МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки

для самостійної роботи студентів і практичних робіт

з дисципліни

ВИЩА МАТЕМАТИКА

розділ «Числові та функціональні ряди »

для студентів ІІІ курсу (інтегровані)

Напрям підготовки: комп'ютерні науки

Одеса 2016

Методичні вказівки для самостійної роботи студентів та практичних робіт з розділу " Числові та функціональні ряди" для студентів III курсу (інтегровані) денної форми навчання, напряму підготовки - комп'ютерні науки

Укладачі: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц., Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н., доц., Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц. кафедри вищої та прикладної математики

Відповідальний редактор: Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри вищої та прикладної математики

ПЕРЕДМОВА

Вища математика є однією з основних дисциплін фундаментального циклу у підготовці фахівців з напрямків комп'ютерні науки, гідрологія, метеорологія, екологія тощо, яка спрямована на вивчення основних положень математичного аналізу, диференціального і інтегрального числення, функцій багатьох змінних, кратних та криволінійних інтегралів, теорії поля, числових та функціональних рядів, звичайних диференціальних рівнянь, теорії функції комплексної змінної, рівнянь математичної фізики тощо та узагальнення можливостей практичного використання вивчених методів при розв'язанні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності. Вона відображує нові вимоги, що пред'являються до математичної освіти сучасного інженера. Її характеризують прикладна спрямованість та орієнтація на навчання студентів застосуванню математичних методів для вирішення прикладних задач.

Мета вивчення розділу - забезпечити фундаментальне засвоєння теоретичного курсу поданого розділу, сприяти формуванню навичок у застосуванні основних методів вищої математики в різних галузях, зокрема, комп'ютерних наук, взагалі інформаційних технологій тощо, навиків творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівнянь знань та умінь при вивченні розділу визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання розділу «Числові та функціональні ряди» - навчити студентів: правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення цього розділу потребує від студентів знання таких розділів вищої математики, як аналіз функції однієї змінної, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.

Мета методичних вказівок. Роз'яснити та допомогти студентам засвоїти основні поняття теоретичного курсу та навчити використовувати знання при розв'язанні задач даного розділу. Після вивчення розділу студент має засвоїти базові знання та вміння; він повинен знати – математичну символіку, визначення, основні теореми, основні ознаки передбачені програмою; вміти – влучно і стисло виражати математичну думку під час розв'язання конкретних задач, самостійно розв'язувати типові задачі, що найбільш часто зустрічаються, використовуючи для цього отримані під час вивчення даної дисципліни знання, аналізувати отримані результати. Отримані у процесі навчання знання повинні створити базу, необхідну для вивчення багатьох спеціальних дисциплін професійно – орієнтованого циклу, що формують фахівця в галузі.

1. Програма розділу «Числові та функціональні ряди»

Числові ряди. Збіжність і сума ряду. Властивості збіжних рядів. Необхідна ознака збіжності. Дії над рядами. Ряди з додатними членами. Ознаки порівняння збіжності. Ознака Даламбера. Радикальний та інтегральний ознаки Коші. Знакозмінні ряди, ознака Лейбниця. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів. Функціональні ряди. Область збіжності. Поняття рівномірної збіжності. Ознака Вейєрштрасса. Властивості рівномірнозбіжних рядів. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Область та радіус збіжності. Властивості степеневих рядів. Ряди Тейлора та Маклорена. Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях. Ряди Фур'є. Розвинення функції в тригонометричний ряд Фур'є.

2. Базові знання та вміння

Після вивчення розділу «Числові та функціональні ряди» студент повинен:

засвоїти базові знання: основні визначення, теореми, ознаки збіжності рядів, функціональні ряди, поняття рівномірної збіжності, теорему Абеля для степеневих рядів, ряди Фур'є та Тейлора;

вміти: використовувати теоретичні знання та навики при дослідженні на збіжність рядів, знаходженні області збіжності; розвивати функцію в ряди Тейлора, Маклорена та Фур'є; обчислювати визначені інтеграли з певною точністю за допомогою рядів; правильно аналізувати отримані результати математичних обчислень.

