\frac{b - t_0}{a}\right) dt. \quad (3.29)$$

Віконна функція ξ "підтримує" діапазон біля t_0 і задовольняє рівності $\int \xi(b) db = 1$.

Якщо в якості ξ обрати функцію Кронекера, тоді локальний спектр енергії виглядає так

$$E_{\delta}(a, t_0) = W^2(a, t_0). \quad (3.30)$$

Ця характеристика дозволяє проаналізувати часову динаміку передачі енергії процесу по масштабах – обмін енергією між складовими процесу компонентами різного масштабу в будь-який заданий момент часу.

Глобальний спектр енергії. Повна енергія розподілена по масштабах відповідно до глобального спектра енергії коефіцієнтів вейвлет-перетворення

$$E_W(a) = \int W^2(a, b) db = \int E_W(a, b) db. \quad (3.31)$$

Його називають також шкалограммою (англ. scalogram) або дисперсією вейвлет-перетворення.

На рисунку 3.8, а представлені спектр потужності $E_F(\omega)$ потоку іонів сонячного вітру і шкалограмма E_W – глобальний спектр енергії коефіцієнтів вейвлет-перетворення того ж сигналу. Спектри досить добре узгоджуються, але спектр, обчислений по коефіцієнтах вейвлет-перетворення, – набагато гладша крива.

Причина полягає в тому, що вейвлет-спектр енергії сигналу E_W відповідає згладженому спектру потужності E_F . Це можна показати, через вираз спектра енергії $E_W(a)$ через спектр енергії сигналу в просторі Фур'є $E_F(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$

$$E_W(a) = \int E_F(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega. \quad (3.32)$$

Легко бачити, що шкалограмма E_W відповідає спектру потужності E_F , згладженому на кожному масштабі спектром Фур'є аналізуючого вейвлета.

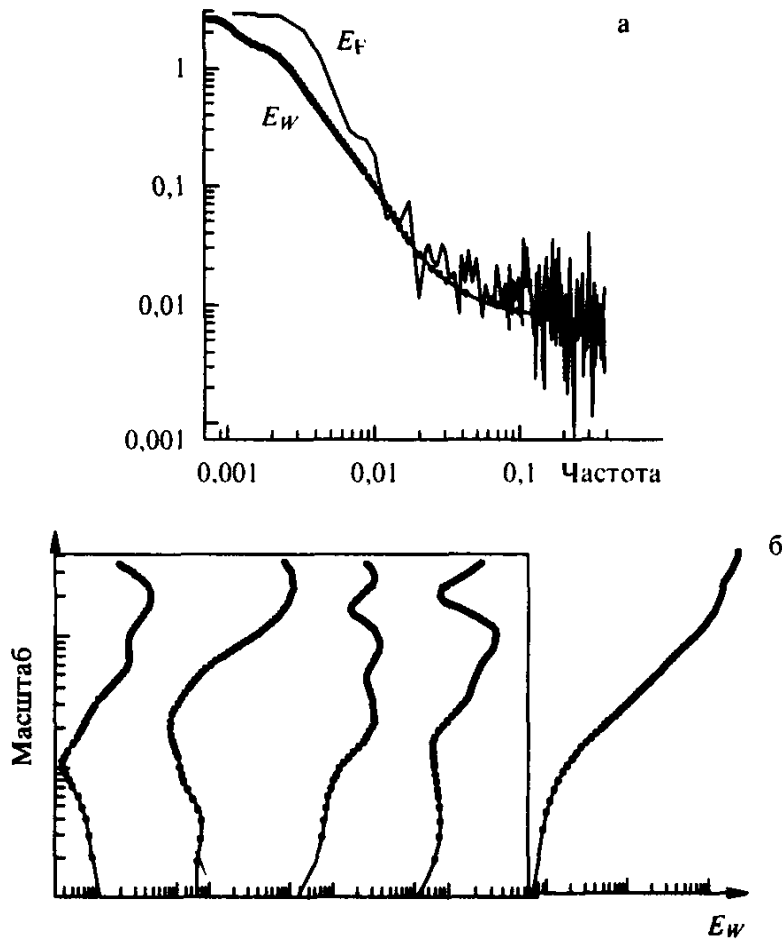


Рис. 3.8 – Енергетичні спектри потоку іонів сонячного вітру:
 а – спектр потужності E_f і шкалограма E_W залежно від частоти;
 б – шкалограмми для чотирьох часових діапазонів (у рамці) і повна
 шкалограма залежно від масштабу [11]

Вейвлет-перетворення, що надає як би часову розгортку спектра, дозволяє отримати і більш локалізовану енергетичну інформацію. На рис. 3.8, б представлені чотири шкалограмми $E_W(a)$, отримані згортокою не по всій довжині ряду, а окремо для кожної четвертої його частини. На тому ж рисунку для порівняння наведений глобальний спектр (на рис. 3.8, а він показаний залежно від частоти, на рис. 3.8, б шкалограмми показані залежно від масштабу, який зростає вгору). Енергія сигналу визначається через спектр енергії рівністю

$$E_f = C_\psi^{-1} \int E_W(a) \frac{da}{a^2}. \quad (3.33)$$

Таким чином, величина E_f пропорційна площі під кривою $E_W(a)/a^2$, а шкалограма відбиває відносний вклад різних масштабів в повну енергію і виявляє розподіл енергії процесу по масштабах.

Міра локальної перемешаності – міра локальних відхилень від середнього поля спектрів на кожному масштабі; вона дозволяє визначити міру нерівномірності розподілу енергії по масштабах (кутовими дужками позначено усереднення):

$$I_W(a,t) = \frac{E_W(a,t)}{\langle E_W(a,t) \rangle_t}. \quad (3.34)$$

Рівність $I_W(a,t) = 1$ при всіх a і t означає, що енергія розподілена рівномірно і усі локальні спектри енергії однакові; $I_W(a,t_0) = \alpha$ означає, що вклад компоненти масштабу a в точці t_0 в α раз перевершує усереднення по всіх t .

Міра контрастності – дозволяє визначити навіть малі зміни в сигналі, коли необхідно, наприклад, виявити структурованість слабого сигналу або слабкі варіації на тлі великої структури (вбудовані структури):

$$C_W(a,t) = \frac{E_W(a,t)}{E'_W(a,t)}, \quad (3.35)$$

де $E'_W(a,t) = \int_{a'=0}^{a'=a} E_W(a',t) da'$.

3.5 Вейвлет-обробка

Фур'є-обробка сигналів складається з двох основних етапів [12, 14]. Спочатку знаходиться розкладання сигналу $f(x)$, тобто знаходження коефіцієнтів Фур'є c_n , їх аналіз і зміна (фільтрація), а потім утворюється відновлення сигналу $f(x)$, яке можливо, зміненим коефіцієнтом c_n . Аналогічна ситуація і у разі вейвлет-обробки.

Нехай $\{x_n\}$, $n \in Z$ – деякий сигнал. З метою аналізу відповідно з частотним підходом до вейвлет-аналізу виділимо його низькочастотну $\{x_n^H\}$ і високочастотну $\{x_n^G\}$ частини.

При розкладанні сигналу отримуємо дві компоненти $x(t) = x^H(t) + x^G(t)$.

Низькочастотна компонента $x^H(t)$ сигналу після фільтрації відрізняється від функції $x(t)$ усього сигналу тим, що її перетворення Фур'є $\bar{x}(\omega)$ має носій на проміжку $[-\pi/2, \pi/2]$. При розкладанні $A(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ фільтр h з послідовності $\{x_n\}$ утворює послідовність $\{a_n\}$ середніх арифметичних

$$a_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} \quad (3.36)$$

згладжуючи коливання послідовності $\{x_n\}$, тобто низькочастотний фільтр згладжує коливання.

Високочастотна компонента $x^G(t)$ виділяється поза проміжком $[-\pi/2, \pi/2]$ за допомогою фільтра g . Його передавальна функція пригнічує низькі частоти (близькі до нуля) і пропускає високі. Тому в області значень дія цього фільтра $D(\omega) = G(\omega)X(\omega)$ дає новий сигнал

$$d_n = \sum_{k=0}^1 g_k x_{n-k} = \frac{x_n - x_{n-1}}{2}, \quad (3.37)$$

який має сенс першої скінчено-різницевої похідної сигналу x (точніше, її половини). Новий сигнал $\{d_n\}$ відбиває коливання послідовності $\{x_n\}$.

Таким чином, при аналізі сигналу отримаємо

$$x_n = a_n + d_n. \quad (3.38)$$

Це означає, що сигнал $\{x_n\}$ розкладений на згладжену частину $\{a_n\}$ і високочастотну компоненту $\{d_n\}$.

За теоремою Котельникова функція $x^H(t)$ може бути відновлена по її парних значеннях $x^H(2n) = x_{2n}^H$. Отже, значення $x_{2n+1}^H = x^H(2n+1)$ з непарними номерами повністю визначаються парними елементами $\{x^H(2n)\}$. Тому при аналізі непарні значення з послідовності $\{x_n^H\}$ можуть бути без втрат видалені (операція децимації $2\downarrow$). Зазвичай так і робиться з метою економії. Високочастотна компонента $x^G(t)$ сигналу після фільтрації також може піддаватись операції децимації.

Одновимірна вейвлет-обробка.

Вейвлет-розкладання сигналу утворюється за викладеною вище схемою, але багаторазово.

До сигналу $x = \{x_n\}$ застосовується низькочастотний фільтр розкладання $\{h_n\}$ з децимацією для отримання згладженої складової $A = \{A_k\}$. Потім застосовується високочастотний фільтр розкладання $\{g_n\}$ з децимацією для отримання деталей $D = \{D_k\}$, втрачених при згладжуванні. Коефіцієнти $A = \{A_k\}$ називаються коефіцієнтами апроксимації першого рівня розкладання і позначаються $A_1 = \{A_{1,k}\}$. Коефіцієнти $D = \{D_k\}$ називаються деталізуючими коефіцієнтами першого рівня розкладання і позначаються $D_1 = \{D_{1,k}\}$.

Далі процедура розкладання застосовується до набору коефіцієнтів A_1 і виходять коефіцієнти другого рівня розкладання $A_2 = \{A_{2,m}\}$ і

$D_2 = \{D_{2,m}\}$ (рис. 3.9).

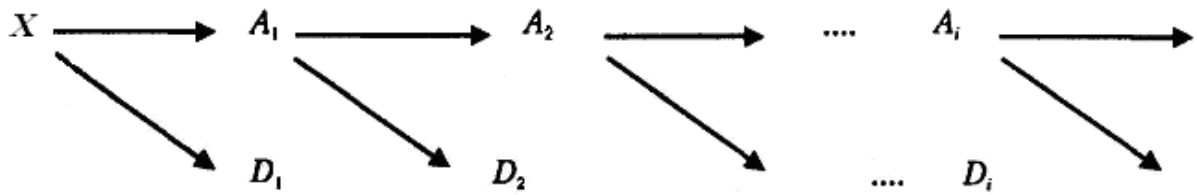


Рис. 3.9 – Схема вейвлет-розкладання сигналу

Після кожного кроку кількість і апроксимуючих коефіцієнтів A і деталізуючих коефіцієнтів D зменшується в два рази.

Повторюючи необхідне число J разів процедуру розкладання сигналу, отримаємо замість сигналу $x = \{x_n\}$ серію коефіцієнтів $(A_j, D_j, D_{j-1}, D_{j-2}, \dots, D_1)$.

За цим набором коефіцієнтів можна будувати вейвлет-спектрограму сигналу для оцінки його особливостей.

Вейвлет-відновлення. Окрім процедури аналізу (розкладання), має бути ще передбачена і процедура синтезу (відновлення, реконструкції) сигналу $\{x_n\}$ по його компонентах.

З рівняння $x_n = a_n + d_n$ також виходить, що подібним нескладним чином може бути здійснене відновлення (реконструкція) сигналу $\{x_n\}$.

З теорії фільтрів відомо, що при відновленні сигналів в операції підсумовування коефіцієнтів фільтрів беруть участь лише парні коефіцієнти. Таким чином, відновлення сигналу $x(t)$ по низькочастотних компонентах $x^H(t)$ і високочастотних компонентах $x^G(t)$ утворюється в наступному порядку:

- додаються непарні нульові значення в масиви $\{x^H(t)\}$ і $\{x^G(t)\}$ (операція зворотна децимації $2\uparrow$)
- до отриманих масивів $\{x^H(t)\}$ і $\{x^G(t)\}$ застосовується фільтрація за допомогою фільтрів відновлення $\{\tilde{h}_n\}$ і $\{\tilde{g}_n\}$.

Таким чином, при вейвлет-розкладенні використовуються зв'язані фільтри $\bar{H}(\omega)$ і $\bar{G}(\omega)$ вейвлетів, а для вейвлет-відновлення використовуються фільтри $\bar{H}(\omega)$ і $\bar{G}(\omega)$ вейвлетів $\varphi(x)$ і $\psi(x)$.

Таким чином, вейвлет-аналіз складається з наступних кроків:

- обирається досить високий рівень відрізнення J , такий, що апроксимація $P_j(x)$ досить точно відображає функцію $f(x)$. Практично тут проблем не виникає, оскільки функція $f(x)$ зазвичай задається масивом значень. Ці значення і беруться за початкове наближення $P_j(f)$;
- обирається глибина розкладання N і знаходяться коефіцієнти розкладання $(A_N, D_N, D_{N-1}, D_{N-2}, \dots, D_1)$, ці коефіцієнти

- аналізуються і змінюються у разі потреби;
- відновлюється функція $f(x)$, з використанням можливо змінених коефіцієнтів розкладання:

$$f(x) \approx \sum_{k \in Z} a_{j-N,k} \varphi_{j-N,k}(x) + \sum_{k \in Z} d_{j-N,k} \psi_{j-N,k}(x) + \dots + \sum_{k \in Z} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(x). \quad (3.39)$$

Отже, для вейвлет-перетворення функції $f(x)$ необхідно вчислити серію коефіцієнтів $(A_N, D_N, D_{N-1}, D_{N-2}, \dots, D_1)$, причому кожен коефіцієнт визначається інтегруванням

$$a_{j-N,k} = \langle f, \varphi_{j-N,k} \rangle = \int_R f(x) \overline{\varphi_{j-N,k}}(x) dx, \quad (3.40)$$

$$d_{j-m,k} = \langle f, \psi_{j-m,k} \rangle = \int_R f(x) \overline{\psi_{j-m,k}}(x) dx, \quad (3.41)$$

де $m = 1, 2, \dots, N$, тому звідси і виникає проблема обчислення великої кількості інтегралів з необхідною точністю. Слід також враховувати, що при високому рівні відрізнення, носії функцій $\varphi_{j,k}(x)$ і $\psi_{j,k}(x)$ стають малими порядку $1/2^j$.

Швидке вейвлет-перетворення дозволяє розв'язати цю проблему. Алгоритм дає можливість обчислювати коефіцієнти вейвлет-розкладання без інтегрування, використовуючи алгебраїчні операції на основі згортки:

$$a_{j-1,k} = \sum_n \overline{h}_n a_{j,n+2k} \quad d_{j-1,k} = \sum_n \overline{g}_n a_{j,n+2k}. \quad (3.42)$$

Ця рівність забезпечує швидкі алгоритми обчислення вейвлет-коефіцієнтів (каскадні або пірамідальні алгоритми, алгоритми Малла). Термін "швидкі" означає не лише, що використовуються швидші алгебраїчні процедури, але й те, що при кожному перетворенні загальне число нових коефіцієнтів не збільшується в два рази, а залишається таким самим.

Вейвлет-пакетна обробка. При застосуванні звичайного алгоритму Малла на кожному кроці "відрізається" половина низькочастотної частини діапазону сигналу. Реалізація цього алгоритму виходить з загального уявлення про більшу інформаційність низькочастотної частини спектра сигналу, що для багатьох видів сигналу (наприклад, цифрових) не завжди справедливо. Існують процедури розкладання не лише апроксимуючих коефіцієнтів A_j , але і деталізуючих коефіцієнтів D_j . Тоді коефіцієнти розкладання зображуються у вигляді дерева, нагорі якого знаходиться аналізований сигнал $x = \{x_n\}$. Всі гілки, що йдуть вліво, вказують на апроксимуючі коефіцієнти, а всі гілки, що йдуть вправо, вказують на

деталізуючі коефіцієнти попереднього вузла. Вузли, в яких знаходяться коефіцієнти розкладання, зручно нумерувати так, як показано на рис. 3.10 або на рис. 3.11.

Звичайне вейвлет-розкладання і відповідні коефіцієнти виділені потовщеними лініями ліворуч на рис. 3.10. Вейвлет-коефіцієнтів достатньо для відновлення сигналу, тому можна розкласти високочастотні коефіцієнти деталей або відмовитися від цього. Таким чином, з'являється значно більше можливостей для розкладання – від "мінімального" вейвлет-розкладання до повного пакетного розкладання на всіх рівнях.

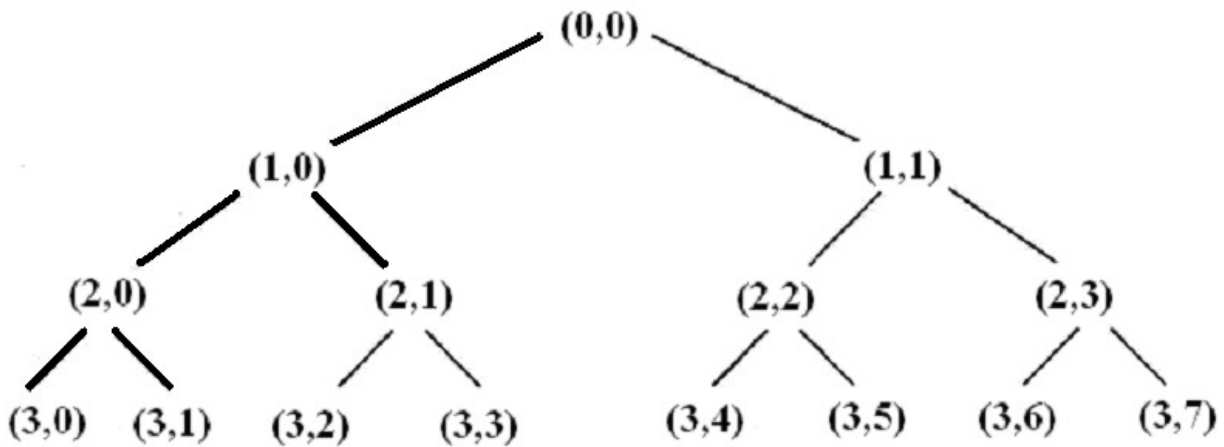


Рис. 3.10 – Схема пакетного розкладання сигналу

Схемі на рис. 3.10 можна дати пояснення стосовно вейвлетів. В цьому випадку відбувається заміна вейвлета $\psi(t)$ на два нових вейвлетів: $\psi_1(t) = \sum h_n \psi(t-n)$ і $\psi_2(t) = \sum g_n \psi(t-n)$, і так далі. Нові вейвлети теж локалізовані в часі (просторі), але на вдвічі ширшому відрізку, ніж початковий вейвлет. Цьому бінарному дереву розкладання відповідає набір підпросторів з базами, побудованими аналогічним чином. Функції, що породжують ці бази, називаються вейвлет-пакетами.

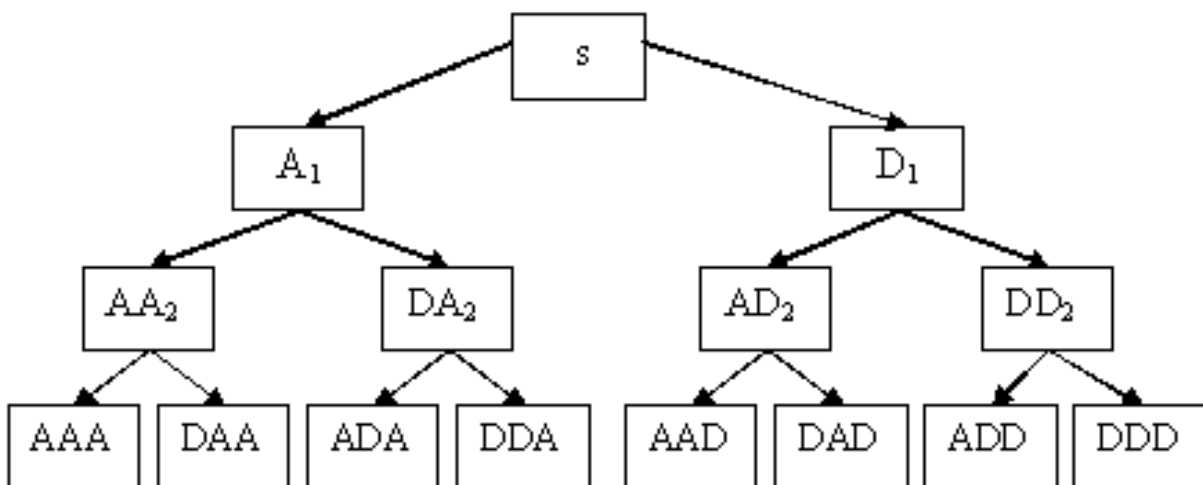


Рис. 3.11 – Структура вейвлет-представлення сигнала для пакетних вейвлетів

Перетворення за допомогою вейвлет-пакетів є адаптивним вейвлет-перетворенням, оскільки воно легко пристосовується до особливостей сигналу і може успішно використовуватися для компресії (стискання) сигналів, очищення їх від шумів. Зокрема, є можливість відсікання деяких гілок деталізуючих коефіцієнтів дерева.

Перевагою, а в якійсь мірі і недоліком, вейвлет-пакетів і адаптивних алгоритмів їх реалізації є відсутність необхідності в навчанні системи (характерному, наприклад, для систем на основі нейронних мереж) і навіть в оцінці статистичних характеристик сигналів. Усе, що треба, – це ввести оцінку вартості вейвлет-коефіцієнтів, мірою якої може служити ентропія – концентрація числа вейвлет-коефіцієнтів, які потрібні для опису сигналу з деякою заданою точністю (чи похибкою).

Існує багато варіантів базисів розкладання сигналу. З великого числа представників треба обрати той варіант базису, розкладання по якому представляє сигнал найефективніше. Під "ефективним" мається на увазі те, що сигнал має представлятися невеликою кількістю коефіцієнтів розкладання. Тобто базис для розкладання має бути таким, щоби великі коефіцієнти були б сконцентровані на невеликій кількості елементів вейвлет-пакетного базису, а велика частина коефіцієнтів була б близька до нуля.

В цьому випадку як *критерій для вибору* найефективнішого або *найкращого базису* для цього сигналу в числі інших використовується критерій мінімальності ентропії [13]. Ентропія характеризує усереднення, "розмазаність" сигналу або концентрацію числа вейвлет-коефіцієнтів, які потрібні для опису сигналу з деякою заданою точністю. Ентропія повинна мати властивість адитивності (об'єднання) по відношенню до сигналів.

Існує декілька варіантів визначення ентропії.

В системах комп'ютерної математики найчастіше використовуються чотири критерії ентропії:

- ентропія Шенона – $E_1(s) = - \sum_i s_i^2 \log(s_i^2)$, при умові $0 \cdot \log(0) = 0$;
- ентропія норма простору l_p , $p \geq 1$ - $E_2(s) = \sum_i |s_i|^p = \|s\|_p^p$;
- ентропія логарифм енергії – $E_3(s) = \sum_i \log(s_i^2)$;
- ентропія порогова – $E_4(s) = 1$, якщо $|s_i| > \epsilon$ і 0 – інакше, тоді $E_4(s)$ є число елементів сигналу, величина яких більша за порогове значення ϵ .

У всіх приведених випадках s є сигналом, а s_i є відліками сигналу.

Можуть використовуватися й інші, задані дослідником, критерії

ентропії, та і не тільки ентропії.

Розглянемо як приклад ентропію Шенона. Нехай s – сигнал і s_i – його значення. Вважаємо сигнал нормалізованим $\sum_i s_i^2 = 1$. Ентропія Шенона визначається формулою $E(s) = - \sum_i s_i^2 \log_2(s_i^2)$ при наступному припущенні: $0 \cdot \log 0 = 0$. Використання суми забезпечує властивість аддитивності по відношенню до об'єднання масивів, які задають сигнали.

Кращий базис – це той базис, який дає найменшу кількість ентропії. Ентропія, визначена вище, дає критерій того, скільки ефективних компонентів потрібно, щоб представити сигнал в певному базисі. Наприклад, якщо в деякому базисі при розкладанні отримуємо всі нульові коефіцієнти, окрім одного (тобто сигнал співпадає з базисною функцією), тоді ентропія досягає свого мінімального значення – нуля. З іншого боку, якщо в деякому базисі коефіцієнти розкладання всі однаково важливі і $s_i = 1/\sqrt{N}$, де N є довжиною сигналу, ентропія в цьому випадку набуває максимального значення, який дорівнює $\log_2 N$. Будь-яке інше розкладання знаходиться між цими двома крайніми випадками. Таким чином, чим менша ентропія, тим менше істотних коефіцієнтів потрібно для представлення сигналу.

Практично для вибору оптимального базису критерій ентропії використовується таким чином: якщо при розкладанні коефіцієнтів деякого вузла сума ентропій, отриманих при розкладанні компонент, менша, ніж ентропія коефіцієнтів в початковому вузлі, тоді розкладання пороводиться, інакше коефіцієнти разом з базисними функціями залишаються без зміни.

Двовимірна вейвлет-обробка.

Двовимірні вейвлети. На практиці необхідно аналізувати сигнали (тобто зображення), які є функціями двох змінних. Тоді багатомасштабний аналіз повинен будуватися в просторі $L^2(\mathbf{R}^2)$ функцій двох змінних. Існує декілька способів узагальнити викладені раніше міркування на функції двох змінних. Найпростіший і широко поширений шлях – це тензорний добуток одновимірних вейвлетів. Він заснований на тому факті, що простір $L^2(\mathbf{R}^2)$ є тензорний добуток просторів $L^2(\mathbf{R})$ функцій однієї змінної $L^2(\mathbf{R}^2) = L^2(\mathbf{R}) \otimes L^2(\mathbf{R})$.

Це означає, що лінійні комбінації функцій вигляду $f(x) \cdot g(y)$ утворюють щільну множину в просторі $L^2(\mathbf{R}^2)$ функцій двох змінних.

За аналогією з одновимірним кратномасштабним аналізом, нехай функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ породжують ортогональний кратномасштабний аналіз простору $L^2(\mathbf{R})$: $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$.

Зсуви $\varphi_{0,n}(x) = \varphi(x - n)$, $n \in \mathbf{Z}$ функції $\varphi(x)$ утворюють ортонормований базис простору V_0 . Інші простори V_j є масштабованими версіями V_0 , $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$. Зокрема, V_j має як ортонормований базис систему

функцій $\varphi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \varphi(2^j x - k)$.

Простір вейвлетів W_0 визначається як ортогональне доповнення до V_0 в підпросторі V_1 . Тоді $V_1 = V_0 \oplus W_0$ – пряма сума ортогональних підпросторів. В просторі W_0 ортонормований базис утворює зсуви $\psi_{0,n}(x) = \psi(x - n)$, $n \in \mathbf{Z}$ функції $\psi(x)$. В випадку будь-якого $j \in \mathbf{Z}$, маємо $V_j \subset V_{j+1}$ і $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$.

Простори вейвлетів W_j є масштабованими версіями W_0 , зокрема W_j має ортонормований базис з функцій $\psi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k)$.

У двовимірному випадку визначимо простір V_0^2 як тензорний добуток просторів V_0 функцій однієї змінної: $V_0^2 = V_0 \otimes V_0$.

Іншими словами, простір V_0^2 є замкнення лінійної оболонки, породженої зсувами $\varphi_{0,k,n}(x,y) = \varphi(x - k)\varphi(y - n)$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

Ці функції утворюють ортонормований базис простору V_0 .

Простори $V_j^2 = V_j \otimes V_j$ є масштабованими версіями простору V_0^2 : $f(x,y) \in V_0^2 \Leftrightarrow f(2^j x, 2^j y) \in V_j^2$.

Тоді ми отримуємо послідовність замкнених вкладених один в один підпросторів $\dots \subset V_{-1}^2 \subset V_0^2 \subset V_1^2 \subset \dots$, які мають аналогічні властивості.

Оскільки $V_1 = V_0 \oplus W_0$, тоді для тензорного добутку маємо наступне ортогональне розкладання:

$$\begin{aligned} V_1^2 &= V_1 \otimes V_1 = (V_0 \oplus W_0) \otimes (V_0 \oplus W_0) = \\ &= (V_0 \otimes V_0) \oplus (V_0 \otimes W_0) \oplus (W_0 \otimes V_0) \oplus (W_0 \otimes W_0). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Тут $V_0 \otimes V_0 = V_0^2$. Тому інші три простори в сумі утворюють простір W_0^2 двовимірних вейвлетів. При цьому:

- простір $V_0 \otimes W_0$ породжений зсувами функції $\psi^H(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$;
- простір $W_0 \otimes V_0$ породжений зсувами функції $\psi^V(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$;
- простір $W_0 \otimes W_0$ породжений зсувами функції $\psi^D(x,y) = \psi(x)\psi(y)$.

