

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЮРАСОВ С.М.

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ

Розділ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ВОДНОГО  
СЕРЕДОВИЩА

Конспект лекцій

Одеса  
Одеський державний екологічний університет  
2020

УДК 504  
Ю-64

Рекомендовано методичною радою Одеського державного екологічного університету Міністерства освіти і науки України як конспект лекцій (протокол № 9 від 30.05.2019 р.)

**Юрасов С. М.**

Моделювання та прогнозування стану довкілля. Розділ 2. Моделювання та прогнозування стану водного середовища : конспект лекцій. Одеса: ОДЕКУ, 2019. 46 с.

Конспект лекцій присвячений проблемі застосування методів математичного моделювання стану та прогнозу забруднення природних вод.

**ISBN 978-966-186-057-4**

© Юрасов С. М., 2019

© Одеський державний екологічний університет, 2020

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ТОЧНІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТІВ.....	6
1.1 Наближені числа.....	6
1.2 Абсолютна та відносна похибки, гранична похибка.....	6
1.3 Правила оцінки похибок при обчисленні.....	7
2 СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ВОДНОГО СЕРЕДОВИЩА.....	9
2.1 Підбір емпіричних формул.....	9
2.2 Підбір параметрів рівняння регресії.....	12
2.3 Прогноз висоти хвиль рідкісної повторюваності.....	14
3 ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗАБРУДНЮВАЛЬНИХ РЕЧОВИН У ВОДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ.....	18
3.1 Процеси розповсюдження і трансформації речовини у водному середовищі.....	18
3.2 Моделювання розповсюдження речовини у турбулентному потоці.....	19
3.3 Моделювання розповсюдження забруднювальних речовин при аварійних розливах.....	28
4 ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ (МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО).....	34
4.1 Сутність методу, випадкові числа з рівномірним розподілом.....	34
4.2 Одержання випадкових чисел.....	35
4.3 Перетворення випадкових величин.....	36
4.4 Приклад використання методу Монте-Карло: розрахунок системи масового обслуговування.....	38
ЛІТЕРАТУРА.....	43
УМОВНІ СКОРОЧЕННЯ.....	44

## ВСТУП

Відомо, що взаємодію різноманітних факторів, що визначають структуру і особливості функціонування природних систем та розповсюдження у них забруднювальних речовин (ЗР), можливо врахувати за допомогою методів математичного та імітаційного моделювання. Ці методи можуть не тільки відповісти на запитання про сучасний стан довкілля, але і допомогти у прогнозуванні майбутнього його стану.

Над дослідженнями різних процесів та явищ на основі математичних моделей вчені працюють давно. Існують моделі, які справили великий вплив на розвиток різних галузей науки. Наприклад: модель ідеального газу привела до системи рівнянь Ейлера, які описують нев'язкі потоки газів; у гідродинаміці широко використовуються моделі на основі рівнянь Нав'є-Стокса і т.д.

*Математичною моделлю будемо називати математичний опис законів і характерних особливостей протікання даного процесу чи явища.*

Математичне моделювання як і фізичне моделювання використовують для дослідження різних процесів та явищ на їх моделях.

Під прогнозуванням будемо мати на увазі математичне моделювання з метою визначення деяких характеристик розглянутого процесу у майбутньому. Найчастіше при прогнозуванні використовують статистичні моделі процесів.

Математичне моделювання полягає у розв'язанні поставленої математичної задачі і оцінці області використання одержаного результату.

Для розв'язання математичних моделей використовують аналітичні, графічні та числові методи. Прості моделі можна розв'язати і аналітично, і графічно. Але більш складні математичні моделі можна розв'язувати тільки числовими методами, які набули розповсюдження з появою електронно-обчислювальних машин (ЕОМ).

Числові методи дозволяють звести розв'язання задачі до виконання остаточного числа арифметичних дій над числами. Результат при цьому також виходить у вигляді числових значень.

При використанні числових методів виникають похибки через застосування наближених чисел і при апроксимації функцій. Тому основна вимога, яка ставиться до обраного числового методу, полягає в одержанні кінцевого результату з потрібною точністю, тобто необхідно щоб числовий метод не вносив значних похибок у обчислювання.

Математичні моделі більшості гідрологічних і екологічних процесів дуже складні. Розв'язання цих моделей при широкій постановці можливе лише числовими методами, використання яких припускає застосування ЕОМ. Отже, основною метою цього курсу є правильне використання існуючих моделей при розв'язанні конкретних гідрологічних задач в екології числовими методами.

Математичне моделювання складається з таких етапів:

- постановка задачі і визначення кінцевої мети;
- побудова (вибір) математичної моделі;
- вибір числового методу;
- розробка алгоритму і побудова блок-схеми;
- розробка програми (запис алгоритму розв'язання на мові програмування);
- налагодження програми;
- підготовка вихідних даних і проведення розрахунків;
- аналіз результатів.

Дослідження процесів і явищ на математичних моделях використовують в наукових цілях, а також на практиці для прийняття вірних інженерних рішень.

«Моделювання та прогнозування стану водного середовища» є розділом 2 дисципліни «Моделювання та прогнозування стану довкілля», яка являється дисципліною професійної та практичної підготовки бакалаврів.

Метою вивчення курсу “Моделювання та прогнозування стану довкілля” є формування у студентів теоретичних знань та практичних навичок у галузі математичного моделювання реальних процесів розповсюдження ЗР у довкіллі, складання прогнозів забруднення довкілля та застосування їх для регулювання техногенних викидів і скидів підприємств до навколишнього середовища.

Головне місто у конспекті лекцій “Моделювання та прогнозування стану довкілля” приділяється термінам і поняттям, що застосовуються в межах означеного курсу; основним принципам, підходам та методам оцінки та прогнозу стану довкілля; головним факторам середовища, що впливають на забруднення довкілля; основним математичним моделям розрахунку розповсюдження ЗР.

Більш докладно висвітлені: статистичні та чисельні моделі розрахунку розповсюдження ЗР; узагальненні показники забруднення середовища; фактори та умови, які формують концентрацію ЗР у довкіллі; існуючі прогнози забруднення повітря, ґрунтового покриву, рослинного середовища, поверхневих вод з врахуванням регіональних особливостей окремих міст та підприємств; недоліки існуючих моделей і схем прогнозу та шляхи їх удосконалення і розвитку.

Зміст конспекту лекцій відповідає робочим та типовим програмам дисципліни “Моделювання та прогнозування стану довкілля”.

Конспект лекцій розраховано на студентів очної та заочної форми навчання спеціальності “Екологія та охорона навколишнього середовища” при вивченні дисципліни “Моделювання та прогнозування стану довкілля”.

# 1 ТОЧНІСТЬ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

## 1.1 Наближені числа

ЕОМ обробляють числа, записані в формах з фіксованою і плаваючою комою.

Десяткові числа з фіксованою комою – це звична нам форма запису: 0,0016; -13,673; 547,2 і т.д.

Іншою формою подання чисел є запис числа з плаваючою комою. Наприклад:  $542,7 = 5427 \cdot 10^{-1} = 5,427 \cdot 10^2 = 0,5427 \cdot 10^3$ . Запис числа  $5,427 \cdot 10^2 = 5,427E2$  називається *нормалізованою* формою запису числа з плаваючою комою, а  $0,5427 \cdot 10^3$  – *нормальною*.

Таким чином, число  $N$  десяткове чи у системі числення з основою  $\lambda$  можна зобразити у вигляді:

$$N = \pm 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \cdot 10^n$$

чи

$$N = \pm 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \cdot \lambda^n. \quad (1)$$

Підмножина цих чисел не є нескінченною, вона визначається розрядністю  $k$  і межами порядку  $n_1, n_2$  ( $n_1 \leq n \leq n_2$ ). Межі  $n_1$  і  $n_2$  визначають обмеженість дійсних чисел, а розрядність  $k$  – дискретність їх розподілення на числовій осі.

Наприклад, у випадку десяткових чотирирозрядних чисел усі значення, які знаходяться в інтервалі 0,2562 і 0,2563, відображаються на ЕОМ як число 0,2562 (просте відкидання цифр за межами розрядної сітки). Різниця між двома сусідніми значеннями дорівнює одиниці останнього розряду. Менші за цю різницю числа ЕОМ бере як нулі.

При округленні вручну десяткове чотирирозрядне число 0,2562 може бути одержане з чисел в інтервалі від 0,25615 до 0,25625.

Таким чином, наближеними є усі числа, одержані за рахунок округлення чи відкидання цифр, що виходять за розрядну сітку.

Усі інженерні розрахунки як вручну, так і на ЕОМ виконуються з наближеними значеннями дійсних чисел. Мірою точності наближених чисел є похибка.

## 1.2 Абсолютна та відносна похибки, гранична похибка

Розрізняють два види похибок – абсолютну і відносну.

Абсолютна похибка являє собою різницю поміж справжнім значенням числа ( $X$ ) та його наближенням ( $A$ ):

$$\Delta x = X - A. \quad (2)$$

Відносна похибка – це відношення абсолютної похибки числа до його наближеного значення:

$$\delta x = \Delta x / A. \quad (3)$$

Як правило, зазвичай справжнє значення величини  $X$  невідоме. Є лише її наближене значення  $A$  і необхідно знайти граничну похибку  $\Delta a$  цього значення. Гранична похибка є верхньою межею модуля абсолютної похибки  $|\Delta x| \leq \Delta a$ .

Значення  $\Delta a$  беруться як абсолютна похибка наближеного значення числа  $A$ . У цьому випадку справжнє значення числа  $X$  знаходиться в інтервалі  $(A - \Delta a; A + \Delta a)$ .

Для наближеного числа, яке одержано у випадку округлення, абсолютна похибка дорівнює половині одиниці останнього розряду числа. Наприклад, значення  $a = 0,728$  могло бути одержане у результаті округлення  $0,72752$  або  $0,72845$ . При цьому  $|\Delta x| \leq 0,0005$ . Таким чином  $\Delta a = 0,0005$ .

При обробці на ЕОМ округлення звичайно не виконуються, а цифри, що виходять за розрядну сітку, відкидаються. Наприклад, значення  $a = 0,728$  можна визначити з чисел  $0,72802$  чи  $0,72899$ .

Гранична абсолютна похибка у цьому випадку в два рази більша і складає  $\Delta a = 0,001$ .

Граничне значення відносної похибки являє собою відношення граничної абсолютної похибки до абсолютної величини наближеного числа:

$$\delta a = \Delta a / |A|. \quad (4)$$

Наприклад:  $\delta(-2,3) = 0,05 / |-2,3| \approx 0,022 \approx 0,03$ . Похибка завжди округлюється у більшу сторону.

Наведені оцінки похибки справедливі за умови, якщо всі значущі цифри наближеного числа вірні.

Значущими вважаються всі цифри числа, починаючи з першої, яка відмінна від нуля. Наприклад, у числі  $0,0024$  дві значущі цифри, а в числі  $12,00$  – чотири. При змінненні форми запису числа кількість значущих цифр не повинна змінюватися, тобто необхідно дотримуватись щоб перетворення були рівносильні. Наприклад:  $7500 = 0,7500 \cdot 10^4$  і  $0,110 \cdot 10^2 = 11,0$  – записи рівносильні; а записи  $7500 = 0,75 \cdot 10^4$  і  $0,110 \cdot 10^2 = 11$  – нерівносильні.

### 1.3 Правила оцінки похибок при обчисленні

Сформулюємо тепер правила оцінки граничних похибок при виконанні операцій з наближеними числами:

гранична абсолютна похибка суми чи різниці наближених чисел дорівнює сумі граничних абсолютних похибок цих чисел:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b; \quad (5)$$

гранична відносна похибка добутку чи частки від поділу двох наближених чисел дорівнює сумі граничних відносних похибок цих чисел:

$$\begin{aligned} \delta(a * b) &= \delta a + \delta b, \\ \delta(a / b) &= \delta a + \delta b; \end{aligned} \quad (6)$$

при піднесенні числа до степеня гранична відносна похибка збільшується на показник степеня:

$$\delta(a^k) = k * \delta a. \quad (7)$$

Існують такі джерела похибок:

математична модель, взята для опису процесу, несе похибку через неможливість врахування усіх факторів, під впливом яких розвивається процес, тут важливо визначати область застосування;

похибки вихідних даних (непереборні похибки);

похибки числового методу (апроксимації та інтерполяції функцій, зрізання рядів);

похибки за рахунок округлення на ЕОМ;

переведення чисел з однієї системи числення в іншу.



## 2 СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ВОДНОГО СЕРЕДОВИЩА

В основі статистичного моделювання і прогнозування лежать просторово-тимчасові узагальнення закономірностей розвитку процесів або зв'язків цих процесів з факторами, які зумовлюють їх. Тобто в основі статистичного моделювання і прогнозування лежить статистична обробка результатів спостережень.

Зупинимось докладніше на деяких моментах математичної статистики, які найчастіше застосовуються у гідрології, метеорології та екології.

### 2.1 Підбір емпіричних формул

#### *Помилки результатів вимірів*

Використовувані для побудови емпіричних залежностей результати вимірів можуть містити в собі такі види помилок: систематичні, випадкові й грубі.

