УДК 551.509.328 + 517.938
**А.В.Глушков,** *д.ф.-м.н.*
*Одесский государственный экологический университет*

# АНАЛИЗ И ПРОГНОЗ АНТРОПОГЕННОГО ВЛИЯНИЯ НА ВОЗДУШНЫЙ БАССЕЙН ПРОМЫШЛЕННОГО ГОРОДА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ХАОСА: КОНЦЕПЦИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ ЛЯПУНОВА

*С целью развития теоретических основ аппарата анализа и прогноза влияния антропогенной нагрузки на состояние атмосферы промышленного города и разработки новой схемы моделирования свойств полей концентраций загрязняющих веществ на основе методов теории хаоса выполнен анализ физических аспектов восстановления фазового пространства и изложена усовершенствованная концепция размерностей Ляпунова.*
***Ключевые слова:*** *атмосфера города, экологическое состояние, загрязнение, хаос, показатели Ляпунова*

## 1. Введение.

К числу наиболее важных и фундаментальных проблем современной прикладной экологии, урбоэкологии, а также гидрометеорологии относится проблема анализа и прогноза влияния антропогенной нагрузки на состояние атмосферы промышленного города и разработка адекватных схем моделирования свойств полей концентраций загрязняющих воздушный бассейн веществ с учетом как антропогенных, так и метеорологических и физико-химических факторов. В [1] дан обзор современных моделей анализа и прогноза влияния антропогенной нагрузки на состояние атмосферы промышленного города и указано, что большая часть моделей является или детерминистическими моделями, или основана на простых статистических регрессиях. Успешность этих моделей, однако, ограничивается как их неспособностью описать нелинейные характеристики загрязняющих веществ, так и недостаточным пониманием вовлеченных физических и химических процессов. В современной теории прогнозов временной ряд изменения какой-либо динамической характеристики сложной системы рассматривается как реализация случайного процесса, когда случайность является результатом сложного движения с многими независимыми степенями свободы. Альтернативой случайности является хаос, который имеет место даже в очень простых детерминистических системах. Хотя использование методов теории хаоса устанавливает определенное фундаментальное ограничение на долгосрочный прогноз (см., напр., [1-20]), тем не менее, как было показано в целой серии работ (см., напр., [1-7]), данные методы могут быть использованы для кратко- или средне-срочного прогноза. В предыдущих наших работах было показано (см. [2-4,7]), что для временных изменений концентраций двуокиси азота ($NO_2$) и сернистого ангидрида ($SO_2$) на двух постах Гданьского региона имеет место низкоразмерный хаос, что позволяет применить для них метод нелинейного прогноза. Такая методология с успехом использовался при анализе многих гидрометеорологических характеристик (см., напр., [5,6,8-12,17]).

Целью нашей работы, продолжающей исследования [1-4,7], является изложение и развитие теоретических основ общего аппарата анализа и прогноза влияния антропогенной нагрузки на состояние атмосферы промышленного города и разработка новой количественной схемы моделирования свойств полей концентраций загрязняющих воздушный бассейн веществ на основе методов теории хаоса. Общий анализ и прогноз включают в себя исследование временных рядов концентраций загрязняющих веществ, проведение тестов на наличие хаоса в системе, восстановление фазового пространства системы, восстановление спектра размерностей Ляпунова и на его основе расчет размерности Калана-Йорка, энтропии Колмогорова и построение модели краткосрочного прогноза состояния атмосферы промышленного города. В данной статье выполнен анализ физических аспектов восстановления фазового пространства и изложена усовершенствованная концепция размерностей Ляпунова.

## 2. Общая методика анализа хаотических систем: Концепция размерностей Ляпунова

Когда фазовое пространство восстановлено для временного ряда, возникает важный вопрос о том, какова физическая первопричина соответствующего поведения системы. В случае с линейной системой можно применить Фурье-анализ, по результатам которого в качестве характеристик физической системы можно использовать максимумы спектра. При этом, если такой анализ осуществлять, начиная с разных точек во времени, то фаза сигнала изменяется, а положение пиков спектре – нет. Поэтому частотные характеристики линейного сигнала можно рассматривать как инварианты динамики и по ним сравнивать два различных временных ряда. Для нелинейной системы с хаотическим режимом использовать спектральные характеристики проблематично, поэтому необходимо выбрать некие другие инварианты, которые не должны изменяться в процессе динамики системы и для которых должно выполняться условие их неизменности при небольших изменениях начальных условий. Среди этих инвариантов есть топологические (различные фрактальные размерности) и динамические (локальные и глобальные размерности Ляпунова) [1,16-20]. Последние очень полезны при рассмотрении физики процесса и, к тому же, определяют предсказуемость нелинейной системы. Строго говоря, для хаотических систем орбиты непредсказуемы, что связано с неустойчивостью в фазовом пространстве. Однако, существует ограниченная предсказуемость хаотического движения физической системы, определяемая глобальными и локальными размерностями Ляпунова, которые можно определить, основываясь только на данных измерений.

