

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/322752053>

# Геофизическая гидродинамика

Book · October 1998

CITATIONS

0

READS

37

3 authors, including:



**Sergiy Stepanenko**

Odessa State Environmental University

36 PUBLICATIONS 8 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Erasmus+ Project 561975 "Adaptive learning environment for competence in economic and societal impacts of local weather, quality and climate" (ECOIMPACT) [View project](#)



Trasforming natural higher education [View project](#)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ  
ОДЕССКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.А. ШНАЙДМАН, А.Г. ТАРНОПОЛЬСКИЙ,  
С.Н. СТЕПАНЕНКО

## *ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА*

Утверждено Министерством образования Украины как  
учебник для студентов гидрометеорологического  
профиля обучения



Из библиотеки  
С.Н. Степаненко

ОДЕССА 1998

УДК 551.511.001

Шнайдман Вольф Абрамович, Тарнопольский Анатолий Григорьевич, Степаненко Сергей Николаевич

*Геофизическая гидродинамика*

Излагаются основные закономерности динамики бароклинных стратифицированных природных течений на вращающейся Земле. Для бакалавров, магистров, аспирантов гидрометеорологического профиля образования.

Рецензенты: *Контущ С.М.* - зав. кафедрой физики Одесской Академии холода, д-р физико-математических наук, профессор, д-р физико-математических наук,  
*Ефимов В.А.*, д-р физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической метеорологии и метеорологических прогнозов Одесского гидрометеорологического института.

© ОГМИ, 1998 г.



|   |     |
|---|-----|
| 4.2. Ускорение циркуляции .....   | 124 |
| 4.3. Уравнение вихря .....  | 133 |
| 4.4. Геофизические приложения уравнения вихря .....                                     | 140 |
| 4.5. Потенциальный вихрь .....  | 144 |
| Глава 5. Геострофическое приближение как метод описания<br>природных течений .....      | 151 |
| 5.1. Гидростатическое и геострофическое приближения .....                               | 152 |
| 5.2. Характеристики геострофического движения .....                                     | 160 |
| 5.3. Изменение геострофической скорости по вертикали .....                              | 164 |
| Глава 6. Крупномасштабные периодические движения в однородной<br>жидкости .....         | 169 |
| 6.1. Теория мелкой воды .....   | 170 |
| 6.2. Основные соотношения теории мелкой воды для движений с<br>малой амплитудой .....   | 179 |
| 6.3. Волновые движения и квазигеострофические соотношения в<br>теории мелкой воды ..... | 192 |
| 6.4. Квазигеострофические волны Россби .....  | 207 |
| 6.5. Волны Россби на зональном течении .....  | 214 |
| 6.6. Волны Россби, генерируемые начальным возмущением .....                             | 218 |
| 6.7. Динамика волн Россби при наличии препятствий .....                                 | 234 |
| 6.8. Энергетика волн Россби .....   | 237 |
| 6.9. Резонансные взаимодействия и закон сохранения энстрофии .....                      | 245 |
| Глава 7. Геофизическая турбулентность .....   | 257 |
| 7.1. Теория Ландау .....  | 258 |
| 7.2. Основные закономерности развитого турбулентного потока .....                       | 265 |
| 7.3. Осреднение гидродинамических характеристик турбулентного<br>потока .....           | 272 |
| 7.4. Уравнения гидротермодинамики для турбулентного потока .....                        | 277 |
| 7.5. "К-теория" турбулентности и проблемы замыкания .....                               | 289 |
| 7.6. Теория турбулентности для СГО-геофизического течения .....                         | 298 |
| 7.7. Квазидвумерная турбулентность .....  | 305 |



гидрометеорологическом институте курс геофизической гидродинамики обладает целым рядом особенностей. Во-первых, он включает основные положения курса общей гидродинамики, который должен быть изложен под углом зрения динамики природных течений вращающихся бароклинных стратифицированных жидкостей и газов. Во-вторых, геофизическая гидродинамика должна интерпретироваться как основа для усвоения гидрометеорологических наук. В-третьих, упомянутые учебники рассчитаны на подготовленных старшекурсников, магистров и аспирантов. В гидрометеорологическом вузе этот курс читается для бакалавров и соответствующая подготовка студентов должна быть учтена при изложении основных положений геофизической гидродинамики. Таким образом, появилась необходимость написания учебника по геофизической гидродинамике для специалистов гидрометеорологического профиля.

В силу специфики учебного плана подготовки специалистов метеорологов, океанологов, гидрологов в предлагаемом учебнике вторая и частично третья главы посвящены основным положениям общей гидродинамики с выделением механизмов, играющих существенную роль во вращающихся бароклинных природных течениях. Четвертая, пятая и шестая главы целиком посвящены количественному описанию крупномасштабных движений в системе отсчета, связанной с вращающейся Землей.

В связи с тем, что предполагаемый учебник может быть использован в других курсах учебного плана, в частности, физика пограничного слоя океана и атмосферы, взаимодействие океана и атмосферы и др., в него включен раздел, посвященный турбулентному обмену в геофизических природных движениях.

Динамика стратифицированных течений на сфере, а также вопросы теории неустойчивости вынесены за рамки настоящей книги и составят содержание второй части настоящего учебника, предназначенного для магистров и аспирантов.

Учебник рассчитан на лиц, подготовленных в области математики и физики в объеме учебного плана гидрометеорологических институтов и соответствующих факультетов университетов и может быть полезен для специалистов в области метеорологии, океанологии и других геофизических специальностей.





По классическому определению Ньютона, динамика должна *"по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам изъяснить остальные движения"*. Теоретической основой динамики являются три закона Ньютона: инерции, связи между силой и ускорением, действия и противодействия. Основной количественной мерой механического взаимодействия тел, характеризующей интенсивность и направление этого взаимодействия, является сила. Взаимодействие, осуществляемое путем непосредственного контакта тел, есть близкодействие, а результат взаимодействия тел с физическими полями (гравитация, тяжесть и т. д.) - дальнодействие. Оба понятия широко используются при описании динамики физических объектов.

В классической механике не учитывается связь свойств пространства и времени с распределением материи. Поэтому все выводы являются приближенными, степень точности их повышается, чем меньше скорость исследуемых движений по сравнению со скоростью света, а масштабы движения - по сравнению с космическими.

## **1.2. Гидродинамика как теория движения жидкости и газов, основные понятия и методы.**

Предметом гидродинамики является механическое движение жидкой или газообразной сплошной среды и их взаимодействия с граничными твердыми поверхностями. Основными специфическими свойствами жидких и газообразных сред являются непрерывность (неразрывность) и текучесть (легкая подвижность). Гидродинамика не рассматривает внутренние (молекулярные) процессы, следствием которых являются указанные свойства сплошной среды.

Обладая общими свойствами неразрывности и текучести, жидкости и газы отличаются друг от друга степенью их сжимаемости. Расстояние между молекулами в жидкости мало, а силы сцепления велики, и поэтому сравнительно малые изменения давления, возникающие при движении жидкости, практически не сказываются на изменении её объема. В связи с этим при описании многих гидродинамических процессов жидкость может рассматриваться как несжимаемая. В противоположность жидкости в газах межмолекулярные расстояния велики, а силы взаимодействия между молекулами малы. Газы в отличие от жидкости, являются сжимаемыми.

На основании свойства сжимаемости определим газы как сжимаемую жидкость, способную изменять свою форму и объем, а собственно жидкость - как несжимаемую жидкость, способную сохранять свой объем. В дальней-

шем, имея в виду общность для жидкости и газов свойств неразрывности и текучести, будем называть и жидкость, и газы одним словом жидкость.

Одним из важных свойств жидкости является сопротивление скольжению частиц, которое называется внутренним трением или вязкостью. Для многих практических задач, однако, можно пренебречь эффектом вязкости, т.е. считать, что скольжение одного слоя жидкости по другому не вызывает со стороны последнего сопротивление. Такая жидкость в отличие от вязкой называется идеальной. Движение как идеальной, так и вязкой жидкости описывается с помощью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Аналитическое решение таких уравнений возможно лишь в сравнительно редких случаях. Поэтому большой вклад в развитие современной гидродинамики внесли численные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений, реализуемых на быстродействующих ЭВМ. Кроме того, в современной гидродинамике используются результаты экспериментальных исследований. Широкое применение также находят полуэмпирические теории для описания гидродинамических процессов и явлений.

### ***1.3. Геофизическая гидродинамика как научная дисциплина и теоретическая основа гидрометеорологических наук***

Дальнейшее развитие гидродинамики привело к выделению в качестве самостоятельной научной дисциплины геофизической гидродинамики. Геофизическая гидродинамика изучает природные течения жидкостей и газов, для которых существенную роль играют эффекты вращения и стратификации. Под вращением имеется в виду совместное вращение планеты и окружающих ее воздушной и водной оболочек. При этом в системе отсчета, связанной с вращающейся Землей, возникает отклоняющий эффект, который необходимо учитывать при описании гидродинамических процессов в геофизических системах. Наряду с эффектом вращения специфической особенностью объектов геофизической гидродинамики, является стратификация среды, в частности, изменение плотности с высотой в атмосфере и глубиной в океане. Другими словами геофизические системы являются стратифицированными. Кроме того, эти системы являются бароклинными, так как плотность реальных газов и жидкости зависит не только от давления, как в баротропных средах, но также от температуры и концентрации термодинамически активных примесей.

Итак, геофизическую гидродинамику можно определить как гидродинамику вращающихся бароклинных стратифицированных жидкостей и газов. Геофизическая гидродинамика изучает фундаментальные динамические про-

цессы, знание которых необходимо для понимания явлений в атмосфере и океане. В настоящее время эта наука, в основном, ограничивается изучением крупномасштабных атмосферных и океанических процессов. На больших масштабах наиболее четко проявляется общность характера движений в атмосфере и океане.

Выводы геофизической гидродинамики базируются главным образом на теоретических представлениях, позволяющих понять и изучить механизмы природных явлений. При этом целью исследований геофизической гидродинамики является получение общих качественных и количественных закономерностей. В связи с этим геофизическая гидродинамика исторически развивалась по пути последовательного изучения усложняющихся моделей. На основе строгого анализа более простых моделей формировались постановки сложных задач. Таким образом, была создана иерархия моделей широкого спектра геофизических процессов и явлений.

Атмосфера и океан являются основными объектами геофизической гидродинамики, так как атмосферные и океанические процессы развиваются во вращающихся стратифицированных бароклинных средах. Укажем основные направления метеорологии, океанологии и гидрологии, где находят наиболее яркое воплощение результаты, полученные в геофизической гидродинамике. Прежде всего, разработка самого основного вопроса современной метеорологии - прогноз погоды различной заблаговременности и моделирование климата - тесно связана с выводами геофизической гидродинамики о динамике вихрей различных масштабов, энергетике крупномасштабных процессов, системах гидродинамического типа, волновых движениях, гидродинамической неустойчивости и турбулентности. Геофизическая гидродинамика лежит в основе исследования глобальных проблем, связанных с общей циркуляцией атмосферы и океана и теорией климата. При анализе динамики климата основное внимание уделяется выяснению роли крупномасштабных вихрей и волн в формировании общей циркуляции атмосферы. Эта проблема исследуется на основе диагноза эмпирических полей и данных, полученных с помощью моделей глобальной циркуляции, что вытекает из основной концепции геофизической гидродинамики.

Современный уровень теории климата характеризуется тем, что модельные расчеты рассматриваются как генератор информации о возможных изменениях климата. Эти идеи также проникли в исследования циркуляции океана. Главными элементами циркуляции Мирового океана являются гигантские антициклонические круговороты вод вокруг атмосферных субтропических центров действия. Их западные ветви интенсифицированы и образуют такие сильные узкоструйные пограничные течения, как Гольфстрим в Северной Атлантике и Куроисио в северной половине Тихого океана. Эти осо-

бенности циркуляции Мирового океана объясняются действием геофизического фактора - изменения с широтой параметра Кориолиса. Южное колебание и Эль-Ниньо - наиболее мощные и надежно зарегистрированные проявления крупномасштабного взаимодействия океана и атмосферы - в настоящее время исследуются с помощью подходов, разработанных в геофизической гидродинамике.

Основной объект изучения гидрологии - поверхностный водоток, зависящий от физико-географических условий, климатических и метеорологических факторов, также исследуется с помощью методов геофизической гидродинамики.

Выше перечислен лишь ограниченный круг вопросов, в которых результаты геофизической гидродинамики находят широкое применение. Несомненно, что по мере развития геофизической гидродинамики и гидрометеорологических наук их взаимное проникновение будет возрастать и способствовать более глубокому и полному исследованию природных течений вращающихся стратифицированных бароклинных жидкостей и газов.



движения (вихрь  $\vec{\Omega}$ , дивергенция  $D$  и скорость деформации  $\vec{V}_d$ ) определяются по пространственному распределению вектора относительной скорости.

Как указывалось в п. 1.3, геофизическая гидродинамика, в основном, изучает крупномасштабные атмосферные и океанические движения. Возникает необходимость в формулировке количественного критерия отнесения того или иного движения к крупномасштабному. Очевидно, что ответ на вопрос, будет ли данное движение относиться к крупномасштабному, зависит не только от его пространственного масштаба, но и от механизма формирования его динамики.

В соответствии с определением геофизической гидродинамики естественно к крупномасштабным отнести движения, на которые существенно влияет вращение Земли. В качестве меры влияния вращения Земли используем число Россби, которое вводится следующим образом. В качестве характерного пространственного масштаба движения  $L$  выберем среднее расстояние в горизонтальной плоскости, на котором поток меняет свое направление на противоположное. По экспериментальным данным известно, что в атмосфере и океане движение в горизонтальной плоскости часто имеет волновой характер. Поэтому в качестве масштаба  $L$  можно выбрать половину длины плоской волны. Характерный масштаб горизонтальной скорости  $U$  есть средняя скорость движения.

Время, требующееся для перемещения на расстояния  $L$  частицы жидкости, движущейся со скоростью  $U$ , равно  $L/U$ . Если этот промежуток времени существенно больше периода вращения Земли, то вращение вносит существенный вклад в динамику геофизических объектов.

Таким образом, для крупномасштабных движений выполнимо условие

$$\frac{L}{U} \gg \omega^{-1},$$

или, что эквивалентно,

$$\varepsilon = \frac{U}{2\omega L} \ll 1.$$

Здесь  $\omega = 2\pi/T$  - угловая скорость вращения Земли,  $T$  - период. Безразмерный параметр  $\varepsilon$  называется **числом Россби**. При выполнении условия его малости движения относятся к крупномасштабным.

## 2.1 Инерциальные и неинерциальные системы отсчета

На Земле атмосфера и гидросфера вращаются вместе с планетой, подвергаясь малым, но весьма важным возмущениям, которые вращающийся вместе с Землей наблюдатель воспринимает как ветры и течения. Линейная скорость, создаваемая твердотельным вращением Земли, зависит от географической широты и составляет несколько сотен м/с, что значительно больше обычно наблюдаемых скоростей в атмосфере (десятки м/с), океане (десятки см/с) и реках (м/с). Другими словами, представляющие большой интерес для геофизической гидродинамики природные течения жидкостей суть малые отклонения от твердотельного вращения планеты. Итак, в природе любая частица жидкости, с одной стороны, вращается вместе с Землей, с другой стороны, может двигаться относительно Земли. Для описания движения относительно Земли необходимо перейти к вращающейся системе координат. Введение такой системы отсчета позволяет исключить из описания динамики геофизических объектов твердотельное вращение Земли. Тогда в системе отсчета, вращающейся вместе с Землей, будут наблюдаться только малые отклонения от твердотельного вращения, которые, подчеркнем еще раз, называются ветрами и течениями. Описание движения относительно вращающейся системы отсчета не может быть выполнено способами, принятыми в инерциальной системе, что связано с необходимостью учета эффектов вращения.

Инерциальными системами отсчета называются те системы, по отношению к которым выполняется закон инерции. С весьма большой степенью точности можно считать, что такого рода системой является гелиоцентрическая система отсчета, начало координат которой совпадает с центром инерции солнечной системы, а оси проведены в направлении удаленных звезд.

Напомним, что центром инерции или центром масс системы материальных точек называется точка  $C$ , радиус-вектор  $\vec{r}_c$  которой связан с массами  $m_i$  и радиус-векторами  $\vec{r}_i$  всех  $n$  точек системы соотношением

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.1.1)$$

Любая система отсчета, покоящаяся или движущаяся равномерно и прямолинейно относительно какой-либо инерциальной системы, сама является инерциальной. Наоборот, всякая система движущаяся ускоренно по отношению к инерциальной системе, является неинерциальной.

Система отсчета, жестко связанная с Землей (геоцентрическая система отсчета), неинерциальна, главным образом вследствие суточного вращения Земли.

Естественно, что ускорения частицы в инерциальной и неинерциальной системах отсчета будут отличаться. Например, для наблюдателя во вращающейся системе отсчета предметы, неподвижные в инерциальной системе, будут казаться вращающимися и из-за кривизны их видимых траекторий ускоряющимися.

Для практических приложений представляют интерес кинематические характеристики природных течений, в частности, векторы скорости и ускорения относительно вращающейся Земли. В связи с этим возникает необходимость перехода к неинерциальной геоцентрической системе отсчета.

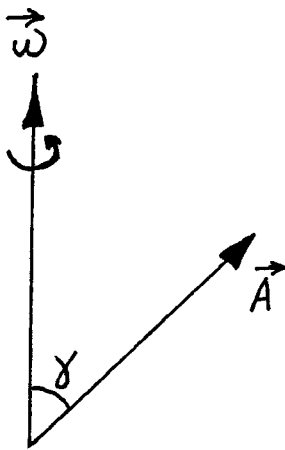


Рис.2.1. Вектор  $\vec{A}$  постоянной длины, направленный под углом  $\gamma$  к оси вращения

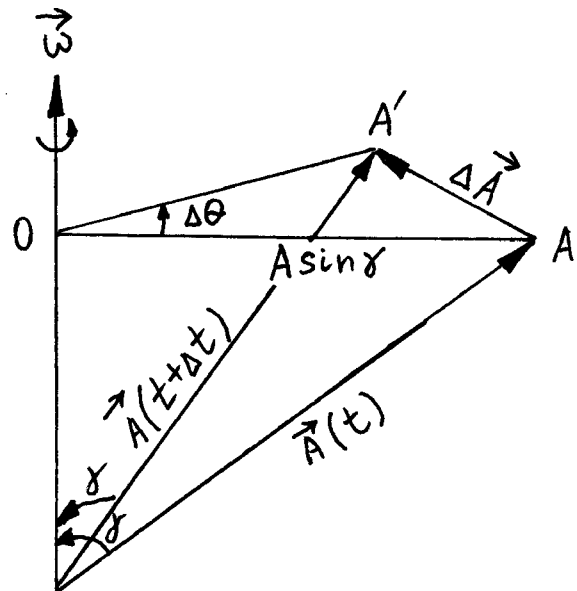


Рис.2.2. Вектор  $\vec{A}$  в моменты времени  $t$  и  $t+\Delta t$  и его бесконечно малое приращение  $\Delta\vec{A}$

Рассмотрим сначала вектор  $\vec{A}$ , который имеет постоянную величину и вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  (рис. 2.1). Вектор  $\vec{\omega}$  направлен по оси вращения так, чтобы для наблюдателя, смотрящего с конца  $\vec{\omega}$ , поворот происходил против часовой стрелки. Пусть угол между  $\vec{A}$  и  $\vec{\omega}$  равен  $\gamma$ . За малое время  $\Delta t$  вектор  $\vec{A}$  повернется на угол  $\Delta\theta = \omega \Delta t$ , где  $\omega$  - величина угловой скорости (рис. 2.2). Из треугольника  $OAA'$ , лежащего в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, ввиду малости угла  $\Delta\theta$  следует, что  $\Delta A = A \cdot \sin\gamma \cdot \Delta\theta$ . Тогда очевидно, что малое изменение вектора  $\vec{A}$  равно

$$\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t) \equiv \Delta\vec{A} = \vec{n} \cdot A \cdot \sin\gamma \cdot \Delta\theta, \quad (2.1.2)$$



где  $\vec{n}$  - единичный вектор в направлении изменения  $\vec{A}$ , который должен быть перпендикулярным вектору  $\vec{A}$  (так как длина  $\vec{A}$  фиксирована), а также вектору  $\vec{\omega}$  (по определению вращения). Таким образом,

$$\vec{n} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{A}}{|\vec{\omega} \times \vec{A}|}. \quad (2.1.3)$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \frac{d\vec{A}}{dt} = A \sin \gamma \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{A}}{|\vec{\omega} \times \vec{A}|}. \quad (2.1.4)$$

Так как

$$|\vec{\omega} \times \vec{A}| = \omega \cdot A \cdot \sin \gamma \quad \text{и} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

то окончательно для вектора  $\vec{A}$  фиксированной величины получаем формулу

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}. \quad (2.1.5)$$

Таким образом, для наблюдателя, находящегося во вращающейся системе отсчета, вектор  $\vec{A}$  не меняется со временем, тогда как для наблюдателя в невращающейся системе изменения  $\vec{A}$  определяются формулой (2.1.5). Следовательно, их восприятия скорости изменения  $\vec{A}$  существенно различаются, хотя восприятие самого вектора остается одним и тем же. Заметим, однако, что так как

$$\frac{dA^2}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{A}) = 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 2\vec{A} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{A}) = 0, \quad (2.1.6)$$

то для обоих наблюдателей модуль вектора  $\vec{A}$  не изменяется со временем. Преобразования в (2.1.6) выполнены с использованием очевидного соотношения  $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$ , формулы (2.1.5) и того факта, что векторы  $\vec{A}$  и  $\vec{\omega} \times \vec{A}$  взаимно перпендикулярны (по определению векторного произведения векторов).

Рассмотрим теперь произвольный вектор  $\vec{B}$  и систему координат, вращающуюся с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  (рис.2.3). Для простоты пусть система координат будет декартовой с единичными векторами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Вектор  $\vec{B}$  в этой вращающейся системе может быть представлен в виде

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}, \quad (2.1.7)$$

где  $B_x, B_y, B_z$  - компоненты вектора  $\vec{B}$  (проекции  $\vec{B}$  на координатные оси  $x, y, z$ ).

Скорость изменения вектора  $\vec{B}$  со временем для наблюдателя во вращающейся системе отсчета есть

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_R = \frac{dB_x}{dt}\vec{i} + \frac{dB_y}{dt}\vec{j} + \frac{dB_z}{dt}\vec{k}, \quad (2.1.8)$$

так как единичные векторы в этой системе постоянны по величине и направлению (индекс  $R$  в формуле (2.1.8) будет напоминать, что она справедлива для вращающегося наблюдателя). С другой стороны, для невращающегося наблюдателя компоненты вектора  $\vec{B}$  и единичные векторы меняются со временем. Скорости изменения скалярных компонент  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  одинаковы для обоих наблюдателей, так что

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_I = \frac{dB_x}{dt}\vec{i} + \frac{dB_y}{dt}\vec{j} + \frac{dB_z}{dt}\vec{k} + B_x\frac{d\vec{i}}{dt} + B_y\frac{d\vec{j}}{dt} + B_z\frac{d\vec{k}}{dt}, \quad (2.1.9)$$

где индекс  $I$  означает скорость изменения для наблюдателя в невращающейся, инерциальной системе отсчета. Отметим, что скорость изменения со временем любой скалярной величины в движущемся объеме, например температуры, одна и та же в невращающейся и вращающейся системах отсчета. Применение (2.1.5) к каждому из трех единичных векторов дает

$$B_x\frac{d\vec{i}}{dt} + B_y\frac{d\vec{j}}{dt} + B_z\frac{d\vec{k}}{dt} = B_x \cdot \vec{\omega} \times \vec{i} + B_y \cdot \vec{\omega} \times \vec{j} + B_z \cdot \vec{\omega} \times \vec{k} = \vec{\omega} \times (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) = \vec{\omega} \times \vec{B} \quad (2.1.10)$$

так что формула (2.1.9) примет вид

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \times \vec{B}. \quad (2.1.11)$$

Таким образом, скорость изменения со временем одного и того же вектора  $\vec{B}$  воспринимается различно в невращающейся и вращающейся системах отсчета. Для того, чтобы описать скорость изменения  $\vec{B}$  в инерциальной, невращающейся системе отсчета, надо к скорости изменения, наблюдаемой во вращающейся системе отсчета, добавить член  $\vec{\omega} \times \vec{B}$ . Заметим, что для наблюдателей в обеих системах отсчета скорость изменения со временем вектора  $\vec{\omega}$  будет одна и та же, так как векторное произведение  $\vec{\omega} \times \vec{\omega}$  тождественно равно нулю. Поэтому формула (2.1.11) применима и в тех случаях, когда вектор  $\vec{\omega}$  меняет свою величину и направление.

Пусть  $\vec{r}$  - радиус-вектор произвольной жидкой частицы. Согласно формуле (2.1.11) имеем

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (2.1.12)$$

так что скорость, наблюдаемая в невращающейся системе отсчета,  $\vec{V}_I = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I$  равна скорости  $\vec{V}_R = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R$  относительно вращающейся системы плюс дополнительная линейная скорость  $\vec{\omega} \times \vec{r}$ , сообщаемая жидкой частице при ее вращении вместе с системой отсчета.

Это можно записать следующим образом:

$$\vec{V}_I = \vec{V}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (2.1.13)$$

где  $\vec{V}_R$  - относительная скорость движения.. Применяя (2.1.11) к  $\vec{V}_I$ , получаем

$$\left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \times \vec{V}_I. \quad (2.1.14)$$

Наша цель, однако, состоит в том, чтобы описать движение, используя лишь величины, наблюдаемые во вращающейся системе отсчета. Имея это в виду, перепишем (2.1.14), исключив из него  $\vec{V}_I$  при помощи (2.1.13). Тогда получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I &= \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt}\right)_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \times (\vec{V}_R + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \\ &= \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt}\right)_R + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Разность между ускорениями, наблюдаемыми в невращающейся и вращающейся системах отсчета, равна сумме трех членов в правой части выражения (2.1.15):

$$\left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I - \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt}\right)_R = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}. \quad (2.1.16)$$

Величины  $2\vec{\omega} \times \vec{V}_R$  ускорение Кориолиса,  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  центростремительное ускорение (рис. 2.4) и  $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$  - ускорение, обусловленное изменениями самой скорости вращения  $\vec{\omega}$

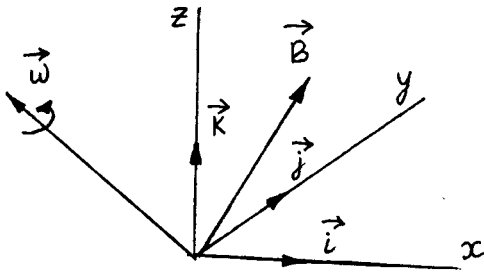


Рис.2.3. Прямоугольная система координат с базисными векторами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и вектором  $\vec{B}$ , вращающимся вокруг фиксированной оси с угловой скоростью  $\vec{\omega}$

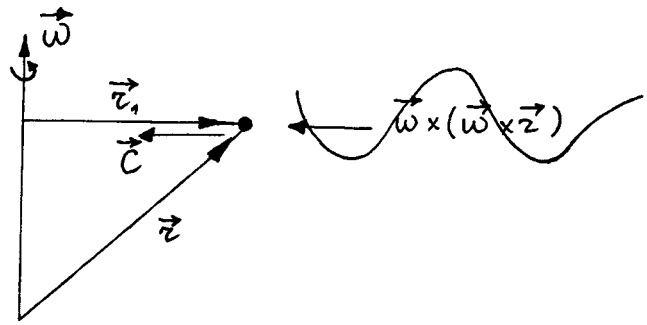


Рис. 2.4. Центробежное ускорение  $\vec{C} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Последнее из этих слагаемых для большинства атмосферных, океанических и гидрологических задач обычно не учитывается, так как оно мало по сравнению с другими членами формулы (2.1.16).

Для наших целей вектор  $\vec{\omega}$  можно считать постоянным и принять:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = 0.$$

Центробежное ускорение может быть выражено через вектор  $\vec{r}_1$ , перпендикулярный оси вращения и направленный от нее к жидкой частице (рис. 2.4). Так как

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}_1,$$

находим

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_1)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{r}_1 = -\omega^2 \vec{r}_1, \quad (2.1.17)$$

где использовалась формула для двойного векторного произведения.

Ускорение Кориолиса  $2\vec{\omega} \times \vec{V}_R$  явно зависит от скорости жидкости  $\vec{V}_R$  и, как будет показано ниже, приводит к существенным изменениям структуры уравнения движения в равномерно вращающейся системе отсчета.

## **2.2 Основные характеристики движения в системе отсчета, связанной с вращающейся Землей.**

В настоящем разделе, посвященном кинематике движений в системе отсчета, жестко связанной с Землей, рассматриваются механические движения жидких частиц в отрыве от того, какие силы создают и поддерживают эти движения. В связи с этим в кинематике не используются такие физические понятия как сила и масса, и принятая степень абстракции сближает кинематику с геометрией. Однако, в отличие от геометрии кинематика связана с изменением времени. Будем пользоваться представлением об "абсолютном пространстве", которое рассматривается как евклидово, т.е. все геометрические построения в нем отвечают основным положениям геометрии Евклида. Так, например, квадрат расстояния между точками определяется как сумма квадратов разности соответствующих координат точек в ортогональной системе отсчета. В "абсолютном пространстве" выбираются начало координат и три координатные оси, служащие для определения положения отдельных точек. В кинематике также используется понятие "абсолютного времени", одинаково и равномерно текущего во всех точках пространства.

Таким образом, в настоящем разделе мы будем пользоваться представлениями, характерными для классической механики Ньютона, которые с достаточной для практики точностью справедливы, если скорость движения элементарных объемов мала по сравнению со скоростью света, а размеры областей пространства, в которых происходит движение, значительно меньше космических.

Вид аналитических выражений для кинематических характеристик поля скорости не зависит от того, выбрана ли инерциальная или неинерциальная система координат. Однако, нужно иметь в виду, что в неинерциальной системе отсчета это "абсолютные" характеристики, а в неинерциальной - относительные. В частности, при использовании неинерциальной системы отсчета, жестко связанной с Землей, эти характеристики рассматриваются по отношению к вращающейся Земле.

В кинематике используется общее свойство сплошной среды - непрерывность распределения кинематических характеристик и дифференцируемость их в пространстве и во времени.

### 2.2.1. Методы описания движения жидкости

Остановимся на двух основных методах описания движения жидкости, известных как методы Лагранжа и Эйлера.

Метод Лагранжа основан на рассмотрении движения отдельных жидких частиц. Если в начальный момент времени  $t_0$  известны декартовы координаты  $x_0, y_0, z_0$ , определяющие выбор индивидуальной частицы, то в любой другой момент времени  $t$  ее координаты будут определяться временем и этими начальными координатами. Пусть  $\vec{R}$  радиус-вектор выделенной жидкой частицы. Тогда, определив зависимость радиус-вектора от времени  $t$  и начальных координат  $x_0, y_0, z_0$

$$\vec{R} = \vec{R} (t; x_0, y_0, z_0), \quad (2.2.1)$$

мы проследим движение выделенной частицы в трехмерном пространстве.

Если  $x_0, y_0, z_0$  постоянны, а  $t$  переменна, то мы прослеживаем движение фиксированной жидкой частицы. Если зафиксировать значение  $t$ , а  $x_0, y_0, z_0$  рассматривать как переменные, то мы получим пространственное распределение жидких частиц в определенный момент времени. Таким образом, в методе Лагранжа выделенный объем жидкости мы представляем в виде совокупности отдельных частиц и следим за их перемещением во времени и пространстве.

Если спроектировать соотношение (2.2.1) на оси координат  $0x, 0y, 0z$ , то получим

$$\begin{aligned} x &= x (t; x_0, y_0, z_0), \\ y &= y (t; x_0, y_0, z_0), \\ z &= z (t; x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Эти уравнения при постоянных  $x_0, y_0, z_0$  и переменном  $t$  описывают закон движения жидкой частицы, а при переменных  $x_0, y_0, z_0$  и постоянном  $t$  - закон пространственного распределения жидких частиц в определенный произвольно выбранный момент времени.

Вместо декартовых координат  $x_0, y_0, z_0$  можно взять любые три величины  $a, b, c$ , связанные с  $x_0, y_0, z_0$  взаимно однозначными зависимостями:

$$\begin{aligned} x_0 &= \psi_1 (a, b, c), \\ y_0 &= \psi_2 (a, b, c), \end{aligned}$$

$$z_0 = \psi_3(a, b, c). \quad (2.2.3)$$

Так, например, в качестве  $a, b, c$  можно выбрать криволинейные координаты частицы в начальный момент времени. Очевидно, что при описании движения жидкости величины  $a, b, c$  являются такими же аргументами как  $t$ . Величины  $t, a, b, c$  носят название переменных Лагранжа.

Таким образом, закон изменения координат жидкой частицы в переменных Лагранжа на основании (2.2.2) и (2.2.3) записывается в виде

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, a, b, c), \\ y &= f_2(t, a, b, c), \\ z &= f_3(t, a, b, c). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Перейдем к определению скорости и ускорения жидкой частицы как основных кинематических характеристик движения. Продифференцировав выражения (2.2.4) по  $t$ , получим компоненты вектора скорости движения частицы  $V_x, V_y, V_z$ :

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(t, a, b, c)}{\partial t}, \\ V_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2(t, a, b, c)}{\partial t}, \\ V_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3(t, a, b, c)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Дифференцирование (2.2.5) по  $t$  дает компоненты вектора ускорения  $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \\ \dot{V}_y &= \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ \dot{V}_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Формулы (2.2.5) и (2.2.6) позволяют рассчитать компоненты скорости и ускорения движущейся частицы в методе Лагранжа.

В методе Эйлера исследуются изменения различных элементов движения в фиксированной точке пространства с течением времени и изменение этих элементов при переходе к другим точкам пространства. Другими слова-

ми, в методе, предложенном Эйлером, скорости движения жидкости определяются в виде функции от времени  $t$  и координат  $x, y, z$  точек пространства, по отношению к которым происходит движение жидкости. Величины  $t, x, y, z$  называются переменными Эйлера, а движение среды задается полем скоростей

$$\begin{aligned}V_x &= F_1(t, x, y, z), \\V_y &= F_2(t, x, y, z), \\V_z &= F_3(t, x, y, z).\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

Для получения формулы расчета ускорения в методе Эйлера сначала рассмотрим процедуру перехода от переменных Лагранжа к переменным Эйлера.

Пусть некоторая величина  $A$  задана в переменных Лагранжа

$$A = A(t, a, b, c)\tag{2.2.8}$$

и в переменных Эйлера

$$A = F(t, x, y, z).\tag{2.2.9}$$

Требуется найти производные от  $A$  по переменным Лагранжа. Так как в методе Лагранжа пространственные координаты суть функции от времени  $t$  и аргументов  $a, b, c$  (2.2.4), то по правилам дифференцирования сложной функции получаем выражения для производных по  $t, a, b, c$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}, \\ \frac{\partial A}{\partial a} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a},\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

аналогично записываются  $\frac{\partial A}{\partial b}$  и  $\frac{\partial A}{\partial c}$ .

Формулы (2.2.10) нельзя трактовать как формулы перехода от переменных Лагранжа к переменным Эйлера, так как в правых частях этих соотношений фигурируют производные по обоим типам переменных. Наибольший интерес представляет производная по времени, т.е. первая формула (2.2.10), которую с учетом (2.2.5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + V_x \frac{\partial F}{\partial x} + V_y \frac{\partial F}{\partial y} + V_z \frac{\partial F}{\partial z}.\tag{2.2.11}$$



Так как в методе Эйлера поле скорости, т.е.  $V_x, V_y, V_z$  задано, то формула (2.2.11) есть формула перехода от переменных Лагранжа к переменным Эйлера.

Правая часть (2.2.11) есть полная (индивидуальная) производная от  $F$  по  $t$ . Последовательно подставляя вместо  $F$  составляющие скорости  $V_x, V_y, V_z$ , получаем соответствующие вектора ускорения в переменных Эйлера

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}, \\ \dot{V}_y &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}, \\ \dot{V}_z &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

Формулы обратного перехода от переменных Эйлера к переменным Лагранжа могут быть получены из соотношений (2.2.7), если заменить составляющие скорости их выражениями из метода Лагранжа (2.2.5). Тогда получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= F_1(t, x, y, z), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= F_2(t, x, y, z), \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= F_3(t, x, y, z).\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

После интегрирования (2.2.13) имеем

$$\begin{aligned}x &= \varphi_1(t, c_1, c_2, c_3), \\ y &= \varphi_2(t, c_1, c_2, c_3), \\ z &= \varphi_3(t, c_1, c_2, c_3),\end{aligned}\tag{2.2.14}$$

где  $c_1, c_2, c_3$  - произвольные постоянные. Для исключения постоянных  $c_1, c_2, c_3$  воспользуемся тем, что в начальный момент  $t = t_0$  координаты жидкой частицы обращаются в начальные координаты  $x_0, y_0, z_0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}x_0 &= \varphi_1(t_0, c_1, c_2, c_3), \\ y_0 &= \varphi_2(t_0, c_1, c_2, c_3),\end{aligned}$$

$$z_0 = \Phi_3(t_0, c_1, c_2, c_3). \quad (2.2.15)$$

Так как  $x_0, y_0, z_0$  однозначно выражаются через  $a, b, c$  (2.2.3), то соотношения (2.2.15) позволяют выразить  $c_1, c_2, c_3$  через  $a, b, c$ .

Таким образом получаем формулы для  $x, y, z$  в виде функций от  $t, a, b, c$ , т.е. решаем задачу перехода от переменных Эйлера к переменным Лагранжа.

Подчеркнем, что основное отличие методов Лагранжа и Эйлера заключается в том, что в методе Лагранжа величины  $x, y, z$  являются переменными координатами движущейся частицы жидкости, а в методе Эйлера - это координаты фиксированных точек пространства, мимо которых проходят различные частицы жидкости.

В геофизической гидродинамике понятие полной производной от векторных и скалярных функций широко используется при решении различных задач.

Как следует из формулы (2.2.11) выражение для полной производной имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + V_x \frac{\partial F}{\partial x} + V_y \frac{\partial F}{\partial y} + V_z \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (2.2.16)$$

Величина  $\frac{dF}{dt}$  есть изменение со временем функции  $F$  в частице, движущейся со скоростью  $\vec{V}$  ( $V_x, V_y, V_z$ ). Эта формула применима как для векторных, так и для скалярных величин. Так, например, полная производная от температуры  $T = T(t, x, y, z)$  по времени  $t$  может быть представлена в виде:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2.2.17)$$

Выражение (2.2.17) можно переписать в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)T, \quad (2.2.18)$$

где  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  - оператор набла,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - единичные орты по осям  $Ox, Oy, Oz$ .

В формуле (2.2.18) первый член  $\frac{\partial T}{\partial t}$  обычно называют *локальной* производной по времени, которая описывает изменение искомой функции (в данном случае температуры) в фиксированной точке трехмерного пространства. Второй член - *конвективная* производная, обусловленная перемещением

жидкой частицы в пространственно неравномерном поле температуры или любой другой величины.

### 2.2.2. Траектории и линии тока

При движении точки в пространстве ее координаты изменяются с течением времени. Уравнения, связывающие координаты точки и время, позволяют определить эти координаты в любой момент времени:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (2.2.19)$$

Вместо декартовых координат можно взять любые другие координаты (сферические, цилиндрические и т.д.). Линия, описываемая движущейся точкой в пространстве, называется траекторией.

Уравнения (2.2.19), определяющие координаты точки в любой момент времени, могут рассматриваться как параметрические уравнения траектории. Для перехода от параметрических уравнений кривой линии к уравнению, связывающему координаты точки, необходимо исключить параметр. Чтобы получить уравнение траектории, нужно из (2.2.19) исключить время  $t$ .

Траектория частицы жидкости позволяет воспроизвести картину ее движения с течением времени. Если же необходимо получить пространственную картину движения набора частиц жидкости в фиксированный момент времени, то следует воспользоваться понятием линии тока.

Линиями тока называются линии, которые характеризуются тем, что для данного момента времени  $t$  касательная к линии тока в любой ее точке совпадает по направлению с вектором скорости.

Условимся, бесконечно малый отрезок в окрестности данной точки пространства в фиксированный момент времени обозначать  $\delta \vec{r}$ , а путь, пройденный элементарным объемом жидкости за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  - символом  $d\vec{r}$ . Проекции векторов  $\delta \vec{r}$  и  $d\vec{r}$  будут соответственно  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  и  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Тогда по условию совпадения направления касательной к линии тока и вектора скорости в этой же точке будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений линий тока

$$\frac{\delta x}{V_x(t,x,y,z)} = \frac{\delta y}{V_y(t,x,y,z)} = \frac{\delta z}{V_z(t,x,y,z)}. \quad (2.2.20)$$

Соответствующие уравнения траекторий имеют вид

$$\frac{dx}{V_x(t,x,y,z)} = \frac{dy}{V_y(t,x,y,z)} = \frac{dz}{V_z(t,x,y,z)} = dt. \quad (2.2.21)$$

В системе (2.2.20) время  $t$  играет роль параметра, который сохраняет неизменное значение при интегрировании уравнений, а в системе (2.2.21) время является аргументом. В случае стационарного поля скоростей, когда,  $V_x, V_y, V_z$  не зависят от времени, системы уравнений (2.2.20) и (2.2.21) будут одинаковыми, а, следовательно, линии тока и траектории совпадут. Естественно, в случае нестационарного поля скоростей линии тока и траектории будут представлять разные кривые.

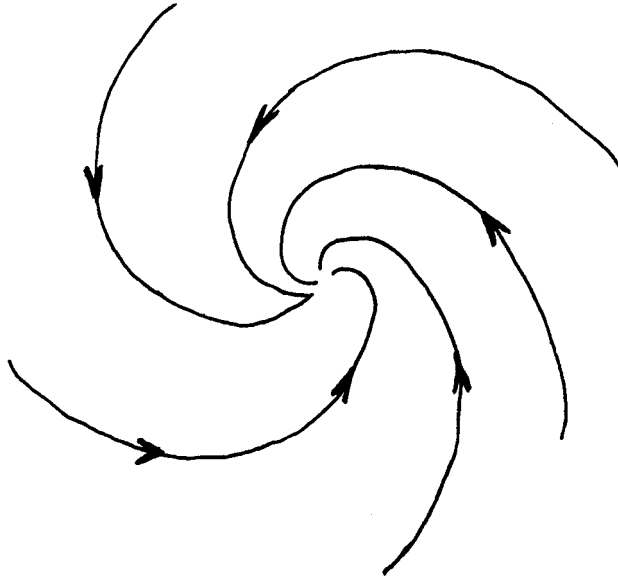


Рис.2.5. Линии тока вблизи критической точки

Из теоремы существования решения для системы уравнений (2.2.20) в предположении, что составляющие вектора скорости и их первые производные однозначные и непрерывные функции координат, следует, что через каждую точку пространства проходит только одна линия тока. Исключение составляют особые точки, через которые могут проходить несколько или бесчисленное множество линий тока.

Это означает, что если скорость отлична от нуля, то в особой точке мы получим разные направления движения, что невозможно. Следовательно, в особой точке скорость должна быть равна нулю или бесконечности. Если скорость равна нулю, то особая точка называется критической, если бесконечность - типа источника или стока. В качестве примера приведем критическую особую точку, которая наблюдается при протекании жидкости через узкую воронку (рис. 2.5). Вблизи такой особой точки линии тока спиралеобразно закручиваются по мере приближения к ней. В атмосфере и океане роль таких гигантских воронок играют синоптические вихри (циклоны и антициклоны). Приведенная на рис. 2.5 картина линий тока соответствует циклоническому вихрю.

### 2.2.3. Пространственное распределение скорости в элементарном объеме жидкости

В окрестности фиксированной точки пространства перемещение элементарного объема жидкости можно представить как векторную сумму трех видов скоростей:

- 1) параллельного перемещения;
- 2) вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через данную точку;
- 3) деформационного движения.

Первые два вида движения жидкости можно рассматривать как движение твердого тела или квазитвердое движение жидкости.

Получим количественные характеристики квазитвердого движения жидкости. Для этого рассмотрим некоторую вектор-функцию  $\vec{B}(t)$  в относительной системе координат, одна из осей которой совпадает с мгновенной осью квазитвердого вращения жидкости, а начало координат - с рассматриваемой точкой пространства. Сравним полные производные от вектора  $\vec{B}$  по времени  $t$ , вычисленные наблюдателями в абсолютной и относительной системах координат. Для этой цели воспользуемся соотношением (2.1.11), подставив вместо вектора  $\vec{B}$  радиус-вектор жидкой частицы  $\vec{r}$ . Тогда выражение для скорости квазитвердого движения  $\vec{V}_{KT}$  будет иметь вид

$$\vec{V}_{KT} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{V}_0 + \vec{V}_B, \quad (2.2.22)$$

где  $\vec{V}_0$  - скорость поступательного движения в неинерциальной системе отсчета, а  $\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}$  - линейная скорость вращательного движения с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ .

Запишем полную скорость элементарного объема в виде суммы скорости квазитвердого движения  $\vec{V}_{KT}$  и скорости деформации  $\vec{V}_D$

$$\vec{V} = \vec{V}_{KT} + \vec{V}_D = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V}_D \quad (2.2.23)$$

Спроектируем полную скорость  $\vec{V}$  на оси координат  $x, y, z$ , обозначив  $V_x \equiv u, V_y \equiv v, V_z \equiv w$ . Тогда

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \omega_y z - \omega_z y + u_D, \\ v &= v_0 + \omega_z x - \omega_x z + v_D, \\ w &= w_0 + \omega_x y - \omega_y x + w_D. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Выразим угловую скорость вращения  $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  и скорость деформации  $\vec{V}_D(u_D, v_D, w_D)$  через дифференциальные характеристики пространственного распределения скорости в окрестности начала координат выбранной относительной системы.

Разлагая проекции скорости движущейся жидкой частицы в ряд с точностью до величин первого порядка малости, получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z, \\ v(x, y, z) &= v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z, \\ w(x, y, z) &= w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 z, \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

где величины с индексом "0" относятся к началу координат (к фиксированной точке пространства) и зависят только от времени. В дальнейшем индекс "0" будет опущен. Преобразуем (2.2.25) таким образом, чтобы в этом выражении в явном виде фигурировали составляющие линейной скорости вращательного движения и составляющие скорости деформационного движения. С этой целью преобразуем производные от проекций скорости по координатам следующим тождественным способом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Подставляя (2.2.26) в (2.2.25) и собирая члены в соответствии с (2.2.24), найдем

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) y + \frac{\partial u}{\partial x} x, \\
v &= v_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) z + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) z + \frac{\partial v}{\partial y} y, \\
w &= w_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) x + \frac{\partial w}{\partial z} z. \quad (2.2.27)
\end{aligned}$$

Из сопоставления (2.2.27) и (2.2.24) однозначно следует, что роль составляющих угловой скорости  $\vec{\omega}$  играют величины:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \Omega_x, \\
\omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \Omega_y, \\
\omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \Omega_z, \quad (2.2.28)
\end{aligned}$$

где  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  - составляющие вектора вихря скорости. Следовательно, угловая скорость  $\vec{\omega}$  однозначно выражается через вихрь скорости

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}. \quad (2.2.29)$$

Величины  $u_0, v_0, w_0$  являются составляющими вектора скорости поступательного движения  $\vec{V}_0$ . Оставшиеся члены представляют собой составляющие скорости деформационного движения, которые выражаются с помощью тензора деформации:

$$S = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2.2.30)$$

Для удобства введем обозначения:

$$\begin{aligned}
S_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & S_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & S_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\
S_{xy} &= S_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),
\end{aligned}$$

$$S_{xz} = S_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$S_{yz} = S_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (2.2.31)$$

Тогда

$$u_D = S_{xx}x + S_{xy}y + S_{xz}z,$$

$$v_D = S_{yx}x + S_{yy}y + S_{yz}z,$$

$$w_D = S_{zx}x + S_{zy}y + S_{zz}z. \quad (2.2.32)$$

Таким образом, доказана первая теорема Гельмгольца о представлении скорости элементарного объема жидкости: в виде векторной суммы скоростей поступательного, вращательного и деформационных движений.

#### 2.2.4. Основные дифференциальные характеристики поля скорости

В геофизической гидродинамике особенно важную роль играют следующие дифференциальные характеристики скорости: вихрь, дивергенция и деформация.

Запишем вектор вихря скорости в виде

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (2.2.33)$$

с составляющими

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.2.34)$$

Дивергенция скорости представляет собой сумму диагональных членов тензора деформации (2.2.30)

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.2.35)$$

Для простоты физического толкования введенных дифференциальных характеристик рассмотрим случай двумерного движения ( $w = 0$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ).

Из формулы общего разложения скорости (2.2.27) легко получить

$$u = u_0 + \frac{D}{2}x - \frac{C}{2}y + \frac{A}{2}x + \frac{B}{2}y,$$

$$v = v_0 + \frac{D}{2}y + \frac{C}{2}x - \frac{A}{2}y + \frac{B}{2}x, \quad (2.2.36)$$



где

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad A = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.2.37)$$

Нетрудно видеть, что величина  $D$  есть сумма, а  $A$  - разность диагональных членов тензора деформации для двумерного движения,  $B$  - сумма недиагональных членов этого тензора. Для рассматриваемого двумерного движения  $C$  составляющая вектора вихря скорости направлена вдоль оси  $z$ . В геофизической гидродинамике величину  $C \equiv \Omega_z$  часто называют *завихренностью* вместо вертикальной составляющей вихря скорости. Величину  $D$  называют *плоской дивергенцией* скорости или просто дивергенцией.

Таким образом, движение элементарного объема можно представить как результат наложения следующих пяти видов движения.

1.  $u_1 = u_0, v_1 = v_0$  - параллельный перенос частицы в направлении, образующем с осью  $x$  угол  $\alpha_1 = \arctg \frac{v_1}{u_1}$  со скоростью  $V_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}$  (см. рис.2.6а).

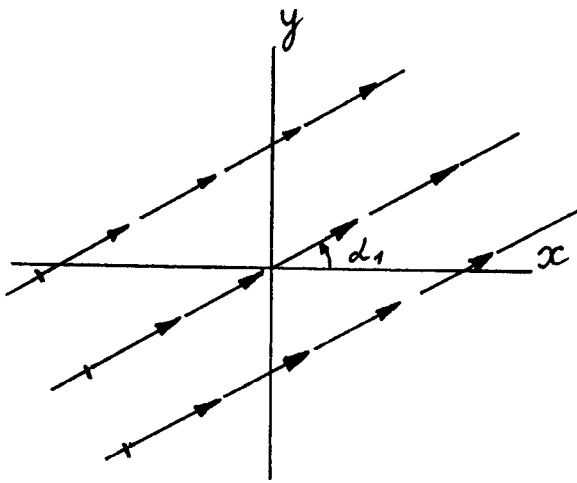


Рис. 2.6а. Элемент сложного движения жидкой частицы – прямолинейный перенос

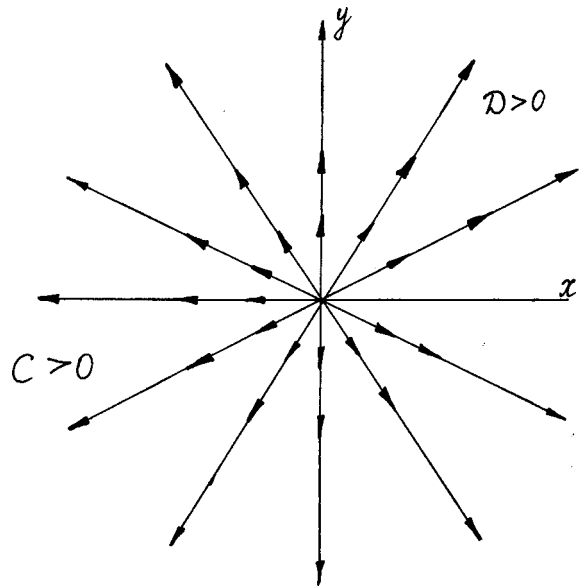


Рис. 2.6б. Элемент сложного движения жидкой частицы – радиальный перенос

2.  $u_2 = \frac{D}{2}x, v_2 = \frac{D}{2}y$  - движение вдоль радиуса-вектора (рис. 2.6б), это вытекает из того, что направление этого движения составляет с осью  $x$  угол  $\alpha_2 = \arctg \frac{v_2}{u_2} = \arctg \frac{y}{x}$ , т.е. совпадает с направлением радиуса - вектора соединяющего соответствующую точку с началом координат, а модуль скорости  $V_2 = \frac{D}{2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{D}{2} |\vec{r}| \equiv \frac{D}{2} r$  пропорционален расстоянию  $r$  от начала координат.

При  $D > 0$  движение происходит от начала координат (расширение), а при  $D < 0$  - к началу координат.

За время  $dt$  круг радиуса  $r$  и площадью  $S = \pi r^2$  преобразуется в круг радиуса  $r + \frac{D}{2} r dt$  и площадью  $S + dS = \pi r^2 (1 + \frac{D}{2} dt)^2 \cong \pi r^2 (1 + D dt)$  с точностью до величин первого порядка малости. Следовательно, дивергенция

$$D = \frac{1}{S} \cdot \frac{dS}{dt} \quad (2.2.38)$$

есть скорость относительного изменения площади горизонтального сечения  $S = \pi r^2$  элементарного объема. Следовательно, при  $D > 0$  происходит расширение площади горизонтального сечения, а при  $D < 0$  - его сжатие.

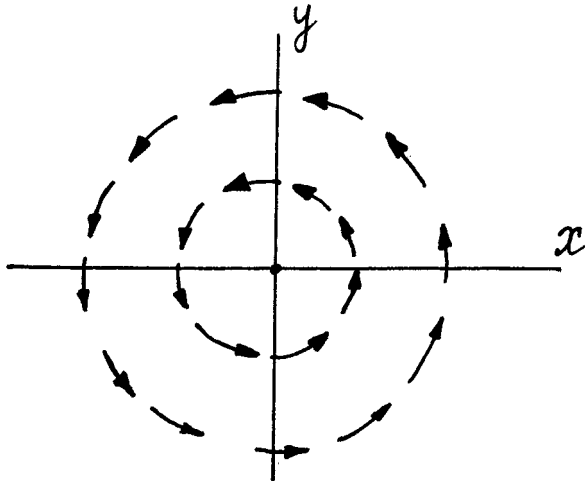


Рис. 2.6в. Элемент сложного движения жидкой частицы – вращение.

3.  $u_3 = -\frac{c}{2}y$ ,  $v_3 = \frac{c}{2}x$  - вращательное движение вокруг начала координат. Это следует из того, что направление этого движения составляет с осью  $x$  угол  $\alpha_3 = \arctg \frac{v_3}{u_3} = \arctg(-\frac{x}{y})$ , т. е. выполняется условие перпендикулярности векторов  $\vec{V}_3$  и  $\vec{r}$  ( $u_3 x + v_3 y = 0$ ). Так как модуль скорости этого движения  $V_3 = \frac{C}{2}r$ , то

завихренность  $C$  есть удвоенная угловая скорость вращения в горизонтальной плоскости ( $V_3/r$ ). При  $C > 0$  вращение происходит против часовой стрелки (циклоническое вращение), а при  $C < 0$  - по часовой стрелке (антициклоническое вращение) (рис. 2.6в).

4.  $u_4 = \frac{A}{2}x$ ,  $v_4 = -\frac{A}{2}y$  - движение вдоль равнобочной гиперболы, у которой оси сжатия и растяжения совпадают с осями координат, а главные оси - с биссектрисами координатных углов. При  $A > 0$  - осью сжатия (растяжения) является ось  $y$  (ось  $x$ ), а при  $A < 0$  - ось  $x$  (ось  $y$ ). Приведенные соображения следуют из уравнения для линии тока, которая в этом случае имеет вид

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

После интегрирования получаем  $xy = const$ . В результате этого движения первоначальное горизонтальное сечение в виде круга радиуса  $r$  через время  $dt$  превратится в эллипс с полуосями  $a = r(1 + \frac{A}{2}dt)$  и  $b = r(1 - \frac{A}{2}dt)$ . При этом с точностью до малых величин второго порядка площадь горизонтального сечения не изменяется  $S = \pi ab = \pi r^2 \left(1 - \frac{A^2}{4}dt^2\right) \cong \pi r^2$ .

Отношение полуосей становится равным  $\frac{a}{b} \cong 1 + Adt$ , т.е. увеличится на величину  $Adt$ . Следовательно,  $A$  представляет собой скорость изменения отношения полуосей эллипса, другими словами, растяжение или сжатие этого эллипса вдоль координатных осей (скорость деформации) без изменения площади (рис. 2.6г).

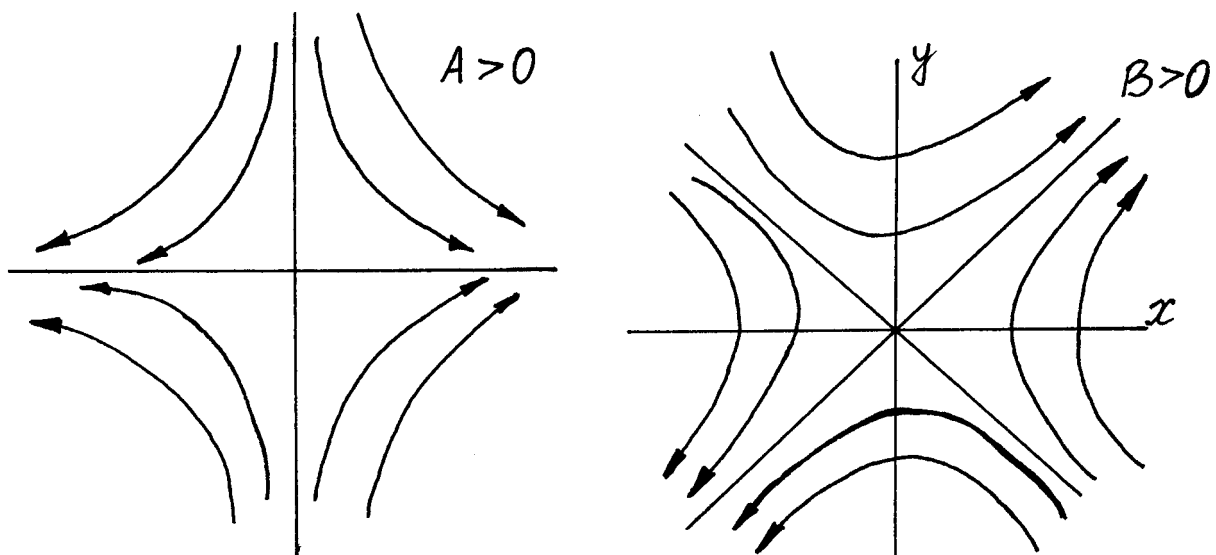


Рис.2.6.г. Элемент сложного движения жидкой частицы – сжатие и растяжение.

5.  $u_s = \frac{B}{2}y$ ,  $v_s = \frac{B}{2}x$  - движение вдоль равнобочной гиперболы, главные оси которой совпадают с осями координат, а оси сжатия и растяжения - с биссектрисами координатных углов. Действительно в этом случае уравнение линии тока принимает вид  $x dx = y dy$ , что после интегрирования дает  $x^2 - y^2 = const$ .

В результате описанной деформации площадь горизонтального поперечного сечения элементарного объема остается без изменений. Рассматриваемая картина движения получается из предыдущей поворотом на  $45^\circ$ .

Приведенные закономерности легко обобщаются на трехмерный случай. Ранее было показано (п. 2.2.3), что вектор вихря скорости представляет

собой удвоенную угловую скорость квазитвердого вращения жидкости. Этот вывод также следует из теоремы Стокса, а именно

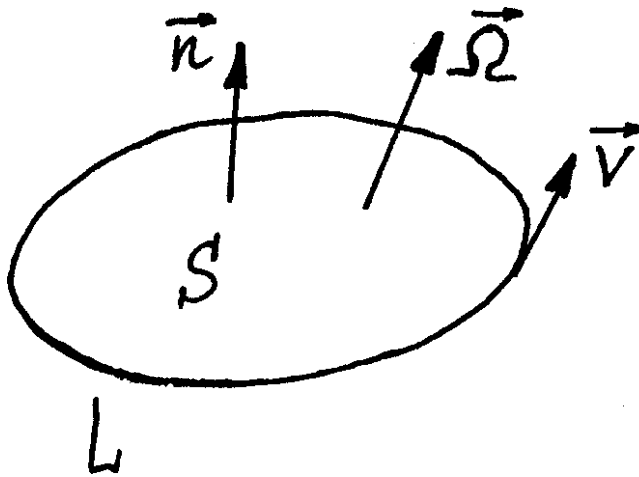
$$\iint_s (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds = \oint_L \vec{V} \cdot d\vec{r}, \quad (2.2.39)$$

где интеграл в левой части берется по поверхности  $s$ , охватываемой контуром  $L$ ,  $\vec{n}$  - нормаль к этой поверхности (рис. 2.7). Используя теорему о среднем, для малого элемента поверхности  $\delta s$  можно записать

$$\bar{\Omega}_n = \frac{\bar{V}_L \cdot l}{\delta s}, \quad (2.2.40)$$

где  $\bar{\Omega}_n$  - осредненная проекция вектора вихря на направление нормали,  $\bar{V}_L$  - средняя скорость, касательная к контуру  $L$ ,  $l$  - длина контура, ограничивающего элемент поверхности  $\delta s$ . Если  $\delta s$  - площадь круга радиусом  $r_0$ , то

$$\bar{\Omega}_n = \bar{V}_L \frac{2\pi r_0}{\pi r_0^2} = 2 \frac{\bar{V}_L}{r_0}. \quad (2.2.41)$$



Так как  $\frac{\bar{V}_L}{r_0}$  есть угловая скорость вращения вдоль контура  $L$ , то средний вихрь  $\bar{\Omega}_n$ , перпендикулярный к выбранной площадке, равен удвоенной угловой скорости вращения элементарного объема вокруг мгновенной оси. Важно отметить, для того чтобы движение жидкости имело вихрь

Рис. 2.7. Контур, используемый для вывода соотношения между угловой скоростью вращения и вихрем.