Позначимо ці простори таким чином: $W_0^H = V_0 \otimes W_0$, $W_0^V = W_0 \otimes V_0$, $W_0^D = W_0 \otimes W_0$.

Їх сума дає весь простір вейвлетів W_0^2 . В результаті отримуємо ортогональне розкладання: $V_1^2 = V_0^2 \otimes W_0^2 = V_0^2 \oplus W_0^H \oplus W_0^V \oplus W_0^D$.

Відповідне розкладання виходить для різного $j \in \mathbf{Z}$ $V_{j+1}^2 = V_j^2 \otimes W_j^2 = V_j^2 \oplus W_j^H \oplus W_j^V \oplus W_j^D$.

Системи функцій, які утворять ортонормовані базиси у вказаних вище просторах, будуть мати вигляд:

$$\varphi_{j,k,n}(x,y) = 2^j \varphi(2^j x - k) \varphi(2^j y - n); \quad (3.44)$$

$$\psi_{j,k,n}^H(x,y) = 2^j \varphi(2^j x - k) \psi(2^j y - n); \quad (3.45)$$

$$\psi_{j,k,n}^V(x,y) = 2^j \psi(2^j x - k) \varphi(2^j y - n); \quad (3.46)$$

$$\psi_{j,k,n}^D(x,y) = 2^j \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - n). \quad (3.47)$$

Двовимірне вейвлет-перетворення. Для системи функцій, які утворюють чотири ортонормовані базиси, відповідно, і вейвлет-коефіцієнти сигналу $f(x,y)$ будуть чотирьох типів. Коефіцієнти

$$cA_1 = \langle f, \varphi_{j,k,n} \rangle = 2^j \int_{\mathbf{R}^2} f(x,y) \overline{\varphi(2^j x - k) \varphi(2^j y - n)} dx dy \quad (3.48)$$

називаються апроксимуючими.

Інші коефіцієнти – деталізуючі – трьох типів.

При визначенні деталізуючих вейвлет-коефіцієнтів функції $f(x,y)$

$$cH_1 = \langle f, \psi_{j,k,n}^H \rangle = 2^j \int_{\mathbf{R}^2} f(x,y) \overline{\varphi(2^j x - k) \psi(2^j y - n)} dx dy, \quad (3.49)$$

по змінній x відбувається інтегрування з масштабуючою функцією $\varphi(x)$, а це, як відомо, спричиняє згладжування сигналу $f(x,y)$ по змінній x . Інтегрування по змінній y проводиться за участю вейвлета $\psi(y)$ – це дає коефіцієнти, які враховують зміни функції по змінній y . В результаті виходить сигнал cH_1 , в якому більше відбиті зміни по вертикалі. Виділятимуться горизонтальні смуги. Тому такі коефіцієнти cH_1 називаються горизонтальними.

Аналогічний сенс і назву мають й інші вейвлет-коефіцієнти.

Коефіцієнти cV_1 – вертикальні

$$cV_1 = \langle f, \psi_{j,k,n}^V \rangle = 2^j \int_{\mathbf{R}^2} f(x,y) \overline{\psi(2^j x - k) \varphi(2^j y - n)} dx dy, \quad (3.50)$$

по змінній y відбувається інтегрування з масштабуючою функцією $\varphi(y)$, а це викликає згладжування сигналу $f(x,y)$ по змінній y . Інтегрування по змінній x проводиться за участю вейвлета $\psi(x)$ – це дає коефіцієнти, які враховують зміни функції по змінній x . В результаті отримаємо сигнал cV_1 , в якому більше відбиті зміни по горизонталі. Виділятимуться вертикальні смуги.

Коефіцієнти cD_1 – діагональні

$$cD_1 = \langle f, \psi_{j,k,n}^D \rangle = 2^j \int_{\mathbf{R}^2} f(x,y) \overline{\psi(2^j x - k) \psi(2^j y - n)} dx dy, \quad (3.51)$$

інтегрування по змінній x проводиться за участю вейвлета $\psi(x)$ – це дає коефіцієнти, які враховують зміни функції по змінній x . Інтегрування по

змінній \mathcal{Y} проводиться за участю вейвлета $\psi(\mathcal{Y})$, – це дає коефіцієнти, які враховують зміни функції по змінній \mathcal{Y} . В результаті отримуємо сигнал cD_1 , в якому більше відбиті зміни як по осі \mathcal{X} , так і по осі \mathcal{Y} , тобто по діагоналі. Будуть виділятися діагональні смуги. При цьому згладжування по обох осях відсутнє.

Таким чином, схема розкладання сигналу \mathbf{S} може зображатись у вигляді:

$$\mathbf{S} \rightarrow (cA_1, cH_1, cV_1, cD_1) \rightarrow (cA_2, cH_2, cV_2, cD_2, cH_1, cV_1, cD_1) \rightarrow \dots \quad (3.52)$$

Практично вхідний сигнал задається матрицею \mathbf{S} . При розкладанні цього сигналу виходять вказані чотири типи коефіцієнтів таким чином.

Наприклад, горизонтальні деталізуючі коефіцієнти cH_1 утворюються згорткою рядків матриці \mathbf{S} з низькочастотним фільтром вейвлета і децимацією, а потім згорткою стовпців отриманої матриці з високочастотним фільтром і децимацією.

Інші коефіцієнти розкладання утворюються аналогічним чином.

Оскільки масив початкових коефіцієнтів двовимірний, тоді природно графічну схему розкладання сигналу \mathbf{S} зобразити у вигляді плоскої картини (рис. 3.12).

Слід зазначити, що ця схема відбиває і зміну розмірів масивів коефіцієнтів розкладання. Якщо сигнал \mathbf{S} має розмірність $n \times n$, тоді коефіцієнти першого рівня розкладання cA_1, cH_1, cV_1, cD_1 матимуть розмірність $n/2 \times n/2$ і так далі.

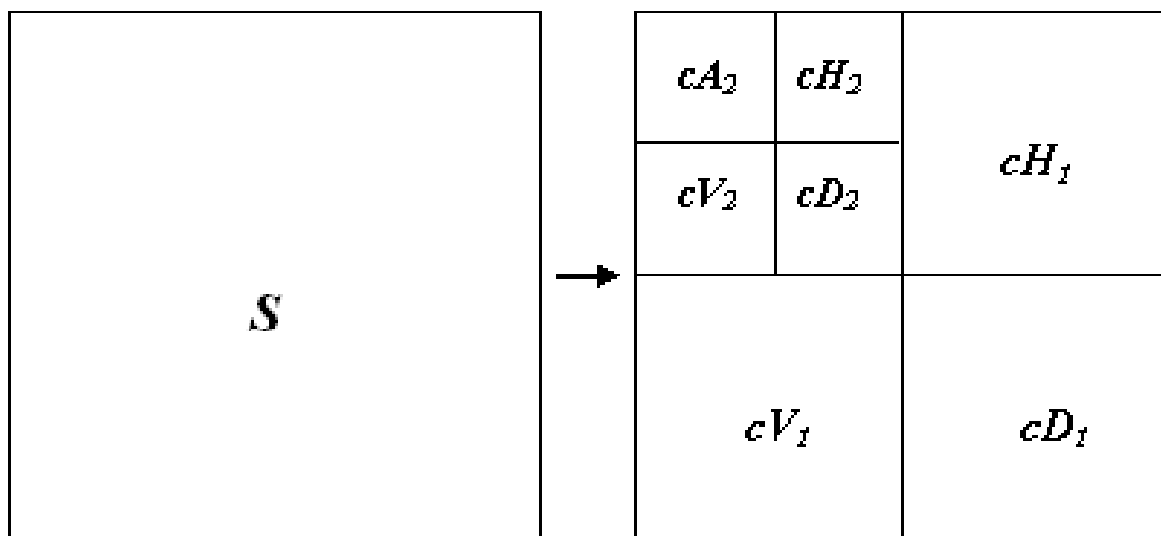


Рис. 3.12 – Схема розкладання двовимірного сигналу

Двовимірне вейвлет-розкладання можна застосовувати не лише до апроксимуючих коефіцієнтів cA_j , але і до всіх інших. Тоді з'являються

пакетні вейвлети. Їх схему розкладання заведено зображати у вигляді дерева, аналогічного дереву пакетних одновимірних розкладань.

3.6 Приклади вейвлет-обробки

Розглянемо деякі можливості *безперервного* вейвлет-перетворення у виявленні характерних особливостей сигналів, побудованих на основі функцій з добре відомими властивостями.

Для кожного прикладу наведений графік аналізуючого ряду. Коефіцієнти $W(a, b)$ показані у вигляді проєкцій на площину ab (часовий масштаб, час); по осі абсцис відкладений час, по осі ординат – часовий масштаб (він лінійно спадає вниз). Світлі області відповідають позитивним значенням $W(a, b)$, а темні – негативним значенням $W(a, b)$. Відтінками сірого кольору в кожній області виділені діапазони значень $W(a, b)$.

Наведені результати отримані за допомогою вейвлета Хаара. Обчислення проводилися в прямокутній області значень параметрів a, b . Ряди даних для цього подовжувалися; спосіб доповнення показаний на графіках аналізованих функцій.

Гармонійна функція.

Вейвлет-аналіз застосовувався до гармонійних функцій в різних поєднаннях з однаковою часовою розмірністю: $s_{11}=\cos(2\pi\cdot 5t_1)$; $s_{12}=\cos(2\pi\cdot 10t_1)$; $s_{13}=\cos(2\pi\cdot 20t_1)$; $s_{14}=\cos(2\pi\cdot 50t_1)$,

- сигнал 1 – одна гармонійна функція;
- сигнал 2 – сума чотирьох гармонійних функцій однієї амплітуди і різної частоти;
- сигнал 3 – сума двох гармонійних функцій з різною амплітудою і частотою;
- сигнал 4 – що послідовно йдуть в часі чотири гармонійні функції з однаковою амплітудою і з різною частотою.

Результат вейвлет-перетворення гармонійної функції легко порівняти з тим, що дає звичне перетворення Фур'є. Тому для порівняння наводяться спектри Фур'є і спектри коефіцієнтів вейвлет-перетворення.

Сигнал 1. На рисунку 3.13 показаний сигнал – косинусоїда $s_{14}=\cos(2\pi\cdot 50t_1)$. На рис. 3.14 наведений Фур'є-спектр цього сигналу. На рис. 3.15 і 3.16 наведені спектри коефіцієнтів його вейвлет-перетворення.

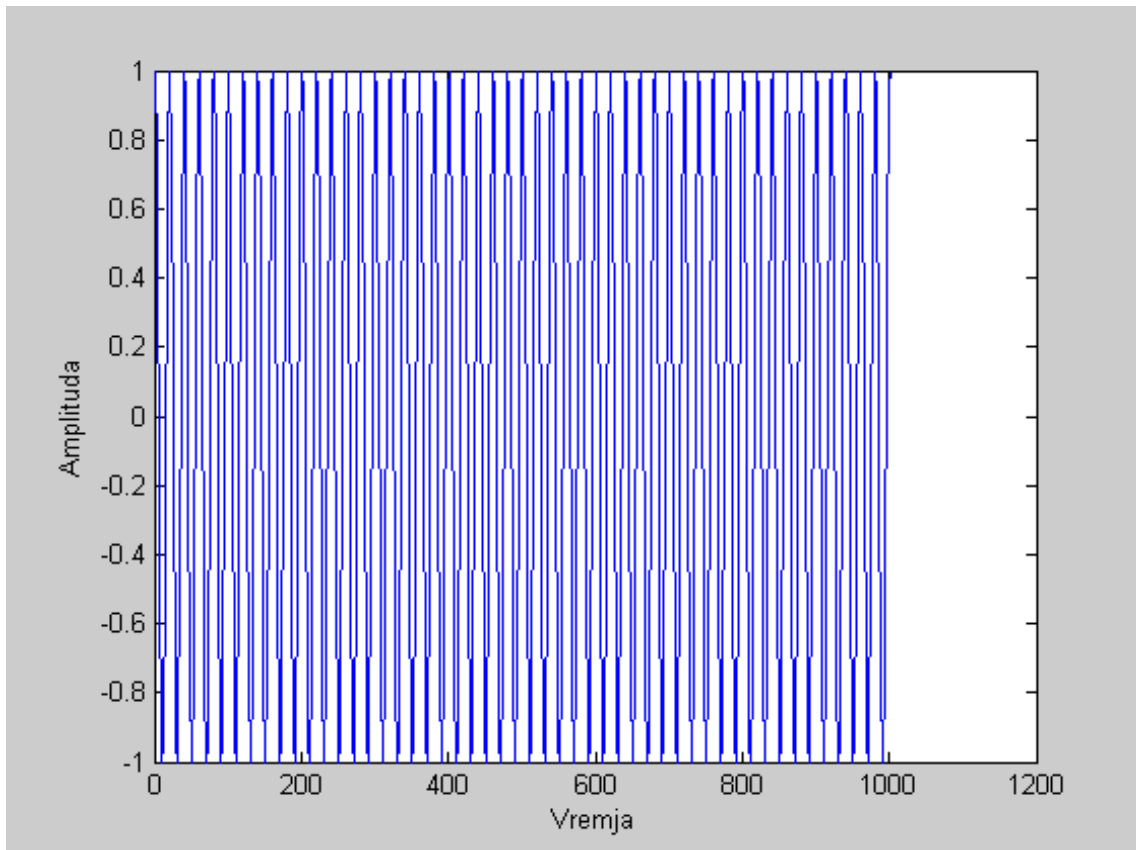


Рис. 3.13 – Сигнал – косинусоїда $s_{14} = \cos(2\pi \cdot 50t_1)$

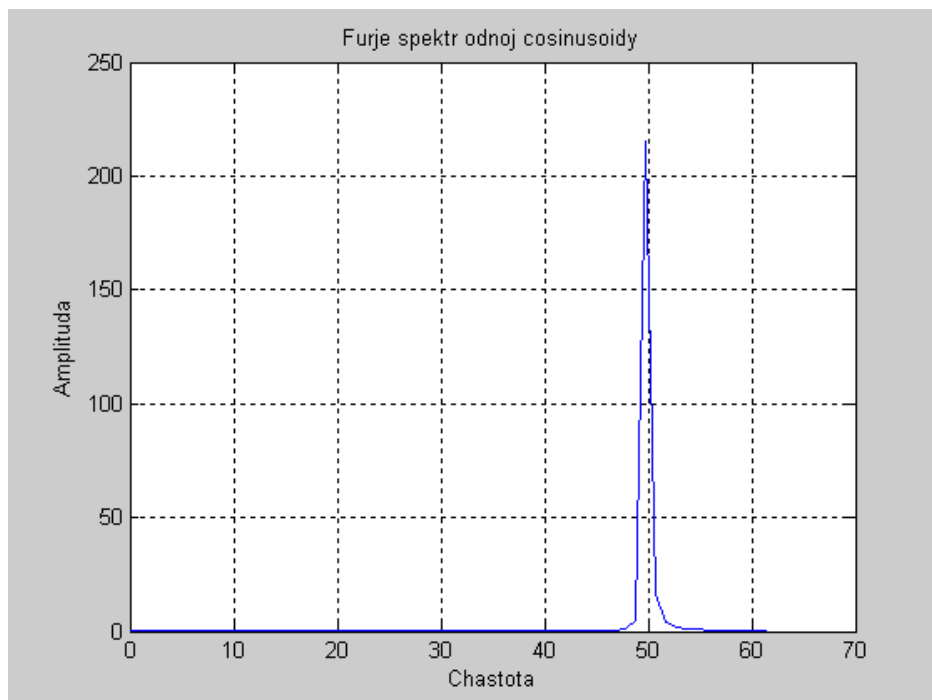


Рис. 3.14 – Фур'є-спектр сигналу $s_{14} = \cos(2\pi \cdot 50t_1)$

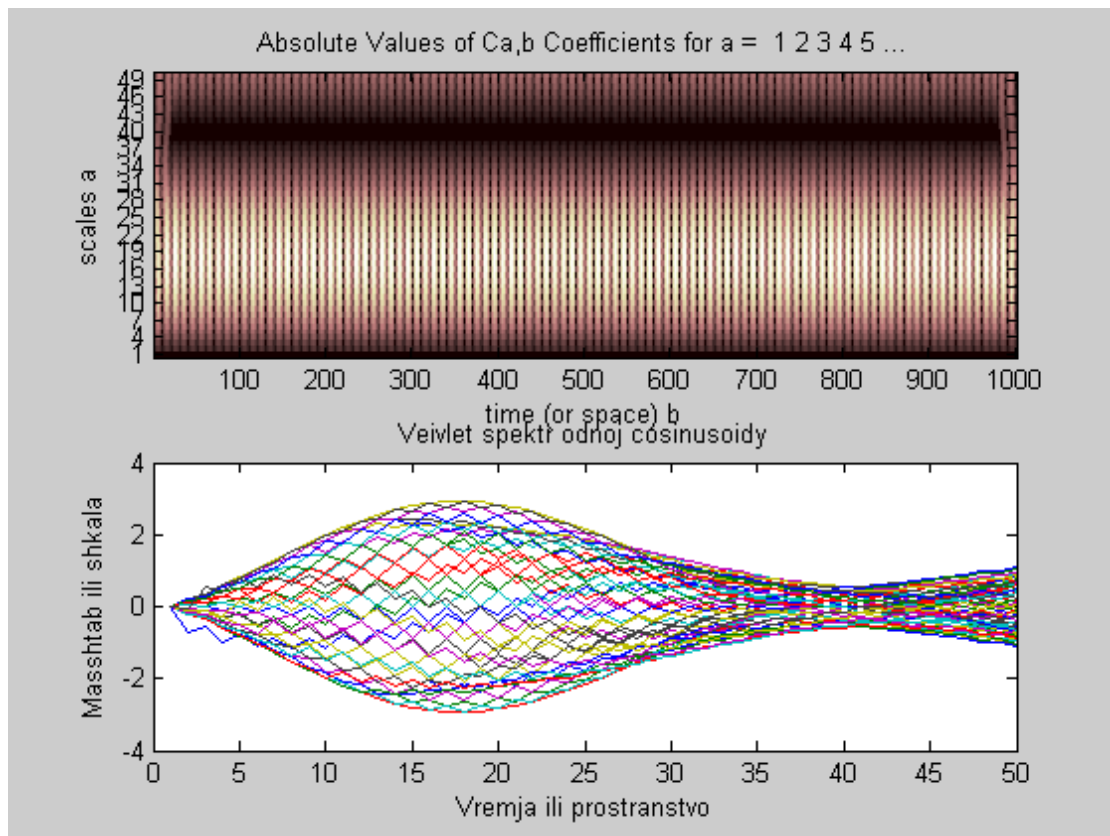


Рис. 3.15 – Спектр коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигналу $s_{14} = \cos(2\pi \cdot 50t_1)$ з глибиною розкладання 50

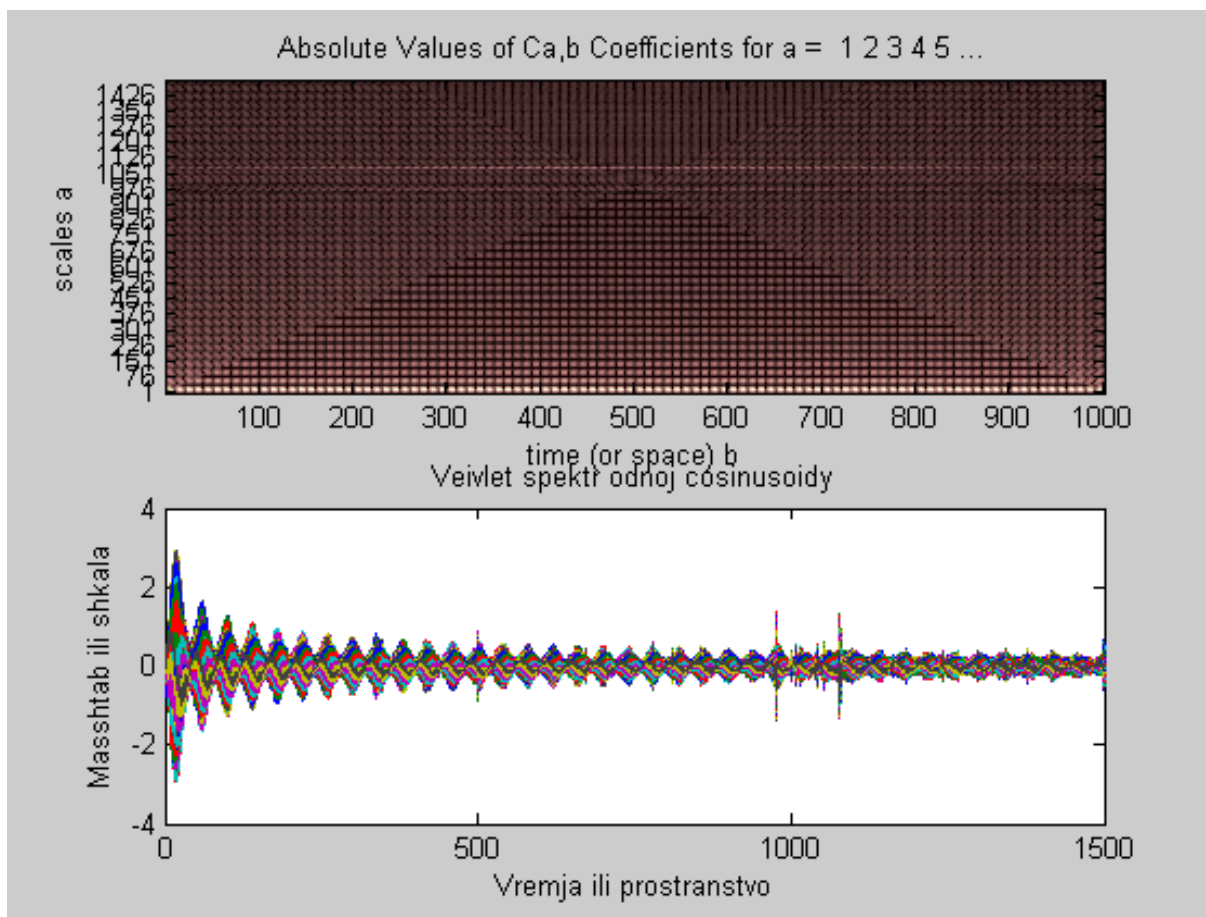


Рис. 3.16 – Спектр коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигналу $s_{14} = \cos(2\pi \cdot 50t_1)$ з глибиною розкладання 1500

Сигнал 2. На рисунку 3.17 показані змодельовані сигнали – косинусоїди з однією амплітудою і з різними частотами $s_{11} = \cos(2\pi \cdot 5t_1)$; $s_{12} = \cos(2\pi \cdot 10t_1)$; $s_{13} = \cos(2\pi \cdot 20t_1)$; $s_{14} = \cos(2\pi \cdot 50t_1)$, а на рис. 3.18 відображений результат їх підсумовування. Рис. 3.19, рис. 3.20 і 3.21 відображують, відповідно, Фур'є-спектр і спектр коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигналу у вигляді суми вказаних косинусоїд.

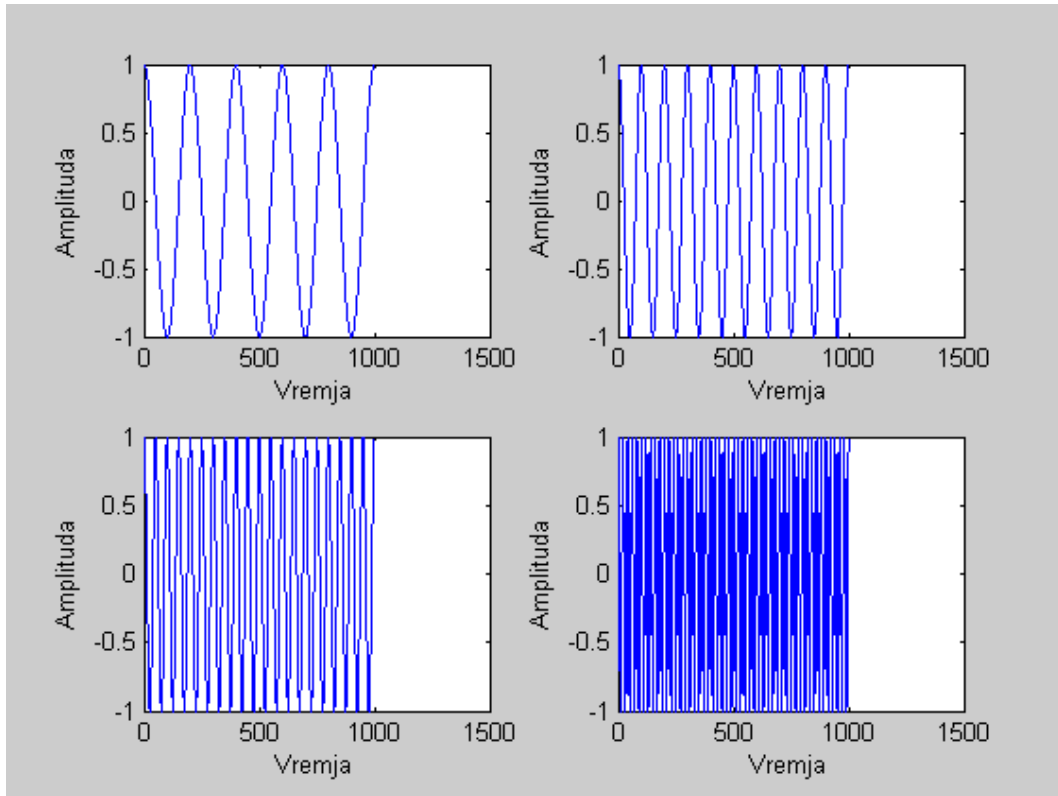


Рис. 3.17 – Сформовані косинусоїди s_{11} ; s_{12} ; s_{13} ; s_{14}

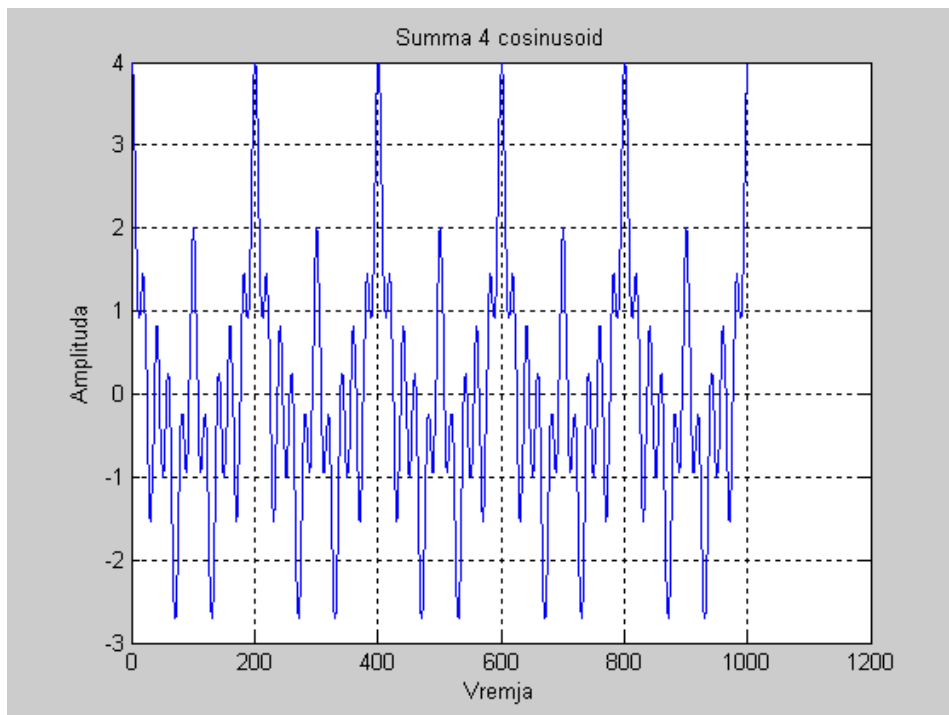


Рис. 3.18 – Сигнал – сума косинусоїд $s_{11}+s_{12}+s_{13}+s_{14}$

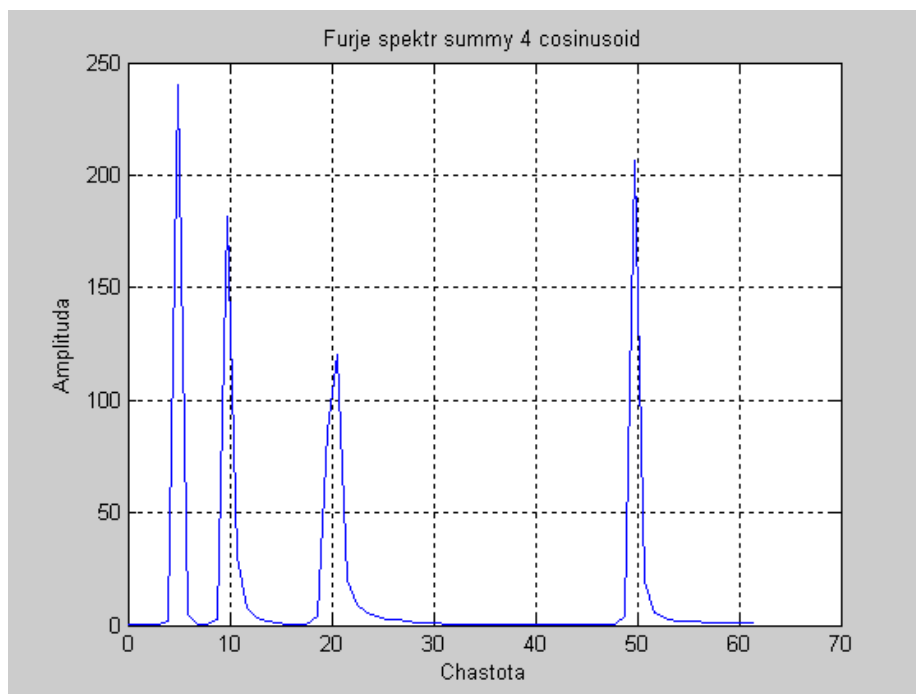


Рис. 3.19 – Фур'є-спектр сигналу – сума косинусоїд $s_{11}+s_{12}+s_{13}+s_{14}$

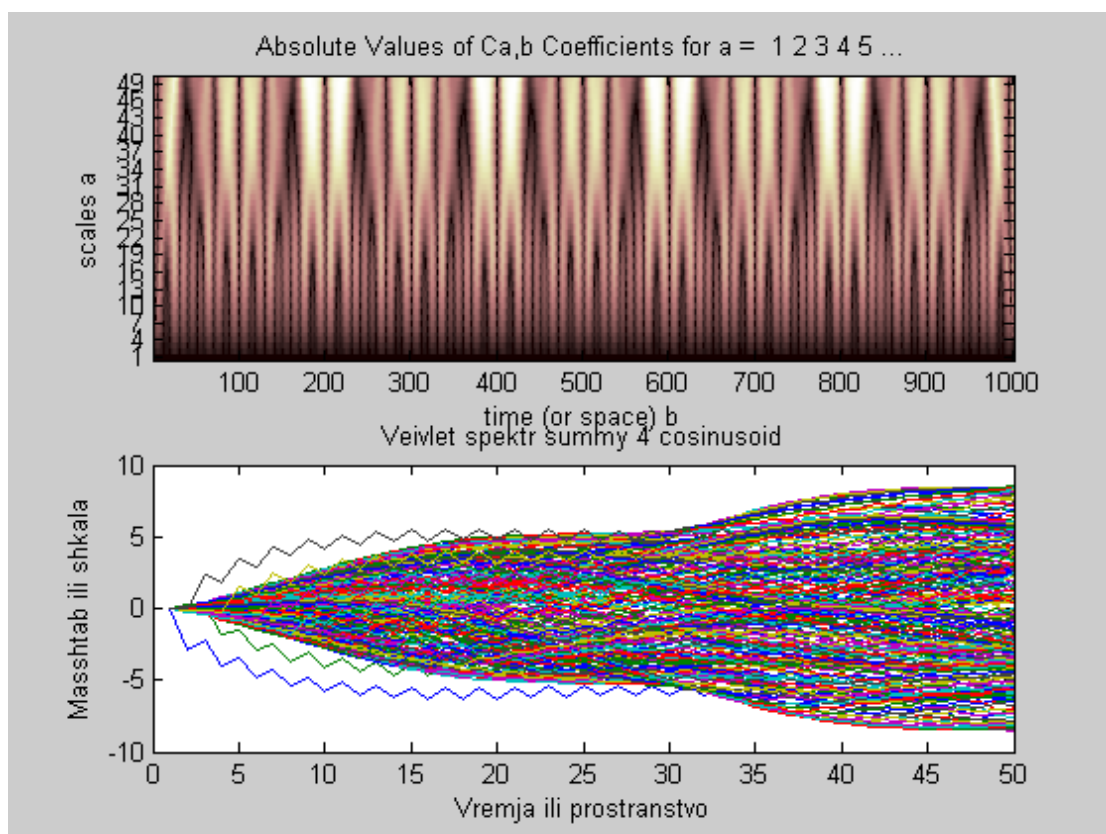


Рис. 3.20 – Спектр коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигналу – сума косинусоїд $s_{11}+s_{12}+s_{13}+s_{14}$ з глибиною розкладання 50