Систематичні помилки звичайно дають відхилення в одну сторону (як правило вони з тим самим знаком). По величині вони можуть бути постійними або змінними. Систематичні помилки можуть спричинятись умовами експерименту, дефектом вимірювальної апаратури, її поганим регулюванням і т.п. Ці помилки усувають шляхом налагодження апаратури, введенням відповідних виправлень.

Випадкові помилки є наслідком великої кількості факторів, які не можуть бути усунуті або враховані в належній мірі при вимірюваннях або при обробці результатів цих вимірів. Ці помилки носять випадковий характер, відхиляються в той чи іншій бік від середнього значення при повторенні експериментів і не можуть бути усунуті при вимірах. З імовірнісної точки зору математичне очікування випадкової помилки дорівнює нулю. Статистична обробка експериментальних даних дозволяє визначити величину випадкової помилки, а повторення вимірів достатню кількість разів дозволяє довести її до деякого прийняттого значення.

Грубі помилки явно викривлюють результати вимірів, звичайно вони пропадають при повторенні експериментів. Ці помилки істотно виходять за межі випадкових помилок. Результати з такими помилками відкидають і при остаточній статистичній обробці вихідних даних не враховують.

#### *Емпіричні формули*

Проаналізувавши вихідні дані на наявність помилок, приступають до побудови емпіричної формули. Ця операція складається із двох етапів: добір загального вигляду формули й визначення найкращого значення параметрів, які входять до неї.

Часто вигляд залежності відомий з фізичних міркувань. У такому випадку приступають відразу до визначення її параметрів. Якщо ж

характер залежності невідомий, то вигляд формули може бути довільним. Перевага віддається зазвичай простим формулам. Вони вибираються спочатку з геометричних міркувань: експериментальні точки наносяться на графік і приблизно вгадується загальний вигляд залежності шляхом порівняння отриманої кривої із графіками відомих функцій (лінійної, степеневі, експонентної, гіперболічної або багаточлена).

Найпростішою емпіричною формулою є рівняння прямої. Близькість експериментального розподілу точок до лінійної залежності легко проглядається після побудови графіка. Параметри визначаються відповідно до послідовності, яку показано в табл. 1 (с. 74).

У деяких випадках до лінійної залежності можуть бути зведені й інші експериментальні дані, графік яких у декартовій системі координат не є прямою лінією. Це може бути досягнуто введенням нових змінних  $\xi$  і  $\eta$  замість  $X$  і  $Y$ :  $\xi = \varphi(X, Y)$ ;  $\eta = \psi(X, Y)$ .

Функції  $\varphi(X, Y)$  і  $\psi(X, Y)$  підбираються такими, щоб точки  $(\xi_i, \eta_i)$  лежали на деякій прямій лінії в площині  $(\xi, \eta)$ . Таке перетворення називається вирівнюванням даних.

Для одержання лінійної залежності  $\eta = c\xi + d$  вихідна формула повинна записуватись у вигляді:  $\psi(X, Y) = c\varphi(X, Y) + d$ .

Наведемо приклади вирівнювання деяких функцій:

а) степенева –

$$Y = aX^b \rightarrow \text{Ln}Y = \text{Lna} + b\text{Ln}X \rightarrow \{\eta = \text{Ln}Y; \xi = \text{Ln}X\}; \quad (8)$$

б) експонентна –

$$Y = a \exp(bX) \rightarrow \text{Ln}Y = \text{Lna} + bX \rightarrow \{\eta = \text{Ln}Y; \xi = X\}; \quad (9)$$

в) гіперболічна –

$$Y = (a + bX)^{-1} \rightarrow 1/Y = a + bX \rightarrow \{\eta = 1/Y; \xi = X\}; \quad (10)$$

г) розподіл Вейбула –

$$Y = \exp(-aX^b) \rightarrow \text{Ln}(1/Y) = aX^b \rightarrow \text{LnLn}(1/Y) = \text{Lna} + b\text{Ln}X \rightarrow \{\eta = \text{LnLn}(1/Y); \xi = \text{Ln}X\}. \quad (11)$$

Іншою використовуваною емпіричною формулою є багаточлен  $m$ -ого порядку:  $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_mX^m$ . Найчастіше використовується багаточлен другого порядку, рідше – третього.

При наявності декількох змінних  $Y(X_1, X_2, \dots, X_m)$  зв'язок установлюють у вигляді  $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_mX_m$  (множинна лінійна регресія).

**Параметри емпіричної залежності**

Будемо вважати, що тип емпіричної залежності нам відомий й її можна представити у вигляді:  $Y=\varphi(X,a_0,a_1,\dots,a_m)$ , де  $\varphi$  – відома функція;  $a_j$  – невідомі постійні параметри ( $j=0,1,2,\dots,m$ ).

Завдання полягає в тім, щоб визначити такі значення цих параметрів, при яких емпірична формула дає добре наближення заданої функції.

Ми знаємо, що шукана залежність не проходить через всі задані точки. Відхилення шуканої функції в точках  $X_i$  від заданої позначимо  $\varepsilon_i$ , тоді  $\varepsilon_i=\varphi(X_i,a_0,a_1,\dots,a_m)-Y_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

Задача знаходження найкращих значень параметрів  $a_0,a_1,\dots,a_m$  зводиться до деякої мінімізації відхилень  $\varepsilon_i$ . Існує кілька способів рішення цієї задачі. Розглянемо три з них.

#### *Метод обраних точок*

За заданим значенням перебуває система точок на площині  $XOY$  й проводиться плавна лінія, яка найбільш близько примикає до заданих точок. На цій лінії вибираються точки, число яких повинне бути рівним числу шуканих параметрів ( $m+1$ ). Координати цих точок  $(X_j^o, Y_j^o)$  ретельно вимірюються й використовуються для запису умови проходження графіка емпіричної функції через обрані точки:

$$\varphi(X_j^o,a_0,a_1,\dots,a_m)=Y_j^o, j=0,1,2,\dots,m.$$

За цією системою рівнянь оцінюють значення параметрів емпіричної функції.

#### *Метод середніх*

Сутність методу полягає у тому, що параметри шуканої залежності визначаються за умови рівності нулю суми відхилень  $\varepsilon_i$ :

$$\sum\varepsilon_i=\sum(\varphi(X_i,a_0,a_1,\dots,a_m)-Y_i)=0.$$

Це рівняння використовується для пошуку параметрів  $a_j$ . З єдиного рівняння неможливо однозначно знайти ( $m+1$ ) параметрів, тому  $\varepsilon_i$  розбивається довільно на систему з ( $m+1$ ) рівняннями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3&=0; \\ \varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6&=0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n&=0. \end{aligned}$$

Розв’язуючи цю систему рівнянь, визначають невідомі параметри  $a_j$ .

#### *Метод найменших квадратів*

Основа методу полягає у тому, що пошук параметрів  $a_j$  ( $j=0,1,2,\dots,m$ ) виконується за умови мінімуму суми квадратів відхилень  $\varepsilon_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ):

$$S=\sum\varepsilon_i^2=\sum(\varphi(X_i,a_0,a_1,\dots,a_m)-Y_i)^2=\min.$$

Параметри  $a_j$  є незалежними змінними функції  $S=S(a_0, a_1, \dots, a_m)$ . Мінімум функції знаходиться за умови, коли часткові похідні по цих параметрах дорівнюють нулю:

$$\begin{aligned} \partial S / \partial a_0 &= 0, \\ \partial S / \partial a_1 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \partial S / \partial a_m &= 0. \end{aligned}$$

Параметри  $a_j$  визначають з одержаної системи рівнянь.

## 2.2 Підбір параметрів рівняння регресії

Рівняння прямої має вигляд:

$$Y = aX + b, \quad \text{або} \quad X = a_x Y + b_x, \quad (12)$$

де  $a$  – кутовий коефіцієнт, який чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі  $OX$ ;

$a_x$  – аналогічно  $a$ , але до осі  $OY$ ;

$b$  або  $b_x$  – значення  $Y$  при  $X=0$  або  $X$  при  $Y=0$ .

Якщо  $b$  чи  $b_x$  дорівнює 0, рівняння набуває вигляду:

$$Y = aX, \quad \text{чи} \quad X = a_x Y. \quad (13)$$

При обробці даних спостережень за двома змінними, що знаходяться в лінійній залежності, задача зводиться до пошуку параметрів  $a$  і  $b$ , причому таких параметрів, при яких відхилення емпіричних точок від теоретичної прямої, задовольняло б визначену умову. Найчастіше використовується “метод найменших квадратів”, а саме рівняння прямої називається рівнянням регресії.

Припустимо, що є  $n$  парних спостережень  $X_i Y_i$ . Необхідно визначити рівняння регресії й оцінити його точність.

Необхідну умову методу можна записати таким чином:

$$S = \Sigma(Y_i - Y_p)^2 = \Sigma[Y_i - (aX_i + b)]^2 = \min. \quad (14)$$

Сума (14) при тому самому наборі  $X_i Y_i$  є функцією двох змінних  $a$  і  $b$ . Знайдемо параметри  $a$  і  $b$  за умови, що сума (14) мінімальна. Для цього необхідно взяти перші похідні від згаданих змінних і прирівняти їх до 0:

$$\begin{aligned} S_a' &= \{\Sigma[Y_i - aX_i - b]^2\}' = 2\Sigma[(Y_i - aX_i - b)(-X_i)] = 0; \\ S_b' &= \{\Sigma[Y_i - aX_i - b]^2\}' = 2\Sigma[(Y_i - aX_i - b)(-1)] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Розкриваючи дужки, одержуємо:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i Y_i &= a \Sigma X_i^2 + b \Sigma X_i; \\ \Sigma Y_i &= a \Sigma X_i + nb.\end{aligned}\tag{16}$$

Віднімемо тепер від  $X_i$  і  $Y_i$  їхні середні значення  $X_C$  і  $Y_C$ , тобто центруємо ці змінні (графічно такий прийом означає перенесення початку системи координат у точку  $X_C Y_C$ ):

$$\begin{aligned}\Sigma (X_i - X_C)(Y_i - Y_C) &= a \Sigma (X_i - X_C)^2 + b \Sigma (X_i - X_C); \\ \Sigma (Y_i - Y_C) &= a \Sigma (X_i - X_C) + nb.\end{aligned}$$

З огляду на те, що  $\Sigma (X_i - X_C) = \Sigma (Y_i - Y_C) = 0$ , одержимо

$$\begin{aligned}\Sigma (X_i - X_C)(Y_i - Y_C) &= a \Sigma (X_i - X_C)^2; \\ nb &= 0.\end{aligned}$$

З цього кутовий коефіцієнт  $a$  дорівнює:

$$a = [\Sigma (X_i - X_C)(Y_i - Y_C)] / [\Sigma (X_i - X_C)^2].\tag{17}$$

Аналогічно кутовий коефіцієнт  $a_x$  буде дорівнювати:

$$a_x = [\Sigma (X_i - X_C)(Y_i - Y_C)] / [\Sigma (Y_i - Y_C)^2].$$

Якщо емпіричні точки лежать на одній прямій, то добуток  $a$  й  $a_x$  дорівнює одиниці. Якщо ж спостерігається розкид, то лінії  $Y = aX + b$  і  $X = a_x Y + b_x$  не збігаються. Причому, чим більший розкид, тим більший кут між лініями.

Як міру розкиду використовують корінь з добутку кутових коефіцієнтів  $a$  й  $a_x$ , що одержав назву коефіцієнта кореляції Пірсона:

$$r_{xy} = (a * a_x)^{0.5} = [\Sigma (X_i - X_C)(Y_i - Y_C)] / \{[\Sigma (X_i - X_C)^2] * [\Sigma (Y_i - Y_C)^2]\}^{0.5},$$

або 
$$r_{xy} = [\Sigma (X_i - X_C)(Y_i - Y_C)] / [(n-1)\sigma_x \sigma_y],\tag{18}$$

де  $\sigma_x = [\Sigma (X_i - X_C)^2 / (n-1)]^{0.5}$  і  $\sigma_y = [\Sigma (Y_i - Y_C)^2 / (n-1)]^{0.5}$  – середньоквадратичні відхилення рядів  $X$  і  $Y$ .

При  $r_{xy} = \pm 1$  спостерігається лінійний зв'язок; при  $r = 0$  залежність відсутня.