скорости, отличный от нуля, совсем не обязательно наличие искривленных траекторий. На рис.2.8 приведен пример движения по прямолинейным траекториям (однонаправленное течение), в котором вихрь скорости отличен от нуля. Нетрудно видеть, что это есть движение со сдвигом вдоль оси  $x$  ( $\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$ ).

Легко показать, что в трехмерном случае величина дивергенции представляет собой скорость относительного изменения элементарного объема  $\delta t$  с сохранением его формы.

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d}{dt} (\delta\tau). \quad (2.2.42)$$

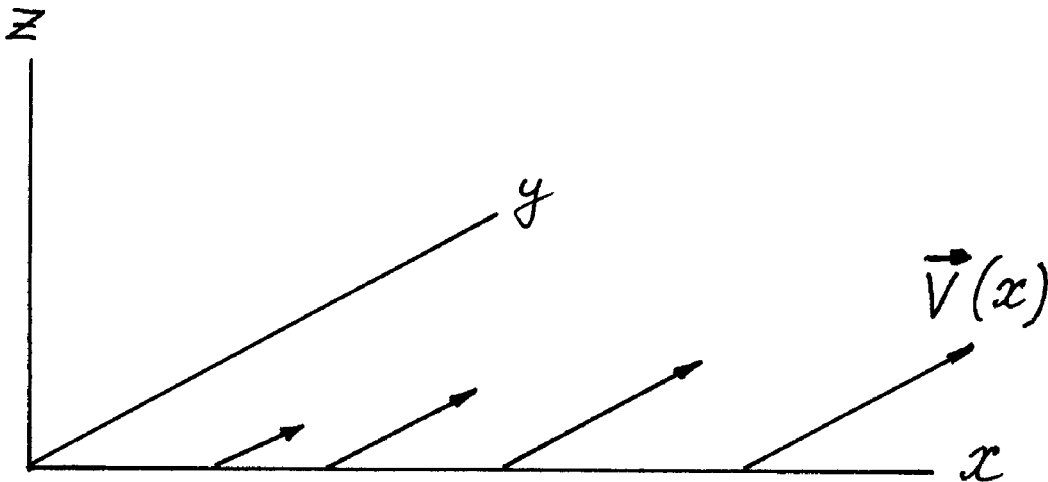


Рис.2.8. Вихрь в течении со сдвигом.

Параметры  $A$  и  $B$  характеризуют чистую деформацию - изменение формы элементарного объема без изменения его величины.

### 2.2.5. Соленоидальное и потенциальное движения жидкости

Рассмотрим два частных случая плоского  $(x, y)$  движения жидкости: соленоидальное или бездивергентное движение, для которого

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.2.43)$$

и потенциальное или безвихревое движение, для которого

$$C = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.2.44)$$

Условие (2.2.43) позволяет выразить составляющие скорости  $u, v$  через единственную скалярную функцию  $\psi$ :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.2.45)$$

Если записать дифференциальное уравнение линии тока в виде

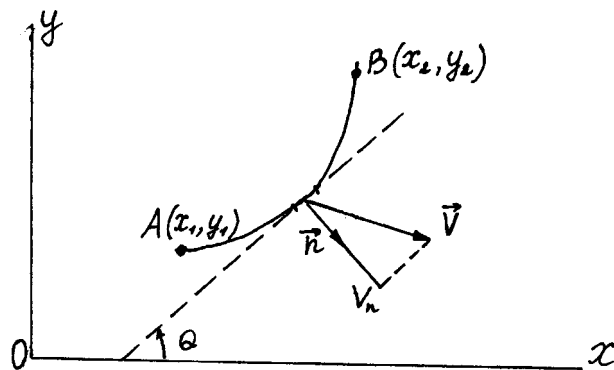
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \text{или} \quad udy - vdx = 0, \quad (2.2.46)$$

то с учетом (2.2.45) соотношение (2.2.46) переписывается в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0. \quad (2.2.47)$$

Последнее означает, что в случае соленоидального движения на каждой линии тока функция  $\psi(x, y)$  сохраняет постоянное значение ( $\psi(x, y) = c$ ), различное для различных линий тока. Функция  $\psi$  называется *функцией тока*.

Выразим теперь через функцию тока  $\psi$  поток жидкости через дугу  $AB$  произвольной кривой, проведенной в плоскости движения (рис. 2.9). Говоря



о потоке жидкости через некоторую кривую в плоскости  $xOy$ , мы будем под последним понимать поток через цилиндрическую поверхность, для которой данная кривая служит направляющей, образующие параллельны оси  $Oz$  и высота равна единице длины.

Рис.2.9. Кривая линия в плоскости  $xOy$

Предположим, что скорость  $\vec{V}$  постоянна для всех частиц жидкости, находящихся на элементе дуги  $dl$  линии  $AB$ , и протекание жидкости через эту линию обуславливает только нормальная составляющая  $V_n$  скорости  $\vec{V}$ . Касательная составляющая скорости вызывает только скольжение частицы жидкости вдоль кривой  $AB$ , а не прохождение через нее. Тогда для объема жидкости, протекающей в единицу времени через элемент дуги  $dl$ , получаем выражение  $V_n dl = (\vec{V} \cdot \vec{n}) dl$ , где  $\vec{n}$  - единичный вектор, направленный по внешней нормали к кривой  $AB$ .

Поток жидкости через всю кривую выразится, очевидно, криволинейным интегралом

$$\int_{(A)}^{(B)} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dl, \quad (2.2.48)$$

взятым вдоль данной кривой от точки  $A(x_1, y_1)$  до точки  $B(x_2, y_2)$ . Если углы между вектором  $\vec{n}$  и осями  $x$  и  $y$  обозначить соответственно через  $(n, x)$  и  $(n, y)$ , то

$$n_x = \cos(n, x), \quad n_y = \cos(n, y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{(A)}^{(B)} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dl &= \int_{(A)}^{(B)} [u \cos(n, x) + v \cos(n, y)] dl = \int_{(A)}^{(B)} (u \sin \theta - v \cos \theta) dl = \\ &= \int_{(A)}^{(B)} (u dy - v dx) = \int_{(A)}^{(B)} d\psi = \psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1), \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

где  $\theta$  есть угол между  $dl$  и  $Ox$ .

Таким образом, поток жидкости через кривую, проведенную в плоскости движения, равен разности значений функции тока на концах этой кривой и, следовательно, не зависит от её формы. Другими словами, потоки жидкости через различные кривые, имеющие общие начало и конец, равны между собой.

Рассмотрим еще один частый случай движения, а именно потенциальное или безвихревое движение, определяемое условием (2.2.44). В этом случае составляющие скорости  $u$ ,  $v$  можно выразить через некоторую функцию  $\varphi$  с помощью соотношений

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (2.2.50)$$

Функция  $\varphi$  называется *потенциалом скорости*.

Так как  $u$ ,  $v$  в случае плоского движения являются функциями  $x$  и  $y$ , то, очевидно, от тех же аргументов будет зависеть потенциал скорости  $\varphi$ . Согласно (2.2.50) величину  $(u dx + v dy)$  можно рассматривать как полный дифференциал функции  $\varphi$ :

$$u dx + v dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi. \quad (2.2.51)$$

Тогда интеграл, взятый по некоторой кривой между точками  $A$  и  $B$ ,

$$\int_{(A)}^{(B)} (\vec{V} \cdot d\vec{r}) = \int_{(A)}^{(B)} (u dx + v dy) = \int_{(A)}^{(B)} d\varphi = \varphi_B - \varphi_A \quad (2.2.52)$$

не зависит от вида кривой и равен разности потенциала скорости в этих точках.

Введем теперь понятие *экипотенциальной линии*, т. е. линии во всех точках которой потенциал скорости  $\varphi$  сохраняет одно и тоже значение. Очевидно, что уравнение экипотенциальной линии мы получим, если потенциал скорости приравняем к постоянной величине:

$$\varphi(x, y) = c. \quad (2.2.53)$$

Присвоив постоянной в правой части (2.2.53) различные значения, получим различные эквипотенциальные линии.

Легко видеть, что в случае бездивергентного движения на основании (2.2.45) и второй формулы (2.2.37) завихренность равна плоскому оператору Лапласа от функции тока  $\psi$

$$C = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Delta \psi \equiv \nabla^2 \psi. \quad (2.2.54)$$

Аналогично, в случае безвихревого движения на основании (2.2.50) и первой формулы (2.2.37) дивергенция равна плоскому оператору Лапласа от потенциала скорости  $\phi$

$$D = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \Delta \phi \equiv \nabla^2 \phi. \quad (2.2.55)$$

В случае безвихревого плоского движения функция тока должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2.56)$$

Аналогично для бездивергентного движения получаем

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

Теперь исследуем связь функции тока с потенциалом скорости. Из сравнения (2.2.45) с (2.2.50) следует, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.2.57)$$

или иначе

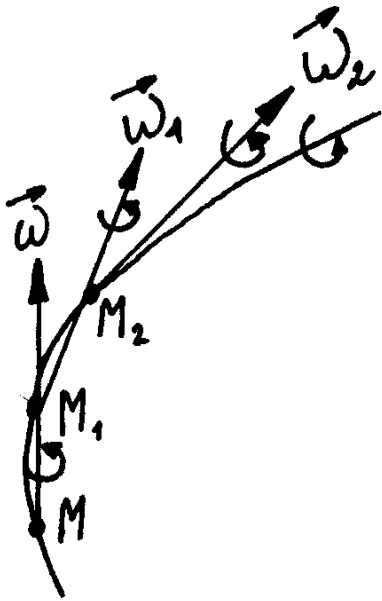
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (2.2.58)$$

Последнее соотношение показывает, что каждая кривая семейства  $\phi = const$  пересекается под прямым углом с любой кривой семейства линий  $\psi = const$ , иначе говоря, линии тока являются ортогональными семейству изопотенциальных линий. В силу взаимной ортогональности кривых  $\phi = const$  и  $\psi = const$  функции  $\phi$  и  $\psi$  называются сопряженными.



### 2.2.6. Вихревые линии, вихревые трубки и циркуляция скорости

Как было показано в п. 2.2.3, одним из видов движения элементарного объема является вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью, равной половине вихря скорости. Чтобы получить представление о пространственном распределении этих элементарных вращений, введем в рассмотрение векторные линии поля угловых скоростей  $\vec{\omega}$  или поля вектора вихря скорости  $\vec{\Omega}$ . Эти векторные линии будем называть вихревыми линиями или вихревыми нитями.



Для построения вихревых нитей воспользуемся общим методом построения вихревых линий, который заключается в следующем. Возьмем в данный момент времени вблизи точки  $M$  (рис. 2.10) некоторый вращающийся элементарный объем и отметим вектор его угловой скорости  $\vec{\omega}$ . Переместившись вдоль этого вектора на малый отрезок  $MM_1$ , проведем вектор  $\vec{\omega}_1$  угловой скорости элементарного объема в точке  $M_1$ , соответствующий тому же моменту времени, затем вектор  $\vec{\omega}_2$  в точке  $M_2$  и т. д. Полигон  $MM_1M_2$  в пределе образует вихревую линию.

Рис.2.10. Построение вихревой линии

Элементарные жидкие объемы, расположенные вдоль вихревой линии, вращаются вокруг касательных к ней в соответствующих точках, и вихревая линия играет роль криволинейной оси вращения этих объемов. Таким образом, вихревая линия это такая линия, в каждой точке которой вектор вихря скорости направлен по касательной к ней.

Выберем в пространстве некоторый контур, через все его точки проведем вихревые линии и, таким образом, образуем вихревую поверхность. Часть жидкости, ограниченная вихревой поверхностью, проведенной через замкнутый контур, представляет вихревую трубку. Если контур бесконечно мал, вихревая трубка называется элементарной.

Для количественного описания вихревой трубки введем понятие потока вектора вихря через произвольную поверхность  $S$

$$\Gamma(\vec{\Omega}) = \int_S (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds, \quad (2.2.59)$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор, совпадающий по направлению с внешней нормалью. Параметр  $\Gamma(\vec{\Omega})$  также называют *интенсивностью вихревой трубки*, если  $S$  - сечение трубки.

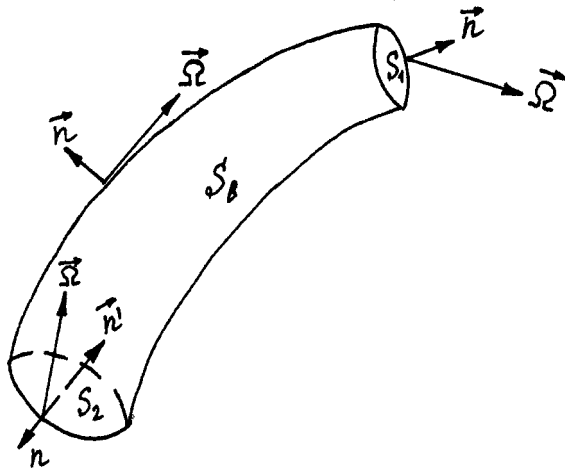


Рис.2.11. Вихревая трубка

Докажем *вторую теорему Гельмгольца*. Поток вектора вихря скорости сквозь произвольно проведенное сечение вихревой трубки одинаков в данный момент времени вдоль всей трубки.

С этой целью рассмотрим объем вихревой трубки  $\tau$  (рис. 2.11), ограниченный двумя произвольными сечениями  $S_1$  и  $S_2$  трубки и боковой ее поверхностью  $S_l$ .

По формуле Остроградского - Гаусса следует

$$\int_S (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds = \int_{\tau} \text{div} \vec{\Omega} \cdot d\tau \quad (2.2.60)$$

Так как  $\text{div} \vec{\Omega} = 0$ , то полный поток  $\Gamma = 0$  (2.2.61)

Разобьем поверхностный интеграл на сумму трех интегралов, вычисленных по поверхностям  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_l$ , составляющие в своей совокупности замкнутую поверхность  $S$ .

Так как в силу ортогональности векторов внешней нормали и вихря скорости поток вектора вихря через боковую поверхность равен нулю, то получим

$$\Gamma = \int_{S_1} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds + \int_{S_2} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds = 0. \quad (2.2.62)$$

Если рассматривать поток вихря скорости в направлении вихревых линий, то во втором интеграле формулы (2.2.62) внешнюю нормаль  $\vec{n}$  необходимо заменить внутренней нормалью  $\vec{n}'$  и формулу (2.2.62) переписать в виде

$$\int_{S_1} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds - \int_{S_2} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}') ds = 0, \quad (2.2.63)$$

откуда

$$\int_{S_1} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds = \int_{S_2} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}') ds, \quad (2.2.64)$$

что и доказывает вторую теорему Гельмгольца.

Таким образом, поток вихря скорости сквозь любое сечение трубки является постоянной величиной для трубки в целом и может быть принят за меру интенсивности трубки  $\Gamma$ .

Применяя вторую теорему Гельмгольца к элементарной вихревой трубке, выберем малые сечения  $\delta s_1$  и  $\delta s_2$  плоскими и нормальными к поверхности трубки; тогда с точностью до малых высших порядков будем иметь

$$\Omega_1 \delta s_1 = \Omega_2 \delta s_2. \quad (2.2.65)$$

Из этого равенства вытекает, что сечение трубки не может стать равным нулю, так как это привело бы к возрастанию до бесконечности угловой скорости вращения жидких частиц в этом сечении (рис. 2.12). Отсюда следует, что вихревые трубки не могут заканчиваться внутри жидкости; они образуют замкнутые кольца, либо опираются на стенки сосуда или свободные поверхности (рис. 2.13).

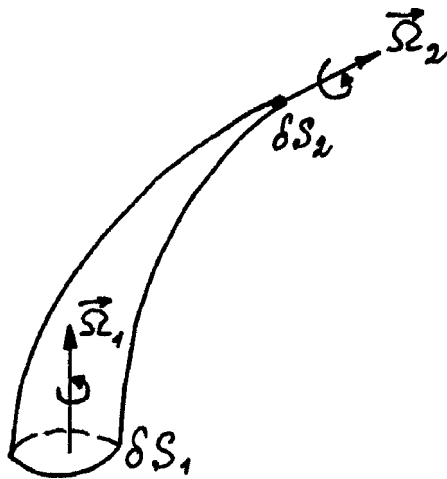


Рис. 2.12. Элементарная вихревая трубка с малыми сечениями  $S_1$  и  $S_2$ .

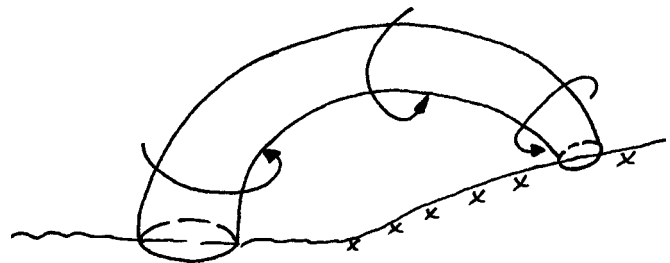


Рис. 2.13. Вихревая трубка, опирающаяся на поверхность моря и суши.

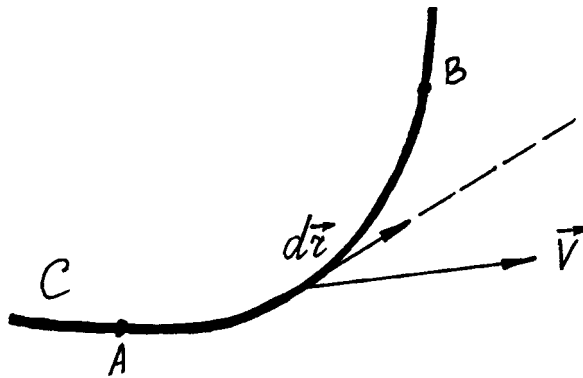
Интенсивность вихревой трубки тесно связана с основным для гидродинамики понятием циркуляции скорости.

Криволинейный интеграл по участку  $AB$  кривой  $C$ , проведенной в поле вектора скорости  $\vec{V}$  (рис. 2.14)

$$\Gamma_{AB}(\vec{V}) = \int_A^B \vec{V} \cdot d\vec{r},$$

определяет циркуляцию вектора скорости по контуру  $C$  на участке  $AB$ .

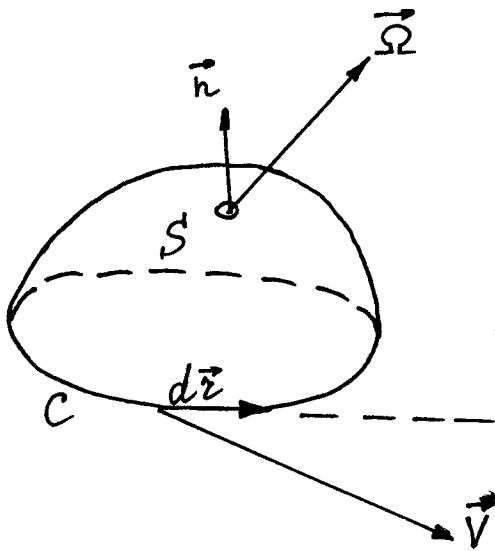
Если контур  $C$  замкнут, то циркуляция скорости определится контурным интегралом



$$\Gamma_C(\vec{V}) = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r},$$

где  $d\vec{r}$  - направленный элемент контура  $C$ . Проведем в поле вектора скорости  $\vec{V}$  замкнутый не пересекающий себя контур  $C$  и разомкнутую поверхность  $S$ , опирающуюся на этот контур (рис. 2.15).

Рис.2.14. Участок АВ кривой  $C$ , проведенной в поле вектора скорости  $\vec{V}$ .



Тогда, если  $\vec{V}$  непрерывный и дифференцируемый вектор, то имеет место формула Стокса

$$\int_S (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} \quad (2.2.66)$$

или

$$\Gamma(\vec{\Omega}) = \Gamma_C(\vec{V}). \quad (2.2.67)$$

Таким образом, интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по замкнутому контуру, расположенному на поверхности трубки и один раз её опоясывающему.

Рис.2.15. Замкнутый контур  $C$  и поверхность  $S$ , опирающаяся на этот контур.

### 2.2.7. Вихрь и циркуляция скорости в инерциальной системе отсчета

В предыдущих разделах были получены основные характеристики движения в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающейся Землей. Представляют интерес указанные характеристики в инерциальной системе отсчета. В первую очередь это относится к вектору вихря скорости и циркуляции скорости.

Вихрь, наблюдаемый в инерциальной системе отсчета, называется абсолютным вихрем  $\vec{\Omega}_a$ , а циркуляция скорости - абсолютной циркуляцией  $\Gamma_a$ . Абсолютный вихрь определяется по абсолютной скорости следующим образом

$$\vec{\Omega}_a = \nabla \times \vec{V}_a = \nabla \times (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} + 2\vec{\omega}, \quad (2.2.68)$$

где  $\nabla \times \vec{V} = \vec{\Omega}$  - относительный вихрь скорости, а величина  $\nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  находится по правилам двойного векторного произведения и равна планетарному вихрю  $2\vec{\omega}$ , представляющему удвоенную угловую скорость вращения Земли  $\vec{\omega}$ . Таким образом, абсолютный вихрь любой жидкой частицы представляет собой сумму планетарного вихря  $2\vec{\omega}$  и относительного вихря скорости  $\vec{\Omega}$ . Подчеркнем, что абсолютный вихрь отражает тот факт, что частица участвует во вращательном движении вместе с Землей, он всегда отличен от нуля. Даже в том случае, когда относительно Земли движение является безвихревым ( $\vec{\Omega} = 0$ ),  $\vec{\Omega}_a \neq 0$ . Оценим вклад планетарного вихря и относительного вихря скорости в величину абсолютного вихря. Покажем это на примере вертикальных составляющих указанных векторов, которые отражают интенсивность вращательного движения в горизонтальной плоскости (касательной к земной поверхности). Составляющая планетарного вихря, перпендикулярная поверхности Земли, равна

$$f = 2\omega \sin \varphi, \quad (2.2.69)$$

где  $\varphi$  - географическая широта, на которой находится рассматриваемый элементарный объем жидкости. Величина  $f$  называется *параметром Кориолиса*.

Оценка вертикальной составляющей относительного вихря  $\Omega_z$  (завихренности) есть отношение характерной горизонтальной скорости  $U$  к характерному горизонтальному масштабу  $L$  согласно (2.2.34)

$$O(\Omega_z) = \frac{U}{L}. \quad (2.2.70)$$

Тогда порядок отношения завихренности к параметру Кориолиса равен

$$O\left(\frac{\Omega_z}{f}\right) = \frac{U}{fL} = \frac{U}{2\omega L \sin \varphi} = \varepsilon / \sin \varphi = \varepsilon_0. \quad (2.2.71)$$

Число  $\varepsilon_0$  будем называть *числом Кибеля*. Известно, что для крупномасштабных движений  $\varepsilon \ll 1$ . Тогда для внетропических широт, где  $O(\sin \varphi) \cong 1$ ,  $\varepsilon_0 \ll 1$ . Следовательно, для крупномасштабных движений основной вклад в формирование абсолютного вихря вносит планетарный вихрь. Непосредственное следствие этого факта состоит в том, что крупномасштабные движения практически всегда являются вихревыми и их завихренность в инерциальной системе отсчета в основном определяется планетарным вихрем. Подчеркнем, что введенные понятия вихревой линии, вихревой трубки, интенсивности вихревой трубки сохраняются применительно к абсолютному вихрю. Покажем связь между потоком относительного вихря скорости  $\Gamma$  и потоком абсолютного вихря  $\Gamma_a$ :

$$\Gamma_a = \int_S (\vec{\Omega}_a \cdot \vec{n}) ds = \int_S (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds + \int_S (2\vec{\omega} \cdot \vec{n}) ds = \Gamma + \int_S (2\vec{\omega} \cdot \vec{n}) ds. \quad (2.2.72)$$

Так как вектор  $\vec{\omega}$  постоянен в пространстве, то

$$\Gamma_a = \Gamma + 2\omega S_n, \quad (2.2.73)$$

где  $S_n$  - площадь проекции  $S$  на плоскость, перпендикулярную  $\vec{\omega}$ .

По теореме Стокса поток абсолютного вихря через незамкнутую поверхность  $S$ , ограниченную замкнутой кривой  $C$ , равен

$$\Gamma_a = \int_S (\vec{\Omega}_a \cdot \vec{n}) ds = \oint_C \vec{V}_I \cdot d\vec{r}. \quad (2.2.74)$$

Контурный интеграл от  $\vec{V}_I$  по кривой  $C$  называется абсолютной циркуляцией скорости  $\Gamma_C(\vec{V}_I)$ .

Таким образом,  $\Gamma_a = \Gamma_C(\vec{V}_I)$ , т.е. сохраняется вывод о том, что интенсивность вихревой трубки в поле абсолютного вихря равна циркуляции абсолютной скорости по замкнутому контуру, расположенному на поверхности трубки и один раз ее опоясывающему.

### 2.3. Уравнение неразрывности

Как указывалось ранее, величины, характеризующие состояние движущейся жидкости, являются функциями координат  $x, y, z$  и времени  $t$ . При этом вектор скорости элементарного объема жидкости  $\vec{V}(x, y, z, t)$  относится к данной точке пространства и моменту времени  $t$ , (эйлерово описание), а не к определенным частицам жидкости, передвигающимся со временем в пространстве (лагранжево описание). То же относится к величинам плотности  $\rho$  и давления  $P$ .

Вывод основных гидродинамических уравнений начнем с уравнения неразрывности, выражающего закон сохранения массы. Рассмотрим некоторый объем пространства  $\tau_0$ . Масса жидкости в этом объеме есть  $\int_{\tau_0} \rho d\tau$ . Через

элемент  $ds$  поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, в единицу времени протекает количество жидкости, равное  $\rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$ , где  $\vec{n}$  - единичный вектор, направленный по внешней нормали к элементу поверхности. Тогда  $\rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$  положительно, если жидкость вытекает из объема, и отрицательно, если жидкость втекает в него. Полное количество жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность  $S_0$ , ограничивающую объем  $\tau_0$ , равно

$$\int_{S_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds. \quad (2.3.1)$$

С другой стороны, изменение массы жидкости в объеме  $\tau_0$  в единицу времени есть

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_0} \rho d\tau. \quad (2.3.2)$$

Так как это изменение массы жидкости однозначно определяется притоком или оттоком ее через поверхность, то величины (2.3.1) и (2.3.2) равны между собой и противоположны по знаку:

$$\int_{S_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_0} \rho d\tau \quad (2.3.3)$$

Заменяя в (2.3.3) интеграл по поверхности интегралом по объему согласно формуле Остроградского – Гаусса

$$\int_{\tau_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} \right) d\tau = 0. \quad (2.3.4)$$

Поскольку равенство (2.3.4) выполняется для любого объема, то подынтегральное выражение равно нулю. Таким образом, получаем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0. \quad (2.3.5)$$

Вектор  $\vec{\Pi}_\rho = \rho \vec{V}$  называют *плотностью потока жидкости*. Его направление совпадает с направлением движения жидкости, а абсолютная величина определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к вектору скорости. Изменение плотности со временем в фиксированной точке пространства однозначно определяется дивергенцией плотности потока жидкости.

Уравнение неразрывности (2.3.5) можно переписать в другом виде, если раскрыть  $\operatorname{div} \rho \vec{V}$ . Действительно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Сумма первых двух слагаемых дает полную производную  $\frac{d\rho}{dt}$ . Поэтому

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (2.3.6)$$

Отсюда следует еще одно определение трехмерной дивергенции:

$$\operatorname{div} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (2.3.7)$$

как относительное изменение плотности за единицу времени в движущемся объеме.

Для *несжимаемой жидкости* ( $\rho = \text{const}$ ) получаем

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (2.3.8)$$

а для *стационарного* поля плотности

$$\operatorname{div} \rho \vec{V} = 0. \quad (2.3.9)$$

Заметим, что согласно (2.3.3) для несжимаемой жидкости поток скорости

$$\int_{S_0} \vec{V} \cdot \vec{n} ds = 0, \quad (2.3.10)$$

а для стационарной плотности поток количества движения



$$\int_{S_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (2.3.11)$$

через любую неподвижную замкнутую поверхность равны нулю.

## 2.4. Уравнение движения идеальной жидкости

В п. 2.2, посвященном кинематике, изучались движения элементарных объемов без исследования причин, их вызывающих. Теперь перейдем к изучению динамики, в которой рассматриваются причины движения жидкости, т. е. системы материальных точек, сплошным образом заполняющих некоторый объем, так что сколь угодно малая сила, действующая на эту систему, вызывает смещение ее точек друг относительно друга. Напомним, что *сила - векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на материальную точку или тело со стороны других тел или полей.*

При скольжении одного элементарного объема по другому наблюдается сопротивление со стороны жидкости. Свойства жидкости сопротивляться скольжению частиц называется внутренним трением или вязкостью. Хотя все реальные жидкости обладают вязкостью, в гидромеханике вводится понятие идеальной жидкости, в которой скольжение элементарных объемов друг относительно друга не встречает сопротивления со стороны жидкости. Использование понятия идеальной жидкости позволяет получить достаточно просто целый ряд фундаментальных закономерностей, применимых к решению многих прикладных задач. Естественно, что различие между идеальной и вязкой жидкостями проявляется только при движении.

Сконструируем уравнения движения для идеальной и вязкой жидкости. Уравнение движения является математическим выражением второго закона Ньютона для материального объемного элемента или материальной точки: производная по времени от импульса (количества движения)  $m\vec{V}$  равна сумме всех действующих сил  $\vec{F}$

$$\left[ \frac{d}{dt} (m\vec{V}_I) \right]_I = \vec{F}. \quad (2.4.1)$$

Для единичной массы

$$\left( \frac{d\vec{V}_I}{dt} \right)_I = \vec{F}, \quad (2.4.2)$$

т.е. ускорение материальной точки прямо пропорционально действующей на нее результирующей силе  $\vec{F}$  и совпадает с ней по направлению. Здесь индекс

$I$  означает, что скорость и ускорение, относятся к инерциальной системе отсчета.

Для получения уравнения относительного движения материальной точки в системе отсчета, жестко связанной с вращающейся Землей, подставим (2.1.16) в (2.4.2). Тогда левая часть (2.4.2) - сумма ускорений  $\left(\frac{dV_R}{dt}\right)_R$ , Кориолиса и центростремительного. Опуская индекс  $R$ , так как в дальнейшем будет рассматриваться движение только относительно Земли, получим уравнение движения в рассматриваемой неинерциальной системе. Если теперь ускорение Кориолиса и центростремительное ускорение перенести в правую часть этого уравнения, то они могут толковаться как силы, которые будут казаться наблюдателю во вращающейся системе отсчета некоторыми добавочными силами (силами инерции) - силой Кориолиса  $\vec{F}_K = -2\vec{\omega} \times \vec{V}$  и центробежной силой  $\vec{C} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ , отнесенных к единице массы и отличающихся от соответствующих ускорений только знаком:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_K + \vec{C}. \quad (2.4.3)$$

#### 2.4.1. Массовые и поверхностные силы

В геофизической гидродинамике используются уравнения движения сплошной среды для изучения атмосферных и океанических движений. При этом различают два типа внешних сил (массовые и поверхностные), действующих на объем  $\tau_0$ , ограниченный поверхностью  $S_0$ .

К массовым относятся силы, действующие на каждый элемент объема  $d\tau$ , и не зависящие от наличия или отсутствия частиц жидкости вне данного элемента объема. Если обозначить через  $\vec{F}_m$  вектор массовой силы, отнесенной к единице массы, то к элементу объема  $d\tau$  жидкости, плотность которой  $\rho$ , будет приложена массовая сила  $\vec{F}_m \rho d\tau$ . Главный вектор массовых сил, приложенных по всему объему  $\tau$  сплошной среды, и его компоненты выражаются интегралами:

$$\int_{\tau_0} \vec{F}_m \rho d\tau, \quad \int_{\tau_0} (F_m)_x \rho d\tau, \quad \int_{\tau_0} (F_m)_y \rho d\tau, \quad \int_{\tau_0} (F_m)_z \rho d\tau, \quad (2.4.4)$$

распространенными на объем  $\tau_0$ , где  $(F_m)_x$ ,  $(F_m)_y$ ,  $(F_m)_z$  - проекции вектора  $\vec{F}_m$  на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

К массовым силам относятся силы тяжести и инерции. Основной массовой силой, определяющей динамику объектов геофизической гидродинамики, является сила тяжести, которая равна векторной сумме двух сил - силы земного притяжения и центробежной силы. Сила земного притяжения является проявлением закона всемирного тяготения, согласно которому между двумя материальными точками действуют силы, прямо пропорциональные произведению масс этих точек и обратно пропорциональные квадрату расстояния между ними. Тяготение между телами осуществляется через гравитационное поле, которое, наряду с другими физическими полями и веществом, является одной из форм материи. На материальную точку с единичной массой в гравитационном поле Земли массы  $M$  действует сила, направленная к центру планеты и имеющая величину  $\gamma \frac{M}{r^2}$ , где  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки (начало координат совпадает с центром планеты),  $\gamma$  - гравитационная постоянная. Обозначим эту силу через  $\vec{G}_0 = -\gamma \frac{M \vec{r}}{r^2}$  (минус введен в связи с тем, что направление векторов  $\vec{G}_0$  и  $\vec{r}$  прямо противоположное).

Центробежная сила  $\vec{C}$ , которая на основании (2.1.17) равна  $\omega^2 \vec{r}_1$ , направлена по радиусу круга широты, проходящего через рассматриваемую точку.

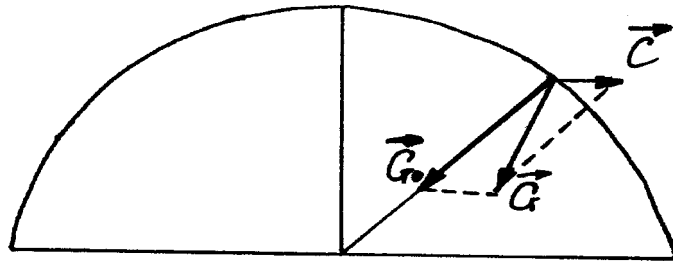


Рис. 2.16. Сила тяжести  $\vec{G}$  как векторная сумма сил земного притяжения  $\vec{G}_0$  и центробежной силы  $\vec{C}$ .

Обе силы  $\vec{G}_0$  и  $\vec{C}$  и, следовательно, их векторная сумма - сила тяжести  $\vec{G} = \vec{G}_0 + \vec{C}$  (рис. 2.16) - являются *потенциальными*, так как работа этих сил при перемещении элементарного объема зависит только от начального и конечного положений его в пространстве. Потенциальный характер силы тяжести позволяет ввести скалярный параметр - *потенциал*  $\Phi$ , связанный с  $\vec{G}$  соотношением

$$\vec{G} = -\nabla\Phi. \quad (2.4.5)$$

В геофизической гидродинамике потенциал  $\Phi$  называют *геопотенциалом*. На рис. 2.16 невозможно выдержать правильное соотношение величин  $\vec{G}$  и  $\vec{C}$ , так как центробежная сила слишком мала по сравнению с силой земного притяжения. Сила тяжести максимальна на полюсах и минимальна на экваторе. Однако это различие не превышает 0,55%. Сила тяжести также слабо зависит от расстояния между рассматриваемой точкой в атмосфере или океане и уровнем моря, так как это расстояние намного меньше радиуса Земли. Сила тяжести некоторого объема жидкости равна сумме сил тяжести всех материальных точек, входящих в его состав. Точку приложения этой силы называют центром тяжести. Центр тяжести произвольного объема совпадает с его центром инерции (центром масс).

*Свободным падением* называется движение тела, проходящее под действием силы тяжести. Ускорение свободного падения  $\vec{g} \equiv \vec{G}$  одинаково для всех тел и также слабо зависит от географической широты и высоты или глубины, отсчитываемой от уровня моря. В геофизической гидродинамике в подавляющем большинстве случаев можно пренебречь зависимостью  $g$  от широты и высоты (глубины). Обычно принимается, что  $g$  постоянная величина, равная  $9.81 \text{ м/с}^2$ .

К другому классу сил, действующих на рассматриваемый объем жидкости  $\tau_0$ , относятся поверхностные силы, характеризующие взаимодействие

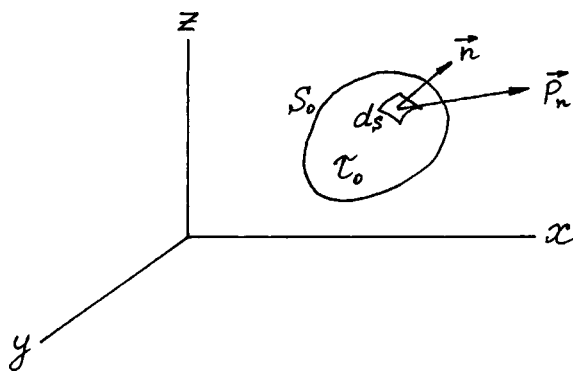


Рис. 2.17. Определение поверхностной силы.

жидкости в указанном объеме с окружающей средой. Эти силы обусловлены взаимодействием частиц, лежащих снаружи и на самой поверхности  $S_0$ , ограничивающей объемом  $\tau_0$ , и приложены к поверхностным частицам объема  $\tau_0$ . К поверхностным силам относится, например, сила давления.

Если через  $\vec{P}_n$  обозначить вектор поверхностной силы, отнесенной к единице площади, то к элементарной площадке  $ds$  поверхности  $S_0$  будет приложена обусловленная внешними частицами сила  $\vec{P}_n ds$  (рис. 2.17). Величина и направление вектора  $\vec{P}_n$  зависят от ориентировки площадки  $ds$ , т.е. от направления внешней нормали  $\vec{n}$  к данной площадке. Разумеется, что, кроме того, вектор  $\vec{P}_n$  может зависеть от координат точки, находящейся в центре  $ds$ , к которой можно отнести  $\vec{P}_n$ . Если через  $-\vec{n}$  обозначить противоположное

направление нормали внутрь поверхности  $S_0$ , то это направление окажется внешней нормалью для той же площадки  $ds$  по отношению к наружным частям жидкости. Согласно нашему обозначению, поверхностная сила, действующая на элемент площадки  $ds$  наружного слоя частиц и обусловленная частицами, лежащими внутри объема  $\tau_0$ , будет  $\vec{P}_{-n}$ . В силу принципа равенства действия и противодействия получим соотношение

$$\vec{G}_0 \vec{P}_{-n} = -\vec{P}_n . \quad (2.4.6)$$

Направление вектора поверхностной силы  $\vec{P}_n$  вообще может составлять некоторый угол с внешней нормалью  $\vec{n}$ . Проекция  $\vec{P}_n$  на внешнюю нормаль называется *нормальным растяжением* или *нормальным давлением*, смотря по тому, будет ли  $\vec{P}_n$  составлять острый или тупой угол с внешней нормалью. Проекция же  $\vec{P}_n$  на площадку  $ds$  носит название *косого напряжения* или, иначе, силы трения.

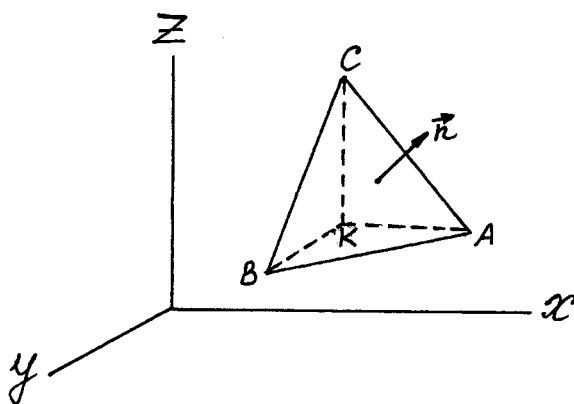
Главный вектор поверхностных сил, приложенных к объему  $\tau_0$ , выразится интегралом по всей замкнутой поверхности  $S_0$

$$\int_{S_0} \vec{P}_n ds . \quad (2.4.7)$$

Если теперь в (2.4.3) под  $\vec{F}$  понимать сумму  $\vec{F}_p + \vec{G}_0$ , где  $\vec{F}_p$  - поверхностная сила, то с учетом  $\vec{G} = \vec{G}_0 + \vec{C}$  можно записать

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_k + \vec{G} . \quad (2.4.8)$$

В идеальной жидкости не проявляются силы трения, и малейшее нормальное



растяжение влечет разрыв сплошности жидкости. Следовательно, поверхностные силы, приложенные к элементам поверхности  $ds$  объема  $\tau_0$  идеальной жидкости, представляют собой нормальные давления, направленные внутрь объема. Иначе говоря, вектор  $\vec{P}_n$  направлен по внутренней нормали к элементу  $ds$ .

Рис.2.18. Тетраэдр с гранями, параллельными координатным плоскостям.

Покажем, что для идеальной жидкости величина  $\vec{P}_n$  не зависит от ориентировки площадки  $ds$ . Для этого рассмотрим в жидкости элементарный объем тетраэдра  $KABC$  (рис. 2.18), три грани которого  $KBC$ ,  $KAC$  и  $KAB$  параллельны координатным плоскостям, так что внешние нормали к этим граням направлены соответственно противоположно осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Обозначим далее через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  косинусы углов, образованных с осями координат внешней нормалью  $Dn$  к четвертой наклонной грани  $ABC$ . Пусть, наконец, площадь грани  $ABC$  есть  $ds$ , тогда площади граней  $KBC$ ,  $KAC$ ,  $KAB$ , являясь проекциями  $ds$ , будут соответственно  $\alpha ds$ ,  $\beta ds$ ,  $\gamma ds$ .

Напомним **принцип Даламбера**, согласно которому в каждое мгновение движения любого элементарного объема все силы, приложенные к нему, включая и даламберову силу инерции  $\vec{I}_D = -m \frac{d\vec{V}}{dt}$ , взаимно уравниваются. Указанную силу  $\vec{I}_D$  не следует смешивать с ранее введенными силами инерции  $\vec{F}_k$  и  $\vec{C}$ . Учитывая (2.4.8) и применяя принцип Даламбера к элементарному объему  $d\tau$  тетраэдра, получим

$$\left( \vec{F}_m - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \rho d\tau + \vec{F}_p ds = 0, \quad (2.4.9)$$

где

$$F_m = \vec{F}_k + \vec{G},$$

$$\vec{F}_p ds = \vec{P}_n ds + \vec{P}_{-x} \alpha ds + \vec{P}_{-y} \beta ds + \vec{P}_{-z} \gamma ds, \quad (2.4.10)$$

Заметим, что в силу (2.4.6)

$$\vec{P}_{-x} = -\vec{P}_x, \quad \vec{P}_{-y} = -\vec{P}_y, \quad \vec{P}_{-z} = -\vec{P}_z, \quad (2.4.11)$$

$$d\tau = \frac{1}{3} h ds, \quad (2.4.12)$$

где  $h$  - высота тетраэдра.

Подставляя второе соотношение (2.4.10) и (2.4.11) - (2.4.12) в (2.4.9), после сокращения на  $ds$  получим

$$\frac{1}{3} \left( \vec{F}_m - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \rho h - \alpha \vec{P}_x - \beta \vec{P}_y - \gamma \vec{P}_z + \vec{P}_n = 0, \quad (2.4.13)$$

откуда, переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , мы приходим к *основному свойству* поверхностных сил:

$$\vec{P}_n = \alpha \vec{P}_x + \beta \vec{P}_y + \gamma \vec{P}_z. \quad (2.4.14)$$

Таким образом соотношение (2.4.14) показывает, что вектор  $\vec{P}_n$  при произвольной ориентировке внешней нормали  $\vec{n}$  может быть определен, если заданы три основных вектора  $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ , выражающих поверхностные силы для площадок, внешние нормали которых параллельны и одинаково направлены с осями  $Ox, Oy, Oz$ .

В случае идеальной жидкости вектора  $\vec{P}_n, \vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$  будут направлены противоположно внешним нормальям  $Dn, Ox, Oy, Oz$ . Проектируя (2.4.14) последовательно на  $Ox, Oy, Oz$ , получаем:

$$-P_n \alpha = -\alpha P_x, \quad -P_n \beta = -\beta P_y, \quad -P_n \gamma = -\gamma P_z, \quad (2.4.15)$$

откуда

$$P_n = P_x = P_y = P_z. \quad (2.4.16)$$

Таким образом, величина нормального давления для идеальной жидкости не зависит от ориентировки площадки, к которой оно приложено. Вследствие этого можно отбросить индексы в (2.4.16), и не указывать ориентировки площадки, помня, что гидродинамическое давление направлено по внутренней нормали к площадке.

## 2.4.2. Формы уравнений движения идеальной жидкости

Уравнение движения идеальной жидкости может быть легко выведено на основе принципа Даламбера. Рассмотрим произвольный объем  $\tau_0$  движущейся идеальной жидкости, ограниченной поверхностью  $S_0$ . Главный вектор всех массовых сил, приложенный к объему, заключенному внутри поверхности  $S_0$ , выражается первым интегралом (2.4.4)

$$\int_{\tau_0} \vec{F}_m \rho d\tau. \quad (2.4.17)$$

Главный вектор всех поверхностных сил, приложенных к частицам жидкости, расположенным на поверхности  $S_0$  объема  $\tau_0$ , выражается интегралом (2.4.7)

$$\int_{S_0} \vec{P}_n ds. \quad (2.4.18)$$

Наконец, главный вектор даламберовой силы инерции выражается интегралом

$$-\int_{\tau_0} \frac{d\vec{V}}{dt} \rho d\tau. \quad (2.4.19)$$

Так как в (2.4.18) вектор гидродинамического давления  $\vec{P}_n$  направлен по внутренней нормали к поверхности  $S_0$ , то, вводя в рассмотрение орт  $\vec{n}$  внешней нормали, имеем

$$\vec{P}_n = -P\vec{n}. \quad (2.4.20)$$

Согласно принципу Даламбера сумма главных векторов всех перечисленных сил равна нулю. С учетом (2.4.20) получаем

$$\int_{\tau_0} \left( \vec{F}_m - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \rho d\tau - \int_{S_0} P\vec{n} ds = 0. \quad (2.4.21)$$

Применяя к последнему интегралу преобразование Остроградского-Гаусса, получаем

$$\int_{\tau_0} \left[ \left( \vec{F}_m - \frac{d\vec{V}}{dt} \right) \rho - \text{grad} P \right] d\tau = 0. \quad (2.4.22)$$

В силу произвольности рассматриваемого объема  $\tau_0$  подинтегральное выражение должно быть равно нулю в каждой точке жидкости и в любой момент времени. Таким образом приходим к основному уравнению движения идеальной жидкости в векторной форме:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad} P \quad (2.4.23)$$

или в проекциях:

$$\frac{du}{dt} = (F_m)_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = (F_m)_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{dw}{dt} = (F_m)_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (2.4.24)$$

Проекции ускорений, стоящие в левых частях уравнений (2.4.24), могут быть выражены по кинематическим формулам (2.2.12) в переменных Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.4.25)$$



Подставляя (2.4.25) в (2.4.24), получаем гидродинамические уравнения в форме Эйлера

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad} P \quad \text{- векторная форма,}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} u &= (F_m)_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} v &= (F_m)_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} w &= (F_m)_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad \text{скалярная форма.} \quad (2.4.26)$$

Проектируя на координатные оси обе части векторного уравнения (2.4.23) и полагая, в соответствии с методом Лагранжа (2.2.6)

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (2.4.27)$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} (F_m)_x - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ (F_m)_y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ (F_m)_z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

в которых  $x, y, z$  следует рассматривать согласно (2.2.4) как искомые функции времени и начальных координат  $a, b, c$ .

В последнем уравнении выразим  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$  через  $\frac{\partial P}{\partial a}, \frac{\partial P}{\partial b}, \frac{\partial P}{\partial c}$ , чтобы в (2.4.28) фигурировали производные только по известным аргументам.

Умножив (2.4.28) соответственно на  $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$  и сложив, получим в правой части:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial a}. \quad (2.4.29)$$

Аналогично после умножения (2.4.28) на  $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$  и сложения получим в правой части  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial b}$ , а после умножения на  $\frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}$  и сложения

$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial c}$ . Таким образом, мы приходим к следующим уравнениям движения в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \left[ (F_m)_x - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right] \frac{\partial x}{\partial a} + \left[ (F_m)_y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \frac{\partial y}{\partial a} + \left[ (F_m)_z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] \frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial a}, \\ \left[ (F_m)_x - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right] \frac{\partial x}{\partial b} + \left[ (F_m)_y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \frac{\partial y}{\partial b} + \left[ (F_m)_z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] \frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial b}, \\ \left[ (F_m)_x - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right] \frac{\partial x}{\partial c} + \left[ (F_m)_y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \frac{\partial y}{\partial c} + \left[ (F_m)_z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right] \frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial c}. \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

Для решения различных прикладных задач геофизической гидродинамики, связанных с описанием динамики крупномасштабных атмосферных и океанических процессов, используется форма уравнений движения, в которой фигурируют кинематические характеристики скорости. Эта форма может быть получена, если первое уравнение (2.4.26) преобразовать с помощью известного из векторного анализа соотношения

$$\frac{1}{2} \text{grad} V^2 = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{V} \times \text{rot} \vec{V}. \quad (2.4.31)$$

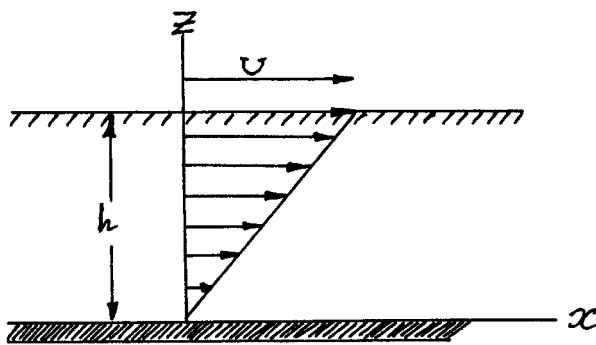
Тогда уравнения (2.4.26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) - \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} &= \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad} P, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) - (v \Omega_z - w \Omega_y) &= (F_m)_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) - (w \Omega_x - u \Omega_z) &= (F_m)_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) - (u \Omega_y - v \Omega_x) &= (F_m)_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

Эти уравнения называются *уравнениями движения в форме Громеко - Лэмба*.

## 2.5. Движение вязкой жидкости

Как указывалось ранее, все реальные жидкости являются в той или иной степени вязкими. Другими словами, они обладают свойством внутреннего трения. Наряду с поверхностными силами, представляющими собой нормальные давления, направленные внутрь объема, на поверхность выделенного объема действуют и касательные силы, смысл которых легко понять из следующего примера.



Представим себе две параллельные пластинки, между которыми движется жидкость. Нижняя пластинка удерживается неподвижно, а верхняя движется с постоянной скоростью  $U$ .

Рис. 2.19. Распределение скорости потока между двумя пластинками

Расстояние между пластинками равно  $h$ . В результате мы получим следующее распределение скоростей жидкости: слой жидкости, примыкающий к нижней пластинке, будет находиться в покое, слой жидкости, примыкающий к верхней пластинке, будет иметь ту же скорость, что и сама пластинка (рис. 2.19). Любой промежуточный слой, находящийся на расстоянии  $z$  от неподвижной пластинки, будет двигаться со скоростью, с достаточной степенью приближения описываемой формулой

$$u = U \frac{z}{h} \quad (2.5.1)$$

Естественно, для поддержания такого установившегося движения к верхней пластинке должна быть приложена сила, действующая в направлении движения пластинки, к нижней - такая же сила, но противоположно направленная. Это и есть силы внутреннего трения или молекулярного касательного напряжения.

Согласно закону Ньютона касательное напряжение трения между двумя слоями прямолинейно движущейся вязкой жидкости пропорционально отнесенному к единице длины изменению скорости по нормали к направлению движения. В рассматриваемом случае для одномерного движения в плоскости  $xOz$  касательное напряжение равно

$$\tau_{xz} = \mu \frac{du}{dz}. \quad (2.5.2)$$

Это и есть сила приложенная к верхней и нижней пластинкам, равная по модулю  $\mu U / h$ . Коэффициент пропорциональности  $\mu$  в (2.5.2), называемый динамическим коэффициентом вязкости, не зависит от характера движения, а определяется лишь физическими свойствами жидкости и её температурой (влияние давления практически ничтожно). Отношение динамического коэффициента вязкости к плотности жидкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.5.3)$$

называется кинематическим коэффициентом вязкости.

Таким образом, *жидкость называется вязкой*, если поверхностные силы, приложенные к элементам поверхности любого объема жидкости, имеют в общем случае нормальные и касательные составляющие.

### 2. 5. 1. Тензор напряжений

Рассмотрим поверхностные силы, появляющиеся при движении вязкой жидкости. Как и в случае идеальной жидкости, вырежем внутри жидкости объем  $\tau_0$  при помощи замкнутой поверхности  $S_0$  и рассмотрим элемент  $ds$  этой поверхности. Обозначим через  $\vec{n}$  направление внешней нормали к этому элементу. Тогда действие частиц жидкости, расположенных с внешней стороны элемента  $ds$ , на частицы жидкости, прилегающие к этому элементу с внутренней стороны, есть действие поверхностной силы  $\vec{P}_n ds$ . Поступая также как в случае идеальной жидкости, т.е. применяя принцип Даламбера к выделенному тетраэдру  $\tau_0$ , мы получим соотношение, совпадающее с (2.4.14),

$$\vec{P}_n = \alpha \vec{P}_x + \beta \vec{P}_y + \gamma \vec{P}_z. \quad (2.5.4)$$

Вектора -  $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$  - поверхностные силы, действующие на площадки, ориентированные перпендикулярно координатным осям  $Ox, Oy, Oz$ .

Проектируя соотношение (2.5.4) на оси координат, найдем составляющие векторов  $\vec{P}_x (P_{xx}, P_{xy}, P_{xz}), \vec{P}_y (P_{yx}, P_{yy}, P_{yz}), \vec{P}_z (P_{zx}, P_{zy}, P_{zz})$ . Составленная из компонентов этих векторов таблица из девяти величин

$$P = \begin{Bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{Bmatrix} \quad (2.5.5)$$

определяет тензор, который называется тензором напряжений.

Диагональные члены этого тензора являются нормальными (давлениями), а недиагональные - касательными напряжениями.

Сформулируем два основных свойства тензора напряжений. Во - первых, тензор напряжений является симметричным ( $P_{xy} = P_{yx}$ ,  $P_{xz} = P_{zx}$ ,  $P_{yz} = P_{zy}$ ), во - вторых, сумма нормальных напряжений на три взаимно перпендикулярные площадки ( $P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}$ ) не зависит от ориентации этих площадок. Первое свойство тензора напряжений вытекает из теоремы о взаимности касательных напряжений: если в некоторой точке сплошной среды выбрать две взаимно перпендикулярные элементарные площадки, то проекции напряжений, приложенных к каждой из площадок, на ось, перпендикулярную к другой площадке, будут равны между собой. Второе свойство тензора напряжений по сути выражает инвариантность сумм нормальных напряжений. Указанные свойства тензора напряжений вытекают из условий равновесия сплошной среды и теоремы моментов, приложенной к движению жидкого тетраэдра, согласно которым главный вектор ( $\int_{\tau_0} \rho \vec{F} d\tau$ ) и главный момент ( $\int_{\tau_0} \vec{r} \times \rho \vec{F} d\tau$ ) всех сил относительно какой-либо точки, приложенных к объему, включая и даламберову силу инерции, должны равняться нулю.

Для установления связи между тензором напряжений (2.5.5) и тензором скоростей деформации (2.2.30) воспользуемся двумя естественными допущениями.

1. Составляющие тензора напряжений при отсутствии вязкости должны переходить в соответствующие составляющие тензора напряжений идеальной жидкости. Следовательно, их можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_{xx} &= -P + \tau_{xx}, & P_{yy} &= -P + \tau_{yy}, & P_{zz} &= -P + \tau_{zz}, \\ P_{xy} &= \tau_{xy}, & P_{xz} &= \tau_{xz} & & \text{и т.д.} \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Величины  $\tau$  с индексами отличны от нуля только в случае вязкой жидкости согласно ранее приведенному определению.

2. Величины  $\tau$  с индексами являются линейными функциями от составляющих тензора скоростей деформации, причем коэффициенты этих функций не зависят от выбора неподвижной прямолинейной прямоугольной системы координат. Второе допущение является обобщением закона Ньютона на трехмерное пространство для изотропных вязких жидкостей, свойства которых одинаковы в любом направлении.

Наиболее общий вид линейной связи между тензором напряжений  $P$  (2.5.5) и тензором скоростей деформации  $S$  (2.2.30) выражается формулой

$$P = aS + b\varepsilon, \quad (2.5.7)$$

где  $a$  и  $b$  - скаляры,  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  - компоненты тензора деформации,  $\varepsilon$  - единичный тензор (тензорная единица), определяемый в любой системе координат своими компонентами, являющимися символом Кронекера,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, (i, j = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Индекс  $i$  соответствует оси  $x$ ,  $2$  - оси  $y$ ,  $3$  - оси  $z$ .

По условию линейности связи (2.5.7) величина  $a$  представляет собой физическую константу среды, одинаковую при любых ее движениях и равную удвоенному динамическому коэффициенту вязкости, как следует из закона Ньютона. Действительно,

$$\tau_{xz} = aS_{xz} + b\varepsilon_{xz} = a \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (2.5.9)$$

так как  $\varepsilon_{13} = 0$ . В случае одномерного движения  $\tau_{xz} = \mu \frac{du}{dz}$ . Сравнивая (2.5.9) с (2.5.2), получаем  $a = 2\mu$ .

Для определения величины  $b$  применим соотношение (2.5.7) для линейных инвариантов тензоров  $P$  и  $S$ . Линейными инвариантами указанных тензоров являются суммы их диагональных членов, т.е.

$$P_{11} + P_{22} + P_{33} \text{ и } S_{11} + S_{22} + S_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{V} \quad (2.5.10)$$

Укажем, что соответствующая величина для единичного тензора  $\varepsilon$  равна  $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3$ .

Приравнявая линейные инварианты тензоров  $P$  и  $S$  получим согласно (2.5.7) выражение для определения величины  $b$

$$P_{11} + P_{22} + P_{33} = 2\mu \operatorname{div} \vec{V} + 3b, \quad (2.5.11)$$

откуда

$$b = \frac{1}{3} (P_{11} + P_{22} + P_{33}) - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{V}. \quad (2.5.12)$$

Обобщим понятие давления, введенное в теории идеальной жидкости, где  $P_{11} = P_{22} = P_{33} = -P$ . Примем в качестве простейшего допущения, что и в случае вязкой жидкости взятое с обратным знаком среднее арифметическое

трех нормальных напряжений, приложенных к взаимно перпендикулярным площадкам в данной точке среды, есть давление в этой точке

$$-\frac{1}{3}(P_{11} + P_{22} + P_{33}) = P. \quad (2.5.13)$$

Это предположение является дополнительной гипотезой к обобщенному закону Ньютона, так как, исходя из общих гидродинамических соображений, нельзя доказать, что определенная таким образом скалярная величина  $P$  будет действительно той термодинамической характеристикой жидкости или газа, которая, например, в случае совершенного газа, будет связана с плотностью и температурой формулой Клапейрона-Менделеева. Правильность принятой гипотезы (2.5.13) оправдывается практикой почти во всех областях применения теории движения вязкой жидкости. Однако существуют такие сложные процессы движения, для описания которых необходимо уточнение этой закономерности.

В качестве более общего допущения можно принять, что взятое с обратным знаком среднее арифметическое трех нормальных напряжений отличается от только что определенного давления в данной точке на величину, пропорциональную относительной скорости объемного расширения  $div \vec{V}$ . При этом вместо равенства (2.5.13) будем иметь

$$-\frac{1}{3}(P_{11} + P_{22} + P_{33}) = P - \mu' div \vec{V}, \quad (2.5.14)$$

где  $\mu'$  - так называемый *второй коэффициент вязкости*.