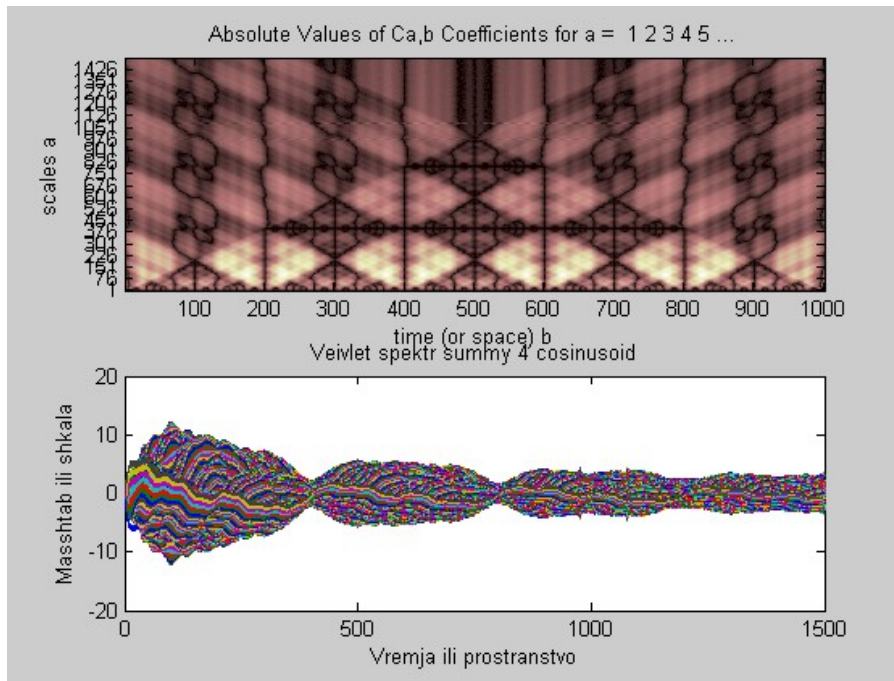


Рис. 3.21 – Спектр коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигнала – сума косинусоїд $s_{11}+s_{12}+s_{13}+s_{14}$ з глибиною розкладання 1500

Сигнал 3. На рисунку 3.22 показаний сигнал – сума двох косинусоїд з різними частотами і амплітудами $s_{11}=\cos(2\pi\cdot 5t_1)$ и $s_{15}=0,3\cos(2\pi\cdot 100t_1)$. На рис. 3.23 наведений Фур'є-спектр цього сигналу. На рис. 3.24 і 3.25 приведені спектри коефіцієнтів його вейвлет-перетворення.

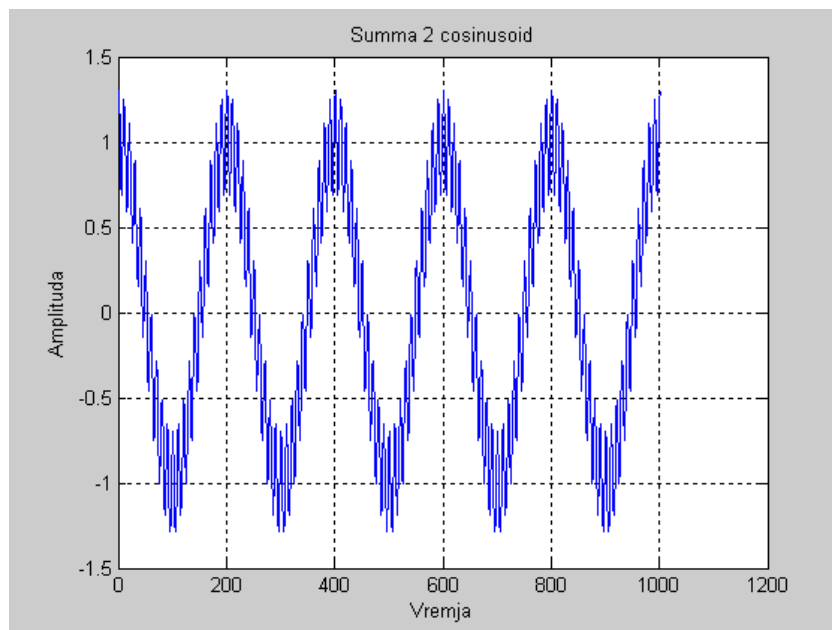


Рис. 3.22 – Сигнал – сума двох косинусоїд з різними частотами і амплітудами $s_{11} + s_{15}$

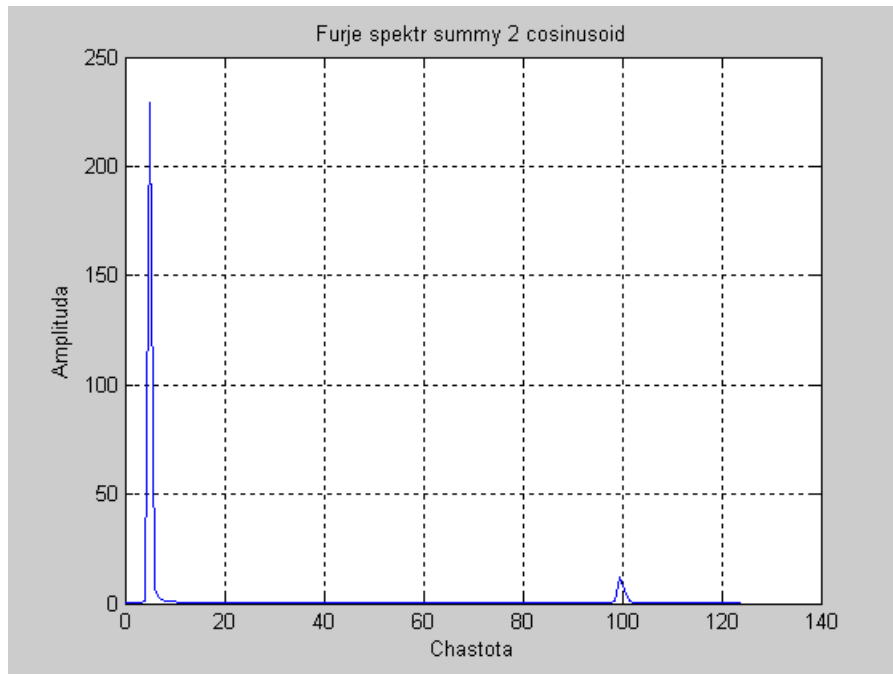


Рис. 3.23 – Фур'є-спектр сигналу – сума косинусів з різними частотами і амплітудами $s_{11} + s_{15}$

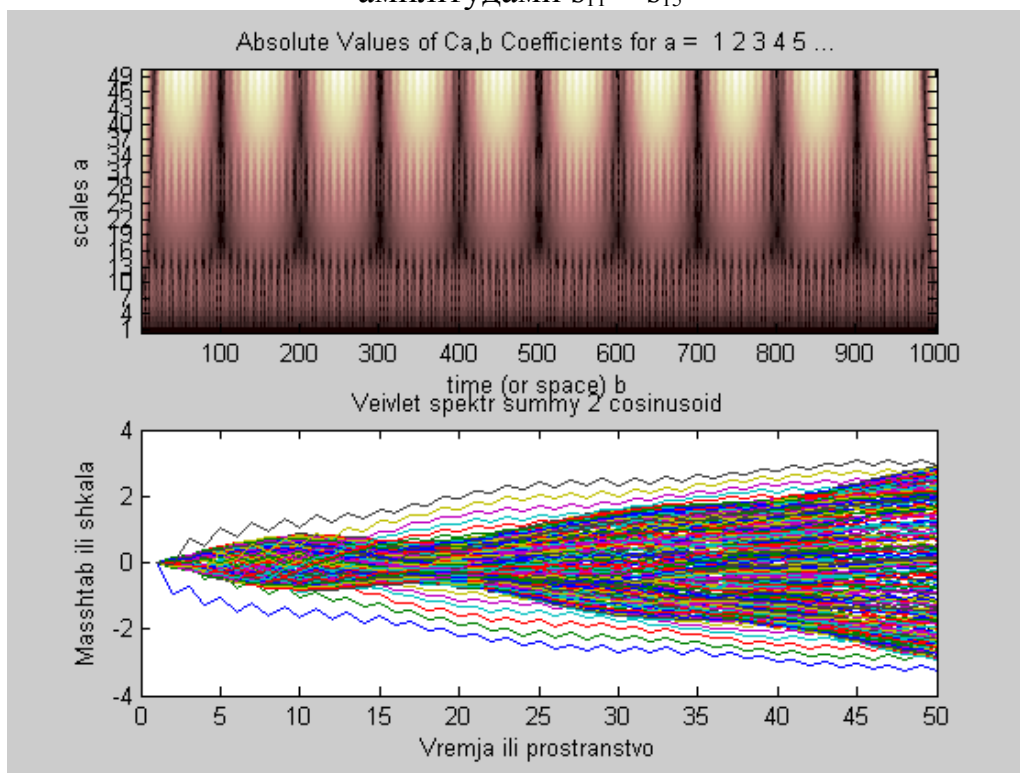


Рис. 3.24 – Спектр коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигналу – сума косинусів з різними частотами і амплітудами $s_{11} + s_{15}$ з глибиною розкладання 50

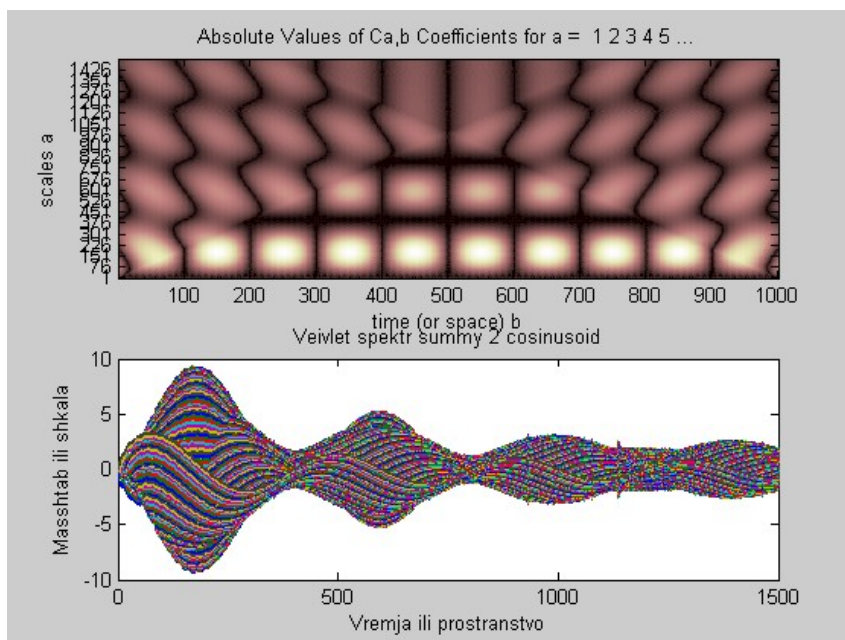


Рис. 3.25 – Спектр коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигнала – сума косинусоїд з різними частотами і амплітудами $S_{11} + S_{15}$ з глибиною розкладання 1500

Сигнал 4. На рисунку 3.26 представлений сигнал – чотири гармонійні функції, які йдуть послідовно в часі $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$ з однаковою амплітудою і з різною частотою. На рис. 3.27 наведений Фур'є-спектр цього сигналу. На рис. 3.28 і 3.29 наведені спектри коефіцієнтів його вейвлет-перетворення.

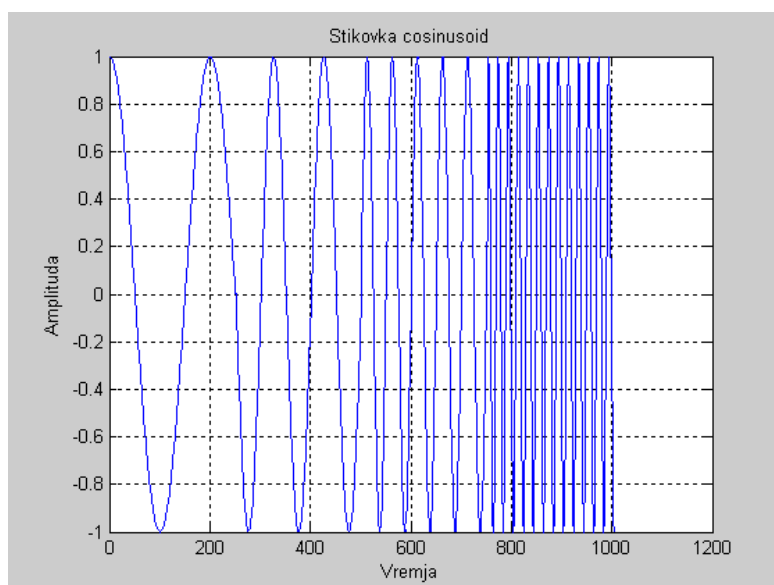


Рис. 3.26 – Сигнал – чотири гармонійні функції $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}$ з однаковою амплітудою і з різною частотою, які йдуть послідовно в часі

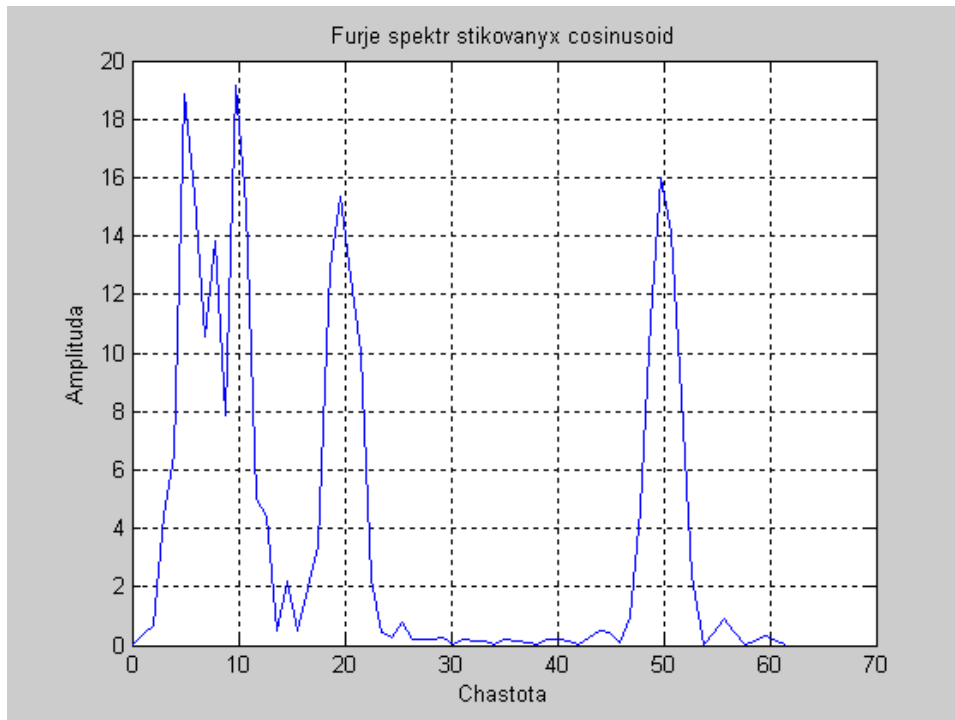


Рис. 3.27 – Фур'є-спектр сигналу – чотири гармонійні функції s_{11} , s_{12} , s_{13} , s_{14} з однаковою амплітудою і з різною частотою, які йдуть послідовно в часі

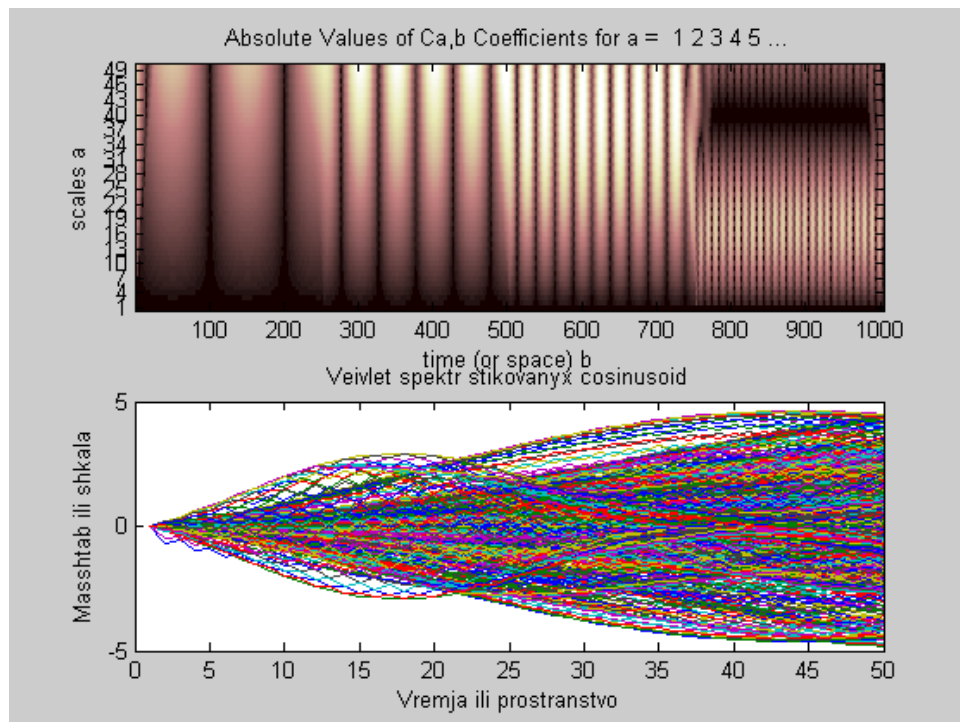


Рис. 3.28 – Спектр коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигналу – чотири гармонійні функції s_{11} , s_{12} , s_{13} , s_{14} з однаковою амплітудою і з різною частотою з глибиною розкладання 50, які йдуть послідовно в часі

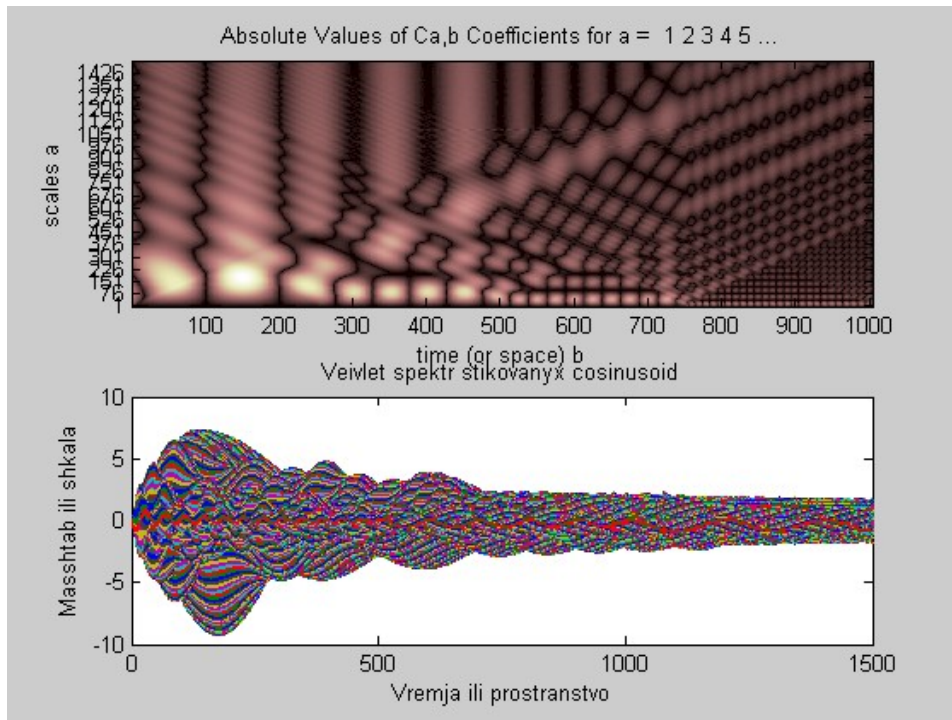


Рис. 3.29 – Спектр коефіцієнтів вейвлет-перетворення сигналу – чотири гармонійні функції s_{11} , s_{12} , s_{13} , s_{14} з однаковою амплітудою і з різною частотою з глибиною розкладання 1500, які йдуть послідовно в часі

При здійсненні прямого дискретного вейвлет-перетворення обчислюються апроксимуючі коефіцієнти cA і деталізуючі коефіцієнти cD першого рівня вейвлет-перетворення сигналу, заданого вектором \mathbf{s} . Коефіцієнти одержуються згорткою сигналу \mathbf{s} з фільтром розкладання нижніх частот LoD для апроксимації і з фільтром розкладання високих частот HiD для деталізації, а потім супроводжуються двійковою децимацією. Обчислення прямого вейвлет-перетворення можливе, як з застосуванням звичайних алгоритмів, так і за допомогою швидких алгоритмів. Швидкі алгоритми можливі для вейвлетів: Хаара, Добеши, симлетів, койфлетів, біртогональних, дуальних біртогональних, дискретних апроксимацій вейвлетів Мейєра.

Як приклад представлений однорівневий дискретний одновимірний вейвлет-аналіз гармонійного сигналу за допомогою двох вейвлетів – Хаара і Добеши. Сигнал представлений на рис. 3.30.

Коефіцієнти cA і cD для вейвлета Хаара представлені на рис. 3.31, коефіцієнти cA і cD для вейвлета Добеши – на рис. 3.32.

Помітна істотна різниця в коефіцієнтах, отриманих з використанням різних вейвлетів.

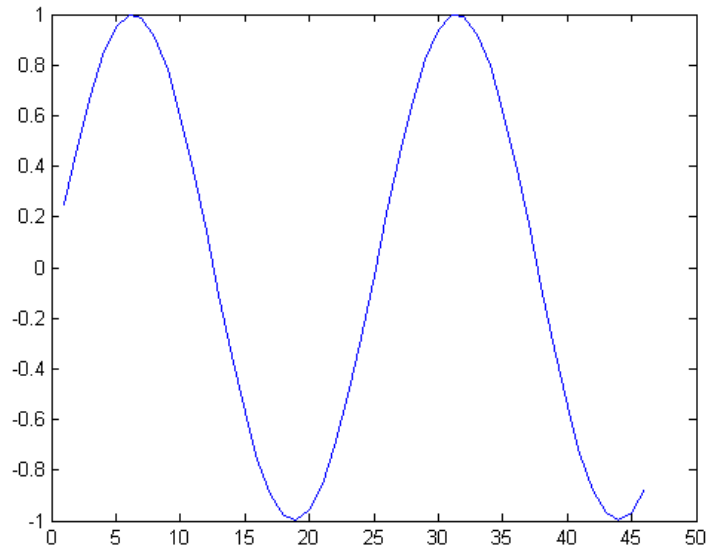
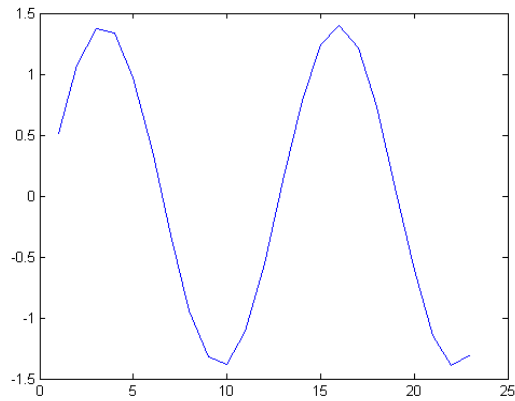
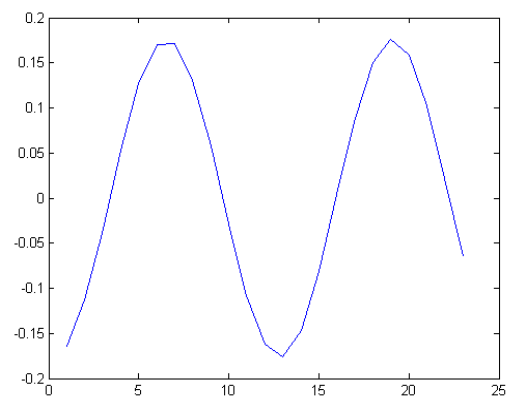


Рис. 3.30 – Гармонійний сигнал

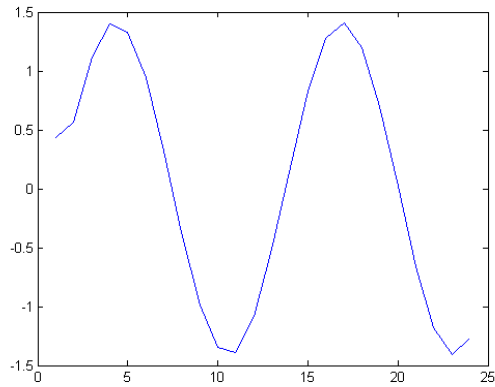


а

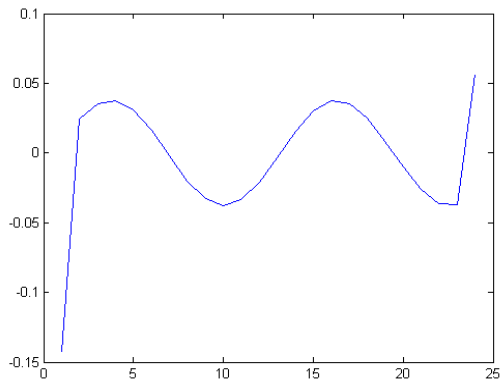


б

Рис. 3.31 – Коефіцієнти вейвлет-перетворення гармонійного сигналу за допомогою вейвлета Хаара (haar): а – апроксимуючі cA ; б – деталізуючі cD



а

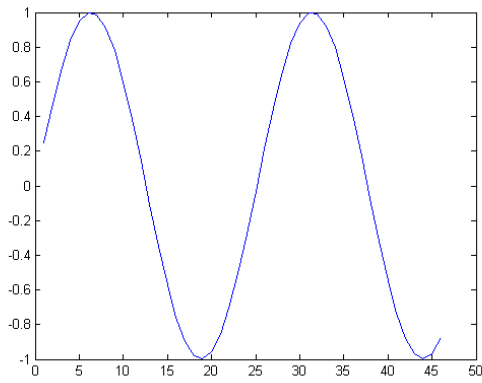


б

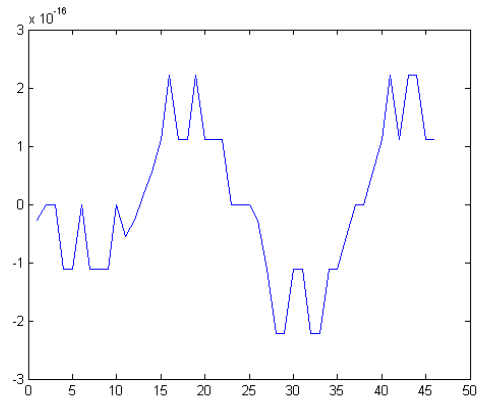
Рис. 3.32 – Коefіцієнти вейвлет-перетворення гармонійного сигналу за допомогою вейвлета Добеши (db2) :
а – апроксимуючі cA ; б – деталізуючі cD

При здійсненні зворотного однорівневого дискретного одновимірного вейвлет-перетворення за відомими апроксимуючими коefіцієнтами cA і деталізуючим коefіцієнтом cD першого рівня обчислюються значення сигналу \mathbf{s} з використанням прямого обчислення або фільтрів реконструкції LoR , HiR , тобто відновлення здійснюється в зворотному порядку. В коefіцієнти cA і cD додаються нулі на непарні місця, і далі утворюється згортка отриманих масивів з фільтрами реконструкції LoR і HiR або пряме обчислення. Можна здійснити відновлення і за одним типом коefіцієнтів – лише за апроксимуючими коefіцієнтами або лише за деталізуючими коefіцієнтами.

