МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для самостійної роботи студентів
і практичних робіт з дисципліни

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Розділ «Теорія імовірності та математична статистика»

для студентів І курсу денної форми навчання
Напрям підготовки - водні біоресурси і аквакультура

«Затверджено» на засіданні
методичної комісії
природоохоронного ф-ту
Протокол № від __.__.2015р.
Декан природоохоронного ф-ту

________________ Чугай А.В.

«Затверджено» на засіданні
кафедри вищої та прикладної
математики
Протокол № від __.__.2015р.
Завідувач кафедри

________________Глушков О.В.

Одеса-2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
для самостійної роботи студентів
і практичних робіт з дисципліни

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Розділ «Теорія імовірності та математична статистика»
для студентів І курсу денної форми навчання
Напрям підготовки - водні біоресурси і аквакультура

«Затверджено» на засіданні
методичної комісії
природоохоронного ф-ту
Протокол № від __.__.2015р.

Одеса-2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
до самостійного вивчення та виконання практичних робіт

з дисципліни «Прикладна математика»
(Розділ «Теорія ймовірності та математична статистика»)

Одеса 2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні вказівки
до самостійного вивчення та виконання практичних робіт

з дисципліни «Прикладна математика»
(Розділ «Теорія ймовірності та математична статистика»)

для студентів I курсу денної форми навчання
Напрям підготовки – водні біоресурси і аквакультура

“Затверджено”
на засіданні науково-
методичної ради ОДЕКУ

Одеса 2015

Методичні вказівки до самостійного вивчення та виконання практичних робіт з дисципліни «Прикладна математика» (Розділ «Теорія ймовірності та математична статистика») для студентів I курсу денної форми навчання, напрям підготовки – водні біоресурси і аквакультура

Укладачі:
Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф.,
Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф.,
Буяджи В.В., ст.викл.

Відповідальний редактор:

Глушков О.В., д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри вищої та прикладної математики

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна "Прикладна математика" (зокрема, розділ "Теорія ймовірності та математична статистика") відноситься до однієї з важливих дисциплін фундаментального циклу , яка спрямована на вивчення основних положень, методів теорії ймовірності, зокрема, елементів теорії випадкових подій, теорії випадкових дискретних та безупинних величин, їх характеристик, функцій розподілу, закону великих чисел, а також основних понять і методів теорії випадкових процесів.

Важливий аспект вивчення дисципліни пов'язаний із узагальненням можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Метою вивчення дисципліни, зокрема, розділу "Теорія ймовірності та математична статистика", є забезпечення фундаментально засвоєння теоретичного курсу теорії ймовірності й теорії випадкових процесів, сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів теорії ймовірності та теорії випадкових процесів в різних галузях, формуванню навичок творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах, рівень знань та вмінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни "'Теорія ймовірності та математична статистика" навчити студентів: правильно використовувати вивчені методи при розв'язанні задач, правильно аналізувати результати математичних обчислень.

Вивчення дисципліни базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах. Обсяги окремих розділів і тем визначаються робочими програмами, розробленими на основі даної програми з урахуванням професійного спрямування потоків і окремих іруи. Після вивчання курсу студенти складають іспит.

Студент має засвоїти базові знання та вміння;

він повинен знати - основні визначення і теореми теорії випадкових подій, теорії випадкових величин, їх основні характеристики, закон великих чисел, центральну граничну теорему, елементи теорії випадкових процесів, елементи математичної статистики, основні визначення і методи кореляційного і регресійного аналізу; вміти використовувати теоретичні знання та навички при аналізі випадкових подій, теоретико-імовірностних розрахунках характеристик випадкових величин, функцій розподілу, при дослідженні випадкових процесів, оцінювати невідомі параметри розподілу по вибірці, застосовувати низку практичних навичок для рішення широкого кола теоретично-імовірностних та статистичних задач.