Исходя из полученных соотношений (2.5.12) - (2.5.14), обобщенный закон Ньютона (2.5.7) представится в окончательном виде

$$P = 2\mu S - (P + \frac{2}{3}\mu div \vec{V} - \mu' div \vec{V})\epsilon. \quad (2.5.15)$$

Учитывая важность полученных соотношений для приложения теории вязкой жидкости, перечислим еще раз основные физические соображения, на основе которых установлен общий вид тензора вязких напряжений.

Прежде всего укажем, что величины  $\tau_{ij}$  характеризуют только вязкие напряжения, которые возникают в случаях, когда различные участки вязкой жидкости движутся с различной скоростью, так что имеет место движение частей жидкости друг относительно друга. Поэтому вязкие напряжения  $\tau_{ij}$  должны зависеть от пространственных производных скорости. При этом, если градиенты скорости не очень велики, то можно считать, что вязкие напряжения зависят только от первых производных скорости и эту зависимость  $\tau_{ij}$

от  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  можно считать приближенно линейной. Когда вся жидкость как целое совершает равномерное вращение, то в ней внутреннего трения не наблюдается и, следовательно, величины  $\tau_{ij}$  равны нулю и должны зависеть от таких линейных комбинаций производных, которые обращаются в нуль при  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , где  $\vec{\omega}$  - угловая скорость вращения жидкости. Поэтому  $\tau_{ij}$  должны выражаться через симметричные комбинации вида  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ , входящие в тензор скоростей деформации  $S$ .

Изложенные физические соображения являются обоснованием полученной зависимости тензора напряжений  $P$  от кинематических характеристик (2.5.15). Если составляющие тензора напряжений  $P$  на основании (2.5.6) записать в виде

$$P_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (2.5.16)$$

то

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \mu' \delta_{ij} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad (2.5.17)$$

где

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Подчеркнем, что жидкости, в которых напряжения связаны со скоростями деформации по обобщенному закону Ньютона, называются *ньютоновскими*.

## 2.5.2. Различные формы уравнения движения вязкой жидкости

Для получения уравнений движения вязкой жидкости необходимо в уравнения движения идеальной жидкости ввести дополнительные члены, описывающие эффект внутреннего трения. С этой целью выполним преобразования ранее полученного уравнения движения в форме Эйлера (2.4.26). Запишем это уравнение в тензорных обозначениях:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) = \rho (F_m)_i - \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad (2.5.18)$$

где повторяющийся индекс  $\alpha$  означает суммирование от 1 до 3, а индекс  $m$  в дальнейшем будет опущен.

Воспользуемся уравнением неразрывности (2.3.5) в виде



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (2.5.19)$$

Умножим левую и правую части (2.5.19) на  $v_i$  и сложим с (2.5.18). Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho F_i - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho v_i v_\alpha) - \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (2.5.20)$$

Так как

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \delta_{i\alpha} \frac{\partial P}{\partial x_\alpha}, \quad (2.5.21)$$

то уравнение для изменения потока импульса в компактной форме может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + \rho F_i, \quad (2.5.22)$$

где элементы тензора

$$\Pi_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j \quad (2.5.23)$$

(индексы  $\alpha, \beta$  будем использовать только в операции суммирования.). Тензор  $\Pi$  очевидно симметричен.

Для выяснения физического смысла  $\Pi_{ij}$  ограничимся случаем отсутствия массовых сил и проинтегрируем уравнение (2.5.22) по произвольному объему  $\tau$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_0} \rho v_i d\tau = - \int_{\tau_0} \frac{\partial \Pi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} d\tau. \quad (2.5.24)$$

Если в (2.5.24) справа перейти к интегралу по поверхности с использованием формулы Остроградского-Гаусса, обобщенной на случай тензорных функций, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau_0} \rho v_i d\tau = - \int_{S_0} \Pi_{i\alpha} ds_\alpha. \quad (2.5.25)$$

Здесь слева стоит изменение в единицу времени  $i$ -й компоненты импульса в рассматриваемом объеме. Поэтому стоящий справа интеграл по поверхности есть количество этого импульса, вытекающего в единицу времени через ограничивающую объем поверхность. Следовательно,  $\Pi_{i\alpha} ds_\alpha$  есть  $i$ -я компонента импульса, протекающего через элемент  $ds$  поверхности. Если написать  $ds_\alpha$  в виде  $n_\alpha ds$  ( $ds$  - абсолютная величина элемента поверхности,  $\vec{n}$  - единичный вектор внешней нормали к этому элементу), то мы найдем, что  $\Pi_{i\alpha} n_\alpha$  есть поток  $i$ -й компоненты импульса, отнесенный к единице площади

поверхности. Согласно (2.5.23),  $\Pi_{i\alpha}n_\alpha = Pn_i + \rho v_i v_\alpha n_\alpha$ ; это выражение может быть записано в векторном виде  $P\vec{n} + \rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})$ . Тогда  $\Pi_{ij}$  есть  $i$ -я составляющая импульса, протекающего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную оси  $x_j$ . Тензор  $\Pi_{ij}$  называется *тензором плотности потока импульса*.

*Поток импульса*, определяемый тензором  $\Pi_{ij}$ , представляет собой чисто обратимый перенос импульса, связанный с механическим перемещением различных участков жидкости и с действующими в жидкости силами давления.

Вязкость проявляется в наличии дополнительного необратимого переноса импульса из мест с большей в места с меньшей скоростью. Поэтому уравнение вязкой жидкости можно получить, прибавив к "идеальному" потоку импульса (2.5.23) дополнительный член  $\tau_{ij}$ , определяющий "необратимый" вязкий перенос импульса. Тогда тензор плотности потока импульса для вязкой жидкости запишется в виде

$$\Pi_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \tau_{ij}. \quad (2.5.26)$$

Уравнение движения вязкой жидкости теперь можно получить путем прибавления выражения  $\frac{\partial \tau_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}$  к правой части уравнения (2.5.18) или путем подстановки (2.5.26) в (2.5.22):

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{i\alpha}}{\partial x_\alpha},$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{i\alpha} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu' \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right). \quad (2.5.27)$$

В большинстве случаев изменение коэффициентов вязкости при изменении пространственных координат незначительно, и поэтому  $\mu$  и  $\mu'$  можно считать постоянными. Тогда уравнение движения для вязкой жидкости можно представить в векторной форме

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = \rho \vec{F} - \text{grad}P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \left( \mu' + \frac{\mu}{3} \right) \text{grad} \text{div} \vec{V}. \quad (2.5.28)$$

Это уравнение называется *уравнением движения в форме Навье-Стокса*.

Перепишем уравнение (2.5.28) с учетом выражений для  $\vec{F}$  и малости последнего члена:

$$\rho \left( \frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{V} \right) = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.5.28a)$$

где  $\Phi$  - потенциал силы тяжести

Учтем, что

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

и

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = (\nabla \times \vec{V}) \times \vec{V} + \nabla \frac{V^2}{2} = \vec{\Omega} \times \vec{V} + \nabla \frac{V^2}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (2\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \times \vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \left( \Phi + \frac{V^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \vec{V}. \quad (2.5.29)$$

где

$$\nabla^2 \vec{V} = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}.$$

Представим уравнение движения для вязкой несжимаемой жидкости в форме Громеко-Лэмба. С этой целью воспользуемся соотношениями векторного анализа

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{V} &= \text{grad div} \vec{V} - \text{rot rot} \vec{V}, \\ (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= \text{rot} \vec{V} \times \vec{V} + \text{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

Для несжимаемой жидкости ( $\text{div} \vec{V} = 0$ )

$$\nabla^2 \vec{V} = -\text{rot rot} \vec{V}. \quad (2.5.31)$$

Если учесть, что массовая сила  $F$  есть сумма сил тяжести и Кориолиса, а сила тяжести имеет потенциал  $\Phi$ ,  $\text{rot} \vec{V} = \vec{\Omega}$ , то уравнение (2.5.29) в системе координат, связанной с вращающейся Землей, примет следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}) \times \vec{V} = -\text{grad} \left( \frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{P}{\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho} \text{rot} \vec{\Omega}. \quad (2.5.32)$$

Таким образом получено уравнение движения для вязкой несжимаемой жидкости в форме Громеко-Лэмба, используемое в задачах геофизической гидродинамики.



вращений энергии. В основе термодинамического метода лежат первый и второй законы термодинамики для макроскопических неподвижных и движущихся систем.

Первый закон термодинамики по сути выражает закон сохранения и превращения энергии и для неподвижной системы гласит, что количество теплоты  $Q$ , сообщенное системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии  $E$  и на полную работу  $A$ , совершенную системой против внешних сил. Для элементарного объема жидкости первый закон термодинамики может быть записан в виде

$$\delta Q = \delta E + \delta A. \quad (3.1.1)$$

Под *внутренней энергией* будем понимать энергию системы, зависящую только от ее термодинамического состояния и включающую энергию хаотического (теплового) движения всех микрочастиц системы (молекул, атомов, ионов и т.д.), энергию взаимодействия этих частиц и т.д.

*Первый закон термодинамики*, выражающий всеобщий закон сохранения и превращения энергии, не позволяет определить направление протекания термодинамических процессов. Для этой цели используется *второй закон термодинамики*, который гласит что невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от менее к более нагретому телу. Для математической формулировки второго закона термодинамики вводится понятие энтропии. Энтропией  $\eta$  называется функция состояния системы, дифференциал которой в элементарном обратимом процессе равен отношению бесконечно малого количества теплоты, сообщенного системе, к абсолютной температуре последней:

$$d\eta = \frac{\delta Q}{T}. \quad (3.1.2)$$

Под *элементарным* будем понимать процесс, приводящий к изменению характеристик системы на бесконечно малые величины.

Для произвольного элементарного процесса

$$d\eta \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (3.1.3)$$

где знак равенства относится к обратимым процессам, а знак неравенства - к необратимым. Соотношение (3.1.3) является математической записью второго закона термодинамики, который утверждает, что энтропия изолированной системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать.

Объединяя первый (3.1.1) и второй (3.1.3) законы, получаем основное соотношение термодинамики

$$Td\eta \geq dE + \delta A. \quad (3.1.4)$$

Во многих приложениях геофизической гидродинамики используется *основное соотношение термодинамики для обратимых процессов*

$$Td\eta = dE + \delta A. \quad (3.1.5)$$

Здесь  $\delta A = Pd(1/\rho) + \delta A_*$ , т.е. сумма работ, совершаемых системой против сил внешнего давления ( $Pd(1/\rho)$ ) и других внешних сил ( $\delta A_*$ ).

Характеристика термодинамического состояния среды осуществляется с помощью характеристических функций и термодинамических потенциалов. Характеристической функцией называется функция состояния системы, посредством которой и ее производных могут быть явно выражены термодинамические свойства системы. Термодинамический потенциал  $\phi$  есть характеристическая функция, убыль которой в обратимом процессе, протекающем при неизменных значениях определенной пары термодинамических параметров ( $T$  и  $1/\rho$ ,  $T$  и  $P$ ,  $\eta$  и  $P$ ,  $\eta$  и  $1/\rho$  и т.д.) равна разности полной работы, произведенной системой, и работы против внешнего давления.

На основании (3.1.5) в качестве термодинамического потенциала введем функцию  $\phi = \phi(T, P, s)$  (*термодинамический потенциал Гиббса*), дифференциал которой определяется формулой

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial T} dT + \frac{\partial\phi}{\partial P} dP + \frac{\partial\phi}{\partial s} ds. \quad (3.1.6)$$

Для выяснения физического смысла коэффициентов (3.1.6) воспользуемся известной из физики связью между термодинамическим потенциалом Гиббса и внутренней энергией

$$E = \phi - P/\rho + T\eta. \quad (3.1.7)$$

Продифференцировав (3.1.7) и подставив вместо  $d\phi$  выражение (3.1.6), получим

$$dE = \left( \frac{\partial\phi}{\partial T} + \eta \right) dT + \left( \frac{\partial\phi}{\partial P} - \frac{1}{\rho} \right) dP + \frac{\partial\phi}{\partial s} ds - Pd\left( \frac{1}{\rho} \right) + Td\eta. \quad (3.1.8)$$

С учетом (3.1.5) найдем выражения для коэффициентов в формуле (3.1.6):

$$\frac{\partial\phi}{\partial T} = -\eta - \text{энтропия}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial P} = \frac{1}{\rho} - \text{удельный объем},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \mu - \text{химический потенциал термодинамически активной примеси.}$$

Запишем дифференциалы от энтропии и плотности

$$d\eta = \frac{\partial\eta}{\partial T}dT + \frac{\partial\eta}{\partial P}dP - \frac{\partial\eta}{\partial s}ds,$$

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial T}dT + \frac{\partial\rho}{\partial P}dP + \frac{\partial\rho}{\partial s}ds. \quad (3.1.9)$$

Так как  $Td\eta$  есть увеличение теплосодержания единицы массы  $\delta Q$ , а отношение  $\delta Q$  к изменению температуры есть теплоемкость, то удельная теплоемкость при постоянном давлении равна

$$c_P = T \left( \frac{\partial\eta}{\partial T} \right)_{P,s}, \quad (3.1.10)$$

где значки  $P$  и  $s$  означают, что производная  $\frac{\partial\eta}{\partial T}$  берется при постоянных  $P$  и  $s$ . Тогда  $\left( \frac{\partial\eta}{\partial T} \right)_{P,s} = \frac{c_P}{T}$ . Можно показать что  $\left( \frac{\partial\eta}{\partial P} \right)_{T,s} = -\frac{\alpha}{\rho}$ , где  $\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial T}$  - коэффициент термического расширения, а  $\delta = \frac{\partial\eta}{\partial s} = -\frac{\partial\mu}{\partial T}$ . Введем величины  $\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial P}$  и  $\gamma = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial s}$  - коэффициенты сжимаемости за счет  $P$  и  $s$ .

Подставив полученные соотношения в (3.1.9) получим

$$d\eta = \frac{c_P}{T}dT - \frac{\alpha}{\rho}dP + \delta ds,$$

$$d\rho = -\alpha\rho dT + \beta\rho dP + \gamma\rho ds. \quad (3.1.11)$$

Уравнение (3.1.11) представляет собой дифференциальную форму уравнения состояния среды  $\rho = \rho(T, P, s)$ . Если оно имеет упрощенный вид  $\rho = \rho(P)$ , т.е. плотность среды зависит только от давления, то среда называется *баротропной*; в противном случае она называется *бароклиной*.

Важной термодинамической характеристикой среды является также скорость звука

$$c(T, P, s) = \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\eta, s} \right]^{1/2}, \quad (3.1.12)$$

где значки  $\eta, s$  указывают, что производная  $\frac{\partial P}{\partial \rho}$  берется при постоянных  $\eta$  и  $s$ .

Введя аналогично (3.1.10) удельную теплоемкость при постоянном объеме (плотности)

$$c_v = T \left( \frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_{\rho, s}, \quad (3.1.13)$$

и комбинируя формулы (3.1.11), найдем

$$c_v = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{\alpha^2 T}{\beta \rho}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \beta \rho c^2. \quad (3.1.14)$$

В качестве одного из примеров рассмотрим влажный (ненасыщенный) атмосферный воздух. С достаточной для геофизической гидродинамики точностью его можно считать смесью идеальных газов. *Идеальным* называется газ, в котором отсутствуют силы межмолекулярного взаимодействия (не смешивать с идеальной жидкостью, где отсутствуют силы молекулярной вязкости). С достаточной степенью точности реальные газы можно считать идеальными в тех случаях, когда рассматриваются их состояния, далекие от областей фазовых превращений.

Наиболее изменчивой составной частью атмосферного воздуха является водяной пар, который рассматривается как термодинамически активная примесь, так что  $s$  - массовая доля водяного пара. Уравнение состояния влажного воздуха имеет вид

$$P = \rho RT, \quad R = (1-s)R_B + sR_{\Pi}, \quad (3.1.15)$$

где  $R_B = R_0 / \mu_B \cong 287$  Дж/(кг·К),  $R_{\Pi} = R_0 / \mu_{\Pi} \cong 462$  Дж/(кг·К) - газовые постоянные сухого воздуха и водяного пара,  $R_0 = 8,31$  Дж/(моль·К) - универсальная газовая постоянная,  $\mu_B \approx 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль и  $\mu_{\Pi} \approx 18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль - массы одного моля сухого воздуха и водяного пара. Из (3.1.15) видно, что коэффициент  $\beta$  равен  $1/P$ , и, следовательно, из второй формулы (3.1.14) получаем

$$c^2 = \frac{\kappa P}{\rho} = \kappa RT. \quad (3.1.16)$$

По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений ее составляющих - сухого воздуха  $P_B$  и водяного пара  $P_{\Pi}$ . Тогда парциальное давление водяного пара с учетом (3.1.15) равно

$$P_{\Pi} = P - P_B = P \left( 1 - \frac{P_B}{P} \right) = s [s + \alpha_{\Pi} (1-s)]^{-1} P,$$

$$\alpha_{\Pi} = \mu_{\Pi} / \mu_B \cong 0,622. \quad (3.1.17)$$



Энтропия влажного воздуха определяется формулами

$$\eta = (1-s)\eta_B + s\eta_{II},$$

$$\eta_B = (c_p)_B \ln T - R_B \ln P_B + const, \quad \eta_{II} = (c_p)_{II} \ln T - R_{II} \ln P_{II} + const, \quad (3.1.18)$$

где  $(c_p)_B \cong 1003$  (Дж/кг К) и  $(c_p)_{II} = 1810$  (Дж/кг К) - удельные теплоемкости сухого воздуха и водяного пара при постоянных  $P$  и  $s$ .

В качестве второго примера рассмотрим океанскую воду, в которой роль термодинамически активной примеси играет соленость  $s$ . Аналитический расчет термодинамических характеристик капельных жидкостей значительно сложнее по сравнению с газами, так как при этом расчете необходимо учитывать дальние взаимодействия между молекулами, кулоновские силы, действующие между ионами, аномальное поведение плотности при изменении температуры в диапазоне температур от максимальной плотности ( $\approx 4^{\circ}C$ ) до замерзания ( $\approx 0^{\circ}C$ ). В результате всех этих осложнений уравнение состояния океанской воды удалось получить лишь эмпирическим путем. Его принято записывать в виде

$$\rho(T, P, s) = \rho_0 (1 + 10^{-3} \sigma_t) [1 - \mu(P - P_a)]^{-1}, \quad (3.1.19)$$

где:  $P_a = 1013,25$  гПа - стандартное атмосферное давление,  $\rho_0 = \rho(4^{\circ}C, P_a, 0)$ ;

$\sigma_t = 10^3 [\rho(T, P_a, s) / \rho_0 - 1]$  - так называемая условная плотность,

$\mu = [K_0 + A(P - P_a) + B(P - P_a)^2]^{-1}$  - коэффициент изотермической сжимаемости воды, причем функции  $\sigma_t, K_0, A$  и  $B$  описываются многочленами третьей степени от  $T$  и  $(s - 35) \text{‰}$ .

Скорость звука (3.1.12) в океанской воде возрастает с увеличением температуры, давления и солености и описывается эмпирической формулой, по которой к стандартному значению  $c = 1449,30$  м/с прибавляются поправки в виде кубических многочленов от  $T, P$ , и  $s$ .

В настоящем разделе рассматривались термодинамические процессы, описывающие изменение термодинамических характеристик в неподвижном элементарном объеме жидкости. В геофизической гидродинамике также необходимо изучать термодинамические процессы в движущейся жидкости.

### 3.2. Уравнения переноса тепла для идеальной и вязкой жидкости

Уравнение переноса тепла является математическим выражением закона сохранения энергии. Вывод этого уравнения осуществим в два этапа - сначала для идеальной, затем для вязкой жидкости.

Зафиксируем в пространстве элемент объема и рассмотрим как меняется со временем сумма кинетической и внутренней энергии жидкости, протекающей через этот объем.

Суммарная энергия единицы объема жидкости равна  $\rho \frac{V^2}{2} + \rho E$ , где первый член есть кинетическая энергия, а второй - внутренняя энергия ( $E$  - внутренняя энергия единицы массы жидкости). Изменение со временем этой суммарной энергии определяется выражением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho E \right). \quad (3.2.1)$$

Определим отдельно локальную производную кинетической и внутренней энергии. Вначале найдем эту производную для кинетической энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho V^2}{2} \right) = \frac{V^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial V^2}{\partial t} = -\frac{V^2}{2} \operatorname{div} \vec{V} + \rho \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}. \quad (3.2.2)$$

Заменив  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  из уравнения движения в форме Эйлера (2.4.26), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho V^2}{2} = -\frac{V^2}{2} \operatorname{div} \rho \vec{V} - \rho \vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - \vec{V} \cdot \operatorname{grad} P + \rho \vec{V} \cdot \vec{F}. \quad (3.2.3)$$

Введем тепловую функцию

$$W \equiv E + P/\rho, \quad (3.2.4)$$

которая связана с термодинамическим потенциалом и энтропией согласно (3.1.7) соотношением

$$W = \varphi + T\eta. \quad (3.2.5)$$

Далее заменим  $\vec{V} \cdot (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \nabla V^2$ , а градиент давления выразим через термодинамические переменные  $\nabla P = \rho \nabla W - \rho T \nabla \eta - \rho \mu \nabla s$ , используя термодинамические соотношения

$$dW = dE + P d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} dP \quad \text{и} \quad dW = T d\eta + \frac{1}{\rho} dP + \mu ds.$$

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho V^2}{2} = -\frac{V^2}{2} \operatorname{div} \rho \vec{V} - \rho \vec{V} \cdot \nabla \left( W + \frac{V^2}{2} \right) + \rho T \vec{V} \cdot \nabla \eta + \rho \vec{V} \cdot \mu \nabla s + \rho \vec{F} \cdot \vec{V}. \quad (3.2.6)$$

Теперь найдем локальную производную от внутренней энергии. Для этого вновь воспользуемся термодинамическими соотношениями (3.1.7) - (3.1.8)

$$d(\rho E) = E d\rho + \rho dE = W d\rho + \rho T d\eta + \rho \mu ds. \quad (3.2.7)$$

Разделим последнее соотношение на  $dt$  и перейдем от полных к частным производным по времени:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{V} \cdot \operatorname{grad}(\rho E) = W \frac{\partial \rho}{\partial t} + W \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho T \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho T \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \eta + \rho \mu \frac{\partial s}{\partial t} + \rho \mu \vec{V} \cdot \operatorname{grad} s. \quad (3.2.8)$$

Так как

$$\vec{V} \cdot \operatorname{grad}(\rho E) = W \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho T \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \eta + \rho \mu \vec{V} \cdot \operatorname{grad} s,$$

то

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} = W \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho \mu \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (3.2.9)$$

По определению полная производная от энтропии по времени есть отношение притока тепла к единице массы жидкости за единицу времени ( $\varepsilon'$ ) к температуре ( $T$ ). Аналогично  $\varepsilon''$  есть приток термодинамически активной примеси к единице массы за единицу времени. Тогда

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{T} \varepsilon' - \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \eta,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \varepsilon'' - \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{s}. \quad (3.2.10)$$

Подставив (3.2.10) в (3.2.9), получим

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} = -W \operatorname{div} \rho \vec{V} - \rho T \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \eta - \rho \mu \vec{V} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{s} + \rho \varepsilon' + \rho \mu \varepsilon''. \quad (3.2.11)$$

Складывая (3.2.6) с (3.2.11), получим выражение для изменения суммарной энергии единицы объема со временем в фиксированной точке пространства

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho E \right) = - \left( W + \frac{V^2}{2} \right) \operatorname{div} \rho \vec{V} - \rho \vec{V} \cdot \nabla \left( W + \frac{V^2}{2} \right) + \rho \vec{V} \cdot \vec{F} + \rho \varepsilon' + \rho \mu \varepsilon''. \quad (3.2.12)$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho E \right) = -\operatorname{div} \left[ \rho \vec{V} \left( \frac{V^2}{2} + W \right) \right] + \rho \vec{V} \cdot \vec{F} + \rho \varepsilon' + \rho \mu \varepsilon'' . \quad (3.2.13)$$

Таким образом, получено *математическое выражение* закона сохранения энергии для идеальной жидкости с учетом работы массовых сил ( $\rho \vec{V} \cdot \vec{F}$ ), внешнего притока тепла ( $\rho \varepsilon'$ ) и изменения содержания термодинамически активной примеси ( $\rho \mu \varepsilon''$ ).

Для выяснения физического смысла полученного равенства рассмотрим простейший случай горизонтального движения при отсутствии внешнего притока тепла и изменения содержания термодинамически активной примеси. Тогда последними тремя членами правой части можно пренебречь. Проинтегрируем (3.2.13) по произвольному объему и интеграл, стоящий справа, преобразуем в интеграл по поверхностям

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho E \right) d\tau = - \int_s \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \left( \frac{V^2}{2} + W \right) dS . \quad (3.2.14)$$

Слева стоит изменение в единицу времени энергии жидкости в некотором заданном объеме пространства, справа - количество энергии, вытекающее в единицу времени из рассматриваемого объема. Тогда

$$\rho \vec{V} \left( \frac{V^2}{2} + W \right) \quad (3.2.15)$$

представляет собой вектор плотности потока энергии. Его абсолютная величина есть количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности, расположенную перпендикулярно направлению скорости. Выражение (3.2.15) показывает, что каждая единица массы жидкости как бы переносит при своем движении энергию  $W + V^2/2$ . Подставив  $W = E + P/\rho$ , перепишем полный поток энергии через замкнутую поверхность в виде

$$- \int_s \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \left( \frac{V^2}{2} + E \right) ds - \int_s P \vec{V} \cdot \vec{n} ds . \quad (3.2.16)$$

Первый член есть сумма кинетической и внутренней энергии, переносимая за единицу времени через поверхность рассматриваемого объема, второй член представляет собой работу, производимую силами давления над жидкостью, заключенной внутри объема.

Переходим к рассмотрению вязкой жидкости. В вязкой жидкости также выполняется закон сохранения энергии, согласно которому изменение суммарной энергии жидкости (кинетическая + тепловая) в некотором объеме за единицу времени равно полному потоку энергии через границы этого объ-

единицу времени равно полному потоку энергии через границы этого объема. Однако в случае вязкой жидкости помимо потока  $\rho \vec{V} \left( \frac{V^2}{2} + W \right)$ , связанного с переносом массы жидкости при ее движении, имеется еще поток, связанный с процессами внутреннего трения, который выражается вектором  $-\vec{V} \cdot \tau$  с компонентами  $v_\beta \tau_{\beta j}$ , где  $\tau$  - тензор вязких напряжений.

Наряду с этим дополнительным потоком энергии будет происходить также перенос тепла, обусловленный процессом теплопроводности, а если температура жидкости не постоянна внутри объема. За счет теплопроводности осуществляется молекулярный перенос энергии из мест с более высокой в места с более низкой температурой. Подчеркнем, что молекулярный перенос энергии не связан с макроскопическим движением и происходит также в неподвижной жидкости. Если через  $\vec{q}$  обозначить плотность потока тепла, переносимого посредством теплопроводности и учесть, что в явлениях теплопроводности, как правило, наблюдаются не слишком большие пространственные градиенты температуры в жидкости, то температурную неоднородность с достаточной степенью точности можно охарактеризовать первыми производными. Тогда получим

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T, \quad (3.2.17)$$

где  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности, который, вообще говоря, является функцией температуры и давления. Векторы  $\vec{q}$  и  $\nabla T$  имеют противоположные направления. Тогда плотность потока энергии при наличии вязкости и теплопроводности равна

$$\rho \vec{V} \left( \frac{V^2}{2} + W \right) - \vec{V} \cdot \tau - \kappa \nabla T. \quad (3.2.18)$$

Закон сохранения энергии в этом случае выражается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho E \right) = -\text{div} \left[ \rho \vec{V} \left( \frac{V^2}{2} + W \right) - \vec{V} \cdot \tau - \kappa \nabla T \right] + \rho \vec{V} \cdot \vec{F} + \rho \varepsilon' + \rho \mu \varepsilon''. \quad (3.2.19)$$

Левая часть (3.2.19) с учетом уравнений неразрывности (2.1.9) и Навье - Стокса (2.5.27) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho E \right) = -\frac{V^2}{2} \text{div} \rho \vec{V} - \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \frac{V^2}{2} - \vec{V} \cdot \nabla P + \rho \vec{V} \cdot \vec{F} + v_\beta \frac{\partial \tau_{\beta \alpha}}{\partial x_\alpha} + \rho \frac{\partial E}{\partial t} - E \text{div} \rho \vec{V}. \quad (3.2.20)$$

Далее, воспользовавшись термодинамическими соотношениями (как в случае идеальной жидкости), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho E \right) = -\operatorname{div} \left[ \rho \vec{V} \left( \frac{V^2}{2} + W \right) - \vec{V} \tau - \kappa \nabla T \right] + \rho T \frac{d\eta}{dt} + \rho \mu \frac{ds}{dt} + \rho \vec{V} \cdot \vec{F} - \operatorname{div}(\kappa \nabla T) - \tau_{\beta\alpha} \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}}. \quad (3.2.21)$$

Сравнив (3.2.21) с (3.2.19) получим общее уравнение переноса тепла для вязкой жидкости

$$\rho T \frac{d\eta}{dt} = \tau_{\beta\alpha} \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \operatorname{div}(\kappa \nabla T) + \rho \varepsilon'. \quad (3.2.22)$$

Из (3.2.22) следует, что изменение энтропии в движущемся объеме обусловлено диссипацией, теплопроводностью и внешними притоками тепла. Покажем, что в результате необратимых процессов теплопроводности и внутреннего трения энтропия жидкости только возрастает. Действительно, с помощью уравнения неразрывности (2.3.6), общего уравнения переноса тепла (3.2.22) и выражения для вязких напряжений (2.5.17) получим

$$\frac{\partial \rho \eta}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \eta \vec{V}) + \operatorname{div} \left( \frac{\kappa \nabla T}{T} \right) + \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T^2} + \frac{\mu}{2T} \left( \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \right)^2 + \frac{\mu'}{T} (\operatorname{div} \vec{V})^2. \quad (3.2.23)$$

Проинтегрировав полученное выражение по неограниченному объему жидкости и устремив граничную поверхность на бесконечность, где жидкость покоится и  $\nabla T = 0$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \eta d\tau = \int \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T^2} d\tau + \int \frac{\mu}{2T} \left( \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \right)^2 d\tau + \int \frac{\mu'}{T} (\operatorname{div} \vec{V})^2 d\tau. \quad (3.2.24)$$

Первый член описывает увеличение энтропии за счет теплопроводности, второй и третий - за счет внутреннего трения, что доказывает факт возрастания энтропии.

Уравнение (3.2.22) с учетом выражения для вязких напряжений (2.5.17) переписывается в виде

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\rho T} \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial x_{\gamma}} \right)^2 + \mu' (\operatorname{div} \vec{V})^2 + \operatorname{div}(\kappa \nabla T) \right] + \varepsilon' / T. \quad (3.2.25)$$

Если воспользоваться введенным понятием о термодинамических процессах и определить их как изменения со временем каких-либо термодинамических характеристик жидких частиц, вызываемые процессами теплопроводности и внутреннего трения, лучистым теплообменом, фазовыми превра-

щениями веществ, то уравнение для скоростей изменения энтропии и концентрации термодинамически активной примеси можно записать

$$\frac{d\eta}{dt} = \varepsilon_\eta, \quad \frac{ds}{dt} = \varepsilon_s. \quad (3.2.26)$$

Здесь  $\varepsilon_\eta$  - скорость притока тепла, деленная на температуру, а  $\varepsilon_s$  - скорость притока примеси к единице массы жидкости.

Процессы, при которых  $\varepsilon_\eta = 0$  (энтропия оказывается лагранжевым инвариантом) называется *изэнтропическими*. Если к тому же и  $\varepsilon_s = 0$  (концентрация примеси также лагранжев инвариант), то процессы называются *адиабатическими*.

Из (3.1.12) видно, что при адиабатических процессах

$$\frac{dP}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt}. \quad (3.2.27)$$

Запишем уравнение переноса тепла (3.2.25), выразив энтропию через независимые термодинамические переменные. Так как  $\eta = \eta(T, P, s)$ , то

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial P} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial s} \frac{ds}{dt}. \quad (3.2.28)$$

Так как  $\frac{\partial\eta}{\partial T} = \frac{c_p}{T}$ ,  $\frac{\partial\eta}{\partial p} = -\frac{\alpha}{\rho}$ ,  $\frac{\partial\eta}{\partial s} = \delta$ , то из (3.2.28) следует, что

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{\alpha T}{\rho} \cdot \frac{dP}{dt} = T(\varepsilon_\eta - \delta\varepsilon_s) = \varepsilon_T, \quad (3.2.29)$$

где  $\varepsilon_T$  - полный приток тепла к единице массы жидкости за счет внутренних и внешних источников.

Это уравнение есть *уравнение переноса тепла*, которое в геофизической гидродинамике называется *уравнением притока тепла*.

Для совершенного газа ( $\alpha = 1/T, \rho = P/(RT)$ ) уравнение (3.2.29) переписывается в виде

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = \varepsilon_T. \quad (3.2.30)$$

Таким образом, получены уравнения переноса тепла для идеальной и вязкой жидкости.

### 3.3. Условия равновесия стратифицированной жидкости

Под *стратифицированной жидкостью* будем понимать жидкость, в которой плотность  $\rho$  меняется по вертикали, т. е. по направлению силы тяжести. Можно рассматривать стратификацию и других термодинамических характеристик (температуры  $T$ , концентрации термодинамически активных примесей  $s$ , скорости звука  $c$ , энтропии  $\eta$  и других), но наибольшее динамическое значение в геофизической гидродинамике имеет стратификация плотности, непосредственно определяющая характер действия специфических для природных течений архимедовых сил. Чтобы оценить действие этих сил на жидкие частицы, адиабатически перемещаемые по вертикали, будем использовать в качестве независимых термодинамических переменных  $\eta$ ,  $p$  и  $s$ . Введем вертикальную координату  $z$ , отсчитываемую от поверхности моря вверх.

Для описания условий равновесия стратифицированной жидкости удобно пользоваться понятием потенциальной плотности  $\rho_*$ , которая определяется как плотность жидкости адиабатически приведенной к стандартному давлению  $p_0$ , т. е.  $\rho_*(\eta, s) = \rho(\eta, s, p_0)$ .

Для определения потенциальной плотности воспользуемся уравнениями (3.1.11). Полагая в них  $dp = 0$  и исключая  $dT$ , дифференциал потенциальной плотности  $d\rho_*$  можно привести к виду

$$d\rho_* = \frac{\rho_* \alpha_* T_*}{c_{p*}} \left[ -d\eta + \left( \delta_* + \frac{\gamma_* c_{p*}}{\alpha_* T_*} \right) ds \right], \quad (3.3.1)$$

где звездочками снизу обозначены значения функций от  $\eta$ ,  $p$  и  $s$  при  $p = p_0$ .

Формулу (3.3.1) можно существенно упростить, если энтропию выразить в виде функции от плотности, давления и концентрации примеси. После замены  $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$  ( $f = \rho_*, \eta, s$ ) при  $z = z_0$  получаем с учетом соотношений (3.1.14)

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.3.2)$$

В стратифицированной среде параметры  $\eta$ ,  $p$  и  $s$ , вообще говоря, меняются с изменением вертикальной координаты  $z$ , так что стратификация плотности описывается функцией  $\rho(z) = \rho[\eta(z), s(z), p(z)]$ . При адиабатическом смещении жидкой частицы с уровня  $z_0$ , где  $p = p_0$ , на уровень  $z$ , где её плотность будет равна  $\rho_0(z) = \rho[\eta(z_0), s(z_0), p(z)]$  и при малом смещении  $\delta z = z - z_0$  бу-



дет отличаться от плотности окружающей среды на величину  $\rho_0(z) - \rho(z)$ . Плотность частицы на уровне  $z$  определяется начальным значением на уровне  $z_0$  и изменением давления  $\delta p = p(z) - p(z_0)$ , так как  $\eta$  и  $s$  при адиабатических перемещениях не изменяются. Тогда с учетом (3.1.12) плотность частицы  $\rho_0(z) = \rho(z_0) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial z} \delta z$ . В окружающей среде  $\rho(z) = \rho(z_0) + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z$ . Откуда получаем

$$\rho_0(z) - \rho(z) = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \delta z$$

и на основании (3.3.2) находим

$$\rho_0(z) - \rho(z) = - \frac{\partial \rho_*}{\partial z} \delta z. \quad (3.3.2a)$$

Тогда сила плавучести, действующая на единицу объема, равна

$$g(\rho - \rho_0) = g \frac{\partial \rho_*}{\partial z} \delta z. \quad (3.3.3)$$

При  $\frac{\partial \rho_*}{\partial z} = 0$  частица, выведенная из состояния равновесия, будет оставаться на том уровне, куда она будет перемещена. Такая стратификация называется *нейтральной*. Укажем, что в нейтральной стратифицированной среде, как следует из (3.3.1) должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \left( \delta_* + \frac{\gamma_* c_{p*}}{\alpha_* T_*} \right) \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (3.3.4)$$

При  $\frac{\partial \rho_*}{\partial z} > 0$  направление силы плавучести совпадает с направлением движения частицы (независимо от того, вверх или вниз движется частица) и она действует на смещающуюся жидкую частицу ускоряющим образом. В результате частица удаляется от исходного уровня. Такая стратификация является *неустойчивой*. При слабом воздействии диссипативных факторов в среде разовьется конвекция, которая посредством работы архимедовых сил будет приобретать кинетическую энергию за счет потенциальной энергии неустойчивой стратификации.

При  $\frac{\partial \rho_*}{\partial z} < 0$  сила плавучести направлена против движения адиабатически перемещающейся частицы, действует на нее возвращающим образом и стремится вернуть частицу на исходный уровень. Такая стратификация является *устойчивой*.

Вертикальное смещение жидкой частицы требует при устойчивой стратификации затраты энергии на работу против силы плавучести. Если такое смещение  $\zeta = z - z_0$  произведено, то, пока не скажутся диссипативные факторы, частица будет колебаться по вертикали относительно своего равновесного уровня  $z_0$  с некоторой частотой  $N$ . Это связано с тем, что при достижении исходного уровня  $z_0$  частица за счет силы плавучести приобрела некоторую скорость и по инерции продолжает движение до уровня, на котором скорость обращается в нуль. Затем движение повторяется в обратном направлении. Величину  $N$  можно определить из уравнения, которое получается приравнением ускорения частицы силе плавучести, действующей на единицу массы жидкости:

$$\ddot{\zeta} - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho_*}{\partial z} \zeta = 0. \quad (3.3.5)$$

Это дифференциальное уравнение гармонических колебаний с частотой  $N$ , квадрат которой равен

$$N^2 = - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho_*}{\partial z}. \quad (3.3.6)$$

Величина  $N$  называется *частотой Вьёсяля-Брента*.

В большинстве случаев изменения давления с высотой достаточно точно описываются уравнением гидростатики  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ , и тогда из (3.3.6) и (3.3.2) получается широко употребляемая формула

$$N^2 = - \frac{g}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{g\rho}{c^2} \right). \quad (3.3.7)$$

Из (3.3.7) следует, что для выполнения условия гидростатической устойчивости ( $N^2 > 0$ ) необходимо, чтобы  $\frac{\partial \rho}{\partial z} < -\frac{g\rho}{c^2}$ , т.е. необходимо, чтобы плотность среды достаточно быстро убывала с ростом  $z$ .

Далее, если в (3.3.7) подставить  $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ , полученное из (3.1.11) с учетом зависимости всех термодинамических переменных от  $z$ , получим

$$N^2 = \alpha g \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a - \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial s}{\partial z} \right), \quad \gamma_a = \frac{\kappa - 1}{\alpha} \frac{g}{c^2}, \quad (3.3.8)$$

где  $\gamma_a$  - адиабатический градиент температуры. Под *адиабатической средой* будем понимать среду, в которой энтропия  $\eta$  и содержание примеси  $s$  постоянны.

Покажем, что минус  $\gamma_a$  есть вертикальный градиент температуры в такой среде. Действительно, если воспользоваться дифференциальным уравнением состояния (3.1.11) и зависимостью между термодинамическими переменными, то для изменения температуры в адиабатической среде

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_a = -\frac{gT\alpha}{c_p} = -\gamma_a. \quad (3.3.9)$$

Проинтегрировав (3.3.9) от уровня моря до вертикальной координаты  $z$ , получим

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_a = -\frac{gT\alpha}{c_p} = -\gamma_a. \quad (3.3.10)$$

Если на уровне моря давление равно стандартному, то температура жидкости, приведенная к нему, есть *потенциальная температура*  $\theta$ :

$$\theta = T \exp\left(\int_0^z \frac{\alpha g}{c_p} dz'\right). \quad (3.3.11)$$

Прологарифмировав и продифференцировав это выражение по  $z$ , получим

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\alpha g}{c_p} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a\right). \quad (3.3.12)$$

Воспользовавшись выражениями (3.3.8) и (3.3.12) получим в первом приближении для частоты Вайсяля - Брента

$$N^2 = \alpha g \left(\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial s}{\partial z}\right). \quad (3.3.13)$$

Для идеального газа  $\alpha = \frac{1}{T}$  и  $\gamma_a = \frac{g}{c_p}$ . При  $c_p \cong 1003$  Дж/(кг К) и  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>,  $\gamma_a = 0,98 \cdot 10^{-2}$  К/м.

Так как атмосферный воздух близок к идеальному газу, то в метеорологии широко используется понятие потенциальной температуры, получаемое из уравнения притока тепла (3.2.30) при  $\varepsilon_T = 0$

$$c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}. \quad (3.3.14)$$

Тогда после интегрирования последнего соотношения от уровня  $(p_0, T_0)$  до уровня  $(p, T)$  получим

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p}. \quad (3.3.15)$$

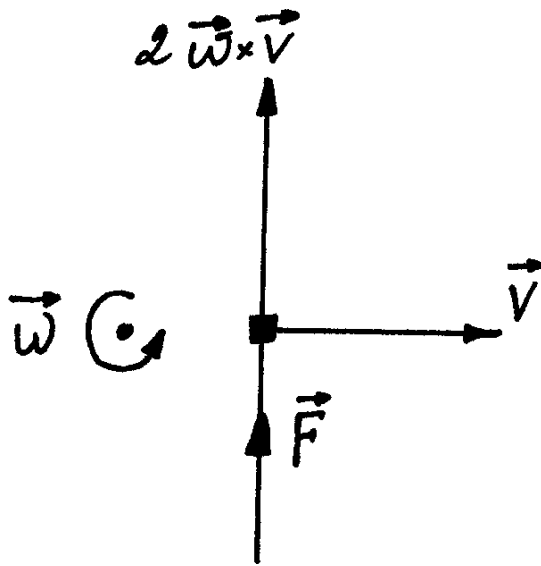
Если теперь предположить, что  $p_0 = 1000 \text{ гПа}$ , то для потенциальной температуры  $\theta$  получим

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}. \quad (3.3.16)$$

Подчеркнем, что соотношение (3.3.16) есть частный случай (3.3.11) применительно к атмосферным условиям.



вправо от приложенной силы (см. рис. 4.1). Подчеркнем, что ускорение Ко-



риолиса преобладает над относительным ускорением для крупномасштабных движений в силу малости относительных ускорений. Одновременно укажем, что для таких движений временной масштаб превышает период вращения Земли. Жидкие частицы имеют гироскопическую тенденцию двигаться под прямым углом по отношению к приложенной силе. Перечисленные закономерности представляют собой по существу основные особенности геофизической гидродинамики.

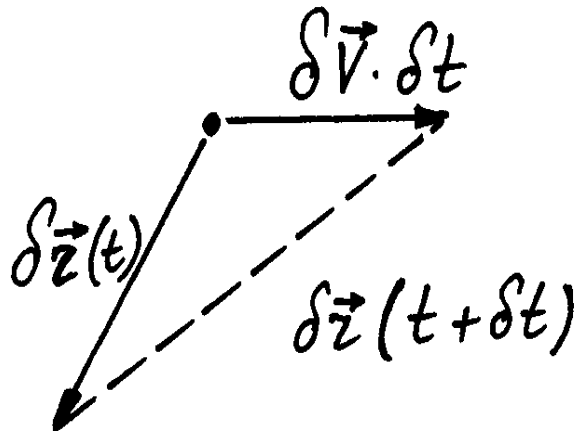
Рис.4.1. Соотношение между силой и скоростью, в случае преобладания ускорения Кориолиса.

Эти особенности природных течений в воздушной и жидкой оболочках Земли, вращающихся вместе с нею, широко используются при изучении крупномасштабных атмосферных и океанических течений. В соответствующих курсах динамической метеорологии и физики океана будет показано, как реализуется гироскопическая тенденция движений под прямым углом к приложенной силе, что позволяет получить важные в практических приложениях методы количественного описания скоростей ветра и течений.

## 4.2. Ускорение циркуляции

Как указывалось в п. 2.2.6, интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по замкнутому контуру, расположенному на поверхности трубки и один раз ее опоясывающему. Поэтому для изучения изменения интенсивности вихревой трубки во времени следует воспользоваться уравнением для скорости изменения циркуляции. Рассмотрим скорость изменения циркуляции в том случае, когда жидкий контур состоит из одних и тех же частиц и движется вместе с жидкостью. В этом случае ускорение циркуляции определяется

$$\delta \Gamma_c = \delta \oint \vec{V} \cdot d\vec{r} = \oint \delta \vec{V} \cdot d\vec{r} + \oint \vec{V} \cdot \delta(d\vec{r}) = \oint \delta \vec{V} \cdot d\vec{r} + \oint \vec{V} \cdot d(\delta \vec{r}). \quad (4.2.1)$$



Величина  $d(\delta \vec{r})$  определяется изменением длины и ориентации вектора  $\delta \vec{r}$  за счет разности скоростей на концах этого вектора (см. рис. 4.2). Так как

$$d(\delta \vec{r}) = \delta \vec{r}(t + \delta t) - \delta \vec{r}(t) = d\vec{V} \cdot \delta t, \quad (4.2.2)$$

то, разделив (4.2.1) на  $\delta t$  и перейдя к пределу, найдем

$$\frac{\delta \Gamma_c}{\delta t} \rightarrow \frac{d\Gamma_c}{dt}, \quad \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} \rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (4.2.3)$$

Рис.4.2. Изменение бесконечно малого отрезка, определяемого различием скоростей на концах этого отрезка.

С учетом (4.2.3) перепишем (4.2.1) в виде

$$\frac{d\Gamma_c}{dt} = \oint_c \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{V} = \oint_c \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} + \frac{1}{2} \oint_c d|\vec{V}|^2. \quad (4.2.4)$$

Так как  $\oint_c d|\vec{V}|^2 = 0$ , вследствие того, что это интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала, то

$$\frac{d\Gamma_c}{dt} = \oint_c \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r}. \quad (4.2.5)$$

Таким образом, скорость изменения относительной циркуляции равна контурному интегралу от относительного ускорения. Подставив в (4.2.5) вместо  $\frac{d\vec{V}}{dt}$  его выражение из уравнения Навье - Стокса (2.5.28а), получим

$$\frac{d\Gamma_c}{dt} = -\oint_c (2\vec{\omega} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} - \oint_c \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_c \nu \nabla^2 \vec{V} \cdot d\vec{r}, \quad (4.2.6)$$

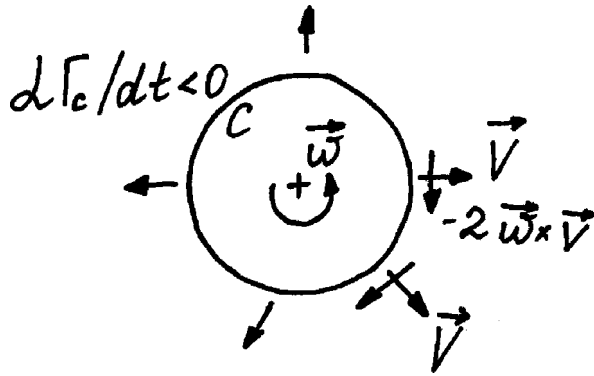
так как  $\oint_c \nabla \Phi \cdot d\vec{r} = 0$ .

В соответствии с (4.2.6) существуют три механизма изменения циркуляции скорости или интенсивности движущейся трубки относительного вихря. Указанными тремя эффектами, отнесенными к единице массы, являются циркуляции следующих трех сил: силы Кориолиса, давления и молекулярной вяз-

кости.

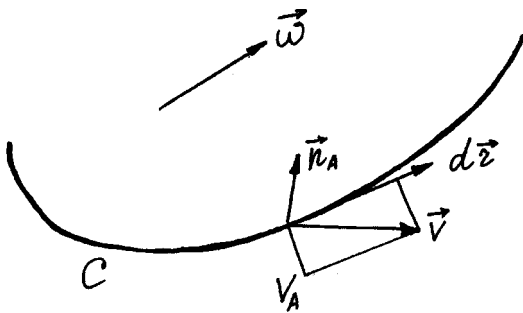
Рассмотрим каждый из указанных механизмов.

1) Влияние силы Кориолиса может быть показано на простом примере (см. рис. 4.3), для которого вектор  $\vec{\omega}$  перпендикулярен плоскости чертежа и направлен к читателю. Допустим, что вектор  $\vec{V}$  направлен из области, ограниченной контуром  $C$ , перпендикулярно к нему. Вектор силы Кориолиса



$-2\vec{\omega} \times \vec{V}$  направлен по касательной к контуру по часовой стрелке. Следовательно, если исключить все другие факторы, то сила Кориолиса создает относительную циркуляцию по контуру  $C$  по часовой стрелке и поэтому  $\frac{d\Gamma_c}{dt}$  будет отрицательным.

Рис.4.3. Радиальное течение  $\vec{V}$  и сила Кориолиса, создающие отрицательную циркуляцию.



С другой стороны, смешанное произведение векторов  $2\vec{\omega}$ ,  $\vec{V}$  и  $d\vec{r}$  равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, т.е.

$$-(2\vec{\omega} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} = -2\vec{\omega} \cdot (\vec{V} \times d\vec{r}) = -2\vec{\omega} \cdot \vec{n}_A V_A dr, \quad (4.2.7)$$

Рис.4.4. Увеличение площади за счет компонента скорости  $\vec{V}_A$ .

где  $\vec{n}_A$  - единичный вектор, параллельный  $\vec{V} \times d\vec{r}$ , направленный по нормали к элементарной площадке  $\delta s = V_A dt dr$ , а  $V_A$  - проекция скорости на нормаль к  $d\vec{r}$ . Тогда скорость увеличения ограниченной контуром  $C$  площади для каждого элемента дуги  $C$  (см. рис. 4.4) равна

$$\frac{d}{dt} \delta s_n = V_A dr. \quad (4.2.8)$$

Подставив (4.2.8) в соотношение (4.2.7), имеем

$$-(2\vec{\omega} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} = -2\omega \frac{d}{dt} \delta s_n, \quad (4.2.9)$$

где  $\delta s_n$  - приращение площади, ограниченной контуром  $C$  и перпендикуляр-



ной вектору  $\vec{\omega}$ , для каждого элемента дуги контура  $C$ .

Интегрируя (4.2.9.) по  $d\vec{r}$  вдоль  $C$ , получим

$$-\oint_C (2\vec{\omega} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} = -2\omega \frac{ds_n}{dt}, \quad (4.2.9a)$$

где  $s_n$  - проекция площади, ограниченная контуром  $C$ , на плоскость, перпендикулярную  $\vec{\omega}$ .

В примере, представленном на рис. 4.4, увеличивается площадь, ограниченная контуром  $C$ , захватывается больше нитей планетарного вихря и возникает отрицательная (по часовой стрелке) циркуляция по контуру  $C$ . Аналогичный эффект достигается, если поверхность не увеличивается, а поворачивается по направлению к плоскости, перпендикулярной  $\vec{\omega}$  так, что большее количество нитей планетарного вихря захватывается контуром  $C$ .

Таким образом, мы получили, что за счет эффекта силы Кориолиса меняется со временем циркуляция скорости и изменяется интенсивность вихревой трубки. Следовательно, влияние эффекта вращения Земли приводит к изменению завихренности относительного движения, что особенно важно для крупномасштабных движений объектов геофизической гидродинамики.

2) Роль вклада циркуляции силы давления можно определить, если в соответствии с теоремой Стокса второй член в правой части формулы (4.2.6) переписать в виде

$$-\oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} = -\int_S \nabla \times \left( \frac{\nabla p}{\rho} \right) \cdot \vec{n} ds = \int_S \frac{\nabla p \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \vec{n} ds. \quad (4.2.10)$$

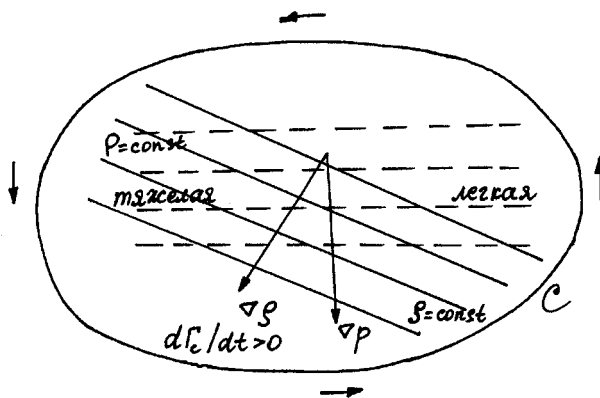
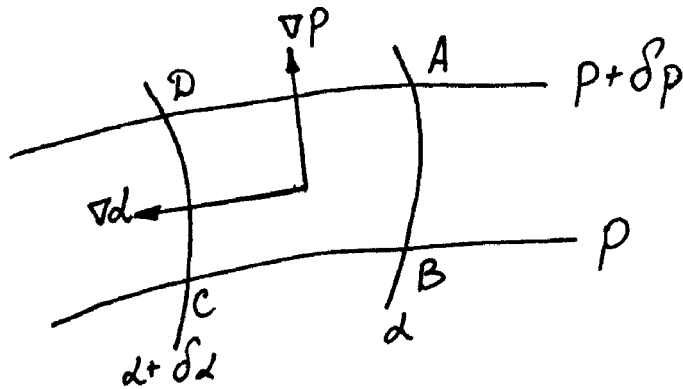


Рис.4.5. Генерация циркуляции скорости из-за бароклининого эффекта

Таким образом, вклад второго члена правой части (4.2.6) определяется векторным произведением градиентов плотности и давления, деленным на квадрат плотности. Когда изобарические и изостерические поверхности не совпадают, жидкость является бароклининой и для нее бароклининый вектор  $(\nabla \rho \times \nabla p) / \rho^2 \neq 0$ .

Относительная циркуляция изменяется со временем при условии, что средняя по выбранной поверхности  $S$  нормальная компонента бароклининого вектора отлична от нуля.

Для иллюстрации этого механизма рассмотрим рис. 4.5. Вектора  $\nabla p$  и  $\nabla \rho$  лежат в плоскости  $A$ . В рассматриваемом случае на более легкую жидкость справа действует та же сила давления ( $-\nabla p$ ), что и на тяжелую жидкость - слева. В силу этого более легкая жидкость будет двигаться быстрее, чем более тяжелая (при отсутствии других эффектов).



Следовательно, скорость движения частиц будет изменяться в пространстве. Такое движение согласно первой теореме Гемгольца можно представить в виде суммы поступательного и вращательного перемещения частиц. В результате вокруг контура  $C$  будет возникать циркуляция против часовой стрелки.

Рис.4.6. Контур из двух участков изобар и двух участков изостер.

В баротропной жидкости ( $\rho = \rho(p)$ ) поверхности равных значений давления и плотности совпадают, поэтому (4.2.10) можно переписать в виде

$$\oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p(A)}^{p(A)} \frac{dp}{\rho(p)} = 0, \quad (4.2.11)$$

поскольку интеграл в (4.2.11) берется по замкнутой кривой.

Если контур  $C$  состоит из двух участков изобар и двух участков изостер (рис. 4.6), то можно показать, что

$$\begin{aligned} -\oint_C \frac{dp}{\rho} &= -\oint_C \alpha dp = -\left( \int_{AD} \alpha dp + \int_{DC} \alpha dp + \int_{CB} \alpha dp + \int_{BA} \alpha dp \right) = \\ &= -[0 + (\alpha + \delta\alpha)(-\delta p) + 0 + \alpha \delta p] = \delta\alpha \delta p, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

так как вдоль отрезков  $AD$  и  $CB$   $p = const$ , то соответствующие интегралы равны нулю. Тогда ускорение циркуляции по выбранному контуру равно произведению разностей удельных объемов и давлений на частях контура. Нетрудно показать, что если кратчайший поворот от градиента давления  $\nabla p$  к градиенту удельного объема  $\nabla \alpha$  происходит против часовой стрелки, то приращение циркуляции является положительным и наоборот.

3) Последний член в выражении (4.2.6) при условии, что кинематиче-

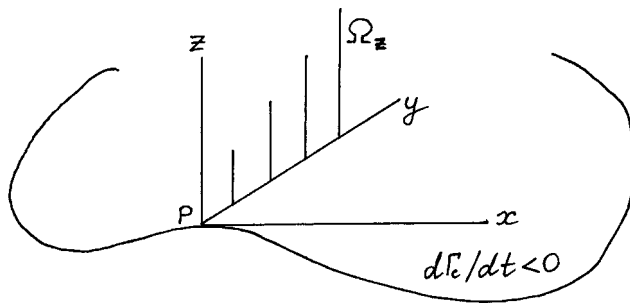
ский коэффициент вязкости  $\nu$  вдоль контура не меняется, представим в виде

$$\nu \oint_C \nabla^2 \vec{V} \cdot d\vec{r} = -\nu \oint_C (\nabla \times \vec{\Omega}) \cdot d\vec{r}, \quad (4.2.13)$$

так как  $\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$  и  $\oint_C \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) \cdot d\vec{r} = 0$ . (4.2.14)

Рассмотрим случай, изображенный на рис. 4.7, когда вихрь в окрестности точки  $P$  на контуре  $C$  имеет только вертикальную составляющую  $\Omega_z$ , а ось  $x$  в этой точке направлена по касательной к контуру. Тогда

$$-\nu (\nabla \times \vec{\Omega}) \cdot d\vec{r} = -\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} dx. \quad (4.2.14a)$$



Следовательно, в рассмотренном случае влияние вязкости должно уменьшать интенсивность вихревой трубки, ограниченной контуром  $C$ , на величину пропорциональную градиенту завихренности на этом контуре, так как  $\frac{\partial \Omega}{\partial y} > 0$ .

Рис.4.7. Диффузия вихря в точке  $P$ .

Это можно объяснить тем, что завихренность внутри контура из-за действия вязкости будет стремиться диффундировать в направлении, противоположном градиенту вихря скорости.

Таким образом, рассмотрена *физическая интерпретация* основных факторов, определяющих ускорение циркуляции.

Перейдем к рассмотрению абсолютной циркуляции. Так как согласно (2.2.73) абсолютная циркуляция скорости ( $\Gamma_a$ ) есть сумма относительной ( $\Gamma_c$ ) и планетарной ( $2\omega s_n$ ) циркуляций, то

$$\Gamma_a = \Gamma_c + 2\omega s_n. \quad (4.2.15)$$

Представляет интерес оценить изменения  $\Gamma_a$  во времени. Продифференцировав (4.2.15) по времени  $t$  и подставив  $\frac{d\Gamma_c}{dt}$  из (4.2.6), получим

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -\oint_C (2\vec{\omega} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} - \oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_C \nu \nabla^2 \vec{V} \cdot d\vec{r} + 2\omega \frac{ds_n}{dt}. \quad (4.2.16)$$

Но, учтя (4.2.9а), найдем

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -\oint_c \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_c v \nabla^2 \vec{V} \cdot d\vec{r}. \quad (4.2.17)$$

Следовательно, изменение абсолютной циркуляции со временем в движущемся элементарном объеме жидкости определяется циркуляцией сил давления и вязкости. Если жидкость баротропна и трение на контуре отсутствует, то выполняется *теорема Кельвина*, согласно которой

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = 0, \quad (4.2.18)$$

т.е. абсолютная циркуляция при движении сохраняется.

Так как  $\Gamma_a$  представляет собой сумму относительной и планетарной циркуляций (4.2.15), то сохранение абсолютной циркуляции означает взаимный переход одного вида циркуляции в другой, при котором их сумма остается постоянной. Выводы этой теоремы будут широко использоваться в дальнейшем при физической интерпретации уравнения вихря скорости, к выводу которого мы переходим.