Як приклад представлено однорівневе дискретне одновимірне вейвлет-встановлення гармонійного сигналу за коefіцієнтами, отриманими в попередньому прикладі, і оцінена якість відновлення, причому показником якості відновлення є максимальна сумарна абсолютна помилка.



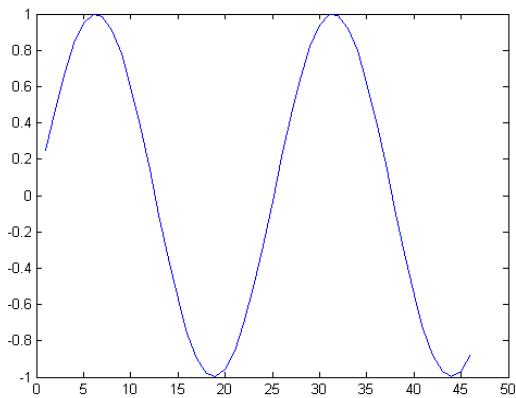
а



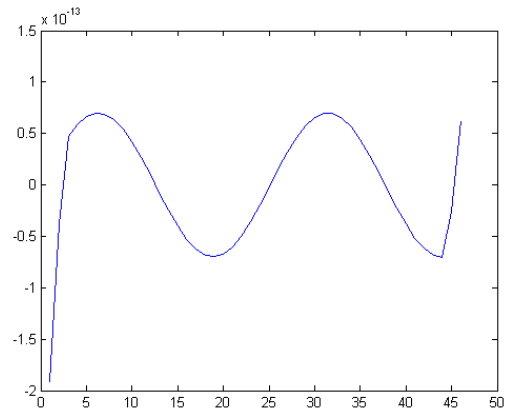
б

Рис. 3.33 – Гармонійний сигнал (а), відновлений зворотним однорівневим дискретним одновимірним вейвлет-перетворенням за допомогою вейвлета Хаара і графік (б) його абсолютної помилки відновлення

Максимальна сумарна абсолютна помилка відновлення склала $8.3969e-016$.



а



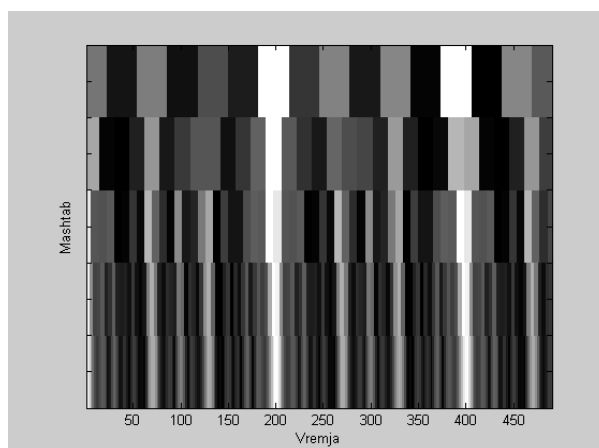
б

Рис. 3.34 – Гармонійний сигнал (а), відновлений зворотним однорівневим дискретним одновимірним вейвлет-перетворенням за допомогою вейвлета Добеши (db2) і графік (б) його абсолютної помилки відновлення

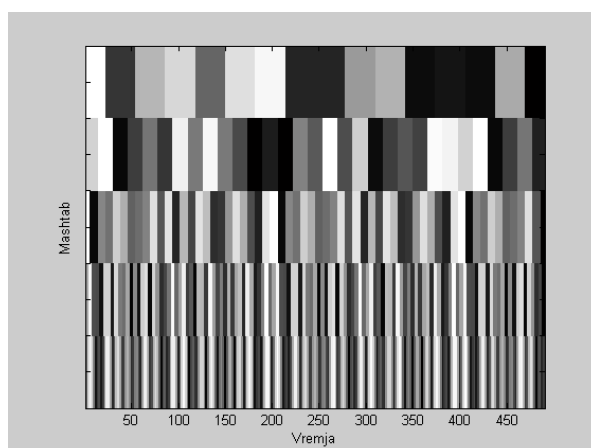
Максимальна сумарна абсолютна помилка відновлення склала $3.8974e-013$.

У системах комп'ютерної математики передбачено також відображення коефіцієнтів *одновимірного дискретного* вейвлет-розкладення у вигляді спектрограм з кольоровим або яскравим відображенням значень вейвлет-коефіцієнтів. Для цього випадку для більшої наочності сигнал у вигляді суми двох синусоїд розкладемо до 5 рівня. Спектр його апроксимуючих коефіцієнтів виглядатиме, як показано

на рис. 3.35, а, а спектр його деталізуючих коефіцієнтів – на рис. 3.35, б.



а



б

Рис. 3.35 – Відображення коефіцієнтів одновимірного дискретного вейвлет-розкладання у вигляді спектрограм з яскравим відображенням значень вейвлет-коефіцієнтів

При однорівневому прямому дискретному двовимірному вейвлет-перетворенні для вхідної матриці \mathbf{S} обчислюються апроксимуючі коефіцієнти cA і деталізуючі коефіцієнти першого рівня трьох типів: горизонтальні cH , вертикальні cV і діагональні cD , з використанням для цього тензорного добутку $\psi(x)\psi(y)$ вейвлета $\psi(x)$. Всі отримані коефіцієнти утворюють матриці розміром в два рази меншим, ніж початкова матриця \mathbf{S} .

Для прикладу відобразимо результат однорівневого прямого дискретного двовимірного вейвлет-перетворення супутникового знімка в двох варіантах: а) у вигляді яскравого зображення і тривимірної поверхні;

б) у вигляді яскравого зображення з нормованими коефіцієнтами розкладання.

Перший варіант відображення приведений на рис. 3.36 – 3.41.



Рис. 3.36 – Початковий супутниковий знімок для перетворення

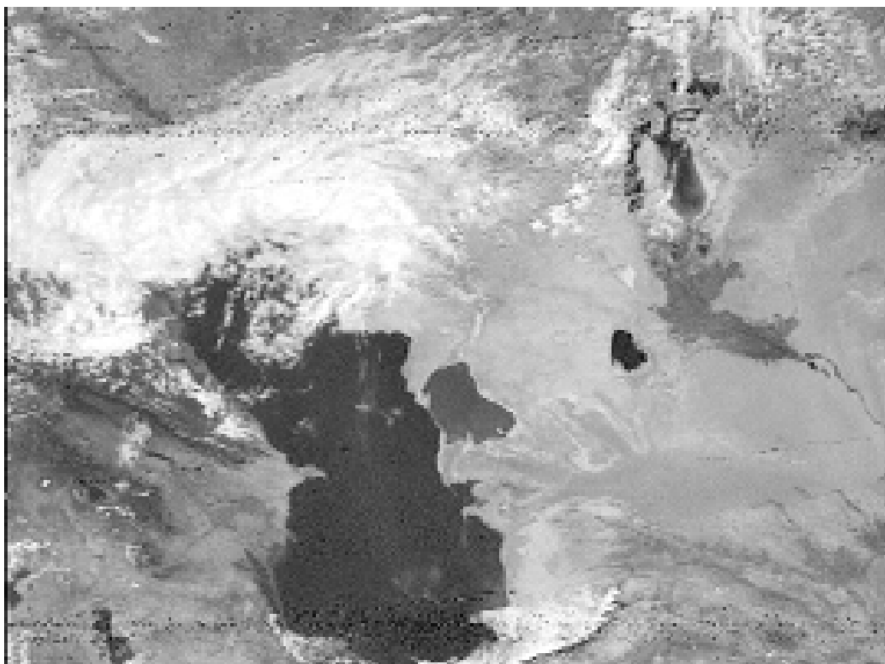


Рис. 3.37 – Яскраве зображення апроксимуючих коефіцієнтів cA_1 однорівневого прямого дискретного двовимірного вейвлет-перетворення

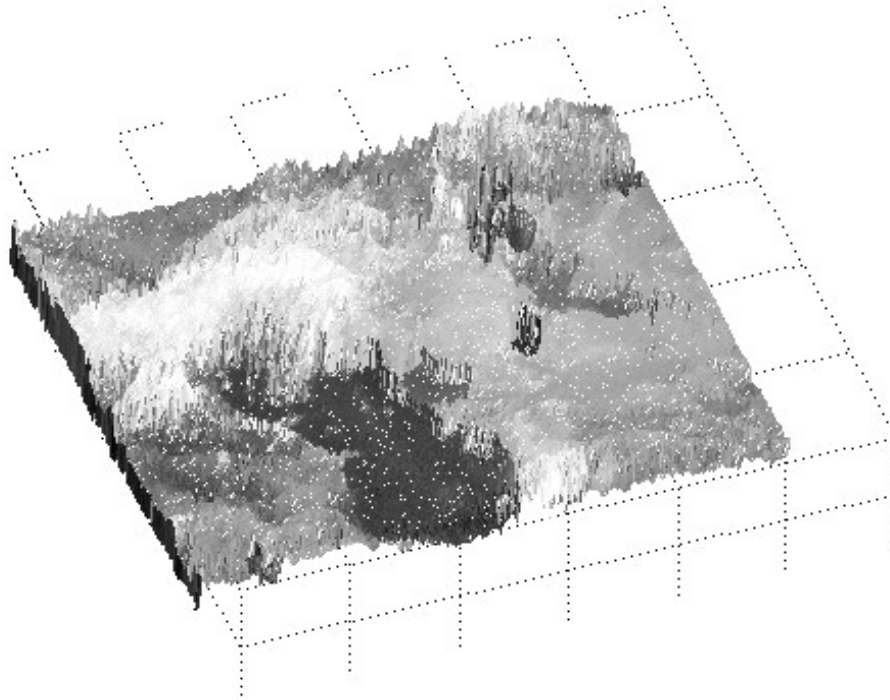


Рис. 3.38 – Амплітудне зображення апроксимуючих коефіцієнтів cA_1 однорівневого прямого дискретного двовимірного вейвлет-перетворення

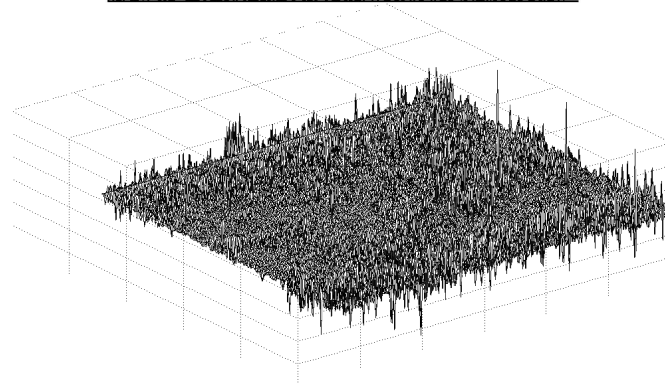
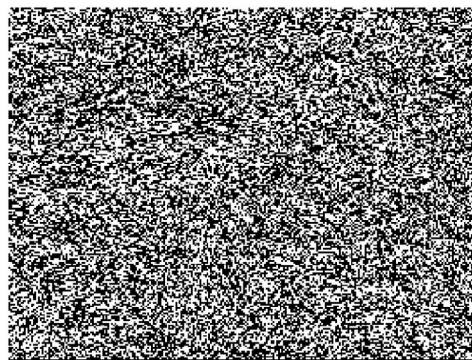


Рис. 3.39 – Яскраве і амплітудне зображення деталізуючих коефіцієнтів cH_1 однорівневого прямого дискретного двовимірного вейвлет-перетворення

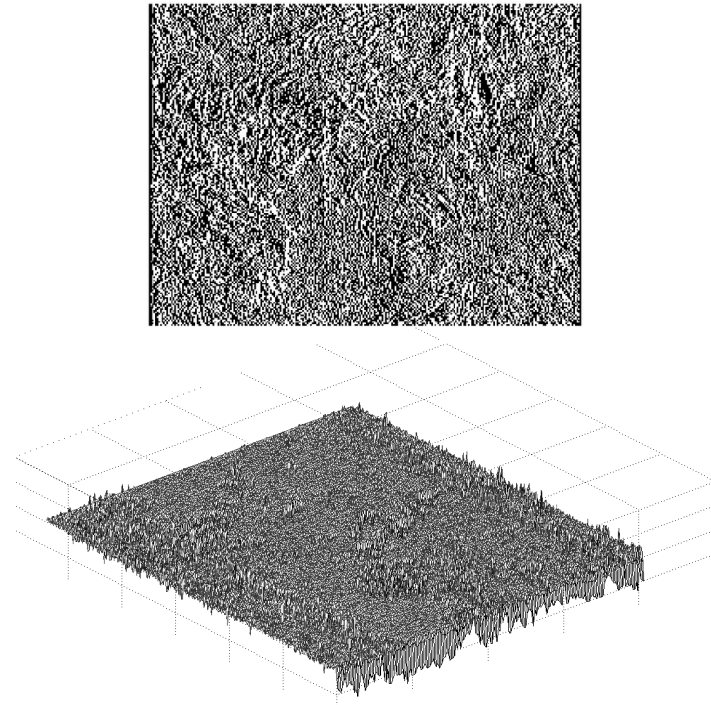


Рис. 3.40 – Яскраве і амплітудне зображення деталізуючих коефіцієнтів cV_1 однорівневого прямого дискретного двовимірного вейвлет-перетворення

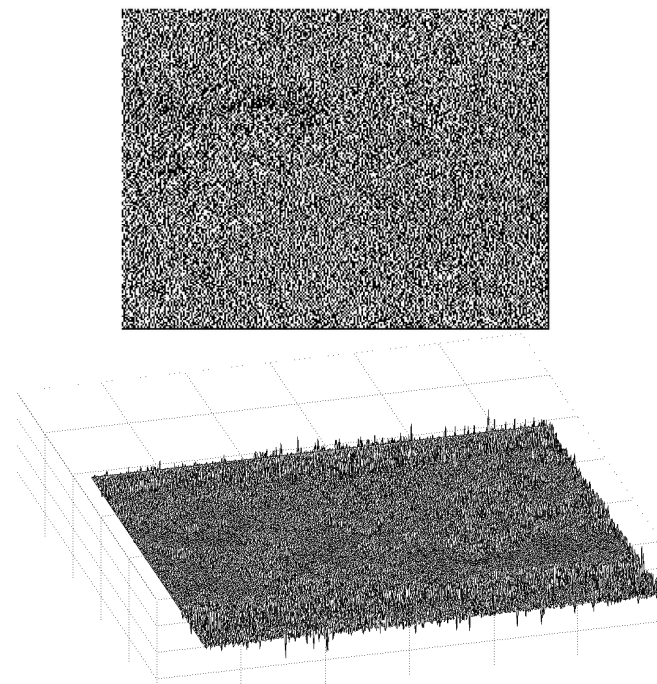


Рис. 3.41 – Яскраве (ліворуч) і амплітудне (справа) зображення деталізуючих коефіцієнтів cD_1 однорівневого прямого дискретного двовимірного вейвлет-перетворення
Другий варіант відображення приведений на рис. 3.42.

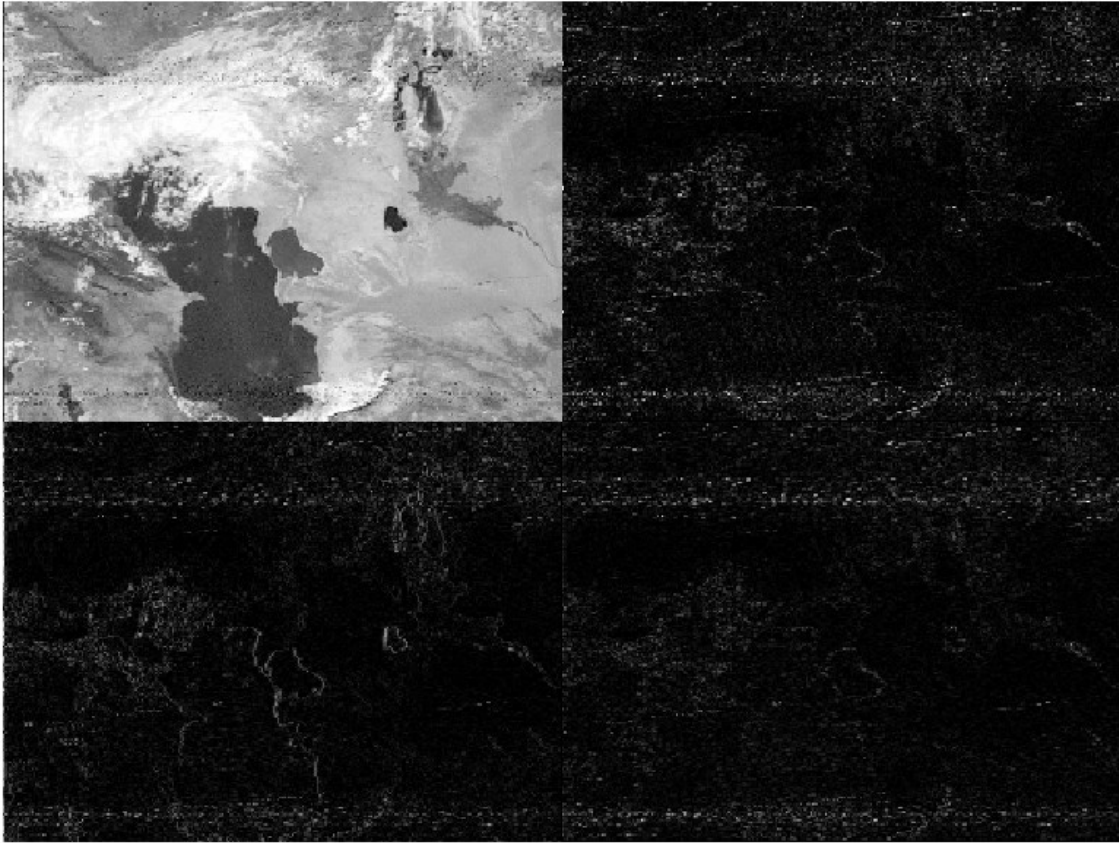


Рис. 3.42 – Коефіцієнти однорівневого прямого дискретного двовимірного вейвлет-перетворення (ліворуч вгорі – cA_1 , справа вгорі – cH_1 , ліворуч внизу – cV_1 , справа внизу – cD_1)

На рис. 3.36 наведений початковий супутниковий знімок району Каспійського моря. Спостерігається суша, річки, велика водна поверхня, гори, хмарні системи. Вгорі і внизу знімка добре видно прийнята високочастотна імпульсна радіоперешкода. На рис. 3.37, на якому відбиті апроксимуючі коефіцієнти розкладання cA , картина явно згладжена за рахунок роботи масштабуючого фільтра (φ), всі контури огрублені, перешкоди згладжені. На всіх трьох амплітудних зображеннях деталізуючих коефіцієнтів (рис. 3.39 – 3.41) чітко локалізується в просторі імпульсна перешкода і видно високочастотні деталі зображення.

На рис. 3.42 видно, що коефіцієнти cH_1 більшою мірою відбивають горизонтальні елементи зображення (справа вгорі), коефіцієнти cV_1 більшою мірою відбивають вертикальні елементи рисунка (ліворуч внизу), а коефіцієнти cD_1 краще представляють діагональні лінії зображення (справа внизу). Особливо добре це видно на контурах затоки Кара-Богаз-Гол.

Запитання для самоконтролю

1. В чому полягає спектрально-часовий аналіз?
2. В чому полягає ідея вейвлет-перетворення?
3. Яке визначення вейвлета?
4. Які ознаки вейвлета?
5. В чому полягає пряме безперервне вейвлет-перетворення?
6. В чому полягає зворотне безперервне вейвлет-перетворення?
7. В чому полягає діадне вейвлет-перетворення?
8. В чому полягає пряме дискретне вейвлет-перетворення?
9. У чому полягає зворотне дискретне вейвлет-перетворення?
10. Що таке вейвлет фрейми?
11. Що таке кратномасштабний аналіз і синтез?
12. На яких посланнях базується кратномасштабний аналіз?
13. Яким чином представляються результати вейвлет-перетворення?
14. Які властивості вейвлет-перетворення?
15. У чому полягає властивість частотно часової локалізації?
16. Що таке кут впливу або достовірності?
17. Як класифікуються вейвлети?
18. У чому полягають можливості вейвлет-аналізу?
19. У чому полягає частотний підхід до вейвлет аналізу?
20. У чому полягає вейвлет розкладання і вейвлет-відновлення?
21. Який зміст вейвлет-аналізу?
22. Що таке алгоритм Малла?
23. Що таке вейвлет-пакетна обробка?
24. Що використовується як критерій вибору найкращого базису для обробки сигналу?
25. Яким чином здійснюється двовимірне вейвлет-обробка?

4 ЗАСТОСУВАННЯ КОВЗНОГО ВІКОННОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є І ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО-

ЧАСОВОЇ ОБРОБКИ ДАНИХ МОНІТОРИНГА

4.1 Опис даних палеокліматичного моніторинга

Дослідження циклічності глобальної кліматичної системи пов'язані з використанням довгоперіодних кліматичних рядів і базуються на аналізі цих палеорекоконструкцій за допомогою методів математичної статистики. Одним із способів отримання довгоперіодних кліматичних рядів є вивчення гляціальних відкладів. Аналіз крижаного керна дає можливість отримати відомості про кліматичні умови за тривалий період часу. Вивчення нивально-гляціальних систем минулого за допомогою льодяних кернів дозволяє отримати інформацію про вміст в ньому дейтерія, мікрочастинок, парникових газів, ізотопів і оцінити зміни температури повітря за період, що охоплює декілька кліматичних циклів [15].

З середини минулого століття все більшу роль у вивченні кліматичних систем минулого відіграє аналіз керна з глибоких свердловин, пробурених на льодовиках в зонах акумуляції. Безперервно удосконалюються способи аналізу керна. Аналіз крижаного керна і вмісту в ньому дейтерію, мікрочастинок, парникових газів і ізотопів вже дозволив оцінити зміни температури повітря за період близько 800 тис. років [16, 17]. Детальні палеорекоконструкції температури будуються на основі аналізу ізотопного складу кернів, а саме, відсоткового вмісту важкого ізотопу кисню ^{18}O (його середній вміст в природі – близько 0,2% від усіх атомів кисню). Молекули води, що містять цей ізотоп кисню, важче випаровуються і легше конденсуються. Тому, наприклад, у водяній парі над поверхнею моря вміст ^{18}O нижчий, ніж в морській воді. А в конденсації на поверхні снігових кристалів, що формуються в хмарах, більш охоче беруть участь молекули води, що містять ^{18}O , завдяки чому їх вміст в опадах вищий, ніж у водяній парі, з якої опади формуються. Чим нижча температура формування опадів, тим сильніше проявляється цей ефект, тобто тим більше в них ^{18}O . Тому, оцінивши ізотопний склад снігу або льоду, можна оцінити і температуру, при якій формувалися опади. Був виявлений зв'язок між ізотопною кривою з гренландської свердловини Crete і кривими температур в Англії й Ісландії. Ці температури реконструйовані для останніх 300...500 років по надійних записах прямих спостережень за природними процесами [18–20]. Все це дає підстави розглядати гренландські льодовикові керни як чутливий природний реєстратор температурних флуктуацій в Північній Півкулі і, зокрема, в Європі.

Особливість дослідження довгоперіодних кліматичних рядів полягає у властивості нестационарності цих рядів, в них інформативним є сам факт

зміни частотно-часових характеристик ряду, яка відбиває динаміку кліматичних процесів. Часто використовуване в дослідженнях перетворення Фур'є [21–29] виявляється недостатньо ефективним при застосуванні його до складних нестационарних рядів. Так, наприклад, перетворення Фур'є не розрізняє суму і послідовність синусоїд в часі – їх спектри практично однакові, внаслідок чого втрачається інформація про часові характеристики ряду. Тому дуже бажаний спектрально-часовий аналіз подібних моніторингових даних.

У подальшому аналізі спиратимемося на дані, отримані від двох найбільш відомих з пробурених в Гренландії за останню третину століття свердловин, – GRIP і GISP2 [18–20]. Аналіз стану льодяних кернів дає повну картину змін клімату Землі і стан атмосфери у минулому. Нашарування льоду, що збереглися, дозволяють робити висновки про значення і хід температур далеких епох з 1 відсотковою помилкою [18, 19, 30]. Відновлена температура повітря в приземному шарі в центральній частині Гренландії за останні 50 тис. років була визначена на основі аналізу стабільних ізотопів N_2 і Ar , отриманих з льодяних кернів. Вона відбиває хід зимових значень температури повітря, які, як відомо, близькі до середньорічних температур [31]. Ці температури, реконструйовані за останні 50 тис. років, надано Світовим центром даних палеокліматології World Data Center for Paleoclimatology, Boulder, USA [32]. Ці дані є набором точок, які фіксують зміну температури повітря в нерегулярні моменти часу (рис. 4.1).

Для дослідження був використаний перетворений ряд реконструйованих даних температури приблизно за 50 тис. років (точніше – за 49 830 років). Для цього з початкового ряду на основі інтерполяції був сформований ряд значень температури повітря через кожні тридцять років (рис. 4.2).

Такий період вибірки пов'язаний з тим, що зміна тенденцій в зміні тиску і температури, а відповідно і зміна типу атмосферної циркуляції, спричиняють відповідні зміни в кутовій швидкості обертання Землі. Саме при зниженій частоті появи меридіональної форми циркуляції спостерігається прискорення обертання Землі і навпаки [33]. Ця тенденція має квазіперіодичний характер зі зразковим періодом в 30...35 років. Помітимо, що кратні гармоніки з періодами $\approx 30...60$ років характерні для стеричних коливань рівня Світового океану, глобальної температури повітря і температури поверхні океану [27, 34].

