УДК 539.184

Г.В. Ігнатенко, *к.ф.-м.н., доц.*, **С.В. Амбросов,** *к.г.н., доц.,* **П.Г. Башкарьов,** *к.ф.-м.н., доц.*, **Г.В. Романова,** *к.г.н.*
Одеський державний екологічний університет

УЗАГАЛЬНЕНА НЕКОНСЕРВАТИВНА РІЗНИЦЕВА СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОШИРЕННЯ ЛАЗЕРНОГО ІМПУЛЬСУ У НЕЛІНІЙНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Викладена узагальнена неконсервативна різницева схема для задачі поширення лазерного імпульсу у нелінійному середовищі.
Ключові слова: *неконсервативна різницева схема,нелінійне рівняння Шредінгера*

Вступ. В останні роки значний інтерес викликає клас задач, пов'язаний із розповсюдженням інтенсивного лазерного випромінювання у нелінійних середовищах [1,2]. З фізичної точки зору цей інтерес стимулюється множиною різноманітних нелінійно-оптичних ефектів, які відсутні у класичній лінійній квантовій оптиці. З математичної точки зору, виникають значні проблеми, пов'язані із досить складними аспектами чисельного розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Хоча у сучасній обчислювальній математиці та математичній фізиці [3,4] розроблено широкий клас різноманітних чисельних методів, але, як правило, шукані методи не дозволяють з високою точністю розв'язати відповідний клас нелінійних рівнянь. Це стосується і проблематики поширення фемтосекундних лазерних імпульсів у нелінійних середовищах, яке описується узагальненим рівнянням Шредінгера [5-10]. Останнє відрізняється від традиційного нелінійного рівняння Шредінгера наявністю похідної за часом від нелінійного відгуку середовища. Дотепер для розглядуваного класу задач практично не мало місця яке-небудь обґрунтування застосовуваних різницевих схем [6-9]. Тут слід відзначити, що, по-перше, відсутні інваріанти взаємодії фемтосекундного лазерного імпульсу з речовиною, що, мабуть, не дозволяло будувати консервативні різницеві схеми і одержувати гарантовано достовірні результати комп'ютерного моделювання. По-друге, різноманітні застосування потребують використання тих чи інших форм рівняння Шредінгера, тому у кожному випадку потрібно будувати свою схему. В нашій роботі ми викладемо узагальнену неконсервативну різницеву схему для задачі поширення фемтосекундного лазерного імпульсу в оптичному волокні з урахуванням часової похідної від нелінійного відгуку середовища, яка є подальшим розвитком відповідних схем, розвинутих у [2,5,6,8,9].

Основні рівняння. Процес поширення фемтосекундного імпульсу в середовищі з нелінійністю з урахуванням часової похідної від нелінійного відгуку середовища (дисперсією нелінійності) при відсутності впливу дифракції оптичного випромінювання і з урахуванням дисперсії другого порядку у найбільш загальній постановці описується безрозмірним комбінованим узагальненим нелінійним рівнянням Шредінгера [2,4]:

$$\frac{\partial A}{\partial z}+iD\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+i\alpha[|A|^2+f(|A|)]A+\alpha\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(|A|^2 A\right)=g(z,t), \qquad (1)$$

$$z>0,\ 0<t<L_1$$

з початковими і граничними умовами

$$A|_{z=0}=A_0(\mathrm{t}),$$

$$A|_{t=0,\,L1}=0,\ \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{t=0,L_1}=0\,. \tag{2}$$

Тут *A(z, i)* – нормована на максимальне значення на вході в нелінійне середовище комплексна амплітуда імпульсу, який поширюється уздовж координати *z*, що виміряється в одиницях довжини середовища, *t* – нормований на тривалість імпульсу час у супровідній його системі координат, *D* – коефіцієнт, дорівнює відношенню довжини середовища до дисперсійної довжини, *α* – відношення початкової потужності імпульсу до характерної потужності самовпливу, *γ*– параметр, пропорційний добуткові тривалості імпульсу на його частоту, L_1 – безрозмірний часовий інтервал, у межах якого аналізується процес поширення імпульсу, *g* – декотра функція координати *z* та часу. Варто нагадати, що в процесі взаємодії лазерного імпульсу з речовиною зберігається його енергія [7,8]

$$I_A(z)=\int_0^{L_1}|A|^2dt=const. \tag{3}$$

Зручно ввести нову функцію *E(z, t)* (див. [2])

$$E(z,t)=\int_0^1 A(z,\eta)e^{[i(\eta-t)]/\gamma}d\eta\,, \tag{4}$$

яка задовольняє релаксаційне рівняння

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{i}{\gamma}E=A\,. \tag{5}$$

У нових змінних рівняння (1) перетвориться до вигляду

$$\frac{\partial E}{\partial z}+iD\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\alpha\gamma|A|^2A=g(z,t). \tag{6}$$