3. Загальні рекомендації студенту по вивченню курсу.

Основною формою навчання студента є робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу за допомогою підручників та навчальних посібників, розв'язання задач, самоперевірка, виконання практичних та контрольних робіт. На допомогу студентам університет організує читання лекцій, проведення практичних занять. Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації. Однак студент повинен пам'ятати, що тільки при систематичній і наполегливій самостійній роботі допомога викладача виявиться досить ефективною.

Останнім етапом завершення вивчення розділу «Числові та функціональні ряди» є написання модульної контрольної роботи, що оцінюється згідно з робочою програмою. Вся робота повинна виконуватися самостійно і служити деякою мірою і гарантією того, що даний розділ є засвоєним студентом.

4. Методичні вказівки

4.1. Дослідження числових рядів

Література: [1, гл.16, п. 1-8], [2, гл. 3, п.1], [3, розд. 5]

Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$, де $\{u_n\}$ - задана нескінченна числова послідовність, називається *числовим рядом*.

Кінцеві суми $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ldots$ називаються *частковими сумами* ряду.

Якщо існує границя послідовності часткових сум $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то ряд називається *збіжним*, і число S називається *сумою* цього ряду.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

Часткова сума цього ряду

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n \Rightarrow S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n .$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2} \cdot n = \infty ,$$

Такий ряд є розбіжним.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots$.

Такий ряд є геометричною прогресією, сума якої визначається за формулою

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad \text{для } b_1 = 1 \Rightarrow S_n = \frac{1-q^n}{1-q} .$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1 \end{cases} .$$

Якщо $q = 1$, то $S_n = \infty$.

Тобто при $|q| < 1$ ряд є збіжним, а при $|q| \geq 1$ - розбіжним.

Теорема 1. *(Необхідна ознака збіжності числового ряду).* Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то загальний член цього ряду прямує до нуля при значеннях $n \to \infty$, тобто $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-5n^2}{(n-1)(n+2)}$.

Ряд розбігається, так як для нього не виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4-5n^2}{(n-1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-5n^2}{n^2+n-2} = -5 \neq 0.$$

Якщо ж умова $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ виконується, то для розв'язку питання про поведінку ряду, необхідно звернутися до достатніх ознак збіжності. Далі розглянемо їх.

Теорема 2. (*перша ознака порівняння збіжності рядів*). Нехай дані два знакододатних ряди: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n \geq 0$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n,\ v_n \geq 0$. Якщо виконується нерівність $u_n \leq v_n$, починаючи з деякого *n,* то із збіжності другого (більшого) ряду випливає збіжність першого (меншого) ряду, а із розбіжності меншого ряду випливає розбіжність більшого ряду.

Теорема 3. (*друга ознака порівняння збіжності рядів*). Якщо існує кінцева границя відношення загальних членів двох рядів

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad v_n \neq 0, \quad 0 < k < \infty,$$

то обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \ldots \frac{1}{n^n} + \ldots$

Порівняємо цей ряд з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

який являє собою нескінченно убутну геометричну прогресію зі знаменником $q=\frac{1}{2}<1$, отже, збігається. Так як $\frac{1}{n^n}<\frac{1}{2^n}$, досліджуваний ряд збігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+5}$.

Для порівняння вибираємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який завжди збіжний.

За умовою $u_n=\frac{n+1}{n^3+5}$, $v_n=\frac{1}{n^2}$.

Знаходимо за другою ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot n^2}{n^3+5}=1\neq 0.$$

Раз ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є збіжним, то і даний ряд збіжний.

Теорема 4. (*ознака Даламбера*). Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами і границю відношення наступного члена ряду до попереднього. Якщо $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ існує, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, якщо $l<1$, та розбігається, якщо $l>1$. При $l=1$ ряд може як збігатися, так і розбігатися.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2n!(n+1)(n+1)!}{(n+1)!(n+2)\cdot 2^n\cdot n!}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n+2} = 2 > 1;$$

тобто досліджуваний ряд розбігається.