### 4.3. Уравнение вихря

В геофизической гидродинамике решение многих прикладных задач связано с оценкой интенсивности вихревых движений. Рассмотренное ранее изменение циркуляции со временем есть скалярная мера изменения завихренности. Так как вихрь представляет собой вектор, обсуждение свойств циркуляции дает неполную картину динамики вихря. Для исследования векторной природы вихря выведем уравнение для вектора вихря. Так как рассматривается движение на вращающейся Земле, то следует исследовать динамику абсолютного и относительного вихря. С этой целью воспользуемся уравнением движения вязкой жидкости в форме (2.5.28б)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Omega}_a \times \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \left( \Phi + \frac{V^2}{2} \right) + v \nabla^2 \vec{V}, \quad (4.3.1)$$

где  $\vec{\Omega}_a = 2\vec{\omega} + \vec{\Omega}$  - абсолютный вихрь,  $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$  - относительный вихрь,  $2\vec{\omega}$  - планетарный вихрь.

Применим к обеим частям (4.3.1) операцию *rot* :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega}_a \times \vec{V}) = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + v \nabla \times (\nabla^2 \vec{V}). \quad (4.3.2)$$

Для любых двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  справедливо соотношение

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}, \quad (4.3.3)$$

поэтому

$$\nabla \times (\vec{\Omega}_a \times \vec{V}) = \vec{\Omega}_a(\nabla \cdot \vec{V}) + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\Omega}_a - (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla)\vec{V}, \quad (4.3.4)$$

так как  $\nabla \cdot \vec{\Omega}_a = 0$ .

С учетом первой формулы (2.5.30), примененной к вектору  $\vec{\Omega}$ , получим

$$\nabla^2 \vec{\Omega} = -rot \ rot \vec{\Omega}$$

и

$$rot(\nabla^2 \vec{V}) = rot(grad \ div \vec{V} - rot \ rot \vec{V}) = 0 - rot \ rot \vec{\Omega} = \nabla^2 \vec{\Omega}. \quad (4.3.5)$$

Подставляя (4.3.4) и (4.3.5) в (4.3.2), получим

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{\Omega}_a - (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla)\vec{V} + \vec{\Omega}_a(\nabla \cdot \vec{V}) = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \vec{\Omega}. \quad (4.3.6)$$

Из (4.3.6) найдем выражения для полной производной от абсолютного и относительного вихря

$$\frac{d\vec{\Omega}_a}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega}_a \cdot \nabla)\vec{V} - \vec{\Omega}_a(\nabla \cdot \vec{V}) + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \vec{\Omega}, \quad (4.3.7)$$

так как  $\frac{d}{dt}(2\vec{\omega}) = 0$ .

Рассмотрим физический смысл полученного уравнения вихря (4.3.7). Скорость изменения абсолютного вихря движущейся жидкой частицы определяется четырьмя членами в правой части этого уравнения. Дадим физическую интерпретацию первым двум членам правой части. С этой целью расс-

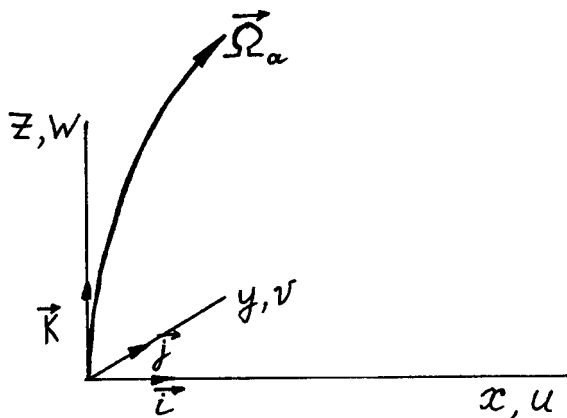


Рис.4.8. Локальная система координат, выбираемая для интерпретации уравнения вихря.

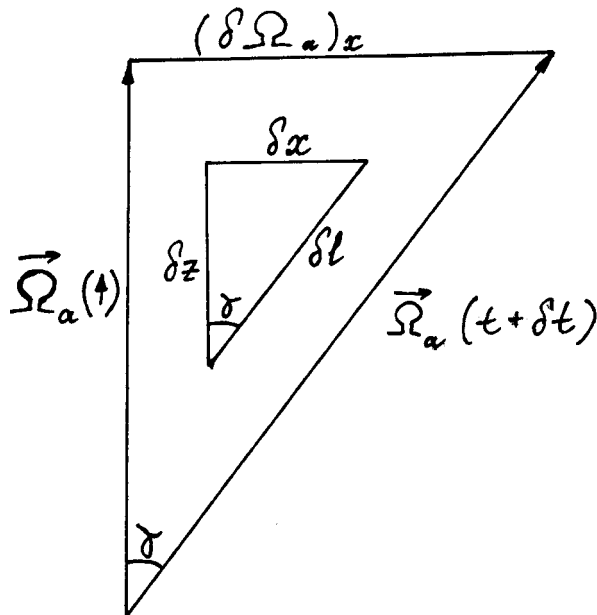
смотрим произвольную точку  $P$  в жидкости и выберем локальную декартову систему координат так, чтобы в точке  $P$  ось  $z$  была касательной к нити абсолютного вихря, проходящей через точку  $P$  (см. рис. 4.8). В этой системе координат  $\vec{\Omega}_a = \Omega_a \vec{k}$ ,  $\Omega_a = |\vec{\Omega}_a|$ . Тогда в точке  $P$  первые два члена (4.3.7) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
(\vec{\Omega}_a \cdot \nabla) \vec{V} - \vec{\Omega}_a (\nabla \cdot \vec{V}) &= (\Omega_a \vec{k} \cdot \nabla) \vec{V} - \Omega_a \vec{k} (\nabla \cdot \vec{V}) = \\
&= \Omega_a \frac{\partial}{\partial z} (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) - \Omega_a \vec{k} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\
&= \vec{i} \Omega_a \frac{\partial u}{\partial z} + \vec{j} \Omega_a \frac{\partial v}{\partial z} - \vec{k} \Omega_a \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (4.3.7a)
\end{aligned}$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  - единичные векторы вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Рассмотрим скорость изменения компоненты абсолютного вихря вдоль оси  $z$ . Напомним, что вектор исходного вихря был направлен вдоль  $z$  и его  $z$ -компонента равна  $\Omega_a$ . Тогда изменение этой компоненты со временем в движущейся жидкой частице при отсутствии эффектов бароклинности и трения выражается соотношением

$$\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_a)_z = -(\vec{\Omega}_a)_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (4.3.8)$$



т.е. равно произведению модуля исходного абсолютного вихря на дивергенцию скорости в плоскости, перпендикулярной  $\vec{\Omega}_a$ . Если дивергенция отрицательна, то  $\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_a)_z > 0$  и нити абсолютного вихря будут собираться, становясь ближе друг к другу. При этом величина вектора вихря увеличивается, а площадь поперечного сечения локальной вихревой трубки уменьшается.

Согласно (2.2.38)  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{s} \frac{ds}{dt}$ ,

Рис.4.9. Вектор абсолютного вихря в моменты времени  $t$  и  $t + \delta t$ .

где  $s$  - площадь поперечного сечения вихревой трубки в плоскости  $XOY$ . Тогда, подставив соотношение (2.2.38) в (4.3.8), найдем

$$\frac{d(\vec{\Omega}_a)_z}{dt} = \frac{d(\vec{\Omega}_a)_z}{s} \frac{ds}{dt}$$

или

$$\frac{d[(\vec{\Omega}_a)_z s]}{dt} = 0, \quad (\vec{\Omega}_a)_z s = const. \quad (4.3.9)$$

Итак, *произведение площади поперечного сечения вихревой трубки на компоненту вектора абсолютного вихря в направлении, перпендикулярном к указанному сечению, есть постоянная величина*, что эквивалентно теореме Кельвина. За счет влияния дивергентного фактора интенсивность вихревой трубки сохраняется при движении. Описанный механизм увеличения компоненты абсолютного вихря в направлении нити можно трактовать как механизм растяжения вихревой трубки, так как уменьшение площади поперечного сечения трубки в квазинесжимаемой жидкости достигается за счет вытягивания жидкой трубки вдоль ее длины так, чтобы объем ее сохранялся.

Рассмотрим теперь скорость увеличения компоненты абсолютного вихря в  $x$ -направлении, т.е. в направлении, перпендикулярном вихревой нити. В соответствии с (4.3.7а) скорость увеличения этой компоненты равна  $\Omega_a \frac{\partial u}{\partial z}$ .

По прошествию времени  $\delta t$  приращение  $x$ -компоненты абсолютного вихря будет составлять

$$\delta(\bar{\Omega}_a)_x = \Omega_a \frac{\partial u}{\partial z} \delta t = \Omega_a \frac{\delta x}{\delta z}. \quad (4.3.9)$$

Тогда (см. рис. 4.9)

$$\frac{\delta(\bar{\Omega}_a)_x}{\Omega_a} = tg\gamma \quad \text{и} \quad \frac{\delta x}{\delta z} = tg\gamma. \quad (4.3.10)$$

Первое равенство (4.3.10) дает угол наклона вихревой нити, а второе - угол наклона элемента жидкой линии. Согласно (4.3.10) эти углы совпадают. Таким образом, из-за сдвига поля скорости элемент жидкой линии наклоняется на угол  $\gamma$  и согласно (4.3.9) вследствие этого возникает параллельная оси  $x$  компонента вектора вихря. Эта компонента равна  $x$ -компоненте вектора абсолютного вихря в момент времени  $t + \delta t$ , который сам наклоняется на тот же угол, что и жидкая линия. Это есть проявление того факта, что нити абсолютного вихря в отсутствие других эффектов двигаются вместе с жидкостью. Аналогичные соображения применимы и к  $y$ -направлению.

Первые два члена правой части (4.3.7) не являются вихреобразующими для абсолютного вихря. В то же время важно отметить, что если  $\Omega$  первоначально равнялся нулю, то изгиб и дивергенция нитей абсолютного вихря из-за относительного движения жидкости в поле планетарного вихря будут в отсутствие других эффектов создавать относительный вихрь.

Полученные результаты вытекают из исследований А.А.Фридмана, который показал, что для сохранения векторных линий вектора  $\vec{A}$  и интенсивности векторных трубок необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{d\vec{A}}{dt} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{V}) = 0. \quad (4.3.11)$$

Если  $\bar{A} \equiv \Omega_a$ , то уравнение (4.3.11) точно совпадает с (4.3.7) при отсутствии эффектов бароклинности и вязкости.

Третий член в уравнении (4.3.7) описывает вклад эффекта бароклинности на изменение со временем абсолютного и относительного вихря в движущейся жидкости. Действительно, как показано в п. 4.2, векторное произведение  $\nabla\rho \times \nabla p$  отлично от нуля лишь для бароклинной жидкости, в которой изобаро-изостерические поверхности пересекаются. Поэтому, если в начальный момент  $t$  абсолютный или относительный вихри отсутствовали, то за счет бароклинного механизма в момент  $t + \delta t$  эти вихри появляются.

Четвертый член в уравнении (4.3.7) отражает изменения абсолютного и относительного вихрей за счет эффектов вязкости, порождающих диффузию относительного вихря.

Как следует из векторного анализа, если  $\nabla^2\Omega > 0$ , то среднее значение  $\Omega$  на бесконечно малой окружности с центром в исследуемой точке больше его значения в этой точке. Если  $\nabla^2\Omega < 0$ , то среднее значение меньше значения в самой точке. Из уравнения вихря (4.3.7) вытекает, что при положительном  $\nabla^2\Omega$  за счет вклада члена  $\nu\nabla^2\Omega$  вихрь<sup>1</sup> будет возрастать со временем, а при отрицательном  $\nabla^2\Omega$  - уменьшаться со временем. Таким образом, вязкость стремится уравнивать значения  $\Omega$  в пространстве. Процесс выравнивания величин вихрей есть диффузия вихрей. Итак, вязкостный член в уравнении вихря определяет его изменение за счет диффузии относительного вихря.

#### 4.4. Геофизические приложения уравнения вихря

В геофизической гидродинамике большое внимание уделяется изучению течений, для которых число Россби мало, т.е. относительный вихрь мал по сравнению с планетарным. Естественно, что для существования таких движений должен выполняться ряд условий. Выясним, какое ограничение необходимо наложить на характер движения, в котором временные масштабы велики по сравнению с периодом вращения Земли. С этой целью воспользуемся уравнением вихря скорости (4.3.7) в предположении отсутствия трения и выполнения условия  $\bar{\Omega} \ll 2\bar{\omega}$

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{\Omega} = (2\bar{\omega} \cdot \nabla)\bar{V} - 2\bar{\omega}(\nabla \cdot \bar{V}) + \frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^2}. \quad (4.4.1)$$

Оценим порядок каждого члена уравнения (4.4.1). Порядок величины

<sup>1</sup> В дальнейшем при употреблении термина “вихрь” будем понимать, что это относится и к абсолютному, и к относительному вихрю.



первого члена (4.4.1) есть  $\Omega/\tau$ , где  $\tau$  - характерный временной масштаб движения. Если учесть, что для геофизических приложений в первом приближении можно принять, что отношение вертикальной скорости к горизонтальной близко к отношению вертикального масштаба к горизонтальному, то порядок второго члена есть  $\Omega U / L$ . Если принять, что вихревые трубки перемещаются со скоростью потока, то порядки первого и второго членов левой части уравнения (4.4.1) близки и  $O\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right) = \frac{\Omega U}{L} = \frac{U^2}{L^2}$ , так как  $O(\Omega) = U / L$ . В правой части (4.4.1) первое и второе слагаемое имеют одинаковый порядок величин, равный  $\frac{2\omega U}{L}$ . Тогда порядок отношения

$$O\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} : (2\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V}\right) = \frac{U^2}{L^2} : \frac{2\omega U}{L} = \frac{U}{2\omega L} = \varepsilon. \quad (4.4.2)$$

Так как для крупномасштабных процессов число Россби  $\varepsilon \ll 1$ , то для таких движений уравнение вихря (4.4.1) можно переписать в виде

$$(2\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} - 2\vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{V}) = -\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}. \quad (4.4.3)$$

Таким образом, соотношение (4.4.3) является условием существования движений с временным масштабом, большим периода вращения Земли. Оно означает, что вихрь, возникающий из-за бароклинности, должен компенсироваться изменением вихря, создаваемым растяжением и изгибом вихревых трубок.

Из уравнения (4.4.3) можно получить количественные оценки изменчивости составляющих скорости крупномасштабных движений в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Если записать уравнение (4.4.3) в покомпонентной форме, в системе координат, где ось  $z$  параллельна вектору  $\vec{\omega}$ , то с учетом порядков членов можно получить следующие соотношения:

$$2\omega_z \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right), \quad (4.4.4)$$

$$2\omega_z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right), \quad (4.4.5)$$

$$2\omega_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right). \quad (4.4.6)$$

Уравнения (4.4.4) и (4.4.5) связывают изменение скорости по вертикали с изменением давления и плотности вдоль вертикальной и горизонтальной

осей координат. Уравнение (4.4.6) связывает горизонтальную дивергенцию скорости с изменением давления и плотности в горизонтальной плоскости.

Отметим, что порядок отношения  $\frac{\delta\rho}{\rho}$ , где  $\delta\rho$  - изменение плотности на горизонтальном масштабе  $L$ , близок к порядку  $\rho'/\rho$ , где  $\rho'$  - отклонение плотности от его гидростатического значения. В главе 5 будет показано, что  $O\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = O\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 2\omega U$  и  $O\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) \leq \varepsilon$ . Поэтому правая часть соотношения

(4.4.6) сопоставима по порядку с членом  $\frac{d\bar{\Omega}}{dt}$ , которым мы уже пренебрегли.

Следовательно, для крупномасштабных движений с временным масштабом, большим периода вращения Земли, плоская дивергенция близка к нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4.4.7)$$

Для крупномасштабных движений, когда бароклиный вектор равен нулю, из (4.4.4) - (4.4.5) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (4.4.8)$$

Из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости с учетом (4.4.7) находим

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.4.8a)$$

Отсюда с учетом (4.4.3) для баротропных течений имеем

$$(2\bar{\omega} \cdot \nabla)\bar{V} - 2\bar{\omega}(\nabla \cdot \bar{V}) = 0. \quad (4.4.9)$$

Таким образом, для движений с временными масштабами большими периодами вращения Земли применима *теорема Тейлора-Праудмена*, согласно которой компоненты относительной скорости не зависят от вертикальной координаты, а дивергенция равна нулю. Из этой теоремы вытекает, что если вертикальная скорость равна нулю на некотором уровне, например на твердой горизонтальной поверхности, то она будет равна нулю на всех уровнях (для всех  $z$ ). Следовательно, тогда движение будет целиком двумерным и может быть представлено как движение столбиков, не меняющих свою ориентацию в процессе движения. Эти столбики чаще всего называют столбиками Тейлора и реже столбиками Праудмена.

Если принять, что соотношения (4.4.8) и (4.4.8a) являются приближенными, то с учетом близости трехмерной дивергенции к нулю из (4.4.9) полу-

ЧИМ

$$\begin{aligned}
 2\omega_x \frac{\partial u}{\partial x} + 2\omega_y \frac{\partial u}{\partial y} + 2\omega_z \frac{\partial u}{\partial z} &= 2\vec{\omega} \cdot \nabla u = 0, \\
 2\omega_x \frac{\partial v}{\partial x} + 2\omega_y \frac{\partial v}{\partial y} + 2\omega_z \frac{\partial v}{\partial z} &= 2\vec{\omega} \cdot \nabla v = 0, \\
 2\omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + 2\omega_y \frac{\partial w}{\partial y} + 2\omega_z \frac{\partial w}{\partial z} &= 2\vec{\omega} \cdot \nabla w = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.4.10}$$

Таким образом, приходим к выводу о сильной взаимозависимости компонент скорости течения в различных сечениях, перпендикулярных оси вращения.

Важно отметить, что теорема Тейлора-Праудмена основана на ряде предположений относительно полного уравнения вихря. Отброшенные члены никогда точно не равны нулю, поэтому в реальных условиях естественно ожидать отклонений от движения в виде не меняющих ориентацию столбиков.

#### 4.5. Потенциальный вихрь

В предыдущих разделах было выведено уравнение вихря и выписаны основные физические механизмы, определяющие изменение вихря с учетом его векторного характера. Наряду с этим в геофизической гидродинамике широкое распространение получил метод анализа, основанный на инвариантных величинах, т.е. не меняющихся во времени в движущемся элементарном объеме. К ним относятся так называемые адиабатические инварианты, например, энтропия, потенциальная температура, потенциальная плотность. Широкое применение в геофизической гидродинамике получил *потенциальный вихрь*, представляющий собой комбинацию абсолютного вихря и градиента любой скалярной величины  $\lambda$ , удовлетворяющей уравнению вида

$$\frac{d\lambda}{dt} = \psi, \tag{4.5.1}$$

где  $\psi$  - некоторый источник характеристики  $\lambda$ .

Если  $\lambda$  есть термодинамическая функция и поэтому  $\lambda = \lambda(p, \rho)$ , то в уравнении (4.5.1)  $\psi$  есть, например, внешний приток тепла. В этом случае

$$\nabla \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \nabla \rho \tag{4.5.2}$$

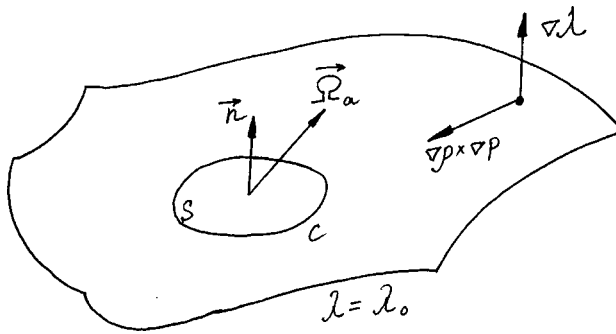
и скалярное произведение  $\nabla \lambda$  на бароклинный вектор  $\nabla \rho \times \nabla p$  обращается в

нуль, т.е. этот бароклиный вектор лежит на поверхности постоянной  $\lambda$  (см. рис. 4.10).

Ограничимся рассмотрением процессов вне вязкостных слоев, обычно располагающихся вблизи подстилающих поверхностей.

Тогда согласно (4.2.17) при отсутствии трения

$$\frac{d}{dt} \int_s (\vec{\Omega}_a \cdot \vec{n}) ds = \int_s \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \vec{n} ds, \quad (4.5.3)$$



где  $s$  - площадь произвольной жидкой поверхности, а  $\vec{n}$  - вектор единичной нормали к этой поверхности. Допустим, что контур  $C$ , ограничивающий  $s$ , выбран сначала лежащим на поверхности  $\lambda = \text{const}$  (см. рис. 4.10). Тогда в силу сохранения  $\lambda$  при  $\psi = 0$ ,

Рис.4.10. Выбор контура, лежащего на поверхности постоянной  $\lambda$ , для вывода закона сохранения потенциального вихря.

поверхность  $\lambda = \lambda_0$  состоит все время из одних и тех же частиц, т.е.  $\lambda = \lambda_0$  есть жидкая поверхность, а контур  $C$  представляет собой жидкую линию и все время лежит на этой поверхности. Как было уже показано, если  $\lambda$  термодинамическая функция, то бароклиный вектор лежит на этой поверхности и, следовательно, правая часть уравнения (4.5.3) равна нулю. Следовательно выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_a \cdot \vec{n} \delta s) = 0, \quad (4.5.4)$$

где  $\delta s$  - малый элемент площади, охваченной контуром  $C$ , а  $\vec{\Omega}_a$  - средняя величина вихря по площади  $\delta s$ , близкая к значению  $\vec{\Omega}_a$  в центре  $\delta s$ .

Следует обратить внимание на тот факт, что если бароклиный вектор обращается в нуль, то не обязательно ограничивать выбор  $\lambda$  только термодинамическими функциями. В этом случае допустим более широкий класс характеристик  $\lambda$ , требуется лишь выполнение условия его сохранения.

Перепишем (4.5.4), заменив скалярное произведение через модули соответствующих векторов и угол  $\alpha$  между ними,

$$\frac{d}{dt} (|\vec{\Omega}_a| \delta s \cos \alpha) = 0. \quad (4.5.5)$$

Подчеркнем, что угол  $\alpha$  есть также угол между  $\vec{\Omega}_a$  и  $\nabla\lambda$ . Обозначим через  $\delta\lambda$  разность значений  $\lambda$  на двух очень близких поверхностях постоянных  $\lambda$ , а  $\delta n$  - расстояние между ними. Величина  $\delta\lambda$  и масса жидкости  $\rho\delta s\delta n$ , заключенная в объеме  $\delta s\delta n$ , сохраняются при движении, т.е.

$$\frac{d}{dt}(\rho\delta s\delta n) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(\delta\lambda) = 0. \quad (4.5.6)$$

Отсюда следует инвариантность величины

$$\frac{d}{dt} \frac{|\vec{\Omega}_a| \cos \alpha \delta\lambda}{\rho \delta n} = 0. \quad (4.5.7)$$

Переходя к пределу при  $\delta n \rightarrow 0$  и к скалярному произведению, получим

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{\Omega}_a \frac{\nabla\lambda}{\rho} = 0 \right). \quad (4.5.8)$$

Отсюда следует, что

$$\Pi = \vec{\Omega}_a \cdot \frac{\nabla\lambda}{\rho} \quad (4.5.9)$$

сохраняется в каждой жидкой частице. Скалярная величина  $\Pi$  называется *потенциальным вихрем*.

Так как  $\Pi$  сохраняется при движении жидкой частицы, то когда расстояние между двумя  $\lambda$  - поверхностями увеличивается, то  $\nabla\lambda$  должен уменьшаться, а проекция вектора  $\vec{\Omega}_a/\rho$  на направление  $\nabla\lambda$  должно пропорционально увеличиваться. Если плотность меняется не очень сильно, то увеличение  $\vec{\Omega}_a/\rho$  сводится к увеличению  $\vec{\Omega}_a$ . Таким образом, можно представить себе, что существует некоторый запас завихренности, связанный с наличием градиента  $\lambda$ , который может расходоваться при удалении  $\lambda$  - поверхностей друг от друга из-за действия механизма растяжения вихревых трубок. Таким образом, механизм растяжения или сжатия вихревых трубок приводит к изменению проекции абсолютного вихря на направление градиента  $\lambda$ . Изменение проекции абсолютного вихря складывается из изменений сумм проекций относительного и планетарного вихрей. Так как направления  $\vec{\omega}$  и  $\nabla\lambda$  не меняются со временем, т.е. угол между ними остается постоянным, то изменение величины  $|\nabla\lambda|$  приводит к изменению модуля и направления относительного вихря. Другими словами механизм растяжения вихревых трубок может индуцировать относительную завихренность при движении жидких частиц в поле планетарного вихря.

Рассмотрим геофизическое приложение понятия потенциального вих-

ря. Как было показано в п. 3.3, вертикальная устойчивость среды определяется стратификацией потенциальной плотности, которая является функцией от энтропии и термодинамически активной примеси. В связи с этим, при использовании понятия потенциального вихря в качестве функции  $\lambda$  можно использовать энтропию и потенциальный вихрь запишется в виде

$$\tilde{\Omega} = \rho^{-1} \bar{\Omega}_a \cdot \nabla \eta. \quad (4.5.10)$$

Величина  $\tilde{\Omega}$  объединяет в себе эффекты вращения ( $\bar{\Omega} + 2\bar{\omega}$ ) и стратификации ( $\nabla \eta$ ). Можно показать, что проекция уравнения вихря (4.3.7) на термодинамическую вертикаль есть уравнение изменения потенциального вихря  $\tilde{\Omega}$  вдоль траектории движения. Под термодинамической вертикалью мы понимаем направление  $\bar{\ell} = \nabla \eta |\nabla \eta|^{-1}$  наибольшего изменения энтропии в данной точке.

Поскольку для атмосферных процессов глобальных масштабов изэнтропические поверхности приближенно горизонтальны, то направление  $\bar{\ell}$  близко к вертикальному. В связи с этим при исследовании атмосферных адиабатических процессов (в случае отсутствия фазовых переходов) в качестве потенциального вихря используется величина

$$\frac{\Omega_z + 2\omega_z}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (4.5.11)$$

которая является адиабатическим лагранжевым инвариантом.

Следует отметить, что для океанических процессов роль солёности в функции  $\eta(\rho, p, s)$  существенна и потенциальный вихрь (4.5.10) перестает быть лагранжевым инвариантом даже при адиабатических процессах. В этом случае вместо обычной энтропии вводят псевдоэнтропию ( $\eta_0$ ) - энтропию, изопикнически и изобарически приведенную к некоторой стандартной величине солёности ( $s_0$ ). Используя (3.1.11) и (3.1.12), получаем соотношение

$$d\eta_0 = \frac{c_{p0}}{\alpha_0 T_0 \rho} \left[ -d\rho + \frac{1}{c_0^2} \right] dp, \quad (4.5.12)$$

где индексом "0" отмечены величины функций от  $\rho$ ,  $p$  и  $s$  при  $s = s_0$ . Разделив обе части (4.5.12) на  $dt$ , используя уравнение неразрывности и соотношение (3.1.12) для адиабатических процессов

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt},$$

получим

$$\frac{d\eta_0}{dt} = \frac{c_{p0}(1 - c^2/c_0^2)}{\alpha_0 T_0} \operatorname{div} \vec{V}. \quad (4.5.13)$$

Повторяя вывод формулы для потенциального вихря, с учетом (4.5.13) имеем

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\Omega}_a \cdot \nabla \eta_0}{\rho} \right) = \vec{\Omega}_a \cdot \nabla \left[ \frac{c_{p0}}{\alpha_0 T_0} (1 - c^2/c_0^2) \operatorname{div} \vec{V} \right]. \quad (4.5.14)$$

Это уравнение для псевдопотенциального вихря  $\frac{\vec{\Omega}_a \cdot \nabla \eta_0}{\rho}$ , которое в наибольшей степени применимо для океанических процессов. Так как изменение скорости звука в океане составляет всего несколько процентов и морская вода практически несжимаема, то для океана правая часть (4.5.14) обращается в нуль. Следовательно, псевдопотенциальный вихрь является приближенно адиабатическим лагранжевым инвариантом.





достаточно точно описывали важные для крупномасштабных процессов движения первого рода, но не содержали бы среди своих решений несущественные для этих движений решения второго рода.

Перейдем к рассмотрению квазистатистического и квазигеострофического приближений как метода описания крупномасштабных природных течений. Покажем, что эти приближения естественным образом вытекают из оценки членов в уравнениях гидротермодинамики.

### 5.1. Гидростатическое и геострофическое приближения

Во все эволюционные уравнения гидротермодинамики входят полные производные по времени от геофизических параметров  $\left(\frac{df}{dt}\right)$ , которые представляют сумму локальной  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$ , адвективных  $\left(u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y}\right)$  и конвективной  $\left(w\frac{\partial f}{\partial z}\right)$  производных. Покажем, что порядки указанных производных близки, если выполняются следующие условия:

- порядок изменения величины  $f$  на характерных временных и пространственных масштабах близок к порядку самой величины  $f$   $O(\delta f) = O(f) = F$ , если  $f$  - знакопеременна, и  $O(\delta f) = \Delta f$ , если  $f$  одного знака;

- характерные масштабы длины в горизонтальной плоскости не зависят от направления (условия изотропности);

- порядки горизонтальных составляющих скорости близки и равны характерному масштабу горизонтальной скорости  $0(u) = 0(v) = U$ ;

- отношение характерных масштабов вертикальной и горизонтальной скоростей равно отношению характерных масштабов длин в вертикальной и горизонтальной плоскостях  $O(w/v) = H/L$ ;<sup>1</sup>

- характерный временной масштаб есть отношение характерного горизонтального масштаба длины к характерному масштабу горизонтальной скорости  $\tau = L/U$ .

В этом случае можно записать

$$O\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{F}{\tau} = \frac{FU}{L},$$

---

<sup>1</sup> Как будет показано далее, порядок величины  $w$ , полученный из данного соотношения, является ее верхней оценкой/

$$O\left(u \frac{\partial f}{\partial x}\right) = O\left(v \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{FU}{L},$$

$$O\left(w \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{FW}{H} = \frac{FU}{L}.$$

Таким образом

$$O\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{FU}{L}. \quad (5.1.1)$$

В соотношении (5.1.1) под  $f$  будем понимать скалярную или векторную величину. Во втором случае  $F$  есть характерный масштаб модуля вектора.

Запишем уравнение (2.5.28a) в покомпонентной форме

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v - 2\omega_y w + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (5.1.2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2\omega_x w - 2\omega_z u + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (5.1.3)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\omega_y u - 2\omega_x v + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g. \quad (5.1.4)$$

Заполним таблицу 1 порядков членов уравнений движения (5.1.2) - (5.1.4), приняв во внимание, что  $O(\delta f) = O(f)$ , если  $f = u, v, w$ , и  $O(\delta p) = \Delta p$  - величина характерного перепада давления на характерном масштабе длины.

Таблица 1

| Номер уравнения | Номер члена уравнения |   |             |             |             |             |             |     |
|-----------------|-----------------------|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----|
|                 | 1                     | 2   | 3           | 4           | 5           | 6           | 7           | 8   |
| (5.1.2)         | $U^2/L$               | $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta P}{L}$ | $2\omega U$ | $2\omega W$ | $\nu U/L^2$ | $\nu U/L^2$ | $\nu U/H^2$ | 0   |
| (5.1.3)         | $U^2/L$               | $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta P}{L}$ | $2\omega W$ | $2\omega U$ | $\nu U/L^2$ | $\nu U/L^2$ | $\nu U/H^2$ | 0   |
| (5.1.4)         | $WU/L$                | $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta P}{H}$ | $2\omega U$ | $2\omega U$ | $\nu W/L^2$ | $\nu W/L^2$ | $\nu W/H^2$ | $g$ |

Теперь все величины в табл.1 разделим на  $2\omega U$  и получим (табл.2)

Таблица 2

| Номер уравнения | Номер члена уравнения |            |       |       |        |        |            |     |
|-----------------|-----------------------|------------|-------|-------|--------|--------|------------|-----|
|                 | 1                     | 2          | 3     | 4     | 5      | 6      | 7          | 8   |
| (5.1.2)         | $\varepsilon$         | $\Delta$   | 1     | $H/L$ | $E$    | $E$    | $EL^2/H^2$ | 0   |
| (5.1.3)         | $\varepsilon$         | $\Delta$   | $H/L$ | 1     | $E$    | $E$    | $EL^2/H^2$ | 0   |
| (5.1.4)         | $\varepsilon H/L$     | $\Delta_1$ | 1     | 1     | $EH/L$ | $EH/L$ | $EL/H$     | $G$ |

Здесь

$$\varepsilon = \frac{U}{2\omega L}, \quad \Delta = \frac{1}{\rho} \frac{(\Delta p)_L}{2\omega LU}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\rho} \frac{(\Delta p)_H}{2\omega HU}, \quad E = \frac{\mu/\rho}{2\omega L^2}, \quad G = \frac{g}{2\omega U}. \quad (5.1.5)$$

Таким образом, соотношение членов в уравнениях движения (5.1.2) - (5.1.4) определяется числовыми значениями выписанных параметров (5.1.5) и величиной отношения горизонтального и вертикального характерных масштабов длины.

В качестве примера приведем оценки для крупномасштабных атмосферных процессов: число Россби  $\varepsilon \cong 0,1$ , параметры  $E \cong \frac{10^{-6}}{10^{-4}10^{12}} = 10^{-14}$ ,  $G = \frac{10}{10^{-4}10} = 10^4$ ,  $H/L = \frac{10^4}{10^6} = 10^{-2}$ . Тогда  $\varepsilon \frac{H}{L} = 10^{-3}$ ,  $E \frac{H}{L} = 10^{-16}$ ,  $E \frac{L^2}{H^2} = 10^{-10}$ .

Оценку второго члена в уравнениях движения (5.1.2) - (5.1.4) получим после сопоставления всех остальных членов как остаточную величину. При таком подходе найдем, что величина  $\Delta$  должна быть порядка единицы и в первом уравнении движения (5.1.2) уравновешиваются второй и третий члены, а во втором (5.1.3) - второй и четвертый. В третьем уравнении движения (5.1.4) должны уравновешиваться второй и восьмой члены. Тогда на основании этих оценок можно получить характерные перепады давления, выраженные через динамические характеристики:

$$\frac{(\Delta p)_L}{\rho} = 2\omega UL, \quad \frac{(\Delta p)_H}{\rho} = gH. \quad (5.1.6)$$

Для атмосферы, например, получим, что в горизонтальной плоскости характерный перепад давления составляет 10 гПа, а в вертикальной на расстоянии 1 км - 100 гПа, что согласуется с данными наблюдений.

Вернемся к результатам анализа табл.2. Этот анализ показал, что для

крупномасштабных геофизических процессов уравнения движения (5.1.2) - (5.1.4) принимают вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\omega_z v \rho, \quad (5.1.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\omega_z u \rho, \quad (5.1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (5.1.9)$$

Соотношения (5.1.7) - (5.1.8) принято называть геострофическим балансом или уравнениями движения в геострофическом приближении. Составляющие скорости, полученные из соотношений (5.1.7) - (5.1.8),

$$u_g = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.1.10)$$

называются составляющими *вектора геострофической скорости*  $\vec{V}_g$ . Так как (5.1.10) получено при условии  $O(w/v) = H/L$ , а  $H/L \ll 1$ , то геострофическое движение является *квазигоризонтальным*.

В векторной форме соотношения (5.1.10) могут быть записаны в виде

$$\vec{V}_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} (\vec{k} \times \nabla p). \quad (5.1.11)$$

Согласно (5.1.11) геострофическая скорость перпендикулярна горизонтальному градиенту давления и отклонена от него влево (в северном полушарии).

В северном полушарии, где  $f = 2\omega_z > 0$ , геострофическая скорость такова, что для наблюдателя, смотрящего вниз по потоку, более высокое давление будет справа. В южной полусфере ( $f < 0$ ) в подобном же случае более высокое давление будет слева.

В геофизической гидродинамике широкое распространение получило понятие геопотенциала изобарической поверхности (2.4.5)  $\Phi = gz$ . При этом вместо декартовой  $z$ -системы координат используется  $p$ -система координат, которая отличается от декартовой только тем, что вертикальная координата отсчитывается в единицах давления. Подчеркнем, что при этом направление горизонтальных и вертикальных осей остается одним и тем же для обеих систем. Так как в дальнейшем мы будем использовать обе системы координат, то для удобства приведем формулы перехода от декартовой к  $p$ -системе координат

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{1}{\Phi_p} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial p}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - \frac{1}{\Phi_p} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial p}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{g}{\Phi_p} \frac{\partial f_1}{\partial p},\end{aligned}\quad (5.1.12)$$

где  $\Phi_p = \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$ , индекс "1" относится к изобарической системе.

Для определения геострофической скорости часто используют формулы (5.1.7) - (5.1.9), заменив в них давление величиной геопотенциала. Действительно, если с учетом (5.1.12) записать

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial y_1},\end{aligned}\quad (5.1.13)$$

так как  $\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0$ .

Если подставить эти соотношения в (5.1.10), то получим

$$u_g = -\frac{1}{2\omega_z} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{2\omega_z} \frac{\partial \Phi}{\partial x}.\quad (5.1.14)$$

В дальнейшем индекс "1" опущен, так как  $x = x_1$  и  $y = y_1$ . В векторной форме геострофическая скорость может быть выражена через наклон изобарической поверхности

$$\vec{V}_g = \frac{\vec{k}}{2\omega_z} \times \nabla \Phi.\quad (5.1.15)$$

Уравнение (5.1.9) есть *уравнение гидростатики* и выражает тот факт, что в движущейся среде для крупномасштабных процессов выполняется гидростатическое приближение.

Найдем соотношение между величинами давления и плотности в состоянии покоя и при движении. Из соотношений (5.1.7) - (5.1.9) следует, что в состоянии покоя ( $u = v = 0$ ) давление и плотность зависят только от вертикальной координаты. Представим поля давления и плотности в виде

$$p = p_s(z) + p'(x, y, z), \quad \rho = \rho_s(z) + \rho'(x, y, z),\quad (5.1.16)$$

где  $p_s$  и  $\rho_s$  - давление и плотность в состоянии покоя, а  $p'$  и  $\rho'$  - отклонения

от этого основного состояния, обусловленные существованием ветров и течений. Тогда уравнения (5.1.7) - (5.1.9) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial p'}{\partial x} &= 2\omega_z v \rho, \\ \frac{\partial p'}{\partial y} &= -2\omega_z u \rho, \\ \frac{\partial p'}{\partial z} &= -\rho' g,\end{aligned}\quad (5.1.17)$$

так как  $\frac{\partial p_s}{\partial z} = -\rho_s g$ ,  $\frac{\partial p_s}{\partial x} = \frac{\partial p_s}{\partial y} = 0$ .

Так как порядки изменения отклонения давления на характерном горизонтальном масштабе и самой величины  $p'$  одинаковы, то из первых двух соотношений (5.1.17) получаем, что

$$O(p') = \rho 2\omega U L. \quad (5.1.18)$$

Поэтому оценка  $\Delta p$  в (5.1.6) определяет характерный масштаб изменения давления, обусловленный только движением.

Оценим порядок возмущения плотности, обусловленного движением. Из третьего уравнения (5.1.17) получаем

$$O(\rho') = \frac{O(p')}{gH} = \frac{\rho 2\omega U L}{gH}. \quad (5.1.19)$$

Отсюда получаем для атмосферы ( $U = 10$  м/с)

$$O\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = \frac{2\omega U L}{gH} = \frac{10^{-4} \cdot 10 \cdot 10^2}{10} = 10^{-2} \ll 1, \quad (5.1.20)$$

а для океана ( $U = 0,1$  м/с)  $O\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = 10^{-4} \ll 1$ , так что  $\rho' \ll \rho_s$ . для геофизических объектов.

Таким образом, величина плотности в состояниях покоя и движения мало отличаются. Поэтому в соотношениях (5.1.10) для расчета составляющих геострофической скорости можно использовать значения плотности  $\rho_s$ , являющейся функцией только термодинамических параметров. Тогда

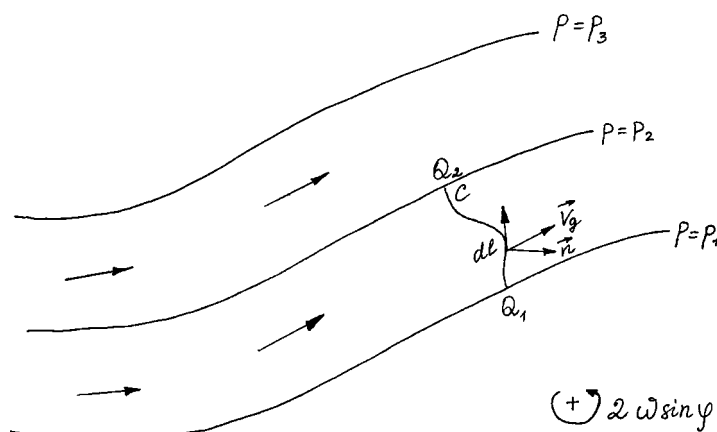
$$u_g = -\frac{1}{f\rho_s} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{f\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.1.21)$$

## 5.2. Характеристики геострофического движения

Рассмотрим следующие параметры геострофического движения: перенос массы через цилиндрическую поверхность, для которой выбранная кривая  $C$  является направляющей, а высота равна единице, изменение геострофической скорости с высотой (термический ветер) и дифференциальные характеристики поля скорости (дивергенция, завихренность).

Для оценки переноса массы  $M$  вдоль изобар (рис. 5.1) воспользуемся соотношением (2.2.49), подставив вместо скорости ее геострофический эквивалент:

$$M = \int_{(Q_1)}^{(Q_2)} \rho (\vec{V}_g \cdot \vec{n}) dl = \int_{(Q_1)}^{(Q_2)} \rho (u_g dy - v_g dx) = - \int_{(Q_1)}^{(Q_2)} \frac{\rho}{2\omega_z \rho_s} \left( \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) = - \int_{(Q_1)}^{(Q_2)} \frac{\rho}{\rho_s} \frac{dp}{2\omega_z}. \quad (5.2.1)$$



Параметр Кориолиса  $f = 2\omega_z = 2\omega \sin \varphi$  на горизонтальном масштабе, характерном для крупномасштабных процессов  $L = 1000$  км, малом по сравнению с расстоянием от экватора до полюса (порядка 10000 км), можно считать практически постоянной величиной.

Рис .5.1. Геострофический поток со скоростью  $\vec{V}_g$ .

Кроме того, для крупномасштабных процессов с высокой степенью точности выполняется уравнение статики, т.е.  $\rho / \rho_s \cong 1$ .

Тогда

$$M = \frac{p(Q_1)}{f} - \frac{p(Q_2)}{f}, \quad (5.2.2)$$

т.е. перенос массы вдоль изобар не зависит от пути интегрирования. Величина  $p/f$  есть функция тока для горизонтального геострофического потока массы, а  $p/(f\rho_s)$  - функция тока для геострофической скорости.

Выпишем формулы для основных дифференциальных характеристик поля геострофической скорости. Дивергенция геострофической скорости с

использованием (5.1.19) равна

$$D_g = \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{f\rho_s} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{f\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{1}{\rho_s} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{f} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right]. \quad (5.2.3)$$

При использовании стандартной декартовой системы, в которой ось  $x$  направлена по касательной к кругу широты, а ось  $y$  - к меридиану,  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{f} \right) = 0$ ,

а  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{f} \right) = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\beta}{f^2}$ , где  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\omega}{a} \cos \varphi$ ,  $a$  - радиус Земли. Тогда

$$D_g = -\frac{\beta}{f} v_g = -\frac{ctg\varphi}{a} v_g. \quad (5.2.4)$$

Завихренность геострофической скорости

$$c_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{\rho_s f} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\beta}{f} u_g = \frac{1}{\rho_s f} \nabla_s^2 p + \frac{ctg\varphi}{a} u_g. \quad (5.2.5)$$

На горизонтальных масштабах  $L \cong 1000$  км изменение параметра Кориолиса близко к нулю. Поэтому для крупномасштабных геофизических движений дивергенция геострофического течения принимается равной нулю, т.е. геострофическое течение является бездивергентным.

Оценки членов в выражении (5.2.5) можно записать в виде: первый член  $\frac{O(\delta p)}{\rho_s f L^2}$ , второй член  $\frac{ctg\varphi}{a} U$ .

Величину  $O(\delta p)$  найдем из геострофических соотношений

$$O(\delta p) = \rho_s f L U. \quad (5.2.6)$$

Тогда отношение второго к первому слагаемому в выражении для  $c_g$  (5.2.5) дает

$$\frac{L ctg\varphi}{a} \cong \frac{10^6 \cdot 1}{6,3 \cdot 10^6} \cong 0,16. \quad (5.2.7)$$

Следовательно, второй член в выражения для  $c_g$  меньше первого и поэтому во многих практических приложениях завихренность геострофического течения принимается пропорциональной лапласиану давления. Однако к подобным допущениям следует относиться весьма осторожно, так как различие между первым и вторым членами в выражении для  $c_g$  не столь значи-



тельна.

### 5.3. Изменение геострофической скорости по вертикали

Для нахождения изменения геострофической скорости по вертикали продифференцируем по  $z$  соотношения (5.1.21)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_g}{\partial z} &= -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{1}{f \rho_s^2} \frac{\partial \rho_s}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{f \rho_s} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\frac{u_g}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial z} + \frac{g}{f \rho_s} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_g}{\partial z} &= -\frac{v_g}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial z} - \frac{g}{f \rho_s} \frac{\partial \rho}{\partial x}.\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

Для физического анализа изменения геострофического течения по вертикали удобно воспользоваться представлением геофизических величин на поверхностях постоянного давления, т.е. в  $p$ -системе координат. Если воспользоваться таким представлением, то производные от плотности вдоль изобарической поверхности по осям  $x$  и  $y$  согласно (5.1.12) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_p &= \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial z}, \\ \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_p &= \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial z}.\end{aligned}\quad (5.3.2)$$

Если в правых частях (5.3.1) величины  $u_g$  и  $v_g$  заменить через (5.1.14) и воспользоваться (5.3.2), то получим выражения для производных от составляющих геострофического течения по вертикали в виде

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{g}{\rho f} \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_p, \quad \frac{\partial v_g}{\partial z} = -\frac{g}{\rho f} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_p.\quad (5.3.3)$$

При выводе (5.3.3) в соответствии с приведенными ранее оценками взяты

$\frac{\partial \rho_s}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z}$  с точностью до малой величины.

В векторной форме

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial z} = -\frac{g}{\rho f} \vec{k} \times (\nabla \rho)_p.\quad (5.3.4)$$

Таким образом, изменение геострофического течения по вертикали зависит от горизонтального градиента плотности вдоль изобарической поверх-

ности. Для баротропного случая, когда изобарические и изостерические поверхности совпадают, геострофическое течение не меняется по вертикали и геострофическое приближение сразу дает нам теорему Тейлора - Праудмена.

Для практических приложений удобно ввести вектор приращения скорости геострофического течения при переходе от изобарической поверхности  $p_1$  к  $p_2$ . Назовем этот вектор вектором скорости термического течения  $\vec{V}_T$ . Если толщина слоя  $z_2 - z_1$  между указанными изобарическими поверхностями мала, то

$$\vec{V}_T = \frac{\partial \vec{V}_g}{\partial z} (z_2 - z_1) = -\frac{g\delta z}{\rho f} \vec{k} \times (\nabla \rho)_p. \quad (5.3.5)$$

Из последней формулы следует, что вектор термического течения направлен вдоль изостер на изобарической поверхности так, что слева от него находится область высоких, а справа - низких значений плотности в северном полушарии. Термин термическое течение введем по аналогии с термическим ветром, применяемым в метеорологии.

Для атмосферы справедлив закон идеального газа и соотношение (5.3.5) для термического ветра записывается в виде

$$\vec{V}_T = \frac{g\delta z}{fT} \vec{k} \times (\nabla T)_p. \quad (5.3.6)$$

Покажем, что для океана с большей степенью точности в формуле (5.3.5) градиент плотности можно вычислять вдоль горизонтальной поверхности. Действительно, выполним оценку членов в соотношениях (5.3.1).

Порядок первого члена  $O\left(\frac{u_g}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial z}\right) = O\left(\frac{v_g}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial z}\right) = \frac{U}{\tilde{H}}$ , где  $\tilde{H} = \left(-\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial z}\right)^{-1}$  -

вертикальный масштаб изменения плотности в океане. Подчеркнем, что на расстоянии  $\tilde{H}$  изменение плотности сопоставимо с ее величиной. Знак минус взят потому, что ось  $z$  направлена вертикально вверх, а плотность с глубиной увеличивается. Порядок второго члена

$$O\left(\frac{g}{f\rho_s} \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = O\left(\frac{g}{f\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial x}\right) = \frac{g}{fL} \frac{\rho'}{\rho_s}. \quad (5.3.7)$$

При выводе этой оценки было учтено, во-первых, что  $\rho(x, y, z) = \rho_s(z) + \rho'(x, y, z)$ , во-вторых, изменение отклонения плотности от гидростатического значения на масштабе  $L$  сопоставимо с самим значением отклонения. Согласно (5.1.20)

$$O\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = \frac{fUL}{gH}, \quad (5.3.8)$$

где  $H$  является вертикальным масштабом движения. Подставив (5.3.8) в (5.3.7), получим  $O\left(\frac{g}{f\rho_s} \frac{\partial\rho}{\partial x}\right) = \frac{U}{H}$ . Аналогично  $O\left(\frac{g}{f\rho_s} \frac{\partial\rho}{\partial y}\right) = \frac{U}{H}$ .

Таким образом, порядок первых членов в правых частях (5.3.1) равен отношению характерной скорости к вертикальному масштабу изменения плотности, вторых - отношению характерного масштаба скорости к характерному вертикальному масштабу движения. Так как отношение  $H/\tilde{H}$  составляет для океана  $10^{-3}$ , то первый член на три порядка меньше второго. Поэтому выражение для вектора скорости термического течения (5.3.5) для океана примет следующий вид

$$\vec{V}_T = -\frac{g\delta z}{\rho f} \vec{k} \times (\nabla\rho). \quad (5.3.9)$$

Таким образом, высказанное предположение о возможностях расчета градиента плотности вдоль горизонтальной поверхности доказано.

Геострофическое приближение, приводя к очень простым и изящным соотношениям, играет чрезвычайно важную роль в геофизической гидродинамике. Такие важные характеристики геофизических объектов как горизонтальная скорость, ее изменение с вертикальной координатой, завихренность однозначно определяются по полю давления. Однако при использовании геострофического приближения следует помнить, что оно неприменимо в экваториальных широтах, где необходимо разрабатывать другие подходы.

Подчеркнем, что геострофическое приближение является диагностическим соотношением. Однако это не означает, что поля давления и ветра не меняется со временем. При медленном изменении поля горизонтальной скорости со временем соответствующее ускорение Кориолиса будет все время уравновешиваться изменяющимся градиентом давления. Поэтому для исследования временной динамики полей скорости и давления необходимо использовать вместо уравнения для импульса такие уравнения, в которых с достаточной точностью можно учесть различия между силами барического градиента и Кориолиса. Таким свойством обладают уравнения для завихренности и потенциального вихря.

В связи с этим в дальнейших разделах широко используются указанные уравнения. При этом целесообразно вначале выделить основные закономерности динамики геофизических процессов в горизонтальной плоскости, а затем перейти к трехмерному пространству. В последующих разделах этот подход будет реализован.



## 6.1. Теория мелкой воды

Рассматривается несжимаемая ( $\frac{d\rho}{dt} = 0$ ) и невязкая ( $\mu = 0$ ) жидкость.

Предположение о несжимаемости жидкости означает независимость плотности от времени в каждой точке, т.е.  $\rho = const$ . В этом случае сразу же отделяется динамика от термодинамики и в теории мелкой воды мы будем оперировать только динамическими уравнениями. Уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6.1.1)$$

Из этого уравнения можно получить оценку масштаба вертикальной скорости

$$W \leq \delta \cdot U. \quad (6.1.2)$$

Здесь  $\delta = \frac{D}{L}$ ,  $U$  - масштаб горизонтальной скорости,  $D$  и  $L$  - вертикальный и горизонтальный масштабы движения соответственно. Подчеркнем, что основное условие, характеризующее теорию мелкой воды, состоит в том, что  $\delta \ll 1$ . Таким образом, вертикальная скорость значительно меньше горизонтальной скорости. Укажем, что оценка (6.1.2) является верхней, так как для геофизических полей характерна взаимная компенсация членов  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . Так как с точностью до числа Кибеля составляющие фактической скорости переноса близки к геострофическим, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cong \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = -\frac{ctg\varphi}{a} v_g \quad (6.1.3)$$

Так как  $O\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = O\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{U}{L}$ ,  $O\left(\frac{ctg\varphi}{a} v_g\right) = \frac{U}{a}$ , где  $a$  - радиус Земли, и  $L \ll a$ , тоотсюда следует сделанный вывод о взаимной компенсации членов  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . Таким образом, вертикальная скорость меньше оценки (6.1.2) и движения, изучаемые в теории мелкой воды, являются близкими к горизонтальным.

Рассмотрим слой движущейся жидкости постоянной плотности, высота которого  $h$  меняется в пространстве и во времени, т.е.  $h = h(t, x, y)$ . Нижняя неподвижная граница рассматриваемого слоя задается поверхностью  $z = h_B(x, y)$ . Давление на поверхности жидкости принимается постоянным. Основные характеристики исследуемого слоя движущейся жидкости приве-

дены на рис. 6.1. Так как толщина слоя жидкости  $h - h_B$  меняется в пространстве и во времени, то вводится средняя величина толщины  $D$ , которая и принимается за характерный вертикальный масштаб движения. Подчеркнем, что слой жидкости является плоским, а не сферическим и для него применимо ограничение  $f = \text{const}$ .

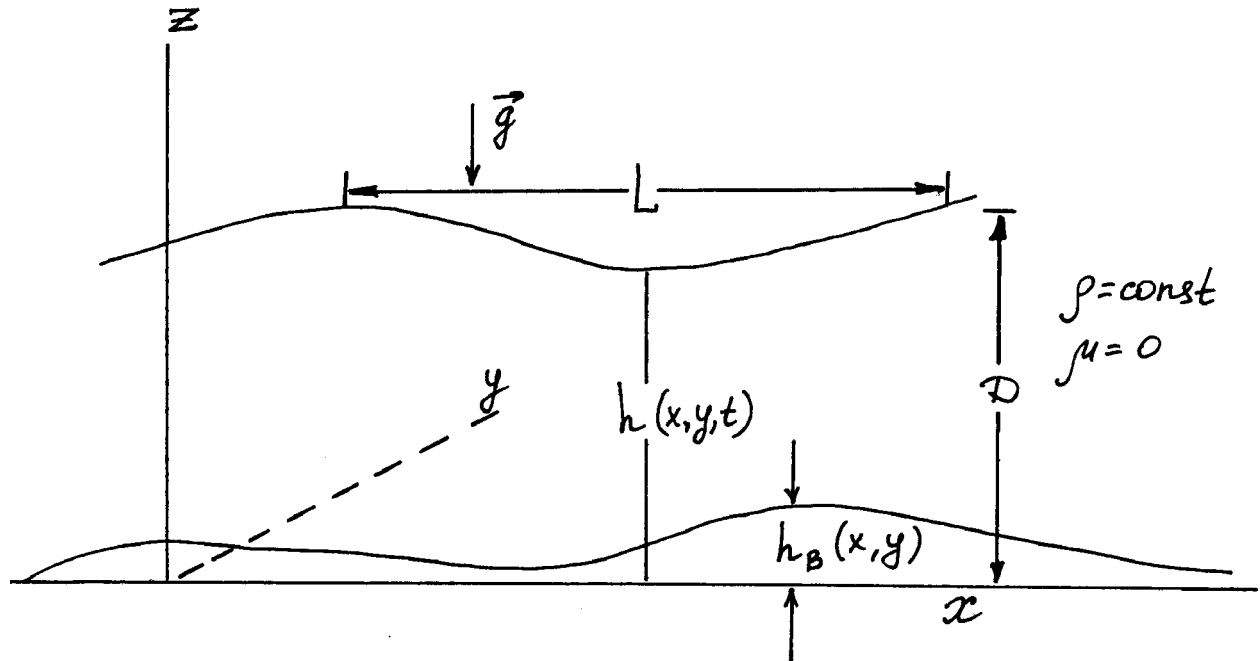


Рис. 6.1 Модель мелкой воды.

Выведем уравнения теории мелкой воды.

В первую очередь выполним оценку членов в уравнениях движения с учетом принятых выше упрощений. Воспользуемся оценками, полученными при выводе геострофических соотношений, где было показано, что порядок членов, описывающих силы Кориолиса и барического градиента, одинаковые. Отношение ускорения жидкой частицы к силе Кориолиса имеет порядок числа Кибеля. При этом, воспользовавшись верхней оценкой для  $w$ , ранее был сделан вывод о том, что все члены в выражении для полной производной имеют одинаковый порядок. Уточним этот вывод и покажем, что отношение члена, описывающего вертикальный перенос, к адвективному имеет порядок числа Кибеля  $\varepsilon_0 = \frac{U}{2 \cdot \omega \cdot \sin \varphi \cdot L}$ . С этой целью представим

$$u = u_g + u', \quad v = v_g + v', \quad (6.1.4)$$

где  $u'$ ,  $v'$  - составляющие вектора агеострофического отклонения. Для невязкой жидкости из уравнения движения следует

$$u' = -\frac{1}{f} \frac{dv}{dt}, \quad v' = \frac{1}{f} \frac{du}{dt}. \quad (6.1.5)$$

Тогда

$$O(u') = O(v') = \frac{1}{f} \frac{U}{\tau} = \frac{U}{fL} U = \varepsilon_0 U. \quad (6.1.6)$$

Введем эту оценку в уравнение неразрывности, записанное в виде

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{ctg\varphi}{a} v_g - \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \quad (6.1.7)$$

Так как оценки первого и второго члена в правой части близки, то уточненной оценкой для  $w$  будет

$$W \leq \varepsilon_0 \cdot \delta \cdot U. \quad (6.1.8)$$

Для средних широт  $\varepsilon_0 < 1$  следовательно, оценка  $w$  (6.1.8) меньше оценки (6.1.2).

С учетом полученной оценки найдем соотношение между членами в выражении для полной производной:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (6.1.9)$$

Найдем отношение  $\frac{O(F)}{\tau} : \frac{U \cdot O(F)}{L} = 1$ , и, так как  $L = U \cdot \tau$

$$\frac{w \cdot O(F)}{D} : \frac{Y \cdot O(F)}{L} = \frac{\varepsilon_0 \delta U}{D} : \frac{U}{L} = \frac{\varepsilon_0 D}{L} \cdot \frac{U}{D} : \frac{U}{L} = \varepsilon_0. \quad (6.1.10)$$

Таким образом, с точностью до числа Кибеля ( $\varepsilon_0 \ll 1$ ) в выражении для полной производной можно пренебречь конвективной составляющей. С учетом этого вывода уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - fu &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

Из оценок, приведенных при выводе геострофических соотношений, следует, что третье уравнение движения вырождается в уравнение гидростатики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (6.1.12)$$

Существенным отличием *соотношений теории мелкой воды* от гео-строфических является сохранение в них членов порядка числа Кибеля, учитывающих нестационарность поля скорости потока.

В (6.1.11) исключим давление  $p$ , заменив его высотой свободной поверхности рассматриваемого слоя  $h$ . Проинтегрируем уравнение (6.1.12) и учитывая, что при  $z = h$  и  $p = p_0$ , получим

$$p = \rho g(h - z) + p_0. \quad (6.1.13)$$

Интерпретация этого соотношения чрезвычайно проста. Превышение давления  $p - p_0$  равно весу единичного столба над данной точкой в данный момент времени. Продифференцировав соотношение (6.1.13) по  $x$  и по  $y$ , получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (6.1.14)$$

Как видно из этих соотношений, горизонтальные градиенты давления не зависят от вертикальной координаты.

Для однородной жидкости согласно теореме Тейлора-Праудмена горизонтальные составляющие скорости также не зависят от  $z$ . Тогда из уравнения (6.1.11) вытекает, что  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial v}{\partial t}$  также не зависят от  $z$ . Таким образом, для практических приложений логично приближенно интерпретировать составляющие скорости  $u$  и  $v$  в уравнения (6.1.11) как величины, осредненные по вертикали. В этом случае уравнения движения для осредненных по вертикали горизонтальных составляющих скорости примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g \frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

В уравнениях (6.1.15) неизвестными являются  $u$ ,  $v$  и  $h$ . Для вывода уравнения для  $h$  воспользуемся кинематическими условиями на дне и поверхности рассматриваемого слоя, которые записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, h_B, t) &= \frac{dh_B}{dt} = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y}, \\ w(x, y, h, t) &= \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Эти условия означают, что движущаяся частица принадлежит поверх-



ности  $h_B$  или  $h$ , другими словами нормальная компонента скорости равна нулю.