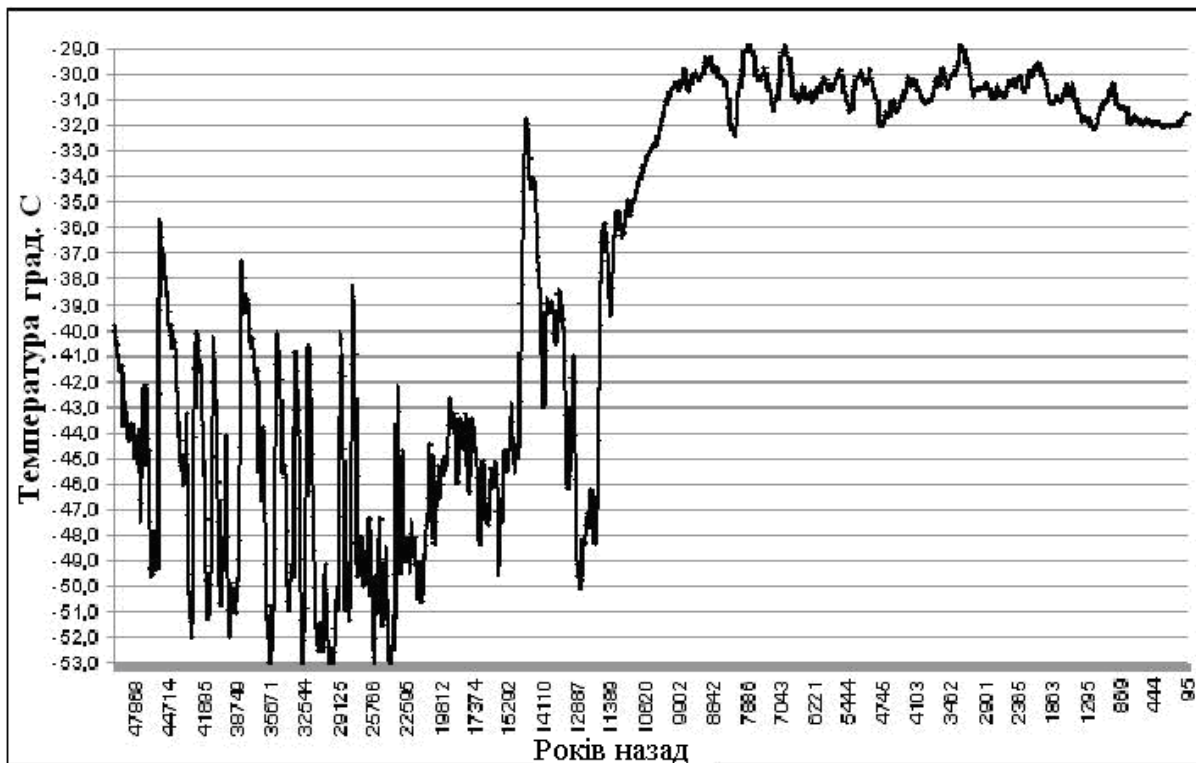


Рис. 4.1 – Початковий нерегулярний ряд реконструйованих значень температури в центральній частині Гренландії

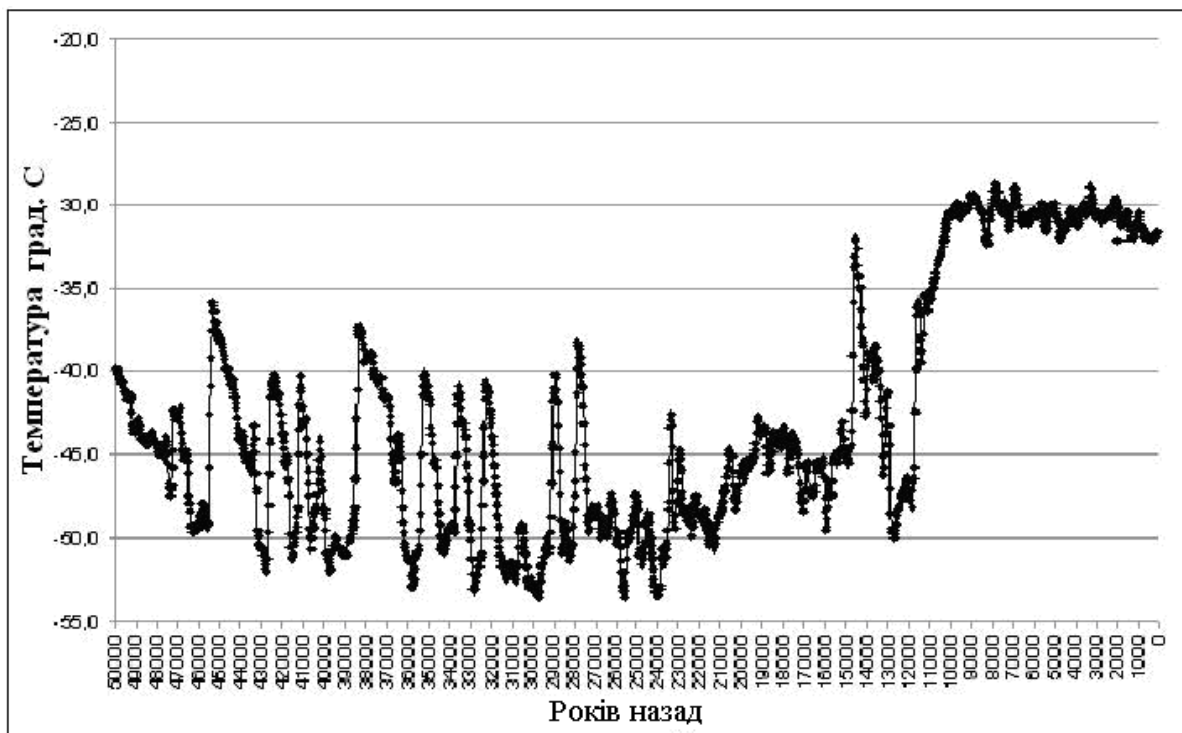


Рис. 4.2 – Перетворений ряд реконструйованих значень температури в центральній частині Гренландії з дискретністю 30 років

При детальному розгляді цього ряду добре видно, що температура повітря за 49 830 років зазнавала значних змін (рис. 4.3). Зміни температури повітря і пов'язані з нею періодичності коливання атмосферної циркуляції проявляються впродовж деякого часового інтервалу (десятки, тисячі або мільйони років) і, з часом, змінюються або зникають повністю [27]. Кожна циклічність має свою міру стійкості в часі і цим циклам відповідає певна енергетика, яка залежить від багатьох зовнішніх і внутрішніх кліматоутворювальних чинників. Тому важливим науковим завданням є виявлення не лише енергетично значущих періодів коливань, але і прояву найбільш "яскравих" періодичностей в кліматичній системі планети.

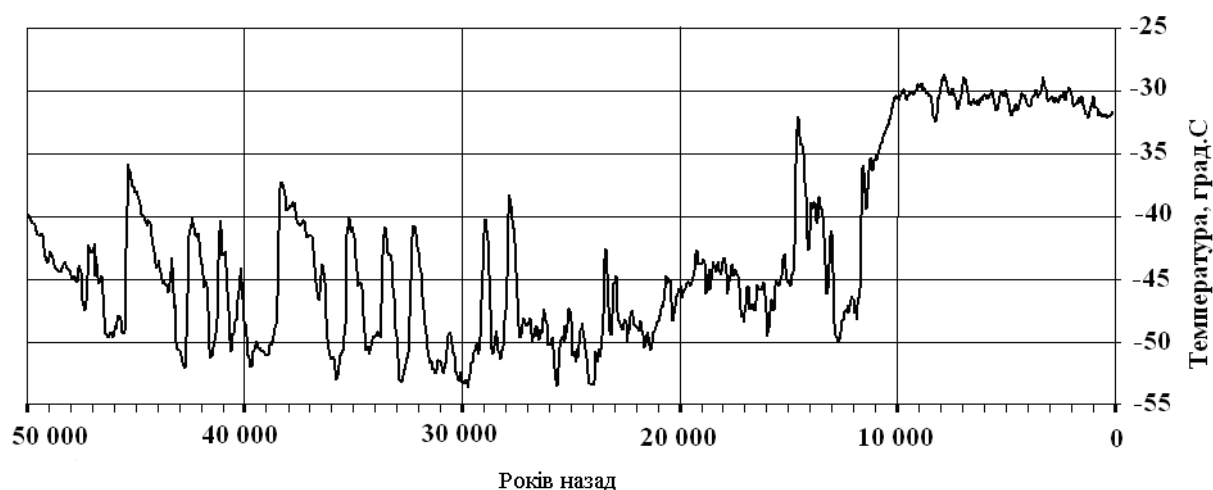


Рис. 4.3 – Згладжений ряд реконструйованих значень температури в центральній частині Гренландії з дискретністю 30 років

4.2 Спектрально-часовий аналіз довгоперіодного кліматичного ряду із застосуванням ковзного віконного перетворення Фур'є

Спектрально-часовий аналіз (СЧАН) досить широко застосовується для виявлення нестационарних сигналів в часових рядах систем геофізичного моніторингу [22-24, 27]. СЧАН нестационарного процесу полягає в оцінці поточного спектра частини ряду, який відповідає ковзному часовому вікну деякої малої довжини. При такій оцінці отримуємо залежність спектра енергії сигналу, як від частоти, так і від положення середини або правого краю вікна на досліджуваному ряді, у вигляді рельєфу. Ця залежність візуалізується у вигляді або двовимірних ліній рівнів, або тривимірних рельєфів, які називають СЧАН-діаграмами (рис. 4.4). Максимальним значенням такої залежності відповідають часові інтервали збільшення енергії коливань в різних частотних смугах, що і підлягає дослідженню.

Застосування при спектрально-часовому аналізі перетворення Фур'є дозволяє вчислити спектральну щільність процесу, що є функцією часу або просторових координат.

Оскільки досліджуваний ряд є єдиною реалізацією випадкового процесу, тоді використовуємо для його аналізу непараметричний метод спектрального аналізу, тобто не застосовуємо методи усереднення спектрів, властиві методам параметричного або, як то кажуть, модельного аналізу [4]. В нашому випадку непараметричний метод спектрального аналізу полягає в застосуванні дискретного перетворення Фур'є за допомогою системи комп'ютерної математики MatLab.

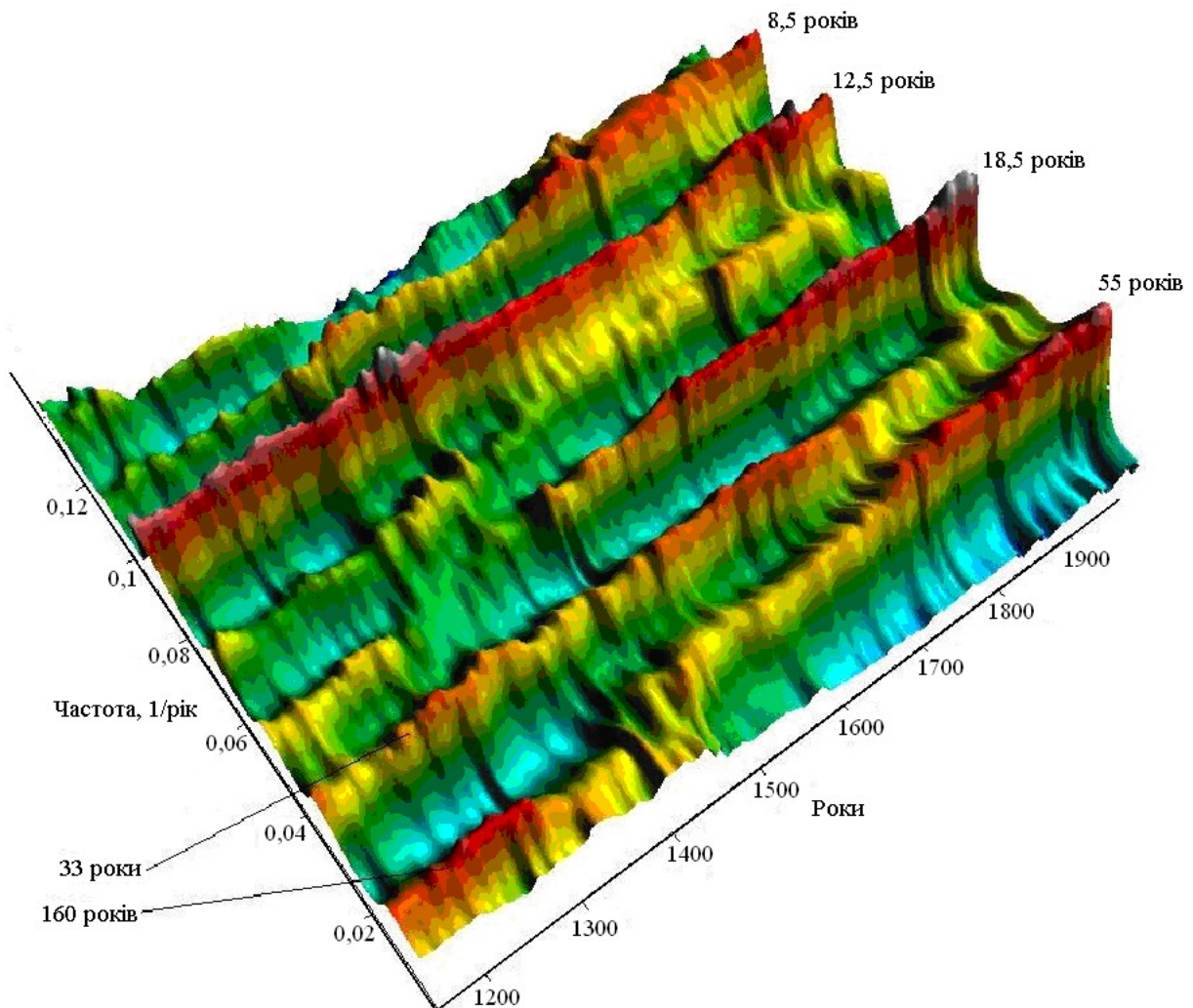


Рис. 4.4 – СЧАН-діаграма [27]

При проведенні дискретного перетворення Фур'є у вказаній системі комп'ютерної математики передбачається, що послідовність відліків аналізованого ряду є періодично продовженою вперед і назад в часі [35]. Якщо значення початкових і кінцевих відліків ряду розрізняються, тоді при періодичному повторенні на стиках сегментів виникають скачки, через які

спектр розширюється. Це явище називається розтіканням спектра. Для зменшення розтікання спектра при дискретному перетворенні Фур'є застосовуються вагові функції, які називаються вікнами. В цьому випадку перед розрахунком спектра із застосуванням дискретного перетворення Фур'є ряд множиться на вагову функцію, яка повинна спадати до країв сегмента. Застосування операції множення ряду на функцію вікна призводить до того, що піки, які містяться в спектрі сигналу, дещо розширюються. Проте при цьому стає можливим зменшення рівня бічних пелюсток спектральної функції, що і є в нашому випадку метою застосування вагової функції. З всієї безлічі віконних функцій для досліджуваного ряду доцільним є використання вікна Чебишева. Воно створює незначне, в порівнянні з іншими вікнами (прямокутним, трикутним, Ханна, Блекмана, Хеммінга, Тьюки та ін.) [6] розширення головної пелюстки спектра і дозволяє створити наперед заданий малий однаковий рівень його бічних пелюсток (у нашому випадку – -40 дБ).

При проведенні спектрально-часового аналізу описаного вище ряду його результати відобразимо у вигляді тривимірної СЧАН-діаграми. По осі абсцис відкладається час, по осі ординат – частота, а вздовж осі аплікату – відображується значення енергії спектра. Будується спектрограма таким чином. Часове вікно величиною в задану кількість відліків ряду зміщується вздовж ряду зліва направо із заданим кроком. Для кожного кроку розраховується спектр енергії фрагмента ряду, що потрапив у вікно. Отриманий спектр енергії розгортається вздовж осі ординат із значенням абсциси, яка відповідає положенню середини вікна. Форма вікна має форму вагової функції Чебишева. Вісь абсцис проградуєвана номерами відліків початкового ряду, причому на початку і в кінці осі – введені нульові значення тривалістю в цілу частину напівширини вікна, оскільки початковий ряд ніяк не доповнювався. Вісь ординат має максимальне значення частоти, яка визначається значенням кроку ряду в часі, $1/30\text{рік}^{-1}$. Мінімальне значення частоти на осі ординат (точність за частотою) визначається розміром вікна, і воно дорівнює максимальному значенню частоти, поділеному на величину вікна. В результаті виходить залежність оцінки спектра енергії від двох параметрів у вигляді рельєфу, а саме, від частоти і від положення часового вікна. Простежуючи хребти на рельєфі, можна отримати уявлення про те, як інтенсивність прояву тієї або іншої циклічності змінювалася з часом (рис. 4.4).

Так в роботі [27] СЧАН температури повітря за 1500-річний період за даними гренландських кернів [36] дозволив виявити, що інтенсивність кліматичних циклів значно змінюється в часі. Періодичність в 160 років добре виражена з початку 1200-х до кінця 1300-х років, після чого зникає, інтенсивність 55-річної періодичності безперервно наростає з 1500-х і досягає максимального рівня до кінця 1900-х років. Другою за інтенсивністю є періодичність 30...32 роки. Існування саме цих

кліматичних періодичностей (50...70 і 30 років), різних процесів, що виявляються при вивченні, підтверджується у ряді робіт [21–26, 34, 37].

Аналіз тисячолітніх змін клімату за даними GISP2 ¹⁸O, представлений в роботі [20], показав наявність яскраво виражених періодичностей в діапазоні 830...1050 років. Вейвлет-аналіз GISP2 [28] також показав наявність домінуючих періодичностей 1130...1140, 790...770, 560...590 і 390...360 років. В роботах [38, 39] виділена добре виражена періодичність ~1500 років, яка носить назву циклів Бонда і визначається під час голоцену в основному за матеріалами флуктуацій в обломах айсбергового льоду. Події Бонда можуть бути міжльодовиковими аналогами осциляцій Дансгора-Ешгера 1470-річної циклічності, з магнітудою близькою до 15...20 % від льодовиково-дольодовикової температурної зміни [40]. Таким чином, для кліматичних змін найбільш характерна періодичність $\approx 470 \pm 500$ років [18, 20]. Крім того, в роботі [41] показано, що для кліматичних змін також характерні циклічності з періодом 2000...3000 років.

Раніше застосовані методи Фур'є-аналізу [29] і вейвлет-аналізу [42] до перетвореного ряду реконструйованих значень температури за ~50000 років в центральній частині Гренландії, також дозволили виділити основні гармоніки з періодами в 2500, 1500, 1000 і 450 років. Порівнюючи результати наведених вище робіт, можна побачити, що, незважаючи на різні методи, які використовуються для виявлення значущих періодичностей, визначені близькі значення періодичностей.

Аналізувати СЧАН-діаграму на 50000-річному відрізку часу, враховуючи, що за цей період часу спостерігалася величезна кількість гармонік, вкрай незручно. Тому проведемо аналіз зміни енергії спектра кожної гармоніки, що цікавить нас, окремо. Для аналізу оберемо гармоніки з періодичностями в 2500, 1500, 1000 і 450 років.

Визначимо часове вікно для кожної з обраних гармонік величиною, яка дорівнює тривалості гармоніки. Зсовувати вікно вздовж ряду зліва направо будемо із заданим кроком, рівним одному відліку, тобто 30 рокам. Аналізу підлягає лише траєкторія зсуву в часі максимального значення енергетичного спектра, властивого цій гармоніці (фактично – моди). Враховуючи, що в якості кроку обраний один відлік, який дорівнює 30 рокам (значення дискретності перетвореного ряду), в результаті візуалізації цих розрахунків, отримаємо графік зміни максимального значення енергетичного спектра, який виявляє всі тонкощі динаміки обраної гармоніки в часі.

Оберемо першу 2500-річну гармоніку, яку піддамо аналізу (рис. 4.5). Періодичності близькі до 2,5 тис. років простежуються впродовж 35280 років: з 49830 по 14550 років назад. У період з 14550 по 10020 років тому гармоніка тривалістю 4530 років стає практично єдиною, яка має максимальну енергію і, таким чином, впливає на клімат тієї епохи. В

післяльодовиковий період ця циклічність зникла і більше не простежувалася [29].

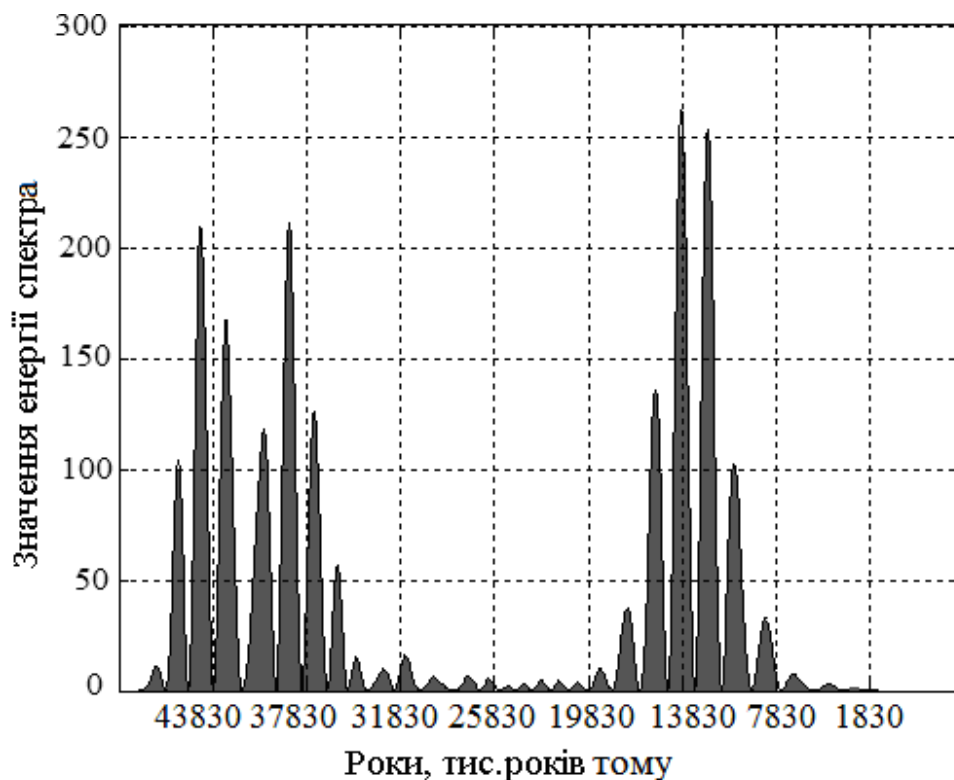


Рис. 4.5 – Зміна енергії спектра 2500-річної гармоніки

Аналіз динаміки 2500-річної гармоніки показав яскраво виражену періодичність, виявлена наявність двох відрізків часу, коли ця гармоніка мала максимальну енергію, а також відрізок часу, коли максимальна енергія гармоніки була незначною.

Перший період максимуму енергії (~220) закінчився близько 35 300 років тому. Як відомо, достовірність реконструкцій древнього клімату визначається мірою надійності реконструкцій фізико-географічних станів, які існували в умовах подібного клімату тривалий час і відбилися на стані тваринного світу і рослинного покриву [43]. Отже, необхідно співвіднести виявлену динаміку гармонік з існуючими показниками кліматичної мінливості.

На температурній шкалі (рис. 4.3) період максимуму енергії спектра 2500-річної гармоніки характеризується різкими коливаннями температури $\sim 10,0^\circ$ і описується найбільш суворою фазою останнього вюрмського обмерзання, проте, для південних районів Європи в цей період відзначається прояв Молого-Шекснинського міжльодовикового періоду (Брянський інтерстадіал). Так в роботі [44] показана динаміка накопичення льосів Російської рівнини, яка свідчить про різке збільшення інтенсивності їх накопичення в період після 35000 років тому. Час від 32 до 24

тисячоліть тому був найбільш теплим, це знаходить підтвердження при аналізі розселення людини в Північній Євразії [45, 46], а також в поширенні широколистяних лісів [47]. Таким чином, перший максимум енергії припадає на час різких коливань температури з великою амплітудою ($\sim 10,0^{\circ}\text{C}$), що характеризується швидким підвищенням температури (~ 100 років), а потім падінням температури впродовж декількох сотень років.

Далі тривав відрізок часу з 28000 по 18600 років тому, коли максимальна енергія 2500-річної гармоніки була незначною (рис. 4.5). На температурній шкалі (рис. 4.3) цьому періоду часу відповідають коливання температури з невеликою амплітудою ($\sim 2,0-5,0^{\circ}\text{C}$). Теплий Молого-Шекснинський час змінився приблизно 20...18 тисячоліть тому похолоданням, коли скандинавський льодовиковий покрив, що розрісся, досяг свого максимального розвитку; це був період пізньовалдайського обмерзання, час стійких низьких температур [48, 49, 50]. Дані сучасних досліджень свідчать про те, що гранична межа поширення валдайського обмерзання йшла в широтному напрямі від Вільнюса до Смоленська, а потім на північний захід до Рибінського водосховища, озера Кубенського і гори Нядома [51]. Пізню стадію Валдайського покривного обмерзання характеризує Осташківське обмерзання [51].

Другий відрізок часу, коли 2500-річна гармоніка мала максимальну енергію (~ 250) починався близько 18600 років тому і після 10000 років тому енергія цієї гармоніки різко знижується, практично до нульових значень. Саме цей відрізок часу виділяється стрімким падінням температури. Початок події відповідає періоду 12850 років тому, а кінець – 11450 років тому (рис. 4.5). Кінець пізнього Дріаса датується віком приблизно 11550 років тому, оціненим за допомогою різних методів [52–55]. Фактично, закінчення цього періоду відповідає початку найтеплішого і вологішого періоду голоцену – Атлантичному періоду, згідно періодизації Голоцену на основі модифікованого варіанта широко відомої шкали (схеми) Блітта-Сернандера. Вона побудована на результатах досліджень торфовищ Данії, які провели норвежець Аксель Блітт (у 1876 р.) і швед Рутгер Сернандер (у 1910 р.), і є послідовністю основних кліматичних подій (на думку авторів схеми, періодів), що мали місце в Північній Європі з кінця пізнього Неоплейстоцену і до теперішнього часу. Періодизація голоцену для Північної Євразії була уточнена Н. А. Хотинським [56]. Таким чином, другий максимум енергії 2500-річної гармоніки припадає на період, коли на загальному фоні стійкого підвищення температур спостерігалось стрімке падіння температури, зване пізнім Дріасом, і є в геохронології завершальним етапом останнього обмерзання [57].

Наступна гармоніка, яка підлягає аналізу, відповідає 1500 рокам і представляє високочастотну циклічність, звану осциляціями Дансгора-Ешгера, які описують зміни температури повітря в льодовиковий період,

що характеризуються різкими змінами клімату [52]. Загальна картина, яка характеризує динаміку максимальної енергії спектра 1500-річної гармоніки дуже близька до 2500-річної, проте, значення енергії спектра більші (від 320...330), а коливання мають плавні переходи (рис. 4.6).

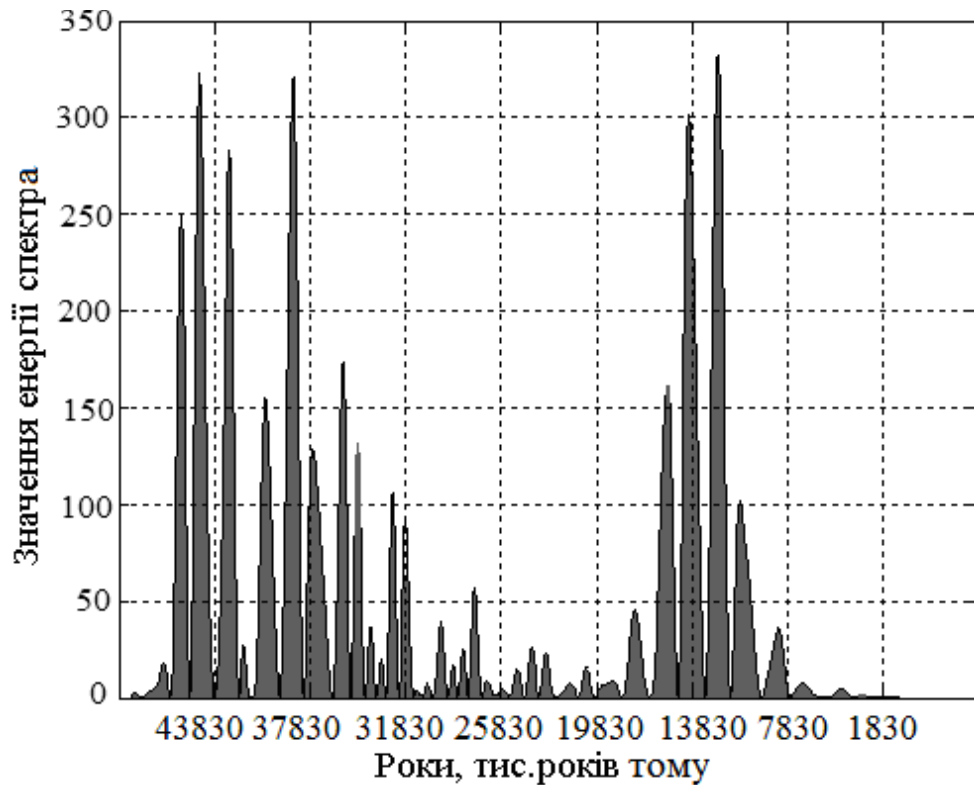


Рис. 4.6 – Зміна енергії спектра 1500-річної гармоніки

Той факт, що 1500-річна гармоніка характеризується більшими значеннями енергії спектра, ніж 2500-річна, підтверджується її виявленням при дослідженні довгоперіодних рядів з різною дискретністю [18, 20, 38-40]. Перший максимум енергії спектра (~320) спостерігається від 46300 до 26800 років тому, другий максимум енергії спектра (~330) від 18600 до 7800 років тому. Обидва максимуми відповідали часу різких коливань температури з великою амплітудою. Період найменших значень максимальної енергії спектра 1500-річної гармоніки добре виражений і припадає на якийсь час від 26800 до 18600 років тому.

Приблизно такі ж часові проміжки відповідають періодам максимумів і мінімумів 1000-річної гармоніки (рис. 4.7).