Враховуючи (17) і (18) параметр  $a$  можна записати:

$$a = r_{xy} \sigma_y / \sigma_x.\tag{19}$$

Рівняння регресії буде мати вигляд:

$$(Y - Y_C) = a(X - X_C). \quad (20)$$

З (20) неважко знайти параметр  $b$  в рівнянні (12):

$$Y - Y_C = aX - aX_C \rightarrow Y = aX + Y_C - aX_C \rightarrow b = Y_C - aX_C. \quad (21)$$

Мірою точності рівняння регресії є середнє квадратичне відхилення емпіричних точок ( $Y_i$ ) від лінії регресії (від розрахункових точок  $Y_{Pi}$ ):

$$S_y = [\sum (Y_i - Y_{Pi})^2 / n]^{0.5}. \quad (22)$$

## 2.3 Прогноз висоти хвиль рідкісної повторюваності

### *Забезпеченість висоти хвиль у системі й режимі*

Будь-якій шторм – це система хвиль, у якій їхня висота являє собою випадкову величину з деяким законом розподілу. На цей час параметри цього розподілу визначені. Вони залежать від співвідношення середньої довжини хвиль і глибини ділянки водного об'єкта, на якому спостерігається розглянуте хвилювання. Значення перехідних коефіцієнтів  $k_C$  від середньої висоти хвиль у системі (у штормі) до деякої висоти із забезпеченістю  $F_C$  для різних умов представлені в табличній формі [1]. По суті справи висота хвилі з будь-якою забезпеченістю в системі може бути використана, як характерна для шторму. На практиці найчастіше розглядають середнє значення висоти хвиль і із забезпеченістю 5, 3, 1, 0,1% у системі.

Режимна функція висоти хвиль, як випадкової величини, являє собою закон її розподілу в часі. Вона дозволяє знайти забезпеченість  $F_P$  (імовірність перевищення) заданого значення висоти хвиль і навпаки: по заданій частоті оцінити висоту хвиль. У цій функції висота характеризує не тільки енергію хвилі, але й силу шторму, тобто режимна функція практично дозволяє оцінити частоту виникнення штормів різної сили. При проектуванні різних гідротехнічних споруд розглядають шторми, що виникають із частотою 1 раз в 25, 50 або 100 років (4, 2 або 1% у режимі).

Тут необхідно відзначити, що частота й забезпеченість мають різні значення для однієї й тієї ж хвилі. Нижче буде наведена формула, по якій перераховується необхідна частота в забезпеченість.

Режимна функція будується за середніми значеннями висоти хвиль у випадку, якщо вона розраховується за даними спостережень за швидкістю вітру. При побудові режимної функції за даними спостережень за хвилюванням, як характерна виступає  $h^{(3)}$  (значення висоти хвиль із

забезпеченістю 3% у системі), оскільки теоретично вважається, що відповідно до методики проведення спостережень за хвилюванням на гідрологічних постах результати спостережень мають 3-відсоткову забезпеченість у системі.

Прогноз штормів і висот хвиль рідкої повторюваності необхідний при проектуванні різних гідротехнічних споруд для забезпечення їхньої стійкості під впливом хвиль, а також для оцінки ймовірності аварійних ситуацій на цих спорудах і розрахунків розмірів збитків, у тому числі й екологічних, при розробці розділу «Оцінка впливу на навколишнє середовище» (ОВНС).

### ***Побудова режимної функції***

Режимні функції висоти хвиль можна побудувати по восьми румбах:  $P_n$ ,  $P_{nC}$ ,  $C$ ,  $P_{dC}$ ,  $P_d$ ,  $P_{d3}$ ,  $3$  та  $P_{n3}$ . Однак розглядаються при прогнозуванні не всі ці напрямки, а тільки хвиленебезпечні, тобто ті, у яких спостерігається найбільша довжина розгону хвиль, а також найбільш часті й сильні вітри.

Побудову режимної функції можна виконати графічно і аналітично.

#### ***Графічна методика.***

а) Для кожного хвиленебезпечного напрямку діапазон можливих значень висоти хвиль розбивається на інтервали з межами  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_k$ . За результатами спостережень підраховується кількість випадків  $m_i$  попадання значень висоти хвиль на ці інтервали:  $0 < h \leq h_1$ ;  $h_1 < h \leq h_2$ ;  $h_2 < h \leq h_3, \dots$ ;  $h_{k-1} < h \leq h_k$ ;  $h_k < h < \infty$ . Загальна кількість випадків хвилювання розглянутого напрямку буде дорівнювати  $n_H = \sum m_i$ .

б) Далі розраховується ймовірність  $p_i(\%)$  попадання на інтервали й ймовірність напрямку  $P_H(\%)$  по формулах:

$$p_i = 100m_i/N \quad \text{й} \quad P_H = 100n_H/N, \quad (23)$$

де  $N$  – загальна кількість спостережень в усіх напрямках.

Неважно помітити, що  $P_H = \sum p_i$ .

в) Для лівої межі інтервалів визначається безумовна забезпеченість  $F_{Bi}$ , виходячи з таких міркувань:  $0$  має забезпеченість  $P_H$ ; тоді  $h_1$  має забезпеченість  $F_{B1} = P_H - p_1$ ;  $h_2$  – забезпеченість  $F_{B2} = F_{B1} - p_2$ ;  $h_3$  – забезпеченість  $F_{B3} = F_{B2} - p_3; \dots$ ;  $h_k$  – забезпеченість  $F_{Bk} = p_k$ .

Умовна забезпеченість  $F_{Pi}$  розраховується за формулою:

$$F_{Pi} = 100F_{Bi}/P_H. \quad (24)$$

Значення  $F_{Pi}$  називається умовним, оскільки характеризує забезпеченість висоти хвиль за умови, що спостерігається хвилювання розглядуваного напрямку (ймовірність напрямку береться за 100%).

г) За значеннями лівої межі інтервалів  $h_i$  і відповідними їм значеннями  $F_{Pi}$  будується графік зв'язку  $F_P = f(h)$ .

При побудові зв'язку  $F_P=f(h)$  припускають, що  $h$  розподілена за законом Вейбула. Тому на практиці для вирівнювання даної залежності використовується клітчатка ймовірності Вейбула з осями координат, трансформованими відповідно до (11). Або можна знайти  $\ln \ln(1/F_{Pi})$  і  $\ln(h_i)$ , та побудувати графік  $\ln \ln(1/F_P)=f[\ln(h)]$ .

Аналітична методика. Вигляд закону розподілу висоти хвиль в часі відомий – це закон розподілу Вейбула

$$F_P = \exp(-ah^\beta), \quad (25)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – параметри закону розподілу.

Знайти ці параметри можна при статистичній обробці результатів спостережень. Для цього необхідно спочатку вирівняти вихідні дані (тобто привести нелінійну залежність до лінійного вигляду):

$$\begin{aligned} F_P = \exp(-ah^\beta) \rightarrow 1/F_P = \exp(ah^\beta) \rightarrow \ln(1/F_P) = ah^\beta \rightarrow \\ \rightarrow \ln \ln(1/F_P) = \ln \alpha + \beta \ln h \rightarrow \{Y = \ln \ln(1/F_P); X = \ln h\} \rightarrow Y = \alpha^* + \beta X. \end{aligned} \quad (26)$$

Методом найменших квадратів можна знайти параметри отриманого рівняння регресії, вони будуть рівні:

$$\beta = r_{XY} \sigma_Y / \sigma_X, \quad (27)$$

$$\alpha^* = Y_C - \beta X_C, \quad (28)$$

де  $r_{XY}$  – коефіцієнт кореляції ряду  $X$  і ряду  $Y$ ;  
 $\sigma_Y$  – середньоквадратичне відхилення ряду  $Y$ ;  
 $\sigma_X$  – середньоквадратичне відхилення ряду  $X$ ;  
 $Y_C$  – середнє значення ряду  $Y$ ;  
 $X_C$  – середнє значення ряду  $X$ .

Всі ці характеристики визначаються шляхом статистичної обробки результатів спостережень за формулами:

$$X_C = (\sum X_i) / n; \quad Y_C = (\sum Y_i) / n; \quad (29)$$

$$\sigma_X = [(\sum (X_i - X_C)^2) / (n-1)]^{0.5}; \quad \sigma_Y = [(\sum (Y_i - Y_C)^2) / (n-1)]^{0.5}; \quad (30)$$

$$r_{XY} = [\sum (Y_i - Y_C)(X_i - X_C)] / [(n-1) \sigma_Y \sigma_X]. \quad (31)$$

Послідовність розрахунку така:

- члени ряду спостережень за хвилюванням  $h_i$  ранжируються в порядку спадання і нумеруються;
- за номером члена ряду розраховується режимна забезпеченість за



формулою Крицького-Менкеля:

$$F_{Pi}=i/(n+1), \quad (32)$$

де  $i$  – номер члена ранжируваного ряду;  
 $n$  – кількість членів ряду;  
 - по ряду  $F_{Pi}$  розраховується ряд  $Y_i=\ln\ln(1/F_{Pi})$ , а по ряду  $h_i$  розраховується ряд  $X_i=\ln h_i$ ;  
 - для рядів  $Y_i$  і  $X_i$  розраховуються середні значення, середньоквадратичні відхилення і коефіцієнт кореляції;  
 - за цими характеристиками визначаються параметри  $\alpha^*$  и  $\beta$ ;  
 - розраховується параметр  $\alpha = \exp(\alpha^*)$ ;  
 - для кожного члена ряду  $F_{Pi}$  розраховується відповідне йому  $h_{Pi}$  за формулою

$$h_{Pi}=[(1/\alpha)\ln(1/F_{Pi})]^{1/\beta}; \quad (33)$$

- перевіряється точність апроксимації:

$$S=[(\sum(h_i-h_{Pi})^2)/n]^{0.5}, \quad (34)$$

$$S_H=S/h_C,$$

де  $h_C$  – середнє значення ряду спостережень за хвилюванням.

#### **Прогноз висоти хвиль**

Прогноз характерної висоти хвиль із частотою 1 раз на  $n$  років виконується по побудованій режимній функції. Для цього:

- необхідна частота  $1/n$  перераховується [1] у відповідну забезпеченість  $F_P(\%)$  за формулою

$$F_P=100\Delta t_{um}/(T_B n P_H), \quad (35)$$

де  $\Delta t_{um}$  – середня тривалість шторму, д (за відсутності спостережень для морів дорівнює 0,5 д, для океанів – 0,75 д);

$T_B$  – середня тривалість безльодового періоду, д;

$P_H$  – імовірність розглянутого напрямку (у частках від одиниці);

- по  $F_P$  оцінюється характерна висота хвилі  $h_P$ .

Для переходу від характерної до необхідної висоти хвиль у системі використовуються перехідні коефіцієнти  $k_C$  (табл. 1)

Таблиця 1 – Перехідні коефіцієнти  $k_C$  (для  $H/\lambda \geq 0,5$ , де  $H$  – середня глибина акваторії;  $\lambda$  – середня довжина хвиль) [1]

$F_C, \%$	45,7	13	5	3	1	0,1
$k_C$	1,00	1,61	1,94	2,10	2,40	2,94

## 3 ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗАБРУДНЮВАЛЬНИХ РЕЧОВИН У ВОДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

### 3.1 Процеси розповсюдження і трансформації речовини у водному середовищі

*Розповсюдження речовини* у турбулентному потоці відбувається за рахунок таких процесів:

- а) адвективний перенос;
- б) осідання завислої речовини;
- в) турбулентна дифузія;
- г) молекулярна дифузія.

Молекулярну дифузію зазвичай не розглядають через те, що інтенсивність цього процесу дуже мала в порівнянні з іншими процесами.

Адвективний перенос (адвекція) – це процес розповсюдження речовини з середньою швидкістю ( $V_C$ ) потоку. За рахунок цього процесу речовина переноситься на великі відстані. Адвекція має велике значення в формуванні якості вод.

Одинична витрата (інтенсивність переносу) речовини ( $q_A$ ) – векторна величина. Її напрям співпадає з напрямом середньої швидкості потоку. Розраховується  $q_A$  за формулою:

$$q_A = V_C C. \quad (36)$$

Якщо розглянути проекції вектора ( $q_{AX}$ ;  $q_{AY}$  і  $q_{AZ}$ ) переносу речовини в потоці на осі довільної системи координат, то

$$q_{AX} = V_X C; \quad q_{AY} = V_Y C \quad \text{і} \quad q_{AZ} = V_Z C. \quad (37)$$

Осідання завислої речовини відбувається за рахунок сили тяжіння. Коли щільність частинок зависі більша ніж густина води.

Одинична витрата (інтенсивність переносу) речовини дорівнює:

$$q_o = u C, \quad (38)$$

де  $u$  – швидкість осідання частинок (гідралічна крупність).

Турбулентна дифузія – це процес розповсюдження речовини за рахунок вихрового руху потоку. Він відбувається у всіх напрямках. Турбулентна дифузія є основним процесом розводження речовини у водному середовищі.

Одиничні турбулентні витрати речовини у напрямку осей довільної системи координат будуть дорівнювати:

$$q_{TX} = -D_X \partial C / \partial x, \quad q_{TY} = -D_Y \partial C / \partial y, \quad q_{TZ} = -D_Z \partial C / \partial z, \quad (39)$$

де  $D_X, D_Y, D_Z$  – коефіцієнти турбулентної дифузії.