Проинтегрируем уравнение неразрывности от 0 до  $z$  с учетом того, что составляющие скорости  $u$  и  $v$  не зависят от вертикальной координаты:

$$w(x, y, z, t) = -z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + w(x, y, 0, t). \quad (6.1.17)$$

Воспользовавшись первым условием (6.1.16) и (6.1.17), найдем

$$w(x, y, 0, t) = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} + h_B \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (6.1.18)$$

Подставляя теперь (6.1.18) в (6.1.17), получим

$$w(x, y, z, t) = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} + (h_B - z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (6.1.19)$$

Запишем (6.1.19) для  $z = h$  и учтем второе соотношение (6.1.16),

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= (h_B - h) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h - h_B)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(h - h_B)v] &= 0. \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

Таким образом, получено *уравнение для высоты свободной поверхности*, которое замыкает систему уравнений (6.1.15).

Подчеркнем, что уравнение (6.1.20) содержит дополнительную информацию по сравнению с (1.1.15), так как при его выводе учтены дополнительные физические эффекты (6.1.16).

Покажем, что уравнение (6.1.20) есть уравнение сохранения массы. С этой целью введем полную глубину  $H = h - h_B$ . Тогда (6.1.20) переписется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uH) + \frac{\partial}{\partial y} (vH) = 0, \quad (6.1.21)$$

что эквивалентно уравнению

$$\frac{dH}{dt} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (6.1.22)$$

Так как двумерная дивергенция есть относительное изменение площади поперечного сечения столба жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{s} \frac{ds}{dt}, \quad (6.1.23)$$

то

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dt} + \frac{1}{s} \frac{ds}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \ln(Hs) = 0. \quad (6.1.24)$$

Следовательно величина  $\rho Hs = const$ , что означает сохранение массы столба жидкости площадью  $s$  и толщиной  $H$ .

Выпишем еще два следствия, вытекающих из приведенных соотношений.

Во-первых, из (6.1.21) следует, что положительная горизонтальная дивергенция полного потока  $\nabla \cdot (\vec{V}H)$  компенсируется локальным уменьшением толщины слоя из-за опускания свободной поверхности и наоборот.

Во вторых, из (6.1.24) следует, что увеличение площади поперечного сечения столба ведет к уменьшению его толщины и наоборот.

Покажем, что наряду с сохранением массы теория мелкой воды допускает существование еще одной инвариантной величины  $\frac{z-h_B}{H}$ . Действительно,

если из (6.1.22) найти  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ , подставить в уравнение (6.1.19) и учесть,

что  $w(x, y, z, t) = \frac{dz}{dt}$ , то получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z-h_B}{H} \cdot \frac{dH}{dt} + u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} \quad (6.1.25)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{z-h_B}{H} \right) = 0. \quad (6.1.25a)$$

Таким образом,  $\frac{z-h_B}{H} = const$ , т.е. эта величина сохраняется при движении каждой частицы. Но величина  $\frac{z-h_B}{H}$  есть относительное превышение положения частицы над дном, меняющееся от нуля до единицы. Так как  $u$  и  $v$  не зависят от  $z$ , и жидкость движется как набор столбиков, ориентированных параллельно оси  $z$ , то во время движения растяжения или сжатия каждого столбика не меняет относительное положение жидкой частицы в нем. Исходя из этого закона сохранения легко рассчитать положение центра фиксированного элементарного объема в любой момент времени, если известны в начальный момент времени его положение и величины  $H$  и  $h_B$ .

Таким образом, задача расчета характеристик течения с учетом ограничений теории мелкой воды существенно упрощается. Во-первых, число неза-

зависимых переменных снижается до трех  $(x, y, t)$ , так как координата  $z$  однозначно выражается через эти аргументы с помощью (6.1.25). За счет исключения  $w$  уменьшилось число зависимых переменных до трех  $(u, v, h)$  и соответственно число динамических уравнений (6.1.15), (6.1.20) также уменьшилось до трех.

## 6.2. Основные соотношения теории мелкой воды для движений с малой амплитудой

Как видно из уравнений мелкой воды (6.1.15), (6.1.20), они являются нелинейными, что существенно затрудняет их решение и анализ. Поэтому в геофизической гидродинамике часто обращаются к изучению движений с малой амплитудой, для которых допустима *линеаризация* уравнений мелкой воды. Полученные на основе таких уравнений выводы оказываются весьма полезными для понимания фундаментальных механизмов явлений и в случае их описания с помощью нелинейных уравнений. Использование *метода линеаризации* существенно облегчает нахождение связи между пространственными и временными характеристиками явления. Кроме того, оказывается возможным получить одно основное уравнение для линеаризованных движений системы.

Опишем этот метод. Известно, что любое колебание, описываемое линейным уравнением, можно представить в виде совокупности простых гармонических колебаний (нормальных мод), каждое из которых не зависит от других. Примем условие малости амплитуд изучаемых волновых движений. В этом случае толщину рассматриваемого жидкого слоя  $H(x, y, t)$  можно представить в виде его толщины в состоянии покоя  $H_0(x, y)$  и отклонений от этого состояния  $\eta(x, y, t)$ .

Условие малости амплитуды предполагает, что в выражении

$$H(x, y, t) = H_0(x, y) + \eta(x, y, t), \quad \eta \ll H_0. \quad (6.2.1)$$

Подставив  $H(x, y, t) = h(x, y, t) + h_B(x, y)$  и  $H_0(x, y) = h_0 - h_B(x, y)$  в (6.2.1), получим

$$h(x, y, t) = h_0 + \eta(x, y, t), \quad (6.2.1a)$$

где  $h_0$  - постоянная величина, являющаяся высотой невозмущенной свободной поверхности. Так как  $\eta = h - h_0$ , то его логично назвать уровнем. Из (6.2.1a) вытекает

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial y}. \quad (6.2.1б)$$

Условие малости  $u$  и  $v$  означает, что линейные члены в уравнении движения много больше квадратичных членов, т.е.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \gg (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}. \quad (6.2.2)$$

Доказательство справедливости (6.2.2) можно получить из следующих соотношений

$$\begin{aligned} O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) &= O\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{U}{\tau}, \\ O\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= O\left(u \frac{\partial v}{\partial x}\right) = O\left(v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = O\left(v \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{U^2}{c\tau}, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

где  $c$  - фазовая скорость. Тогда

$$O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) : O\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{c}{U}. \quad (6.2.4)$$

Так как  $U$  мало,  $c$  не зависит от  $U$ , следовательно соотношение (6.2.2) доказано.

С учетом принятых допущений (6.1.14) и (6.2.2) уравнения мелкой воды (6.1.15) и (6.1.21) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= -g \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uH_0) + \frac{\partial}{\partial y}(vH_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Здесь в качестве искоемых величин выступают  $u$ ,  $v$  и  $\eta$ . Подчеркнем, что при выводе третьего уравнения системы (6.2.5) учтен тот факт, что нелинейные члены являются малыми по сравнению с линейными. Например,  $\frac{\partial}{\partial x}(uH_0) \gg \frac{\partial}{\partial x}(u\eta)$  так как  $H_0$  - заданная функция от  $x$  и  $y$ .

При исследовании движений, характеристики которых имеют малые амплитуды изменений, три уравнения (6.2.5) заменяют одним уравнением для превышения свободной поверхности  $\eta$  над ее положением в состоянии покоя. Для этой цели введем вектор полного потока  $\vec{U} = \vec{i}\tilde{U} + \vec{j}\tilde{V}$ , где  $\tilde{U} = uH_0$ ,  $\tilde{V} = vH_0$ , и подставим эти выражения в уравнения (6.2.5). Тогда получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - f\tilde{V} &= -gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + f\tilde{U} &= -gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{6.2.6}$$

Теперь получим уравнения для двумерной дивергенции  $D = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}$  и завихренности  $\Omega = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}$ . Продифференцируем первое уравнение (6.2.6) по  $x$ , второе - по  $y$ , сложим и получим

$$\frac{\partial}{\partial t} D - f\Omega = -g\nabla \cdot (H_0 \nabla \eta)\tag{6.2.7}$$

Это уравнение носит название *уравнения дивергенции*.

Теперь продифференцируем второе уравнение (6.2.6) по  $x$ , первое - по  $y$ , и из второго полученного уравнения вычтем первое и получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega + fD = -gJ(H_0, \eta)\tag{6.2.8}$$

Это уравнение называется *уравнением завихренности*; здесь использован якобиан  $J(H_0, \eta) = \frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial H_0}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}$ .

В геофизической гидродинамике уравнения дивергенции и завихренности часто используются вместо уравнений движения. Для нахождения составляющих вектора полного потока вводятся функция тока  $\tilde{\psi}$  и потенциал скорости  $\tilde{\phi}$  полного потока. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}, \\ \tilde{V} &= \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y}, \\ \nabla^2 \tilde{\psi} &= \Omega, \quad \nabla^2 \tilde{\phi} = D.\end{aligned}\tag{6.2.9}$$

Подчеркнем, что эта процедура также используется в более общем случае (без ограничений, принятых в теории мелкой воды).

Для исключения завихренности из уравнений (6.2.7) и (6.2.8) уравнение (6.2.7) дифференцируется по времени  $t$ , уравнение (6.2.8) умножается на параметр Кориолиса  $f$ , двумерная дивергенция заменяется на  $-\frac{\partial \eta}{\partial t}$  из

параметр Кориолиса  $f$ , двумерная дивергенция заменяется на  $-\frac{\partial \eta}{\partial t}$  из третьего уравнения (6.2.6). В результате получаем уравнение третьего порядка по  $t$  для величины  $\eta$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta - \nabla \cdot (c_0^2 \nabla \eta) \right] - g f J(H_0, \eta) = 0, \quad (6.2.10)$$

$$c_0^2 = g H_0.$$

После нахождения  $\eta$  из уравнения (6.2.10) переходим к определению составляющих скорости  $u$ ,  $v$ . Для этого преобразуем первые два уравнения (6.2.5) к виду

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) u &= -g \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} + f \frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) v &= -g \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Из уравнений (6.2.11) вытекает, что при стационарном движении, когда его характеристики не зависят от времени, составляющие скорости движения выражаются следующим образом через пространственные производные уровня

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad v = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (6.2.12)$$

Соотношения (6.2.12) дают выражения для *геострофических составляющих скорости для мелкой воды*.

Как следует из (6.2.10), для стационарного случая выполняется следующее соотношение между пространственными производными уровня и толщины слоя в состоянии покоя

$$\frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial H_0}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (6.2.13)$$

откуда

$$\frac{\partial H_0 / \partial x}{\partial H_0 / \partial y} = \frac{\partial \eta / \partial x}{\partial \eta / \partial y}. \quad (6.2.14)$$

Условие (6.2.14) означает, что на плоскости  $XOY$  линии постоянной толщины слоя в состоянии покоя (глубины)  $H_0$  совпадают с линиями постоянного уровня  $\eta$  и, следовательно, скорость геострофического движения направлена вдоль изобат. Это условие также означает, что если  $\eta$  задано в одной точке изолиний  $H_0$ , то оно определено во всех точках этой изолинии.

Кроме того, геострофическое движение возможно лишь при условии, что изолинии  $H_0$  замкнуты или уходят на бесконечность. Другими словами они не могут упираться в твердую границу. Это следует из того, что нормальная составляющая скорости на твердой границе равна нулю.

При постоянной в плоскости  $XOY$  величине  $H_0$  из (6.2.14) получаем, что величины  $\partial\eta/\partial x$  и  $\partial\eta/\partial y$  могут быть любыми и в этом случае возможны геострофические движения с любыми скоростями.

Полученное уравнение (6.2.10) используем для анализа волновых движений, которое генерируется в слое с постоянной глубиной  $H_0$ . В этом случае уравнение (6.2.10) есть уравнение с постоянными коэффициентами и решение этого уравнения будем искать в виде плоской волны

$$\eta = \eta_0 e^{i(kx + ly - \sigma t)}, \quad (6.2.15)$$

с выделением действительной его части

$$\eta = \text{Re} \eta_0 e^{i(kx + ly - \sigma t)}, \quad (6.2.15a)$$

где  $\text{Re}$  означает действительную часть выражения, следующего за этим символом,  $\eta_0$  - амплитуда колебания, а выражение, стоящее в круглых скобках, есть фаза  $\theta$ , определяемая соотношением

$$\theta = kx + ly - \sigma t. \quad (6.2.16)$$

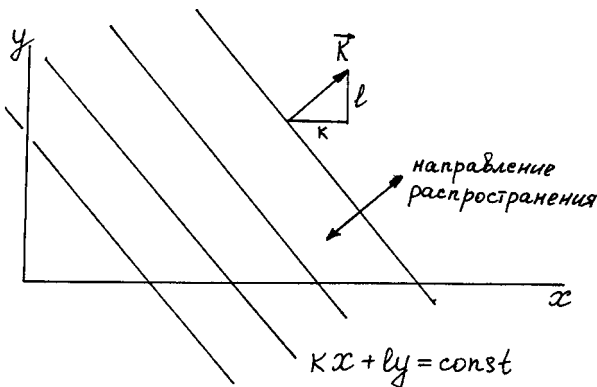


Рис.6.2. Геометрия плоской волны.

Напомним, что фаза определяет положение точки на волне. Если зафиксировать момент времени  $t$ , то постоянство  $\theta$  означает постоянство  $kx + ly$ . Следовательно, в плоскости  $XOY$  изолинии фазы будут представлять собой прямые линии (рис. 6.2). Если ввести градиент фазы  $\nabla\theta$ , то легко показать, что величины

$k$  и  $l$  представляют собой составляющие этого вектора, который называется волновым, а  $k$  и  $l$  - волновыми числами по осям  $x$  и  $y$ :

$$\vec{k} = \nabla\theta = k\vec{i} + l\vec{j}, \quad k = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad l = \frac{\partial\theta}{\partial y} \quad (6.2.16a)$$

Если через  $\lambda$  обозначить длину волны, то связь между длиной волны и

волновым числом  $K = |\vec{k}| = (k^2 + l^2)^{1/2}$  определяется соотношением  $K\lambda = 2\pi$ , откуда

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (6.2.17)$$

равно числу колебаний, укладываемому на единичном отрезке, перпендикулярном к фронту волны. Полученное соотношение вытекает из условия, что длина волны равна расстоянию между двумя ближайшими точками среды, для которых разность фаз волны равна  $\pi$ . В любой заданной точке фаза изменяется линейно со скоростью, которая равна числу гребней, проходящих через эту точку в единицу времени. Волновой вектор запишется в виде

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}, \quad (6.2.18)$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор, указывающий направление распространения перемещения фронта волны. Волновой вектор совпадает с направлением перемещения фронта волны. Скорость распространения фронта волны называется фазовой скоростью. Для удобства вначале рассмотрим скорость  $c_x$ , с которой распространяется фаза вдоль оси  $x$  при фиксированном  $y$ . Эта скорость определяется условием постоянства фазы при изменяющемся  $x$  и  $t$  и фиксированном  $y$ , т.е.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + c_x \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0. \quad (6.2.19)$$

Тогда

$$c_x = -\frac{\partial\theta / \partial t}{\partial\theta / \partial x} = \frac{\sigma}{k}, \quad (6.2.20)$$

т.к. из (6.2.16) следует, что  $\partial\theta / \partial t = -\sigma$ , а  $\frac{\partial\theta}{\partial x} = k$ .

Аналогично при перемещении вдоль оси  $y$  при постоянном  $x$  получаем

$$c_y = -\frac{\partial\theta / \partial t}{\partial\theta / \partial y} = \frac{\sigma}{l}. \quad (6.2.21)$$

Для перемещения параллельно волновому вектору, т. е. в направлении перемещения фронта волны, фазовая скорость будет равна

$$C = -\frac{1}{|\nabla\theta|} \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\sigma}{K} = \frac{\sigma}{(k^2 + l^2)^{1/2}}. \quad (6.2.22)$$

Как следует из (6.2.20) - (6.2.22)  $C \neq (c_x^2 + c_y^2)^{1/2}$ , т.е.  $c_x$  и  $c_y$  не являются компонентами фазовой скорости  $C$ . Эти компоненты соответственно равны  $\sigma k / K^2$  и  $\sigma l / K^2$ . Связь между  $c_x$ ,  $c_y$  и  $C$  выражается соотношениями



$$c_x = \frac{CK}{k}, \quad c_y = \frac{CK}{l}. \quad (6.2.23)$$

Укажем, что величины  $c_x$  и  $c_y$  можно интерпретировать как скорости перемещения вдоль оси  $x$  и  $y$  точек пересечения линий постоянной фазы с этими осями.

Теперь найдем соотношение между волновым вектором  $\vec{k}$  и частотой  $\sigma$  на основании уравнения (6.2.10). Для этого подставим (6.2.15) в (6.2.10) и получим для случая постоянной величины  $H_0$

$$\sigma\eta_0[f^2 - \sigma^2 + c_0^2 K^2] = 0. \quad (6.2.24)$$

Будем рассматривать нестационарное движение ( $\sigma \neq 0$ ) и волны с ненулевой амплитудой ( $\eta_0 \neq 0$ ). Тогда уравнение (6.2.24) превращается в квадратное относительно  $\sigma$  и его решение

$$\sigma = \pm [f^2 + c_0^2 K^2]^{1/2} \quad (6.2.25)$$

является дисперсионным соотношением. Как видно из (6.2.25), частота  $\sigma$  зависит от абсолютной величины волнового вектора и для каждого вектора существует два свободных колебания, представляющие собой волны с фазовыми скоростями

$$C = \frac{\sigma}{k} = \pm \left( c_0^2 + \frac{f^2}{K^2} \right)^{1/2} \quad (6.2.26)$$

Таки образом, получены две волны, одна из которых движется в направлении волнового вектора, другая - в противоположном направлении. При отсутствии вращения ( $f = 0$ ) имеем  $c = \pm c_0$ , т.е. волны всех длин перемещаются с одинаковой фазовой скоростью, определяемой глубиной слоя, так как  $c_0 = (gH_0)^{1/2}$ .

Как видно из (6.2.25), вращение Земли увеличивает скорость волны. Как следует из (6.2.25), все свободные волны имеют частоты большие, чем  $f$ , т.е. их периоды меньше полупериода вращения системы координат. Так как медленные крупномасштабные атмосферные и океанические течения имеют частоты, близкие и меньшие  $f$ , то частоты генерируемых свободных колебаний имеют более высокие частоты колебаний. Из (6.2.26) следует, что чем меньше длина волны, тем меньше скорость ее перемещения.

В общем случае в начале координат ( $x = y = 0$ ) и в начальный момент времени ( $t = 0$ ) фаза колебаний может быть отлична от нуля и равной  $\varphi$ . Так

как амплитуда  $\eta_0$  является комплексным числом, то  $\eta_0 = |\eta_0|e^{i\varphi}$ . Тогда решение (6.2.15a) принимает вид

$$\eta = \operatorname{Re}|\eta_0|e^{i(\theta+\varphi)} = |\eta_0|\cos(kx + ly - \sigma t + \varphi). \quad (6.2.27)$$

Перейдем к решению уравнений движения (6.2.11) для определения составляющих вектора скорости  $u$  и  $v$  по известной величине уровня  $\eta$ . Аналогично (6.2.15) с учетом (6.2.27) будем искать волновое решение этих уравнений в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 e^{i(\theta+\varphi)}, \\ v &= v_0 e^{i(\theta+\varphi)}, \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

где  $u_0$  и  $v_0$  - неизвестные амплитуды составляющих скорости.

Напомним, что соответствующие волновые решения для  $\eta$  имеет вид

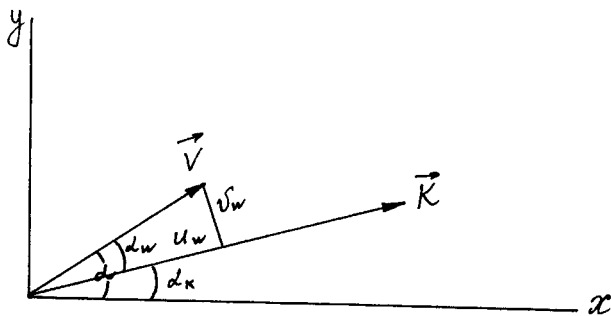
$$\eta = |\eta_0|e^{i(\theta+\varphi)}. \quad (6.2.29)$$

Подставляя (6.2.28) - (6.2.29) в (6.2.11), находим

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{g}{\sigma^2 - f^2} (k\sigma + ifl)|\eta_0|, \\ v_0 &= \frac{g}{\sigma^2 - f^2} (l\sigma - ifk)|\eta_0| \end{aligned} \quad (6.2.30)$$

Подставим (6.2.30) в (6.2.28) и после выделения действительной части получим

$$\begin{aligned} u &= \frac{g}{\sigma^2 - f^2} [k\sigma \cos(\theta + \varphi) - fl \sin(\theta + \varphi)]|\eta_0|, \\ v &= \frac{g}{\sigma^2 - f^2} [l\sigma \cos(\theta + \varphi) + fk \sin(\theta + \varphi)]|\eta_0| \end{aligned} \quad (6.2.31)$$



Для дальнейшего анализа вместо составляющих скорости  $u$  и  $v$ , направленных вдоль произвольно выбранных осей  $x$  и  $y$ , удобнее использовать составляющие скорости, направленные вдоль волнового вектора и перпендикулярные к нему.

Рис. 6.3. Схема, поясняющая переход от  $u$  и  $v$  к  $u_w$  и  $v_w$ .

Такой выбор целесообразен потому, что линии постоянной фазы  $\theta$  в фиксированный момент времени совпадают с изолиниями  $\eta$ .

Так как давление на свободную поверхность не зависит от  $x$  и  $y$  и, следовательно, внутри однородной жидкости распределение давления вдоль осей  $x$  и  $y$  полностью определяется  $\eta = \eta(x, y)$ . Поэтому изолинии  $\eta$  и изобары совпадают, а направление волнового вектора совпадают с градиентом давления. Обозначим через  $u_w$  проекцию скорости на направление волнового вектора, через  $v_w$  - на направление фронта волны.

Поясним переход к  $u_w$  и  $v_w$  с помощью рис. 6.3. Как видно из рис. 6.3,

$$\begin{aligned} u_w &= |\vec{V}| \cos \alpha_w = |\vec{V}| \cos(\alpha - \alpha_k) = u \frac{k}{K} + v \frac{l}{K}, \\ v_w &= |\vec{V}| \sin \alpha_w = |\vec{V}| \sin(\alpha - \alpha_k) = v \frac{k}{K} + u \frac{l}{K}. \end{aligned} \quad (6.2.32)$$

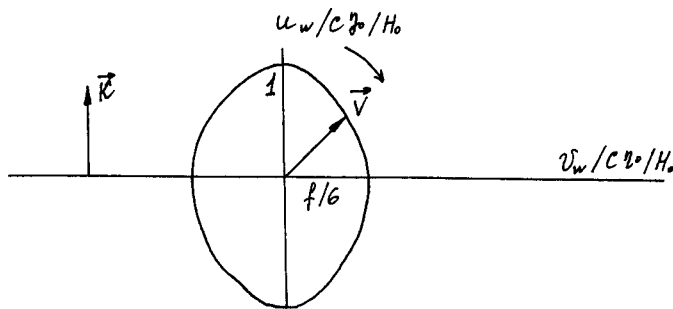
Подставив (6.2.31) в (6.2.32), найдем

$$\begin{aligned} u_w &= \frac{\eta_0}{H_0} C \cos(kx + ly - \sigma t + \varphi), \\ v_w &= \frac{\eta_0}{H_0} \frac{f}{\sigma} C \sin(kx + ly - \sigma t + \varphi). \end{aligned} \quad (6.2.33)$$

Из (6.2.33) получаем уравнение эллипса

$$\frac{u_w^2}{\left(\frac{C\eta_0}{H_0}\right)^2} + \frac{v_w^2}{\left(\frac{C\eta_0}{H_0}\right)^2 \left(\frac{f}{\sigma}\right)^2} = 1, \quad (6.2.34)$$

полуоси которого равны 1 и  $f/\sigma$  в системе координат  $\frac{u_w}{C\eta_0/H_0}$  и  $\frac{v_w}{C\eta_0/H_0}$  (рис. 6.4).



Таким образом, вектор горизонтальной скорости  $\vec{V}$  с течением времени описывает эллипс, этот эллипс конец вектора скорости обегает один раз за один период колебаний. Так как  $f/\sigma < 1$ , то максимум составляющей скоро-

Рис.6.4. Эллипс, описываемый вектором скорости в волне.

сти, направленной вдоль изобары (т.е. вдоль линии постоянной фазы)  $v_w$ , меньше максимума составляющей скорости вдоль градиента давления (в направлении  $\vec{k}$ ). Естественно, для таких волн не выполняется геострофическое приближение. Течение жидкости направлено в основном вдоль градиента давления.

Представляет интерес поведение вихревых трубок в волновом движении. С учетом (6.2.31) получаем

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{gK^2}{\sigma^2 - f^2} |\eta_0| \cos(kx + ly + \sigma t + \varphi) = \frac{f\eta}{H_0} \quad (6.2.35)$$

и

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sigma\eta}{H_0} = -\frac{1}{H_0} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (6.2.36)$$

Нетрудно видеть, что согласно (6.2.5)  $\Omega > 0$  когда  $\eta > 0$  и  $\Omega < 0$  когда  $\eta < 0$ , т.е. в гребнях волн создается положительная завихренность, а во впадинах - отрицательная. Кроме того, при прохождении волны свободная поверхность поднимается и опускается и вихревые трубки растягиваются и сжимаются в поле планетарного вихря. Одновременно, из (6.2.36) следует, что в гребнях ( $\eta > 0$ ) дивергенция отрицательна, а во впадинах ( $\eta < 0$ ) - положительна, т.е. наблюдается изменение площади поперечного сечения вихревой трубки. В рассматриваемом явлении наблюдается интересный факт:

$$O\left(\frac{\Omega}{D}\right) = O\left(\frac{f}{\sigma}\right) < 1. \quad (6.2.37)$$

Для геофизических объектов следует, что  $O\left(\frac{\Omega}{D}\right) > 1$ , это вытекает из близости скоростей движения к их геострофическим эквивалентам. Поскольку скорости движения в мелкой воде существенно отличны от геострофических, то это приводит к соотношению (6.2.37). При этом чем меньше отношение  $\Omega$  к  $D$ , тем больше скорость рассматриваемого движения отличаются от геострофического.

Таким образом, анализ движений жидкости с малой амплитудой позволил выявить ряд закономерностей, которые в дальнейшем будут проиллюстрированы на различных видах волновых движений.

### 6.3. Волновые движения и квазигеострофические соотношения в теории мелкой воды

Рассмотрим волновые процессы в частично ограниченном пространстве - канале шириной  $L$  и постоянной глубиной  $H_0$  в состоянии покоя. В этом случае необходимо сформулировать граничные условия на стенках канала. Естественным граничным условием является равенство нулю нормальной составляющей скорости потока при  $y = 0, L$ . При этом ось  $x$  направлена вдоль канала. Тогда из второго уравнения (6.2.11) получаем

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial t} - f \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad y = 0, L. \quad (6.3.1)$$

Дифференциальное уравнение для уровня свободной поверхности (6.2.10) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \eta - c_0^2 \nabla^2 \eta \right] = 0. \quad (6.3.2)$$

Решение (6.3.2) является периодическим по  $x$  и  $t$  с амплитудой, зависящей от  $y$ . Это решение имеет вид

$$\eta = \operatorname{Re} \bar{\eta}(y) e^{i(kx - \sigma t)}. \quad (6.3.3)$$

Подставив (6.3.3) в (6.3.2), получим

$$\frac{d^2 \bar{\eta}}{dy^2} + \left( \frac{\sigma^2 - f^2}{c_0^2} - k^2 \right) \bar{\eta} = 0. \quad (6.3.4)$$

Для нахождения граничных условий уравнение (6.3.3) подставляется в (6.3.1):

$$\frac{d\bar{\eta}}{dy} + f \frac{k}{\sigma} \bar{\eta} = 0, \quad y = 0, L. \quad (6.3.5)$$

Общее решение уравнения (6.3.4) имеет вид

$$\bar{\eta} = A \sin \alpha y + B \cos \alpha y, \quad (6.3.6)$$

$$\alpha^2 = \frac{\sigma^2 - f^2}{c_0^2} - k^2. \quad (6.3.7)$$

Из (6.3.6) следует, что  $\alpha$  есть  $y$ -компонент волнового вектора. Из граничного условия (6.3.5) для  $y = 0$  и  $y = L$  получаем соотношения для  $A$  и  $B$

$$B = -\frac{\alpha\sigma}{fk} A, \quad (6.3.8)$$

$$A \left[ \alpha \cos \alpha L + f \frac{k}{\sigma} \sin \alpha L \right] + B \left( \frac{fk}{\sigma} \cos \alpha L - \sigma \sin \alpha L \right) = 0. \quad (6.3.9)$$

Подставим (6.3.8) в (6.3.9) и учтем, что  $A \neq 0$ , тогда получим

$$\left( \frac{fk}{\sigma} + \frac{\alpha^2 \sigma}{fk} \right) \sin \alpha L = 0. \quad (6.3.10)$$

В последнем выражении в круглых скобках заменим  $\alpha^2$  по соотношению (6.3.7) и найдем

$$(\sigma^2 - f^2)(\sigma^2 - c_0^2 k^2) \sin \alpha L = 0. \quad (6.3.11)$$

Выполнение равенства (6.3.11) возможно при таких вариантах:

$$\begin{array}{ll} \text{либо} & \sin \alpha L = 0, \\ \text{либо} & \sigma^2 - c_0^2 k^2 = 0, \\ \text{либо} & \sigma^2 - f^2 = 0. \end{array}$$

Реализация этих трех возможностей дает дисперсное соотношение для трех видов волн.

1. Характеристики волн Пуанкаре получаются при условии  $\sin \alpha L = 0$ , т.е.  $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Подчеркнем, что  $\alpha = n = 0$  не является возможным решением, так как оно не удовлетворяет граничному условию (6.3.5). Дисперсионное соотношение для волн Пуанкаре при найденном из (6.3.7)  $\alpha$  получается:

$$\sigma = \sigma_n = \pm \left[ f^2 + c_0^2 \left( k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) \right]^{1/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.3.12)$$

В случае волн Пуанкаре  $y$ -компонент волнового вектора принимает дискретные значения, а частота колебаний всегда превосходит частоту вращения системы координат  $f$ .

Если в начальный момент колебания имеют амплитуду  $\eta_0$  и фазу  $\varphi$ , то соотношения (6.3.8) и (6.3.12) позволяют рассчитать характеристики волн Пуанкаре по следующим формулам:

$$\eta = \eta_0 \left[ \cos \frac{n\pi y}{L} - \frac{L}{n\pi c_x} \frac{f}{\sigma} \sin \frac{n\pi y}{L} \right] \cos(kx - \sigma t + \varphi),$$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\eta_0}{H_0} \left[ \frac{c_0^2}{c_x} \cos \frac{n\pi y}{L} - \frac{fL}{n\pi} \sin \frac{n\pi y}{L} \right] \cos(kx - \sigma t + \varphi), \\
v &= -\frac{\eta_0}{H_0} \frac{L}{\sigma n\pi} \left[ f^2 + \frac{c_0 n^2 \pi^2}{L^2} \right] \sin \frac{n\pi y}{L} \sin(kx - \sigma t + \varphi).
\end{aligned} \tag{6.3.12a}$$

Здесь  $c_x = \sigma / k$  - фазовая скорость вдоль оси  $x$ .

2. Характеристики волн Кельвина получаются при

$$\sigma = \pm c_0 k. \tag{6.3.13}$$

Как видно из этого соотношения, оно представляет собой дисперсионное соотношение для плоской волны, гребни которой параллельны оси  $y$ , во невращающейся жидкости. Эта волна как бы дополняет набор волн Пуанкаре, заменяя в нем невозможную волну (моду) при  $n = 0$ . В этом случае

$$\alpha^2 = -\frac{f^2}{c_0^2}$$

или

$$\alpha^2 = \pm \frac{if}{c_0^2}. \tag{6.3.14}$$

Характеристики волн в этом случае записываются в виде

$$\eta = \eta_0 e^{-fy/c_0} \cos[k(x - c_0 t) + \varphi],$$

$$u = \frac{\eta_0}{H_0} c_0 e^{-fy/c_0} \cos[k(x - c_0 t) + \varphi] = -\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$v = 0. \tag{6.3.15}$$

Как видно из соотношения (6.3.15), во всем канале перпендикулярная к оси канала составляющая скорости равна нулю, а для продольной составляющей выполняется геострофическое соотношение.

Из анализа полученного решения (6.3.15) видно, что высота свободной поверхности экспоненциально убывает поперек оси канала. При этом сила барического градиента, обусловленная наклоном свободной поверхности, уравнивает действие силы Кориолиса. Выполнение геострофического соотношения означает, что для наблюдателя, смотрящего в направлении распространения волны (вдоль канала), большая высота волны находится для северного полушария справа. Введем в рассмотрение расстояние  $R$ , на котором высота свободной поверхности уменьшается в  $e$  раз,

$$R = \frac{c_0}{f}. \quad (6.3.16)$$

Это есть расстояние, на котором создается такое изменение высоты свободной поверхности, которое приводит к равновесию сил Кориолиса и барического градиента. Действительно соотношение порядков сил барического градиента и Кориолиса дает  $O(g\delta\eta) = O(fLv)$ .

Величина  $R$  есть внутренний масштаб длины и называется *радиусом деформации Россби*.

Отметим, что для низкочастотных волн Кельвина, для которых  $\sigma \ll f$ , должно выполняться условие  $kR \ll 1$ , т.е. длина волны в направлении оси  $x$  должна намного превосходить характерный поперечный масштаб  $R$ . Это приводит к тому, что ускорение частицы уравнивается силой барического градиента, а сила Кориолиса  $f v$  в этом балансе вообще не участвует, так как равна нулю. Действительно из соотношения (6.3.15) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -H_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

Таким образом, при анализе порядка членов в уравнении движения, наряду с ситуацией, когда горизонтальные масштабы по оси  $x$  и  $y$  одинаковы, необходимо рассмотреть случай, когда эти масштабы существенно отличаются.

Для волн Кельвина отличие масштабов приводит к выводу об изменении  $x$ -компоненты скорости частиц со временем, при выполнении для этой компоненты геострофического соотношения в каждый момент времени. Другим примером важности учета различных масштабов  $L_x$  и  $L_y$  является движение в системе общей циркуляции атмосферы, когда горизонтальный масштаб в зональном направлении превосходит горизонтальный масштаб в меридиональном.

### 3. Характеристики *инерционных волн* получаются при

$$\sigma = \pm f. \quad (6.3.18)$$

Для таких волн оператор  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2$ , с помощью которого составляющие скорости  $u$ ,  $v$  выражаются через уровень  $\eta$ , тождественно обращается в нуль и для того, чтобы получить связь между  $u$ ,  $v$  и  $\eta$  необходимо обратиться к исходным уравнениям (6.2.5). Подстановка в эти уравнения волновых реше-



ний показывает, что при  $\sigma = \pm f$  можно удовлетворить граничному условию  $v = 0$  при  $y = 0$  только положив  $k = R^{-1}$ . Тогда  $\sigma = c_0 k = f$  и рассматриваемая волна не отличается от волны Кельвина.

Таким образом, спектр волн в канале постоянной глубины состоит из волн Пуанкаре и Кельвина. Естественно, кроме решений, соответствующих этим волнам, при  $\sigma = 0$  выполняется также геострофическое соотношение, что вытекает из первых двух уравнений (6.2.5).

В рамках теории мелкой воды для геофизических приложений необходимо рассмотреть волновые движения, для которых существенным является вращение Земли. Для таких волновых движений временные масштабы должны быть больше  $f^{-1}$ . Система уравнений, описывающая такие движения, является существенно нелинейной и её решение может быть получено с использованием приближенной геострофической теории. Получение количественных оценок движения геофизических объектов возможно путем использования качественных априорных предположений о движении. В этом случае эти априорные предположения должны быть физически обоснованы, с одной стороны, и с другой стороны, они должны исключить сложности, присущие исходной системе уравнений путем исключения высокочастотных колебаний. Примеры построения уравнений, описывающих лишь крупномасштабные геофизические движения, были приведены при исследовании геострофического приближения, при рассмотрении движений в канале. Здесь же будет применен общий подход к построению квазигеострофических приближений. Как будет показано далее, теория мелкой воды оказывается наиболее удобной для иллюстрации возможностей использования квазигеострофических соотношений путем анализа масштабов исследуемых геофизических движений.

С этой целью перейдем к безразмерным переменным, используя масштабы  $L, T, V$  и  $N$  для горизонтальных координат, времени, скорости движения и возвышения свободной поверхности. При этом любой размерный геофизический параметр будем представлять в виде  $\psi = L_\psi \psi'$ , где  $L_\psi$  - характерный масштаб величины  $\psi$ , а  $\psi'$  - ее безразмерный аналог. Так как в уравнениях мелкой воды кроме самих исходных функций входят и их дифференциальные характеристики, то возникает необходимость определения их характерных масштабов. Естественно предположить, что масштаб производной есть отношение масштаба функции к масштабу аргумента. Однако, при приложении этого утверждения к геофизическим объектам необходимо помнить, что он справедлив только в том случае, когда характерный масштаб изменения функции на характерном масштабе аргумента близок к характерному масштабу самой функции. Для уравнений мелкой воды это условие выполня-

ется и эти уравнения можно записать с использованием безразмерных функций и координат. Однако предварительно уравнения (6.1.15) и (6.1.21) представим в виде удобном для анализа масштабов квазигеострофических движений в теории мелкой вод. Введем обозначения (рис. 6.1)

$$H = H_0(x, y) + \eta = D + \eta - h_B,$$

где

$$H_0 = D - h_B(x, y). \quad (6.3.19)$$

После перехода в уравнениях (6.1.15) и (6.1.21) к безразмерным величинам получим

$$\frac{U}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \left( u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) - fUv' = -g \frac{N}{L} \frac{\partial \eta'}{\partial x'}, \quad (6.3.20)$$

$$\frac{U}{T} \frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} \left( u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + fUu' = -g \frac{N}{L} \frac{\partial \eta'}{\partial y'}, \quad (6.3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{N}{T} \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \frac{U}{L} \left[ u' \frac{\partial}{\partial x'} (N\eta' - h_B) + v' \frac{\partial}{\partial y'} (N_0\eta' - h_B) \right] + \\ + \frac{U}{L} (D + N\eta' - h_B) \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

Масштабы координат и геофизических параметров выбраны так, что величины безразмерных характеристик и их колебаний имеют порядок единицы. Следовательно, соотношения между различными членами в уравнениях (6.3.20)-(6.3.22) определяются множителями, стоящими перед этими членами и составленными из масштабов.

Потребуем, чтобы масштабы времени  $T$ , длины  $L$  и скорости  $V$  удовлетворяли условиям

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = \frac{U}{fL} \ll 1, \\ \varepsilon_T = \frac{1}{fT} \ll 1. \end{aligned} \quad (6.3.23)$$

Выполнение этих условий означает, что относительное ускорение в уравнениях движения мало по сравнению с ускорением Кориолиса. Тогда уравнения (6.3.20)-(6.3.21) будут выполняться только в случае, если силы Кориолиса и барического градиента близки. Следовательно, масштаб для уровня должен удовлетворять соотношению

$$N = \frac{fUL}{g} = \frac{U}{fL} f^2 \frac{L^2}{g} = \varepsilon \frac{f^2 L^2}{g} \quad (6.3.24)$$

Если ввести безразмерные величины в выражение для толщины слоя

$$H = H_0 + \eta = D + \eta - h_B, \quad (6.3.25)$$

то получим

$$H = D \left( 1 + \varepsilon_0 \frac{L^2}{R^2} \eta' - \frac{h_B}{D} \right), \quad (6.3.26)$$

где  $R$  - радиус деформации Россби для слоя глубиной  $D$ , т.е.

$$R = (gD)^{1/2} / f. \quad (6.3.27)$$

Из (6.3.26) следует, что если отношение масштаба длины к радиусу деформации Россби имеет порядок единицы, то отклонение толщины слоя  $H$  от его значения в состоянии покоя имеет порядок  $\varepsilon_0$ .

Отметим, что радиус деформации Россби является фундаментальным масштабом длины, который возникает в задачах приспособления вращающейся жидкости к условиям равновесия под действием силы тяжести. *Радиус деформации Россби можно трактовать как отношение фазовой скорости волны  $c = \sqrt{gD}$  к параметру Кориолиса.* В геофизической гидродинамике выделяются баротропный и бароклинный радиусы деформации Россби. Анализ величин  $c$  и  $f$  позволяет сделать вывод, что для крупномасштабных геофизических процессов баротропный радиус деформации Россби сопоставим с характерным горизонтальным масштабом  $L$ . Действительно величина  $c$  меняется от 200 до 300 м/с в зависимости от толщины слоя 5-10 км для океана и атмосферы. Тогда для средних широт  $R$  меняется от 2000 до 1000 км, что сопоставимо с горизонтальным масштабом рассматриваемых геофизических процессов.

Обозначим через 
$$F = \left( \frac{L}{R} \right)^2 \quad (6.3.28)$$

и учтем, что  $O(F) = 1$ .

Покажем, что величина  $\varepsilon_T / \varepsilon_0 = 1$ . Действительно величины  $\varepsilon_T$  и  $\varepsilon_0$  являются мерой отношения локального и адвективного ускорений к ускорению Кориолиса. Мы будем рассматривать случаи, когда скорость движения достаточно велика и нелинейные члены также важны, как и локальное ускорение. Другими словами, мы рассматриваем процессы, в которых фазовая скорость перемещения волн близка к скорости движения. Это означает, что  $L \cong UT$ . Тогда  $\varepsilon_T / \varepsilon_0 = 1$ . Следует указать, что тем самым мы рассматриваем медленные волны. В случае быстрых волн  $L < C_\phi T$ .

Для длинных медленных волн уравнения мелкой воды (6.3.20)- (6.3.21) в безразмерном виде после деления на  $fU$  принимают следующий вид.

$$\varepsilon_0 \left( \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) - v' = -\frac{\partial \eta'}{\partial x'}, \quad (6.3.29)$$

$$\varepsilon_0 \left( \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) + u' = -\frac{\partial \eta'}{\partial y'}, \quad (6.3.30)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + u' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} + v' \frac{\partial \eta'}{\partial y'} \right) - u' \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{h_B}{D} \right) - v' \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{h_B}{D} \right) + \\ + \left( 1 + \varepsilon_0 \eta' - \frac{h_B}{D} \right) \left( \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

В дальнейшем для сокращения записи штрихи при безразмерных переменных будут опущены, а размерные переменные будут обозначаться через (\*). Из уравнений движения (6.3.29)- (6.3.30) следует, что фигурирующие в нем составляющие скорости будут функциями от координат, времени и малого параметра  $\varepsilon_0$ .

Для анализа уравнений движения воспользуемся разложением по малому параметру искомым функций. Другими словами, любую функцию  $\psi = u, v, \eta$  представим в виде

$$\psi(x, y, t, \varepsilon) = \psi_0(x, y, t) + \varepsilon_0 \psi_1(x, y, t) + \varepsilon_0^2 \psi_2(x, y, t) + \dots, \quad (6.3.32)$$

где  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$  не зависят от  $\varepsilon_0$ .

Сущность метода разложения по малому параметру  $\varepsilon_0$  заключается в том, что этот параметр произволен и уравнения должны удовлетворяться для произвольно малого параметра  $\varepsilon$  при всех  $x, y$  и  $t$ . Следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon_0$  должны обращаться в нуль. Величину  $\psi_0$  будем называть *нулевым*,  $\psi_1$  - *первым* приближением и т.д. Чтобы определить искомые функции более низкого приближения в ряде случаев необходимо учитывать и величины более высокого приближения. Подставив (6.3.32) в (6.3.29)-(6.3.31), получим *нулевое приближение*

$$\begin{aligned} v_0 = \frac{\partial \eta_0}{\partial x}, u_0 = -\frac{\partial \eta_0}{\partial y}; \\ u_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_B}{D} \right) - v_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h_B}{D} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.3.33)$$

Нетрудно видеть, что нулевое приближение является чисто геострофическим движением. Для такого движения двумерная дивергенция равна нулю и для анализа уравнения (6.3.31) нам необходимо указать порядок величины  $h_B / D$ . Если эта величина имеет порядок единицы, то уравнение (6.3.31) принимает вид третьего уравнения (6.3.33). В этом случае

нимает вид третьего уравнения (6.3.33). В этом случае геострофическое течение направлено вдоль изобат.

Для получения первого приближения соберем все члены при  $\varepsilon_0$  в первой степени, тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} - v_1 &= -\frac{\partial \eta_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} - u_1 &= -\frac{\partial \eta_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial \eta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - u_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h_B}{D} \right) - v_1 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h_B}{D} \right) + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \frac{h_B}{D} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

Если  $h_B / D$  имеет порядок  $\varepsilon_0$ , то уравнение (6.3.31) можно записать только для первого приближения. В этом приближении оно примет вид

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - u_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial h_0}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (6.3.35)$$

где

$$\varepsilon_0 h_0 = h_B / D, \quad O(h_0) = 1.0 \quad (6.3.36)$$

В этом случае геострофическое течение с составляющими  $u_0$  и  $v_0$  отклоняется от изобат.

Из анализа уравнений (6.3.34) следует, что величины  $u_1$  и  $v_1$  не являются геострофическими, однако они определяются изменением полей геострофических скоростей.

Для решения системы (6.3.34) целесообразно исключить составляющие градиента уровня из первых двух уравнений (6.3.34). С этой целью получим уравнение завихренности, которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right), \quad (6.3.37)$$

где

$$\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \nabla^2 \eta_0. \quad (6.3.38)$$

Таким образом, в третьем уравнении (6.3.34) и в (6.3.37) неизвестной величиной является двумерная дивергенция, определяемая отклонениями скорости потока от геострофической (агеострофическими скоростями). По-

кажем, что с помощью уравнения (6.3.37) можно получить прогностическое уравнение для величины  $\eta_0$ .

Действительно, величину  $\eta_0$  можно определить лишь в случае, когда  $h_B / D$  имеет порядок  $\varepsilon_0$ . Это можно сделать с помощью уравнения (6.3.37) если в него подставить двумерную дивергенцию из уравнения (6.3.35)

$$\frac{d\zeta_0}{dt} = \frac{d\eta_0}{dt} - \frac{dh_0}{dt} \quad (6.3.39)$$

или

$$\frac{d}{dt}(\zeta_0 - \eta_0 + h_0) = 0. \quad (6.3.40)$$

Если расписать полную производную в (6.3.40), вместо  $u_0, v_0$  и  $\zeta_0$  подставить их выражения через  $\eta_0$ , то получим

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \eta_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] (\nabla^2 \eta_0 - \eta_0 + h_0) = 0. \quad (6.3.41)$$

Уравнение (6.3.41) позволяет определить  $\eta_0$ , а затем из геострофических соотношений - составляющие скорости  $u_0$  и  $v_0$ .

Уравнение для  $\eta_0$  (6.3.41) есть уравнение сохранения величины

$$\Pi_g = \nabla^2 \eta_0 - \eta_0 + h_0 = \zeta_0 - \eta_0 + h_0. \quad (6.3.42)$$

Если перейти к размерному виду, то нетрудно показать, что эта величина с точностью до малого постоянного слагаемого представляет собой квазигеострофический потенциальный вихрь.

Действительно, как следует из (4.5.9) в случае мелкой воды с постоянной плотностью, потенциальный вихрь с точностью до постоянного множителя равен скалярному произведению абсолютного вихря на градиент некоторой консервативной величины. В случае баротропной жидкости любая консервативная характеристика этой жидкости  $\lambda$  может быть использована для определения потенциального вихря. Как показано в теории мелкой воды, в качестве такой консервативной величины можно взять согласно уравнению

(6.1.25a)  $\lambda = \frac{z_* - h_B}{H_*}$ . Тогда

$$\Pi_* = \vec{\Omega}_a \cdot \nabla \lambda = (\zeta_* + f) \vec{k} \cdot \nabla \left( \frac{z_* - h_B}{H_*} \right) = (\zeta_* + f) \frac{\partial}{\partial z_*} \left( \frac{z_* - h_B}{H_*} \right) = \frac{\zeta_* + f}{H_*}. \quad (6.3.43)$$

Это соотношение справедливо с точностью до величин малого порядка, так как в нем отброшены горизонтальные составляющие относительного

вихря, однозначно определяемые производными по  $x$  и  $y$  от вертикальной составляющей скорости, которая является малой величиной.

Величину потенциального вихря (6.3.43) можно представить в виде, используя (6.3.26)

$$\Pi_* = \frac{f}{D} \cdot \frac{\varepsilon_0 \zeta + 1}{1 + \varepsilon_0 (\eta - h_0)}. \quad (6.3.44)$$

Перейдя в (6.3.44) к безразмерному виду и умножив знаменатель на  $1 - \varepsilon_0 (\eta - h_0)$ , с точностью до величин порядка  $O(\varepsilon_0^2)$ , получим

$$\Pi = 1 + \varepsilon_0 (\zeta - \eta + h_0). \quad (6.3.45)$$

Продифференцировав это выражение по  $t$ , получим

$$\frac{d\Pi}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (\zeta - \eta + h_0). \quad (6.3.46)$$

Перейдя к нулевому приближению с учетом (6.3.40), найдем

$$\frac{d\Pi}{dt} = 0 \quad (6.3.46a)$$

или

$$\frac{d}{dt} (\zeta_0 - \eta_0 + h_0) = 0. \quad (6.3.46b)$$

Таким образом, мы доказали, что выражение (6.3.42) представляет собой квазигеострофический потенциальный вихрь, являющийся инвариантной величиной в случае выполнения ограничений теории мелкой воды и постоянной глубины.

Дадим физическую интерпретацию вклада трех механизмов формирования потенциального вихря, описываемого (6.3.42). Первый член представляет собой вклад относительного вихря, второй - изменений высоты свободной поверхности. Напомним, что при выводе выражения для  $\Pi_g$  мы полагали, что величина  $F = (R/L)^2$  близка к единице, т.е. радиус деформации и горизонтальный масштаб близки друг к другу. Величина  $F$  представляет собой отношение второго члена к первому и, следовательно, радиус деформации Россби есть горизонтальный масштаб движения, на котором вклады в потенциальный вихрь относительного вихря и растяжения вихревых трубок, обусловленных возвышением поверхности, одинаковы. Если же величина  $L$  мала по сравнению с  $R$ , то вклад от растяжения вихревых трубок в потенциальный вихрь незначителен и с точки зрения баланса потенциального вихря свободная поверхность не отличается от твердой крышки. При  $L \gg R$  вклад от-

носительного вихря несущественный и горизонтальная неоднородность поля скорости не сказывается на величине потенциального вихря. Что касается вклада в потенциальный вихрь рельефа дна (третий член в выражении (6.3.42)), то величина  $h_0$  характеризует отношение потенциального вихря, обусловленного рельефом дна ( $fh_b / D$ ) к величине относительной завихренности, имеющей порядок  $O(U/L)$ . Если  $h_0$  мало, то толщину слоя можно считать постоянной величиной и рельеф дна не учитывать при оценке баланса потенциального вихря. Если градиенты  $h_0$  велики по сравнению с градиентами относительного вихря, то при оценке баланса потенциального вихря следует учесть, что квазигеострофическое течение будет направлено вдоль изолиний  $h_0$  (вдоль изобат).

Предложенный подход к анализу масштабов для квазигеострофических движений позволяет получить основные характеристики движения в квазигеострофическом приближении ( $\eta_0, u_0, v_0$ ). Действительно, из постоянства потенциального вихря в движущемся объеме вытекает

$$\nabla^2 \eta_0 - \eta_0 + h_0 = \left( \nabla^2 \eta_0 - \eta_0 + h_0 \right)_{t=0}. \quad (6.3.47)$$

Учтем, что при выводе уравнения (6.3.46) мы полагали, что  $O(F)=1$ . В общем случае (6.3.46) должно иметь вид

$$\frac{d\Pi}{dt} = \varepsilon \frac{d}{dt} (\zeta - F\eta + h_0), \quad (6.3.48)$$

Решив уравнение (6.3.47) эллиптического типа при соответствующих граничных условиях, найдем  $\eta_0$  в любой момент времени  $t$ . Зная  $\eta_0$ , по геострофическим соотношениям (6.3.33) находим составляющие скорости потока  $u_0$  и  $v_0$ .

Таким образом, путем анализа дифференциального уравнения для уровня свободной поверхности получены характеристики волн Пуанкаре, Кельвина и инерционных волн. При этом выделены волновые движения, для которых существенен вклад эффекта вращения Земли. Используемое разложение по малому параметру находит широкое применение при решении задач прогноза метеорологических полей. Важным для анализа гидрофизических полей является подход, основанный на сохранении в потенциальном виде и квазигеострофическом приближении.





Действительно, подстановка (6.4.5а) в выражение для якобиана дает (6.4.5б).

Подставим теперь выражение (6.4.4) в (6.4.5) и получим *дисперсионное соотношение*

$$\sigma = -\frac{k \frac{\partial h_0}{\partial y} - l \frac{\partial h_0}{\partial x}}{k^2 + l^2 + F}. \quad (6.4.6)$$

При выполнении дисперсионного соотношения (6.4.6) плоская волна (6.4.4) представляет собой точное решение уравнения (6.4.3). Так как  $\nabla h_0$  есть постоянный вектор, то можно записать, что  $H_0 = D(1 - sy)$ ,  $h_0 = sy / \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - число Россби,  $s$  - наклон дна вдоль  $y$ . Принимается, что вдоль оси  $x$  высота рельефа  $h_B$  не меняется. Тогда безразмерное и размерное значения частоты  $\sigma$  запишутся в виде

$$\sigma = -\frac{ks / \varepsilon}{k^2 + l^2 + F}, \quad \sigma_* = \frac{U}{L} \sigma = -\frac{sf}{L} \frac{k_*}{k_*^2 + l_*^2 + (f^2 / gD)} \quad (6.4.7)$$

Дисперсионное соотношение (6.4.6) может быть записано в виде

$$\sigma = \vec{k} \cdot \frac{(\hat{z} \times \nabla h_0)}{(K^2 + F)}, \quad (6.4.8)$$

где  $\hat{z}$  - единичный вертикальный вектор.

Вектор скорости частиц  $\vec{V}_0$  в этом случае удовлетворяет соотношению

$$\vec{V}_0 = \hat{z} \times \nabla \psi = -(\hat{z} \times \vec{k}) A \sin(kx + ly - \sigma t + \varphi). \quad (6.4.9)$$

Проанализируем поведение частиц и жидких столбиков в рассматриваемом движении. Скорость частиц перпендикулярна волновому вектору и направлена вдоль фронта волны. Когда волновой вектор перпендикулярен  $\hat{z} \times h_0$ , т.е. изобатам, частота согласно (6.4.8) равна нулю и жидкие столбики движутся вдоль изобат. В этом случае движение является стационарным, его скорость и относительный вихрь не меняются со временем. Относительный вихрь будет генерироваться только в том случае, если жидкие столбики пересекают изобаты, что приводит к растяжению вихревых трубок. Если волновой вектор параллелен изобатам, то частота достигает максимального значения, так как в этом случае жидкие столбики в волне движутся поперек изобат. Это приводит к максимальному растяжению вихревых трубок.

Рассмотрим взаимное расположение волнового вектора и фазовой скорости распространения волн. Скорость распространения фронта волны в направлении волнового вектора ( $\vec{c}$ ) рассчитывается с помощью соотношения,

представляющего собой произведение фазовой скорости на волновой вектор единичной длины

$$\vec{c} = \frac{\sigma}{K} \left( \frac{\vec{k}}{K} \right). \quad (6.4.10)$$

Легко показать, что скалярное произведение векторов  $\vec{c}$  и  $\vec{z} \times \nabla h_0$  всегда положительно. Это означает, что угол между направлением распространения фронта волны и изобатами всегда острый. Вместе с тем, в отличие, например, от волн Пуанкаре, для волн Россби при заданном  $\vec{k}$  существует только одно решение для фазовой скорости перемещения. Фронт волны Россби движется в направлении волнового вектора всегда так, что справа остаются большие значения потенциального вихря, обусловленного рельефом.

Таким образом, рельеф дна приводит к тому, что рассматриваемое пространство не является изотропным и выделяет в нем определенное направление перемещения волн Россби. Если для определенности направить ось  $y$  в сторону увеличения потенциального вихря, обусловленного рельефом дна, то линии постоянной фазы будут двигаться всегда в отрицательном направлении оси  $x$ , а в направлении оси  $y$  фазовая скорость может быть как положительной, так и отрицательной. Действительно, при выбранном направлении оси  $y$  при

$$\frac{\partial h_0}{\partial y} = -\frac{1}{\varepsilon D} \frac{\partial H_0}{\partial y} = \beta \quad (6.4.11)$$

частота  $\sigma$  равна

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + F}. \quad (6.4.12)$$

Тогда

$$c_x = \frac{\sigma}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2 + F},$$

$$c_y = \frac{\sigma}{l} = -\frac{\beta k / l}{k^2 + l^2 + F}. \quad (6.4.13)$$

Из соотношения (6.4.13) видно, что  $c_x < 0$ , а  $c_y > 0$ , когда  $k/l < 0$ , и  $c_y < 0$ , когда  $k/l > 0$ .

Из анализа (6.4.12) следует, что абсолютный максимум частоты  $\sigma_m$  достигается при  $l = 0$  и  $k = F^{1/2}$

$$\sigma_m = -\frac{\beta}{2F^{1/2}}. \quad (6.4.14)$$

Соответствующая размерная длина волны равна

$$\lambda_* = \lambda L = 2\pi \frac{L}{F^{1/2}} = 2\pi R, \quad (6.4.15)$$

что в  $2\pi$  раз больше радиуса деформации Россби.

Таким образом, анализ условий сохранения потенциального вихря позволяет выявить закономерности распространения низкочастотных волн Россби и изменение относительного вихря со временем в однородной жидкости над заданным рельефом. Эти условия также позволяют выяснить физический механизм колебаний геофизических объектов, описываемых волной Россби.

Рассмотрим простейший случай движения жидких столбиков над меняющимся в пространстве рельефом подстилающей поверхности. Пусть в начальный момент времени на изолинии потенциального вихря, обусловленного рельефом дна, находится три жидких столбика А, В, и С (рис. 6.5). Под воздействием внешней причины столбик В смещается в направлении увеличения потенциального вихря, обусловленного рельефом, т. е. в направлении  $\nabla h_0$ . В силу закона сохранения потенциального вихря (6.3.40)  $\zeta_0 - F\eta_0 + h_0 = const$ . Увеличение  $h_0$  приводит к уменьшению  $\zeta_0 - F\eta_0$ . Уменьшение величины потенциального вихря, обусловленного волной  $\zeta_0 - F\eta_0$  может быть осуществлено двумя путями: генерацией отрицательной относительной завихренности, что приведет к уменьшению  $\zeta_0$ , или повышением свободной поверхности  $\eta_0$ , что также обусловит, в силу геострофических соотношений, циркуляцию по часовой стрелке.

Таким образом, перемещение столбика В в сторону больших глубин приведет к появлению циркуляции в нем по часовой стрелке. Эта циркуляция вызовет перемещение столбиков А и С. При этом столбик А будет перемещаться в сторону больших глубин и в нем будет генерироваться такая же циркуляция, как и в В, т.е. по часовой стрелке столбик С будет перемещаться в сторону меньших глубин и в нем будет создаваться циркуляция против часовой стрелке. Возникшие в столбиках А и С циркуляции в своих частях, обращенных к столбику В, стремятся вернуть его в первоначальное положение. Этот столбик В по инерции проскочит исходное положение и колебания будут продолжаться. Таким образом, за счет изменения рельефа подстилающей поверхности в слое жидкости переменной толщины поддерживаются квази-геострофические волны Россби.

Рассмотренные эффекта воздействия рельефа на циркуляционные условия однородного слоя жидкости можно применить к исследованию движения жидкости на сфере. До сих пор мы считали, что основным фактором возникновения циркуляции при движении жидких столбиков является потенци-

альный вихрь, обусловленный рельефом. Однако из общего выражения для потенциального вихря

$$\Pi_* = \frac{\zeta_* + f}{H_*} \quad (6.4.16)$$

следует, что, так как  $f$  является функцией широты  $\varphi$ , то смещение жидких столбиков вдоль меридиана приведет в силу закона сохранения потенциального вихря к изменению  $\zeta_*$ . Другими словами, мы получаем другое (помимо рельефа подстилающей поверхности) внешнее воздействие, приводящее к возникновению циркуляции. Прежде всего выясним, на каком расстоянии изменение параметра Кориолиса будет сопоставимо с величиной относительного вихря. Такая оценка позволит решить вопрос о необходимости учета изменения параметра Кориолиса с широтой при динамике крупномасштабных волн Россби. Если обозначить смещение по меридиану через  $\delta y$ , то соответствующие изменение

$$\delta f = \frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta y = \frac{\delta y}{a} 2\omega \cos \varphi, \quad (6.4.17)$$

где  $a$  - радиус Земли.