ПРОГРАМА КУРСУ "ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"

Розділ "Теорія ймовірності та математична статистика"

Предмет теорії ймовірності. Аксіоматика теорії ймовірності. Серія іспитів із випадковими наслідками. Частота. Властивості частот. Математична систематизація випадкових явищ. Поняття випадкової події. Класифікація подій. Простір елементарних подій. Операції над подіями та відносини між ними.

Алгебра подій. Ймовірність - адитивна функція події. Аксіоми теорії імовірностей. Імовірні простори. Класичне і геометричне визначення ймовірності. Визначення умовної ймовірності. Незалежність подій, ймовірність добутку подій. Теорема про повну ймовірність, формули Байсеа. Послідовність незалежних іспитів, схема Бернуллі.

Випадкові дискретні величини. Ряд розподілу. Функції розподілу випадкової величини та її властивості. Неперервні та дискретні розподіли. Приклади розподілів: нормальний, пуасонівський, біноміальний, рівномірний, показниковий. Сумісний розподіл декількох випадкових величин. Функції від випадкових величин. Незалежність випадкових величин. Розподіл суми незалежних випадкових величин. Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини. Інші моменти випадкових величин та їх властивості. Коваріація, коефіцієнт кореляції.

Закон великих чисел. Нерівність Чебишева. Закон великих чисел для послідовностей незалежних випадкових величин. Теореми Бернуллі та Чебишева. Центральна гранична теорема. Характеристичні функції та їх властивості (теореми про взаємно однозначну та неперервну відповідність характеристичних функцій і функцій розподілу). Центральна гранична теорема для однаково розподілених доданків. Теореми Ляпунова та Хінчина.

Елементи теорії випадкових процесів. Ланцюги Маркова. Ймовірності переходу. Обчислення граничних імовірностей. Пуасонівський процес. Простіший потік однорідних подій. Узагальнений пуасонівський процес. Ступінчасті випадкові процеси. Напівмарківські процеси.

Основні відомості з математичної статистики. Головна сукупність і вибірка. Розподіли Стьюдента та хі-квадрат. Критерій Персона. Математичне очікування, дисперсія, моменти, мода, медіана випадкової величини. Метод найменших квадратів. Статистичне моделювання.

Поняття про перевірку статистичних гіпотез. Поняття про критерії згоди. Перевірка гіпотез про рівність часток і середніх. Вибір критерію для перевірки статистичної гіпотези.

2. Загальні рекомендації студенту по роботі над курсом теорії ймовірності та математичної статистики.

Основною формою навчання студента стаціонару є наполеглива та ретельна робота над навчальним матеріалом, що складається з наступних елементів: вивчення матеріалу на основі лекційних занять, що проводяться викладачами кафедри вищої та прикладної математики, та з використанням підручників, розв'язання задач на практичних заняттях, самоперевірка, виконання модульного контролю.

Крім того, студент може звертатися до викладача з питаннями для одержання письмової чи усної консультації. Однак студент повинний пам'ятати, що тільки при систематичній і завзятій і самостійній роботі вивчення курсу буде ефективним. Завершальним етапом вивчення окремих частин курсу теорії ймовірності є складання заліків (іспитів).

3. Методичні вказівки

3.1. Елементи теорії ймовірності

3.1.1. Простір елементарних подій. Випадкові події

Приклад 1.

А, В, С – три випадкові події. Записати події, які полягають у тому, що з А, В, С:

1. сталися всі три події;
2. сталася, якнайменше одна подія;
3. сталася лише подія А;
4. сталися події А та В, не сталася С;
5. сталася лише одна подія.

Рішення.

1. сталися А, В та С - $A \cdot B \cdot C$;
2. сталися чи А, чи В, чи С, чи будь-які дві з них, чи усі разом – $A+B+C$;
3. А сталося, В не сталося (сталося $\overline{B}$), С не сталося (сталося $\overline{C}$); тоді сталося $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
4. сталися події А, В та $\overline{C}$ - $A \cdot B\ \overline{C}$;
5. сталося або А (в той час як В та С не сталися), або В (А та С не сталися), або С (А та В не сталися) - $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$

Приклад 2.