**Трансформація речовини** (неконсервативність) при моделюванні враховується за допомогою коефіцієнта неконсервативності  $k_H$ , розмірність якого – 1/с. При зниженні концентрації речовини коефіцієнт  $k_H$  має негативне значення. Ця величина характеризує швидкість зміни концентрації речовини в частках від початкової концентрації ( $C$ )

$$k_H = \Delta C / (C \Delta t). \quad (40)$$

За малий період часу ( $\Delta t$ ) зниження концентрації речовини ( $\Delta C$ ) дорівнює

$$\Delta C = k_H C \Delta t. \quad (41)$$

Інколи замість  $k_H$  використовують коефіцієнт розпаду  $k$ , розмірність цього коефіцієнта – 1/д. При зниженні концентрації речовини він має позитивне значення. Коефіцієнт  $k$  більший за  $k_H$  у стільки разів, скільки секунд в добі

$$k = -86400 k_H. \quad (42)$$

Закон зміни концентрації речовини у часі має вигляд

$$C(t) = C(0) \exp(k_H t) = C(0) \exp(-kt), \quad (43)$$

де  $C(0)$  – початкова концентрація речовини.

### **3.2 Моделювання розповсюдження речовини у турбулентному потоці при скиді стічних вод**

У турбулентних потоках вихровий рух призводить до перемішування водних мас. Речовина, що потрапила у ту або іншу частину потоку, під впливом турбулентного перемішування розповсюджується в суміжні струмені. Відбувається розводження цієї речовини, тобто її концентрація знижується. За певних умов на деякій відстані від місця скиду стічних вод концентрація речовини може стати як завгодно малою. Таким чином може відбутися гідродинамічне “самоочищення потоку”.

Нарівні з гідродинамічним, очищення потоку відбувається також за рахунок хімічних і біологічних процесів.

Сумісна дія цих факторів приводить до повного очищення потоку. Однак найбільш швидке зниження концентрацій речовини у водах потоку відбувається за рахунок турбулентного перемішування.

Розрахунок розводження стічних вод є основним при оцінці гранично допустимих скидів речовин у потоки. Ці розрахунки виконуються різними методиками, більшість з яких розроблені на основі математичного моделювання розглядуваного процесу.

Розглянемо числові моделі процесу розводження стічних вод у турбулентному потоці.

**Вивід рівняння турбулентної дифузії (об’єктна схема)**

Виділимо у турбулентному потоці [3] паралелепіпед (рис. 1) об’ємом  $dW = dx dy dz$ . Ребра цього паралелепіпеда паралельні осям координат, що проходять таким чином: площина  $XOZ$  горизонтальна, а ось  $OY$  спрямована вертикально вниз. Грані паралелепіпеда, перпендикулярні до осі  $OX$ , позначимо 1 і 2; перпендикулярні до  $OZ$  – 3 і 4; перпендикулярні до  $OY$  – 5 і 6. Площа граней дорівнює  $d\omega_1, d\omega_2, \dots, d\omega_6$  відповідно.

Концентрацію неконсервативної зависі в точках, розташованих у центрах граней паралелепіпеда, пронумеруємо відповідно  $C_1, C_2, \dots, C_6$  (будемо вважати, що середня концентрація речовини на гранях розташована в їх центрах). Проекції середньої швидкості потоку позначимо  $V_x, V_y, V_z$ . Швидкість трансформації зависі позначимо  $k_H$ .

Розглядуваний контрольний паралелепіпед закріпимо жорстко в просторі й оцінимо, як зміниться концентрація завислої речовини у воді за час  $\delta t$  у нашому паралелепіпеді. Гідравлічну крупність речовини у воді позначимо  $u$ , а середній перенос речовини крізь одиницю поверхні позначимо  $q$ . Процеси надходження і виносу речовини в нашому паралелепіпеді здійснюються за рахунок адвекції, турбулентної дифузії й осідання частинок. Обмін речовиною за рахунок осідання відбувається тільки крізь горизонтальні грані.

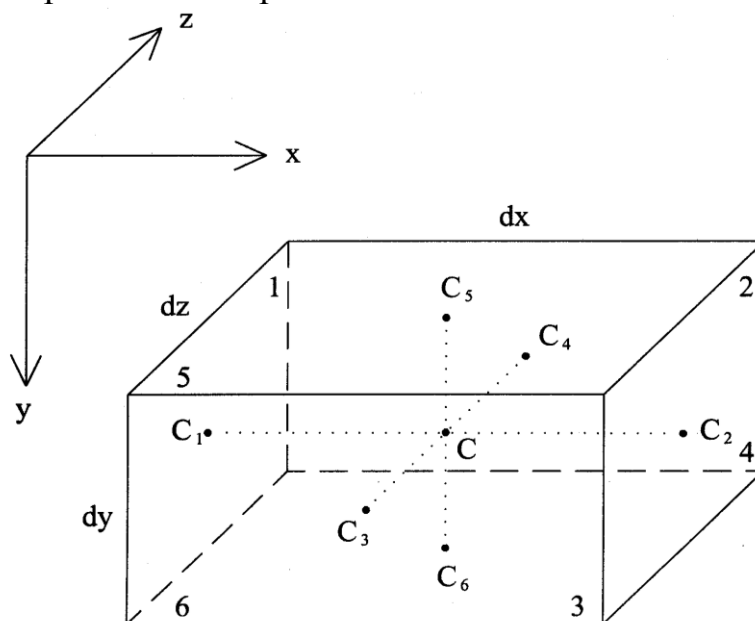


Рис. 1 – Схема виводу диференціального рівняння

Кількість речовини ( $m_1$ ), що надійшла в паралелепіпед крізь грань 1 за рахунок адвекції ( $m_{A1}$ ) і турбулентної дифузії ( $m_{T1}$ ), дорівнює:

$$m_1 = m_{A1} + m_{T1} = d\omega_1 \delta t q_{A1} + d\omega_1 \delta t q_{T1} = dydz \delta t (V_X C_1 + q_{T1}). \quad (44)$$

Кількість речовини, винесеної з паралелепіпеда крізь другу грань, відповідно дорівнює:

$$m_2 = dydz \delta t (V_X C_2 + q_{T2}). \quad (45)$$

Зміна кількості речовини за рахунок її надходження крізь грань 1 і виносу крізь грань 2 дорівнює:

$$\Delta m_{12} = m_1 - m_2 = dydz \delta t [V_X (C_1 - C_2) + (q_{T1} - q_{T2})].$$

Виразимо концентрацію  $C_2$  через  $C_1$ , позначивши зміну концентрації речовини від грані 1 до грані 2 через  $\partial C / \partial x$ , і знайдемо різницю ( $C_1 - C_2$ ):

$$C_2 = C_1 + (\partial C / \partial x) dx \rightarrow (C_1 - C_2) = -(\partial C / \partial x) dx.$$

Аналогічно можна представити різницю величин  $q_{T1}$  і  $q_{T2}$ :

$$q_{T1} - q_{T2} = -\{\partial q / \partial x\} dx = -\{\partial [-D_X (\partial C / \partial x)] / \partial x\} dx = D_X (\partial^2 C / \partial x^2) dx.$$

У такий спосіб

$$\Delta m_{12} = dW \delta t [-V_X (\partial C / \partial x) + D_X (\partial^2 C / \partial x^2)], \quad (46)$$

де  $dW = dx dy dz$ .

Зміна кількості речовини в паралелепіпеді за рахунок надходження її крізь грань 3 і виносу крізь грань 4 буде відповідно дорівнювати

$$\Delta m_{34} = dW \delta t [-V_Z (\partial C / \partial z) + D_Z (\partial^2 C / \partial z^2)]. \quad (47)$$

На відміну від вертикальних граней надходження і винос речовини крізь горизонтальні грані 5 і 6 доповнюються осіданням частинок:

$$\begin{aligned} \Delta m_{056} &= m_{05} - m_{06} = dx dz \delta t (q_{05} - q_{06}) = dx dz \delta t (u C_5 - u C_6) = \\ &= dx dz \delta t [u (C_5 - C_6)] = dx dz \delta t [-u (\partial C / \partial y) dy], \\ \Delta m_{56} &= \Delta m_{A56} + \Delta m_{T56} + \Delta m_{056} = \\ &= dW \delta t [-V_Y (\partial C / \partial y) + D_Y (\partial^2 C / \partial y^2) - u (\partial C / \partial y)]. \end{aligned} \quad (48)$$

Зниження кількості речовини за час  $\delta t$  у всьому паралелепіпеді за рахунок її розпаду  $\Delta m_H$  можна розрахувати за формулою:

$$\Delta m_H = dW \delta t k_H C. \quad (49)$$

Сума величин  $\Delta m = \Delta m_{12} + \Delta m_{34} + \Delta m_{56} + \Delta m_H$  характеризує зміну кількості речовини в паралелепіпеді за час  $\delta t$ . По іншому цю зміну можна записати:

$$\Delta m = dW \delta t (\partial C / \partial t), \quad (50)$$

де  $\partial C / \partial t$  – зміна кількості речовини в одиниці об'єму за одиницю часу за рахунок усіх процесів.

Якщо ми тепер праву частину (50) прирівнюємо до суми (46), (47), (48) і (49), усе розділимо на  $dW \delta t$ , то одержимо

$$\begin{aligned} \partial C / \partial t = & D_X (\partial^2 C / \partial x^2) + D_Y ((\partial^2 C / \partial y^2) + D_Z (\partial^2 C / \partial z^2) - \\ & - V_X (\partial C / \partial x) - V_Y (\partial C / \partial y) - V_Z (\partial C / \partial z) - u (\partial C / \partial y) + k_H C. \end{aligned} \quad (51)$$

Повна похідна концентрації за часом, з огляду на те, що концентрація – це функція чотирьох змінних  $x, y, z, t$ , дорівнює:

$$dC / dt = \partial C / \partial t + V_X (\partial C / \partial x) + V_Y (\partial C / \partial y) + V_Z (\partial C / \partial z) \partial C.$$

Враховуючи останній вираз, перепишемо отриману формулу:

$$dC / dt = D_X (\partial^2 C / \partial x^2) + D_Y (\partial^2 C / \partial y^2) + D_Z (\partial^2 C / \partial z^2) - u (\partial C / \partial y) + k_H C. \quad (52)$$

Якщо припустити, що  $D_X = D_Z = D_{ГОР}$ , а  $D_Y = D_{БЕРТ}$ , то в кінцевому вигляді одержимо:

$$dC / dt = D_{ГОР} [(\partial^2 C / \partial x^2) + (\partial^2 C / \partial z^2)] + D_{БЕРТ} (\partial^2 C / \partial y^2) - u (\partial C / \partial y) + k_H C. \quad (53)$$

Для руслових потоків, де  $D_{ГОР} = D_{БЕРТ} = D$ , можна записати

$$dC / dt = D [(\partial^2 C / \partial x^2) + (\partial^2 C / \partial z^2) + (\partial^2 C / \partial y^2)] - u (\partial C / \partial y) + k_H C. \quad (54)$$

Якщо речовина розчинна ( $u=0$ ) і консервативна ( $k_H=0$ ), останні доданки у формулах (51)–(54) зникають.

**Числова модель розповсюдження речовини у потоці у плоскій постановці задачі при скиді стічних вод.**

Запишемо рівняння турбулентної дифузії речовини у потоці (при

$D=const$ ) в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} & \partial C/\partial t + V_x(\partial C/\partial x) + V_y(\partial C/\partial y) + V_z(\partial C/\partial z) \partial C = \\ & = D[(\partial^2 C/\partial x^2) + (\partial^2 C/\partial z^2) + (\partial^2 C/\partial y^2)] - u(\partial C/\partial y) + k_H C. \end{aligned} \quad (55)$$

Розглянемо деякий потік, у який скидаються стічні води. Обмін речовиною з одного берега відсутній, з другого берега спостерігається боковий приплив речовини  $q_B$ .

В залежності від характеру потоку і особливостей задачі, яка вирішується, рівняння можна записати з тими або іншими спрощеннями. Розглянемо випадок, коли зміною концентрації домішки по глибині можна знехтувати ( $\partial C/\partial y=0$ ). У подальшому будемо вважати, що ось  $Ox$  спрямована уздовж середнього вектора швидкості потоку ( $V_y=V_z=0$ ,  $V_x=V_C$ ), гідравлічна крупність частинок речовини –  $u$ , коефіцієнт неконсервативності речовини –  $k_H$ , процес розводження стаціонарний ( $\partial C/\partial t=0$ ), у напрямку вектора швидкості потоку адвективний перенос речовини ( $V_C C$ ) набагато більший ніж турбулентна дифузія ( $-D\partial C/\partial x$ ), тому величиною  $-D\partial C/\partial x$  можна знехтувати.

З урахуванням зроблених припущень рівняння (55), граничних і початкових умов модель розповсюдження речовини у потоці в плоскій постановці задачі буде представлена у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & V_C(\partial C/\partial x) = D(\partial^2 C/\partial z^2) - C f^*, \quad (56) \\ & C(0, z) = C_0, \text{ при } x=0 \text{ и } z_1 \leq z \leq z_2, \\ & C(0, z) = 0, \text{ при } x=0 \text{ и } z_1 > z > z_2, \\ & \partial C/\partial z = 0, \text{ при } x \geq 0, z=0, \\ & -D(\partial C/\partial z) = q_B/H_C, \text{ при } x \geq 0, z=B_C, \end{aligned}$$

де  $f^*=u/H_C$  – для завислої речовини,  $f^*=-k_H$  – для неконсервативної речовини;

$H_C$  – середня глибина потоку, м;

$C_0$  – концентрація речовини в стічних водах, мг/дм<sup>3</sup>;

$z_1$  і  $z_2$  – межі стічних вод у початковому створі, м;

$B_C$  – середня ширина потоку, м.