Одним из признаков хаотического режима является восприимчивость любой орбиты к небольшим изменениям начальных условий или малым возмущениям, возникающим вдоль орбиты. Вследствие этой восприимчивости, непосредственно сравнивать две орбиты нелинейной системы друг с другом неуместно, так как в общем случае они полностью некоррелированы. Однако аттрактор будет один и тот же. Он не зависит от начальных условий и поэтому может рассматриваться в качестве аналога частотных характеристик Фурье в случае линейной системы.

Использование только топологических или только динамических инвариантов для того, чтобы охарактеризовать аттрактор, едва ли даст «полный» набор инвариантов, поэтому необходимо использовать их вместе. Одна из фрактальных размерностей – корреляционная – была описана ранее [1-4], поэтому далее мы рассмотрим концепцию размерностей Ляпунова. Разумеется, концепция размерностей Ляпунова существовала задолго до создания теории хаоса и была разработана для определения устойчивости линейных и нелинейных систем [16-19]. Размерности Ляпунова определяются как логарифмы абсолютных величин собственных значений линеаризованной динамики, осредненной по аттрактору. Отрицательные размерности указывают на локальную среднюю скорость сжатия, а положительные – расширения системы. В теории хаоса спектр размерностей Ляпунова рассматривается как мера воздействия возмущений начальных условий динамической системы. Отметим также, что в диссипативной системе, которой является и хаотическая, одновременно существуют как положительные, так и отрицательные (определяющие диссипативность) размерности. Так как размерности Ляпунова определяются как асимптотические средние скорости, они не зависят от начальных условий и выбора траектории, поэтому рассматриваются как инвариантные меры аттрактора. Если получить весь спектр размерностей Ляпунова, то можно определить другие инварианты системы – энтропию Колмогорова и размерность аттрактора. Первый из них является средней скоростью, при которой информация о состоянии не сохраняется с течением времени, т.е. является мерой предсказуемости, и может быть рассчитан как сумма всех положительных размерностей Ляпунова [16]. Оценка размерности аттрактора обеспечивается гипотезой Каплана и Йорка [10]

$$d_L = j + \sum_{\alpha=1}^{j} \lambda_\alpha / |\lambda_{j+1}|, \tag{1}$$

где $j$ выбирается таким, что $\sum_{\alpha=1}^{j} \lambda_\alpha > 0$ и $\sum_{\alpha=1}^{j+1} \lambda_\alpha < 0$, а размерности Ляпунова $\lambda_\alpha$ приведены в нисходящем порядке. Рассмотрим далее метод расчета спектра размерностей Ляпунова на основе якобиана отображения. Изменения со временем вектора $\mathbf{y}(n)$ определяются векторным уравнением

$$\mathbf{y}(n + z) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(n + z)), \tag{2}$$

где $\mathbf{F}$ – некоторая, обычно, нелинейная векторная функция. Эволюция малых смещений векторов в касательном пространстве определяется линеаризованным уравнением

$$\delta\mathbf{y}(n + z) = D\mathbf{F}(\mathbf{y}(n))\cdot\delta\mathbf{y}(n), \tag{3}$$

где $D\mathbf{F}$ – якобиан $\mathbf{F}$. Предположим, что мы начинаем двигаться от некой точки в фазовом пространстве по орбите, которая проходит через эту точку. Спустя $S$ шагов по времени начальное возмущение возрастет (или уменьшится) до

$$\delta\mathbf{y}(n + Sz) = D\mathbf{F}(\mathbf{y}(n + (S - 1)z))\ldots D\mathbf{F}(\mathbf{y}(n))\cdot\delta\mathbf{y}(n) = \mathbf{Y}(\mathbf{y}(n), S)\ \delta\mathbf{y}(n). \tag{4}$$

Согласно мультипликативной эргодической теореме Оселедца [17], собственные значения ортогональной матрицы $\mathbf{Y}(\mathbf{y}(n),S)\cdot\mathbf{Y}(\mathbf{y}(n),S)^T$ таковы, что

$$\lim_{S\to\infty}\left[\mathbf{Y}(\mathbf{y}(n),S)\cdot\mathbf{Y}(\mathbf{y}(n),S)^T\right]^{\frac{1}{2S}} \tag{5}$$

существует и имеет собственные значения $e^{\lambda_1}$, $e^{\lambda_2}$, …, $e^{\lambda_d}$ для $d$-мерной динамической системы, которая не зависит от $\mathbf{y}(n)$ почти для всех $\mathbf{y}(n)$ внутри области притяжения аттрактора. Здесь $\lambda_i$ и являются, как раз, размерностями Ляпунова.