А, В, С – випадкові події. Спростити $(A+B)(A+\overline{B})$

Рішення.

Використовуючи правила операцій над подіями, отримуємо:

$(A+B)(A+\overline{B})=A \cdot A+B \cdot A+A \cdot \overline{B}+B \cdot \overline{B}=A+A \cdot B+A \cdot \overline{B}+0=A+A(B+\overline{B})=A+A \cdot \Omega= =A+A=A$

3.1.2. Класичне визначення ймовірності

Приклад 1.

В партії з 100 виробів, є 5 бракованих. Обирається 8 виробів з цієї партії. Найти ймовірність того, що серед них є 2 бракованих вироби.

Рішення.

Стохастичний експеримент полягає у виборі будь-яких 8 виробів зі 100 виробів. Число елементарних ісходів дорівнює числу способів, якими можливо витягнути 8 елементів з 100 елементів. Порядок елементів у групі не має значення, тоді кількість всіх рівноможливих ісходів $N = C_{100}^{8}$.

Підрахуємо число ісходів, сприятливих для події А – серед взятих 8 виробів буде рівно 2 бракованих вироби. 2 бракованих вироби можна взяти з 5 бракованих C_5^2 способами, а інші 6 виробів, які повинні бути стандартними можна взяти з 95 стандартних виробів C_{95}^{6} способами. Каждую групу 1 типа (2 бракованих вироба) об'єднаємо з будь-якою групою 2 типу (6 стандартних виробів). Отримаємо:

$N(A) = C_5^2 \cdot C_{95}^{6}$

Тоді $P(A) = \dfrac{C_5^2 \cdot C_{95}^{6}}{C_{100}^{8}}$

Приклад 2.

З шести кар карточек з літерами Л, І, Т, Е, Р, А, обираємо навмання у визначеному порядку чотири. Знайти ймовірність того, що при цьому отримаємо слово «ТІРЕ».

Рішення.

Стохастичний експеримент полягає у виборі будь-яких чотирьох елементів з 6 елементів. Так як елементарні результати відрізняються один від іншого не тільки елементами, але й їх порядком, то $N = A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Події А – при вказаній процедурі отримаємо слово «ТІРЕ» - сприяє лише один результат. Тому Р(А)=1/360.

Приклад 3.

Телефонний номер складається з 5 цифр. Знайти ймовірність того, що усі цифри різні (кожна цифра може мати 10 значень).

Рішення.

Стохастичний експеримент полягає у складенні групи з 5 цифр, при чому цифри не обов'язково різні. На першому місці може стояти будь-яка цифра, на другому – теж будь-яка і т.д. Кожну цифру на першому місці можна комбінувати з кожною цифрою на другому місці і т.д. Отже, кількість всіх рівноможливих результатів

$N = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$

Події A – у наудачу взятому 5-значному номері всі цифри будуть різними – сприяють стільки ісходів, скільки розміщень можливо скласти з 10 елементів по 5 (враховуючи той факт, що телефонний номер характеризується порядком розміщення цифр, якщо вони різні).

Тому $N(A) = A_{10}^{5}$

$$P(A) = \frac{A_{10}^{5}}{10^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^4}$$

3.1.3. Умовні ймовірності

Приклад 1.

Тричі підкидають монету.

1) описати простір елементарних подій.

2) описати події: A – двічі випав герб, B – що найменше один раз випав герб.

3) обчислити P(AB), P(B) та P(A/B).

Рішення.

1) В результаті будь-якого підкидання монети на її верхній стороні з’являється або герб (Г), або число (Р). Тому, елементарна подія ω – це комбінація трьох символів виду Г та Р. Простір елементарних подій такий:

$\Omega=\{ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, ГРР, РГР, РРГ, РРР\}$

2) A= $\{ГГР, ГРГ, РГГ\}$,

B= $\{ГРР, РГР, РРГ, ГГР, ГРГ, РГГ, ГГГ\}$

AB = $\{ГГР, ГРГ, РГГ\}$

3) Оскількі всі елементарні події рівно можливі, то в силу класичного визначення,

$$P(AB) = \frac{n(AB)}{n} = \frac{3}{8}\ , \quad P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{7}{8}$$

З визначення умовної ймовірності

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{7}$$

Приклад 2.