Оценим расстояние  $\delta y$ , на котором величина  $\delta f$  будет сопоставима с порядком относительной завихренности, т.е.  $O(\zeta / \delta f) = 1$ . Подставив  $O(\zeta) = U / L$  и  $\delta f$  из (6.4.17), нетрудно показать, что

$$O\left(\frac{\delta y}{a}\right) = \varepsilon_0 t g \varphi. \quad (6.4.18)$$

В средних широтах, где  $tg \varphi \cong 1$ , и  $\varepsilon_0$  - мало, относительно малые перемещения  $\delta y$  по меридиану будут приводить к изменениям планетарного вихря, сопоставимым с величиной относительной завихренности. Соотношение (6.4.18) позволяет оценить величину этих перемещений.

Направим ось  $x$  вдоль параллели, ось  $y$  - вдоль меридиана. Как следует из соотношения (6.4.17), масштаб движения вдоль меридиана, приводящий к значимым изменениям завихренности, допускает использование локальной декартовой системы координат. Сферичность Земли учитывается изменением параметра Кориолиса  $f$  с широтой. Для движений, где выполняется (6.4.18) зависимость параметра Кориолиса от широты задается линейной функцией

$$f = f_0 + \beta_0 y, \quad (6.4.19)$$

при этом  $\beta_0 y \ll f_0$  в силу соотношения (6.4.18). Здесь

$$f_0 = 2\omega \sin \varphi_0, \quad \beta_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 = \frac{2\omega}{a} \cos \varphi_0. \quad (6.4.20)$$

Напомним, что  $H = D + \eta - h_B$ . Рассматриваются движения с малыми изменениями  $f$ ,  $\eta$  и  $h_B$ . Покажем, к каким изменениям приведет учет  $\beta$ -эффекта по сравнению с условиями постоянства  $f$ . Выполним преобразования, аналогичные использованным при выводе (6.3.45), и получим

$$\Pi_* = \frac{f_0 + \beta_0 y}{D} \frac{1 + \varepsilon_0 \zeta_*}{1 + \varepsilon_0 F \eta_* - \varepsilon h_0}. \quad (6.4.21)$$

Тогда

$$\Pi_* = \frac{f_0 + \beta_0 y + f_0 \frac{h_B}{D} + \zeta_* - \frac{f_0 \eta_*}{D}}{D}. \quad (6.4.22)$$

Величина  $\beta_0 y + f_0 \frac{h_B}{D}$  есть переменная часть потенциального вихря, обусловленная внешними условиями. Следовательно, с учетом  $\beta$ -эффекта к эффекту рельефа подстилающей поверхности добавляется механизм изменения параметра Кориолиса с широтой. Следовательно, все выводы, касающиеся однородного слоя жидкости с переменной глубиной, справедливы и для случая совместного эффекта изменения глубины и параметра Кориолиса на сфере.

При постоянной глубине в выражениях (6.4.12) - (6.4.14) с учетом изменения параметра Кориолиса по меридиану величина  $\beta$  отлична от нуля и равна

$$\beta = \beta_0 \frac{L^2}{U}, \quad (6.4.23)$$

оси  $x$  и  $y$  направлены соответственно на восток и север.

Описанная выше модель с постоянным параметром Кориолиса можно назвать *моделью  $f$ -плоскости*, в то время как модель с переменным параметром Кориолиса, в которой геометрия движения предполагается плоской, а параметр Кориолиса линейной функцией от  $y$ , называется *моделью  $\beta$ -плоскости*.

Представляет интерес обобщить рассмотренный подход к изучению квазигеострофических волн Россби на модель  $\beta$ -плоскости с учетом изменения глубины  $h_B(x, y)$ .

В этом случае выражение для потенциального вихря имеет вид (6.4.22), а его часть, обусловленная внешними воздействиями имеет вид

$$\beta_0 y + f_0 \frac{h_B}{D}. \quad (6.4.24)$$

Таким образом, если теперь обозначить

$$\varepsilon h_0 = \frac{\beta_0 y}{f_0} + \frac{h_B}{D} \quad (6.4.25)$$

и учесть, что ось  $y$  направлена на север, то соответствующие выражения для  $\sigma$ ,  $c_x$  и  $c_y$  остаются без изменений. Естественно, эти выражения принимают вид (6.4.12) - (6.4.14), когда направление наибольшего роста высоты рельефа  $h_B$  совпадает с направлением на север.

При интерпретации физического механизма поддержания волны Россби необходимо учитывать, что в этом случае генерируется абсолютная завихренность, представляющая собой сумму относительной и планетарной. Другими словами, когда столбик движется на север (на юг) и в этом же направлении увеличивается (уменьшается) высота рельефа, то оба эффекта усиливают друг друга. В противном случае характер циркуляции качественно определить нельзя, так как он зависит от количественного соотношения указанных эффектов.

### **6.5 Волны Россби на зональном течении**

Рассмотрим случай, когда имеется средний поток, на который наложено волновое возмущение. Выясним условия существования волнового возмущения на среднем течении. При этом зададим, что однородный поток направлен вдоль изолинии потенциального вихря, обусловленного внешними условиями (внешний потенциальный вихрь). Примем, что

$$h_0 = \beta y, \quad (6.5.1)$$

величина  $\beta$  определяется из соотношения (6.4.23). Легко показать, что функция тока

$$\psi = -\hat{U}y \quad (6.5.2)$$

удовлетворяет уравнению потенциального вихря (6.4.3) и среднее течение представляет собой прямолинейный и параллельный оси  $x$  поток. Будем пользоваться моделью  $\beta$ -плоскости и соответствующими направлениями осей  $x$  и  $y$ . Пользуясь терминами, принятыми в метеорологии, при  $\hat{U} = +1$  зональный поток будет направлен на восток и называться западным, а при

$\hat{U} = -1$  - направлен на запад и называться восточным. Здесь мы также пользуемся безразмерными величинами.

Для общего потока, представляющего собой сумму среднего течения и волнового возмущения, функция тока имеет вид

$$\psi = -\hat{U}y + \Phi(x, y, t). \quad (6.5.3)$$

Подставляя (6.5.3) в (6.4.3а) с учетом выражения (6.5.1), получим

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{U} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\nabla^2 \Phi - F\Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} (\beta + F\hat{U}) + J(\Phi, \nabla^2 \Phi - F\Phi) = 0. \quad (6.5.4)$$

Воспользуемся решением вида плоской волны

$$\Phi = A \cos(kx + ly - \sigma t). \quad (6.5.5)$$

В этом случае

$$\nabla^2 \Phi - F\Phi = -(k^2 + l^2 + F)\Phi = -(K^2 + F)\Phi \quad (6.5.6)$$

и линейный член в виде якобиана равен нулю  $J(\Phi, \nabla^2 \Phi - F\Phi) \equiv 0$ .

Тогда уравнение (6.5.4) становится линейным и рассматриваемая далее теория называется линейной теорией волн Россби. Изложим её основные результаты. Решение (6.5.5) будет удовлетворять (6.5.4) для любой амплитуде при условии:

$$\sigma = \frac{k}{K^2 + F} [\hat{U}K^2 - \beta]. \quad (6.5.7)$$

Фазовая скорость в направлении оси  $x$  будет равна

$$c_x = \frac{\sigma}{k} = \frac{\hat{U}K^2 - \beta}{K^2 + F} = \hat{U} - \frac{\beta + F\hat{U}}{K^2 + F}. \quad (6.5.8)$$

Таким образом, при *западном потоке* ( $\hat{U} = +1$ ) (волна движется на восток), если  $K^2 > \beta$ , и  $c_x < 0$  (волна движется на запад), если  $K^2 < \beta$ . При  $K = \beta^{1/2}$  в этом потоке существует неподвижная волна.

При *восточном потоке* ( $\hat{U} = -1$ )  $c_x$  отрицательна для всех  $K$  и неподвижные волны не существуют.

В размерных единицах длина неподвижной волны Россби равна

$$\lambda_* = \lambda L = L \frac{2\pi}{K} = 2\pi \frac{L}{\beta^{1/2}} = 2\pi \left( \frac{U}{\beta_*} \right)^{1/2}, \quad (6.5.9)$$

где  $\beta = \frac{L^2}{U} \beta_0$ ,  $\beta_0 = \frac{2\omega}{a} \cos \varphi_0$ .



Подставив численное значение  $\beta_0$  для средних широт и скорость потока для атмосферы ( $U = 10 \text{ м/с}$ ), получим, что неподвижная волна Россби имеет длину порядка 5000 км, а для океана ( $U = 10 \text{ см/с}$ ), порядка 500 км.

Среднее течение влияет на перемещение волн Россби. Действительно, при отсутствии среднего течения волны Россби имеют отрицательную фазовую скорость, равную

$$c_x = -\frac{\beta}{K^2 + F}. \quad (6.5.10)$$

т.е. волна перемещается с востока на запад

Если возникнет среднее течение, направленное с запада на восток, и оно достигает скорости

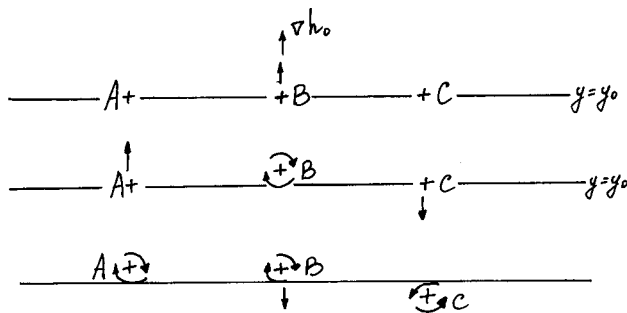
$$\hat{U} = \frac{\beta}{k^2}. \quad (6.5.11)$$

то величина фазовой скорости  $c_x = 0$  и волна становится неподвижной. Заметим, что скорость среднего течения, необходимого для остановки волны больше фазовой скорости (6.5.10) при отсутствии течения. Влияние среднего течения на динамику волн Россби проявляется в двух направлениях. Первое, увеличение (уменьшение) скорости течения  $\hat{U}$  приводит к такому же изменению фазовой скорости. При западном потоке (с запада на восток) фазовая скорость при малых скоростях потока направлена против течения, а при больших - по течению. Восточный поток усиливает движение волны с востока на запад. Второе, эффект среднего течения приводит к изменению фазовой скорости относительно среднего течения, Волна, движущаяся на восток в потоке с запада на восток отстает от среднего потока. Волна в восточном потоке перегоняет его, если  $|\hat{U}| < \frac{\beta}{F}$ . При  $|\hat{U}| = \frac{\beta}{F}$  скорость волны по отношению к среднему течению равна нулю и волна движется вместе с потоком. Наконец, при  $|\hat{U}| > \frac{\beta}{F}$  волна и в восточном потоке отстает от него. Эти эффекты связаны с тем, что присутствие среднего потока изменяет градиент внешнего потенциального вихря за счет генерации наклона свободной поверхности. Этот наклон при  $\hat{U} < 0$  увеличивает градиент толщины слоя в направлении оси  $y$  и, следовательно, увеличивает градиент внешнего потенциального вихря. За счет такого увеличения  $\beta$  возрастает частота колебаний  $\sigma$ . Рост  $\sigma$  приводит к увеличению направленной в сторону отрицательных  $x$  фазовой скорости волн относительно среднего движения. Если радиус деформации Россби больше длины волны, то  $F \ll 1$ , и вызванный течением наклон свободной поверхности на характерном масштабе волн оказывается незначительным. Для  $\hat{U} < 0$  влияние  $\beta$  ослабевает и при  $\hat{U} = -\beta/F$  вообще исчезает. Таким образом,

динамика распространения волны зависит от градиента полного потенциального вихря течения, на которое наложена волна.

### 6.6. Волны Россби, генерируемые начальным возмущением

Рассмотрение плоских волн является математическим аппаратом, с помощью которого можно получить основные характеристики волнового движения и выявить механизм поддержания волновых колебаний. Однако, плоская волна может рассматриваться лишь как полезное приближение при описании волновой картины. В реальных условиях строгая периодичность волны и постоянство ее амплитуды не соблюдается. Обычно наблюдаемые волны являются суперпозицией многих плоских волн и распространяются группами или пакетами. При этом реальный *цуг* волн имеет начало и конец, как в пространстве, так и во времени. Таким образом, необходимо рассмотреть динамику волн, амплитуда которых меняется в пространстве и во времени.



Подчеркнем, что одним из наиболее фундаментальных свойств волновых процессов является способность переносить энергию на расстояния большие по сравнению с характерным смещением частиц жидкости в самой волне.

Рис.6.5. Положение трех жидких столбиков А, В и С в три последовательных момента времени.

Это связано с тем, что волна в жидкости представляет собой результат совместного действия многих частиц жидкости, испытывающих согласованные смещения на больших пространственных масштабах. За счет этого и происходит передача информации на большие расстояния.

Рассмотрим волновой пакет, задаваемый в виде

$$\psi = A(x, y, t) \cos(kx + ly - \sigma t). \quad (6.6.1)$$

При этом

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \ll K, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \ll K, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \ll \sigma. \quad (6.6.2)$$

Другими словами, функция  $A(x, y, t)$  медленно меняется в пространстве и во времени. Условия (6.6.2) означают, что на расстоянии порядка длины

волн и за время ее периода амплитуда меняется мало и может считаться приблизительно постоянной (рис. 6.6). Очевидно, что амплитуда огибающей определяет местоположение сосредоточения волн с наибольшей интенсивностью. Там, где амплитуда велика, там и велика интенсивность (энергия) волны.

Для определения закона распространения огибающей волны найдем условия, при выполнении которых соотношение (6.6.1) будет являться решением уравнения потенциального вихря, В отличие от чисто плоской волны волновой пакет уже не является точным решением полного нелинейного уравнения.

Как и в предыдущих задачах, осуществим линеаризацию основного уравнения потенциального вихря (6.4.3). Рассмотрим случай волн Россби на сфере, когда

$$h_0 = \beta y \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\beta_0 L^2}{U} \gg 1. \quad (6.6.3)$$

В этом случае условием линеаризации будет

$$\frac{c_*}{U} \gg 1, \quad (6.6.4)$$

где  $c$  - размерная фазовая скорость волн Россби. Линеаризированное уравнение потенциального вихря имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla^2 \psi - F\psi] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (6.6.5)$$

Подставляя соотношение (6.6.1) в (6.6.5), получаем

$$\begin{aligned} \sin(kx + ly - \sigma t) & \left[ -(\sigma(K^2 + F) + \beta k)A - 2 \left( k \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial t} + l \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial t} \right) + \sigma \nabla^2 A \right] + \\ & + \cos(kx + ly - \sigma t) \left[ -(K^2 + F) \frac{\partial A}{\partial t} + 2\sigma \left( k \frac{\partial A}{\partial x} + l \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \beta \frac{\partial A}{\partial x} + \nabla^2 \frac{\partial A}{\partial t} \right] = 0. \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

В связи с тем, что рассматривается случай, когда на расстоянии длины волны и за время, равное периоду, амплитуда может рассматриваться как приблизительно постоянная величина, то в выражении (6.6.6) производные от амплитуды приблизительно равны нулю, Тогда из (6.6.6) следует

$$\sigma(K^2 + F) + \beta k = 0. \quad (6.6.7)$$

Выражение (6.6.7) представляет собой дисперсионное выражение для чисто плоской волны, и оно может быть использовано в качестве первого приближения для медленно меняющегося волнового пакета. Для него справедливы соотношения между частотой и волновым вектором и закономерности распространения фазы чисто плоской волны. С другой стороны, для выполнения уравнения (6.6.6) необходимо, чтобы оба коэффициента при тригонометрических функциях обращались в нуль. Тогда из условия равенства нулю коэффициента при  $\cos(kx + ly - \sigma t)$  получаем

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{2\sigma k + \beta}{K^2 + F} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{2\sigma l}{K^2 + F} \frac{\partial A}{\partial y} = 0. \quad (6.6.8)$$

При записи (6.6.8) было учтено, что член  $\nabla^2 \frac{\partial A}{\partial t} \cong 0$ . Найдем из (6.6.7) частоту  $\sigma$  и подставив её в (6.6.8), получим

$$\frac{\partial A}{\partial t} + c_{gx} \frac{\partial A}{\partial x} + c_{gy} \frac{\partial A}{\partial y} = 0, \quad (6.6.9)$$

где

$$c_{gx} = \beta \frac{k^2 - l^2 - F}{(K^2 + F)^2}, \quad (6.6.10)$$

$$c_{gy} = 2 \frac{\beta k l}{(K^2 + F)^2}. \quad (6.6.11)$$

Соотношение (6.6.9) можно записать в векторном виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{c}_g \cdot \nabla) A = 0. \quad (6.6.12)$$

Итак, амплитуда  $A$  постоянна для наблюдателя, движущегося со скоростью  $\vec{c}_g$  или

$$A = A(\vec{r} - \vec{c}_g t), \quad (6.6.13)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор на плоскости  $XOY$ .

Таким образом, в первом приближении огибающая волнового пакета движется со скоростью  $\vec{c}_g$ , которая называется групповой скоростью, Легко

показать, что составляющие вектора групповой скорости рассчитываются из соотношений:

$$c_{gx} = \frac{\partial \sigma}{\partial k}, \quad c_{gy} = \frac{\partial \sigma}{\partial l}, \quad \vec{c}_g = \nabla_k \sigma = \vec{i} \frac{\partial \sigma}{\partial k} + \vec{j} \frac{\partial \sigma}{\partial l}, \quad (6.6.14)$$

где  $\nabla_k$  обозначает градиент по волновым числам  $k$  и  $l$ . Поскольку  $\sigma = kc$ , где  $c$  - фазовая скорость, или скорость передвижения фронта волны в направлении волнового вектора, то

$$\vec{c}_g = \nabla_k (Kc) = \frac{\vec{k}}{K} c + K \nabla_k c = \vec{c} + K \nabla_k c. \quad (6.6.15)$$

Если фазовая скорость  $\vec{c}$  не зависит от волнового вектора  $\vec{k}$ , то второй член в (6.6.15) равен нулю и групповая скорость по величине и направлению совпадает с фазовой. В противном случае, если  $\vec{c}$  есть функция от  $\vec{k}$ , то групповая и фазовая скорости отличаются по величине и направлению. Такие волны называются диспергирующими. Примером диспергирующей волны является волна Россби. Для нее групповая скорость существенно отличается по направлению от направления волнового вектора  $\vec{k}$  и по величине от фазовой скорости. Таким образом, огибающая волнового возмущения конечной протяженности (рис. 6.6) будет перемещаться в пространстве с групповой скоростью. Отдельные гребни, характеризующиеся определенной фазой, будут двигаться с фазовой скоростью вдоль или противоположно направлению  $\vec{k}$ .

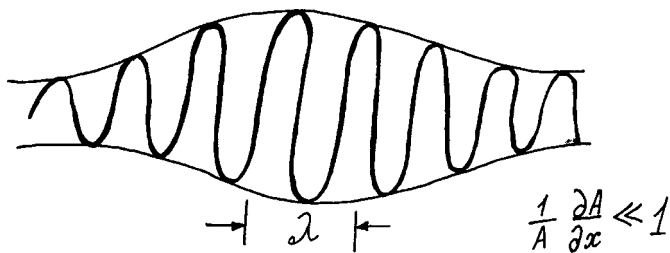


Рис.6.6. Волновой пакет, где  $A(x)$  это огибающая возмущения с длиной волны  $\lambda$ .

Таким образом, отдельные волны двигаются внутри пакета, меняя в процессе перемещения величину своей амплитуды. Они появляются на одном конце пакета, где их амплитуда

становится отличной от нуля, затем по мере перемещения внутри пакета их амплитуда возрастает до максимальной, затем вновь убывает по направлению к другому концу пакета. Там, где амплитуда обращается в нуль, волны исчезают. В волновом пакете волновая картина проявляется в виде появления гребней и ложбин, другими словами - различных фаз волны.

Рассмотрим более детально свойство групповой скорости волны Россби. Прежде всего исследуем групповую скорость в направлении оси  $x$ , пользуясь  $\beta$  - плоскостью. Из (6.6.10) следует:

$$\begin{aligned} k^2 < l^2 + F, \quad C_{gx} < 0, \\ k^2 > l^2, \quad C_{gx} > 0. \end{aligned} \quad (6.6.16)$$

Длинные в направлении  $x$  волны ( $k$  мало) будут перемещаться в отрицательном направлении  $x$ , т.е. к западу. Короткие в направлении  $x$  волны ( $k$  велико) будут перемещаться в положительном направлении оси  $x$ , т.е. на восток. Для  $k^2 = l^2 + F$  волны будут иметь неподвижную огибающую. Подчеркнем, что направление движения огибающей будет противоположно движению фронта коротких волн и совпадать с направлением движения длинных волн.

Проанализируем зависимость отношения составляющих групповой скорости (6.6.10)- (6.6.11) к составляющим фазовой скорости (6.4.11)

$$\frac{c_{gx}}{c_x} = -\frac{k^2 - (l^2 + F)}{K^2 + F}, \quad (6.6.17)$$

$$\frac{c_{gy}}{c_y} = -\frac{2l^2}{K^2 + F}. \quad (6.6.18)$$

Заметим, что из (6.6.17)  $\left| \frac{c_{gx}}{c_x} \right| < 1$ , т.е. в направлении  $x$ , огибающая всегда движется медленнее, чем фронт волны. Из (6.6.18) следует, что вдоль меридиана групповая скорость всегда направлена противоположно фазовой скорости. Другими словами, если фронт волны движется на север, то область волнового возмущения, определяемая границами огибающей, движется на юг и, наоборот.

До сих пор мы рассматривали волны с меняющейся в пространстве и во времени амплитудой. Однако, во многих случаях волнообразное возмущение характеризуется последовательностью гребней и ложбин, расстояние между которыми изменяется в пространстве и во времени. Для решения вопроса о том, как это обстоятельство будет влиять на динамику волнового пакета, рассмотрим случай квазигеострофического движения жидкости в бесконечно длинном канале, ограниченном стенками на двух широтных кругах  $y = 0$  и  $y = 1$ . При этом потенциальный вихрь, обусловленный внешним воздействием, линейно изменяется с изменением  $y$  или, другими словами, параметр Кориолиса линейно возрастает с широтой. В начальный момент жидкость в ка-

нале покоится и в этот момент ей сообщается возмущение произвольной формы, локализованное в окрестности  $x = 0$ . В этом случае начальное возмущение будет содержать набор волн различной длины. Передача возмущения на большие расстояния от начала координат будет иметь волновой характер. Рассматривается случай, когда амплитуда волн мала. Широтная полоса, вдоль которой распространяется возмущение, предполагается изолированной от окружающей среды.

Для возмущения с малой амплитудой основное уравнение процесса имеет вид (6.6.5)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi - F\psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (6.6.19)$$

Наличие стенок позволяет записать граничные условия в виде

$$v_0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (6.6.20)$$

Начальное условие записывается в виде

$$\psi(x, y, 0) = \psi_0(x, y) = \psi_n(x) \sin n\pi y, \quad (6.6.21)$$

где  $n$  - произвольное целое число.

Таким образом, начальное возмущение может быть представлено в виде суммы Фурье по  $n$  возмущений вида (6.6.21). Так как уравнение (6.6.19) линейное, то результирующая решения в общем случае будет линейной суперпозицией решений с различными  $n$ .

В соответствии с (6.6.21) будем искать решение задачи (6.6.19) в форме

$$\psi = \phi_n(x, t) \sin n\pi y \quad (6.6.22)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям и является решением задачи (6.6.19), если  $\phi_n(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} - a^2 \phi_n \right] + \beta \frac{\partial \phi_n}{\partial x} = 0, \quad (6.6.23)$$

где 
$$a^2 = n^2 \pi^2 + F. \quad (6.6.24)$$

Методом преобразования Фурье с использованием начальных условий мы получаем

$$\phi_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_n(k) e^{i(kx - \sigma(k)t)} dk. \quad (6.6.25)$$

Здесь

$$\sigma(k) = -\frac{\beta k}{k^2 + n^2 \pi^2 + F}; \quad (6.6.26)$$

а величина  $A_n(k)$  представляет собой амплитуды начальных плоских волн, получаемых посредством *Фурье-преобразования* (6.6.22).

Таким образом, искомое возмущение состоит из Фурье-суперпозиции бесконечного числа плоских волн, каждая из которых имеет свое волновое число  $k$  и частоту  $\sigma(k)$ , равную в соответствии с (6.6.26) частоте волны Россби для этого волнового числа. Как уже указывалось, амплитуда  $A_n(k)$  каждой такой волны полностью определяется начальным условием (6.6.22).

Будем рассматривать случай, когда начальное возмущение резко локализовано по  $x$ , Это означает, что спектр амплитуды волны (зависимость амплитуды от волнового числа), является очень широким. Следовательно, интеграл (6.6.25) необходимо вычислять по широкому диапазону волновых чисел. Из физических соображений следует, что в силу произвольности начального возмущения характерные черты динамики волн будут проявляться при больших временных интервалах, когда энергия уже будет распределена по области, значительно превосходящей размеры источника. Так как именно эти особенности динамика волн представляют интерес, то достаточно использовать асимптотическую форму решения (6.6.25) при больших  $x$  и  $t$ . Приведем сразу окончательное асимптотическое выражение для  $\phi_n(x, t)$ .

$$\phi_n(x, t) = \sum_{k_s} \left\{ \frac{2 A_n(k_s)}{\left( t \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial k^2}(k_s) \right| \right)^{1/2}} \times \cos \left( k_s x - \sigma(k_s) t - \frac{\pi}{4} \text{sign} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial k^2}(k_s) \right) \right\}, \quad (6.6.27)$$

где функция  $\text{sign}(f)$  определяется соотношением

$$\text{sign}(f) = 1, \text{ если } f > 0,$$

$$\text{sign}(f) = 0, \text{ если } f = 0,$$

$$\text{sign}(f) = -1, \text{ если } f < 0.$$

Величина  $k_s$  представляет собой особую точку функции  $A_n(k)$ , в которой увеличение  $k$  не приводит к росту фазы

$$\theta = t q(k) = t \left[ \frac{x}{t} k - \sigma(k) \right]. \quad (6.6.28)$$



Другими словами, точки стационарной фазы  $k_s$  удовлетворяют соотношению  $\frac{\partial q}{\partial k} = 0$ , т.е.

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial k} \right|_{k=k_s} = \frac{x}{t}. \quad (6.6.29)$$

Физически это означает, что при больших  $t$  ( $t \gg t_0$ ) основной вклад в  $\phi_n(x, t)$  в точке  $x$  дают те волновые компоненты в исходном спектре (при  $t = t_0$ ), групповая скорость которых равна  $\frac{x}{t - t_0}$ . Решение уравнения (6.6.29) позволяет определить величины  $k_s$ , по которым следует выполнить суммирование в (6.6.27).

Рассмотрим поведение полученного решения (6.6.27) со временем. С одной стороны, как видно из (6.6.27) это решение убывает пропорционально  $t^{-1/2}$ . Но так как  $k_s$  является функцией от  $x/t$ , то зависимость от  $t$  величины  $\phi_n$  будет более сложной. Введем в рассмотрение величину фазы  $\theta_s$  для функции  $\phi_n$ :

$$\theta_s(x, t) = k_s x - \sigma(k_s) t$$

и волновое число  $m$ , определенное как скорость изменения  $\theta_s$  при изменении  $x$ , т.е.

$$m = \frac{\partial \theta_s}{\partial x} = k_s + \left( x - t \left. \frac{\partial \sigma}{\partial k} \right|_{k=k_s} \right) \frac{\partial k_s}{\partial x}. \quad (6.6.30)$$

Введенное по (6.6.30) локальное волновое число  $m$  является функцией от волнового числа  $k_s$  и групповой скорости  $c_{gs} = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial k} \right|_{k=k_s}$ . Если наблюдатель движется от начала координат с групповой скоростью  $c_{gs}$ , то для него локальное волновое число и локальная длина волны будут постоянными. Если же наблюдатель неподвижен, либо движется с любой отличной от  $c_{gs}$  скоростью, то он будет видеть колебание, длина волны которого меняется во времени и пространстве. Аналогично можно ввести локальную частоту

$$\sigma_s = -\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \sigma(k_s) - \left( x - t \left. \frac{\partial \sigma}{\partial k} \right|_{k=k_s} \right) \frac{\partial k_s}{\partial t}. \quad (6.6.31)$$

Аналогично локальному волновому числу для наблюдателя, движущегося с групповой скоростью  $c_{gs}$ ,  $\sigma = \sigma(k_s)$  где  $\sigma(k_s)$  - частота, определяемая волновым числом  $k_s$  согласно дисперсионному соотношению (6.6.26). Ло-

кальная фазовая скорость (например скорость продвижения отдельного гребня)

$$c_s = \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\theta_s = \text{const}} = \frac{\sigma(k_s)}{k_s}. \quad (6.6.32)$$

Так как  $k$  постоянна только для наблюдателя, движущегося с групповой скоростью  $c_{gs}$ , а для волн Россби фазовая скорость отлична от групповой, то наблюдатель, перемещающийся с волной определенной длины будет видеть скользящие мимо него другие волны. Если же наблюдатель будет перемещаться вместе с определенной фазой волны, например с гребнем, т.е. он будет двигаться с локальной фазовой скоростью  $c_s$ , то он будет видеть, что длина волны меняется во времени. Одновременно будет меняться и фазовая скорость. Таким образом, наблюдатель, двигающийся вместе с возмущением определенной длины волны, будет двигаться равномерно с групповой скоростью. Движение наблюдателя, двигающегося вместе с определенной фазой (например, с гребнем) будет ускоряться или замедляться, так как длина волны, несущая этот гребень, изменяется во времени.

Из (6.6.30) и (6.6.31) получим

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = 0. \quad (6.6.33)$$

Поскольку  $k_s$  число полных колебаний на единицу длины, а  $\sigma_s$  - скорость, с которой определенная фаза волны проходит мимо фиксированной точки наблюдения, то (6.6.33) означает, что число фаз в цуге волн (6.6.27) при распространении возмущения сохраняется, хотя расстояние между фазами различных длин волн изменяется с длиной волны. Из (6.6.33) вытекает, что длины волн и частоты их распространяются с групповой скоростью. Действительно так как  $\sigma_s$  зависит от  $x$  только через  $k_s$ , то из (6.6.33) получаем

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial k} \Big|_{k=k_s} \frac{\partial k_s}{\partial x} = 0, \quad (6.6.34)$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial k} \Big|_{k=k_s} \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = 0. \quad (6.6.35)$$

Из (6.6.14) соотношения (6.6.34) и (6.6.35) переписываются в виде

$$\frac{\partial k_s}{\partial t} + c_{gs} \frac{\partial k_s}{\partial x} = 0, \quad (6.6.36)$$

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} + c_{gs} \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} = 0. \quad (6.6.37)$$

Эти соотношения и есть уравнения переноса  $k_s$  и  $\sigma_s$  со скоростью  $c_{gs}$ .

Рассмотрим решение уравнения (6.6.19) для замкнутого бассейна, Вид бассейна и его характеристики приведены на рис. 6.7. На рисунке  $C$  - контур, ограничивающий замкнутый бассейн,  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к  $C$ ,  $\vec{\tau}$  - тангенциальный единичный вектор.

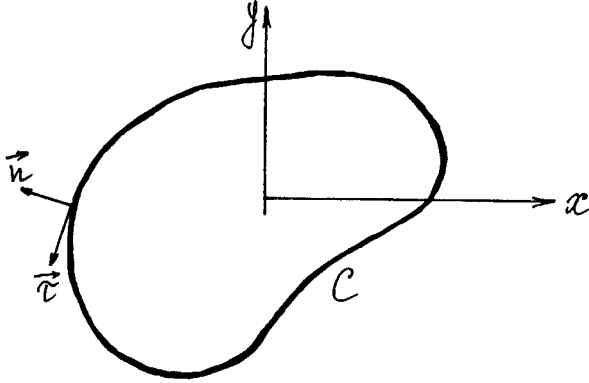


Рис. 6.7. Ограниченный кривой  $C$  бассейн, в котором рассматриваются квазигеострофические свободные колебания.

Для замкнутого бассейна формулировка граничных условий не является тривиальной и требует специального рассмотрения. Поскольку вектор скорости порядка единицы направлен вдоль линии тока, то условие равенства нулю нормальной компоненты скорости на границе бассейна удовлетворяется с точностью до  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll 1$ . При этом, если граница  $C$  совпадает с линией тока, то функция тока постоянна на  $C$ .

Тогда граничные условия записываются следующим образом

$$\psi = \Gamma_0(t) \text{ на } C, \quad (6.6.38)$$

Рассмотрим простейший случай волн Россби в замкнутом бассейне, когда  $\Gamma_0 = 0$  и характерный горизонтальный масштаб бассейна значительно меньше радиуса деформации. В этом случае решение при  $F=0$  уравнения (6.6.19) имеет вид

$$\psi(x, y, t) = \text{Re } e^{-i\sigma t} \Phi(x, y), \quad (6.6.39)$$

если

$$\nabla^2 \Phi + \frac{i\beta}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0. \quad (6.6.40)$$

Представим  $\Phi$  в виде

$$\Phi = e^{-i\beta x/2\sigma} \varphi(x, y). \quad (6.6.41)$$

Для  $\varphi$  получаем уравнение

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\beta^2}{4\sigma^2} \varphi = 0. \quad (6.6.42)$$

Из уравнения (6.6.42) и условия  $\varphi = \Phi = 0$  на  $C$  следует, что искомое решение представляет собой возможные *моды колебаний*, зажатой на краю

мембраны. Для прямоугольного бассейна  $0 \leq x \leq x_0$ ,  $0 \leq y \leq y_0$  любая функция из совокупности

$$\varphi = \varphi_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{x_0} \sin \frac{n\pi y}{y_0}, \quad m=1,2,\dots, \quad n=1,2,3,\dots \quad (6.6.43)$$

будет удовлетворять граничным условиям и уравнению (6.6.42), если частота равна

$$\sigma = \sigma_{mn} = -\frac{\beta}{2\pi \left[ \left( m^2 / x_0^2 \right) + \left( n^2 / y_0^2 \right) \right]^{1/2}}. \quad (6.6.44)$$

Из (6.6.44) следует, что наименьшим значениям  $m$  и  $n$  (*низшие моды*) соответствуют наибольшие частоты и, наоборот, *высшие моды* осцилируют значительно медленнее. Используя выражения для  $\sigma_{mn}$ ,  $\varphi_{mn}$ ,  $\Phi_{mn}$  получим выражение для функции тока для рассматриваемой моды с волновыми числами  $m$  и  $n$

$$\psi_{mn} = \cos \left( \frac{\beta x}{2\sigma_{mn}} + \sigma_{mn} t \right) \sin m\pi \frac{x}{x_0} \sin n\pi \frac{y}{y_0}. \quad (6.6.45)$$

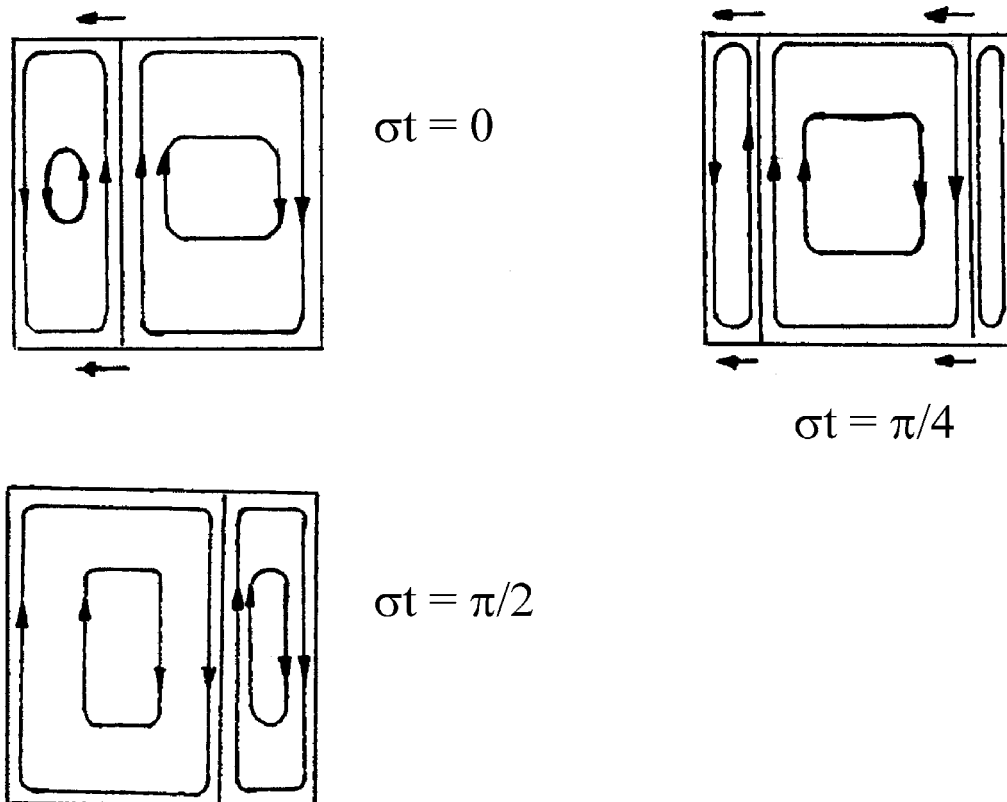


Рис. 6.8. Первая нормальная мода в прямоугольном бассейне.

Скорость распространения фазы равна

$$c_{mn} = -\frac{2\sigma_{mn}^2}{\beta} = -\frac{\beta}{2\pi^2(m^2/x_0^2 + n^2/y_0^2)}. \quad (6.6.46)$$

Как видно из (6.6.45) - (6.6.46) функция тока формируется несущей волной  $\cos\left(\frac{\beta x}{2\sigma_{mn}} + \sigma_{mn} t\right)$ , распространяющейся в направлении, противоположном оси  $x$ , т.е. на запад. Эта волна модулирована огибающей из синусоидальных функций. Модуляция обусловлена тем, что распространение происходит в замкнутом бассейне. Это требует выполнения соответствующих граничных условий.

Траектории движения частиц для  $m$  и  $n$ , равных единице (*первая нормальная мода*), показаны на рис 6.8. Как видно из решения и соответственно рисунка, каждая мода имеет фиксированные и движущиеся узлы, ограничивающие ячейки движения. Траектория частиц имеет замкнутый характер и в целом картина движения представляет собой набор ячеек, состоящих из движущихся узлов. Каждая ячейка то уменьшается, то увеличивается в размере, по мере того, как движущиеся узлы несущей волны приближаются к фиксированным узлам, а затем удаляются от них.

Картина представляет собой сжимающиеся и расширяющиеся ячейки вихреобразного движения. Каждая *нормальная мода* может быть представлена в виде четырех плоских волн Россби с волновыми векторами

$$\vec{k} = \vec{i}\left(\frac{\beta}{2\sigma_{mn}} \pm \frac{m\pi}{x_0}\right) + \vec{j}\left(\pm \frac{n\pi}{y_0}\right) = \vec{i}k + \vec{j}l. \quad (6.6.47)$$

Для каждого волнового вектора выполняется дисперсионное соотношение для плоских волн Россби.

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2}. \quad (6.6.48)$$

Нормальные моды для бассейнов других форм имеют аналогичный характер. Они состоят из распространяющейся на запад несущей волны, модулированной постоянной огибающей, узлы которой фиксированы и определяются решениями уравнения (6.6.42) с нулевыми значениями на границе. Задача о нормальных модах при  $F \neq 0$  значительно более сложная. Не приводя громоздкого вывода, укажем лишь, что полученное решение ее качественно совпадает со случаем  $F = 0$ . В случае  $F \neq 0$  значение  $\Gamma_0$  в (6.6.38) обязательно отлично от нуля и зависит от времени, т.е. высота поверхности жидкости на

границе меняется со временем, так что поверхность жидкости попеременно поднимается и опускается одинаково для всех точек границы. Интересно отметить, что в этом общем случае моды антисимметричные относительно  $y = 0$ , имеют ту же структуру, что и при  $F = 0$ . В то же время частота

$$\sigma_{mn} = -\frac{\beta}{k_{mn} + F} \quad (6.6.49)$$

уменьшается из-за деформации свободной поверхности. Асимметричные моды имеют нулевую амплитуду на границе в то время как только симметричные относительно  $y = 0$  моды имеют ненулевую амплитуду из-за пространственной анизотропии динамики волн, обусловленной  $\beta$ -эффектом.

При наличии произвольного начального возмущения решение уравнения (6.6.19) может быть представлено в виде линейной комбинации нормальных мод, амплитуда которых полностью определяется проекцией начального возмущения на каждую нормальную моду рассматриваемого бассейна. Исследуемые в этих случаях движения будут суммой всех возбужденных в замкнутом бассейне нормальных мод.

Рассмотренная динамика волн Россби представляет собой идеализацию двух видов задач. Во-первых, задач, в которых масштаб возмущений мал по сравнению с размерами области и эти возмущения должны двигаться длительное время прежде, чем они встретят границу. В этих задачах масштаб внешнего воздействия также мал по сравнению с размерами бассейна. Во-вторых, задач, в которых масштаб внешнего воздействия (например, ветрового воздействия в океане) достаточно велик. Масштаб возбужденного этим воздействием возмущения сопоставим с размером бассейна. В таких задачах влияние границы оказывается существенным. В первом приближении отклик на переменные во времени внешние воздействия в замкнутом бассейне может быть описан с помощью *метода нормальных мод*, рассмотренном в настоящем разделе.



Таким образом, наличие стенки приводит к появлению отраженной волны. Запишем для нее функцию тока

$$\psi_2 = \operatorname{Re} A_r e^{i(k_r x + l_r y - \sigma_2 t)}. \quad (6.7.4)$$

Полная функция тока есть суммой функции тока падающей и отраженной волн

$$\psi = \psi_j + \psi_r. \quad (6.7.5)$$

Таким образом, вблизи стенки появляется новый источник волн Росби в виде пакета отраженных волн. Рассмотрим как связаны между собою характеристики падающей и отраженной волн. Так как на самой стенке ( $x = 0$ )  $x$ -компонент скорости частицы изменяет знак, а он пропорционален  $\frac{\partial \psi}{\partial y}$  в геострофическом приближении, то

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (6.7.6)$$

Продифференцировав выражение (6.7.5) с учетом (6.7.4), получим

$$l_j A_j e^{i(l_j y - \sigma_j t) + l_r} + l_r A_r e^{i(l_r y - \sigma_2 t)} = 0. \quad (6.7.7)$$

Так как соотношение (6.7.7) справедливо для всех  $l$  и  $y$ , то

$$\sigma_j = \sigma_r = \sigma, \quad (6.7.8)$$

$$l_j = l_2 = l, \quad (6.7.9)$$

Из соотношений (6.7.8)- (6.7.9) следует, что

$$A_j = -A_r = A. \quad (6.7.10)$$

Таким образом, по составляющим волнового вектора падающей волны можно определить волновой вектор отраженной волны. Угол отражения равен углу падения, т.е. происходит упругое отражение. Так как  $k_r > k_j$ , то длина волнового вектора в результате отражения увеличивается, и волновой вектор отраженной волны будет составлять меньший угол с осью  $x$  по сравнению с падающей волной. При этом увеличение  $x$ -компоненты волнового вектора отраженной волны по сравнению с падающей происходит с убыванием частоты, как это следует их соотношения

$$k_r - k_j = 2 \left[ \frac{\beta^2}{4\sigma^2} - (l^2 + F) \right]^{1/2}. \quad (6.7.11)$$



Из (6.7.10) вытекает, что амплитуда функции тока по величине остается неизменной, при этом фаза изменяется на  $180^0$ . Наконец, из геострофических соотношений получим составляющие скорости частиц в падающей волне

$$\begin{aligned} u_j &= -\operatorname{Re}\left(ilAe^{i(k_jx+ly-\sigma t)}\right), \\ v_j &= \operatorname{Re}\left(ik_jAe^{i(k_jx+ly-\sigma t)}\right), \end{aligned} \quad (6.7.12)$$

и в отраженной волне

$$\begin{aligned} u_r &= \operatorname{Re}\left(ilAe^{i(k_r x+ly-\sigma t)}\right), \\ v_r &= -\operatorname{Re}\left(ik_rAe^{i(k_r x+ly-\sigma t)}\right). \end{aligned} \quad (6.7.13)$$

Полная сумма скоростей частиц равна сумме скоростей в падающей и отраженной волнах. Поэтому из соотношений (6.7.12) и (6.7.13) следует, что амплитуда  $x$ -компоненты скорости сохраняется, а  $y$ -компоненты увеличивается в результате эффекта отражения. Одновременно, в связи с тем, что групповая скорость при отражении уменьшается, отраженный волновой пакет будет сжатый по сравнению с падающим. Отношение длин падающего ( $L_r$ ), и отраженного ( $L_i$ ) пакетов равно

$$\frac{L_r}{L_i} = \frac{|c_{gr}|}{|c_{gj}|}. \quad (6.7.14)$$

Однако в направлении, перпендикулярном к траектории движения пакета, его ширина при отражении не изменяется.

## 6.8. Энергетика волн Россби

Исследование энергетики волн Россби начнем с доказательства утверждения, что энергия волн удовлетворяет закону сохранения. Кинетическая энергия единицы массы

$$\frac{u_*^2 + v_*^2}{2}, \quad (6.8.1)$$

проинтегрированная по глубине  $D$  в размерных единицах равняется

$$D \left( \frac{u_*^2 + v_*^2}{2} \right) = \frac{U^2}{2} D \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (6.8.2)$$

Невозмущенную свободную поверхность примем за нулевой отсчетный уровень. Тогда потенциальная энергия, отнесенная к единице массы, может быть записана в виде

$$g \int_0^{\eta_*} z_* dz_* = g \frac{\eta_*^2}{2} = \frac{U^2 D}{2} F \Psi^2. \quad (6.8.3)$$

Напомним, что индексом "\*" обозначены размерные величины, а при выводе (6.8.2) и (6.8.3) мы пользовались квазигеострофическими соотношениями.

Из (6.8.2) и (6.8.3) следует, что отношение потенциальной энергии к кинетической зависит от отношения масштаба движения к радиусу деформации и имеет порядок величины  $F$ .

Для вывода закона сохранения энергии воспользуемся уравнением (6.6.5), которое умножим на  $\Psi$  и запишем в компактном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\nabla \Psi)^2 + F \Psi^2}{2} \right] + \nabla \cdot \left[ -\Psi \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \vec{i} \beta \frac{\Psi^2}{2} \right] = 0. \quad (6.8.4)$$

Нетрудно видеть, что величина, которая стоит под знаком производной по времени, есть безразмерное выражение для суммы кинетической и потенциальной энергий

$$E(x, y, t) = \frac{(\nabla \Psi)^2 + F \Psi^2}{2}. \quad (6.8.5)$$

Величина, стоящая под знаком дивергенции, представляет собой поток энергии

$$\vec{s} = -\Psi \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \vec{i} \beta \frac{\Psi^2}{2}. \quad (6.8.6)$$

Тогда уравнение (6.8.4) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{s} = 0. \quad (6.8.7)$$

Уравнение (6.8.7) есть количественное выражение закона сохранения энергии.

Рассмотрим некоторые соотношения для величин  $E$  и  $\vec{s}$ . Применительно к пакету волн Россби с учетом малости вклада пространственных градиентов амплитуды  $A$  функции тока выражение для энергии принимает вид

$$E = \frac{K^2 A^2}{2} \sin^2(kx + ly - \sigma t) + \frac{F}{2} A^2 \cos^2(kx + ly - \sigma t). \quad (6.8.8)$$

Введем понятия *осредненной за интервал времени, равный периоду волны, энергии*

$$\langle E \rangle = (K^2 + F) \frac{A^2}{4}. \quad (6.8.9)$$

Другими словами, величину мгновенной энергии можно переписать в виде

$$E = \langle E \rangle + \frac{A^2}{4} (K^2 - F) \cos 2(kx + ly - \sigma t). \quad (6.8.10)$$

Таким образом, в любой фиксированной точке мгновенная энергия испытывает периодические колебания с периодом, равным половине периода волны. Величина  $\langle E \rangle$  является важной характеристикой периодических колебаний, связанных с волнами Россби, так как она представляет собой локальную энергию волнового пакета. Эта энергия меняется прямо пропорционально квадрату амплитуды волны и также как амплитуда мало изменяется в границах волнового пакета.

Выпишем выражения для вектора потока энергии, воспользовавшись соотношением

$$\psi = A \cos(kx + ly - \sigma t) \quad (6.8.11)$$

и учтем (6.8.6)

$$\vec{s} = - \left( A^2 \sigma \vec{k} + i \vec{l} \beta \frac{A^2}{2} \right) \cos^2(kx + ly - \sigma t). \quad (6.8.12)$$

Среднее за период волны значение вектора потока энергии с учетом дисперсионного соотношения

$$\sigma = -\beta k / (k^2 + l^2 + F) \quad (6.8.12a)$$

запишется в виде

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{A^2}{2} \left[ -\sigma \vec{K} - \frac{\beta}{2} \vec{i} \right] = \frac{A^2}{4} \left[ \vec{i} \beta \frac{k^2 - l^2 - F}{K^2 + F} + \vec{j} \frac{\beta 2kl}{K^2 + F} \right] = \vec{c}_g \langle E \rangle. \quad (6.8.13)$$

С учетом выражения для вектора потока энергии закон сохранения энергии после осреднения за период волны можно переписать в виде

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \nabla \langle E \rangle = 0. \quad (6.8.14)$$

Из соотношений (6.8.13) и (6.8.14) вытекают следующие выводы:

- осредненный вектор потока энергии равняется энергии волн, умноженной на групповую скорость;
- скорость переноса энергии не зависит от фазовой скорости, а целиком определяется групповой скоростью;
- локальная энергия волнового пакета сохраняется и распространяется вместе с пакетом с групповой скоростью.

Естественно, представляет интерес определения направления потока энергии для заданного волнового вектора или направления групповой скорости в силу (6.8.13).

Из выражения для  $\sigma$  (6.8.12a) следует

$$k^2 + l^2 + F - \frac{\beta k}{-\sigma} = 0. \quad (6.8.15)$$

Без ограничения общности  $k$  можно считать положительной величиной, тогда  $\sigma < 0$ , а  $\frac{\beta k}{-\sigma} > 0$ .

Соотношение (6.8.15) переписывается в виде

$$\left( k - \frac{\beta}{-2\sigma} \right)^2 + l^2 = \frac{\beta^2}{4\sigma^2} - F. \quad (6.8.16)$$

Выражение (6.8.16) представляет собой окружность в плоскости  $k, l$ , центр которой расположен в точке с координатами  $\beta / (-2\sigma)$  и  $0$ , а радиус равен  $(\beta^2 / (4\sigma^2 - F))^{1/2}$ . Так как абсолютный максимум для  $\sigma$  равен  $-\beta / 2F^{1/2}$ , то подкоренное значение в выражении для радиуса положительно.

Из (6.8.13) получаем

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{A^2}{2} (-\sigma) \left[ \vec{i} \left( k - \frac{K^2 + F}{2k} \right) + \vec{j} l \right] = \frac{A^2}{2} (-\sigma) \left[ \vec{i} \left( k - \left( \frac{\beta}{-2\sigma} \right) \right) + \vec{j} l \right] = \frac{A^2}{2} (-\sigma) \vec{OW}, \quad (6.8.17)$$

где  $\vec{OW}$  - вектор, который направлен из центра окружности в конец волнового вектора  $\vec{k}$  (рис.6.9). Модуль  $\vec{OW}$  равен радиусу окружности

$$|\vec{OW}| = \left( \frac{\beta^2}{4\sigma^2} - F \right)^{1/2}. \quad (6.8.18)$$

Подставляя (6.8.18) в (6.8.17), получим

$$\langle \vec{s} \rangle = \frac{A^2}{2} (-\sigma) \left( \frac{\beta^2}{4\sigma^2} - F \right)^{1/2}. \quad (6.8.19)$$

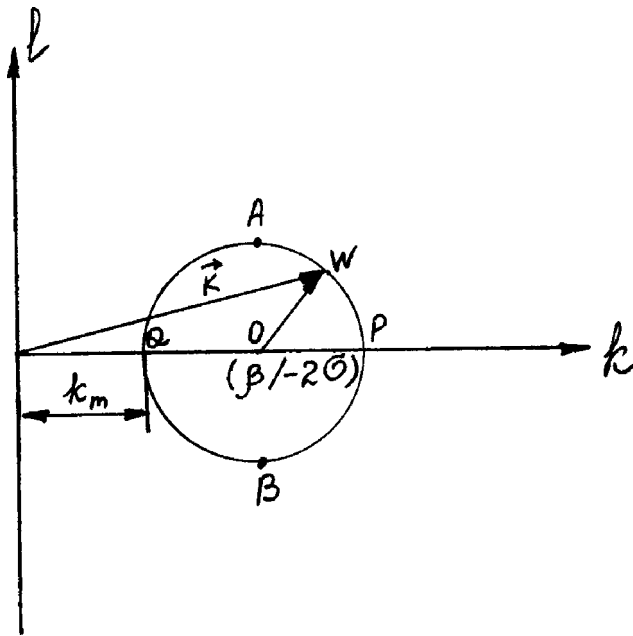


Рис. 6.9. Определение вектора  $\vec{OW}$ .

Таким образом, величина потока энергии одинаковая для всех волн с одинаковой амплитудой и частотой. Если конец волнового вектора  $\vec{k}$  лежит на полуокружности  $APB$ , то вектор  $\vec{OW}$  имеет положительную составляющую вдоль оси  $x$ . Так как  $\sigma < 0$ , то направление вектора потока энергии  $\langle \vec{s} \rangle$  совпадает с направлением  $\vec{OW}$ . При указанных условиях волны переносят энергию с запада на восток.

Очевидно, в случае, когда конец волнового вектора  $\vec{k}$  лежит на полуокружности  $AQB$ , то волны переносят энергию с востока на запад. Так как в первом случае длина волнового вектора  $|\vec{k}|$  больше, чем во втором, то отсюда следует вывод, что короткие волны переносят энергию с запада на восток, а длинные - с востока на запад. Приведенные выкладки были выполнены для случая, когда  $k > 0$  и  $\sigma < 0$ . Так как из (6.8.15) следует, что знаки  $k$  и  $\sigma$  противоположные, полученные выводы остаются в силе при  $k < 0$  и  $\sigma > 0$ . Доказать это предлагается читателю самостоятельно.

В качестве приложения приведенных энергетических соотношений рассмотрим энергетику волн Россби в бесконечно длинном канале, ограниченном двумя широтными кругами. Здесь наряду с передачей возмущения на большие от начала координат расстояния происходит передача и энергии.

Характер такого распространения энергии будет достаточно сложный, поскольку начальное возмущение содержит много длин волн. Будем рассматривать случай, когда начальное возмущение резко локализовано по  $x$ , так что спектр амплитуд волн будет очень широкий. Поскольку начальное возмущение произвольное, то при маленьких  $t$  не будут проявляться характерные особенности динамики волн, они будут целиком зависеть от особенностей его первоначальной формы возмущения. Прошедшее время должно быть достаточно велико, чтобы характерные внутренние особенности волн проявились достаточно отчетливо. Поэтому мы будем использовать (6.6.25) лишь при больших  $x$  и  $t$ . Естественно, можно ожидать, что, если интервал времени достаточно велик, то энергия будет распределена по области, значительно превосходящей размеры источника.

Рассмотрим теперь волновую энергию, заключенную между двумя близко расположенными плоскостями при  $x = x_s$  и  $x = x_s + \delta x$ . Пусть каждая точка движется с групповой скоростью, соответствующей волновому числу, которое в момент времени  $t$  находится в этой точке. Если интервал  $\delta x$  достаточно маленький, то длина волны внутри него будет почти постоянной. Так как амплитуда волны здесь равна

$$\frac{2A_n}{\left( t \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial k^2} \right|_{k=K_s} \right)^{1/2}}, \quad (6.8.20)$$

то с использованием соотношения (6.8.10) получим для энергии, заключенной в полосе единичной длины по  $y$  и ширине  $\delta x$  по  $x$ , следующее выражение

$$E(x_s, t) = \frac{(k_s^2 + a^2) A_n^2(k_s) \delta x_s}{t \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial k^2} \right|_{k=K_s} 2}, \quad (6.8.21)$$

где  $a^2 = n^2 \pi^2 + F$ . Так как

$$\delta x_s = t \left| \frac{\partial^2 \sigma}{\partial k^2} \right| \delta k_s, \quad (6.8.22)$$

то при  $\delta k_s \rightarrow 0$  полная энергия в бесконечно узкой полосе  $\delta x_s$  равна

$$E(x_s, t) dx_s = \frac{1}{2} (k_s^2 + a^2) A_n^2(k_s) \delta k_s. \quad (6.8.23)$$

Эта величина постоянна, так как полоса движется от начала координат с постоянной групповой скоростью, соответствующее волновому числу  $k_s$ .

Тогда полная энергия волнового поля в начальный момент времени определяется из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{k^2 + a^2}{2} A_n^2(k) dk. \quad (6.8.24)$$

Из соотношений (6.8.23) и (6.8.24) следует, что в начальный момент времени полная энергия локализована вблизи начала координат и может рассматриваться как бесконечная сумма сгустков энергии, каждый из которых соответствует волновому пакету с амплитудой  $A_n(k)$ . С течением времени каждый сгусток энергии движется от начала координат с групповой скоростью, соответствующей волновому числу пакета.

Во время движения каждый сгусток сохраняет свою частоту и волновое число. Однако его физическая длина постепенно увеличивается линейно с течением со временем, так как групповая скорость в самом сгустке мало меняется при переходе от одного конца сгустка к другому. Это следует из соотношения (6.8.22). Так как энергия каждого сгустка постоянна, то амплитуда волн должна убывать пропорционально  $t^{-1/2}$ , чтобы компенсировать пространственное растекание сгустка. Так как  $c_g(k) \neq c(k)$ , то отдельные гребни переходят из одного сгустка в другой. Если теперь рассмотреть пакет, составленный из последовательности сгустков, то, во-первых, форма пакета изменяется со временем, и, во-вторых, при больших  $t$  все сгустки будут выстраиваться в линию с самым быстрым сгустком впереди и самым медленным в конце.

В качестве второго примера, иллюстрирующего энергетические соотношения, рассмотрим плотность энергии, то есть энергию, отнесенную к единице площади в падающих и отраженных волнах. Так как энергия отраженной волны равна

$$\langle E_r \rangle = (k_r^2 + F) |A_r|^2 = (k_r^2 + F) |A_i|^2, \quad (6.8.25)$$

а в падающей волне

$$\langle E_i \rangle = (k_i^2 + F) |A_i|^2, \quad (6.8.26)$$

то, следует

$$\frac{\langle E_r \rangle}{\langle E_i \rangle} = \frac{k_r^2 + F}{k_i^2 + F} = \frac{|c_{gi}|}{|c_{gr}|} > 1. \quad (6.8.27)$$

Таким образом, плотность энергии в отраженной волне больше, чем в падающей. Согласно (6.8.19) поток энергии одинаковый при одинаковых амплитудах и частоте. Отсюда следует вывод, что поток энергии в набегающей

и уходящей волнах одинаков, а плотность энергии в отраженной волне возрастает.

Из (6.7.14) и (6.8.27) следует

$$L_i < E_i \rangle = L_r < E_r \rangle . \quad (6.8.28)$$

Следовательно, полная энергия при отражении в пакете сохраняется, хотя внутри пакета движение в отраженной волне более интенсивно. Это связано с тем, что при отражении энергия оказывается сосредоточенной в более узкой области, движущейся с меньшей скоростью от границы.

### 6.9. Резонансные взаимодействия и закон сохранения энстрофии

Рассмотренные нами закономерности динамики плоских волн Россби выполнялись в случае линейного уравнения для квазигеострофической функции тока. Напомним, что квазигеострофическое уравнение потенциального вихря на  $\beta$ -плоскости записывалось в виде (6.5.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi - F\psi) + J(\psi, \nabla \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (6.9.1)$$

В случае отдельной плоской волны, когда  $\psi = A \cdot \cos(kx + ly - \sigma t + \psi)$  якобиан  $J(\psi, \nabla \psi) = 0$ . Тогда уравнение (6.9.1) становится линейным дифференциальным уравнением относительно функции тока. В случае суперпозиции волн Россби появляется нелинейное взаимодействие между волнами, благодаря которому поле скорости одной волны влияет на адвекцию вихря в другой волне. Этот эффект одновременно приводит к энергетическому обмену между волнами. Для учета эффекта нелинейных взаимодействий уравнение (6.9.1) должно быть решено с учетом нелинейного члена, выраженного якобианом.