### **Вивід розрахункових формул**

Уздовж потоку від джерела забруднення проведемо створи [11] із кроком  $\Delta x$ , по ширині розіб'ємо потік на струмені із кроком  $\Delta z$  (рис. 2).

Створи і струмені пронумеруємо, при цьому нумерацію створів позначимо індексом “ $k$ ”, а струменів – індексом “ $m$ ”.

Середнім значенням концентрації домішки у створі в межах кожного струменя припишемо відповідні індекси, будемо вважати, що ці значення концентрації відносяться до центра струменів.

	↑↓ Δz		← Δx →	X
m - 1		$C_{k,m-1}$		$V_C \rightarrow$
m		$C_{k,m}$	$C_{k+1,m}$	
m + 1		$C_{k,m+1}$		
Z		k	k+1	

Рис. 2 – Нанесення сітки на розрахункову область потоку і нумерація значень концентрації речовини

Визначимо похідні в рівнянні (40), використовуючи позначення, використані на рис. 2:

$$\partial C / \partial x \approx (C_{k+1,m} - C_{k,m}) / \Delta x, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 C / \partial z^2 \approx [(\Delta C / \Delta z)_2 - (\Delta C / \Delta z)_1] / \Delta z &= [(C_{k,m+1} - C_{k,m}) / \Delta z - (C_{k,m} - C_{k,m-1}) / \Delta z] / \Delta z \rightarrow \\ \rightarrow \partial^2 C / \partial z^2 \approx (C_{k,m+1} - 2C_{k,m} + C_{k,m-1}) / \Delta z^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Підставимо (57) і (58) у (56) та вирішимо отримане рівняння відносно  $C_{k+1,m}$ :

$$C_{k+1,m} = a(C_{k,m+1} + C_{k,m-1}) + (1 - 2a - f)C_{k,m}, \quad (59)$$

$$\text{де } a = D\Delta x / (V_C \Delta z^2); \quad (60)$$

$$f = u\Delta x / (H_C V_C) \text{ або } f = -k_H \Delta x / V_C. \quad (61)$$

Формулу (59) можна спростити, прийнявши  $a = 0,25$ , тоді

$$C_{k+1,m} = 0,25(C_{k,m+1} + C_{k,m-1}) + (0,5 - f)C_{k,m}, \quad (62)$$

$$\text{при } \Delta x = V_C \Delta z^2 / (4D). \quad (63)$$

Розв'яжемо рівняння (56) для першого струменя за умови відсутності обміну речовиною з берегом (рис. 3):

$$\partial C / \partial x = (C_{k+1,1} - C_{k,1}) / \Delta x, \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 C / \partial z^2 \approx [(\Delta C / \Delta z)_2 - (\Delta C / \Delta z)_1] / \Delta z &= [(C_{k,2} - C_{k,1}) / \Delta z - 0] / \Delta z \rightarrow \\ \rightarrow \partial^2 C / \partial z^2 \approx (C_{k,2} - C_{k,1}) / \Delta z^2. \end{aligned} \quad (65)$$



<i>б е р е г</i>				
1( $N=B_c/\Delta z$ )		$C_{k,1(N)}$	$C_{k+1,1(N)}$	$X$
2( $N-1$ )		$C_{k,2(N-1)}$		
		$k$	$k+1$	
$Z$				

Рис. 3 – Нумерація значень концентрацій домішок біля берега

З врахуванням (64) і (65) розв'язок (56) буде мати вигляд:

$$C_{k+1,1} = aC_{k,2} + (1-a-f)C_{k,1}, \quad (66)$$

або

$$C_{k+1,1} = 0,25C_{k,2} + (0,75-f)C_{k,1}, \quad (67)$$

при  $\Delta x = V_c \Delta z^2 / (4D)$ .

При наявності бокового припливу речовини розв'язок для струменя  $N$  буде мати такий вигляд:

$$\partial C / \partial x = (C_{k+1,N} - C_{k,N}) / \Delta x, \quad (68)$$

$$q_B = H_c q_T = -H_c D (\partial C / \partial z)_1 \rightarrow (\partial C / \partial z)_1 \approx (\Delta C / \Delta z)_1 \approx -q_B / (H_c D),$$

$$\begin{aligned} \partial^2 C / \partial z^2 &\approx [(\Delta C / \Delta z)_2 - (\Delta C / \Delta z)_1] / \Delta z = [(C_{k,N-1} - C_{k,N}) / \Delta z - (-q_B / (H_c D))] / \Delta z \rightarrow \\ &\rightarrow \partial^2 C / \partial z^2 \approx [C_{k,N-1} - C_{k,N} + \Delta z q_B / (H_c D)] / \Delta z^2. \end{aligned} \quad (69)$$

При рішенні (56) з врахуванням (68) і (69) отримуємо

$$C_{k+1,N} = a[C_{k,N-1} + \Delta z q_B / (H_c D)] + (1-a-f)C_{k,N}, \quad (70)$$

або

$$C_{k+1,N} = 0,25[C_{k,N-1} + \Delta z q_B / (H_c D)] + (0,75-f)C_{k,N}, \quad (71)$$

при  $\Delta x = V_c \Delta z^2 / (4D)$ .

Таким чином, розв'язок моделі розповсюдження речовини у потоці можна записати у такому вигляді:

$$C_{k+1,m} = 0,25(C_{k,m+1} + C_{k,m-1}) + (0,5-f)C_{k,m}, \quad (71)$$

при  $2 \leq m \leq (B_c / \Delta z) - 1$ ;

$$C_{k+1,1} = 0,25C_{k,2} + (0,75-f)C_{k,1}; \quad (72)$$

$$C_{k+1,N} = 0,25[C_{k,N-1} + \Delta z q_B / (H_c D)] + (0,75 - f)C_{k,N}; \quad (73)$$

при  $\Delta x = V_c \Delta z^2 / (4D)$ ,

$C_{k,m} = C_0$ , при  $k=0$  і  $1 \leq m \leq b/\Delta z$ ;

$C_{k,m} = 0$ , при  $k=0$  і  $b/\Delta z < m \leq B_c/\Delta z$ .

**Перевірка розрахунків:**

у кожному створі сума значень концентрації речовини повинна дорівнювати:

– при  $f = q_B = 0$

$$\sum C_{k,m} = \text{const}; \quad (74)$$

– при  $q_B = C_E = 0$  ( $C_E$  – фонові концентрація)

$$\sum C_{k,m} = (1-f)^k n_0 C_0; \quad (75)$$

– при  $f = C_E = 0$

$$\sum C_{k,m} = n_0 C_0 + k \Delta z q_B / (H_c D); \quad (76)$$

**Вихідні дані для розрахунку:**

$Q_E$  – витрата води у потоці вище від місця скиду стічних вод, м<sup>3</sup>/с;

$C_E$  – концентрація речовини у воді потоку вище від місця скиду (фонові концентрація), мг/дм<sup>3</sup>;

$Q_{CT}$  – витрата стічних вод, м<sup>3</sup>/с;

$C_0$  – концентрація домішки у стічних водах, мг/дм<sup>3</sup>;

$V_c$  – середня швидкість потоку на розрахунковій ділянці, м/с;

$B_c$  – середня ширина потоку у місті скиду, м;

$H_c$  – середня глибина потоку на розрахунковій ділянці, м;

$D$  – коефіцієнт турбулентної дифузії (м<sup>2</sup>/с), який розраховується за формулою Караушева А.В.:

$$D = g H_c V_c / (M C), \quad (77)$$

де  $C$  – коефіцієнт Шезі (м<sup>0,5</sup>/с), визначається з таблиці 4 в залежності від типу водотоку [2];

$$\begin{aligned} M &= 0,7C + 6, \text{ при } 10 < C < 60, \\ M &= 48, \text{ при } C > 60. \end{aligned} \quad (78)$$

Необхідно також знати, у якому місці початкового створу

скидаються стічні води ( $Z_{ст}$ ).

Таблиця 4 – Типізація водотоків за особливостями гідродинамічного режиму

Тип водотоку	Група	Перемішування	Грунт	$C$ , м/с	Річна витрата, м <sup>3</sup> /с
Рівнинні	великі	добре	гравій	<b>40 - 70</b>	>250
	середні	помірне	пісок, мул	<b>30 - 60</b>	25 – 250
	малі	слабке	пісок, мул	<b>30 - 50</b>	2,5 – 25
	струмки	помірне	пісок, мул	<b>10 - 30</b>	2,5
Гірські	середні	дуже добре	валуни	<b>20 - 35</b>	25
	малі	добре	галька	<b>15 - 30</b>	2,5 – 25
	струмки	добре	валуни	<b>10 - 20</b>	2,5
Передгірні	середні	добре	галька, гравій, пісок	<b>20 - 40</b>	25 – 250

### *Послідовність розрахунку*

1. Визначається умовна площа поперечного перерізу припливу стічних вод, виходячи з припущення, що швидкість стічних вод у потоці дорівнює швидкості самого потоку:

$$\delta = Q_{ст} / V_C. \quad (79)$$

2. Розраховується ширина припливу стічних вод у початковому створі (ширина, на якій відбувається витиснення чистої води стічною водою з концентрацією домішки  $C_0$ ):

$$v = \delta / H_C. \quad (80)$$

3. За величиною “ $v$ ” визначається ширина розрахункового осередку  $\Delta z$  з урахуванням такої вимоги:

$$\Delta z = v / n_0; n_0 = 1, 2, \dots; \Delta z \leq 0,1 B_C. \quad (81)$$

4. Розраховується довжина розрахункового осередку:

$$\Delta x = V_C \Delta z^2 / (4D). \quad (82)$$

5. Визначається загальна кількість струменів по ширині потоку

$$N = B_C / \Delta z. \quad (83)$$

6. На розрахунковій області потоку розбивається сітка з осередками  $\Delta x$ ,  $\Delta z$ . У початковому створі в “ $n_0$ ” клітинок, що відповідають місцю

розташування скиду стічних вод, записується значення концентрації домішки у стічних водах ( $C_0$ ). В решту  $N-n_0$  осередків початкового створу записуються значення фонові концентрації ( $C_E$ ).

8. Розрахунок концентрації домішки в осередках наступного створу здійснюється за формулою (71) (рис. 6).

При розрахунках біля меж потоку використовуються формули (72) чи (73).

Розрахувавши таким чином концентрації домішки в осередках другого створу, переходимо до наступного і т.д.

У всіх створах сума значень концентрації речовини повинна дорівнювати одному з рівнянь (74)–(76) в залежності від умов розглядуваної задачі.

	$k$		$k+1$	
$m+1$	$C_{k,m+1}$	$-0,25 \rightarrow \downarrow$		
$m$	$C_{k,m}$	$-0,50 \rightarrow$	$C_{k+1,m}$	
$m-1$	$C_{k,m-1}$	$-0,25 \rightarrow \uparrow$		
...				
2	$C_{k,2}$	$-0,25 \rightarrow \downarrow$		
1	$C_{k,1}$	$-0,75 \rightarrow$	$C_{k+1,1}$	

*межа потоку (берег)*

Рис. 6 – Схема розрахунку концентрацій забруднювальної речовини у наступному створі

### 3.3 Моделювання розповсюдження забруднювальних речовин при аварійних розливах

#### *Вивід диференціального рівняння розповсюдження забруднювальних речовин у циліндричних координатах*

Уявимо, що стався аварійний розлив речовини об'ємом  $W_0$ . Середня глибина ( $H_C$ ) на акваторії мала і витиснення чистої води стічною водою з концентрацією домішки  $C_0$  відбувається до дна водойми (розглядаємо середню концентрацію речовини по глибині).

Об'єм забруднення у товщі води уявимо у формі циліндра, тобто на поверхні води пляма має форму кола. Початок системи координат розташуємо в центрі плями незалежно від того, чи залишається пляма на місці чи переміщується під дією течії й вітру. Перенесення плями по акваторії відбувається за рахунок адвекції, а переміщення речовини в плямі – турбулентної дифузії.

Оцінка розповсюдження плями забруднення круглої форми при таких умовах найпростіше можна виконати методом, оснований на

розв'язанні диференціального рівняння турбулентної дифузії у циліндричних координатах. При розливі речовини, що плаває на поверхні води (наприклад нафти), використовуються полярні координати.

Припустимо, що в середньому перенесення речовини в плямі відбувається рівномірно у всі боки від центра вздовж радіуса. Поперек радіуса результуючий перенос дорівнює нулю. У зв'язку з цим, концентрація речовини змінюється тільки вздовж радіусів, а на колах із центром у початку координат вона постійна.

Зроблене припущення правомочне, коли пульсації швидкості течії в потоці мають розподіл, близький до нормального, коефіцієнт турбулентної дифузії однаковий вздовж і поперек осередненого вектора швидкості течії, в межах плями швидкості течії в окремих точках незначно відрізняються одна від одної за значенням й напрямом.