Довести, що якщо A та B - несумісні події з позитивними ймовірностями, то A і B залежні.

Рішення.

Оскількі A та B несумісні, то AB=Ø. Тому P(AB)=0, а P(A)P(B)>0.

Отже, P(AB)≠ P(A)P(B), та події A і B залежні.

Приклад 3.

Події А і B_1 незалежні та події А і B_2 незалежні, причому B_1 та B_2 несумісні. Довести, що події А і $B_1 + B_2$ незалежні.

Рішення.

Покажемо, що для подій А та B_1+B_2 виконується визначення незалежності. Маємо:

$P(A(B_1+B_2))=P(A\ B_1+A\ B_2)=P(A\ B_1)+P(A\ B_2)= P(A)P(B_1)+P(A)P(B_2)=$

$=P(A)(\ P(B_1)+(B_2))= P(A)P(B_1+B_2)$, т.е.

$P(A(B_1+B_2))=P(A)P(B_1+B_2)$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірності та наслідки з них.
2. Сформулюйте класичне визначення ймовірності. В чому різниця між імовірністю та відносною частотою?
3. Сформулюйте теореми додавання і множення. Наведіть формулу повної ймовірності, формулу Байєса.
4. Дайте визначення випадкової величини та п властивостей. Як визначаються математичне очікування, дисперсія ?
5. Дайте характеристику для таких розподілів: нормальний, пуассонівський, біноміальний, рівномірний, показниковий.
6. Як розрахувати ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини X в заданий інтервал, якщо відомі параметри а і а закону нормального розподілу.
7. Нерівність Чебишева та закон великих чисел для послідовностей незалежних випадкових величин. Теореми Бернуллі та Чебишева.
8. Центральна гранична теорема. Характеристичні функції, Її властивості.
9. Центральна гранична теорема для однаково розподілених доданків. Сформулюйте теорему Ляпунова.
10. Сформулюйте теореми про взаємно однозначну та неперервну відповідність характеристичних функцій і функцій розподілу.
11. Дайте визначення ланцюжків Маркова. Яка процедура розрахунку ймовірностей переходу. Обчислення граничних імовірностей.
12. Дайте визначення пуасонівського процесу. Простіший потік однорідних подій. Ступінчасті випадкові процеси подій. Ступінчасті випадкові процеси.

3.2. Елементи математичної статистики

Приклад 1.

Гральну кістку кидають 16 разів. Знайти:

1) ймовірність того, що 5 разів з׳явиться число кратне трьом.
2) найвірогідніша кількість появи числа кратного трьом.

Рішення.

Іспит – це кидання гральної кістки. Іспити незалежні. Подія А – це випадення числа кратного трьом.

1) n=16, к=5. для того, щоб знайти р=Р(А), використаємо класичне визначення ймовірності

$$P(A)=\frac{n(A)}{n}$$

Дослід має 6 результатів (при одному киданні гральної кістки обов׳язково випаде одне з чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6), з них 2 результати (випадення 3 або 6) сприятливі для А.

Отже,

$p=P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, а q=1- p=$\frac{2}{3}$.

Шукана ймовірність

$$P_{16,5}=C_{16}^{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\approx 0{,}2$$

2) Оскількі np-q=16$\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$ - не ціле число, то найвірогіднішим числом успіхів є число

k_0=[np+q]=$\left[4\frac{2}{3}\right]=5$

Приклад 2.

Ймовірність попадання в ціль р=0,25. зроблено 8 вистрелів по цілі. Найти ймовірність того, що буде не менше одного попадання.