Теорема 5. (*радикальна ознака Коші*). Якщо існує границя $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, якщо $l < 1$, та розбігається, якщо $l > 1$. При $l = 1$ ряд може як збігатися, так і розбігатися.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

тобто ряд збіжний.

Теорема 6. (*інтегральна ознака Коші*). Нехай $u_n \geq u_{n+1}$ не зростають, $f(n)$ – безперервна незростаюча функція така, що $f(n) = u_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається або розбігається одночасно з невласним інтегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Складемо функцію $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$. Обчислимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln(x+1)} \Bigg|_1^a \right) =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(a+1)} \right] = \frac{1}{\ln 2}.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний, а значить збіжний і сам ряд.

Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots$$

називається *знакозмінним*.

Якщо для знакозмінного ряду збігається ряд, складений з абсолютних величин його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots,$$

то вихідний ряд теж збігається.

Зауваження. Протилежне твердження невірно. Існують знакозмінні збіжні ряди, для яких ряди, складені з абсолютних величин їх членів, розбігаються.

Збіжний ряд називається *абсолютно збіжним,* якщо ряд, складений з абсолютних величин його членів, збігається.

Збіжний ряд називається *умовно збіжним*, якщо ряд з абсолютних величин його членів розбігається.

Теорема 7. (*Ознака Лейбниця*). Якщо в знакозмінному ряді абсолютні величини членів ряду: 1) монотонно спадають: $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$, 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається, його сума додатна $S > 0$ і не перевищує першого члена ряду, тобто $S < u_1$.

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

Дві умови виконуються за ознакою Лейбниця:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n}$,

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Отже, даний ряд збіжний. Але відповідний ряд з абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є гармонійним і розбігається, тому даний знакозмінний ряд збігається умовно.

Теорема 8. (*Ознаки абсолютної збіжності*). Ознака Даламбера та радикальна ознака Коші являються достатніми і для знакозмінного ряду: якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$ чи $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = l$, тоді знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ збігається абсолютно, якщо $l<1$, та розбігається, якщо $l>1$.

4.2. Функціональні степеневі ряди

Література: [1, гл.16, п.9, 13-15], [2, гл. 3, п.2-3], [3, розд. 5]

Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n x = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

називається *функціональним рядом.*

Серед функціональних рядів існує клас степеневих рядів.

Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots$$

називається *степеневим* за степенями $(x - x_0)$. Вирази $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$- постійні числа. Якщо $x_0 = 0$, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

є степеневим за степенями x .

Для одних значень x ряд може збігатися, для інших значень - розбігатися. Тому для функціональних рядів існують поняття області та радіуса збіжності рядів.

Теорема (*Абеля*). Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається в точці x_0 $\left(x_0 \neq 0\right)$, то він збігається й притім абсолютно для будь-якого значення x, за абсолютною величиною меншого за x_0, тобто $|x| < |x_0|$, або в інтервалі $(-x_0, x_0)$. Якщо ж степеневий ряд розбігається при значенні $x = x_0$, то ряд розбігається при всякому значенні x, більшому за абсолютною величиною x_0 ($|x| > |x_0|$).

Отже, для кожного степеневого ряду, що має як точки збіжності, так і точки розбіжності, існує таке додатне число *R*, що для всіх $|x| < R$, ряд абсолютно збігається, а для значень $|x| > R$ ряд розбігається. Що стосується значень $x = R$ або $x = -R$, то тут можливі ситуації, коли ряд збігається в обох точках, або тільки в одній з них, або ні в одній.

Таке число *R* називається *радіусом збіжності* ряду, а інтервал $\left(-R; R\right)$ називається *інтервалом збіжності*.