Виділимо на плямі, яка розглядається, сектор [3] із кутом  $\alpha$  (рис. 7). На відстані  $r$  від центра концентрацію нафти і її похідну по радіусу позначимо  $C$  і  $\partial C/\partial r$ , а інтенсивність турбулентного переносу та його похідну –  $q$  та  $\partial q/\partial r$ .

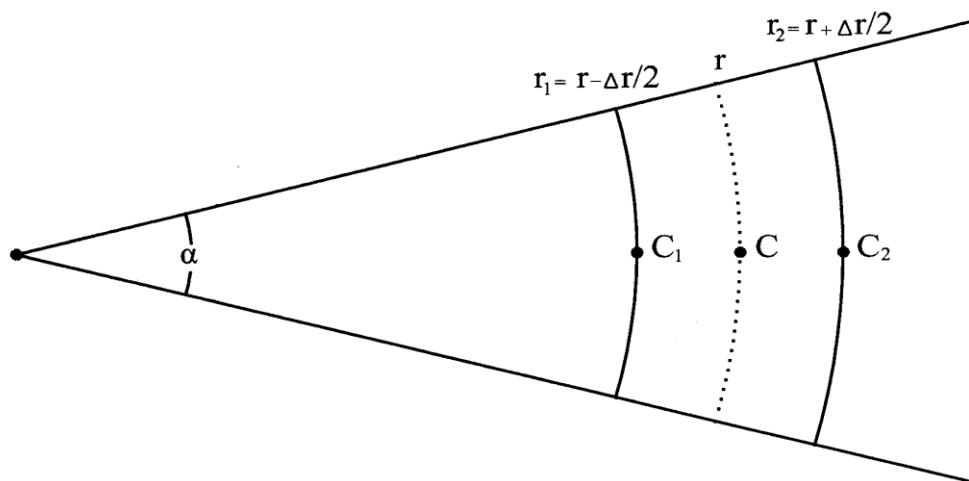


Рис. 7 – Схема до виводу диференціального рівняння

З двох сторін від концентрації, яка розглядається, проведемо дуги з радіусами  $r_1=(r-\Delta r/2)$  і  $r_2=(r+\Delta r/2)$ , довжина яких відповідно складе  $\alpha r_1$  і  $\alpha r_2$ .

Поверхня, обмежена дугами й відрізками радіусів, буде мати площу, яка дорівнює  $\Delta\omega = \alpha r \Delta r$ , а об'єм у товщі води :

$$\Delta W = H C \alpha r \Delta r.$$

Кількість речовини, яка надійшла у контрольний об'єм крізь першу поверхню (дугу) за час  $\delta t$ , виражається величиною:

$$m_1 = q_1 \Delta \omega_1 \delta t = q_1 H_C a r_1 \delta t = q_1 H_C a (r - \Delta r / 2) \delta t. \quad (84)$$

За цей же час крізь другу поверхню (дугу) буде винесено

$$m_2 = q_2 H_C a (r + \Delta r / 2) \delta t. \quad (85)$$

Зміна кількості речовини за рахунок її надходження крізь грань 1 і виносу крізь грань 2 дорівнює

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_1 - m_2 = H_C a \delta t [q_1 (r - \Delta r / 2) - q_2 (r + \Delta r / 2)] = \\ &= H_C a \delta t [r(q_1 - q_2) - (q_1 + q_2) \Delta r / 2]. \end{aligned} \quad (86)$$

Представимо різницю і суму величин  $q_1$  і  $q_2$  у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= -(\partial q / \partial r) \Delta r = -\{\partial[-D(\partial C / \partial r)] / \partial r\} \Delta r = D(\partial^2 C / \partial r^2) \Delta r, \\ (q_1 + q_2) / 2 &= q = -D(\partial C / \partial r). \end{aligned}$$

Тоді формула (86) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \Delta m &= H_C a \delta t [r D(\partial^2 C / \partial r^2) \Delta r - (-D(\partial C / \partial r)) \Delta r] = \\ &= H_C a r \Delta r \delta t [D(\partial^2 C / \partial r^2) + D(\partial C / \partial r) / r] = \\ &= \Delta W \delta t [D(\partial^2 C / \partial r^2) + D(\partial C / \partial r) / r]. \end{aligned} \quad (87)$$

Крім того, у контрольному об'ємі буде трансформовано  $\Delta m_H = C k_H \Delta W \delta t$  речовини (де  $k_H$  – коефіцієнт неконсервативності, 1/с). З врахуванням цього загальне зниження кількості речовини ( $\Delta m_3$ ) в об'ємі буде дорівнювати

$$\Delta m_3 = \Delta m + \Delta m_H = \Delta W \delta t [D(\partial^2 C / \partial r^2) + D / r (\partial C / \partial r) + C k_H]. \quad (88)$$

Процеси виносу, надходження й трансформації речовини визначають зміни її кількості за часом в контрольному об'ємі. Ці зміни можна подати у вигляді

$$\Delta m_3 = \Delta W \delta t (\partial C / \partial t). \quad (89)$$

Якщо ми праві частини рівнянь (88) і (89) розділимо на  $\Delta W \delta t$ , то одержимо:

$$\partial C/\partial t = D(\partial^2 C/\partial r^2) + D/r(\partial C/\partial r) + Ck_H. \quad (90)$$

Таким чином, модель розповсюдження речовини при аварійних розливах разом з граничними й початковими умовами буде записана у вигляді:

$$\partial C/\partial t = D(\partial^2 C/\partial r^2) + D(\partial C/\partial r)/r + Ck_H, \quad (91)$$

$$C(t,r) = C_0, \text{ при } t=0 \text{ і } 0 < r \leq r_0;$$

$$C(t,r) = 0, \text{ при } t=0 \text{ і } r > r_0,$$

де  $C_0$  – концентрація речовини у плямі в початковий момент часу;  
 $r_0$  – радіус плями в початковий момент часу.

### Розв'язання диференціального рівняння

Скористуємось диференціальним рівнянням з граничними й початковими умовами (91) для виводу розрахункової формули, яка дозволить визначити значення концентрації речовини в плямі в різні моменти часу.

На плямі з кроком  $\Delta r = r_0/n_0$  (де  $n_0$  – кількість кілець у плямі в початковий момент часу) проведемо кола, центр яких збігається з початком системи координат. Пронумеруємо отримані кільця від центра  $n=1,2,3\dots$  Припустимо, що середнє значення сіткової функції в кожному кільці розташовується в його середині. Таким чином, на  $k$ -му часовому зрізі плями від центра до периферії (рис. 8) значення сіткової функції в кільці з номером  $n$  набере позначення  $C_{k,n}$ . Це значення буде перебувати на відстані  $r_n = (2n-1)\Delta r/2$  від центра плями. Значення ж вище і нижче нього в той же момент часу будуть мати позначення  $C_{k,n-1}$  і  $C_{k,n+1}$ .

На наступному часовому зрізі  $k+1$  середнє значення концентрації зависі в кільці  $n$  матиме позначення  $C_{k+1,n}$ .

	0	1	...	$k$	$k+1$	...
1	$\updownarrow \Delta r$			$C_{k,1}$	$C_{k+1,1}$	
2				$C_{k,2}$		
...	...		...	...	...	...
$n-1$	$\leftarrow \Delta t \rightarrow$		...	$C_{k,n-1}$		
$n$			...	$C_{k,n}$	$C_{k+1,n}$	
$n+1$			...	$C_{k,n+1}$		
...	...		...	...	...	...

Рис. 8 – Явна кінцево-різницева схема для розв'язання нестационарного рівняння турбулентної дифузії зависі

Запишемо всі частинні похідні в (91), використовуючи прийняті позначення (рис. 8):

$$\partial C/\partial t \approx (C_{k+1,n} - C_{k,n})/\Delta t; \quad (92)$$

$$\partial C/\partial r \approx (C_{k,n+1} - C_{k,n-1})/(2\Delta r); \quad (93)$$

$$\partial^2 C/\partial r^2 \approx (C_{k,n+1} - 2C_{k,n} + C_{k,n-1})/\Delta r^2. \quad (94)$$

Змінну  $r$  запишемо через  $\Delta r$

$$r = (n\Delta r - \Delta r/2) = \Delta r(n - 1/2) = \Delta r(2n - 1)/2. \quad (95)$$

Підставляючи вирази (92)–(95) в формулу (91), розкриваючи дужки і вирішуючи її щодо  $C_{k+1,n}$ , отримаємо [7]

$$\text{при } n > 1 - \quad C_{k+1,n} = (1 - 2a - f)C_{k,n} + a(b_n C_{k,n+1} + d_n C_{k,n-1}), \quad (96)$$

$$\text{при } n = 1 - \quad C_{k+1,1} = (1 - 2a - f)C_{k,1} + 2aC_{k,2}, \quad (97)$$

$$\text{де } a = D\Delta t/\Delta r^2; f = -k_H\Delta t; b_n = 2n/(2n-1); d_n = (2n-2)/(2n-1). \quad (98)$$

Розв'язок стійкий при  $(2a+f) \leq 1$ .

Формулу (96) можна спростити, взявши  $a=0,25$ , тоді

$$C_{k+1,n} = (0,5 - f)C_{k,n} + 0,25(b_n C_{k,n+1} + d_n C_{k,n-1}), \quad (99)$$

за умови  $\Delta t = \Delta r^2/(4D)$  і  $f < 0,5$ .

При розливі консервативної речовини ( $k_H=0$ ) формула (99) буде мати вигляд:

$$C_{k+1,n} = 0,5C_{k,n} + 0,25(b_n C_{k,n+1} + d_n C_{k,n-1}). \quad (100)$$

### ***Перевірка результатів розрахунків.***

У кожний момент часу повинна виконуватись умова

$$\sum (2n-1)C_{k,n} = (1-f)^k n_0^2 C_0. \quad (101)$$

### ***Порядок розрахунку.***

Для розрахунку переносу й дифузії забруднювальних речовин при їх аварійних розливах необхідні такі вихідні дані: об'єм розливу  $W_0$ ; характеристика розкладання розливої речовини  $k_H$ ; початкова  $C_0$  і фоновая  $C_E$  концентрація речовини; середня глибина на акваторії  $H_C$ ; середня швидкість течії  $V_C$  (якщо вона є); коефіцієнт турбулентної дифузії  $D$ .



1. Визначається початковий радіус плями забруднення  $r_0$ , виходячи з припущення, що витиснення чистої води стічною водою з концентрацією домішки  $C_0$  відбувається до дна водойми :

$$r_0 = [W_0 / \pi H C]^{0.5}. \quad (102)$$

2. За величиною  $r_0$  визначається ширина кілець  $\Delta r$  з урахуванням такої вимоги:

$$\Delta r = r_0 / n_0; \quad n_0 \leq 5. \quad (103)$$

3. Розраховується крок у часі:

$$\Delta t = \Delta r^2 / (4D) . \quad (104)$$

4. В  $n_0$  перших кілець, починаючи від центра плями, записується початкова концентрація  $C_0$ . За формулою (99) розраховується концентрація речовини в наступний момент часу (через  $\Delta t$ ). Розрахунок ведеться покрокове від одного моменту часу до іншого в межах усього розглядуваного періоду часу.

5. У кожен момент часу повинна виконуватися умова (101).

## 4 ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ (МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО)

### 4.1 Сутність методу, випадкові числа з рівномірним розподіленням

Метод Монте-Карло можна визначити, як чисельний метод рішення математичних задач за допомогою [4] моделювання випадкових чисел. Цей метод дозволяє моделювати будь-який процес, на протікання якого впливають випадкові фактори. Можна сказати, що процес імітується ЕОМ, тому таке моделювання іноді називають імітаційним. Тут варто додати, що часто цей метод використовують і для рішення математичних задач, не пов'язаних з будь-якими випадками, тоді штучно вигадують вірогідну модель, що дозволяє вирішити цю задачу.

Щоб зрозуміти, про що йде мова, розглянемо приклад. Припустимо, що нам необхідно обчислити площу плоскої фігури  $S$ . Межа фігури довільна і може бути задана графічно чи аналітично. Нехай ця фігура буде усередині одиничного квадрата. Виберемо усередині квадрата  $N$  випадкових точок, позначимо  $N'$  число точок, що попали усередину  $S$ . Геометрично очевидно, що площа  $S$  приблизно дорівнює відношенню  $N'/N$ . Чим більше  $N$ , тим вища точність оцінки. Однак, точність оцінки залежить не тільки від кількості обраних точок, але і від способу вибору цих точок. Як, наприклад, фізично можна вибрати точки: повісити лист із розглянутою фігурою на стенд і стріляти в нього. Загальну кількість влучень у лист і кількість влучень у фігуру можна порахувати. Однак, у даному випадку ми не застраховані від значної похибки. Гарний стрілець всі  $N$  разів може влучити у фігуру  $S$ . Площа буде дорівнювати 1 (хоча це і не так). Значить, такий спосіб вибору точок нам не підходить. Неважко зрозуміти, що метод буде справедливий тільки тоді, коли випадкові точки будуть не просто випадковими, а рівномірно розподіленими на одиничнім квадраті. Тобто, ми повинні одержати випадкову величину на інтервалі  $[0-1]$  із густиною імовірності, що дорівнює 1.