Рішення

N=8, p=0,25, q=0,75

Так як $\{\mu(8)\geq 1\}=\{\mu(8)=1\}+\{\mu(8)=2\}+...+\{\mu(8)=8\}$,

Причому складові, що стоять справа, попарно несумісні події, то в силу теореми складення

$$P\{\mu(8)\geq 1\}=\sum_{i=1}^{8}P\{\mu(8)=i\}=C_8^1\cdot 0{,}25^{2}\cdot 0{,}27^6+\ldots+0{,}25^8$$

Задачу можна розв´язати швидше, використовуючи співвідношення

P(A)+P($\overline{A}$)=1, де A та $\overline{A}$ - взаємно протилежні події.

Отримаємо:

$$P=\{\mu(8)\geq 1\}=1-P\{\mu(8)\langle 1\}=1-P\{\mu(8)=0\}=1-C_8^0\cdot 0{,}25^0\cdot 0{,}75^8=1-0{,}75^8$$

Приклад 3.

У камері схову ручного багажу 80 % усього багажу складають чемодани, які разом з іншими речами сберігаються на стелажах. Через вікно видачи були отримані всі речі з одного зі стелажів в кількості 50 місць. Знайти ймовірність того, що серед виданих речей було 38 чемоданів.

Рішення.

Іспит – це отримання речі з визначенного стелажу. Подія А – взята річ буде чемоданом. N=50, k =38, p=0,8, q=0,2.

Через те, що n завелике, знайдемо приблизну вірогідність $P_{50,38}$ за формулою

$$P_{n,k}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0(x),$$

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{38-50\cdot 0{,}8}{\sqrt{50\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\approx -0{,}71,$$

$$\varphi_0(0{,}71)\approx 0{,}31,$$

$$P_{50,38}=\frac{1}{\sqrt{50\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\varphi(0{,}71)\approx 0{,}11.$$

Приклад 4.

Ймовірність події А дорівнює p=0,4 у кожному з n=1500 іспитів. Знайти ймовірність того, що кількість появи події А буде заключено між 570 та 630.

Рішення.

Для знаходження ймовірності

$$P=\{570<\mu(n)<630\}$$

Використаємо формулу

$$\sum_{k_1\leq k\prec k_2}P_{n,k}=\Phi_0\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi_0\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Маємо:

$$P=\{570<\mu(n)<630\}=$$

$$= \sum_{571 \le k \prec 630} P_{n,k} \approx \Phi_0\left(\frac{630-1500\cdot 0,4}{\sqrt{1500\cdot 0,4\cdot 0,6}}\right) - \Phi_0\left(\frac{571-1500\cdot 0,4}{\sqrt{1500\cdot 0,4\cdot 0,6}}\right) =$$

$$= \Phi_0(1,58) - \Phi_0(-1,53) \approx 0,88$$

Приклад 5.

Якщо у середньому лівші складають 1 %, які шанси того, що серед 200 чоловік опиниться 3 лівші?

Рішення.

n=200, p=0,01, q=0,99.

Оскільки p мало, n велике, можна використати формулу

$$P_{n,k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Через те, що $\lambda = np = 200 \cdot 0,01 = 2$, то

$$P_{200,3} \approx e^{-2} \frac{2^3}{3!} \approx 0,18$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається: статистичною залежністю; кореляційною залежністю; умовним середнім; рівнянням регресії; лінією регресії?
2. Яка кореляційна залежність називається лінійною? нелінійною?
3. Що називається кореляційною таблицею?
4. Як визначається рівняння прямої лінії регресії?
5. Що називається коефіцієнтом регресії? кореляції?
6. Як оцінити тісноту лінійної кореляційної залежності?
7. Які властивості має коефіцієнт кореляції?
8. Що називається кореляційним відношенням?
9. Яку властивість має кореляційне відношення?
10. Як визначається криволінійна кореляція?
11. Що називається множинною кореляцією?
12. Що називається: генеральною сукупністю об'єктів; вибіркою; обсягом сукупності; частотою варіанти: відносною частотою варіанти? Які властивості має емпірична функція розподілу?