Для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ інтервал збіжності має вигляд: $x \in \left(x_0 - R,\ x_0 + R\right)$ з центром в точці x_0. Для ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ інтервал збіжності має вигляд $x \in \left(-R,\ R\right)$ з центром в точці 0. Радіус збіжності для степеневого ряду обчислюються за формулами:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \qquad R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Якщо $R = 0$, тоді ряд збігається тільки в точці $x_0 = 0$. Якщо $R = \infty$, тоді ряд збігається на всій числовій прямій.

Приклад 10. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^n \dfrac{\left(x+1\right)^n}{n \cdot 2^n}$.

У нас

$$|a_n| = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{\left(n+1\right) \cdot 2^{n+1}}.$$

Маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}{n\cdot 2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2\cdot 1=2.$$

Звідки $-2<x+1<2$ або $-3<x<1$. Тобто наш ряд збіжний в інтервалі $(-3;\,1)$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу збіжності. При $x=-3$ одержимо числовий ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Це гармонійний ряд, який завжди розбіжний.

При $x=1$ одержимо числовий знакозмінний ряд:

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)\frac{1}{n}+\ldots,$$

який досліджуємо на збіжність за ознакою Лейбниця:

1) члени ряду по абсолютній величині спадають: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}=\frac{1}{n}=0.$

Ознака Лейбниця виконується, тому ряд умовно збіжний. Отже, область збіжності даного ряду є : $-3<x\le 1$.

Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд за ступенями різниці $(x-x_o)$, то цей ряд обов'язково є *рядом Тейлора* цієї функції:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

де $R_n(x)$ - залишковий член.

Якщо $x_0=0$ отримаємо ряд *Маклорена* цієї функції:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x).$$

Необхідною умовою розкладання функції в ряд Тейлора чи Маклорена є диференційованість функції нескінченне число разів.

Далі розглянемо розкладання основних елементарних функцій у ряд Маклорена:

1) $f(x)=e^x$. На будь-якому інтервалі $x\in(-R,R)$ осі x, значить для всіх $x\in(-\infty,\infty)$: $f^{(n)}(x)=\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$; $f^{(n)}(0)=1$. Тому ряд:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in R.$$

2) $f(x)=\sin x$.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in R.$$

3) $f(x)=\cos x$.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in R.$$

4) $f(x)=\ln|1+x|,\ \ |x|<1$.

$$\ln|1+x|=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

5) $f(x)=arctg\, x$.

$$arctg\, x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\quad -1\le x\le 1$$

6) $f(x)=(1+x)^m$, m - довільне постійне число.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n + \ldots \quad x \in (-1;\ 1).$$

Приклад 11. Обчислити $\sin 10^\circ$ з точністю 0,001.

Підставляючи $x = 10^\circ = \frac{\pi \cdot 10^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{18}$ в ряд Маклорена отримаємо:

$$\sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \ldots$$

Ряд знакозмінний, залишок ряду можна оцінити за ознакою Лейбниця. Знайдемо член ряду, менший за модулем, ніж 0,001.

$$|u_2| = \left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} < 0.001$$

За ознакою Лейбниця похибка від відкидання всіх членів, починаючи з n -го, дорівнює $|R_n| < |u_{n+1}|$, значить $|R_1| < |u_2| < 0.001$.

Отже, $Sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} = 0.174$.

Приклад 12. Обчислити $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ з точністю 0,001.

Користуючись розвиненням функції $f(x) = e^x$ в ряд Маклорена і замінюючи x на $-x^2$, одержимо:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Обчислимо

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - ..\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2\cdot 5} - \frac{x^7}{6\cdot 7} + \frac{x^9}{24\cdot 9} - ...\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{192} - \frac{1}{1320} + \ldots = 1 - 0{,}3333 + 0{,}1 - 0{,}0238 + 0{,}0046 - \ldots = 0{,}7467.$$

4.3. Розкладання функцій в тригонометричні ряди

Література: [1, гл.17, п. 1-6], [2, гл.3, п.8], [3, розд.5]