У чому полягають особливості методу Монте-Карло?

По-перше, у порівняльній простоті структури обчислювального алгоритму.

По-друге, у необхідності досить великої кількості випробувань для одержання надійної оцінки.

Оцінка точності (похибки) методу Монте-Карло [4] базується на центральній граничній теоремі теорії ймовірностей, з якої випливає: сума  $N$  однакових незалежних випадкових величин з однаковим довільним законом розподілення приблизно має нормальне розподілення. Тобто, якщо у нас є випадкові величини  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_N$  з математичним очікуванням  $m$  і дисперсією  $b^2$ , то розподілення суми цих величин буде приблизно нормальним з параметрами  $a=Nm$  і  $\sigma^2=Nb^2$ . За правилом  $3\sigma$  відомо, що

$$P\{Nm+3\sigma < \sum \xi_i < Nm-3\sigma\} \approx 0,997, \quad (105)$$

чи  $P\{m+3b/(N)^{0,5} < 1/N \sum \xi_i < m-3b/(N)^{0,5}\} \approx 0,997,$

чи  $P\{|(1/N \sum \xi_i) - m| < 3b/(N)^{0,5}\} \approx 0,997. \quad (106)$

В останньому виразі знаходиться і спосіб визначення  $m$ , і оцінка похибки. З останнього виразу видно, що змодельювавши  $N$  випадкових величин і знайшовши їхню суму, ми одержимо оцінку  $m$ , що відрізняється від вірного значення не більше ніж на  $3b/(N)^{0,5}$ . Очевидно, що зі зростанням  $N$ , ця похибка наближається до 0.

## 4.2 Одержання випадкових чисел

Виділяють три способи одержання випадкових величин [4]: таблиці випадкових чисел, генератори випадкових чисел і метод псевдовипадкових чисел.

а) Елементарним пристроєм, що дозволяє одержати таблицю випадкових чисел, є рулетка, тобто обертовий круг з десятьма рівними секторами, у кожному з яких записано одну із десяти цифр. Найбільша з опублікованих таблиць містить 1000000 чисел.

Потрібно зазначити, що складання відповідної таблиці завдання не просте, оскільки зібрати ідеальний пристрій, який би видавав усі цифри з імовірністю  $1/10$  практично неможливо.

Тому складові таблиці ретельно перевіряються за допомогою тестів.

Таблиці випадкових чисел використовуються тільки при розрахунках вручну, тому що вони у пам'яті ЕОМ займають занадто багато місця.

б) Генератори випадкових чисел. Використовуються шуми електронних ламп. Якщо за деякий *фіксований*  $\Delta t$  час рівень шуму лампи перевищить заданий поріг парне число раз, записується 0, якщо непарне число раз – 1. Ці цифри записуються в розряди двійкового числа (в чарунку). У будь-який момент розрахунку можна звернутися до цієї чарунки й одержати число.

Цей метод також не вільний від недоліків: по-перше, необхідно постійно (епізодично) виконувати перевірки якості чисел, які виробляються, і, по-друге, неможливо повторити той же розрахунок.

в) Псевдовипадкові числа. Оскільки якість чисел перевіряється за допомогою тесту, то можна не цікавитися способом одержання цих чисел, аби вони задовольняли прийнятій системі тестів. Тому Нейманом (одним з авторів методу) було запропоновано розраховувати числа за формулою. Числа, що мають властивості випадкових чисел, але розраховуються за формулою, називають псевдовипадковими.

Найбільше поширення одержав метод відрахувань:

$$m_{k+1}=5^{17}m_k(\text{mod}2^{40}), \quad (107)$$

$$\sigma_k = 2^{-40} m_k,$$

де  $m_{k+1}$  – число, що дорівнює залишку від розподілу  $5^{17}$  на  $2^{-40}$  (цей залишок називається найменшим позитивним відрахуванням), – звідси і назва методу;

$\sigma_k$  – псевдовипадкове число, рівномірно розподіляється на інтервал  $[0-1)$ .

Дані формули легко реалізувати на ЕОМ, працюючих з 40–розрядними числами. Для ЕОМ типу ЄС, де числа мають 31 розряд, запропонована формула

$$m_{k+1}=5^{13}m_k(\text{mod}2^{31}), \quad (108)$$

$$\sigma_k=2^{-31}m_k.$$

Переваги методу: текст програми займає мало місця, швидкість генерування числа така ж, як і швидкість роботи ЕОМ; будь-яка послідовність чисел може бути легко відтворена, потрібно усього лише раз перевірити якість такої послідовності. Недолік: оскільки кількість розрядів обмежена, то послідовність чисел періодична. Однак, цей період настільки великий, що перевершує практичні потреби. Переважна більшість розрахунків за методом Монте-Карло здійснюється з використанням псевдовипадкових чисел.

### 4.3 Перетворення випадкових величин

При розрахунках методом Монте-Карло необхідно дуже часто відтворювати випадкові числа із заданим законом розподілення. Для тієї мети перетворюють випадкові числа з рівномірним розподіленням у інтервалі  $[0-1)$ .

#### Дискретні випадкові величини

Допустимо, нам необхідно одержати значення випадкової величини

$$\xi = \left( \begin{array}{c} X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \\ P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \end{array} \right).$$

Для цього [4] інтервал  $[0-1)$  розіб'ємо на " $n$ " відрізків, довжини яких  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ . Координати точок розподілення будуть дорівнювати  $P_1; (P_1+P_2); (P_1+P_2+P_3); \dots; (P_1+P_2+P_3+\dots+P_{n-1})$ . Отримані інтервали нумеруємо – 1, 2, 3, ...,  $n$ . На цьому підготовка до розіграшу закінчується.

Розігрується число  $\gamma_i$  (псевдовипадкове), дивимося на який інтервал

воно потрапило, тобто визначаємо номер інтервалу. За номером визначаємо значення величини  $\xi$ . Якщо ми проведемо велику кількість розіграшів і оцінимо  $P_i$  для кожного  $X_i$ , то вони будуть дуже наближені до заданих  $P_i$ .

### Безупинні випадкові величини

#### Метод обернених функцій

Нам необхідно одержати значення  $\xi$ , розподіленого на інтервалі  $(a-v)$  із густиною  $p(x)$ . Значення  $\xi$  можна знаходити [4] з рівняння:

$$\int_a^{\xi} p(X)dX = \gamma,$$

тобто, вибравши значення  $\gamma_i$ , необхідно розв'язати рівняння відносно  $\xi_i$ .

Приклад: експонентний розподіл

$$p(X) = ae^{-aX} \rightarrow \int_0^{\xi} ae^{-aX} dX = \gamma \rightarrow e^{-aX} \Big|_0^{\xi} = \gamma \rightarrow 1 - e^{-a\xi} = \gamma \rightarrow e^{-a\xi} = 1 - \gamma \rightarrow a\xi = \ln(1 - \gamma) \rightarrow \xi = (1/a)\ln(1 - \gamma) \rightarrow \xi = -(1/a)\ln\gamma. \quad (109)$$

Моделювання випадкової величини  $\xi$  з нормальним законом розподілення, параметри якого  $a=0, \sigma = 1$ , можна виконувати за формулою

$$\xi = (\ln \gamma_1 \cos 2\pi \gamma_2)^{0.5}. \quad (110)$$

Перехід до довільних параметрів  $a$  і  $\sigma$  здійснюється за формулою

$$\eta = a + \sigma \xi,$$

де  $a$  – математичне очікування  $\eta$ ;

$\sigma$  – середньоквадратичне відхилення  $\eta$ .

$$P(\eta) = 1/[\sigma(2\pi)^{0.5}] \exp\{-(\eta - a)^2 / (2\sigma^2)\}. \quad (111)$$

#### Довільне розподілення

Представимо емпіричний [4] (теоретичний чи аналітичний) закон розподілу у вигляді графіка. Апроксимуємо його ламаною лінією. Точки сполучення відрізків прямої спроектуюмо на осі координат:

$$(P_k; a_k) = (0; a_0), (P_1; a_1), (P_2; a_2) \dots (1; a_n).$$

Розігрується  $\gamma_i$ ; визначається, на який відрізок  $(P_{k-1}; P_k)$  воно потрапило; визначаються відповідні  $(a_{k-1}; a_k)$ ; розраховується  $\xi_i$  за

формулою

$$\xi_i = a_{k-1} + \gamma_i(a_k - a_{k-1}).$$

#### 4.4 Приклад використання методу Монте-Карло: розрахунок системи масового обслуговування

Опис задачі. Розглянемо одну з найпростіших систем масового обслуговування. Ця система (порт) складається із однієї лінії (причалу), що може «обслуговувати споживачів». У систему надходять заявки (судна), причому моменти їхнього надходження випадкові. Якщо в момент надходження  $i$ -ї заявки (назвемо його  $T_3$ ) лінія вільна, то вона приступає до обслуговування заявки, що продовжується  $\Delta t_{OB}$  хвилин ( $\Delta t_{OB}$  – час зайнятості лінії (тривалість обслуговування), величина випадкова). Якщо в момент часу  $T_3$  лінія зайнята, то система видає відмову. Потрібно визначити, скільки (у середньому) заявок обслуговує система за час  $T$  (це може бути 1 рік чи якийсь інший звітний період) і скільки відмов вона дасть.

Для отримання результату з необхідним ступенем точності необхідно відтворити на ЕОМ кілька реалізацій процесу обслуговування заявок з достатньою тривалістю.

Задачі такого типу зустрічаються при дослідженні організації роботи будь-яких підприємств. У деяких окремих випадках вдається знайти аналітичні рішення. Однак у складних випадках метод Монте-Карло виявляється єдиним методом розрахунку.

Найпростіший потік заявок. Вивчення потоків заявок у реальних умовах дозволило виділити деякі випадки, що досить часто зустрічаються. Зупинимося на одному з них: найпростішому потоці [4].

Найпростішим потоком [4] (чи потоком Пуассона) називається такий потік заявок, коли проміжок часу  $\tau$  між двома послідовними заявками являє собою випадкову величину, розподілену в інтервалі  $(0-\infty)$  із густиною

$$p(X) = ae^{-aX}. \quad (112)$$

Цей закон розподілу називають також експонентним розподілом. Легко обчислити математичне очікування:

$$M\tau = \int_0^{\infty} X p(X) dX = \int_0^{\infty} X a e^{-aX} dX.$$

Після інтегрування вроздріб ( $u=x$ ,  $dv=ae^{-ax}dx$ ) одержимо

$$M\tau = -X e^{-aX} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-aX} dX = -(1/a) e^{-aX} dX \Big|_0^{\infty} = 1/a, \quad (113)$$

де  $a$  – щільність потоку заявок.

Таке представлення потоку заявок через особливості експонентного розподілення дозволяє вирішити розглядувану задачу і багато подібних їй (навіть більш складних) аналітично. Однак, уже при довільному розподіленні інтервалів часу  $\tau$  між заявками рішення цієї простої задачі може бути отримане тільки методом Монте-Карло [4].

На практиці часто доводиться розглядати більш складні системи: з  $n$  каналами, з чеканням у черзі і з відмовленнями устаткування. У цих випадках існуючі аналітичні рішення для більш простих задач використовуються при налагодженні складних алгоритмів розрахунків.

Схема розрахунку. Для початку введемо деякі позначення:

$T_3$  і  $T_{3B}$  – моменти надходження заявки і звільнення каналу;

$\Delta t_3$  і  $\Delta t_{OB}$  – тривалість періоду часу між надходженням  $(i-1)$  і  $i$ -ї заявками і часу обслуговування  $i$ -ї заявки (випадкові величини з експонентним розподіленням);

$a_3$  і  $a_{OB}$  – параметри розподілу потоків заявок і обслуговування;

$N_{OB}$  і  $N_{ВІД}$  – кількість заявок, що надійшли, і відмовлень;

$j$  – кількість відтворених реалізацій;

$N$  і  $T$  – необхідна кількість реалізацій і їхня тривалість.

Блок-схему алгоритму розрахунку показано на рис. 11.

Розрахунок починається з уведення даних: потрібної кількості реалізацій ( $N$ ) і їхньої тривалості ( $T$ ), а також параметрів законів розподілу інтервалів часу між надходженням заявок ( $a_3$ ) і тривалості обслуговування ( $a_{OB}$ ).

Далі обнуляються загальна кількість обслуговуваних заявок, загальна кількість відмовлень і поточна кількість реалізацій.

На початку реалізації вважаємо, що перша заявка надходить через інтервал часу, який дорівнює середньому значенню, тоді момент її надходження буде дорівнювати  $T_3 = 0 + 1/a_3$ . При цьому  $T_{3B} = 0$ .

У цей час реалізація ще не закінчилась і канал вільний. Розігрується час обслуговування  $\Delta t_{OB}$ , і визначається момент закінчення обслуговування:  $T_{3B} = T_3 + \Delta t_{OB} = 1/a_3 + \Delta t_{OB}$ . Кількість обслугованих заявок збільшується на одиницю:  $N_{OB} = N_{OB} + 1 = 0 + 1$ . Потім розігрується інтервал часу до надходження наступної заявки  $\Delta t_3$ , і розраховується момент її надходження:  $T_3 = T_3 + \Delta t_3 = 1/a_3 + \Delta t_3$ . Далі цикл повторюється.