В качестве иллюстрации приложения представленного подхода к анализу и прогнозу эволюции концентрации загрязняющих веществ в атмосфере промышленного города (гг. Сопот и Гдыня) приведем взятые из [2] результаты расчета (см. табл.1) глобальных размерностей Ляпунова по анализу временных рядов флуктуаций концентраций (для $NO_2$, $SO_2$ на постах Гданьского региона по данным 2003 г.[2]). В табл.1 приведены положительные значения $\lambda_i$. Так как скорость превращения сферы в эллипсоид по разным осям определяется $\lambda_i$, то ясно, что чем меньше сумма положительных размерностей, тем более устойчивой является динамическая система (воздушный бассейн города по отношению, скажем, к гидродинамическим флуктуациям), и далее очевидно, предсказуемость эволюции системы возрастает. Наличие для каждой из систем двух (из шести) положительных $\lambda_i$ говорит о том, что в шестимерном пространстве система расширяется вдоль двух осей и сужается вдоль оставшихся четырех. Сумма положительных $\lambda_i$ определяет энтропию Колмогорова, которая обратно пропорциональна пределу предсказуемости. Теперь задача состоит в том, чтобы на основе восстановленного фазового пространства численно оценить якобианы $D\mathbf{F}(\mathbf{y}(n))$ в окрестности каждой точки орбиты, а затем определить собственные значения ортогональной матрицы. Чтобы оценить частные производные в фазовом пространстве, необходимо использовать информацию о соседних точках каждой точки орбиты на аттракторе.

Таблица 1 - Первые две размерности Ляпунова ($\lambda_1$ и $\lambda_2$), размерность Каплана-Йорка ($d_L$) и предел предсказуемости ($Pr_{max}$, часы) для $NO_2$, $SO_2$ (гг.Гдыня,Сопот; 2003 г.)

| Пост | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $d_L$ | $Pr_{max}$ |
|---|---|---|---|---|
| Сопот, N6: $NO_2$ | 0,0184 | 0,0061 | 4,11 | 40 |
| Сопот, N6: $SO_2$ | 0,0164 | 0,0066 | 5,01 | 43 |
| Гдыня, N9: $NO_2$ | 0,0189 | 0,0052 | 3,85 | 41 |
| Гдыня, N9: $SO_2$ | 0,0150 | 0,0052 | 4,60 | 49 |

Концепция заключается в том, чтобы создать локальные отображения всех точек в окрестности точки $\mathbf{y}(n)$ на их отображенное изображение в окрестности точки $\mathbf{y}(n+1)$. Такое отображение можно сделать локально линейно, как, например, в методе Сано и Савады [20], хотя такой подход дает точный расчет только самого большого показателя Ляпунова. Решение этой проблемы может быть получено, если принять во внимание семейство отображений от окрестности к окрестности и затем извлечь якобиеву матрицу из такого отображения. Это означает, что локально в пространстве состояний, т.е. вблизи точки $\mathbf{y}(n)$ на аттракторе, динамика $\mathbf{x} \to \mathbf{F}(\mathbf{x})$ аппроксимируется посредством

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M} \mathbf{c}_n(k)\phi_k(\mathbf{x}) \qquad (6)$$

где $\phi_k(\mathbf{x})$ – множество базисных функций; $\mathbf{c}_n(k)$ определяются подбором по методу наименьших квадратов. Тогда численная аппроксимация к локальному якобиану является результатом дифференцирования этого приближенного локального отображения.

## 3. Выводы

В данной статье, преследуя цель развития теоретических основ усовершенствованного общего аппарата анализа и прогноза влияния антропогенной нагрузки на состояние атмосферы промышленного города, и разработку новой схемы моделирования свойств полей концентраций загрязняющих воздушный бассейн веществ на основе методов теории хаоса, мы выполнили анализ физических аспектов восстановления фазового пространства (применительно к воздушному бассейну промышленного города) и изложили усовершенствованную концепцию размерностей Ляпунова с акцентом на приложение в экологии. Эти аспекты являются ключевыми для последующего моделирования и анализа временных рядов флуктуаций концентраций конкретных загрязняющих веществ в атмосфере определенного промышленного города и построения моделей кратко-и средне-срочного прогноза влияния антропогенной нагрузки на экологическое состояние системы.