Нехай $y = f(x)$- безперервна періодична функція з періодом $2l$, інтегрована на інтервалі $(-l,\, l)$, тоді функціональний ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi kx}{l} + b_k \sin\frac{\pi kx}{l}\right)$$

називається *тригонометричним рядом* або *рядом Фур'є*, що збігається до функції $y = f(x)$. А постійні числа $a_n, b_n, (n = 1, 2, 3\ldots)$ називаються *коефіцієнтами ряду*, для яких справедливі формули Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx.$$

З визначення парної та непарної функції випливає, що якщо $\phi(x)$- парна функція, тоді $\int_{-l}^{l}\phi(x)dx = 2\int_{0}^{l}\phi(x)dx$. Якщо $\varphi(x)$- непарна функція, тоді $\int_{-l}^{l}\phi(x)dx = 0$.

Якщо в ряд Фур'є розкласти *непарну* функцію $f(x)$, тоді добуток $f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}$ є функція також непарна, а $f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}$ - парна, отже:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0, \qquad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx = 0,$$
$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx,$$

тобто ряд Фур'є *непарної* функції містить «тільки синуси».

Якщо в ряд Фур'є розкласти *парну* функцію $f(x)$, тоді добуток $f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}$ є функція також непарна, а $f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}$ - парна, отже:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\qquad a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx=0,$$

тобто ряд Фур'є *парної* функції містить «тільки косинуси».

Приклад 13. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$ з періодом $2l=2$, яка на $[-1;1]$ задається рівнянням:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -1\le x<0\\ x, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Ця функція парна. Для розвинення в в ряд Фур'є потрібно знайти a_0, a_k. Так як функція парна, то $b_k=0$ і тому дана функція розвивається в ряд Фур'є за косинусами.

Знаходимо коефіцієнти:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=2\int_0^1 xdx=2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=x^2\Big|_0^1=1;$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx=2\int_0^1 x\cos(\pi kx)dx=\begin{bmatrix}x=u;\ dx=du\\ \cos(\pi kx)dx=dv;\ v=\frac{1}{\pi k}\sin(\pi kx)\end{bmatrix}=$$

$$=2\left[\frac{x}{\pi k}\sin(\pi kx)\bigg|_0^1-\frac{1}{\pi k}\int_0^1\sin(\pi kx)dx\right]=2\left[\frac{1}{\pi k}\sin(\pi k)-0+\frac{1}{\pi^2k^2}\cos(\pi kx)\bigg|_0^1\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi^2k^2}(\cos(\pi k)-\cos 0)=\frac{2}{\pi^2k^2}\left[(-1)^k-1\right]=\begin{cases}0, & k-\textit{парне}\\ -\frac{4}{\pi^2k^2}, & k-\textit{непарне.}\end{cases}$$

Тоді ряд Фур'є запишеться у вигляді:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\cos(\pi kx).$$

5. Питання для самоперевірки

1. Означення ряду.
2. Який ряд називається збіжним?
3. Що таке сума ряду?
4. Необхідна умова збіжності ряду.
5. Ознака Даламбера.
6. Ознаки порівняння збіжності ряду.
7. Радикальний та інтегральний ознаки Коші.
8. Який ряд називається знакозмінним?
9. Ознака Лейбниця.
10. Абсолютна та умовна збіжність ряду.
11. Ознаки абсолютної збіжності ряду.
12. Функціональний ряд та його область збіжності.
13. Область та радіус збіжності степеневого ряду.
14. Ряд Тейлора.
15. Ряд Маклорена.
16. Розвинення елементарних функцій в ряд Маклорена.
17. Визначення періодичної функції. Період функції.
18. Розвинення в ряд Фур'є функції, заданої на довільному відрізку з періодом $2l$. Обчислення коефіцієнтів.
19. Розвинення в ряд Фур'є періодичної функції, заданої на відрізку $[-\pi;\pi]$.
20. Розвинення в ряд Фур'є парної періодичної функції.
21. Розвинення в ряд Фур'є непарної періодичної функції.