Крайові умови мають звичайний вигляд:

$$E|_{t=0}=\left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\left(\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{i}{\gamma}E\right)\right|_{t=L_1}=0, \tag{7}$$

$$\left.\left(\frac{\partial E}{\partial z}-\frac{iD}{\gamma^2}E\right)\right|_{t=L_1}=0. \tag{8}$$

На вході у середовище замість початкового розподілу функції *A(z,t)* задається умова

$$E(0,\,t)\ =E_0(t)=\int_0^t A_0(\eta)e^{[i(\eta t)]/\gamma}d\eta\,. \tag{9}$$

У результаті процес поширення фемтосекундного імпульсу описується рівняннями (5),(6) з початковою і граничною умовами (7)-(9). Для побудови консервативних різницевих схем потрібен пошук відповідних інваріантів рівняння (6), що досі не зроблено у повній мірі. Тому далі ми наведемо дві неконсервативні різницеві схеми, які є найбільш природними при побудові схем без обліку інваріантів. Підкреслимо, що з безлічі неконсервативних схем тут представлені найкращі з погляду близькості їхнього рішення до рішень консервативної різницевої схеми.

Побудовані неконсервативні різницеві схеми для вихідного рівняння фактично є схемами другого порядку по обох змінних. Перша з них написана у найбільш природному (якщо не знати інваріанти) вигляді. Друга ж схема дає в чисельних експериментах результати, найбільш близькі до консервативної схеми.

Неконсервативна різницева схема для узагальненого рівняння. Як звичайно, введемо в області $\Omega = (0, L_z)\ x\ (0, L_1)$ сітку $\omega_1 = \omega_z\ x\ \omega_t$ та $\omega_2 = \omega_z\ x\ \omega_t$:

$$\omega_z = \{z_m = mh,\ m = 0,\ 1,\ ...,\ N_z,\ h = L_z\ /\ N_z\},$$
$$\omega_t = \{t_n = n\tau,\ n = 0,\ 1,\ ...,\ N_z,\ \tau = L_t\ /\ N_t\},$$
$$\omega'_t = \{t'_n = (n - 0.5)\tau,\ n = 0,\ 1,\ ...,\ N_z + 1,\ \tau = L_t\ /\ N_t\}. \tag{10}$$

Введемо також такі позначення:

$$\hat{E} = E(z_{m+1}, t'_n), \quad E = E(z_m, t'_n),$$
$$\overset{0,5}{E} = 0{,}5(\hat{E} + E), \quad E_{\pm1} = E(z_m, t'_{n\pm1}),$$
$$\hat{A} = A(z_{m+1}, t_n), \quad A = A(z_m, t_n), \quad A_{\pm1} = A(z_m, t_{n\pm1}),$$
$$\overset{0.5}{f} = 0.5(f_{n-0.5} + f_{n-0.5}), \quad f_{n-0.5} = 0{,}5\left(|A_{-1}|^2 A_{-1} + |A|^2 A\right) \tag{11}$$

Сіткові функції A и E визначаємо відповідно на сітках ω_1 та ω_z.

З урахуванням стандартного позначення

$$\Lambda_{\bar{t}t} u = (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})\ /\ \tau^2,\ n = 1, 2, \ldots, N_t - 5 \tag{12}$$

та (11), маємо таку різницеву схему:

$$\frac{\left(E + E\right)}{h} + iD\Lambda_{\bar{t}t} + \overset{0.5}{E} + \alpha\,\gamma\,\overset{0.5}{f} = g\,,$$
$$\frac{\left(\overset{0.5}{E}_{+1} - \overset{0.5}{E}\right)}{\tau} + \frac{i}{2\gamma}\left(\overset{0.5}{E}_{+1} + \overset{0.5}{E}\right) = \overset{0.5}{A}\,,$$
$$n = 0,\ 1,\ \ldots\ N_t\,. \tag{13}$$

Початкові і граничні умови мають вигляд:

$$A(0,\ t_n) = A_0(t_n),\ \ n = 0,\ \ldots,\ N_t,$$

$$E(0,\ t'_n) = E_0(t'_n),\ \ n = 0,\ \ldots,\ N_t + 1, \tag{14}$$
$$A(z_m,\ 0) = A(z_m,\ N_l) = 0,\ E(z_m,\ 0) = 0,\ m = 0,\ \ldots,\ N_z.$$

Для крайової умови щодо функції E на правій границі за часом звичайно розглянуті два традиційних способи апроксимації. Перший з них складається в безпосередній апроксимації умови у точці $t = L_t$ [5], тобто:

$$E_{N_{t+1}} = E_{N_1}\mu\,, \tag{15а}$$

$$\mu = \frac{4\gamma^2 - \tau^2 - i4\gamma\tau}{4\gamma^2 + \tau^2}\,. \tag{15б}$$