Завдання модульного контролю А

Варіант №1

1.1. Студент знає 45 з 60 питань програми. Кожен екзаменаційний білет містить три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає: а) усі три питання; б) тільки 2 питання; в) тільки 1 питання екзаменаційного білета.

1.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2, причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D(X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0.1; M(X)=3,9; D (X)=0,09.

1.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)= \begin{cases} 0, x\le 0 \\ x^2,\ 0<x\le 1 \\ 1, x>1 \end{cases}$$

1.4. Відомі математичне чекання а і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 10, σ =4, α =2, β = 13.

1.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання а нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,17	36	6

Варіант №2

2.1. У кожній із двох урн знаходяться 5 білих і 10 чорних куль. З першої урни переклали в другу наугад одну кулю, а потім із другої урни вийняли навмання одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться чорною.

2.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2, причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D (X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0,3; M(X)=3,7; D (X)=0,21.

2.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)= \begin{cases} 0, x\le 0 \\ (x^2-x),\ 0<x\le 2 \\ 1, x>2 \end{cases}$$

2.4. Відомі математичне чекання а і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 9, σ =5, α =2, β = 14.

2.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,16	49	7

Варіант №3

3.1. Три стрільці в однакових і незалежних умовах зробили по одному пострілу по одній і тій же цілі. Ймовірність поразки цілі першим стрільцем дорівнює 0,9, другим — 0,8, третім 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один зі стрільців влучив у ціль; б) тільки два стрільці влучили в ціль; в) усі три стрільці влучили в ціль.

3.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2, причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D (X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0,5; M(X)=3,5; D (X)=0,25.

3.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)= \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^3, & 0<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

3.4. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 8, σ =1, α =4, β = 9.

3.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,15	64	8

Варіант №4

4.1. Ймовірність настання події в кожнім з однакових і незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в 1600 випробуваннях подія настане 1200 разів.

4.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2, причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D (X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0,7; M(X)=3,3; D (X)=0,21.

4.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 3x^2+2x,\ 0<x\le 1/3\\ 1, x>1/3\end{cases}$$

4.4. Відомі математичне чекання а і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); а= 7, σ =2, α =3, β = 10.

4.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання а нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,14	81	9

Варіант №5

5.1. Для сигналізації про аварію встановлені три незалежно працюючі пристрої. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший пристрій, дорівнює 0,9, другий — 0,95, третій — 0,85. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює: а) тільки один пристрій; б) тільки два пристрої; в) усі три пристрої.

5.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2 причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D(X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0,9; M(X)=3,9; D (X)=0,09.

5.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 2\\ x/2-1,\ 2<x\le 4\\ 1, x>4\end{cases}$$

5.4. Відомі математичне чекання а і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); а= 6, σ =3, α =2, β = 12.

5.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання а нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,13	100	10

Варіант №6

6.1. Ймовірність настання події в кожнім з однакових і незалежних випробувань дорівнює 0,02. Знайти ймовірність того, що в 150 випробуваннях подія настане 5 разів.

6.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2, причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D (X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0,9; M(X)=2,2; D (X)=0,36.

6.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2/9, & 0<x\le 3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$$

6.4. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 5, σ =1, α =1, β = 12.

6.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,12	121	11

Варіант №7

7.1. У партії з 1000 виробів є 10 дефектних. Знайти ймовірність того, що серед 50 виробів, узятих наугад з цієї партії, рівно три виявляться дефектними.

7.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2, причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D (X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0,8; M(X)=3,2; D (X)=0,16.

7.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x^2/4, & 0<x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

7.4. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 4, σ =5, α =2, β = 11.

7.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	Σ
75,11	144	12

Варіант №8

8.1. Ймовірність настання події в кожнім з однакових і незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в 125 випробуваннях подія настане не менше 75 і не більше 90 разів.

8.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2, причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D (X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0,6; M(X)=3,4; D (X)=0,24.

8.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)= \begin{cases} 0, x\le -\pi/2 \\ \cos x, \ -\pi/2<x\le 0 \\ 1, x>0 \end{cases}$$

8.4. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 3, σ =2, α =3, β = 10.