Необхідно нагадати, що тут значок « $\Rightarrow$ » позначає оператор присвоєння, тобто запис  $N_{OB} = N_{OB} + 1$  позначає наступне: до старого значення змінної  $N_{OB}$  додається 1 і цій змінній привласнюється нове значення, збільшене на 1 (відбувається накопичення). Те саме стосується і змінних  $T_3$ ,  $T_{3B}$  і всіх інших.

Припустимо, що обслуговано вже багато заявок і надходить наступна в момент  $T_3$ . Тоді необхідно перевірити: чи закінчилась реалізація? Це встановлюється (рис. 11) шляхом порівняння  $T_3$  із заданою

тривалістю реалізації  $T$ : якщо  $T_3$  більше чи дорівнює  $T$  – реалізація закінчилася, якщо менше – ні.

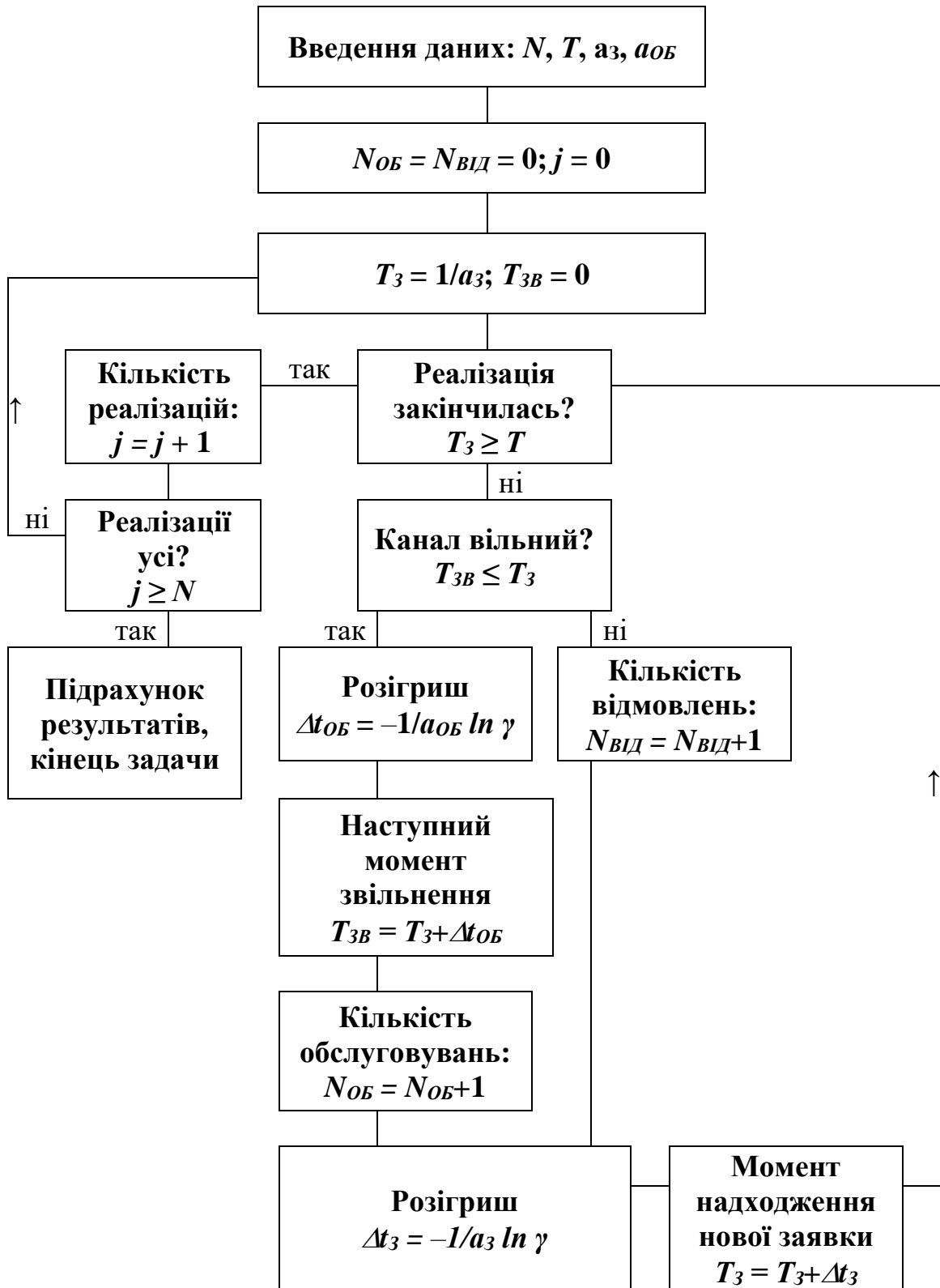


Рис. 11 – Блок-схема алгоритму розрахунку

Якщо реалізація продовжується, то здійснюється перевірка



зайнятості каналу шляхом зіставлення моменту надходження заявки  $T_3$  із моментом його звільнення  $T_{3B}$ : якщо  $T_{3B}$  менше або дорівнює  $T_3$ , то канал вільний; якщо більше – зайнятий.

Канал зайнятий: кількість відмовлень  $N_{ВД}$  збільшується на 1; розраховується  $\Delta t_3$  до наступної заявки по формулі (109); визначається момент надходження цієї заявки  $T_3$  і цикл повторюється.

Канал вільний: нова заявка встановлюється до причалу; розраховується її  $\Delta t_{OB}$  по формулі (109); визначається момент звільнення каналу  $T_{3B}$ ; кількість обслуговувань  $N_{OB}$  збільшується на 1; розігрується  $\Delta t_3$  до наступної заявки по формулі (109); визначається момент надходження цієї заявки і цикл повторюється.

Якщо реалізація закінчена, то кількість реалізацій  $j$  збільшується на одиницю, і виконується перевірка: чи всі реалізації відтворені? Це встановлюється шляхом зіставлення  $j$  і  $N$ : якщо  $j$  більше або дорівнює  $N$  – реалізації відтворені усі; якщо менше – ні.

Якщо не всі реалізації виконані, здійснюється перехід до нової реалізації, при цьому  $T_{3B}$  обнуляється, а  $T_3$  привласнюється значення  $1/a_3$ . Після цього відтворюється (імітується) нова реалізація.

Реалізації відтворені всі, виконується підрахунок результатів моделювання за формулами:

$$n_{OB} = N_{OB}/N \quad \text{і} \quad n_{ВД} = N_{ВД}/N, \quad (114)$$

де  $n_{OB}$  і  $n_{ВД}$  – середня кількість обслугованих заявок і середня кількість відмовлень за час  $T$ .

Формули (114) справедливі, оскільки в чарунках  $N_{OB}$  і  $N_{ВД}$  накопичувалася кількість обслуговувань і відмовлень по всіх реалізаціях.

При довільному розподілі  $\Delta t_3$  і  $\Delta t_{OB}$  у блоках розіграшу цих величин необхідно організувати відповідний алгоритм розрахунку (див. п. 5.3).

Запропонована модель дозволяє при заданому потоці заявок оптимально збалансувати доходи підприємства з витратами на обслуговуюче устаткування. Оскільки, при збільшенні витрат на устаткування збільшується його продуктивність, при цьому зменшується час обслуговування, а з ним зменшується і кількість відмовлень.

### Питання для самоперевірки

1. Що таке математична модель?
2. У чому полягає математичне моделювання та яка його мета?
3. Назвіть етапи математичного моделювання.
4. Що таке наближені числа і як оцінюється їх точність?
5. Які існують форми подачі наближених чисел?
6. Що таке абсолютна та відносна похибки і як вони визначаються?
7. Що таке гранична похибка?

8. Назвіть п'ять правил оцінки похибок при операціях з наближеними числами.
9. У чому полягає підбір емпіричних формул?
10. Як визначаються параметри емпіричних залежностей?
11. Які основні характеристики рядів розраховують при статистичній обробці емпіричних даних?
12. Як виконується розрахунок параметрів рівняння регресії?
13. Що таке коефіцієнт кореляції? Чому він дорівнює при наявності прямолінійної залежності?
14. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?
15. Як виконується побудова режимної функції висоти хвиль?
16. Що характеризують режимна і системна забезпеченість хвилювання?
17. Як виконується вирівнювання параболічної, гіперболічної та показникової залежностей?
18. У чому полягає сутність виводу диференціальних рівнянь локальним та об'єктним способами?
19. Навести формули поодинокі витрати речовини при адвекції, турбулентній дифузії та осадженні.
20. Навести розрахункову формулу турбулентної дифузії речовини за наявності бокових припливів.
21. Навести розрахункову формулу турбулентної дифузії речовини у циліндричних координатах.
22. Записати модель перенесення речовини у потоці (плоска задача) і навести послідовність розрахунку.
23. Як урахується неконсервативність речовини у водному середовищі?
24. Запишіть рівняння турбулентної дифузії для плоскої постановки задачі.
25. Як задається сітка на розрахунковій області потоку?
26. Запишіть розрахункову формулу для плоскої постановки задачі, за яких умов вона виконується?
27. Які дані необхідні для розрахунку розводження стічних вод?
28. Як визначається умовна площа поперечного перетину й ширина припливу стічних вод?
29. Виходячи з яких умов визначається розмір осередків?
30. Як виконується розрахунок біля берегів?
31. Як збільшуються розміри розрахункової сітки розводження стічних вод?
32. У чому полягає сутність методу Монте-Карло?
33. Які випадкові числа необхідні для імітаційного моделювання?
34. Які існують методи задля отримання випадкових чисел?
35. У чому полягає сутність методу обернених функцій?
36. Як можна отримати довільне розподілення?
37. Основні положення моделювання системи масового обслуговування.

## ЛІТЕРАТУРА

1. <https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=Представление> вещественных чисел (дата звернення 23.09.2019)
2. 1. Лаппо Д.Д., Стрекалов С.С., Завьялов В.К. Нагрузки и воздействия ветровых волн на гидротехнические сооружения / Теория. Инженерные методы. Расчеты / Под ред. Лаппо Д.Д. /. Л.: ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева, 1990. 432 с.
3. 3. Караушев А.В. Речная гидравлика. Л.: ГИМИЗ, 1969. 461 с.
4. 2. Методические основы оценки и регламентирования антропогенного влияния на качество поверхностных вод / Под ред. проф. Караушева А.В./ Л.: ГИМИЗ, 1987. с.
5. Юрасов С.Н., Юрасова А.Ю. Математическая модель установившейся турбулентной диффузии взвеси в водном потоке / Вісник Одеського державного екологічного університету: Науковий журнал / Голов. ред. Є.Д. Гопченко. Одеса: Вид-во ОДЕКУ «Екологія», 2008. Вип. 6. С. 165-169.
6. Юрасов С.М., Комаренко А.Д. Глава 6. Числове моделювання розповсюдження зависі при виконанні днопоглиблювальних робіт. *Розвиток методів проектування, будівництва та реконструкції гідротехнічних споруд. Частина 1: серія монографій* / [авт.кол. : Дубровський М.П., Рогачко С.І., Бугаєва С.В. та ін.] за ред. М.П. Дубровського. Одеса: Купрієнко СВ, 2019. С. 92-113.
7. Юрасов С.Н., Горун В.В., Берлинский Н.А. Верификация результатов моделирования распространения взвеси при дампинге грунта на морской подводный отвал / Український гідрометеорологічний журнал: Науковий журнал / голов. ред. С.М. Степаненко. Одеса: “ТЭС”, 2015. № 16. С. 30-39.
8. Юрасов С.Н., Горун В.В. Применение конечно-разностных схем при моделировании неустановившейся турбулентной диффузии взвеси в водном потоке // Украинский гидрометеорологический журнал. 2014. №14. С. 172–184.
9. Калиниченко В.И., Юрасов С.Н., Горун В.В. Практическое использование математической модели неустановившейся турбулентной диффузии взвеси в водном потоке (МТП Керчь) // Вісник Одеського державного екологічного університету. 2014. Вип. 18. С. 5–20.
10. 4. Соболев И.М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1985. 78 с.

## УМОВНІ СКОРОЧЕННЯ

ЗР	– забруднювальна речовина;
ЕОМ	– електронно-обчислювальна машина;
ОВНС	– оцінка впливу на навколишнє середовище;
Пн	– північ;
ПнС	– північно-схід;
С	– схід;
ПдС	– південно-схід;
Пд	– південь;
ПдЗ	– південно-захід;
З	– захід;
ПнЗ	– північно-захід.

Навчальне електронне видання

ЮРАСОВ СЕРГІЙ МИКОЛАЙВИЧ

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ДОВКІЛЛЯ

Розділ 2. МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАНУ ВОДНОГО  
СЕРЕДОВИЩА

Конспект лекцій

**Видавець і виготовлювач**

Одеський державний екологічний університет  
вул. Львівська, 15, м. Одеса, 65016

тел./факс: (0482) 32-67-35

E-mail: [info@odeku.edu.ua](mailto:info@odeku.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 5242 від 08.11.2016