Рассмотрим случай, когда эффект этого взаимодействия может быть исследован уже в рамках первого приближения, то есть применим следующий метод исследования. Преобразуем уравнения (6.9.1) к такому виду, чтобы при нелинейном члене фигурировал малый коэффициент и будем искать решение в виде разложения по этому коэффициенту. Такое преобразование можно получить, если ввести новое безразмерное время

$$\tilde{t} = \beta t \quad (6.9.2)$$



Нетрудно показать, что при  $\beta \gg 1$ , характерный масштаб волны Россби в размерных единицах значительно меньше времени адвекции. После перехода к  $\tilde{t}$  уравнению (6.9.1) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\nabla^2 \Psi - F\Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \beta^{-1} \cdot \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Psi \right). \quad (6.9.3)$$

Обозначим  $\alpha = \beta^{-1}$ . Из уравнения (6.9.3) следует, что нелинейный член имеет порядок величины  $\alpha$ , которая представляет собой отношение градиента относительного вихря  $U/L^2$  к градиенту планетарного вихря  $\beta_0$ . Когда это отношение мало, линейная суперпозиция волн Россби хорошо описывает движение, но для небольших промежутков времени. Если же  $\alpha$  некоторая конечная величина (не малая), то для любых интервалов времени необходимо учитывать нелинейные взаимодействия. Будем искать решение уравнения (6.9.1) в виде

$$\psi(x, y, \tilde{t}, \beta) = \psi_0(x, y, \tilde{t}) + \alpha \psi_1(x, y, \tilde{t}) + \alpha^2 \psi_2(x, y, \tilde{t}) + \dots \quad (6.9.4)$$

Для нулевого приближения получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\nabla^2 \psi_0 - F\psi_0) + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0. \quad (6.9.5)$$

Это линейное уравнение потенциального вихря и для него справедливы все полученные соотношения линейной теории Россби.

Нелинейные взаимодействия появляются лишь в первом приближении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\nabla^2 \psi_1 - F\psi_1) + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi_0 - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi_0 = \\ &= \sum_m \sum_n \frac{a_m a_n}{2} (k_m^2 - k_n^2) (k_n l_m - k_m l_n) \cdot \sin(\theta_m) \sin(\theta_n). \end{aligned} \quad (6.9.6)$$

Правая часть уравнения для  $\psi_1$  (6.9.6), полученная на основе линейных соотношений, где

$$\psi_0 = \sum_j a_j \cos \theta_j = \sum_j a_j \cdot \cos(k_j x + l_j y - \sigma_j t + \psi_j) \quad (6.9.7)$$

Путем преобразования правой части (6.9.6) можно показать, что в результате взаимодействия  $m$ -й и  $n$ -й волн появляются осциллирующие члены, фазы, волновые векторы и частоты которых равны сумме и разности соответствующих характеристик указанных волн. Действительно, в правой части (6.9.6) выражения под знаком суммирования можно записать в виде

$$a_m a_n \frac{1}{4} (k_m + k_n) \cdot (k_m - k_n) \cdot \vec{z} \cdot (\vec{k}_m \times \vec{k}_n) \cdot [\cos(\theta_m + \theta_n) - \cos(\theta_m - \theta_n)]. \quad (6.9.8)$$

В (6.9.8) выделяют величину

$$B(k_m, k_n) = \frac{1}{4}(k_m^2 - k_n^2) \cdot \bar{z} \cdot (\bar{k}_m \times \bar{k}_n), \quad (6.9.9)$$

называемую *коэффициентом взаимодействия волн*. Если две волны  $m$  и  $n$  имеют одинаковые длины  $(k_m^2 - k_n^2)$ , либо параллельные волновые векторы  $(\bar{k}_m \times \bar{k}_n = 0)$ , то коэффициент взаимодействия между ними равен нулю. Следовательно, отсутствие взаимодействия наблюдается, во-первых, когда вихрь суммы двух волн равен постоянной, умноженной на сумму их функций тока, во-вторых, когда волны движутся параллельно друг другу. В обоих случаях якобиан в уравнении (6.9.3) равен нулю.

Уравнение для  $\psi_1$  с вынуждающим членом (6.9.8) и (6.9.9)  $a_m a_n B(k_m, k_n) \cos(\theta_m + \theta_n)$  является линейным и потому отклик на каждый вынуждающей член может рассматриваться независимо, а результаты суммироваться. Поэтому периодическое вынужденное решение для  $\psi_1$ , будем искать в виде

$$\psi_1 = A_{1mn} \sin(\theta_m + \theta_n), \quad (6.9.10)$$

где  $A_{1mn}$  определяется из (6.9.6)

$$A_{1mn} = \frac{a_m a_n B(k_m, k_n)}{(k_m^2 + F)(\omega_{mn} - \sigma_{mn})}, \quad (6.9.11)$$

Здесь:  $\sigma_{mn}$  - частота колебаний свободной волны Россби, соответствующая вынужденному волновому вектору  $\bar{k}_{mn} = \bar{k}_m + \bar{k}_n$ .

$$\sigma_{mn} = \frac{k_m + k_n}{(k_m + k_n)^2 + (l_m + l_n)^2 + F}, \quad (6.9.12)$$

$\omega_{mn} = \sigma_m + \sigma_n$  - вынуждающая частота,

$$\sigma_m = -\frac{k_m}{k_m^2 + l_m^2 + F}, \sigma_n = -\frac{k_n}{k_n^2 + l_n^2 + F}. \quad (6.9.13)$$

Решения для  $\psi_1$  справедливы лишь в том случае, если вынуждающая частота колебаний  $\omega_{mn}$  не равна частоте колебаний  $\sigma_{mn}$ . В противном случае будет иметь место резонанс, то есть две волны в результате взаимодействия будут создавать третью волну с волновым вектором и частотой, связанными соответствующим соотношением для свободных линейных колебаний (6.9.12). Такие взаимодействия, для которых амплитуда бесконечно велика

или же взаимодействия, дающие бесконечно большой отклик, называются резонансными. При исследовании нелинейной динамики волн Россби резонансные взаимодействия представляют наибольший интерес, поскольку все нерезонансные взаимодействия будут создавать при больших  $\beta$  – “фонный шум” из вынужденных волн, амплитуды которых будут малыми в сравнении с амплитудами, создаваемыми резонансными взаимодействиями. Остановимся подробнее на резонансном взаимодействии.

Прежде всего необходимо ответить на вопрос, возможны ли в действительности резонансные взаимодействия. Условие резонанса

$$\omega_{mn} = \sigma_m + \sigma_n \quad (6.9.14)$$

выполняется для всех  $x, y, t$  при выполнении следующих трех соотношений

$$k_{mn} + k_m + k_n = 0, \quad (6.9.15)$$

$$l_{mn} + l_m + l_n = 0, \quad (6.9.16)$$

$$\sigma_{mn}(k_{mn}, l_{mn}) + \sigma_m(k_m, l_m) + \sigma_n(k_n, l_n) = 0. \quad (6.9.17)$$

Это вытекает из соотношений (6.9.12) и (6.9.13). Кроме того, из (6.9.15)- (6.9.17) следует, что в случае резонанса  $m$ -я и  $n$ -я волны взаимодействуют таким образом, что образуют фазу  $\theta_m + \theta_n$ , равную фазе  $\theta_{mn}$  третьего свободного колебания. Вынуждающее воздействие в этом случае находится в фазе с собственной модой колебаний как по пространству, так и по времени. Это и есть явление резонанса, при котором наблюдается сильный обмен энергией между волнами.

Условие наличия резонанса можно представить в следующем виде. Три волновых вектора  $\vec{k}_{mn}, \vec{k}_m, \vec{k}_n$  должны в сумме давать нуль для того, чтобы образовывать резонансную триаду, в которой любые две волны будут возбуждать третью резонансно.

В случае резонансного взаимодействия также необходимо выполнение условия (6.9.17), которое согласно (6.9.12) - (6.9.13) может быть переписано в виде

$$\frac{k_m}{k_m^2 + l_m^2 + F} + \frac{k_n}{k_n^2 + l_n^2 + F} + \frac{k_{mn}}{k_{mn}^2 + l_{mn}^2 + F} = 0. \quad (6.9.18)$$

Условие (6.9.18) дает набор волновых векторов, выделяющих наиболее эффективное взаимодействие.

Опишем процедуру построения *резонансных триад*. Зафиксируем произвольный волновой вектор, например  $\vec{k}_{mn}$ . Тогда вектор  $\vec{k}_m$  находится через  $\vec{k}_{mn}$  и  $\vec{k}_n$  из (6.9.15)- (6.9.16). Подставляя полученное выражение для

$\vec{k}_m(k_m, l_m)$  в (6.9.18) получим одно уравнение для волновых чисел  $(k_m, l_m)$  в зависимости от  $(k_{mn}, l_{mn})$ , определяющее на плоскости  $(k, l)$  геометрическое место концов векторов, которые могут резонансно взаимодействовать с вектором  $\vec{k}_{mn}$ . Исследование этой достаточно сложной алгебраической задачи показало, что любой волновой вектор может образовывать резонансную триаду с некоторым семейством волновых векторов. В качестве примера рассмотрим резонансную триаду для случая, когда вектор  $\vec{k}_{mn}$  направлен на восток (для такой волны Россби  $\vec{k}_{mn} = \vec{i}k_{mn}$ , а  $l_{mn} = 0$ ). Для этого случая масштаб длины выбранный равным радиусу деформации ( $F=1$ ), а длина волны равная радиусу деформации, умноженному на  $2\pi$  ( $k_{mn} = 1$ ). Конец вектора  $\vec{k}_{mn}$  лежит в точке пересечения эллипсообразной кривой с прямой, проходящей через конец вектора  $\vec{k}_n$  и точку  $k=0,5, l=0$ . Таким образом, концы двух волновых векторов, резонансно взаимодействующих с  $\vec{k}_{mn}$  лежат на приведенной эллипсообразной кривой, в точках ее пересечения с некоторой прямой, определяемой из решения алгебраического уравнения (6.9.18). Следовательно, резонансные триады могут быть найдены. Теперь задача состоит в том, чтобы найти уравнения, определяющие амплитуды волновой триады. Как следует из выражения (6.9.11) в случае резонанса решение уравнения (6.9.6) уже нельзя искать в виде (6.9.10). Это решение заменяется на решение следующего вида

$$\psi_1 = \tilde{t} a_{1mn} \cos(\theta_m + \theta_n). \quad (6.9.19)$$

Откуда для  $\psi$  получаем выражение

$$\psi = \psi_0 + (\beta^{-1} \tilde{t}) a_{1mn} \cos(\theta_m + \theta_n) = \psi_0 + t \cdot a_{1mn} \cos(\theta_m + \theta_n). \quad (6.9.20)$$

Исходя из (6.9.20) можно предположить, что амплитуды резонансно взаимодействующей триады будут изменяться во времени. При этом необходимо различать два временных масштаба - для волн Россби и адвективный временной масштаб. Соответственно необходимо ввести два безразмерных времени: "медленное"  $t$  и "быстрое"  $\tilde{t}$ .

В этом случае функция ищется в виде следующего ряда:

$$\psi = \psi_0(x, y, t, \tilde{t}) + \frac{1}{\beta} \psi_1(x, y, t, \tilde{t}) + \dots \quad (6.9.21)$$

где каждый член ряда является функцией как "медленного", так и "быстрого" времени.

Уравнение для  $\psi_0$  остается таким же. Однако его решение, соответствующее резонансной триаде, мы будем искать в виде

$$\psi_0 = a_1(t)\cos(k_1x + l_1y - \sigma_1\tilde{t}) + a_2(t)\cos(k_2x + l_2y - \sigma_2\tilde{t}) + a_3(t)\cos(k_3x + l_3y - \sigma_3\tilde{t}). \quad (6.9.22)$$

При этом условия связи (6.9.15) - (6.9.17) должны выполняться для  $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Уравнение для  $\psi_1$  в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}(\nabla^2\psi_1 - F\psi_1) + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} = & (k_1^2 + F)\frac{da_1}{dt}\cos\theta_1 + a_2a_3B(\vec{k}_2, \vec{k}_3) \times \\ & \times [\cos(\theta_2 + \theta_3) - \cos(\theta_2 - \theta_3)] + (k_2^2 + F)\frac{da_2}{dt}\cos\theta_2 + a_3a_1B(\vec{k}_3, \vec{k}_1) \times \\ & \times [\cos(\theta_3 + \theta_1) - \cos(\theta_3 - \theta_1)] + (k_3^2 + F)\frac{da_3}{dt}\cos\theta_3 + a_1a_2B(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \times \\ & \times [\cos(\theta_1 + \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \quad (6.9.23) \end{aligned}$$

Вынуждающие члены в правой части можно разделить на две группы. Члены вида  $\cos(\theta_p - \theta_q)$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ) являются нерезонансными и порождают фоновые волновые поля, имеющие малую амплитуду и образующие дополнение к исходной триаде. Члены вида  $\cos\theta_p$  или  $\cos(\theta_p + \theta_q)$  являются резонансными для каждого из трех волновых векторов триады. Для того, чтобы сохранить справедливость разложения функции  $\psi$  по малому параметру  $\alpha = \beta^{-1}$  (6.9.4) на временном интервале, соответствующему естественному временному масштабу эволюции волновых амплитуд, обусловленной резонансным нелинейным взаимодействием, амплитуды  $a_1, a_2$  и  $a_3$  должны быть найдены из системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} + \frac{B(\vec{k}_2, \vec{k}_3)}{K_1^2 + F}a_2a_3 &= 0, \\ \frac{da_2}{dt} + \frac{B(\vec{k}_3, \vec{k}_1)}{K_2^2 + F}a_3a_1 &= 0, \\ \frac{da_3}{dt} + \frac{B(\vec{k}_1, \vec{k}_2)}{K_3^2 + F}a_1a_2 &= 0. \quad (6.9.24) \end{aligned}$$

Эти уравнения для амплитуд определяют эволюцию триады с характерным временным масштабом резонансного взаимодействия. Таким образом, резонансные взаимодействия изменяют амплитуды волнового поля на величины того же порядка  $O(1)$ , что и сами амплитуды, а нерезонансные

взаимодействия создают возмущение порядка много меньшего величины амплитуды  $O(\beta^{-1})$ .

Волновая энергия каждого компонента триады равна согласно (6.7.9)

$$E_j = (K_j^2 + F) \frac{a_j^2}{4}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6.9.25)$$

Если каждое из уравнений (6.9.24) умножить соответственно на  $(K_j^2 + F)a_j$  и сложить, то получим

$$\frac{d}{dt}(E_1 + E_2 + E_3) = -a_1 a_2 a_3 \left( B(\vec{k}_2, \vec{k}_3) + B(\vec{k}_3, \vec{k}_1) + B(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \right) = 0. \quad (6.9.26)$$

Равенство нулю правой части (6.9.26) вытекает из соотношений для коэффициентов взаимодействия (6.9.9).

Таким образом получено, что полная энергия триады сохраняется и внутри триады волны обмениваются энергией между собою. Однако, как следует из анализа правой части (6.9.23) часть энергии триады переходит к нерезонансным волнам. Сохранение энергии при резонансном взаимодействии поясняется тем, что переход энергии к нерезонансным волнам очень слабый и происходит намного медленней, чем резонансный обмен. Подчеркнем, что характерное время резонансного обмена равно адвективному временному масштабу.

Для условий резонансных взаимодействий в теории мелкой воды может быть также получен закон сохранения среднего квадрата потенциального вихря, который называется потенциальной энстрофией. Выражения для потенциального вихря каждой волны и потенциальной энстрофии имеют вид

$$\Pi_j = -(K_j^2 + F) a_j \cos \theta_j, \quad (6.9.27)$$

$$V_j = (K_j^2 + F)^2 \frac{a_j^2}{2} = 2(K_j^2 + F) E_j. \quad (6.9.28)$$

Точно также как для волновой энергии из (6.9.24) получаем соотношение

$$\frac{d}{dt}(V_1 + V_2 + V_3) = 0. \quad (6.9.29)$$

Таким образом, полная потенциальная энстрофия волн Россби сохраняется при движении. Из полученных двух законов сохранения (энергии и энстрофии) следует вывод о том, что средний по энергии квадрат волнового вектора

$$K_0^2 = \frac{\sum_{j=1}^3 K_j^2 E_j(t)}{\sum_{j=1}^3 E_j(t)} \quad (6.9.30)$$

не меняется при движении.

Действительно, если ввести обозначения

$$\sum_{j=1}^3 E_j = E_0 = \text{const}, \quad (6.9.31)$$

$$\sum_{j=1}^3 K_j^2 E_j = K_0^2 E_0 = \text{const} \quad (6.9.32)$$

и разделить (6.9.32) на (6.9.31), то получим вывод (6.9.30).

Таким образом, при нелинейных взаимодействиях волна должна передавать часть своей энергии более коротким волнам, а другую часть - более длинным для сохранности величины  $k_0^2$ . Подчеркнем, что это требование является следствием сохранения не только энергии, но и энтрофии.

Из соотношений (6.9.24) вытекают не только законы сохранения энергии и энтрофии, но и выводы относительно направления передачи энергии от одной волны к двум другим. Из процедуры вывода закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{1}{K_2^2 - K_3^2} \frac{dE_1}{dt} = \frac{1}{K_3^2 - K_1^2} \frac{dE_2}{dt} = \frac{1}{K_1^2 - K_2^2} \frac{dE_3}{dt}. \quad (6.9.33)$$

Если, например,  $K_3^2 < K_1^2 < K_2^2$ , то при  $\frac{dE_1}{dt} < 0$ ,  $\frac{dE_2}{dt}$  и  $\frac{dE_3}{dt}$  будут положительными. Следовательно, волны с волновым числом  $k_1$  теряют энергию, передавая ее волнам с волновыми числами  $k_2$  и  $k_3$ , энергия которых растет со временем. Как видно из этого примера, волна, отдающая свою энергию двум другим, должна иметь промежуточную между ними длину. Можно показать, что этот вывод сохраняется в общем случае.

Из закона сохранения энергии можно получить уравнение для временной динамики амплитуды каждой волны. Можно показать, что периодические решения, соответствующие уравнению временной динамики амплитуды, выражаются через эмпирические функции. Анализ этих функций показывает, что энергия сначала передается от одной волны к двум другим. Другими словами, высвобождающаяся за счет неустойчивости энергия "питает" соседние волны. Этот процесс идет до некоторого момента времени, затем останавливается, когда амплитуды соседних волн становятся сопоставимыми с

амплитудой неустойчивой волны. После этого момента поток энергии меняет свое направление на противоположный. Таким образом, каждый член триады сначала получает энергию (или отдает), а затем возвращает ее другим волнам (или получает).

Анализ нелинейных взаимодействий разрешает судить о мере реалистичности описания волнового поля с помощью линеаризованных уравнений типа плоской волны. Итак, представим себе, что у нас есть одна волна с конечной амплитудой и фон возмущений с очень малыми амплитудами. Тогда нелинейные эффекты будут приводить к возрастанию амплитуд других волн, имеющих среди фона, и к уменьшению энергии исходной волны. Такая эволюция спектра носит непрерывный характер и происходит медленно. При этом точность линейного решения растет с увеличением  $\beta$ . С ростом времени волновой спектр будет становиться все более широким и более сложным под воздействием нелинейных эффектов. Однако при  $\beta \gg 1$  динамика отдельной волны будет достаточно точно описываться линейной теорией. Для описания обмена энергией между почти линейными волнами необходимо воспользоваться нелинейной теорией, в частности, теорией резонансного взаимодействия.

Полученные выводы можно обобщить на более широкий класс движений. Воспользовавшись квазигеострофическим уравнением на  $\beta$ -плоскости можно показать, что для случая, если на бесконечности движение отсутствует, выполняются следующие соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(\nabla \psi)^2}{2} + F \frac{\psi^2}{2} \right] dz dy = 0, \quad (6.9.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int_{-\infty}^{\infty} [\nabla^2 \psi - F\psi] dx dy = 0, \quad (6.9.35)$$

которые представляют собой закон сохранения энергии потенциальной энтропии. В этом случае также постоянен средний по энергии квадрат волнового вектора, аналогично соотношению (6.9.30).

Постоянство квадрата волнового вектора со временем означает, что любая передача энергии к меньшим масштабам должна сопровождаться существенной передачей энергии к большим масштабам. Одновременно следует отметить, что передача энергии в сторону меньших масштабов (большие  $\vec{k}$ ) должна происходить на относительно близких по спектру расстояния от источника энергии. А передача энергии в сторону больших масштабов (маленькие  $\vec{k}$ ) должна осуществляться на далекие по спектру расстояния от источника. Это означает, что если энергия первоначально генерировалась в области больших масштабов, то она стремится оставаться в диапазоне таких



масштабов. Подчеркнем, что в случае ограниченных областей закон сохранения энергии требует выполнения некоторых дополнительных соотношений в зависимости от решаемой задачи.

Таким образом, рассмотренная теория волн Россби имеет широкий диапазон приложений для описания процессов, изучаемых геофизической гидродинамикой.



ния жидкости по отношению к малым возмущениям, разработанную Л.Д. Ландау.

### 7.1. Теория Ландау

Для всякой задачи о движении вязкой жидкости в заданных стационарных условиях должно существовать точное стационарное решение уравнений гидродинамики. Однако при этом не каждое точное решение уравнений движения может реально осуществляться в природе. Для реальных природных течений должно выполняться еще условие устойчивости. Неизбежно возникающие в потоке жидкости малые возмущения должны затухать со временем. В противном случае, если эти возмущения растут со временем, то движение неустойчиво и фактически в природе существовать не может. Для описания устойчивости стационарного движения вязкой жидкости воспользуемся следующей схемой. На исследуемое стационарное решение с распределением скорости  $\vec{V}_0(\vec{r})$  накладывается нестационарное малое возмущение  $\vec{V}_1(\vec{r}, t)$ , которое должно быть определено таким образом, чтобы результирующее движение  $\vec{V}_0 + \vec{V}_1$  удовлетворяло уравнениям движения. Если подставить скорость и давление в виде

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_0(\vec{r}) + \vec{V}_1(\vec{r}, t), \quad (7.1.1)$$

$$p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}) + p_1(\vec{r}, t) \quad (7.1.2)$$

в уравнения Навье-Стокса и неразрывности для несжимаемой жидкости, то получим уравнения для определения величин  $\vec{V}_0$ ,  $p_0$ ,  $\vec{V}_1$ ,  $p_1$

$$(\vec{V}_0 \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V}_0 + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_0 + \vec{g}, \quad (7.1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}_0 = 0, \quad (7.1.4)$$

$$\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + (\vec{V}_0 \nabla) \vec{V}_1 + (\vec{V}_1 \nabla) \vec{V}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V}_1 + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_1, \quad (7.1.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}_1 = 0. \quad (7.1.6)$$

Действительно, если сложить (7.1.3) и (7.1.5), (7.1.4) и (7.1.6), то получим уравнения Навье-Стокса и неразрывности для величин  $\vec{V}$  и  $p$ . Подчеркнем, что в уравнении (7.1.5) опущены малые квадратичные члены.

Вектор  $\vec{V}_1$  удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями только ко-

ординат. Общее решение таких уравнений может быть представлено в виде суммы частных решений, в которых  $\bar{V}_1$  зависит от времени посредством множителей типа  $e^{-i\sigma t}$ . Сами частоты  $\sigma$  определяются из уравнения (7.1.5), как это делалось, например, в теории мелкой воды. Эти частоты, вообще говоря, комплексные и если среди них имеются такие, мнимая часть которых положительна, то множитель  $e^{-i\sigma t}$  будет неограниченно возрастать со временем. Действительно, пусть

$$\sigma = \alpha + i\beta.$$

Тогда  $e^{-i(\alpha+i\beta)t} = e^{-i\alpha t} \cdot e^{\beta t}$  и при  $\beta > 0$  величина  $e^{\beta t}$  при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно растет. Другими словами, такие возмущения, возникнув в потоке, будут возрастать и движение будет неустойчиво по отношению к ним. В реальных условиях существуют лишь устойчивые движения, для которых необходимо, чтобы у всех возможных частот  $\sigma$  мнимая часть была отрицательной. Тогда возникающие возмущения будут экспоненциально затухать со временем.

Такой путь математического исследования устойчивости является сложным. Поэтому для изучения устойчивости течения в теории Ландау привлекаются физические соображения, которые позволяют получить условия устойчивости более простым путем.

Очевидно, что устойчивость течения зависит от его характеристик, к которым относятся скорость потока  $V$ , его вязкость  $\nu$  и линейный размер области  $l$ , в которой рассматривается движение. Из указанных трех величин можно получить единственную безразмерную комбинацию, определяющую характер движения

$$Re = \frac{Vl}{\nu}. \quad (7.1.7)$$

Эта величина называется *числом Рейнольдса*.

Нетрудно показать, что число  $Re$  есть отношение порядков изменения кинетической энергии  $\frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right)$ , идущей на развитие возмущения, к работе силы вязкости  $\left( V\nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$ , препятствующей его развитию.

Естественно предположить (и это подтверждается экспериментальными данными), что при малых числах Рейнольдса движение устойчиво. По мере увеличения  $Re$  в конце концов достигается его критическое значение ( $Re_{кр}$ ), начиная с которого движение становится неустойчивым. Критическое значение числа Рейнольдса не является универсальным и для каждого типа движения существует свое  $Re_{кр}$ . Рассмотрим характер нестационарного дви-

жения, которое устанавливается в результате неустойчивости течения при больших числах Рейнольдса.

Как следует из анализа уравнения (7.1.5), в потоке должны существовать частоты, у которых мнимая часть должна быть отрицательной. Поэтому в выражении (7.1.7)  $\beta < 0$  при  $Re < Re_{кр}$ , при  $Re = Re_{кр}$   $\beta = 0$  и при  $Re > Re_{кр}$   $\beta > 0$ . Функция  $\bar{V}_1$ , соответствующая частоте  $\sigma$ , имеет вид

$$\bar{V}_1 = A(t)\bar{f}(x, y, z), \quad (7.1.8)$$

где  $A$  - комплексная амплитуда,

$$A(t) = const \cdot e^{\beta t} e^{-i\sigma t}. \quad (7.1.9)$$

Выражение (7.1.9) справедливо лишь для короткого промежутка времени после момента срыва стационарного режима. Следовательно, необходимо предложить другой способ вычисления амплитуды нестационарного движения, так как из физических соображений ясно, что она должна стремиться к некоторому конечному пределу. Способ определения выражения для амплитуды формулируется следующим образом.

Прежде всего рассмотрим изменение квадрата модуля амплитуды. В этом случае мы избавляемся от периодического множителя  $e^{-i\sigma t}$ . Далее продифференцируем  $|A(t)|^2$  по  $t$

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = 2\beta|A|^2, \quad (7.1.10)$$

или

$$\frac{dy}{dt} = 2\beta y, \quad (7.1.11)$$

где  $y = |A|^2$ .

Полученное уравнение (7.1.11) является линейным относительно  $y$  и, как указывалось ранее, описывает поведение амплитуды лишь в течение короткого времени после момента срыва стационарного режима.

Естественно, что при увеличении  $t$  должны играть существенную роль в поведении амплитуды со временем нелинейные члены, которые появятся в правой части уравнений (7.1.10) или (7.1.11). Так как  $|A|^2 = AA^*$ , где  $A^*$  - комплексно сопряженное выражение для  $A(t)$ , то правую часть уравнения (7.1.10) можно рассматривать как первый член разложения. Тогда второй член разложения будет иметь вид  $AA^*A$  или  $A^*AA^*$ , третий -  $AAA^*A^*$ . Вторым и последующим членами разложения и будут нелинейными добавками к правой части (7.1.10). Их роль возрастает по мере увеличения интервала времени. Однако, как видно из выражения для второго члена, он является перио-

дическим (сохраняется множитель  $e^{i\alpha t}$ ). Поэтому, если каким-то образом избавиться от периодичности, другими словами от второго члена разложения, то уравнение (7.1.11) может быть приведено к виду

$$\frac{dy}{dt} = 2\beta y - \delta y^2. \quad (7.1.12)$$

Чтобы избавиться от периодичности, выполним операцию осреднения. В качестве периода осреднения выберем временной интервал  $T$  из условия

$$\frac{1}{\beta} \gg T \gg \frac{2\pi}{\alpha}, \quad (7.1.13)$$

где  $\frac{1}{\beta}$  - характерное время изменения модуля амплитуды, а  $\frac{2\pi}{\alpha}$  - период периодического колебания  $e^{-i\alpha t}$ . Так как  $A(t)$  представима произведением  $|A(t)|$  и периодического множителя, то в течение периода  $T$  модуль амплитуды изменяется мало, а периодический множитель многократно меняет знак. За счет осреднения приблизим его к нулю, и получим:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\beta|A|^2 - \delta|A|^4. \quad (7.1.14)$$

Здесь  $\delta$  - положительная или отрицательная константа (постоянная Ландау).

Если рассмотреть динамику движения жидкости, когда  $Re$  становится больше критического, то при  $\delta > 0$  на фоне основного потока сколь угодно малые возмущения впервые становятся неустойчивыми. Такое движение описывается уравнением (7.1.14), в котором появляется явная нелинейность. Так как  $T \ll 1/\beta$ , осреднение существенно не меняет левую и правую части уравнения (7.1.14) из-за малости изменения  $|A(t)|$  в течение периода осреднения. Т.е. в уравнении (7.1.14) знак осреднения можно опустить.

Тогда решение (7.1.14) имеет вид:

$$|A|^{-2} = \frac{\delta}{2\beta} + const \cdot e^{-2\beta t}. \quad (7.1.15)$$

При  $t \rightarrow \infty$   $|A|^2 = \frac{2\beta}{\delta}$ , и  $|A|^2$  асимптотически стремится к конечной величине. Как указывалось выше, мнимая часть ( $\beta$ ) комплексной частоты меняет знак при переходе  $Re$  через  $Re_{кр}$ . Можно предположить, что  $\beta \sim (Re - Re_{кр})$ , тогда

$$|A| \sim (Re - Re_{кр})^{1/2}. \quad (7.1.16)$$

Все сказанное выше относилось к случаю  $\delta > 0$ .

При  $\delta < 0$  и  $Re = Re_{кр}$  амплитуда возмущения скачком возрастает до конечного значения. В этом случае в некотором интервале  $Re_{кр}^1 < Re < Re_{кр}$  движение устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям и неустойчиво к возмущениям конечной амплитуды, но при  $t \rightarrow \infty$  также стремится к ограниченным значениям модуля амплитуды.

Итак, в результате неустойчивости к малым возмущениям возникает нестационарное движение, которое может быть представлено в виде наложения на стационарное движение со скоростью  $v_0(\vec{r})$  периодического движения  $v_1(\vec{r}, t)$  с малой, но конечной амплитудой, растущей по мере увеличения  $Re$ . Распределение скоростей имеет вид:

$$\vec{V}_1 = \vec{f}(\vec{r}) \cdot e^{-i(\alpha t + \gamma)} \quad (7.1.17)$$

Если вместо времени пользоваться в качестве переменной фазой  $\varphi = \alpha t + \gamma$ , то  $\gamma$  - начальная фаза ( $t=0$ ).

Таким образом,  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  есть периодическая функция от  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Однако в периодической функции  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  нам известна лишь абсолютная величина амплитуды, но неизвестна фаза  $\varphi$ , которая зависит от случайных условий, определяющих начальную фазу. Изучаемое периодическое движение не определяется однозначно заданными стационарными внешними условиями, в которых оно происходит. Одна из величин (начальная фаза) остается произвольной. Следовательно, если при  $Re \leq Re_{кр}$  движение не обладает степенями свободы, то при  $Re > Re_{кр}$  появляется вначале одна степень свободы. При этом если нас интересует размер возмущений, которые в первую очередь теряют устойчивость, то следует ввести локальное число  $Re_\alpha = \frac{l_\alpha U}{\nu}$ , где  $l_\alpha = U \cdot T_\alpha = \frac{U}{\alpha}$ . Следовательно, чем больше  $l_\alpha$ , тем раньше  $Re_\alpha > Re_{кр}$  и появляется неустойчивость. При этом под  $U$  мы будем понимать скорость стационарного движения, на которое накладываются возмущения масштаба  $l_\alpha$ .

Таким образом, в первую очередь в потоке “выживают” (выходят на периодический режим и не затухают) низкочастотные (значение  $\alpha$  мало) колебания, наложенные на стационарное движение. В целом же мы получаем сумму стационарного и периодического решений. Следовательно, движение становится периодическим с модулем амплитуды, однозначно определяемым числом Рейнольдса, и с неопределенной фазой (т.е. имеет одну степень свободы).

Если теперь в качестве основного движения взять периодическое, то точно так же можно показать, что в нем появляется частота, для которой мнимая часть  $\beta_1 > 0$ . В результате возникает квазипериодическое движение с

двумя произвольными фазами, при этом  $\alpha_1 > \alpha$  и  $l_1 < l$ . Таким образом, появляются более высокочастотные колебания меньшего масштаба. Следовательно, при больших числах Рейнольдса в потоке имеется целый спектр периодических колебаний с различными частотами и неопределенными фазами. Движение приобретает сложный и нерегулярный характер с большим числом степеней свободы. Такое движение называется турбулентным. При больших  $t$  возникает развитое турбулентное движение, которое является суперпозицией волновых движений различных частот и масштабов.

Итак, *основные выводы из теории Ландау* можно сформулировать следующим образом. В реальных условиях, где всегда наблюдаются случайные неконтролируемые начальные возмущения, при числе Рейнольдса, большем критического, возможно существование турбулентного движения. Для установления его закономерностей необходимо пользоваться осредненными значениями гидродинамических величин. При этом необходимо, чтобы временной интервал осреднения отвечал определенным критериям. В дальнейшем процедура осреднения была существенно уточнена. Однако пока нас интересует лишь общий вывод о необходимости перехода к осредненным значениям и использования методов математического описания случайных полей и процессов.

## **7.2. Основные закономерности развитого турбулентного потока**

Рассмотрим, следуя Ландау, закономерности турбулентного развитого потока. В результате операции осреднения, как следует из теории Ландау, нерегулярность изменения во времени и пространстве сглаживается, и средние величины являются плавной функцией времени и координат. Разность  $\bar{U}' = \bar{U} - \bar{\bar{U}}$  между истинной и средней скоростью, которая обнаруживает характерное для турбулентного движения (ТД) нерегулярное изменение, будем называть пульсационной частью скорости.

Рассмотрим подробнее характер накладывающегося на средний поток нерегулярного пульсационного движения. Это движение можно рассматривать как результат наложения турбулентных вихрей различных масштабов.

При этом *под вихрем мы будем понимать движение, характеризующееся определенной частотой и пространственным размером*. При возрастании числа  $Re$  сначала появляются крупномасштабные пульсации, т.к. для них в первую очередь выполняется условие  $Re > Re_{кр}$ . Чем меньше размер вихря, тем позже обусловленные им пульсации появляются в потоке. При очень больших числах  $Re$  в турбулентном потоке существуют вихри с мас-



штабами от самых больших до самых малых. Основную роль в развитом турбулентном потоке играют крупномасштабные вихри, размер которых имеет порядок величины характерных длин, сопоставимых с размерами области, в которой происходит турбулентное движение.

Обозначим через  $L$  порядок величины основного пространственного масштаба ТД. Крупномасштабные вихри размера  $l$ , сопоставимого с  $L$  обладают наибольшими амплитудами. Их скорость по порядку величины сопоставима с изменением  $\delta U$  средней скорости на расстоянии  $l$  (подчеркнем, что речь идет об изменении скорости, а не о самой скорости, которая может быть разной в различных системах отсчета). Частоты этих крупномасштабных пульсаций сопоставимы с  $\Omega = l / U$ , где  $U$  - средняя скорость потока. Действительно, частота определяет период повторяемости картины пульсационного движения, наблюдаемой из неподвижной системы отсчета, относительно которой вся эта картина движется вместе с жидкостью со скоростью  $U$ . Тогда  $\Omega$  - частоты смены этой картины в движущейся системе отсчета.

Мелкомасштабные пульсации, соответствующие большим частотам, участвуют в ТД со значительно меньшими амплитудами. Их можно рассматривать как мелкую детальную структуру, накладывающуюся на основные крупномасштабные движения. В мелкомасштабных пульсациях заключена малая доля кинетической энергии. Поэтому широко используемым подходом при исследовании турбулентной структуры является моделирование крупных вихрей со стохастическим учетом мелкомасштабных.

Рассмотрим закономерности пространственного и временного изменения пульсационной скорости. На больших расстояниях, соизмеримых с  $L$ , изменение пульсационной скорости определяется крупномасштабными вихрями и потому сопоставимо с  $\delta U$ , т.е. с изменением средней скорости на расстояниях, сопоставимых с размером крупных вихрей. На малых расстояниях оно определяется мелкомасштабными вихрями и потому мало по сравнению с  $\delta U$  (однако велико по сравнению с изменением средней скорости на указанном малом расстоянии, соответствующему размеру мелкомасштабных вихрей). Если следить за изменением пульсационной скорости со временем в данной точке пространства, то на интервалах времени малых по сравнению с  $L/U$  пульсационная скорость испытывает малые изменения, в течение же больших интервалов пульсационная скорость меняется на величину, сопоставимую с  $\delta U$ .

Для анализа динамики турбулентных вихрей необходимо ввести пульсационное число  $Re_\lambda = V_\lambda \cdot \lambda / \nu$ , где  $V_\lambda$  - скорость турбулентных вихрей,  $\lambda$  - их пространственный размер,  $\nu$  - кинематический коэффициент молекулярной вязкости. Естественно, чем меньше пространственный размер движения, тем меньше  $Re$ . Крупномасштабным вихрям соответствуют большие  $Re$ , но

большие  $Re$  одновременно соответствуют малым величинам вязкости  $\nu$ . Из этого следует, что динамика крупных вихрей не зависит от вязкости жидкости, следовательно, на этих пространственных размерах не происходит заметной диссипации кинетической энергии. Она происходит в мелкомасштабных вихрях, не существенных с точки зрения общей картины движения. Приведем соображение, высказанное Ричардсоном (1922г.) о физическом механизме турбулентного перемешивания при большом числе  $Re$ . Развитая турбулентность представляет собой иерархию вихрей (т.е. возмущений или неоднородностей) разных порядков, в которых вихри данного порядка возникают за счет потери устойчивости более крупных вихрей предыдущего порядка, заимствуют у них энергию. В свою очередь, теряя устойчивость, они передают её более мелким вихрям, которые ими же порождаются. (Порядок передаваемой кинетической энергии, которую можно оценить из анализа энергетики турбулентного вихря, равен  $V_\lambda^3 / \lambda$ ). Возникает своеобразный "каскадный процесс", при котором энергия осредненного движения последовательно передается движениям все более и более мелких размеров, вплоть до движений минимального размера. Движения минимального размера являются устойчивыми, т.к. характеризуются достаточно малым числом  $Re_\lambda$ . В них вязкость играет существенную роль, происходит заметная диссипация кинетической энергии в тепловую. Образно, этот каскадный механизм сам Рейнольдс изложил в стихотворной форме:

*«Big whorls have little whorls,  
Which feed on their velocity;  
Little whorls have smaller whorls,  
And so on unto viscosity»<sup>1</sup>*

Естественно, что для поддержания стационарного состояния процесса необходимо наличие внешних источников энергии, непрерывно передающих ее основному крупномасштабному движению.

Так как вязкость жидкости существенна лишь для мелкомасштабных пульсаций, верхний масштаб которых мы обозначим через  $\lambda_0$ , то для всех пульсаций  $\lambda \gg \lambda_0$  величины, характеризующие турбулентный поток, не должны меняться при вариации  $\nu$  и постоянных внешних условиях. Тогда внешними характеристиками ТД будут  $\rho$ ,  $l$ ,  $\delta U$ . Пусть  $\varepsilon$  - среднее количество энергии, диссипируемой за единицу времени. Естественно, что эта энергия черпается из крупномасштабных движений. С помощью каскадного меха-

---

<sup>1</sup> Крупные вихри рождают мелкие, которые питаются за счет их скорости; мелкие вихри порождают еще более мелкие и так далее до начала действия вязкости.

низма она передается вихрям, за счет которых происходит диссипация. Поэтому диссипация в силу сказанного будет определяться перечисленными внешними параметрами. Тогда из теории подобия и анализа размерностей получим

$$\varepsilon \cong (\delta U)^3 / l. \quad (7.2.1)$$

Так как эффекты турбулентного движения адекватны вязкостным (например, эффекты сглаживания и торможения), по аналогии можно ввести кинематический коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_T$ , который в отличие от кинематической вязкости  $\nu$ , будет зависеть от кинематических характеристик потока, в частности от перепада скоростей и характерного пространственного размера. Из теории подобия и анализа размерностей получаем

$$\nu_T \cong (\delta U) \cdot l. \quad (7.2.2)$$

Нетрудно видеть, что  $\nu_T / \nu \approx Re / Re_{кр}$ , т.е. это отношение растет с ростом  $Re$ , что отвечает физике процесса турбулентного перемешивания. Можно показать, что выражение для диссипации идентично соотношению для ламинарного потока, однако ламинарная диссипация определяется по производным от истинной скорости по координатам, а турбулентная вязкость связывает диссипацию с градиентом  $\delta U / l$  средней скорости

$$\varepsilon \cong \nu_T (\delta U / l)^2. \quad (7.2.3)$$

Еще одна характеристика может быть определена для развитого турбулентного потока из соображений подобия и размерностей - изменение давления на характерном масштабе ТД

$$\delta p \cong \rho \cdot (\delta U)^2. \quad (7.2.4)$$

До сих пор мы рассматривали турбулентный поток в целом, не выделяя каких-либо вихрей. Уже на этом пути был получен ряд интересных выводов, которые можно дополнить, если рассмотреть "особую" мелкомасштабную турбулентность. Рассмотрим свойства развитой турбулентности, обусловленные вихрями размеров  $\lambda$ , которые малы по сравнению с размером  $l$  и больших размеров вихрей,  $\lambda_0$  определяющих величину диссипации (локальное свойство турбулентного потока). Естественно вихри с такими размерами  $l \gg \lambda \gg \lambda_0$  обладают свойствами однородности и изотропии. Говоря о локальных свойствах ТД, мы подразумеваем относительное движение элементарных объемов, а не движение всего участка в целом, которое связано с движением более крупных масштабов.

Рассмотрим выводы теории локально-однородной и локально-изотропной турбулентности, полученные Колмогоровым и Обуховым.

Для вихрей размеров  $l \gg \lambda_0$  величины  $l$  и  $\delta U$  не оказывают влияния на локальные свойства развитой турбулентности. Так как  $\lambda \gg \lambda_0$ , то параметры вязкости также не могут быть определяющими. Из перечисленных ранее определяющих параметров осталась плотность  $\rho$ . Однако эта величина является термодинамической характеристикой. Остается сделать вывод, что для этих вихрей определяющим процессом является приток энергии от более крупных вихрей и передача энергии более мелким, где происходит процесс диссипации. Следовательно, в условиях равновесия величина диссипации хотя и формируется на масштабах, сопоставимых с  $\lambda_0$ , но оказывает существенное влияние на весь диапазон волновых чисел, соответствующий вихрям всех размеров. В диапазоне волновых чисел можно выделить "*инерционный интервал*", как участок энергетического спектра, на котором количество энергии, передающееся от крупных вихрей к более мелким, равно количеству кинетической энергии, диссипирующей в тепловую в процессе непрерывного измельчения вихрей. На этом интервале нет внутренних источников и стоков энергии.

Определим порядок величины  $V_\lambda$  изменения скорости ТД на расстоянии порядка  $\lambda$ . Оно должно определяться лишь величиной диссипации  $\varepsilon$  и самим расстоянием  $\lambda$ . Поэтому из теории подобия можно получить

$$V_\lambda = (\varepsilon \cdot \lambda)^{1/3} \quad (7.2.5)$$

Эту величину можно рассматривать как оценку порядка скорости турбулентных вихрей масштаба  $\lambda$ . К выражению для  $V_\lambda$  можно также прийти из выражения для  $\varepsilon$  на указанных масштабах. Действительно

$$\varepsilon \cong v_T \left( \frac{V_\lambda}{\lambda} \right)^2 \cong \frac{V_\lambda^3}{\lambda}, \quad (v_T \cong V_\lambda \lambda). \quad (7.2.6)$$

Откуда

$$V_\lambda \cong (\varepsilon \cdot \lambda)^{1/3}. \quad (7.2.7)$$

Изменение скорости на протяжении малого расстояния пропорционально корню кубическому из этого расстояния (*закон Колмогорова-Обухова*). Этот закон можно также представить в спектральной форме. Введём вместо масштабов соответствующие волновые числа пульсаций  $k \cong 1/\lambda$ . Пусть  $E(k)dk$  есть кинетическая энергия единицы массы, заключенная в пульсациях со значениями  $k$  в данном интервале  $dk$ . Функция  $E(k)$  имеет размерность  $L^3/\tau^2$ . Из  $\varepsilon$  и  $k$  имеем  $E(k) \cong \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ . Подчеркнем, что  $V_\lambda^2$  определяет

порядок энергии, заключенной в пульсациях со всеми размерами порядка и меньше заданного масштаба  $\lambda$ . Тогда

$$\int_{\infty}^k E(k) dk = \frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{2/3}} = (\varepsilon \lambda)^{2/3} = V_{\lambda}^2. \quad (7.2.8)$$

Распределение энергии по частотному интервалу можно получить заменой  $k \cong \omega / U$  при  $E(k) = UE(\omega)$  Тогда, подставив в выражение для  $E(k)$  значение  $k$  через  $\omega$ , получим

$$E(\omega) \cong \varepsilon^{2/3} \cdot \omega^{-5/3} U^{2/3}. \quad (7.2.9)$$

(Закон "минус пяти третьей").

Наконец определим величину  $\lambda_0$ . Составим локальное число

$$Re_{\lambda} = \frac{\lambda \cdot V_{\lambda}}{\nu} = \frac{\delta U \cdot \lambda^{4/3}}{\nu \cdot l^{1/3}} = Re \cdot \left( \frac{\lambda}{l} \right)^{4/3}. \quad (7.2.10)$$

Порядок величины  $\lambda_0$  определяется тем, что для указанного размера должно выполняться соотношение  $Re_{\lambda} = 1,0$ . Отсюда

$$\lambda_0 = l / Re^{3/4} = \frac{\nu^{3/4}}{\left( \frac{\delta U}{l} \right)^{1/4}} \cong \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (7.2.11)$$

Аналогичное выражение получается и из теории размерностей.

Таким образом, мы сформулировали основные закономерности развитого турбулентного потока.

### **7.3. Осреднение гидродинамических характеристик турбулентного потока**

Напомним, что *турбулентными* мы будем называть течения, для которых существует статистический ансамбль аналогичных течений, характеризуемый определенными распределениями вероятности для значений всевозможных гидродинамических полей. Для такого течения существует теоретико-вероятностное среднее. На практике используется осреднение по времени или пространству и предполагается выполняющейся эргодическая теорема. Кроме того экспериментальные данные показывают, что в реальных турбулентных течениях минимальные размеры и периоды турбулентных неоднородностей являются на несколько порядков превосходящими размеры и периоды молекулярных движений. На расстояниях, сравнимых с размерами

минимальных неоднородностей и в течение промежутков времени, сопоставимых с минимальными периодами пульсаций, все гидродинамические поля изменяются плавно и могут быть описаны дифференцируемыми функциями. Поэтому описание ТД с помощью дифференциальных уравнений гидромеханики является обоснованным. Благодаря тому, что индивидуальные реализации удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям, статистические характеристики оказываются связанными целым рядом соотношений, весьма важных для теории турбулентности. Простейшие связи такого рода были установлены еще Рейнольдсом с помощью осреднения уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости. Для этого необходимо осуществить операцию осреднения для уравнений Навье-Стокса и получить уравнения для осредненных величин. Однако здесь появятся вторые моменты  $\overline{u_i \cdot u_j} = \overline{u_i} \cdot \overline{u_j} + \overline{u_i' \cdot u_j'}$ , и система становится незамкнутой. Естественно попытаться замкнуть ее, дополнив уравнения гидродинамики уравнениями для вторых моментов пульсаций.

Перейдем к основной операции, используемой при описании турбулентного движения - к *осреднению*. Турбулентные течения представляют собой нелинейные механические системы с большим числом степеней свободы. Изменение во времени любой физической величины описывается функциями, содержащими много компонент Фурье, т.е. имеющими очень сложный характер. В этих условиях практически безнадежно пытаться описать поведение одного отдельного элементарного объема. Даже будучи проведено, это описание было бы мало информативным, так как является случайным и не характерно для потока в целом. Единственно возможным в теории турбулентности представляется статистическое описание, опирающееся на изучение статистических закономерностей, присущих большими совокупностями однотипных объектов. При этом необходимо определить статистические закономерности полей во все моменты времени. Будущие значения гидродинамических полей будут определяться уравнениями гидродинамики и их начальными значениями. Однако в турбулентных течениях эти значения будут существенно зависеть от малых неконтролируемых возмущений в начальных и граничных условиях. Распределения величин в пространстве и во времени будут иметь столь сложный характер, что точные их определения бесполезны. В турбулентном потоке представляют интерес лишь распределение вероятности для соответствующих гидродинамических полей, а не сами точные характеристики этих полей.

Поэтому можно сформулировать следующую задачу: по заданному в начальный момент распределению вероятностей значений пяти независимых гидродинамических величин ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $T$ ) необходимо определить распределение вероятностей значений тех же гидродинамических параметров во все

последующие моменты времени. Эта задача чрезвычайно сложна. Поэтому в ее простейшем варианте необходимо решить две более частных задачи: определение средних величин и статистических моментов.

Прежде всего, сформулируем правила осреднения. Наиболее физически обоснованным является теоретико-вероятностное осреднение, смысл которого заключается в том, что вместо рассмотрения одного турбулентного течения мы переходим к статистической совокупности аналогичных течений, задаваемых набором фиксированных внешних условий. Например, для скорости и температуры на уровне 2 м следует рассматривать характеристики динамического и термического воздействия подстилающей поверхности и характер стратификации как внешние условия. В этом случае необходимо знать функцию плотности вероятности, т. е. все значения, для которых  $p(u) \neq 0$ . Если  $u_1(x, t)$  есть "представитель" совокупности течений при заданных внешних условиях, то факт существования плотности вероятности  $p(u)$  можно записать в виде  $p[u < u_1(t, x) < u + du] = p(u) du$ . Тогда теоретико-вероятностное среднее значение выражается  $\overline{u_1(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot p(u) \cdot du$ . Здесь речь шла о временных рядах исследуемой гидродинамической величины. При переходе к пространству появляется  $N$ -мерная плотность вероятности. Естественно, в атмосфере каждому полю метеорологических величин соответствует своя система многомерных плотностей вероятности, а также совместные плотности вероятности значений одного из полей в каких-либо заданных  $N1$  точках пространства-времени, второго поля в  $N2$  точках, и т.д. Поэтому приведенное определение средней величины практически неприемлемо. На практике пользуются осреднением вида

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - \zeta_1, x_2 - \zeta_2, x_3 - \zeta_3, t - \tau) \cdot \omega(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \tau) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 d\tau, \quad (7.3.1)$$

где  $\omega$  - весовая функция, для которой

$$\iiint \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 d\tau = 1. \quad (7.3.2)$$

От её вида зависят величины средних. Положим, например, что

$$\omega(\vec{\zeta}, \tau) = \omega(\vec{\zeta})\delta(\tau) \text{ или } \omega(\vec{\zeta}, \tau) = \omega(\tau)\delta(\vec{\zeta}) \quad (7.3.3)$$

где  $\delta(\vec{\zeta})$  и  $\delta(\tau)$  - функция Дирака, а  $\omega(\vec{\zeta})$ ,  $\omega(\tau)$  - аналитические функции, отличные от нуля в пределах заданного параллелепипеда или отрезка времени (чаще всего постоянные). Это осреднение может быть проведено по пространству или по времени. Выбор этих функций должен удовлетворять есте-

ственному требованию, чтобы переход к осредненным величинам не приводил к значительному усложнению уравнений. Для этого необходимо потребовать выполнения следующих *правил*:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \overline{f + g} &= \overline{f} + \overline{g} \\
 2) \quad \overline{af} &= a\overline{f} \\
 3) \quad \overline{a} &= a \quad (a = \text{const}) \\
 4) \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} &= \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} \\
 5) \quad \overline{\overline{f g}} &= \overline{f g} \quad (7.3.4)
 \end{aligned}$$

Из правил осреднения (7.3.4) чисто математическим путем можно вывести следующие *следствия*:

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{f}} &= \overline{f}; \quad \overline{f'} = \overline{\overline{f'}} = 0; \\
 \overline{\overline{f g}} &= \overline{f g}; \\
 \overline{\overline{f g'}} &= \overline{f g'} = 0.
 \end{aligned}$$

Все правила осреднения (7.3.4), кроме пятого, выполняются при любой функции осреднения (7.3.1). Только для пятого правила требуется, чтобы период осреднения удовлетворял требованиям Ландау, т.е. был намного больше периода турбулентных пульсаций и намного меньше периода осредненного движения.

При теоретико-вероятностном осреднении все правила выполняются автоматически. Теоретико-вероятностные средние являются физически обоснованными. Поэтому, если бы удалось получить условия, когда их можно было бы заменить средними по времени или по пространству, это имело бы огромное прикладное значение. Доказано, что если выполняются условия стационарности и однородности, т.е. теоретико-вероятностное среднее  $\overline{u(t)} = U$  при  $T \rightarrow \infty$ , то для сходимости случайных величин  $\overline{u_T}(t)$  к  $U$ , т.е.  $\lim_{T \rightarrow \infty} |\overline{u_T} - U|^2 = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b_{uu}(\tau) d\tau = 0, \quad (7.3.5)$$

где 
$$b_{uu}(\tau) = \overline{[u(t + \tau) - U][u(t) - U]} \quad (7.3.6)$$

Поскольку корреляционную функцию  $b_{uu}(\tau)$  пульсаций гидродинамического поля турбулентного течения в геофизических приложениях практи-



чески всегда можно считать стремящейся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ , то в случае установившихся турбулентных течений теоретико-вероятностные средние могут быть определены путем осреднения по достаточно большому интервалу времени. При этом средние за конечное время  $T$ , в течение которого процесс можно считать стационарным, уже достаточно близки к предельным значениям при  $T \rightarrow \infty$ . В атмосфере, например, мгновенные значения гидродинамических величин ведут себя таким образом, что соответствующие случайные функции  $\bar{u}_\tau(t)$  в течение периода  $T$  можно считать независимыми от времени при выборе периода осреднения порядка десятков минут (точнее порядка 1 часа).

Покажем, как рассчитывается период осреднения.

Рассмотрим в качестве примера осреднение модуля скорости ветра вблизи поверхности Земли. Известно, что распределение кинетической энергии по временным периодам имеет два максимума:

- 1) синоптический с частотой 0,01 цикл/час, или 100 часов,
- 2) мелкомасштабный с частотой 80 цикл/час, или 1/80 часа = 45с.

Между ними находится широкий минимум спектральной плотности. Если предположить, что максимумы вносят наибольший вклад в формировании поля ветра, то зависимость модуля скорости от времени можно представить в виде

$$v(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t. \quad (7.3.7)$$

Тогда

$$\bar{v} = A_1 \frac{\sin(\omega_1 \cdot t) \cdot \sin(\omega_1 \cdot T/2)}{\omega_1 \cdot T/2} + A_2 \frac{\sin(\omega_2 \cdot t) \cdot \sin(\omega_2 \cdot T/2)}{\omega_2 \cdot T/2}. \quad (7.3.8)$$

Если выбрать  $T$  из условия

$$\omega_1 T \ll 1; \quad \omega_2 T \gg 1;$$

то

$$\bar{v}(t) = A_1 \cdot \sin \omega_1 t. \quad (7.3.9)$$

Примем, что

$$\omega_1 T = 1/(\omega_2 T), \quad (7.3.10)$$

откуда

$$T = \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \approx 1 \text{ час}. \quad (7.3.11)$$

Такой период согласуется с экспериментальными данными.

#### 7.4. Уравнения гидротермодинамики для турбулентного потока

Как указывалось ранее, для турбулентного течения выполняются основные законы сохранения и дифференциальные уравнения, их описывающие. Однако полученные из решения этих уравнений индивидуальные поля метеорологических величин носят случайный характер. Поэтому для описания турбулентного потока пользуются осредненными величинами и пульсациями (отклонениями мгновенных величин от средних). Можно предположить, что осредненные величины плавно меняются в пространстве и во времени, не испытывают резких скачков, а пульсации характеризуются большой изменчивостью в пространстве и во времени.

Перейдем к оценке средних величин. При этом будем исходить из уравнений для вязкой жидкости. Выполним осреднение уравнений гидротермодинамики.

Уравнения движения для вязкой среды, выражающие закон сохранения импульса, в компактной форме с применением суммирования по индексу  $\alpha$ , записываются в виде

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho v_i v_\alpha) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\rho(\omega_j v_k - \omega_k v_j) - \rho g \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \rho v \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \right) \quad (7.4.1)$$

Напомним, что  $i=1,2,3$  и относится к зональной, меридиональной и вертикальной составляющим скорости,  $j=i+1$ ,  $k=i+2$ . Если  $j>3$  и  $k>3$ , то из них вычитается тройка,

$$\delta_{i3} = \begin{cases} 1, & i=3, \\ 0, & i \neq 3. \end{cases}$$

Применим к указанному уравнению операцию осреднения

$$\frac{\partial \overline{\rho v_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\overline{\rho v_i v_\alpha}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + 2(\overline{\omega_j v_k \rho} - \overline{\omega_k v_j \rho}) - \overline{\rho} g \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \overline{\rho v \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}} \right). \quad (7.4.2)$$

Рассмотрим приближение Рейнольдса, согласно которому плотность не коррелирует с кинематическими характеристиками потока, так что

$$\begin{aligned} \overline{\rho v_i} &= \overline{\rho} \cdot \overline{v_i}, \\ \overline{\rho v_i v_j} &= \overline{\rho} \cdot \overline{v_i v_j} + \overline{\rho' \cdot (v_i v_j)'} = \overline{\rho} \cdot \overline{v_i v_j}. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Известно, что осреднение линейных членов не меняет их вида, только в этих членах вместо мгновенных будут стоять осредненные значения гидродинамических параметров. Осреднение нелинейных членов дает

$$\overline{v_i v_j} = \bar{v}_i \cdot \bar{v}_j + \overline{v'_i \cdot v'_j}. \quad (7.4.4)$$

Тогда получим

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_\alpha + \bar{\rho} \cdot \overline{v'_\alpha v'_i}) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\bar{\rho}(\omega_j \bar{v}_k - \omega_k \bar{v}_j) - \bar{\rho} g \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \bar{\rho} v \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_\alpha} \right). \quad (7.4.5)$$

Уравнение (7.4.5) называется *уравнением движения в форме Рейнольдса*.

Проведем теперь операцию осреднения над уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} v_\alpha) = 0. \quad (7.4.6),$$

Учтем (7.4.3), тогда

$$\bar{v}_i \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \cdot \bar{v}_i) = 0 \quad (7.4.7)$$

Умножим (7.4.7) на  $\bar{v}_i$  и вычтем из уравнений Рейнольдса. Получим

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_\alpha) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + 2\bar{\rho}(\omega_j \bar{v}_k - \omega_k \bar{v}_j) - g \delta_{i3} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_\alpha} - \overline{v'_\alpha v'_i} \right). \quad (7.4.8)$$

Выписанные уравнения связывают изменения во времени и пространстве осредненных величин и выражают *закон сохранения импульса для турбулентного потока*. Эти уравнения имеют тот же вид, что и уравнения Навье-Стокса, но в них вместо мгновенных фигурируют осредненные величины и появляются дополнительные неизвестные функции

$$\tau_{ij} = -\bar{\rho} \cdot \overline{v'_i v'_j}. \quad (7.4.9)$$

Выясним их смысл. Рассмотрим среднее значение плотности потока импульса

$$\overline{\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}} = \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{p} \delta_{ij} - (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\rho} \cdot \overline{v'_i v'_j}) = \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{p} \delta_{ij} - (\bar{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}). \quad (7.4.10)$$

где  $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\rho} v \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}$ .

Введем понятия: *плотность среднего импульса*  $\bar{\rho} \cdot \bar{v}_i$ , *плотность пульсационного импульса*  $\bar{\rho} v'$  и *плотности их потоков*  $\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j$ ,  $\bar{\rho} \cdot \overline{v'_i v'_j}$ . Тогда среднее значение плотности потока суммарного импульса представляется в виде суммы переноса среднего импульса осредненным движением, среднего давления, вязких напряжений и среднего переноса пульсационного импульса пульсационным движением. Последний фактор описывает передачу импульса от одних объемов жидкости к другим, вызываемую турбулентным перемешиванием. Знак "минус" в  $\tau_{ij}$  необходим для того чтобы для тензора об-

шей вязкости стояла сумма вязких и турбулентных напряжений. Таким образом, возникают дополнительные напряжения, характеризующие турбулентный обмен.