6. Типові завдання для модульного контролю

Варіант №1

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)^2 \cdot 5^n}{7^n}$ **4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)}$

II. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$, $(-\pi < x < \pi)$.

Варіант №2

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^6}$ **3 .** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ **4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(4n-3)\cdot 8^n}$

II. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$

Варіант №3

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \cdot (n+1)^2}{3^n}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 7^{3n}}{(2n-5)!}$ **4.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1} \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

II. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3}, \text{ при } & 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ 0, \text{ при } & \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3}, \text{ при } & \frac{2\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

Варіант №4

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{n(n+1)}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\cdot(n+2)}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{e^n}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n+1}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

II. Розвинути в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x, (0<x<\pi).$

Варіант №5

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{2+n^3}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^3\cdot 5^n}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n^4-5}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

II. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{при} \quad -\pi\le x\le 0\\ x, & \text{при} \quad 0\le x\le\pi\end{cases}$

Варіант №6

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-2n^2-1}{3n+3-4n^2}\right)^{4n}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)^3}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)\cdot(n+2)}$

II. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=\frac{\pi}{8}\cdot(\pi-2x)$,(0; π).

Варіант №7

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(n+1)^2}$ **2.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)}$

II. Розвинути в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

Варіант №8

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{2^n}$ **2.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n}{n^4-9}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$

II. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$ на відрізку [–π; π].

Варіант №9

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3n+2}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{(2n)!}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2n}{n^2+4}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

II. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$

Варіант №10

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n5^n}$ **2.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^n \cdot (2n+1)}$ **3.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{4n+1}}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-5)^n$

II. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=e^x$ в інтервалі (0; 2π).

Варіант №11

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2n}}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

II. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)\cdot \sin x$ в інтервалі (0; π).

Варіант №12

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot(n+4)}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^n}$

II. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

Варіант №13

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n+1)^2}{4n}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{\ln n}}$ **3.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^{n-1}\cdot\sqrt[3]{n}}$

II. Розвинути в ряд синусів функцію $f(x) = x\cdot(7-x)$ в інтервалі (0; 7).

Варіант №14

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n\,2n}{(2n)!}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n-1}}{n\sqrt{2n+1}}$

II. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \\ x-2\pi, & \frac{3\pi}{2}<x<2\pi \end{cases}$

Варіант №15

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n^4-5}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{e^n}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^3\cdot 5^n}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{(n+1)2^n}$

II. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)=\cos ax$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ (a – не ціле число).

Варіант №16

I. Дослідити збіжність ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$ **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-7)^{3n}}{(2n-5)!}$ **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)^2}{3^n}$ **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$

II. Розвинути в ряд косинусів функцію $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$

Перелік навчальної літератури

Основна література

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2 М.: Наука, 1978.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.2. – М.: "Высшая школа", 1986.
3. Глушков О.В., Вітавецька Л.А., Хецеліус О.Ю., Чернякова Ю.Г., Дубровська Ю.В., Свинаренко А.А., Флорко Т.О., Башкарьов П.Г. Вища математика: Конспект лекцій.Ч.2. –Одеса, 2014.

Додаткова література

4. Фихтенгольц В.М. Основы математического анализа. Т.1. М.: Наука, 1964.
5. Сборник задач по математике. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. Т.1. – М.: Наука, 1986.

Методичні вказівки
до самостійного вивчення та виконання модульних робот
з дисципліни “Вища математика“
розділ «Числові та функціональні ряди»
для студентів III курсу (інтегровані) очної форми навчання

Укладачі: Глушков О.В., проф.
Флорко Т.О., к.ф.-м.н., доц.,
Башкарьов П.Г., к.ф.-м.н. доц.
Чернякова Ю.Г., к.ф.-м.н., доц.

Відп. ред: Глушков О.В., проф.

Підп. до друку ______ Формат _____ Папір друк.

Умовн. друк. арк. Тираж _________ Зам. №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Надруковано з готового оригінала- макета