8.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\bar{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\bar{x}$	n	σ
75,10	169	13

Варіант №9

9.1. На трьох верстаках при однакових і незалежних умовах виготовляються деталі одного найменування. На першому верстаку виготовляють 10%, на другому—30%, на третьому—60% усіх деталей. Ймовірність кожної деталі бути бездефектною дорівнює 0,7, якщо вона виготовлена на першому верстаку, 0,8—якщо на другому верстаку, і 0,9—якщо на третьому верстаку. Знайти ймовірність того, що навмання узята деталь виявиться бездефектною.

9.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2, причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D (X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0,4; M(X)=3,6; D (X)=0,24.

9.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)= \begin{cases} 0, x\le 0 \\ 2\sin x, \ 0<x\le \pi/6 \\ 1, x>\pi/6 \end{cases}$$

9.4. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 2, σ =5, α =4, β = 9.

9.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\overline{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\overline{x}$	n	σ
75,09	196	14

Варіант №10

10.1. Серед виробів даного підприємства 20 % виробів вищого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що з 5 придбаних виробів 3 будуть вищого сорту.

10.2. Дискретна випадкова величина X може набувати тільки два значення: x1 і x2, причому x1<x2. Відомі ймовірність p1 можливого значення x1, математичне чекання M(X) і дисперсія D (X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, p 1 =0,2; M(X)=3,8; D (X)=0,16.

10.3. Випадкова величина X задана функцією розподілу P(x). Знайти щільність розподілу імовірностей, математичне чекання і дисперсію.

$$F(x)= \begin{cases} 0, & x\le 3\pi/4 \\ \cos 2x, & 3\pi/4<x\le\pi \\ 1, & x>\pi \end{cases}$$

10.4. Відомі математичне чекання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність попадання цієї величини в заданий інтервал (α; β); a= 2, σ =4, α =6, β = 10.

10.5. Знайти довірчий інтервал для оцінки математичного чекання a нормального розподілу з надійністю 0,95, знаючи вибіркову середню $\overline{x}$, обсяг вибірки n і середнє квадратичне відхилення σ.

$\overline{x}$	n	σ
75,08	225	15

Завдання модульного контролю Б

Завдання 1.

При іспитах n=50 елементів після двох годин роботи фіксувалося число відмовлень, що відбулися, і результати цих іспитів наведені нижче. Потрібно:

1) знайти значення емпіричної функції розподілу для фіксованого елемента часу;

2) оцінити ймовірність безвідмовної роботи для t_0=8 год.;

3) оцінити ймовірність безвідмовної роботи в інтервалі часу від t=6 год. до $t+t_0$=10 год. за умови, що елемент пропрацював безвідмовно 6 годин;

4) знайти середній час роботи елемента до відмовлення.

Варіант №1

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	3	4	7	8	8	8	6	5	1

Варіант №2

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	1	4	6	7	8	8	7	6	7

Варіант №3

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	1	3	5	9	6	9	8	4	2

Варіант №4

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	2	4	6	10	14	5	5	4	0

Варіант №5

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	2	4	4	7	9	10	6	5	3

Варіант №6

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	1	5	5	7	11	10	4	4	3

Варіант №7

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	2	3	4	9	6	9	5	7	6

Варіант №8

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	2	4	5	6	12	11	5	3	2

Варіант №9

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	1	6	7	6	10	8	5	4	3

Варіант №10

Момент часу t_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Число відмовлень n_i	0	4	4	5	6	19	6	3	3	0

Завдання 2.

Проведено перевірку 300 деталей щодо відхилення розмірів від номінального (у сотих частках міліметра). Результати перевірки зведені в статистичний ряд. Потрібно:

1) оцінити з надійністю 0,975 математичне чекання випадкової величини відхилення розміру від номінального;

2) знайти оцінки коефіцієнта асиметрії й ексцесу випадкової величини відхилення розміру від номінального.