Відмінності спостерігаються лише в значеннях енергії для першого (~350) і другого максимумів (~320).

Зміни енергії спектра 450-річної гармоніки так само відповідають загальній картині, але ця гармоніка проявляє себе рівніше впродовж всього останнього льодовикового періоду (рис. 4.8).

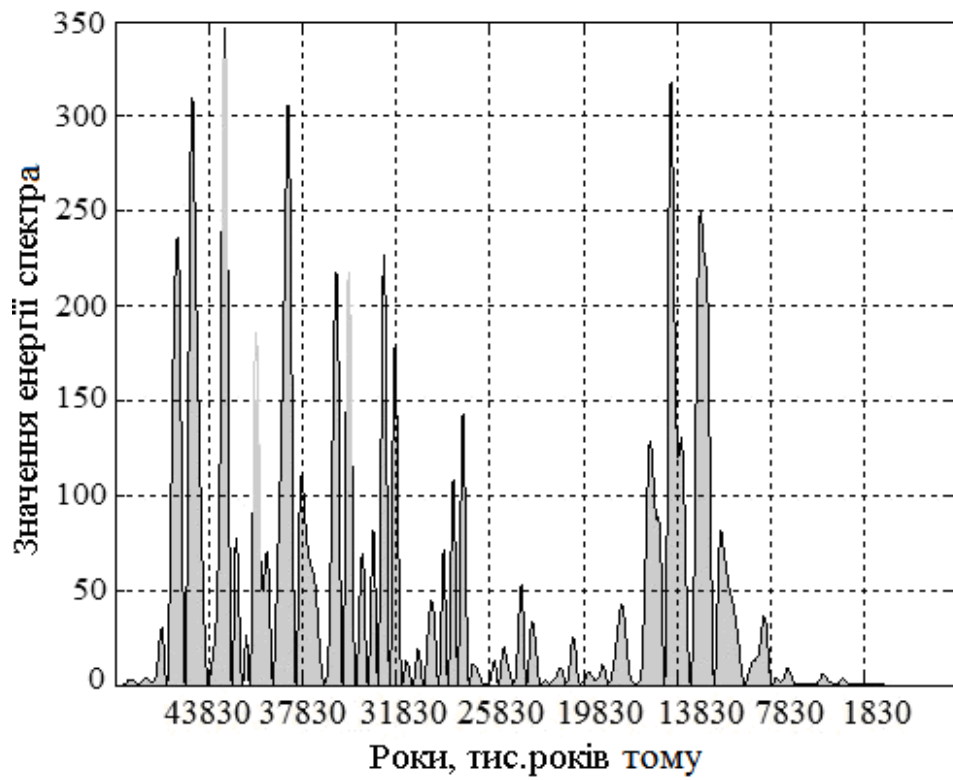


Рис. 4.7 – Зміна енергії спектра 1000-річної гармоніки

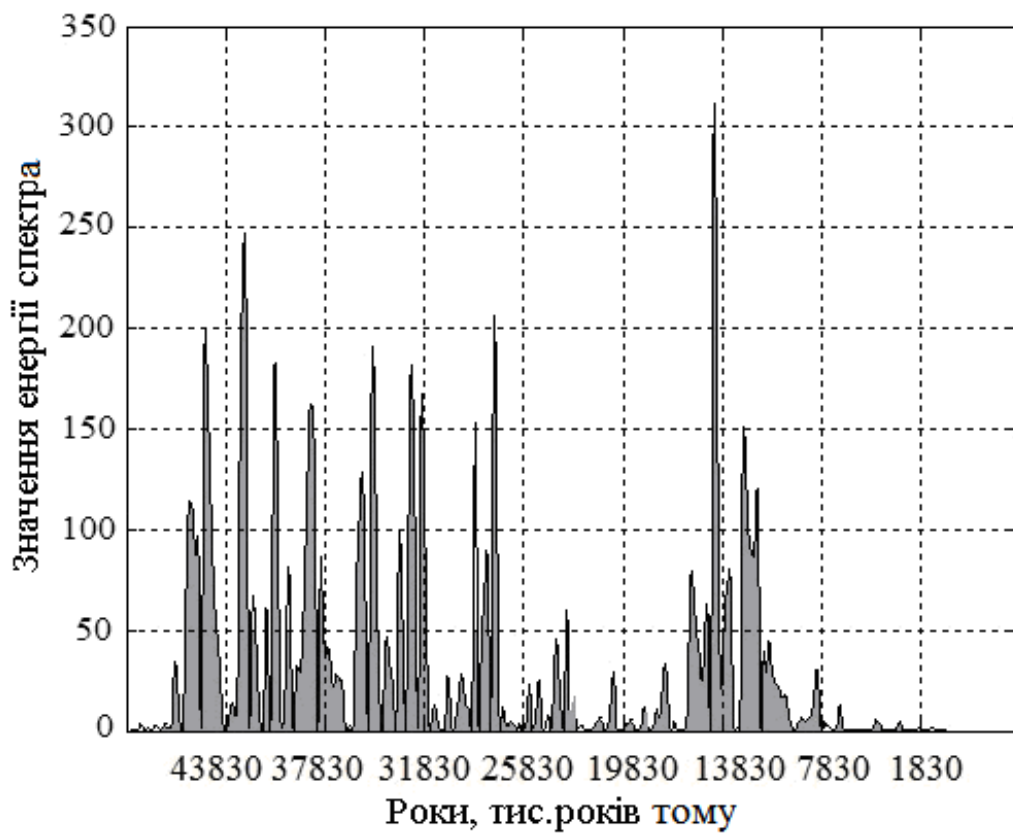


Рис. 4.8 – Зміна енергії спектра 450-річної гармоніки

Максимальні значення енергії спектра в льодовиковий період відповідають ~ 200 , під час другого періоду максимумів спостерігається різкий, як і в усіх інших гармоніках, стрибок енергії (~ 320) в межах 14300 років назад. Ця дата характеризує закінчення останнього льодовикового максимуму, початок якого відноситься до часу близько 26...20 тисяч років тому.

Таким чином, проведений спектрально-часовий аналіз характерних для відновленого ряду температури повітря центральної частини Гренландії гармонік (з періодичністю в 2500, 1500, 1000 і 450 років) показав, що для динаміки всіх гармонік характерними є два періоди з максимальними значеннями енергії спектра. Всі гармоніки характеризуються максимальними значеннями енергії в періоди стрибкоподібних змін температури повітря, і, навпаки, найменші значення енергії спостерігаються в періоди малих температурних збурень.

Для всіх гармонік виявлена закономірність, що спостерігається в льодовиковий період, – зі зменшенням періоду гармоніки збільшується тривалість максимальних значень енергії (від ~ 10000 років для 2500-річної гармоніки до ~ 23000 років для 450-річної). Другий період максимуму для всіх гармонік спостерігається в один і той же проміжок часу, має однакову тривалість і характеризується найбільшими значеннями енергії. Впродовж 50000 років стійкіше поводить себе найменша гармоніка – 450-річна, незважаючи на те, що для реалізації її максимумів потрібно більше енергії, ніж для 2500-річної гармоніки.

За останні 8000 років для всіх досліджуваних гармонік характерні невеликі значення енергії спектра.

4.3 Спектрально-часовий аналіз даних палеорекострукції температури в центральній частині Гренландії із застосуванням вейвлет-аналіза

В кліматичні дослідження вейвлет-аналіз був введений рядом авторів [58–62]. На відміну від гармонік перетворення Фур'є, локалізованих лише в частотній області й інформуючих лише про частотні властивості сигналу, вейвлет-функції мають частотно-часову локалізацію. Застосування вейвлет-перетворення дозволяє виявити і наочно показати квазіперіодичну структуру описуваного ряду, виділити осциляції не лише з добре фіксованим періодом, але і нестационарні осциляції, і локалізовані періодичності, виділити найбільш значущі періодичності відповідно до збільшеної енергії, яка потрапляє на кожне коливання. Так, в роботі [42] вейвлет-аналіз дав можливість визначити не лише масштаб осциляцій, виявити початок і кінець конкретної осциляції, а також уточнити вік подій Хайнріха і провести порівняння з датуванням [41, 63–65]. Використання вейвлет-аналізу для довгоперіодних кліматичних рядів дозволяє отримати

точніший вік окремих подій в багатовіковому колі кліматичних змін. Дозволяє поглянути на досліджуваний процес і з іншої точки зору: разом із загальною картиною, що представляє динаміку процесу в цілому, можна не лише визначити точний вік окремих осциляцій, але і співвіднести їх з конкретними кліматичними явищами і оцінити енергетику цих явищ. З цією метою цілком можна використовувати вейвлет-аналіз як різновид СЧАН.

Для дослідження скористаємося одновимірним безперервним вейвлет-перетворенням. За аналогією з Фур'є-перетворенням вейвлет-перетворення є таким же розкладанням сигналу в ряд базисних функцій, помножених на певні коефіцієнти. Базисною функцією ряду в цьому випадку є не гармоніка, а вейвлет.

Вейвлет-перетворення одновимірного ряду, яке пропонується для використання, дозволяє отримати двовимірний масив значень коефіцієнтів $W(a,b)$. Розподіл цих значень в просторі (a,b) – за часовим масштабом і в часі – дає інформацію про еволюцію енергетичного вкладу у вейвлет-спектр процесів різного часового масштабу.

Аналіз проведемо за допомогою пакету прикладних програм Wavelet системи комп'ютерної математики MatLab. Для візуалізації оберемо проективну форму відображення результатів розрахунків вейвлет-спектрів, тому що на ній краще спостерігаються особливості процесу, а на тривимірному спектрі їх розглянути складніше (порівняти рис. 4.9, а і 4.9, б).

При проведенні вейвлет-аналізу важливим є вибір самого вейвлет-базису, тобто вейвлета. Його треба підбирати за обраним критерієм оптимальності. Вибір глибини розкладання повинен забезпечувати надання всіх особливостей сигналу при економії обчислювальних ресурсів.

Для аналізу обираємо вейвлет, який має досить вузьку і симетричну амплітудно-частотну характеристику і, значить, достатню роздільну здатність по частоті і в той же час компактний носій, що забезпечить добре часове відрізнєння. Цим вимогам відповідає симетричний вейвлет $\text{sym}6$ (рис. 4.10), який входить до комплекту пакета прикладних програм.

Глибину розкладання чисельно обираємо рівною розмірності аналізованого масиву даних, для того, щоб не пропустити особливості довгоперіодичних процесів в середині трикутника достовірності. При детальному аналізі короткоперіодичних процесів зменшуватимемо глибину розкладання для покращення спостереження особливостей.

Аналіз всього ряду тривалістю 49830 років з дискретністю 30 років показав наявність багаторівневої структури, яка характеризує часову динаміку відновленої за даними льодяних кернів температури повітря Гренландії.

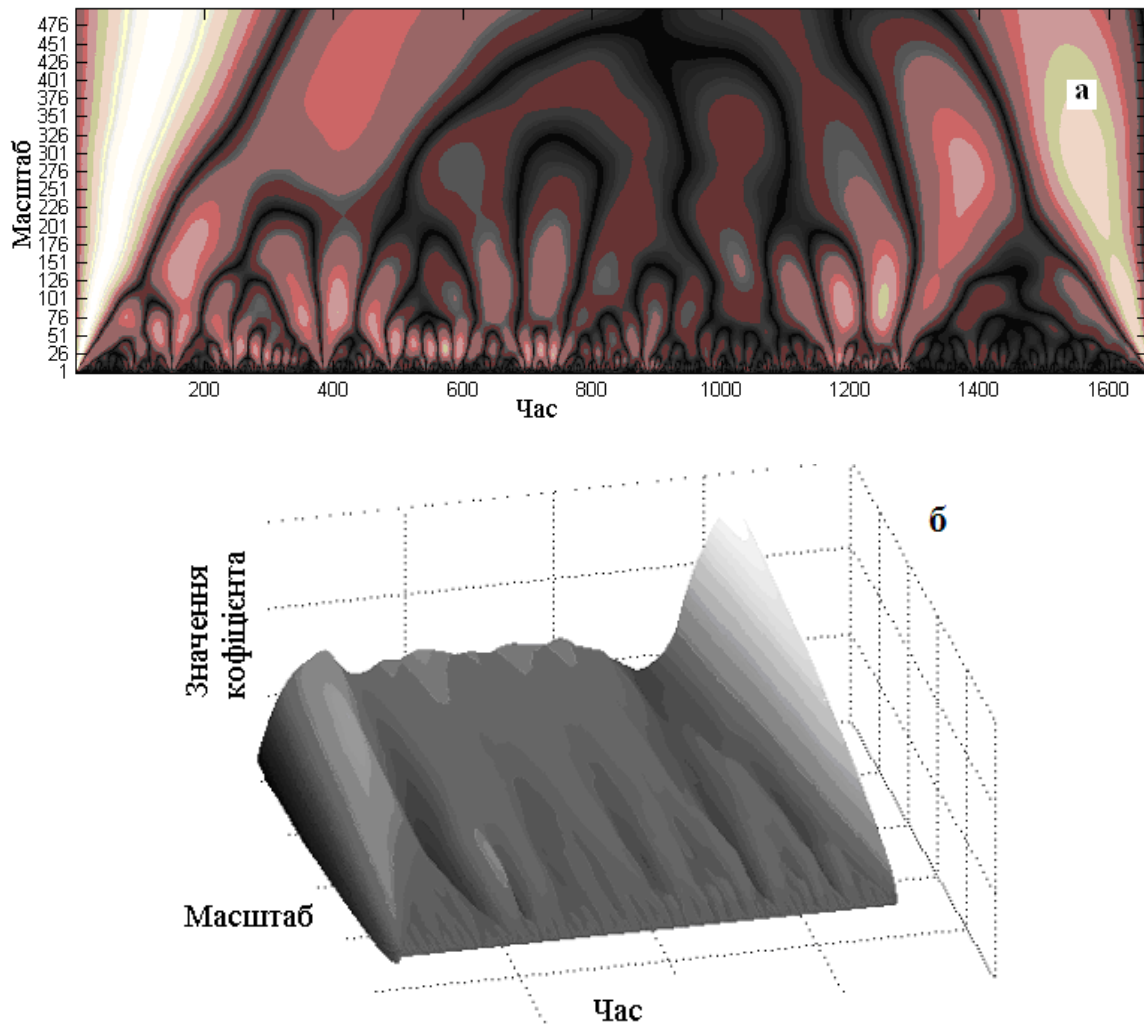


Рис. 4.9 – Відображення одного і того ж вейвлет-спектра у вигляді скелетона (а) і у вигляді тривимірного зображення (б)

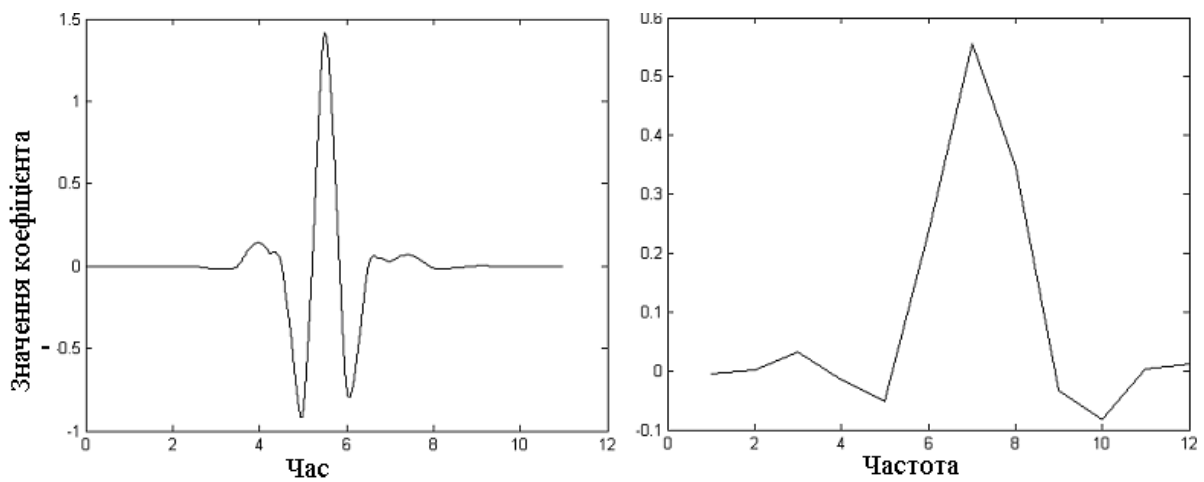


Рис. 4.10 – Форма вейвлета сумб вейвлет-пакета системи комп'ютерної математики і його частотна характеристика

Верхній рівень представлений однією великомасштабною подією 28000 років, яка тривала близько 29 250 років і характеризує льодовиковий період. Практично вся часова динаміка аналізованого процесу зосереджена в масштабі до 15900 років, яка у свою чергу також поділяється на декілька рівнів (рис. 4.11). В середньому рівні можна виділити великомасштабні періодичності: перша подія (14 100) тривалістю 15 400 років датується періодом 36 030...20 580 років, друга (13 100) тривалістю 2 550 років датується періодом 20 580...18 030 років. Ці події починаються в середині останнього льодовикового періоду і характеризують пікове Віслинське обмерзання.

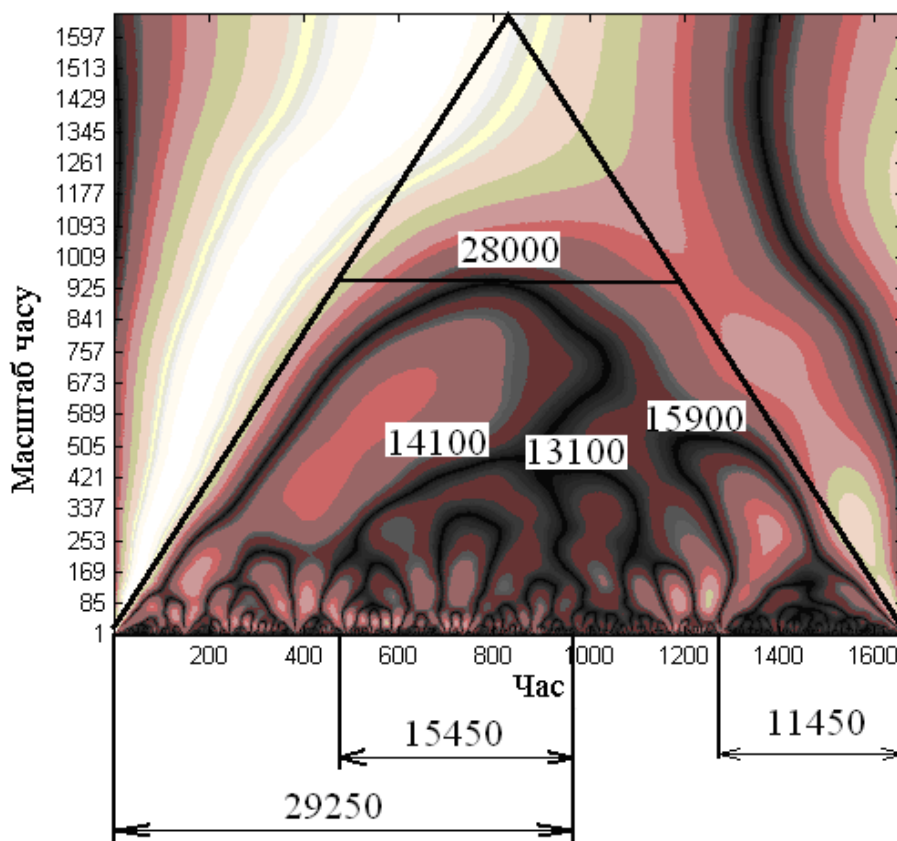


Рис. 4.11 – Скелетон вейвлет-спектра отриманий при аналізі всього ряду температур (1661 значення) з глибиною розкладання 1661

Подія масштабом 15 900 років датується періодом 11 430...наш час і починається Аллередським потеплінням, включає пізній Дріас і сучасний Голоцен. Для детального аналізу більш короткоперіодичних процесів розкладемо такий же ряд на меншу глибину (рис. 4.12).

Події Хайнріха – це середньочастотні (циклічність 5 000...10 000 років) зміни у складі донних відкладів протягом останніх 70...60 тисяч років з ритмічним чергуванням шарів з валунами (породженими швидким утворенням айсбергів в Північній Атлантиці) і горизонтів, складених

відносно тонкоуламковим матеріалом. Події Хайнріха мають порядкові номери, що зростають з давністю (вглиб віків).

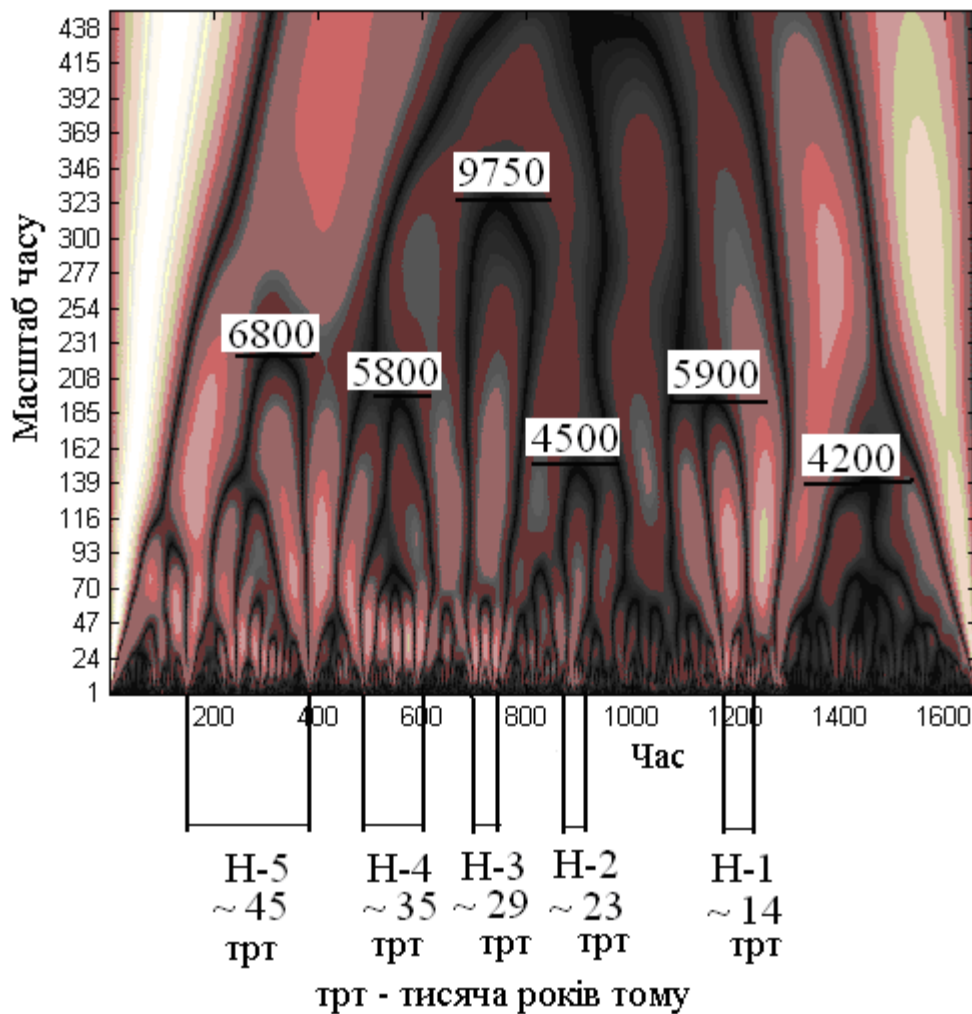


Рис. 4.12 – Скелетон вейвлет-спектра отриманий при аналізі всього ряду температур (1661 значення) з глибиною розкладання 450

Середній рівень цієї багатоподієвої структури характеризується подіями: перша (масштаб: 6 800) тривалістю 7 200 років датується періодом 45 630...38 430 років і є Н-5. За датуванням [63] першу подію можна інтерпретувати як Н-5 (5-а подія Хайнріха) близько 45 тис. років тому. Друга (5 800) тривалістю 3 300 років датується періодом 35 130...31 830 років і є Н-4, співпадає з датуванням [64, 65]. Третя подія (9 750) тривалістю 1 800 років датується періодом 29 130...27 330 років, є Н-3 і співпадає з датуванням [41, 64]. Четверта подія (4 500) тривалістю 900 років датується періодом 23 730...22 830 років, є Н-2 і співпадає з датуванням [41, 63].

Слід зауважити, що ці події спостерігаються в льодовиковому періоді. Як бачимо, для цих подій характерне зменшення тривалості. Далі

можна відзначити ще дві події, близьких за масштабом, таких, що мають відношення до післяльодовикового періоду: п'ята подія (5 900) тривалістю 1 780 років датується періодом 14 580...12 800 років, є Н-1 і співпадає з датуванням [64, 65]. Шоста подія (4 200) тривалістю 7 200 років датується періодом 11 130...3 930 років, охоплює період Аллередського потепління, пізній Дріас і Атлантичний період – найтепліший і вологіший період Голоцену. Отримане нами датування подій Хайнріха помістимо в таблицю 4.1. Ці таблиці підтверджують, що події Хайнріха є середньочастотними (циклічність 5000...10 000 років), лише Н-0 (виділено жирним шрифтом) випадає з цього правила – між Н-0 і Н-1 всього 3450 років [42].

Таблиця 4.1 – Масштаб (роки) і час (тис. років тому) початку подій Хайнріха

№ події	Початок події	Закінчення події	Масштаб події	Між подіями		Датування подій Хайнріха
				початком	закінченням	
1	45630	38430	6800	10500	6600	Н- 5*
2	35130	31830	5800	6000	4500	Н- 4(**,****)
3	29130	27330	9750	5400	4500	Н- 3(***,****)
4	23730	22830	4500	9150	10030	Н- 2(*,***)
5	14580	12800	5900	3450	1700	Н- 1(**,****)
6	11130	3930	4200			Н- 0

Примітки:

* – датування події Хайнріха за даними Hemming [63]

** – датування події Хайнріха за даними Vidal et al. [64]

*** – датування події Хайнріха за даними Bond & Lotti [41]

**** – датування подій Хайнріха за даними А.К. Васильчук [65]

Для детального розгляду процесів впродовж льодовикового періоду тривалістю 28590 років (рис. 4.13), розглянемо скелетон з глибиною розкладання 700 (рис. 4.14). Відзначимо, що практично вся часова динаміка зміни температури впродовж льодовикового періоду обмежена масштабом до 3000 років. На цьому фоні виділяються декілька різномасштабних подій, головна з яких – подія з найбільшим масштабом в 19500 років може бути пов'язана з фазами стискання і розширення нашої планети, виявленими Мартьяновим Н.Е. в ході досліджень [66]. Як визначив автор, потепління на Землі співпадають з фазою стискання, а похолодання – з фазами розширення. Ці пульсації спостерігаються з періодичністю приблизно 20...18 тис. років, що добре погоджується з результатами розрахунків. Максимум цієї великомасштабної події відзначається близько 36500 років тому і припадає на Леясциемське обмерзання, аналог пізнього Дріаса [67].