Другий спосіб апроксимації випливає зі співвідношення [8]

$$E(z,\ L_l) = e^{iDz/\gamma^2} E_0(L_l), \tag{16}$$

різницевий аналог якого є

$$E_{m,N_{t+1}} = E_{0,N_{t+1}} e^{iDnh/\gamma^2}\,, m = 1,2,\ldots,N_z\,. \tag{17}$$

Неважко побачити, що різницева схема (13)-(17) має другий порядок апроксимації за часом і просторовою координатою $\Psi = 0(\tau + h^2)$. Подальший крок для розв'язання задачі – використання відомого метода Томсона, а саме:

$$\frac{\left(\overset{(s+1)}{E} + E\right)}{h} + iD\Lambda_{\bar{t}t}\overset{(s+1)}{\underset{0.5}{E}} + \alpha\gamma\overset{(s)}{\underset{0.5}{f}} = g\,,$$

$$\overset{(s)}{\underset{0.5}{f}} = 0.5(\overset{(s)}{f}_{n-0.5} + f_{n-0.5})\,,$$

$$\frac{\left(\overset{(s)}{E}_{+1} - \overset{(s)}{E}\right)}{\tau} + \frac{i}{2\gamma}\left(\overset{(s)}{E}_{+1} + \overset{(s)}{E}\right) = \overset{(s)}{A}\,,\quad s = 0,\ 1,\ \ldots,$$

$$\overset{(s=0)}{E} = E\,. \tag{18}$$

Як значення функцій на нульовій ітерації (s = 0) беруться їхні значення з попереднього шару по τ. Ітераційний процес припиняється, якщо виконано умову

$$\max_n\left|\overset{(s+1)}{E}_n - \overset{(s)}{E}_n\right| \le \varepsilon \max_n\left|\overset{(s)}{E}_n\right| + \delta\,, \tag{19}$$

де, як звичайно, $\varepsilon,\ \delta = const > 0$.

Для звертання різницевого оператора у (18) використовується метод прогону. Неважко зрозуміти, що представлена різницева схема для розв'язання узагальненого нелінійного рівняння Шредінгера (1) задачі поширення лазерного імпульсу у нелінійному середовищі є неконсервативною через спосіб завдання правої крайової умови.

Список літератури

1. *Batani D., Joachain C.N.* Matter in superintense laser field.- N.-Y.: AIP, 2007.-560p.
2. *Глушков А.В*. Атом в электромагнитном поле.- Киев: КНТ, 2006.-450с.
3. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1980.--610с.
4. *Глушков О.В., Лобода А.В., Хецеліус О.Ю., Свинаренко А.А.* Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. - Одеса: Екологія, 2008.-150с.
5. *Glushkov A.V., Loboda A.V., Khokhlov V.N., Prepelitsa G.P.* Numerical modeling a populations differences dynamics of resonant levels of atoms in a non-rectangular form laser pulse: Optical bi-stability effect// IEEE-LEOS Journal.-2006.-Vol.2.-P.111-114.
6. *Glushkov A.V., Khetselius O.Yu., Svinarenko A.A., Prepelitsa G.P.* Energy approach to atoms in a laser field and quantum dynamics with laser pulses of different shape//In: Coherence and Ultrashort Pulsed Emission, Ed. Duarte F. J. (Intech, Vienna).-2011.-P.159-186.
7. *Трофимов В.А.* Нелинейное волновое уравнение лазерной оптики фемтосекундных импульсов//Дифференц. уравнения.-1998.-Т.34,№7.-С. 1002-1004.
8. *Варенцова С.А., Волков А.Г., Трофимов В.А.* Консервативная разностная схема для задачи распространения фемтосекундного лазерного импульса в кубично-нелинейной среде// Журнал вычисл. матем. и матем. физики.-2003.-Т.43.-С.1709-1721.
9. *Вітавецька Л.А., Чернякова Ю.Г., Ігнатенко Г.В., Міщенко О.В., Мудра Н.В.*, *Сєрга Е.М.* Узагальнена консервативна різницева схема для задачі поширення лазерного імпульсу у нелінійному середовищі// Вісник Одеського держ. екологічного ун-ту.-2009.-№7.-Р.241-245.
10. *Орлов Н.Ю.* Вариационный подход к определению энергетического спектра связанных электронов// Дифференц. уравнения.-1991.-Т.27.-с.1237-1248.

Обобщенная неконсервативная разностная схема для задачи распространения лазерного импульса в нелинейной среде. Игнатенко А.В., Амбросов С.В., Башкарьов П.Г., Романова А.В.

Изложена обобщенная неконсервативная разностная схема для задачи распространения лазерного импульса в нелинейной среде.

Ключевые слова: *неконсервативная разностная схема, нелинейное уравнение Шредингера*

Generalized nonconservative differences scheme for task of propagating laser pulse in a non-linear medium. Ignatenko A.V., Ambrosov S.V., Bashkaryov P.G., Romanova A.V.

It is proposed a generalized nonconservative differences scheme for task of propagating a laser pulse in a non-linear medium.

Keywords*: nonconservative differences scheme, non-linear Schrödinger equation*