Варіант №1

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	3	17	70	120	72	16	2

Варіант №2

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	16	72	119	71	17	3

Варіант №3

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	4	16	71	131	70	16	2

Варіант №4

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	17	74	118	69	18	2

Варіант №5

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	3	16	73	120	70	15	3

Варіант №6

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	16	75	122	68	14	3

Варіант №7

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	18	66	125	73	15	1

Варіант №8

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	1	19	68	123	71	16	2

Варіант №9

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	2	19	65	124	70	17	3

Варіант №10

X_i, X_{i+1}	-7.-5	-5.-3	-3.-1.	-1.1	1.3	3.5	5.7
n_i	1	20	69	117	73	18	2

Завдання 3.
(варіанти №1-10)
Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії У на Х за даними, наведеними у кореляційній таблиці, і оцінити тісноту зв'язку У з Х.

Варіант №1

Y X	1	6	11	16	21	26
10	2	4				
20		3	5			
30			5	35	5	
40			2	8	17	
50				4	7	3

Варіант №2

Y X	2	7	12	17	22	27
15	2	4				
25		3	5			
35			5	30	10	
45			7	10	8	
55				5	5	3

Варіант №3

Y X	3	8	13	18	23	28
20	4	1				
25		6	4			
30			2	50	2	
35			1	9	7	
40				4	3	7

Варіант №4

Y X	4	9	14	19	24	29
20	1	5				
30		5	3			
40			3	40	12	
50			2	10	5	
60				3	4	7

Варіант №5

Y X	6	10	15	20	25	30
25	3	5				
30		4	4			
35			7	35	8	
40			2	10	8	
45				5	6	3

Варіант №6

Y X	6	11	16	21	26	31
30	2	4				
40		6	3			
50			6	35	4	
60			2	8	6	
70				14	7	3

Варіант №7

Y X	7	12	17	22	27	30
35	3	4				
40		6	3			
45			6	35	2	
50			12	8	6	
55				4	7	4

Варіант №8

Y X	8	13	18	23	28	33
40	3	3				
50		5	4			
60			40	2	8	
70			5	10	6	
80				4	7	3

Варіант №9

Y X	9	14	19	24	29	34
45	2	6				
50		5	3			
55			7	40	2	
60			4	9	6	
65				4	7	5

Варіант №10

Y X	10	15	20	25	30	35
50	5	1				
60		6	2			
70			5	40	5	
80			2	8	7	
90				4	7	8

Література

1. Пискунов. Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 1,2. М., «Наука», 1970, 1972, 1976.
2. Мышкис А. С. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1966, 1969, 1973.
3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.. «Наука», 1971. 1974, 1976.
4. Мышкис А. С. Математика для вузов. Специальные курсы. М.. «Наука», 1971.
5. Бараненков Г. С. (и др.) Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов. Под ред. Дичидовича Б. П. М., «Наука», 1961- 1964.
6. Кручкович Г. И. Сборник задач по курсам выcшей математике. Под ред. Г. И. М., «Высшая школа», 1973.
7. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1972.
8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1975.
9. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Є. Функции комплексного переменного.Операционное нечисленне. Теория устойчивости. М., Наука, 1965.
10. Глушков О.В., Сербов М.Г., Хецеліус О.Ю., Дубровська Ю.В., Флорко Т.О., Прикладна математика.- Одесса: Екологія.-2007.
11. Глушков О.В., Хецеліус О.Ю., Амбросов С.В., Свинаренко А.А.. Ігнатенко Г.В., Теорія ймовірності та математична статистика.- Одесса: Екологія.-2011.

Методичні вказівки
до самостійного вивчення та виконання практичних робіт
з дисципліни “Прикладна математика“
для студентів I курсу денної форми навчання

Укладачі:
Глушков О.В., д.ф.-м.н., проф., Хецеліус О.Ю., д.ф.-м.н., проф.,
Буяджи В.В.. ст.викл.
Відп. ред: Глушков О.В., д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри
вищої та прикладної математики

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15