## Список литературы

1. *Бунякова Ю.Я, Глушков А.В.* Анализ и прогноз влияния антропогенных факторов на воздушный бассейн промышленного города.-Одесса: Экология.-2010.-256с.
2. *Глушков А.В., Хохлов В.Н.,Сербов Н.Г, Бунякова Ю.Я, Балан А.К., Баланюк Е.П.* Низкоразмерный хаос во временных рядах концентраций загрязняющих веществ в атмосфере и гидросфере// Вестник Одесск.гос.экололог.ун-та.-2007.-N4.-С.337-348.
3. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Prepelitsa G.P., Tsenenko I.A.* Temporal variability of the atmosphere ozone content: Effect of North-Atlantic oscillation// Optics of atmosphere and ocean.-2004.-Vol.14,N7.-p.219-223.
4. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya.*, Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment

(Elsevier; The Netherlands).-2008.-Vol.42.-P. 7284–7292.

5. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N.* Using meteorological data for reconstruction of annual runoff series over an ungauged area: Empirical orthogonal functions approach to Moldova-Southwest Ukraine region//Atmosph.Research (Elsevier).-2005.-Vol.77.-P.100-113.
6. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N., Lovett L.* Using non-decimated wavelet decomposition to analyse time variations of North Atlantic Oscillation, eddy kinetic energy, and Ukrainian precipitation // Journal of Hydrology (Elseiver).-2006.-Vol. 322. N1-4.-P.14-24.
7. *Глушков А.В.* Анализ и прогноз антропогенного влияния на воздушный бассейн промышленного города на основе методов теории хаоса: Математические основы// Вестник Одесск.гос.экололог.ун-та.-2013.-N16.-С.231-238.
8. *Sivakumar B.* Chaos theory in geophysics: past, present and future // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. V. 19. № 2. P. 441-462.
9. *Chelani A.B.* Predicting chaotic time series of PM10 concentration using artificial neural network // Int. J. Environ. Stud.-2005.-Vol.62,№ 2.-P.181-191.
10. *Kaplan J.L., Yorke J.A.* Chaotic behavior of multidimensional difference equations // Functional differential equations and approximations of fixed points. Lecture Notes in Mathematics N730 / H.Peitgen, H. Walter (Eds.). – Berlin: Springer, 1979. – P.204-227.
11. *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* Geometry from a time series// Phys. Rev. Lett. – 1980. – Vol. 45. – P. 712-716.
12. *Sauer T., Yorke J., Casdagli M.* Embedology// J. Stat. Phys.–1991.–Vol.65.– P. 579-616.
13. *Mañé R.* On the dimensions of the compact invariant sets of certain non-linear maps// Dynamical systems and turbulence. Lecture Notes in Mathematics N898 / D. Rand and L.S. Young (Eds.). – Berlin: Springer, 1981.– P.230-242.
14. *Fraser A.M., Swinney H.* Independent coordinates for strange attractors from mutual information// Phys. Rev. A.–1986.–Vol.33. – P.1134-1140.
15. *Schreiber T.* Interdisciplinary application of nonlinear time series methods // Phys. Rep. – 1999. – Vol.308. – P. 1-64
16. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики.- Москва: Наука, 1979.-380с.
17. *Оселедец В.И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Труды Московского математического общества.– 1968. – Т. 19. – С. 179-210.
18. *Kennel M., Brown R., Abarbanel H.* Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using geometrical construction// Phys.Rev.A.–1992.–Vol.45.–P.3403-3411.
19. *Песин Я.Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // Успехи математ. наук. – 1977. – Т. 32. – С. 55-112.
20. *Sano M., Sawada Y.* Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series // Phys. Rev. Lett. – 1985. – Vol. 55. – P. 1082-1085.

**Аналіз і прогноз антропогенного впливу на повітряний басейн промислового міста на основі теорії хаосу: Концепція розмірностей Ляпунова. Глушков О.В.**

*З метою розвитку теоретичних основ апарату аналізу і прогнозу впливу антропогенного навантаження на стан атмосфери промислового міста і розробки нової схеми моделювання властивостей полів концентрацій забруднюючих речовин на основі методів теорії хаосу, виконано аналіз фізичних аспектів реконструкції фазового простору та викладена удосконалена концепція розмірностей Ляпунова.*

***Ключові слова**: атмосфера міста, екологічний стан, забруднення, хаос, показники Ляпунова*

**Analysis and forecast of anthropogenic impact on air basin of industrial city on basis of a chaos theory: Conception of Lyapunov's dimensions. Glushkov A.V.**

*In order to develop the theoretical foundations of the approach to analysis and prediction of anthropogenic impact on atmosphere of industrial city and development of a new scheme of modelling properties of fields of the polluting substances concentrations by means of a chaos theory, we present an analysis of physical aspects for reconstruction of the phase space (air basin) and advanced conception of Lyapunov's dimensions.*

***Keywords**: atmosphere of city, ecological state, air pollution, chaos, Lyapunov's indicators*