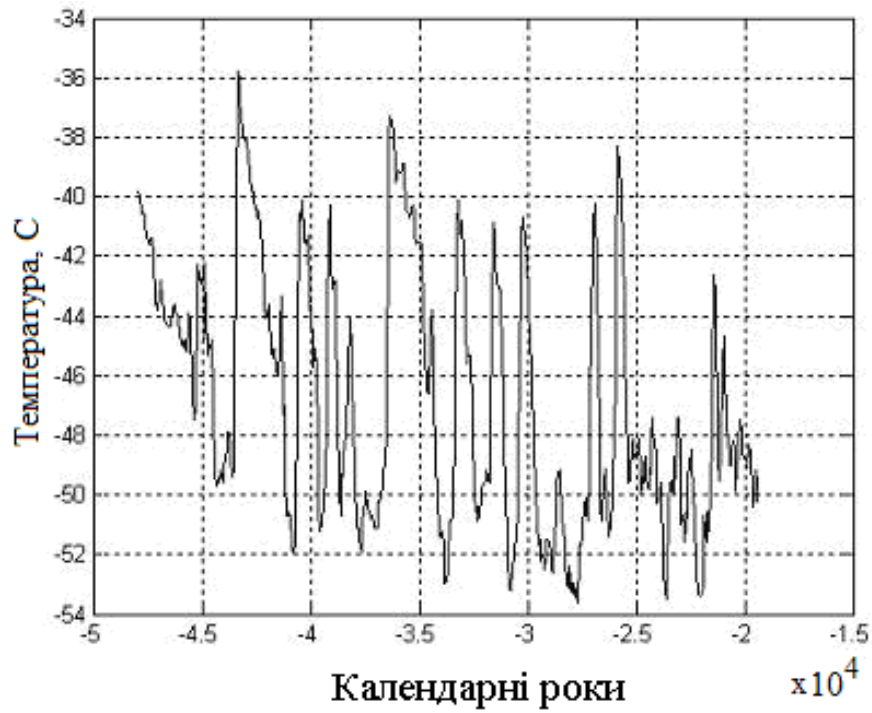


Рис. 4.13 – Частина ряду температур, що представляє льодовиковий період (953 значення)

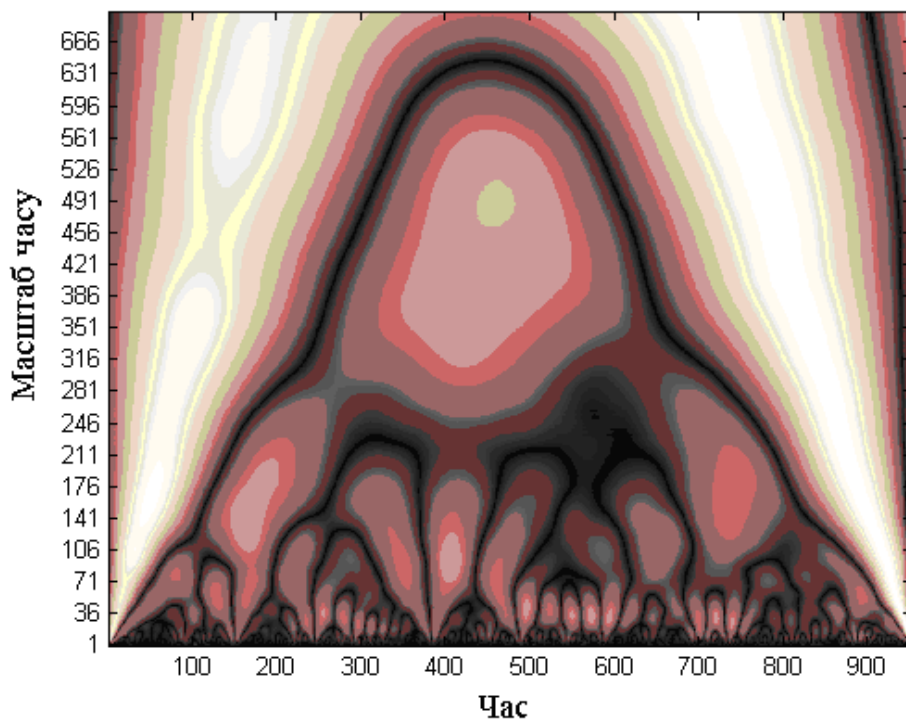


Рис. 4.14 – Скелетон вейвлет-спектра отриманий при аналізі частини ряду температур, що представляє льодовиковий період (953 значення) тривалістю 28590 років і з глибиною розкладання 700

Впродовж всього льодовикового періоду 49 830...21 240 років тому на скелетоні вейвлет-спектра (рис. 4.14) спостерігаються три події масштабом 7 000, 6 570 і 7 200 років.

Перша подія тривалістю близько 7 000 років почалася близько 45 330 років тому і закінчилася 38 300 років тому, максимум події спостерігався близько 40 400 років тому.

Початок події припадає на Костенківське міжльодовиків'я, а закінчення – на закінчення максимальної фази Леясциємського обмерзання – аналог середнього Дріаса, так звану "ядерну зиму" Палеоліту. Другу (початок 36 330 і закінчення 35 200 років тому) і третю (початок 32 130 і закінчення 29 130 років тому) події можна розглядати як одне ціле, яке формується декількома різномасштабними деталями. Ці дві події є однією деталлю масштабом близько 7 200 років, початок події припадає на період 36 330 років тому, а кінець фіксується близько 29 130 років.

Проведене датування подій другого рівня скелетона вейвлет-спектра отриманого при аналізі частини ряду температур, яка представляє льодовиковий період, дозволяє провести порівняльний аналіз з рядом температур цього часового періоду (рис. 4.15).

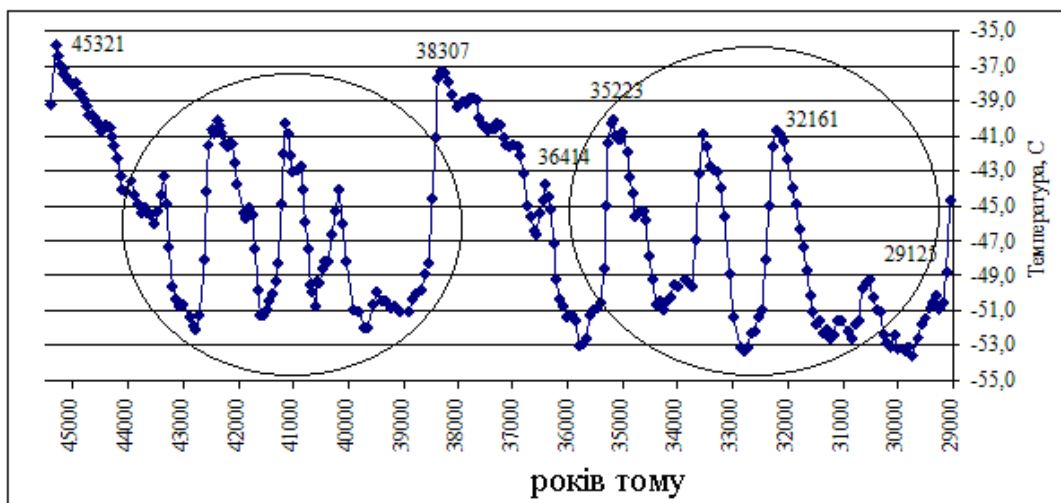


Рис. 4.15 – Реконструйовані дані температури в центральній частині Гренландії за період років від 45 500 до 29 000 років тому

Як бачимо, масштаби подій другого рівня майже однакові, а всередині кожної події в температурному ряду спостерігаються коливання з приблизно однаковими амплітудами (всередині кругів на рис. 4.15)

Простежимо події, що мають масштаб від 2 500 до 4 000 років. Всього спостерігалися чотири такі події. Перша – подія, що окремо стоїть, масштабом 3 000 років (початок 46 400 і закінчення 45 350 років тому) припадає на Костенківське міжльодовиків'я і відповідає в температурному ряду різкому підвищенню температури на 10,5°C (I на рис. 4.16). Друга

(II), масштабом 3 900 років датована періодом 42 500...30 000 років тому і відноситься до Леясциємського обмерзання, третя (III) подія мала масштаб 2 600 років, датована періодом 35 150...32 300 років тому і попадає на початок Молого-Шексинського міжльодовиків'я.

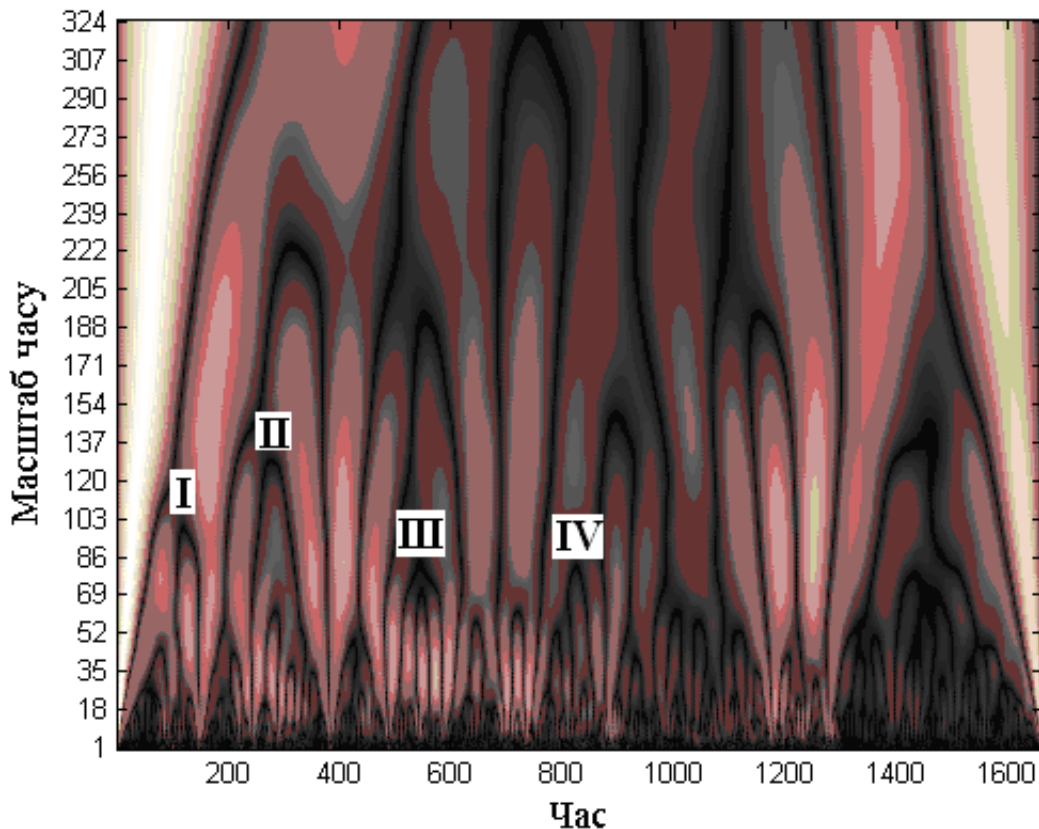


Рис. 4.16 – Скелетон вейвлет-спектра, отриманий при аналізі всього ряду температур (1661 значення), з глибиною розкладання 325

Другу і третю події об'єднує те, що вони формуються декількома дрібномасштабними деталями, які відповідають в температурному ряду декільком пульсаціям температури з однаковими амплітудами. Четверта (IV) – це подія, що окремо стоїть, масштабом 2 600 років (початок 25 250 і закінчення 24 050 років тому) описує максимум Молого-Шексинського міжльодовиків'я.

Таким чином, всі розглянуті нами події потрапляють в період покривного пізньоплейстоценового обмерзання Східно-європейської рівнини (від 70 до 11 тис. років тому), званого Валдайським обмерзанням, в якому виділяється ряд льодових стадій, – відносних похолодань тривалістю від декількох тисячоліть до декількох століть, розділених міжстадіалами (інтерстадіалами) – епохами потеплінь.

Далі відзначимо, що на рівні масштабу від 1 000 до 2 000 років явно простежується періодична структура, яку аналізуватимемо окремо.

Далі, перейдемо до опису скелетона вейвлет-спектра, отриманого при аналізі решти ряду температур який представляє об'єднаний перехідний період і наш час (рис. 4.17), з глибиною розкладання 600 (рис. 4.18).

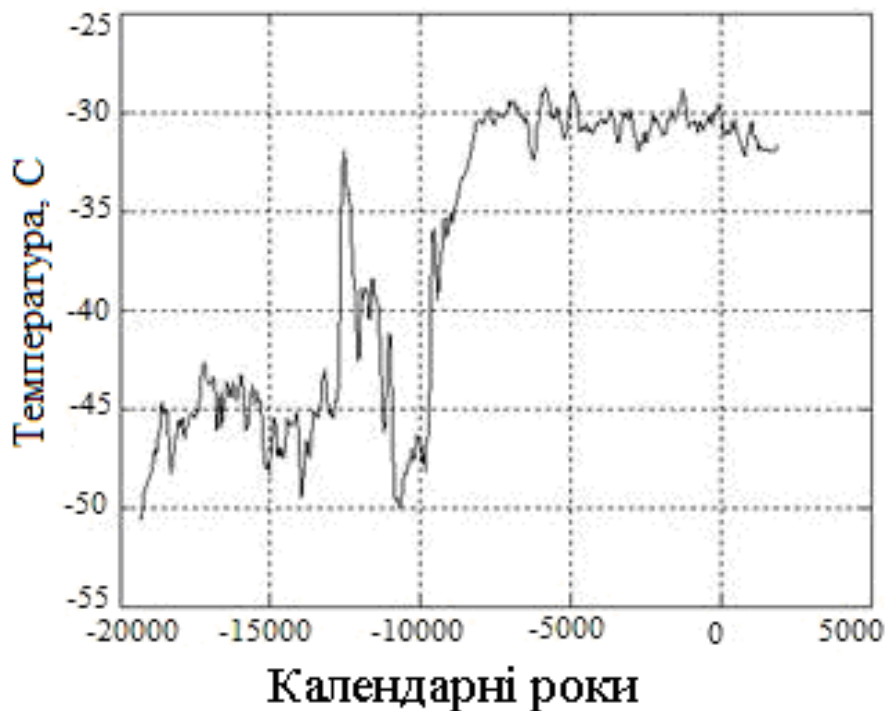


Рис. 4.17 – Частина ряду температур, яка представляє об'єднаний перехідний період і наш час (708 значень)

Визначимо тривалість перехідного періоду в 21 270 років. Основна подія цього ряду має масштаб 16 230 років, максимум якого фіксується близько 8 350 років тому. Подію верхнього шару можна інтерпретувати як процес стійкого зростання температури повітря в Північній півкулі, який добре представлений на рис. 4.17. Цей процес тривав аж до 6935 років тому, що добре відповідає Атлантичному періоду (5000...8000 років тому) найтеплішому і вологішому періоду Голоцену. Палеогеографічним еталоном періодизації голоцену служить модифікований варіант широко відомої шкали (схеми) Блітта-Сернандера, яка є послідовністю основних кліматичних подій (на думку авторів схеми, періодів), що мали місце в Північній Європі з кінця пізнього Неоплейстоцена і до теперішнього часу.

Другий рівень скелетона вейвлет-спектра представлений трьома подіями. Перша – масштабом 3 700 років з максимумом 16 150 років тому, подія почалася близько 17 150 років тому і закінчилася 14 600 років тому, характеризується закінченням останнього льодовикового максимуму, пік якого відноситься до часу близько 26...20 тисяч років тому [49, 50, 68]. Друга подія є найбільш потужною, з масштабом 6 400 років, її максимум спостерігався близько 12 550 років тому, початок події відповідає періоду

12 850 років тому, кінець – 11 450 років тому. Саме цей відрізок часу виділяється стрімким падінням температури (рис. 4.17), кінець пізнього Дріасу датується віком приблизно 11 550 років тому, визначеним за допомогою різних методів [52, 53, 55]. У [69] вказується, що Міжнародна група вчених, яка працює у рамках міждисциплінарного проекту з вивчення палеоклімату Землі, точно датувала й ідентифікувала позаземне походження шару відкладів на дні озера Куїцео (центральна частина Мексики), який міг утворитися після зіткнення метеороїда із земною поверхнею. Дані, отримані авторами, підтверджують, що раптове тисячолітнє похолодання, яке почалося на Землі 12900 років тому і відоме як пізній Дріас, було спричинене падінням великого метеорита. Хронологічно шар відкладів, досліджений авторами, співпадає з датуванням останньої за часом події Хайнріха Н-0 близько 12900 років тому [63]. Таким чином, у вейвлет-спектрі присутнє підтвердження реакції кліматичної системи Північної півкулі на глобальну катастрофу на рубежі Плейстоцену і Голоцену. Відзначимо також, що позитивний пік температури на рис. 4.17 близько 14 500 років тому, видно, є ознакою потепління, що почалося, і яке було зупинене, можливо, падінням великого метеорита [42].

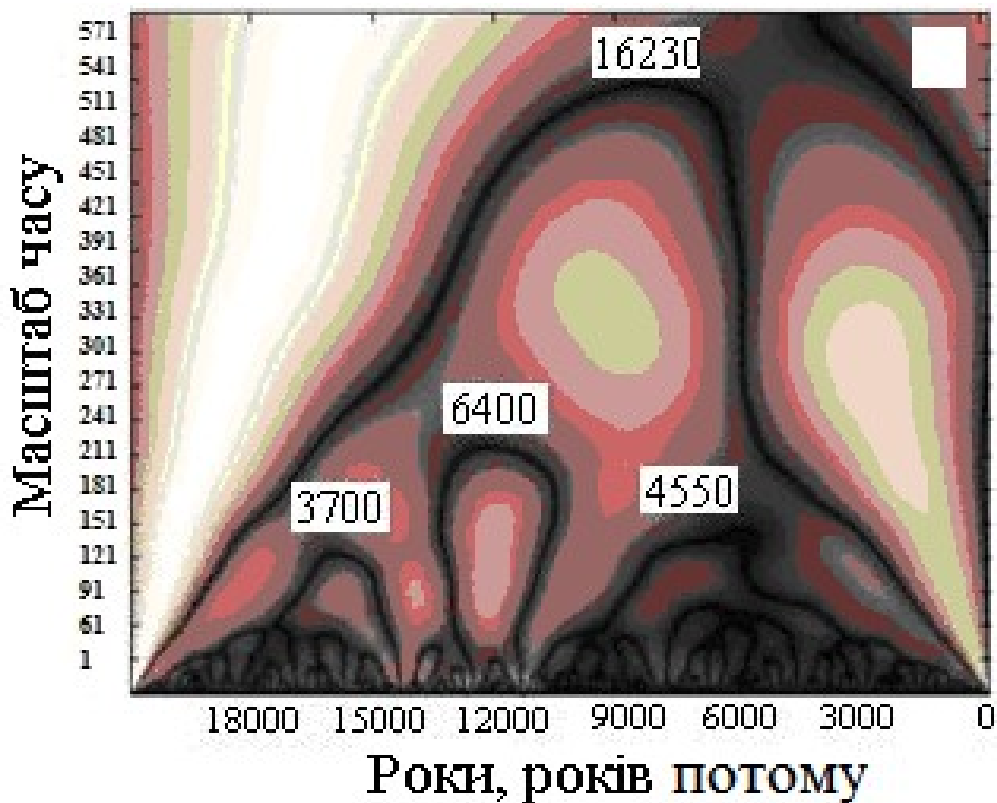


Рис. 4.18 – Скелетон вейвлет-спектра, отриманий при аналізі частини ряду температур, який представляє об'єднаний перехідний період і наш час (708 значень), з глибиною розкладання 600

Третя подія масштабом 4 550 років з максимумом 6 050 років тому почалася близько 11 350 років тому і триває в наш час, максимум цієї події має різку межу закінчення близько 5 600 років тому і відповідає закінченню найтеплішого і вологішого періоду Голоцену Північної Європи – Атлантичного періоду. Клімат в цей час був в цілому тепліший за нинішній. Потрібно відзначити, що сама структура першої і третьої подій формується декількома різномасштабними деталями, які починалися одна за одною і, як би дублюють одна одну, будучи періодичною структурою. Особливо яскраво це виражено в третій події, яка має відношення до Голоцену, і ця періодична структура представляє цикли Бонда [38]. Підшар третьої події представлений формою з масштабом близько 2 400 років, початок якої фіксується близько 8 100 років тому і співпадає з глобальним похолоданням 6200 років до н.е. – найсуворішим глобальним похолоданням Голоцену, аномальним для теплого Атлантичного періоду. Воно тривало від 200 до 400 років, протягом яких клімат значно змінився, що призвело до зникнення ряду ранньонеолітичних культур [70].

Відомо, що всередині трикутника вейвлет-коефіцієнти є дійсними, поза трикутником вейвлет-коефіцієнти дійсними не є, оскільки виходять за рахунок довільного доповнення ряду температур, тому масштаб і картина самих подій біля меж трикутника може бути порушеною. Тому, події дрібного масштабу доцільно розглядати, не розриваючи весь ряд на окремі частини (рис. 4.19).

Потрібно відзначити, на рівні масштабу до 2 400 років явно простежується періодична структура, яку можна охарактеризувати, як осциляції Дансгора-Ешгера (для льодовикової епохи) або події Бонда (для післяльодовикового періоду) [38, 41]. Масштаб і час спостереження максимумів цих подій представлені в таблиці 4.2. У тих випадках, коли період між подіями перевищував 3 000 років, в таблицю були внесені події меншого масштабу (від 600 до 900 років – відмічені курсивом). Таких випадків всього два: перший – спостерігався між 21 850 і 24 250 років тому; другий випадок спостерігався на рубежі 13 350 і 17 100 років тому між двома подіями, які мають в два-три рази більший масштаб. Таким чином, енергетика дрібномасштабних подій дослідженого ряду зменшується поблизу подій з великою енергетикою (великомасштабних), що може спричинятись перерозподілом енергії від дрібномасштабних подій до великомасштабних.

Перші чотирнадцять подій представлені в таблиці 4.2 і характеризують післяльодовиковий період.

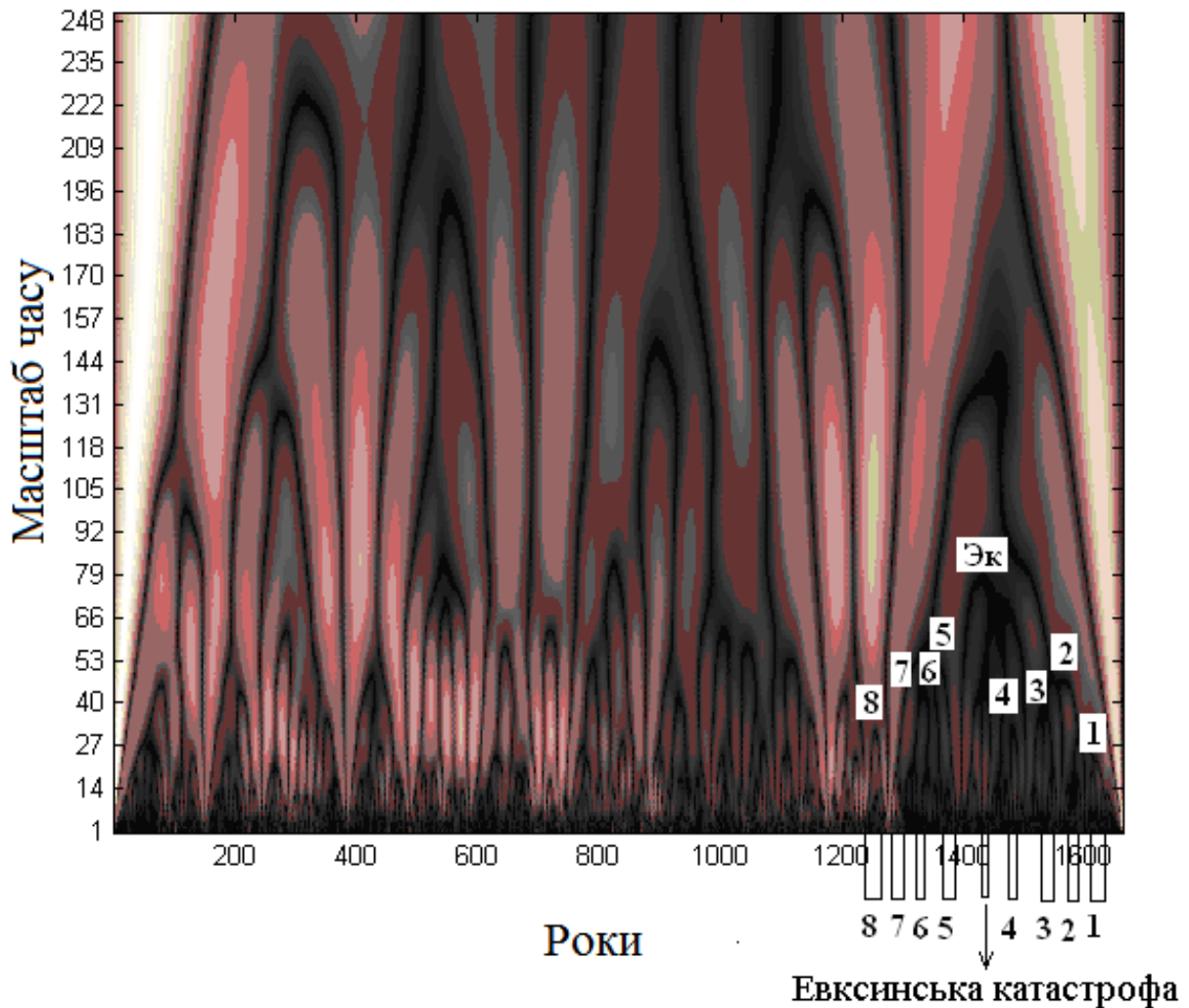


Рис. 4.19 – Скелетон вейвлет-спектра отриманий при аналізі всього ряду температур (1661 значення) з глибиною розкладання 250, номери подій відповідають циклам Бонда

Тому маємо можливість провести порівняння з відомим датуванням подій Бонда [38]. Як бачимо, перші чотири події Бонда практично співпадають з результатами проведеного нами Вейвлет-аналізу:

1) 1 500 років тому – (Бонд 1) \approx 1 400 років тому – характеризується початком субатлантичного періоду (500 р. до н.е. – до 2015 р. н.е.);

2) 2 900 років тому – (Бонд 2) \approx 2 800 років тому – посуха початку 1 тис. до н.е. у Східному Середземномор'ї, яка співпала із занепадом культур пізнього бронзового віку в Атлантичній Європі;

3) 4 300 років тому – (Бонд 3) \approx 4 200 років тому – посуха 2 200 років до н.е. – співпала з колапсом Аккадської імперії і кінцем Єгипетського Древнього царства;

4) 5 900 років тому – (Бонд 4) \approx 5 900 років тому – посуха 3 900 років до н.е. є найбільш інтенсивне опустелювання епохи Голоцену.

Таблиця 4.2 – Масштаб (роки) і час (тис. років тому) початку дрібномасштабних подій всього досліджуваного періоду

№ подія	Початок події	Закінчення події	Масштаб події	Між подіями		Датування подій Бонда
				початком	закінченням	
1	1500	870	800	1400	980	1400
2	2900	1850	1300	1400	1850	2800
3	4300	3700	800	1600	1750	4200
4	5900	5450	800	1100	1100	5900
5	7000	6550	1500	1700	1650	
6	8700	8200	1800	1150	1000	8200
7	9850	9200	1200	1450	1100	9400
8	11300	10300	1000	2050	1500	10300
9	13350	11800	1250	900	2050	11100
10	14250	13850	600	1250	1050	
11	15500	14900	700	1600	1250	
12	17100	16150	2000	2750	3050	
13	19850	19200	1650	2000	1850	
14	21850	21050	1800	1450	1750	
15	23300	22800	800	950	800	
16	24250	23600	1550	1100	1400	
17	25350	25000	900	1850	1550	
18	27200	26550	800	1300	1000	
19	28500	27550	1400	2050	2050	
20	30550	29600	2100	950	1300	
21	31500	30900	1750	2150	1850	
22	33650	32750	1600	1300	1550	
23	34950	34300	1100	950	1150	
24	35900	35450	1200	2200	1550	
25	38100	37000	1000	1550	1250	
26	39650	38250	1500	1450	1900	
27	41100	40150	1500	950	1550	
28	42050	41700	2100	1800	1500	
29	43850	43200	1750	2950	2950	
31	46800	46150	1600	1450	1600	
32	48250	47750	1000			

5) П'ята виявлена подія датується від 7 000 до 6 550 тис. років тому і є наслідком катастрофи Новоевксинського озера, що сталася 7,6 тис. років тому в результаті прориву Босфорської перешкоди через сильний натиск

середземноморських вод. У роботі [71] наводяться датування раковин *Cardium edule*, *Mytilus galloprovincialis* і *Monodacna caspia*, що свідчать про проникнення середземноморських видів 7,6 тис. років тому. Стимулятором цих подій могли бути часті землетруси, які іноді були катастрофічними, і, безумовно, збільшення рівня Середземного моря за рахунок танення льодовиків. У момент катастрофи рівень Середземного моря був на 30 м нижчий за сучасний, а рівень Чорного моря – на 120 м; рівень Чорного моря підвищувався на 12 см за добу, води поглинали все більшу і більшу частину суші. Цей процес тривав до тих пір, поки рівень Чорного моря не зрівнявся з рівнем Середземного моря і Світового океану. Рівень обох басейнів стабілізувався на сучасних глибинах – 35...40 м, після чого підвищення рівня Чорного моря визначалося рівнем Світового Океану. Одним словом, підвищення рівня Світового Океану (або землетрус), прорвало вузьку перемичку, що відділяла первісне озеро від Середземного моря. Прорив перемички і утворення Босфорської протоки, спричинило дуже сильні катаклізми, які призвели до змін клімату і набули віддзеркалення в рисунку скелетона вейвлет-спектра післяльодовикового періоду.

6) 8 700...8 200 років тому – (Бонд 5) \approx 8 200 років тому – похолодання 6200 років до н. е.;

7) 9 850...9 200 років тому – (Бонд 6) \approx 9 400 років тому – співпадає з подією Ердалена – льодовиковою активністю в Норвегії, а також з холодним кліматом в Китаї;

8) 11 300...10 300 років тому – (Бонд 7) \approx 10 300 років тому;

9) 13 350...11 800 років тому – (Бонд 8) \approx 11 100 років тому – співпадає з переходом від пізнього Дріасу до Бореального періоду.

Відзначимо, що датування подій Бонда з 5 по 8 співпадає з часом закінчення подій, визначених нами за результатами вейвлет-аналіза.

Таким чином, застосування вейвлет-перетворення для аналізу перетвореного ряду значень температури повітря в центральній частині Гренландії дозволило виявити і наочно показати квазіперіодичну структуру описуваного ряду. Масштабно-часова розгортка, отримана в результаті вейвлет-перетворення досліджуваного ряду, дозволила виявити не лише осциляції з добре фіксованим періодом, але і нестационарні осциляції і локалізовані періодичності. Потрібно зазначити, що енергетика дрібномасштабних подій дослідженого ряду зменшується біля подій з великою енергетикою (великомасштабних), що може бути зумовлено перерозподілом енергії від дрібномасштабних подій до великомасштабних.