Для физической интерпретации дополнительных членов, появляющихся в уравнениях Рейнольдса, представим себе произвольный движущийся в турбулентной среде объем, состоящий из набора элементарных объемов. Каждый элементарный объем движется со своей мгновенной скоростью. Средняя скорость произвольного объема определяется средневзвешенной скоростью движения элементарных объемов в данный момент времени. Траектории движения этих объемов, по сути являющихся турбулентными вихрями, носят хаотический характер и непрерывно пересекают граничную поверхность выбранного произвольного объема. В результате, если рассмотреть два момента времени, то наборы турбулентных вихрей, образующих выбранный произвольный объем, будут различными в указанные моменты времени. Следовательно, средние скорости также будут различными. Таким образом, без внешних воздействий произошло изменение средней скорости со временем, причиной которого может быть дополнительный приток импульса, обусловленный турбулентным перемешиванием. Это и есть физический механизм формирования турбулентного притока импульса. С другой стороны указанный механизм можно трактовать как действие дополнительных сил на граничной поверхности выделенного объема - турбулентных напряжений. Равнодействующая этих сил есть дополнительная сила турбулентной вязкости, необходимая для описания изменения средней скорости движущегося воздушного объема. Таким образом, в случае турбулентного потока, в отличие от ламинарного, прибавился дополнительный приток импульса за счет турбулентных пульсаций, что и вызывает изменение средней скорости.

Для удобства дальнейших выкладок введем понятие полной производной по времени в турбулентном потоке

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}, \quad (7.4.11)$$

$$\frac{D\bar{\rho}\bar{v}_i}{Dt} = \bar{\rho}\bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tau_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho}\bar{F}_i. \quad (7.4.12)$$

Здесь  $\bar{F}_i$  - сумма сил Кориолиса, молекулярной вязкости и тяжести, действующих на единицу массы. Еще раз подчеркнем, что  $\tau_{ij}$  представляет собой количество движения  $i$ -го компонента пульсационного импульса, переносимого  $j$ -тым компонентом пульсационной скорости через единичную площадку за единицу времени.

Тензор турбулентных напряжений состоит из  $\tau_{ij}$  ( $i \neq j$ )- касательных напряжений, определяющих деформацию сдвига,  $\tau_{ij}$  ( $i = j$ ) - нормальных напряжений, определяющих дополнительное давление

$$\tau_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix}. \quad (7.4.13)$$

Теперь перейдем к операции осреднения уравнения притока тепла в адиабатическом приближении

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v'_\alpha \theta) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \chi_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \right). \quad (7.4.14)$$

Используя правила осреднения и следствия из них, получаем

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{v}'_\alpha \bar{\theta} + \overline{v'_\alpha \theta'}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \chi_\theta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} \right). \quad (7.4.15)$$

Введем величину *турбулентного потока тепла*:

$$Q_i = c_p \cdot \bar{\rho} \cdot \overline{\theta' v'_i}. \quad (7.4.16)$$

Теперь, по аналогии с уравнением притока тепла осредним уравнение переноса любой примеси:

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{v}'_\alpha \bar{q} + \overline{v'_\alpha q'}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \chi_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_\alpha} \right). \quad (7.4.17)$$

Здесь  $\chi_\theta$  и  $\chi_q$  - коэффициенты молекулярной проводимости для температуры и примеси, а  $E_i = \bar{\rho} \cdot \overline{q' v'_i}$  - турбулентный поток примеси в жидкости.

Таким образом, получена система уравнений гидротермодинамики для турбулентной вращающейся жидкости, которая в отличие от системы для ламинарного потока оказалась незамкнутой. В системе для турбулентной среды появились новые неизвестные функции пространственных координат и времени - турбулентные напряжения, потоки тепла и примеси, в частности, водяного пара или соли.

Поскольку дополнительные неизвестные функции представляют собой центральные моменты второго порядка, то при построении эволюционных уравнений для них естественно воспользоваться общим правилом построения уравнений для моментов. Продемонстрируем его на втором центральном мо-

менте  $\bar{\rho} \overline{v'_i v'_j}$ . Вначале получим соотношения для величин  $\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i v_j$  с учетом выражения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i v_j = v_j \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial t}. \quad (7.4.18)$$

Подставим вместо производных по времени их выражения из уравнений Навье-Стокса и получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \rho v_i v_j v_\alpha + (p v_i \delta_{j\alpha} + p v_j \delta_{i\alpha}) - (v_j \sigma_{i\alpha} + v_i \sigma_{j\alpha}) \right] = \\ = \rho v_i F_j + \rho v_j F_i + p \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \left( \sigma_{i\alpha} \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} + \sigma_{j\alpha} \frac{\partial v_j}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

Аналогично

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial t} = \bar{v}_i \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_j}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i}{\partial t}.$$

Воспользуемся уравнениями Рейнольдса и получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j v_\alpha + \bar{\rho} \bar{v}'_i v'_\alpha \cdot \bar{v}_j + \bar{\rho} \bar{v}'_j v'_\alpha \cdot \bar{v}_i) + (\bar{p} \bar{v}_i \delta_{j\alpha} + \bar{p} \bar{v}_j \delta_{i\alpha}) - (\bar{\sigma}_{j\alpha} \bar{v}_i + \bar{\sigma}_{i\alpha} \bar{v}_j) \right] = \\ = (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{F}_j + \bar{\rho} \bar{v}_j \bar{F}_i) + \bar{p} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \left( \bar{\sigma}_{i\alpha} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_\alpha} + \bar{\sigma}_{j\alpha} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_\alpha} \right) + \left( \overline{\rho v'_i v'_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho v'_j v'_\alpha} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

Здесь

$$\bar{F}_i = 2\omega_j \bar{v}_k - 2\omega_k \bar{v}_j - g\delta_{i3}.$$

Наконец, если из уравнений Навье-Стокса вычесть уравнение Рейнольдса, получим уравнения движения для пульсаций скорости

$$\frac{\partial \bar{\rho} v'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \overline{\rho v'_i v'_\alpha} + \overline{\rho v'_\alpha v'_i} + \rho v'_i v'_\alpha - \overline{\rho v'_i v'_\alpha} + p' \delta_{i\alpha} - \sigma'_{i\alpha} \right] = \bar{\rho} F'_i. \quad (7.4.21)$$

Здесь использовано соотношение

$$\rho v_i - \bar{\rho} \bar{v}_i = \bar{\rho} \cdot v'_i + \rho' \cdot v'_i \approx \bar{\rho} \cdot v'_i, \quad (\rho' / \bar{\rho} \ll 1)$$

и введено обозначение

$$F'_i = 2\omega_j v'_k - 2\omega_k v'_j - \rho' g \delta_{i3} / \bar{\rho}.$$

Далее, с учетом уравнения неразрывности составим комбинацию

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho v'_i v'_j} = v'_j \frac{\partial \overline{\rho v'_i}}{\partial t} + v'_i \frac{\partial \overline{\rho v'_j}}{\partial t}.$$

Для получения правой части этого равенства используем уравнение (7.4.21). Осредним полученное выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{\rho v'_i v'_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \overline{\rho v'_i v'_j v'_\alpha} + \overline{\rho v'_i v'_j v'_\alpha} + \left( \overline{p' v'_i \delta_{j\alpha}} + \overline{p' v'_j \delta_{i\alpha}} \right) - \left( \overline{\sigma'_{ja} v'_i} + \overline{\sigma'_{ia} v'_j} \right) \right] = \\ & = \left( \overline{\rho v'_i F'_j} + \overline{\rho v'_j F'_i} \right) + p' \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right) - \left( \overline{\sigma'_{ia} \frac{\partial v'_j}{\partial x_\alpha}} + \overline{\sigma'_{ja} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha}} \right) + \left( \overline{\rho v'_i v'_\alpha} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho v'_j v'_\alpha} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

Распишем выражения для работы силы Кориолиса

$$\overline{v_i} (\omega_{j+1} \overline{v_{j+2}} - \omega_{j+2} \overline{v_{j+1}}) - \overline{v_j} (\omega_{i+1} \overline{v_{i+2}} - \omega_{i+2} \overline{v_{i+1}})$$

и убедимся, что при  $i=j$  работа силы Кориолиса равна нулю.

Уравнения для вторых моментов являются эволюционными уравнениями, т.е. они связывают локальную производную по времени от вторых моментов с пространственным распределением комбинаций вторых моментов с другими гидродинамическими характеристиками. Эти комбинации включают перенос упорядоченным движением, работу сил давления, турбулентных и молекулярных напряжений, работу внешних массовых сил, перераспределение вторых моментов между их компонентами за счет сил давления и молекулярной вязкости, перераспределение вторых моментов для осредненного и пульсационного движений.

Отметим, что анализ уравнения (7.4.22) показывает, что решить только с его помощью проблему замыкания невозможно, т.к. оно кроме средней скорости  $\overline{v}_i$  и напряжений Рейнольдса  $\overline{\rho v'_i v'_j}$  содержит ряд новых неизвестных: третьи центральные моменты  $\overline{\rho v'_i v'_j v'_\alpha}$ , вторые моменты пульсаций скорости и её пространственных производных, входящих в выражения  $\overline{v'_i \sigma'_{j\alpha}}$  и  $\overline{\sigma'_{ja} \frac{\partial v'_i}{\partial x_\alpha}}$ , взаимные вторые моменты пульсаций скорости и давления вида  $\overline{p' v'_i}$ ,  $p' \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}$ .

Таким образом, уравнение Рейнольдса и уравнения для турбулентных напряжений снова не образуют замкнутой системы. Если попытаться дополнить эту систему уравнениями для третьих моментов  $\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v'_i v'_j v'_k})$ , то в эти уравнения войдут другие дополнительные неизвестные функции (например, четвертые центральные моменты  $\overline{\rho v'_i v'_j v'_k v'_m}$  и третьи моменты типа  $\overline{p' v'_i v'_k}$  и

др.), и разность между числом неизвестных и числом уравнений станет еще больше. Следовательно, составление уравнений для высших моментов не позволяет получить замкнутую систему уравнений, описывающую турбулентное движение.

Поэтому уравнения (7.4.19), (7.4.20) и (7.4.21) используются как промежуточные при получении уравнений для мгновенных, осредненных и турбулентных значений кинетической энергии вида

$$E = \frac{1}{2} \rho v_\beta v_\beta, \quad E_s = \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{v}_\beta \bar{v}_\beta, \quad E_t = \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\beta v'_\beta}, \quad (7.4.23)$$

(по  $\beta$  производится суммирование).

Выпишем уравнения баланса для указанных видов кинетической энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \underbrace{E v_\alpha}_{(1)} + \underbrace{p v_\alpha}_{(2)} - \underbrace{v_\beta \sigma_{\beta\alpha}}_{(3)} \right] = \underbrace{\rho g v_\beta \delta_{\beta 3}}_{(4)} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{(5)}, \quad (7.4.24)$$

$$\rho \varepsilon = \frac{\mu}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \underbrace{E_s \bar{v}_\alpha}_{(1)} + \underbrace{\bar{\rho} \overline{v'_\alpha v'_\beta} \bar{v}_\beta}_{(6)} + \underbrace{\bar{p} \bar{v}_\alpha}_{(2)} - \underbrace{\bar{v}_\beta \bar{\sigma}_{\alpha\beta}}_{(3)} \right] = \underbrace{-\bar{\rho} \bar{v}_\alpha g \delta_{\alpha 3}}_{(4)} + \underbrace{\bar{\rho} \overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}}_{(7)} - \underbrace{\bar{\rho} \varepsilon_s}_{(5)}, \quad (7.4.25)$$

$$\bar{\rho} \varepsilon_s = \frac{\mu}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \underbrace{E_t \bar{v}_\alpha}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta v'_\beta}}_{(6)} + \underbrace{p' v'_\alpha}_{(2)} - \underbrace{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}_{(3)} \right] = \underbrace{-\overline{\rho' v'_\alpha v'_\beta} g \delta_{\alpha 3}}_{(4)} - \underbrace{\overline{\rho' v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha}}_{(7)} - \underbrace{\bar{\rho} \varepsilon_t}_{(5)}, \quad (7.4.26)$$

$$\bar{\rho} \varepsilon_t = \frac{\mu}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \overline{\left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)^2}.$$

В уравнения баланса входят основные *энергетические факторы*: перенос энергии (1), работа силы давления (2), работа сил молекулярной вязкости (3), работа силы тяжести (4) и диссипация кинетической энергии в тепло (5), работа сил турбулентных напряжений (6), перераспределение осредненной и турбулентной кинетической энергии (7).

Попытаемся подойти к проблеме замыкания путем использования уравнений баланса. Естественно в этом случае нас будет интересовать урав-



нение для кинетической энергии турбулентных вихрей. Проанализируем члены (6) и (7) в этом уравнении. Член (6) можно представить в виде  $\overline{v'_i E'_i}$  и соответственно интерпретировать как осредненный перенос турбулентной кинетической энергии самими турбулентными вихрями. Член (7) выражает взаимный переход кинетической энергии осредненного движения в энергию турбулентных вихрей. Этот вывод следует из сопоставления уравнений баланса для указанных двух видов энергии, в которых фигурируют члены (7), но с противоположными знаками.

Полный учет сжимаемости (без ограничения об отсутствии корреляции между  $\rho$  и  $v_i$ ) вносит существенные изменения в уравнение движения и энергии. Во-первых, средняя плотность импульса единицы объема оказывается равной  $\overline{\rho v_i} = \bar{\rho} \cdot \bar{v}_i + \overline{\rho' \cdot v'_i}$ , где  $\bar{\rho} \cdot \bar{v}_i$  - импульс осредненного движения, а  $\overline{\rho' \cdot v'_i}$  - импульс пульсационного движения. Тогда осредненная величина кинетической энергии единицы объема  $\bar{E} = \frac{1}{2} \overline{\rho v_\beta v_\beta}$  равна

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E_s + E_{st} + E_{t1} + E_{t2}, \\ E_s &= \frac{1}{2} \overline{\bar{\rho} v_\beta v_\beta}, \quad E_{st} = \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\beta v_\beta} = \frac{1}{2} \overline{\rho' v'_\beta v_\beta}, \quad E_{t1} = \frac{1}{2} \overline{\bar{\rho} v'_\beta v'_\beta}, \\ E_{t2} &= \frac{1}{2} \overline{\rho' v'_\beta v'_\beta}, \quad E_{t1} + E_{t2} = E_{tc}. \end{aligned} \quad (7.4.27)$$

При выводе уравнений для всех видов кинетической энергии воспользуемся наиболее полными уравнениями движения

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} [\rho v_i v_\alpha + p \delta_{i\alpha} - \sigma_{i\alpha}] = \rho F_i, \quad (7.4.28)$$

где  $F_i$  - сумма всех массовых сил. Осредняя уравнения неразрывности и движения, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \bar{v}_\alpha + \overline{\rho' v'_\alpha}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{v}_i + \overline{\rho' v'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_\alpha + \overline{\rho' v'_\alpha \cdot v_i} + \overline{\rho' v'_i \cdot v_\alpha} + \bar{\rho} \bar{v}_i v'_\alpha + \overline{\rho' v'_\alpha v'_i} + \bar{\rho} \delta_{i\alpha} - \bar{\sigma}_{i\alpha}) &= \bar{\rho} \bar{F}_i + \overline{\rho' F'_i}. \end{aligned} \quad (7.4.29)$$

Получим уравнение для  $\frac{\partial \bar{\rho} v_i}{\partial t}$  из уравнений Навье-Стокса и осредненного уравнения неразрывности, осредним его и вычтем из уравнения для  $\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{v}_i + \overline{\rho' v'_i})$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\rho v_i v_\alpha} + \overline{\rho v'_i v'_\alpha} + \overline{p} \delta_{i\alpha} - \overline{\sigma_{i\alpha}}) = \overline{\rho F_i} + \varphi_i, \quad (7.4.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho' v'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\rho' v'_\alpha \cdot v_i} + \overline{\rho' v'_i \cdot v_\alpha} + \overline{\rho' v' v'_\alpha}) = \overline{\rho' F'_i} - \varphi_i, \quad (7.4.31)$$

$$\varphi_i = \overline{v'_i \cdot \frac{\partial \overline{\rho v'_\alpha}}{\partial x_\alpha}} - \overline{v_i \cdot \frac{\partial \overline{\rho' v'_\alpha}}{\partial x_\alpha}} + \left( \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \overline{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right) - \left( \frac{\partial \overline{\sigma_{i\alpha}}}{\partial x_\alpha} - \overline{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\sigma_{i\alpha}}}{\partial x_\alpha} \right), \quad (7.4.32)$$

Здесь величина  $\varphi_i$  описывают обмен импульсом между осредненным и пульсационным движениями. Уравнения для трех видов кинетической энергии примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ E_s \overline{v_\alpha} + \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} + \overline{p v_\alpha} - \overline{v_\beta \sigma_{\alpha\beta}} \right] = \overline{\rho v_\alpha F_\alpha} - \overline{\rho \varepsilon_s} + \overline{p} \frac{\partial \overline{v_\alpha}}{\partial x_\alpha} + \\ + \left( \overline{v_\alpha \Phi_\alpha} + \frac{1}{2} \overline{v_\beta v_\beta} \frac{\partial \overline{\rho v'_\alpha}}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \overline{v_\beta}}{\partial x_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (7.4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{tc}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ E_{tc} \overline{v_\alpha} + \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} + \overline{p' v'_\alpha} - \overline{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}} \right] = \overline{\rho v'_\alpha F'_\alpha} + \overline{\rho v'_\alpha F'_\alpha} - \overline{\rho \varepsilon_t} + \\ + \overline{p' \frac{\partial v'_\alpha}{\partial x_\alpha}} - \overline{\rho v'_\alpha \frac{D \overline{v_\alpha}}{Dt}} - \overline{\rho v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \overline{v_\beta}}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad (7.4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{st}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ E_{st} \overline{v_\alpha} + \overline{\rho' v'_\alpha v'_\beta} \cdot \overline{v_\beta} + \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha} \cdot \overline{v_\beta v_\beta} \right] = \overline{v_\alpha \rho' F'_\alpha} - \\ - \left[ \overline{v_\alpha \Phi_\alpha} + \frac{1}{2} \overline{v_\beta v_\beta} \frac{\partial \overline{\rho v'_\alpha}}{\partial x_\alpha} \right] + \left[ \overline{\rho v'_\alpha} \frac{D \overline{v_\alpha}}{Dt} + \overline{\rho' v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \overline{v_\beta}}{\partial x_\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (7.4.35)$$

Обратим внимание на большое количество новых членов, которые появились в уравнениях (7.4.33) – (7.4.35). Обмен кинетической энергией турбулентных вихрей осуществляется между  $E_{st}$  и  $E_s$ ;  $E_{tc}$  и  $E_{st}$ , т.е. появилась дополнительная ветвь обмена энергией. Самое важное отличие общего уравнения для  $E_t$  заключается в появлении слагаемого

$$B = \overline{\rho v'_\alpha} \left( g \delta_{i3} + \frac{D \overline{v_\alpha}}{Dt} \right), \quad \text{т.к. } \overline{F_\alpha} = -g \delta_{\alpha 3}. \quad (7.4.36)$$

Первый член слагаемого в скобках фигурирует во всех энергетических уравнениях, а второй - появляется только для сжимаемой жидкости. Т.к.  $g \gg \frac{D \overline{v_\alpha}}{Dt}$ , то

$$B = -\overline{\rho v'_3} \cdot g \quad (7.4.37)$$

В заключение сопоставим соотношения для  $E_t$  и  $E_{tc}$ .

$$E_{ic} = \frac{1}{2} \overline{\left[ \overline{(\rho + \rho')} \cdot v'_\alpha v'_\alpha \right]} = \frac{1}{2} \overline{\rho \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho} \right) \cdot v'_\alpha v'_\alpha}, \quad E_t = \frac{1}{2} \overline{\rho v'_\alpha v'_\alpha}. \quad (7.4.38)$$

Так как  $\frac{\rho'}{\rho} \ll 1$ , то  $E_{ic} \approx E_t$ . Следовательно, уравнение для  $E_t$  с высокой степенью точности аппроксимирует уравнение для  $E_{ic}$ . Если ввести интенсивность турбулентности  $b = E_t / \bar{\rho}$  и подставить в выражение для  $E_t$ , то получим

$$\frac{Db}{Dt} = -\overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - \varepsilon_t + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ -\frac{1}{2} \overline{v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} - \frac{\overline{p' v'_\alpha}}{\bar{\rho}} + \frac{\overline{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}}{\bar{\rho}} \right] - \frac{g}{\bar{\rho}} \overline{v'_\alpha \rho'} \cdot \delta_{\alpha 3}. \quad (7.4.39)$$

Изменение во времени интенсивности турбулентности единицы массы, движущейся со скоростью осредненного движения  $\bar{v}_i$  определяется взаимным переходом кинетической энергии среднего движения в кинетическую энергию турбулентных вихрей, диссипацией турбулентной кинетической энергии (ТКЭ), переносом пульсационным движением ТКЭ, работой пульсаций сил давления, вязкости и плавучести.

Экспериментальные данные показывают, что величина

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \frac{\overline{p' v'_\alpha}}{\bar{\rho}} + \frac{\overline{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}}{\bar{\rho}} \right] \cong -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \overline{p' v'_\alpha} + \overline{v'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}} \right] \quad (7.4.40)$$

мала по сравнению с переносом кинетической энергии пульсационным движением  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} \right)$ . Отсюда:

$$\frac{Db}{Dt} = -\overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{v'_\alpha v'_\beta v'_\beta} - \frac{g}{\bar{\rho}} \overline{v'_\alpha \rho'} \cdot \delta_{\alpha 3} - \varepsilon_t. \quad (7.4.41)$$

Как будет показано далее, это уравнение широко используется в проблеме замыкания.

### 7.5. "К-теория" турбулентности и проблемы замыкания

Теория замыкания уравнений гидротермодинамики турбулентного потока основана на анализе физического механизма его формирования. В ней обобщены физические соображения и экспериментальные данные, согласно которым параметры турбулентного потока должны быть связаны с характеристиками пространственной неоднородности осредненного движения.

Рассмотрим два возможных случая генерации и затухания турбулентных вихрей. В первом случае источником турбулентной энергии является осредненный поток и величина

$$A = -\overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} > 0 \quad (7.5.1)$$

Действительно, в этом случае в уравнении баланса кинетической энергии для осредненного движения величина  $A$  входит со знаком "минус" и кинетическая энергия среднего движения уменьшается. Вторым вариантом  $A < 0$ . Тогда энергия турбулентных вихрей передается осредненному движению.

Рассмотрим случай, когда среднее движение "питает" турбулентные вихри. Если осредненное движение жидкости имеет характер движения твердого тела (т.е. не сопровождается никакими деформациями жидких частиц), то рейнольдсовы напряжения, действующие на любой выделенный объем жидкости, направлены по нормали к стенкам выделенного объема. Это означает, что тензор  $\overline{\rho v'_i v'_j}$  является изотропным, т.е.  $\overline{\rho v'_i v'_j} = c \delta_{ij}$ , где

$$c = \frac{1}{3} \overline{\rho v'_\alpha v'_\alpha} = \frac{2}{3} \overline{\rho b} \quad (7.5.2)$$

Следовательно, турбулентная энергия  $E_t$  в определенном смысле аналогична давлению.

Если же в осредненном движении имеет место перемещение частиц относительно друг друга, то напряжения  $\tau_{ij} = -\overline{\rho v'_i v'_j}$  должны зависеть от производных средней скорости по координатам. Действительно, если воздушная частица сохраняет среднюю скорость первоначального положения, откуда она пришла, то в конечной точке траектории пульсации возникают лишь в том случае, если в ней средняя скорость отлична от скорости в начальной точке. Следовательно, наблюдается пространственная неоднородность параметров осредненного движения. В первом приближении будем учитывать лишь первые производные средней скорости в качестве количественных оценок пространственной неоднородности и считать связь  $\tau_{ij}$  с  $\partial \bar{v}_i / \partial x_j$  линейной. Поскольку напряжения  $\tau_{ij} = -\overline{\rho v'_i v'_j}$  - симметричный тензор, то их зави-

симость от пространственных производных также должна носить тензорный характер. Величины  $\tau_{ij}$  должны зависеть от  $\Phi = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)$ . При этом вследствие эффекта дополнительного давления при  $i=j$  тензор  $\tau_{ij}$  представляется в виде:

$$\tau_{ij} = -\bar{\rho} v'_i v'_j = -\frac{2}{3} \bar{\rho} b \delta_{ij} + \frac{1}{2} \bar{\rho} (K_{i\alpha} \Phi_{j\alpha} + K_{j\alpha} \Phi_{i\alpha}). \quad (7.5.3)$$

Нетрудно убедиться, что лишь выписанная комбинация правой части отвечает условию симметричности тензора. Здесь  $K_{ij}$  играют роль *коэффициентов турбулентной вязкости*. Если воспользоваться аналогией с молекулярной вязкостью, согласно которой коэффициенты молекулярной вязкости определяются длиной свободного пробега молекул и их скоростью, то для турбулентного потока получим

$$K_{ij} = l_{ij} \sqrt{b}, \quad (7.5.4)$$

Здесь:  $l_{ij}$  - тензор масштабов, характеризующий расстояния, которые могут проходить вихри в различных направлениях, сохраняя свою индивидуальность, а  $\sqrt{b}$  - среднеквадратическая скорость турбулентных вихрей. Например,  $l_{xz}$  представляет путь, пройденный вихрем в направлении  $z$  при переносе  $x$ -составляющей количества движения за счет вертикального турбулентного перемешивания. Для скалярных величин используется лишь три величины  $l_x, l_y, l_z$ . Формулу (7.5.4) можно рассматривать как введение новых неизвестных величин  $l_{ij}$  вместо  $K_{ij}$ .

Для скалярных величин (поток тепла, водяного пара, соли и других примесей)

$$\overline{\rho \theta' v'_i} = -\bar{\rho} K_i^{(0)} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \quad (7.5.5)$$

вводятся еще неизвестные  $K_i^{(0)}$  - *коэффициенты турбулентной диффузии*. Наконец применим "*K-теорию*" к третьим моментам

$$\frac{1}{2} \overline{\rho v'_\beta v'_\beta v'_i} = \frac{1}{2} \overline{\rho b' v'_i} = -K_i^{(b)} \bar{\rho} \frac{\partial b}{\partial x_i} \quad (7.5.6)$$

Теперь введем целый ряд достаточно обоснованных *допущений и ограничений*. Их обоснованность следует, прежде всего, из того факта, что они не нарушают основных выводов, вытекающих из механизма формирования турбулентного потока. Напомним, что мы будем рассматривать течения, где осредненный поток передает свою энергию турбулентным вихрям, т.е.  $A > 0$ .

Подставив выражение для  $\tau_{ij}$  в (7.5.1), получим

$$A = \frac{1}{2} \bar{\rho} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 K_{\alpha\beta} \cdot \Phi_{\alpha\beta}^2 \quad (7.5.7)$$

При  $A > 0$ ,  $K_{\alpha\beta} > 0$  – формула (7.5.7) описывает явление *положительной турбулентной вязкости*. При  $A < 0$ ,  $K_{\alpha\beta} < 0$  – явление *отрицательной турбулентной вязкости*. Мы будем рассматривать лишь течения, где  $K_{\alpha\beta} > 0$ .

Теперь, исходя из физических соображений, введем ряд допущений. Во-первых, в матрице  $l_{ij}$  сохраним лишь диагональные члены  $l_{11}$ ,  $l_{22}$ ,  $l_{33}$ , а остальные приравняем нулю.

При этом, в силу изотропности турбулентности в горизонтальной плоскости  $l_{11} = l_{22} = l_s$ . Обозначим  $l_{33} = l_z$ . Тогда  $K_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , а величины  $K_{11} = K_{22} = K_s$ ,  $K_{33} = K_z$ . В силу принятых допущений остаются лишь две неизвестные величины  $K_s$  и  $K_z$ . По сути, это коэффициенты турбулентного обмена в горизонтальной и вертикальной плоскостях, подлежащие определению наряду с интенсивностью турбулентности. Для кинетической энергии турбулентных вихрей мы уже получили уравнение, следовательно, необходимо определить  $l_s$  и  $l_z$ . Совершенно очевидно, что если вихрь данного масштаба сохраняет свою индивидуальность на расстоянии равном  $l_s$  и  $l_z$ , то эти величины можно трактовать как размеры областей пульсации одного знака в горизонтальной и вертикальной плоскостях. При этом, увеличивая масштаб осреднения, мы все большие вихри включаем в спектр турбулентных. В вертикальной плоскости при этом для каждого уровня существует предельное значение характерного масштаба – расстояние до подстилающей поверхности. Полученная величина  $l_z$  при увеличении масштаба осреднения до величин, больших расстояния до поверхности, уже не изменяется и поэтому является объективной характеристикой, не зависящей от способа описания турбулентности. Для горизонтального масштаба такого ограничения нет, Поэтому  $l_z$  целесообразно определять только в зависимости от физических факторов, а в выражении для  $l_s$  наряду с физическими факторами должен фигурировать шаг сетки. Для описания  $l_s$ , как правило, используется теория подобия. Определение  $l_z$  осуществляется с помощью построения уравнения для корреляционной функции пульсаций скорости. Полученное уравнение записывается для спектральной функции и сводится к уравнению переноса для произведения  $b \cdot l_z$ , а затем к уравнению для характерного размера вихрей в вертикальной плоскости  $l_z$ . Для удобства обозначим  $l = l_z$ . Уравнение для  $l$  имеет вид:

$$\frac{\partial l}{\partial t} + u \frac{\partial l}{\partial x} + v \frac{\partial l}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial l}{\partial z} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial l}{\partial z} - d_2 l + f,$$

$$\text{Здесь: } \quad \bar{w} = w - \alpha_2 \frac{K_z}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial z}; \quad f = \alpha_4 \sqrt{b} + \alpha_5 \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial b}{\partial z}, \quad (7.5.8)$$

$$d = \alpha_3 K_z \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] / b.$$

Это уравнение записано при условии учета лишь вертикального турбулентного обмена.

Как было показано при рассмотрении закономерностей развитой турбулентности, к которой относится рассматриваемая горизонтальная турбулентность, горизонтальный коэффициент турбулентности пропорционален перепаду скоростей и характерному размеру вихрей. Перепад скоростей осредненного движения выражается через параметр горизонтальной неоднородности, в качестве которого используется модуль деформации средней скорости. Характерный пространственный масштаб вихрей принимается пропорциональным шагу горизонтальной сетки. Из высказанных соображений следует соотношение для коэффициента горизонтального турбулентного обмена.

$$K_s = \alpha_s (\delta x^2 + \delta y^2) (D_T^2 + D_s^2)^{1/2}, \quad (7.5.9)$$

$$D_T = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}; \quad D_s = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (7.5.10)$$

где  $D_T$  и  $D_s$  - продольная и поперечная деформации, обусловленные касательными турбулентными напряжениями.

Теперь остается преобразовать уравнение баланса кинетической энергии в рамках "К-теории" (с  $K_s$  и  $K_z$ ).

Как было показано при малых  $\rho'$ :

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{\theta'}{\theta}. \quad (7.5.11)$$

Тогда, разделив (7.4.37) на  $\bar{\rho}$ , получим

$$B = -\overline{\rho' w'} \frac{g}{\rho}. \quad (7.5.12)$$

Воспользовавшись К-теорией для турбулентного потока массы, получим

$$\overline{\rho' w'} = -K_\rho \frac{\partial \rho_n}{\partial z},$$

где  $\rho_n$  - потенциальная плотность. При этом полагаем  $K_\rho = \alpha_\rho K_z$

Из упрощенного уравнения для  $Db / Dt$  вытекает

$$\begin{aligned} \frac{Db}{Dt} = & K_z \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + K_s (D_T^2 + D_s^2) + \frac{g}{\rho} \alpha_p K_z \frac{\partial \rho_n}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial b}{\partial z} - \varepsilon_t \end{aligned} \quad (7.5.13)$$

Первый член уравнения (7.5) описывает передачу энергии от среднего движения турбулентным вихрям за счет потери устойчивости сдвиговых волн и образования турбулентных возмущений с характерным масштабом  $l$ . Второй член - растяжение турбулентного вихря в форме эллипсоида, обусловленное деформацией скорости и образование новых эллипсоидов меньшего размера. За счет вертикального перемешивания наблюдается однонаправленный поток кинетической энергии от среднего к пульсационному движению. Крупномасштабное движение поддерживает энергетически турбулентные вихри. Обмен энергией при горизонтальном турбулентном перемешивании может идти в двух направлениях:

- 1)  $K_S > 0$  (от среднего движения к вихрям),
- 2)  $K_S < 0$  (от вихрей к среднему).

Последнее, например, наблюдается в явлениях общей циркуляции атмосферы, когда циклоны и антициклоны энергетически поддерживают зональный поток. Третий член - работа силы плавучести:  $\partial \rho_n / \partial z > 0$  (неустойчивая стратификация, источник энергии вихрей),  $\partial \rho_n / \partial z < 0$  (устойчивая стратификация, затраты кинетической энергии вихрей, сток энергии вихрей). Четвертый член (сумма производных по осям  $x$  и  $y$ ) - обмен кинетической энергии вихрей с окружающей воздушной массой за счет их горизонтального перемешивания. Пятый член - обмен кинетической энергии между слоями по вертикали за счет вертикального турбулентного обмена. Шестой член - диссипация кинетической энергии турбулентных вихрей в тепловую. Для величины  $\varepsilon_t$  необходимо построить специальное уравнение. В отличие от процедуры построения уравнения для  $l$ , где необходимо привлечь аппарат корреляционных функций, уравнение для  $\varepsilon_t$  строится аналогично уравнению баланса кинетической энергии на основе уравнений Навье-Стокса и Рейнольдса (строится уравнение движения для пульсаций скорости и из комбинации их пространственных производных конструируется величина  $\varepsilon_t \equiv \varepsilon$ ):

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \overline{\left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)^2}, \quad (7.5.14)$$



$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{b} \left( -\overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} + c_d \frac{g}{\rho} \overline{v'_\alpha \rho'} \cdot \delta_{\alpha 3} \right) + c_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( -\frac{b}{\varepsilon} \overline{v'_\alpha v'_\beta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\beta} \right) + c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon^2}{b}. \quad (7.5.15)$$

После введения соотношений "*K-теории*" для вторых моментов получим

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\varepsilon}{b} \left\{ \alpha_1 K_z \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + \alpha_2 K_s (D_T^2 + D_s^2) - \alpha_3 \frac{g}{\rho} K_z \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial z} - \alpha_4 \varepsilon \right\} + \\ + \alpha_5 \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \alpha_6 \left( \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (7.5.16)$$

Здесь и далее величины  $c$  и  $\alpha$  с индексами экспериментально определенные константы.

Итак, мы получили уравнения для  $b$ ,  $l$  и  $\varepsilon$ . Величину  $K_s$  мы уже определили, остается определить  $K_z$ . Из соотношения Колмогорова определяющими для турбулентного потока являются лишь два параметра, с помощью которых на основании теории размерности и подобия определяется третий. В качестве определяющих на основании анализа уравнений для характерного размера вихрей и скорости диссипации следует взять  $b$  и  $\varepsilon$ . Тогда

$$K_z = \alpha_\varepsilon b^2 / \varepsilon. \quad (7.5.17)$$

Запишем теперь все полученные с использованием соотношений "*K-теории*" уравнения гидротермодинамики.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - 2(\omega_y \bar{w} - \omega_z \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (K_s D_T) + \frac{\partial}{\partial y} (K_s D_s) + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (7.5.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - 2(\omega_z \bar{u} - \omega_x \bar{w}) + \frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (K_s D_s) - \frac{\partial}{\partial y} (K_s D_T) + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (7.5.19)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g, \quad (7.5.20)$$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{T}, \bar{p}, \bar{q}), \quad (7.5.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_0 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi_0 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi_0 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon_0}{\bar{\rho} c_p}, \end{aligned} \quad (7.5.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \alpha_q \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon_q}{\bar{\rho}}, \end{aligned} \quad (7.5.23)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} \bar{u} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \bar{w} = 0, \quad (7.5.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{Db}{Dt} = K_z \cdot \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + K_s (D_T^2 + D_s^2) + \frac{g}{\bar{\rho}} \alpha_T K_z \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial b}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial b}{\partial z} - \varepsilon, \end{aligned} \quad (7.5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\varepsilon}{b} \left\{ \alpha_1 K_z \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + \alpha_2 K_s (D_T^2 + D_s^2) - \alpha_3 \frac{g}{\bar{\rho}} K_z \frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial z} - \alpha_4 \varepsilon \right\} + \\ + \alpha_5 \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \alpha_6 \left( \frac{\partial}{\partial x} K_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_s \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (7.5.26)$$

$$K_z = \alpha_\varepsilon b^2 / \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_n}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}. \quad (7.5.27)$$

Здесь:  $\varepsilon_0$  - неадиабатический приток тепла,

$\varepsilon_q$  - приток примеси за счет внешних воздействий,

$c$  - скорость звука.

Эта система замкнута и имеет единственное решение. Конкретные частные решения этой системы дифференциальных уравнений могут быть получены после постановки краевых и начальных условий для каждой прикладной задачи геофизической гидродинамики.

## 7.6. Теория турбулентности для СГО-геофизического течения

Рассмотренные механизмы и количественное описание относятся к геофизической турбулентности, для которой специфично влияние вращения Земли и стратификация среды. Как уже указывалось, геофизическая турбулентность реализуется в природных течениях в земной атмосфере, Мировом океане, морях, реках, озерах. Весьма продуктивным подходом, в смысле прикладной значимости, представляется локальное описание геофизической турбулентности, для которой пригодна модель статистически *стационарного и горизонтально-однородного (СГО) турбулентного течения*. Применительно к осредненным гидродинамическим величинам (включая геострофический ветер) это означает, что характеристики *СГО-течения* зависят лишь от вертикальной координаты. Для стационарной, горизонтально-однородной модели уравнения Рейнольдса приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{xz} + \rho_0 v \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + f(\bar{v} - v_g) &= 0, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{yz} + \rho_0 v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - f(\bar{u} - u_g) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \sigma_w^2 + \bar{p}) &= -g\bar{\rho} + 2\omega_y \rho_0 \bar{u}, \\ Q_z - c_p \rho_0 \chi \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = const, \quad I_z - \rho_0 D \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} &= const. \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

Напомним, что  $\rho_0$ -плотность при температуре  $4^0\text{C}$  и стандартном давлении 1013,25 гПа при отсутствии термодинамически активной примеси  $\tau_{xz} = -\overline{\rho u'w'}$ ,  $\tau_{yz} = -\overline{\rho v'w'}$ ,  $Q_z = \overline{\rho c_p \Gamma'w'}$ ,  $M_z = \overline{\rho'w'}$ ,  $I_z = \overline{\rho s'w'}$  (последние две величины - турбулентные потоки массы и пассивной примеси);  $\sigma_A^2 = \overline{A'^2}$ , где  $A$  - любая скалярная гидродинамическая величина.

Обратим внимание, что осредненное СГО-течение негидростатично, и в нем полные вертикальные потоки тепла и примеси не меняются по вертикали (последнее утверждение остается в силе и при учете лучистого потока тепла).

Воспользовавшись уравнениями для вторых моментов, получим в СГО модели уравнения для диагональных членов тензора напряжений Рейнольдса, которые применялись для построения уравнения для кинетической энергии турбулентных вихрей. Указанные уравнения имеют вид:

$$\tau_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho_0 \varepsilon_u - p' \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} - p' \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{\rho_0 u'^2 w'} - \rho_0 v \frac{\partial \sigma_u^2}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \rho_0 \varepsilon_v + p' \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \overline{v'^2 w'} - \rho_0 v \frac{\partial \sigma_v^2}{\partial z} \right) &= 0, \\ gM_z - \rho_0 \varepsilon_w + p' \frac{\partial \bar{w}'}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \overline{w'^3} + 2 \overline{p' w'} - \rho_0 v \frac{\partial \sigma_w^2}{\partial z} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

где  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_v$  и  $\varepsilon_w$  - скорость диссипации соответственно для  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_v^2$  и  $\sigma_w^2$ , например

$$\varepsilon_u = \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 \right] \nu.$$

Из анализа (7.6.2) следует, что члены  $\overline{p' \frac{\partial v'}{\partial y}}$  и  $\overline{p' \frac{\partial w'}{\partial z}}$ , входящие в уравнения для  $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_v^2$  и  $\sigma_w^2$  с противоположными знаками, характеризуют обмен энергией между продольными и поперечными составляющими скорости ( $u' \leftrightarrow v'$ ,  $u' \leftrightarrow w'$ ). При этом продольные пульсации скорости получают энергию от осредненного движения, а затем передают ее поперечным составляющим благодаря работе пульсаций давления. Таким образом работа пульсаций давления приводит к перераспределению энергии между турбулентными движениями различных направлений, создавая тенденцию к состоянию изотропии, когда энергия турбулентных вихрей не зависит от направления. Это легко показать для случая плоскопараллельного течения вдоль оси  $x$  с безразличной стратификацией ( $\bar{v} = M_z = 0$ ), проинтегрировав уравнения (7.6.2) по произвольному объему, на границах которого турбулентные потоки отсутствуют. Тогда

$$\begin{aligned} \int \overline{p' \frac{\partial v'}{\partial y}} dV &= \int \rho_0 \varepsilon_v dV > 0, & \int \overline{p' \frac{\partial w'}{\partial z}} dV &= \int \rho_0 \varepsilon_w dV > 0, \\ \int \tau_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dV &= \int \left( \overline{p' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{p' \frac{\partial w'}{\partial z}} + \rho_0 \varepsilon_u \right) dV = \int \rho_0 (\varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w) dV = \int \rho_0 \varepsilon dV > 0, \\ \varepsilon &= \varepsilon_u + \varepsilon_v + \varepsilon_w. \end{aligned} \quad (7.6.3)$$

Таким образом, за счет осредненного движения могут непосредственно генерироваться продольные пульсации скорости, которые “питают” энергией поперечные (горизонтальные и вертикальные) пульсации. Вертикальные пульсации могут также генерироваться непосредственно за счет потенциальной энергии стратифицированной среды, когда она неустойчива. При устойчивой стратификации вертикальные пульсации теряют энергию, приобретен-

ную от продольных горизонтальных пульсаций, на работу против сил плавучести.

Естественно, что если записать уравнение для полной кинетической энергии турбулентных вихрей для единицы массы, то в нем эффекты перераспределения энергии между компонентами будут отсутствовать и уравнение для  $b = \frac{1}{2} \overline{v'_\alpha v'_\alpha}$  в СГО-модели примет вид:

$$\left( \tau_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) (1 - Rf) - \rho_0 \varepsilon - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \overline{b'w'} + \overline{p'w'} - \rho_0 v \frac{\partial b}{\partial z} \right) = 0,$$

$$Rf = -gM_z \left( \tau_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^{-1}, \quad (7.6.4)$$

где  $b' = \frac{1}{2} v'_\alpha v'_\alpha$ ,

$Rf$  - число Ричардсона.

Если вернуться к нестационарному уравнению для интенсивности турбулентности и представить его в виде

$$\frac{Db}{Dt} = A \left[ 1 - Rf - \frac{c}{A} \right],$$

где  $A = \tau_{xz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ ,  $c = \rho_0 \varepsilon - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \overline{b'w'} + \overline{p'w'} - \rho_0 v \frac{\partial b}{\partial z} \right)$ .

Предположим, что  $\frac{c}{A} = (\sigma - 1)Rf$ , тогда можно получить *критерии развития турбулентности в потоке жидкости*:

- а)  $Rf < Rf_{кр}$ ,  $\frac{Db}{Dt} > 0$  - турбулентность развивается со временем,
- б)  $Rf > Rf_{кр}$ ,  $\frac{Db}{Dt} < 0$  - турбулентность затухает со временем,
- в)  $Rf = Rf_{кр}$ ,  $\frac{Db}{Dt} = 0$  - турбулентность сохраняется без изменений со временем.

При этом  $Rf_{кр} = 1 - \frac{c}{A} < 1$ . В случае СГО-модели  $Rf = Rf_{кр}$ , и баланс кинетической турбулентной энергии выполняется только при условии, что кинетическая энергия среднего движения, передаваемая турбулентным вихрям, превышает работу сил плавучести настолько, что компенсирует расходы на диссипацию в тепло, на эффекты переноса кинетической энергии турбулент-

ными вихрями и молекулярным движением и на работу пульсаций сил давления.

Как следует из выписанных уравнений для СГО- турбулентного течения, существенным физическим фактором в балансе кинетической энергии турбулентных вихрей является скорость диссипации “ $\varepsilon$ ”. Для случая СГО-течения уравнение для “ $\varepsilon$ ” может быть записано в виде

$$\frac{\varepsilon}{b} \left\{ \tau_{xz} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) + \tau_{yz} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - c_m \cdot g \cdot M_z \right\} + c_\varepsilon \frac{\bar{\rho} \varepsilon^2}{b} - c_\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \overline{\varepsilon' w'} - \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = 0. \quad (7.6.5)$$

Основным упрощением математического описания СГО-турбулентного потока является использование физически обоснованной гипотезы Колмогорова, согласно которой одноточечные вторые моменты производных от флуктуаций гидродинамических величин однозначно выражаются через интенсивность турбулентности ( $b$ ) и характерный размер турбулентных вихрей ( $l$ ). Величину “ $l$ ” согласно гипотезе Колмогорова можно выразить через “ $\varepsilon$ ” и “ $b$ ” и таким образом связать три определяющие внутренние характеристики турбулентного потока

$$\varepsilon = \alpha_\varepsilon \frac{b^{3/2}}{l}. \quad (7.6.6)$$

Вторым упрощением является пренебрежение “потоками вторых моментов”, создаваемых турбулентностью (третьими моментами пульсаций) и молекулярными эффектами. Третьим упрощением является пренебрежение действием силы Кориолиса на пульсационное движение.

С учетом приведенных упрощений система уравнений СГО-модели имеет вид:

- для диагональных элементов тензора напряжений Рейнольдса ( $\sigma_u^2$ ,  $\sigma_v^2$  и  $\sigma_w^2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}}{\rho_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= c_1 b_1^3 l^{-1} + c_2 b_1 l^{-1} \sigma_u^2, \\ \frac{\tau_{yz}}{\rho_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= c_1 b_1^3 l^{-1} + c_2 b_1 l^{-1} \sigma_v^2, \\ \frac{g}{\theta_0} \frac{Q}{c_p \rho_0} &= c_3 b_1^3 l^{-1} + c_2 b_1 l^{-1} \sigma_w^2; \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

- для недиагональных элементов тензора напряжений Рейнольдса

$$2c_3 b_1 l^{-1} \frac{\tau_{xz}}{\rho_0} + \frac{g}{\theta_0} \frac{Q_x}{c_p \rho_0} = \sigma_w^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z},$$

$$2c_3b_1l^{-1} \frac{\tau_{yz}}{\rho_0} + \frac{g}{\theta_0} \frac{Q_y}{c_p\rho_0} = \sigma_w^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial z},$$

$$2c_3b_1l^{-1} \frac{\tau_{xy}}{\rho_0} = - \left( \frac{\tau_{xz}}{\rho_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\tau_{yz}}{\rho_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right); \quad (7.6.8)$$

- для компонент вектора турбулентного потока тепла

$$c_4b_1l^{-1} \frac{Q_x}{c_p\rho_0} = \frac{\tau_{xz}}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{Q}{c_p\rho_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z},$$

$$c_4b_1l^{-1} \frac{Q_y}{c_p\rho_0} = \frac{\tau_{yz}}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{Q}{c_p\rho_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z},$$

$$c_4b_1l^{-1} \frac{Q}{c_p\rho} = \frac{g}{\theta_0} \sigma_T^2 - \sigma_w^2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - c_5b_1^2l^{-1} \sigma_T; \quad (7.6.9)$$

- для дисперсий пульсаций потенциальной температуры

$$c_6b_1l^{-1} \sigma_T^2 = - \frac{Q}{c_p\rho_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}.$$

Здесь  $b_1 = b^{1/2}$ .

К указанным уравнениям добавляются два уравнения движения для определения  $\bar{u}(z)$  и  $\bar{v}(z)$ , которые при сделанных допущениях принимают вид:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -f(\bar{v} + v_g),$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = f(\bar{u} - u_g). \quad (7.6.10)$$

Третье уравнение движения (7.6.1) служит для определения средней плотности. Среднее давление определяется из уравнения состояния рассматриваемой среды.

Уравнение притока тепла, как указывалось ранее, выражается в виде постоянного значения вертикальной составляющей турбулентного потока тепла

$$\frac{Q}{c_p\rho_0} = const. \quad (7.6.11)$$

Тогда уравнение для дисперсий пульсаций потенциальной температуры можно использовать для определения зависимости средней потенциальной температуры от вертикальной координаты ( $\bar{\theta}(z)$ ).

Таким образом, записана замкнутая система СГО-модели для определения  $\bar{u}(z)$ ,  $\bar{v}(z)$ ,  $\bar{\theta}(z)$ , шести элементов тензора турбулентных напряжений Рейнольдса, горизонтальных составляющих вектора турбулентного потока тепла (вертикальная составляющая является заданной), дисперсий пульсаций потенциальной температуры.

Полученная система уравнений подтверждает возможность использования “К-теории” геофизической турбулентности. Действительно, из соотношений (7.6.8) и (7.6.9) можно установить связь турбулентных касательных напряжений с производными средней скорости по вертикальной координате

$$\tau_{xz} = \rho_0 K \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = \rho_0 K \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\rho_0 K l}{c_2 b} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (7.6.12)$$

и между турбулентным потоком тепла и вертикальным градиентом потенциальной температуры

$$Q = -c_p \rho_0 K_0 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}. \quad (7.6.13)$$

Следует отметить, что в приведенных формулах также принята возможность замены  $\bar{\rho}$  на  $\rho_0$  в тех случаях, где это не приводит к существенным погрешностям.

Соотношения (7.6.12) - (7.6.13) выполняются, если коэффициент вертикального турбулентного перемешивания следующим образом связан с параметрами СГО-турбулентного течения

$$K = \left( \frac{Q}{c_p \rho_0} + \frac{c_4 b_1 l^{-1}}{g / \theta_0} \sigma_w^2 \right) \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{2c_2 c_4 b_1^2 l^{-2}}{g / \theta_0} \right)^{-1},$$

$$K_0 = \alpha K. \quad (7.6.14)$$

Следует подчеркнуть, что предложенный подход выражает лишь принципиальную возможность построения замкнутой системы уравнений турбулентного потока. Однако он содержит в себе некоторые противоречия. Например, чтобы прийти в формуле для “К” в гипотезе Колмогорова  $K = \alpha_1 b_1 l$  необходимо, чтобы множитель  $\alpha_1$  зависел от характеристик турбулентности, что нарушает соображения теории подобия. На наш взгляд, пренебрежение “потоками вторых моментов”, сводящее систему (7.6.7) - (7.6.9) к системе алгебраических уравнений является слишком грубым.

Таким образом, сформулированы подходы количественного описания геофизических пограничных слоев в рамках “К-теории” и СГО-теории. Для решения выписанных замкнутых систем уравнений необходимо сформули-



ровать граничные и начальные условия, которые определяются содержанием конкретных прикладных задач.

### 7.7. Квазидвумерная турбулентность

До сих пор рассматривалось локальное влияние вращения Земли на динамику геофизических объектов. Теперь рассмотрим геофизические процессы, для которых существенны изменения параметра Кориолиса вдоль меридиана  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ . Эти изменения создают меридиональную возвращающую силу, которая порождает длинные волны Россби, образующие квазидвумерную макротурбулентность (циклоны и антициклоны в атмосфере, синоптические вихри в океане).

Рассмотрим адиабатические процессы, в которых сохраняются энтропия  $\eta$  и потенциальный вихрь  $\Omega_*$

$$\frac{d_h \eta}{dt} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \frac{d_h \Omega_*}{dt} + w \frac{\partial \Omega_*}{\partial z} = 0. \quad (7.7.1)$$

Если исключить из (7.7.1)  $w$  то получим

$$\frac{d_h \Omega_*}{dt} - \left( \frac{\partial \Omega_*}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^{-1} \frac{d_h \eta}{dt} = 0, \quad (7.7.1a)$$

где  $\frac{d_h}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$  - полная производная относительно горизонтального движения.

Как было показано ранее, крупномасштабные движения геофизических объектов можно считать бездивергентными и тогда сохраняющейся величиной будет потенциальный вихрь  $\Omega_* = \Omega_a \cdot \nabla \eta$ , где  $\Omega_a = \text{rot} \vec{V} + 2\vec{\omega}$  - абсолютный вихрь. Кроме того, т.к. поле  $\eta(x, y, z)$  квазигоризонтально и вектор  $\nabla \eta$  квазивертикален, то  $\Omega_* = \Omega_a \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z}$ . Подставим последнее выражение в (7.7.1a) и получим

$$\frac{d_h}{dt} \left( \Omega_a \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \Omega_a \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^{-1} \frac{d_h \eta}{dt} = 0. \quad (7.7.2)$$

Если представить, что  $\eta(x, y, z, t) = \eta_0(z) + \eta'(x, y, t)$ , и учесть, что  $\frac{\partial(\ln \Omega_{az})}{\partial z} \ll \frac{\partial(\ln \eta_0)}{\partial z}$ , то закон сохранения принимает следующий вид:

$$\frac{d_n}{dt} \left( \ln \Omega_{az} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\eta'}{\partial \eta_0 / \partial z} \right) \cong 0. \quad (7.7.3)$$

Введем в приближенный закон сохранения (7.7.3) соотношения, вытекающие из квазигидростатичности и квазигеострофичности крупномасштабных движений геофизических объектов,

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial z} \cong \left( \frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_0 \frac{\rho_0 c_0^2 N^2}{g}, \quad \eta' \cong \left( \frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_0 \frac{c_0^2}{g} \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad p' \equiv \rho_0 f \psi, \quad (7.7.4)$$

$$\eta' / (\partial \eta_0 / \partial z) \cong (\rho_0 N^2)^{-1} \partial p' / \partial z = N^{-2} f \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad |\text{rot}_z \vec{V}| \ll f. \quad (7.7.5)$$

Здесь:  $\psi$  - функция тока горизонтального течения,  $N$  - частота Брента-Вайсяла. Тогда закон сохранения примет вид:

$$\frac{d_h}{dt} \left( \Omega_{az} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{H^2}{L_R^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0 \quad (7.7.6)$$

где  $H = c_0^2 / \partial g$ ,  $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{g \rho_0}{c^2} \right)$ ,  $c^2 = \partial p / \rho_0$ ;

$L_R = HNf^{-1}$  - радиус деформации Россби.

Так как

$$\Omega_{az} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + f = \Delta_h \psi + f, \quad (7.7.7)$$

то уравнение, описывающее эволюцию циклонов и антициклонов в атмосфере и синоптических вихрей в океане, можно представить в виде

$$\frac{\partial L\psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial L\psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial L\psi}{\partial y} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} = F, \quad (7.7.8)$$

$$L\psi = \Delta_h \psi + \frac{\partial}{\partial z} \frac{H^2}{L_R^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Таким образом, получено уравнение для количественной оценки индивидуальных реализаций квазидвумерной турбулентности. Это уравнение написано в общем виде путем введения в правую часть величины  $F$ , характеризующей неадиабатические процессы. Как уже указывалось, второй и третий члены в левой части (7.7.8) выражают эффекты вихревых (макротурбулентных), а четвертый - волновых эффектов (волны Россби). Отношение суммы второго и третьего слагаемых к четвертому ( $\delta$ ) равно отношению скорости движения жидкости  $U$  к фазовой скорости волн  $c(L) \cong \beta L^2 / 2$ , т.е.  $\delta = 2U / \beta L^2$ .

При  $\delta < 1$  в потоке доминируют волны, при  $\delta > 1$  в потоке доминируют вихри. Положив  $\delta = 1$ , можно определить масштаб разделения влияния указанных движений

$$L_{\beta} = (2U / \beta)^{1/2} \quad (7.7.9)$$

Из (7.7.9) следует, что для средних широт, где  $\beta = 2 \cdot 10^{-8} 1/(\text{км} \cdot \text{с})$ , в атмосфере, при  $U \approx 10 \text{ м/с}$ ,  $L_{\beta} = 10^3 \text{ км}$ , а в океане, где  $U \approx 10^{-1} \text{ м/с}$   $L_{\beta} = 10^2 \text{ км}$ . Из определения разделяющего масштаба  $L_{\beta}$  вытекает, что при  $L < L_{\beta}$  третьим слагаемым, т.е. эффектом волн, в уравнении можно пренебречь. Оценки эффективной толщины и радиуса деформации дают  $H \cong 10 \text{ км}$  и  $L_R \cong 2000 \text{ км}$  в атмосфере и  $H \cong 5 \text{ км}$  и  $L_R \cong 50 \text{ км}$  в океане. Т.к. крупномасштабные процессы в геофизических системах характеризуются масштабами  $L \gg H$ , то макротурбулентность квазидвумерна, однако при этом свойственные ей гидродинамические поля существенно меняются по вертикали, а в ее динамике существенную роль играют вертикальные движения, связывающие воедино горизонтальные поля на различных уровнях. Если кроме соотношения  $L \gg H$  выполняется  $L > L_R$ , то в операторе  $L\psi$  существенную роль играет второе слагаемое. Это означает, что слои, расположенные на различных уровнях в атмосфере и океане, интенсивно взаимодействуют по вертикали, и вертикальные неоднородности размываются. При этом геофизические объекты эволюционируют как единый слой, т.е. наблюдается баротропная структура. При  $L \ll L_R$   $L\psi \approx \Delta_h \psi$ , каждый слой эволюционирует независимо от выше и ниже лежащих, вертикальные неоднородности существуют длительный период, т.е. наблюдается бароклинная структура.

Таким образом, когда в геофизической системе доминируют вихревые процессы, связанные с макротурбулентным обменом, характерный масштаб макротурбулентных возмущений удовлетворяет соотношению  $L \ll L_{\beta} < L_R$ . Тогда уравнение (7.7.8) переходит в уравнение для функции тока двумерного течения несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \Delta_h \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta_h \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta_h \psi}{\partial y} = \nu \Delta_h \Delta_h \psi, \quad (7.7.10)$$

где в качестве правой части  $F$  взято выражение, описывающее действие молекулярной вязкости. Двумерная геострофическая турбулентность, описываемая уравнением (7.7.10), существенно отличается от трехмерной. Для нее характерным является сохранение не только кинетической энергии, но и вихря скорости. В качестве аналога кинетической энергии для вихря скорости выбирается средний квадрат вихря, половина которого называется *энтрофией*.

В вязкой жидкости осредненная кинетическая энергия и энстрофия уменьшаются со временем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_m}{\partial t} &= -2\nu\Omega_e = -\varepsilon, & \frac{\partial \Omega_e}{\partial t} &= -\nu \overline{|\nabla \Delta_h \psi|^2} = -\varepsilon_\Omega, \\ E_m &= \frac{1}{2} \overline{|\nabla \psi|^2}, & \Omega_e &= \frac{1}{2} \overline{(\Delta_n \psi)^2}. \end{aligned} \quad (7.7.11)$$

Для идеальной жидкости ( $\nu \rightarrow 0$ ) и как следует из (7.7.11) выполняются законы сохранения кинетической энергии и энстрофии. Введем средние для спектра энергии  $E(k, t)$  и спектра энстрофии  $k^2 E(k, t)$  волновые числа

$$\begin{aligned} k_1(t) &= E_m^{-1} \int_0^\infty k E(k, t) dk, \\ k_2(t) &= \Omega_e^{-1} \int_0^\infty k^3 E(k, t) dk, \end{aligned} \quad (7.7.12)$$

для которых выполняются неравенства

$$k_1(t) \cdot k_2(t) \geq \Omega_e / E_m. \quad (7.7.13)$$

Неравенства (7.7.13) показывают, что перенос энергии в сторону малых  $k$  (уменьшение  $k_1$ ) должен сопровождаться переносом энстрофии в сторону больших  $k$  (увеличением  $k_2$ ). При таких каскадных переносах энергия не может накапливаться в движениях малых масштабов, а энстрофия - в движениях больших масштабов. В двумерной турбулентности также выделяется инерционный интервал с постоянной скоростью переноса энергии и энстрофии. На крупномасштабном конце спектра двумерной турбулентности должен выполняться закон  $-5/3$ , как и в трехмерной турбулентности, но с противоположным направлением спектрального переноса энергии - от малых к большим масштабам. На мелкомасштабном конце инерционного интервала должен выполняться закон “минус третьей степени”

$$E(k) = c_1 \varepsilon_\omega^{2/3} k^{-3} \quad (7.7.14)$$

с переносом энстрофии от больших к малым масштабам. Таким образом, квазидвумерная макротурбулентность обладает своими специфическими особенностями, которые следует учитывать при количественном описании геофизических процессов.

В заключение укажем, что в земной атмосфере, где  $L_\beta < L_R$ , вихри зарождаются преимущественно вследствие бароклинной неустойчивости гло-

бальных течений и эволюционируют по схеме: бароклинные вихри - бароклинные волны - баротропные волны. В Мировом океане, где  $L_\beta > L_R$ , вихри зарождаются за счет бароклинной неустойчивости крупномасштабных течений и в немалой степени за счет топографических эффектов, отражения волн от берегов и вследствие атмосферных воздействий. Эволюция при этом происходит по схеме: бароклинные вихри - баротропные вихри - баротропные волны.

Бароклинные и баротропные волны, динамика стратифицированной жидкости на сфере будут рассмотрены во второй части настоящего учебника.