Аналіз дав можливість визначити не лише масштаб осциляцій, але і виявити початок і кінець конкретної осциляції. Уточнено вік подій Хайнріха за даними вейвлет-аналіза і проведено порівняння з датуваннями Bond et Lotti [41], Hemming [63], Vidal et al. [64] і А. Д. Васильчук [65]. Проведене датування подій Хайнріха за даними вейвлет-аналізу показало

некоректну інтерпретацію кліматичних змін близько 12 тисяч років тому як Н-0. Раптове тисячолітнє похолодання, що почалося на Землі 12900 років тому, можливо, було спровоковане падінням великого метеорита, що знайшло віддзеркалення у вейвлет-спектрі.

Порівняння відомих подій Бонда з виявленими дрібномасштабними осциляціями підтвердило коректність аналізу і дозволило провести уточнення датування цих подій.

Використання вейвлет-аналізу для довгоперіодних кліматичних рядів дозволяє провести точніше датування подій в багатовіковому колі кліматичних змін. Щоб отримати коректну картину подій на вейвлет-скелетоні необхідно використовувати повний ряд інформації, поділ ряду на частини призводить до спотворення енергетики подій. Підкреслимо, що вейвлет-перетворення дозволяє поглянути на досліджуваний процес і з іншої точки зору: разом з загальною картиною, що представляє динаміку процесу в цілому, можна провести точніше датування окремих осциляцій, співвіднести їх з конкретними кліматичними явищами, оцінити енергетику цих явищ. Використання в парі з вейвлет-перетворенням гармонійного аналізу дозволить отримати повнішу картину кліматичних змін впродовж багатьох тисяч років.

4.4 Уточнення віку подій Хайнріха методом спектрально-часової обробки із застосуванням вейвлет-перетворення

Циклічності середньої періодичності (5000...10000 років) названі подіями Хайнріха і виділені як циклічності різких змін ізотопного складу льоду в льодовикових кернах Гренландії, які проявляються у вигляді гігантських серджів. Літологічні опади, які відповідають подіям Хайнріха, виділяються як шари, насичені детритом. Цей детрит перенесений айсбергами в результаті періодичної нестабільності льодяних потоків з північноамериканського Лаврентійського льодовикового щита протягом останніх 70...60 тис. років [65]. Таким чином, періоди накопичення цих шарів і є подіями Хайнріха, які отримали порядкові номери, зростаючі в міру збільшення віку. Датування подій Хайнріха не є простою і закінченою процедурою. У роботах [41, 63–65] зроблені різні підходи до датування подій Хайнріха.

Спробуємо уточнити вік подій Хайнріха на основі вейвлет-аналізу.

Для дослідження скористаємося одновимірним безперервним вейвлет-перетворенням.

При проведенні вейвлет-аналіза важливий вибір самого вейвлет-базиса, тобто вейвлета. Його треба підбирати за вибраним критерієм оптимальності. Вибір глибини розкладання повинен забезпечувати надання всіх особливостей сигналу при економії обчислювальних ресурсів.

Аналіз проводився за допомогою пакету прикладних програм

Wavelet системи комп'ютерної математики MatLab. Для візуалізації, як і у попередньому випадку, також була вибрана проектна форма відображення результатів розрахунків вейвлет-спектрів.

Глибину розкладання чисельно вибираємо рівною розмірності аналізованого масиву даних, для того, щоб не пропустити особливості довгоперіодних процесів всередині трикутника достовірності. При детальнішому аналізі короткоперіодичних процесів зменшуватимемо глибину розкладання для покращення особливих спостережень.

Аналіз всього ряду, тривалістю 49830 років з дискретністю 30 років, показав наявність багаторівневої структури, що характеризує часову динаміку відновленої за даними льодяних кернів температури повітря Гренландії (рис. 4.11).

Верхній рівень представлений однією великомасштабною подією 28000 років, яка тривала близько 29 250 років і характеризує льодовиковий період. Практично вся часова динаміка аналізованого процесу зосереджена в масштабі до 15 900 років, яка у свою чергу також поділяється на декілька рівнів (рис. 4.11).

У середньому рівні можна виділити великомасштабні періодичності: перша подія 14 100 тривалістю 15 450 років датується періодом 36030...20580 років, друге 13100 тривалістю 2550 років датується періодом 20580...18030 років. Ці події починаються в середині останнього льодовикового періоду і характеризують пікове Вислинське обмерзання. Подія масштабом 15 900 років датується періодом 11 430 – наш час і починається Аллередським потеплінням, включає пізній Дріас і сучасний Голоцен. Для детального аналізу більш короткоперіодичних процесів розкладемо той же ряд на меншу глибину (рис. 4.12).

Відомо, що події Хайнріха – середньочастотні (циклічність 5000...10000 років) зміни у складі донних відкладань протягом останніх 70...60 тисяч років з ритмічним чергуванням шарів з валунами (породженими швидким утворенням айсбергів в Північній Атлантиці) і горизонтів, складених відносно тонкоуламковим матеріалом. Події Хайнріха мають порядкові номери, що зростають з давністю (вглиб віків). Середній рівень цієї багат шарової структури характеризуються подіями: перша (масштаб: 6 800) тривалістю 7 200 років датується періодом 45 630...38 430 років і є Н-5. За датуванням [63] першу подію можна інтерпретувати як Н-5 (5-а подія Хайнріха) близько 45 тис. років тому. Друга (5 800) тривалістю 3300 років датується періодом 35 130...31 830 років і є Н-4, співпадає з датуванням [64, 65]. Третя подія (9 750) тривалістю 1 800 років датується періодом 29 130...27 330 років, також Н-3 і співпадає з датуванням [41, 65]. Четверта подія (4 500) тривалістю 900 років датується періодом 23730...22830 років, є Н-2 і співпадає з датуванням [41, 63]. Слід зауважити, що ці події спостерігаються в льодовиковому періоді. Як бачимо для цих подій характерне зменшення

тривалості. Далі можна відзначити ще дві події близькі за масштабом, такі, що мають відношення до післяльодовикового періоду: п'ята подія (5 900) тривалістю 1 780 років датується періодом 14 580...12 800 років, є Н-1 і співпадає з датуванням [64, 65]. Шоста подія (4 200) тривалістю 7 200 років датується періодом 11130...3 930 років, охоплює період Аллередського потепління, пізній Дріас і Атлантичний період – найтепліший і вологіший період Голоцену. Дані підтверджують, що події Хайнріха є середньочастотними (циклічність 5000...10 000 років), лише Н-0 випадає з цього правила – між Н-0 і Н-1 всього 3450 років.

Можливо, що в цей період спостерігалася подія, яка призвела до кліматичних змін, які автор [63] інтерпретував як Н-0. Для виявлення причини виникнення події Н-0, проведемо додаткові дослідження часового періоду, в якому спостерігалася ця подія (рис. 4.20). Для цього розглянемо скелетон, отриманий при аналізі частини ряду температур яка представляє об'єднання перехідного періоду і нашого часу (708 значень), з глибиною розкладання 600 (рис. 4.20).

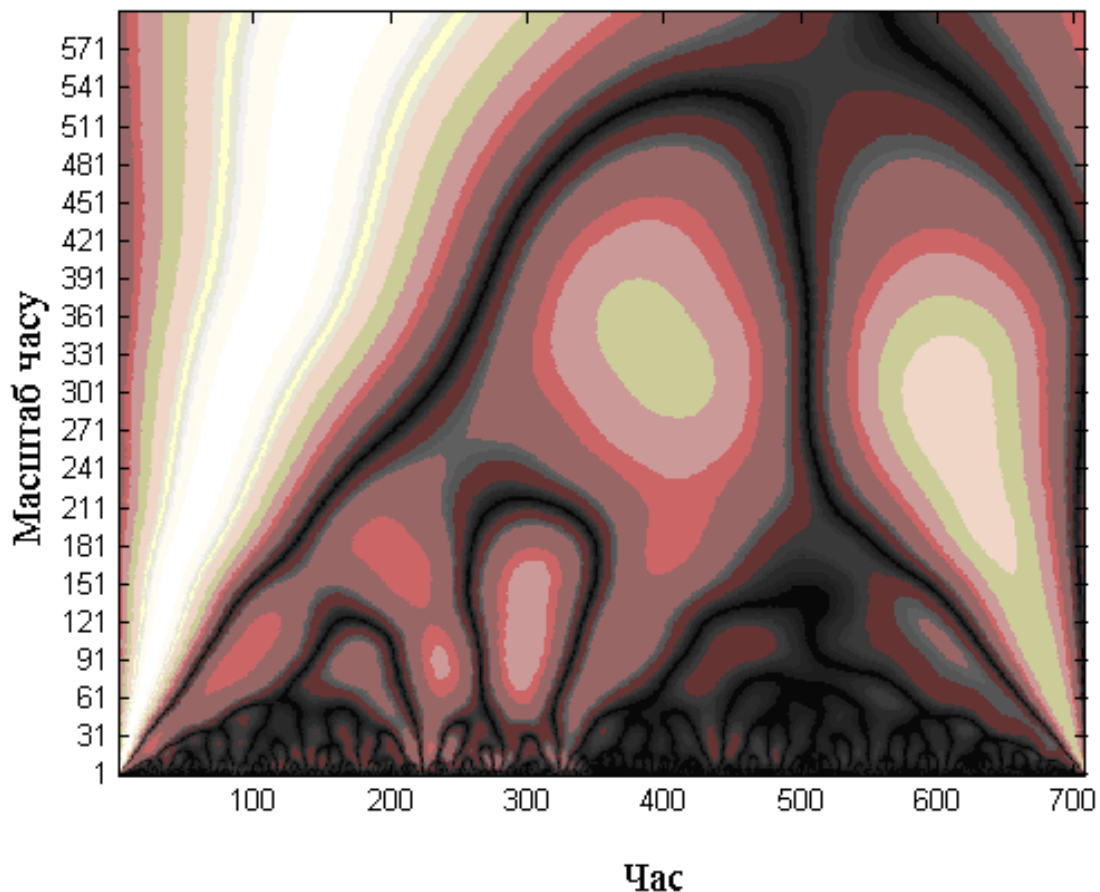


Рис. 4.20 – Скелетон вейвлет-спектра отриманий при аналізі частини ряду температур, що представляє об'єднання перехідного періоду і нашого часу (всього 708 значень), з глибиною розкладання 600

Таким чином, застосування вейвлет-перетворення для аналізу перетвореного ряду значень температури повітря в центральній частині Гренландії дозволило виявити і наочно показати квазіперіодичну структуру описуваного ряду. Масштабно-часова розгортка, отримана в результаті вейвлет-перетворення досліджуваного ряду, виявила не лише осциляції з добре фіксованим періодом, але і нестационарні осциляції, і локалізовані періодичності.

Аналіз дав можливість визначити не лише масштаб осциляцій, але і виявити початок і кінець конкретної осциляції. Уточнено вік подій Хайнріха за даними вейвлет-аналізу і проведено порівняння з датуваннями [41, 63–65]. Проведене датування подій Хайнріха за даними вейвлет-аналізу показало некоректну інтерпретацію кліматичних змін близько 12 тисяч років назад як Н-0. Раптове тисячолітнє похолодання, що почалося на Землі 12900 років тому, можливо, було спровоковане падінням великого метеорита, що знайшло віддзеркалення у вейвлет-спектрі.

Використання вейвлет-аналізу для довгоперіодних кліматичних рядів дозволяє отримати точніший вік окремих подій в багатомісячному колі кліматичних змін. Необхідно підкреслити, що вейвлет-перетворення дозволяє поглянути на досліджуваний процес і з іншої точки зору: разом з загальною картиною, що представляє динаміку процесу в цілому, можна не лише визначити точний вік окремих осциляцій, але і співвіднести їх з конкретними кліматичними явищами і оцінити енергетику цих явищ.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягає особливість дослідження довгоперіодних кліматичних рядів?
2. Що таке крижаний керн?
3. Яким чином здійснюється визначення температури повітря за вмістом крижаних кернів?
4. Яким чином з початкового нерегулярного ряду реконструйованих значень температури в центральній частині Гренландії був сформований регулярний ряд температур?
5. Яка мета застосування віконної функції до досліджуваного ряду при проведенні спектрально-часового аналізу з використанням перетворення Фур'є?
6. Які міркування беруться до уваги при виборі величини часового вікна аналізу?
7. Які міркування беруться до уваги при виборі роздільної здатності по частоті при спектрально-часовому аналізі досліджуваного температурного ряду?
8. Які найбільш потужні гармоніки були виявлені в спектрі досліджуваного довгоперіодного температурного ряду?

9. Перелічить критерії вибору вейвлета для проведення спектрально-часового аналізу довгоперіодного температурного ряду
10. З яких міркувань вибирається глибина розкладання при проведенні спектрально-часового аналізу із застосуванням методів вейвлет-аналізу?
11. На підставі якого параметра обмежується глибина розкладання при проведенні вейвлет-аналізу?
12. Що виражає собою на вейвлет-спектрі довгоперіодного температурного ряду трикутник істинності?

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Вейвлет, 28
 - аналіз, 59
 - - можливості, 53
 - нескінченний регулярний, 49
 - біртогональний парний з компактним носієм, 50
 - відновлення (реконструкція), 59
 - грубий (предвейвлет), 49
 - двовимірний, 64
 - децимація, 58, 59
 - класифікація, 47
 - комплексний, 51
 - коефіцієнти, 29, 33
 - - що апроксимують, 31
 - - що деталізують, 31
 - обробка, 57
 - - пакетна, 61
 - визначення, 29
 - ортогональний з компактним носієм, 50
 - пакет, 62
 - перетворення, 29, 30
 - - двовимірне, 66
 - - диадне, 35
 - - дискретне, 35
 - - - зворотне, 37
 - - - пряме, 36
 - - безперервне, 30
 - - - зворотне, 33
 - - - пряме, 30
 - - властивості, 42
 - ознаки, 30
 - приклади, 51
 - розкладання (декомпозиція), 33, 57, 58, 61, 62
 - спектр, 40
 - спектрограма, 13, 16, 18, 40
 - фрейми, 37
 - функція апроксимує, 31
- Віконне перетворення Фур'є, 12, 13
- Дані, 10, 11
- Кратномасштабний аналіз, 38

- синтез, 39

Моніторинг, 7, 8

Спектрально-часовий аналіз, 12

--- на основі вейвлет-перетворення, 27

--- на основі перетворення Фур'є в ковзному вікні, 15

----- вузькому, 23, 25

----- широкому, 23, 24

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Бартлетт, 16, 17
Блекман, 93
Блитт, 97, 111, 121
Бонд, 94, 113-117, 122
Васильчук, 106, 117
Гаусс, 17, 49, 51
Гіббс, 13, 15, 17
Дансгор, 94, 97, 113
Добеши, 50-52, 79-81
Ердален, 117
Ешгер, 94, 9, 113
Кайзер, 17
Котельников, 58
Кронекер, 27, 28, 45, 46, 54
Малла, 60, 61
Мартьянов, 107
Мейер, 50, 51, 79
Морле, 28, 49, 51
Парсеваль, 44, 53
Сернандер, 97, 111, 121
Тьюки, 93
Уелш, 16, 17
Фур'є, 5, 13-23, 27-30, 32, 33, 36, 39, 41, 44-47, 55-57, 69-71, 73-77, 88, 89, 92, 94, 101
Хаар, 51, 69, 79-81
Хайнрих, 101, 104-106, 113, 117-122
Ханна, 17, 93
Хеммінг, 93
Хеннінг, 21
Хотинський, 121
Чебишев, 93, 94
Шенон, 27, 45, 51, 63

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Mann R.E. Global Environmental Monitoring System (GEMS). Action Plan for Phase 1. SCOPE, rep. 3, Toronto, 1973. 130 p.
2. Израэль Ю.А. Экология и контроль состояния природной среды. / Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 560 с.
3. Виноградов Б.В. Аэрокосмический мониторинг экосистем. / М.: Наука, 1984. 320 с.
4. Котюк А.Ф., Цветков Э.И. Спектральный и корреляционный анализ нестационарных случайных процессов. / М.: Издательство стандартов, 1970. 103 с.
5. Казакевич Д.И. Основы теории случайных функций и её применение в гидрометеорологии. 2-е изд., перераб. и доп. / Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 320 с.
6. Залманзон Л. А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. / М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 496 с.
7. Матвеев Ю.Н., Симончик К.К., Тропченко А.Ю., Хитров М.В. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие / СПб: СПбНИУ ИТМО, 2013. 166 с.
8. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов / М.: Техносфера, 2006. 856 с.
9. Павлейно М.А., Ромаданов В.М. Спектральные перетворення в Matlab: Учебно-методическое пособие / СПб: НОЦ Электрофизика СПбГУ, 2007. 160 с.
10. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. / Society for industrial and applied mathematics. Philadelphia, Pennsylvania, 1992. 357 p.
11. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения. // Успехи физических наук. 1996. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
12. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. Изд. 2-е, перераб. и доп. / М.: СОЛОН-пресс, 2004. 400 с.
13. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. / М.: ДМК пресс, 2005. 304 с.
14. Chui C.K. Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis. / Society for industrial and applied mathematics. Philadelphia, 1997. 210 p.
15. Котляков В.М. Глобальные изменения за четыре климатических цикла по гляциологическим данным. // Материалы гляциологических исследований. 2000. Вып. 89. с. 106–111.
16. EPICA community members Eight glacial cycles from an Antarctic ice core // Nature. 2004. V. 429. P. 623–628.
17. Jouzel J., Masson-Delmotte V., Cattani O., Dreyfus G., Falourd S.,

- Hoffmann G., Minster B., Nouet J., Barnola J.M., Chappellaz J., Fischer H., Gallet J. C., Johnsen S., Leuenberger M., Loulergue L., Luethi D., Oerter H., Parrenin F., Raisbeck G., Raynaud D., Schilt A., Schwander J., Selmo E., Souchez R., Spahni R., Stauffer B., Steffensen J.P., Stenni B., Stocker T.F., Tison J.L., Werner M., Wolff E.W. Orbital and Millennial Antarctic Climate Variability over the Past 800,000 Years. // *Science*. 2007. 317(5839), 793–796.
18. Grootes P.M., Stuiver M., White J.W.C., Johnsen S.J., Jouzel J. Comparison of oxygen isotope records from the GISP2 and GRIP Greenland ice cores. // *Nature* 366. 1993. P. 552–554.
 19. Stuiver M., Braziunas T.F., Grootes P.M., Zielinski G.A. Is there evidence for solar forcing of climate in the GISP2 oxygen isotope record. // *Quaternary Research* 48. 1997. P. 259–266.
 20. Stuiver M., Grootes P.M., Braziunas T.F. The GISP2 ¹⁸O climate record of the past 16,500 years and the role of the sun, ocean and volcanoes. // *Quaternary Research* 44. 1995. P.341–354.
 21. Schlesinger, Ramankutty. An Oscillation in the global climate system of period 65–70 years. // *Nature* 367. 1994. 723–726 (doi:10.1038/367723a0)
 22. Minobe S. A 50–70 year climatic oscillation over the North Pacific and North America. // *Geophysic. Res. Lett.* 1997. V. 24. P. 683–686.
 23. Minobe S. Resonance in bi-decadal and penta-decadal climate oscillations over the North Pacific: role in climatic region shifts. // *Geophysic. Res. Lett.* 1999. V. 26. P. 855–858.
 24. Minobe S. Spatio-temporal structure of the pentadecadal oscillations over the North Pacific // *Progress in Oceanography*. 2000. V. 47. P. 381–408.
 25. Yi Chao, Michael Ghil, James C. McWilliams Pacific interdecadal variability in this century's sea surface temperatures. // *Geophysic. Res. Lett.* 2000. V. 27. №15, P. 2261–2264.
 26. Mantua N.J., Hare S.R. The Pacific Decadal Oscillation. // *Journal of Oceanography* 58. 2002. P. 35–44.
 27. Кляшторин Л.Б., Любушин А.А. Циклические изменения климата и рыбопродуктивности. / М.: ВНИРО, 2005. 235 с.
 28. Humlum O., Solheim J-E., Stordahl K. Identifying natural contributions to late Holocene climate change. / *Global and Planetary Change* 79. 2011. P. 145–156.
 29. Данова Т.Е., Перельгин Б.В. Результаты Фурье-анализа данных палеорекострукции температуры в центральной части Гренландии. // *Ученые записки РГГМУ*. 2013. № 32. С. 83–93.
 30. Meese D.A., Alley R.B., Fiacco R.J., Germani M.S., Gow A.J., Grootes P.M., Illing M., Mayewski P.A., Morrison M.C., Ram M., Taylor K.C., Yang Q., Zielinski G.A. Preliminary depth-agescale of the GISP2 ice core. // *US Special CRREL Report 94-1*. 1994.
 31. Монин А.С. Введение в теорию климата. / Л.: Гидрометеиздат, 1982.

- 246 с.
32. Мировой центр данных палеоклиматологии: USA World Data Center for Paleoclimatology – Режим доступа: <http://www.ncdc.noaa.gov/paleo/datalist.html>
 33. Рудяев Ф.И. Влияние аномального гравитационного поля Земли на циркуляционные системы атмосферы // Доклады АН. 1990. Т. 310. № 6. С. 1345–1448.
 34. Глок Н.И., Малинин В.Н. Статистический анализ стерических колебаний уровня Мирового океана // Ученые записки РГГМУ. 2011. №21. С. 126–137.
 35. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. / СПб: Питер, 2002. 608с.
 36. Dansgaard W., Johnsen S.J., Reeh N., Gundestrup N., Clausen H.B., Hammer C.U. Climatic changes, Norsemen and modern man. // Nature 255. 1975. P. 24–88.
 37. Данова Т.Е. Взаимосвязь региональных климатических индексов и динамики морского льда арктического бассейна. // Институт комплексного анализа региональных проблем. Дальневосточное отделение РАН. 2011. Т. 14, № 1. С. 42–47.
 38. Bond G., Showers W., Cheseby M., Lotti R., Almasi P., deMenocal P., Priore P., Cullen H., Hajdas I., Bonani G., A Pervasive Millennial-Scale Cycle in North Atlantic Holocene and Glacial Climates. // Science 278. 1997. P. 1257–1266. doi: 10.1126/science.278.5341.1257.
 39. Bond G., Kromer B., Beer J., Muscheler R. et al. Persistent Solar Influence on North Atlantic Climate During the Holocene. // Science 294 (5549). 2001. P. 2130–2136.
 40. Dansgaard W., Johnsen S.J., Clausen H.B., Dahl-Jensen D., Gundestrup N., Hammer C.U., Oeschger H. North Atlantic climatic oscillations revealed by deep Greenland ice cores. / Geophysical Monograph 29. 1984. P. 288–298.
 41. Bond Gerard C., Rusty Lotti. Iceberg Discharges into the North Atlantic on Millennial Time Scales during the Last Glaciation. // Science 17. 1995. P. 1005-1010. doi: 10.1126/science.267.5200.1005.
 42. Данова Т.Е. Перельгин Б.В. Применение вейвлет-анализа для уточнения возраста событий Хайнриха. // Геофизический журнал. 2015. Т. 37. № 1. С. 165–175.
 43. Величко А.А., Ясаманов Н.А. Современный и древний климат. // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1986. № 6. С. 5–15.
 44. Величко А.А. Главный климатический рубеж и этапы плейстоцена. // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1968. № 3. С. 5–17.
 45. Величко А.А., Грибченко Ю.Н., Куренкова Е.И. Позднепалеолитический человек заселяет Русскую равнину. // Природа. 2003. № 3. С. 52–60.
 46. Долуханов П. М. Эволюция природной среды и раннее расселение

- человека в Северной Евразии, 2008.
47. Лазуков Г.И., Гвоздовер М.Д., Рогинский Я.Я. Природа и древний человек. / М.: Мысль, 1981. 223 с.
 48. Величко А.А. Глобальные изменения климата и реакция ландшафтной оболочки. // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1991. № 5. С. 5–21.
 49. Mangerud J., Ehlers J., Gibbard P. Quaternary Glaciations: Extent and Chronology 1: Part I Europe. / Elsevier, Amsterdam. 2004.
 50. Ehlers J., Gibbard P.L. Quaternary Glaciations: Extent and Chronology 2: Part II North America. / Elsevier, Amsterdam. 2004.
 51. Шварцман Ю.Г., Болотов И.Н. Пространственно-временная неоднородность таежного биома в области плейстоценовых материковых оледенений. / Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2008. 263с.
 52. Rapp D. Ice Ages and Interglacials: Measurements, Interpretation and Models. / New York: Springer-Verlag. 2009. 285 p.
 53. Taylor K.C. The Holocene-Younger Dryas transition recorded at Summit, Greenland. // Science 278 (5339). 1997. P. 825–827. doi: 0.1126/science.278.5339.825.
 54. Hughen Konrad A. Synchronous Radiocarbon and Climate Shifts during the Last Deglaciation. // Science 290 (5498). 2000. P. 1951–1954. doi: 10.1126/science.290.5498.1951.
 55. Spurk M. Revisions and extension of the Hohenheim oak and pine chronologies: New evidence about the timing of the Younger Dryas / Preboreal transition. // Radiocarbon 40 (3). 1998. P. 1107–1116.
 56. Хотинский Н.А. Голоцен Северной Евразии. / М.: Наука, 1987. 198 с.
 57. Монгайт А.Л. Археология Западной Европы. Каменный век. / М.: Наука, 1973. 368 с.
 58. Lau K.-M., Weng H. Climate signal detection using wavelet transform: howtomake a time series sing. // Bulletin of the American Meteorological Society 76 (12). 1995. P. 2391–2402.
 59. Torrence C., Compo G.P. A practical guide to wavelet analysis. // Bulletin of the American Meteorological Society 79 (1). 1997. P. 61–78.
 60. Baliunas S., Frick P., Sokoloff D., Soon W. Time scales and trends in the Central England Temperature data (1659–1990): a wavelet analysis. // Geophysical Research Letters 24 (11). 1997. P. 1351–1354.
 61. Isaksson E., Divine D., Kohler J., Martma T., Pohjola V., Motoyama H., Watanabe O. Climate oscillations as recorded in Svalbard ice core ¹⁸O records between AD 1200 and 1997. // Geografiska Annaler 87 A (1). 2005. P. 203–214.
 62. Butler C.J., Garcia-Suarez Palle E. Trends and cycles in long Irish meteorological series. // Biology and Environment: Proceedings of the Royal Irish Academy 107B (3). 2007. P. 157–165.
 63. Hemming S.R. Heinrich events: massive late Pleistocene detritus layers of

- the North Atlantic and their global climate imprint. // *Reviews of Geophysics*, 42. 2004. doi: 10.1029/2003RG000128.
64. Vidal Laurence, Schneider Ralph R., Marchal Olivier, Bickert Torsten, Stocker Thomas F, Wefer Gerold. Link between the North and South Atlantic during the Heinrich events of the last glacial period. // *Climate Dynamics*, 15(12). 1999. P. 909–919. doi: 10.1007/s003820050321.
65. Васильчук А.К. Палинология и хронология повторно-жильных льдов: дис. д-ра геогр. наук. / М., 2009. 362 с.
66. Мартьянов Н.Е. Размышления о пульсациях Земли. / Красноярск: КНИИГиМС, 2003. 272 с.
67. Юрковец В.П. Климатические корреляции. // *Вестник Российской Академии. ДНК-генеалогии*. 2010. Т. 3, № 2, С. 301–325.
68. Bowen D.Q. Quaternary geology: a stratigraphic framework for multidisciplinary work. / Pergamon Press, Oxford, United Kingdom. 1978. P. 221.
69. Isabel Israde-Alcántara^a, James L. Bischoff^b 1, Gabriela Domínguez-Vázquez^c, Hong-Chun Lid, Paul S. DeCarlie, Ted E. Bunch^f, James H. Wittke^f, James C. Weaver^g, Richard B. Firestone^h, Allen West 1, James P. Kennett 1, Chris Mercerk, Sujing Xiel, Eric K. Richman^m, Charles R. Kinzlen, Wendy S. Wolbachⁿ. Evidence from central Mexico supporting the Younger Dryas extraterrestrial impact hypothesis. // Edited by Steven M. Stanley. / University of Hawaii, Honolulu, HI, January 31, 2012. www.pnas.org/cgi/doi/10.1073/pnas.1110614109.
70. Nesje Atle, Dahl Svein Olaf. The Greenland 8200 cal. yrs. BP event detected in loss-on-ignition profiles in Norwegian lacustrine sediment sequences. // *Journal of Quaternary Science* 16 (2). 2001. P. 155–166. doi:10.1002/jqs.567.
71. Ryan W.B., Pitman W.C. Noah's Flood: The New Scientific Discoveries about the Event That Changed History / New York: Simon and Schuster. 1999. 319 p.

Навчальне видання

**ПЕРЕЛИГІН Борис Вікторович
ТКАЧ Тетяна Борисівна
ГОР'ЄВ Сергій Адольфович**

Спектрально-часовий аналіз даних моніторинга

Навчальний посібник

Підписано до друку 00.00.0000р. (укр.м) Формат 60x84/16
Папір офсетний. Ум. др. арк. 00,00
Тираж 000 прим. Зам. 000
Видавництво та типографія „ТЕС”

(Свідоцтво ААААА № 00000) город, улица, дом
Тел.: (0000)00-00-00, (0000)00-00-00
Надруковано в авторській редакції