

О. С. ЛІМОНОВ

ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

1120017116

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О. С. ЛІМОНОВ

ЦИФРОВА ОБРОБКА
СИГНАЛІВ

Конспект лекцій

Одеса – 2011

ББК 32.972
Л58
УДК 681.3

Друкується за рішенням вченої ради
Одеського державного екологічного університету
(протокол № 8 від 28.10.2010 р.)

Лімонов О. С.

Цифрова обробка сигналів: Конспект лекцій. — Одеса: Екологія, 2011. — 120 с.

В конспекті лекцій викладені математичні моделі представлення сигналів та їх перетворень у дискретній та цифровій формі. Наведені способи синтезу і аналізу на основі теорії фільтрації. Представлені методи кодування сигналів та каналів передачі інформації, які використовуються в телеметрії метеорологічних сигналів.

Конспект лекцій розрахований на студентів, магістрів та аспірантів, які спеціалізуються з радіометеорології та радіолокації.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	6
1. МОДЕЛЬ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ.....	7
1.1 Перетворення інформаційних повідомлень в електричні сигнали і навпаки. Типи сигналів. Приклади сигналів. Спектри сигналів.....	7
1.1.1 Перетворення інформаційних повідомлень в електричні сигнали і навпаки.....	7
1.1.2 Спектри сигналів.....	11
1.2 Аналіз сигналів.....	13
1.2.1 Ряд Фур'є.....	13
1.2.2 Дискретний спектр.....	14
1.2.3 Типові послідовності сигналів.....	15
1.2.4 Комплексна форма.....	16
1.3 Перетворення Фур'є.....	22
1.3.1 Пари перетворень Фур'є.....	22
1.3.2 Типові функції.....	23
1.3.3 Теорема зрушення.....	25
1.3.4 δ - функція.....	26
1.3.5 Спектр потужності.....	28
1.3.6 Енергетичний спектр.....	28
1.4 Дискретне перетворення Фур'є.....	30
1.4.1 ДПФ.....	30
1.4.2 БПФ.....	32
1.4.3 Алгоритм <i>Cooley – Twkey</i>	33
1.5 Відклик ланцюгів.....	37
1.5.1 Неперіодичні сигнали.....	37
1.5.2 Ідеальний ФНЧ.....	38
1.5.3 Періодичні сигнали.....	41
1.5.4 Практичний ФНЧ.....	41
1.6 Перетворення Лапласа.....	43
1.6.1 Перетворення Лапласа.....	43
1.6.2 Диференціальне рівняння.....	44
1.6.3 Зворотне перетворення Лапласа.....	45
1.6.4 Приклади.....	45
1.7 Інтеграл згортки.....	49
1.7.1 Інтеграл згортки.....	49
1.7.2 Приклад.....	50
1.7.3 Кореляційний аналіз.....	51
2. ДИСКРЕТНО-ЧАСОВА ФІЛЬТРАЦІЯ.....	55
2.1 Безупинний і дискретний тимчасовий аналіз.....	55

2.1.1	Дискретно тимчасова обробка реальних сигналів.....	59
2.1.2	Цифрові фільтри.....	61
2.2	Z-перетворення.....	63
2.2.1	Z - перетворення.....	63
2.2.2	Зв'язок Z - перетворення з перетворенням Лапласа.....	65
2.2.3	Зв'язок між S і Z областями.....	66
2.3	Цифровий фільтр.....	70
2.3.1	Класифікація цифрових фільтрів.....	70
2.3.2	Реалізація схеми цифрових фільтрів.....	71
2.3.3	Інверсне Z - перетворення.....	72
2.3.4	Інверсне Z - перетворення.....	73
2.3.4.1	Передатна функція фільтра з нескінченним імпульсним відгуком (IIR).....	73
2.3.4.2	Білінеарне перетворення.....	74
2.3.4.3	Імпульсно – інваріантне перетворення.....	75
2.3.5	Частотний відгук.....	76
2.3.5.1	Кінцевий імпульсний відгук - FIR фільтри.....	77
2.4	Цифрова обробка сигналів.....	82
2.4.1	Дискретизація сигналів.....	82
2.4.2	Теорема дискретизації.....	83
2.4.3	Дискретний відгук.....	85
2.4.4	Квантування сигналів.....	86
2.4.4.1	Приклад квантування імпульсного сигналу.....	86
3.	КОДУВАННЯ.....	88
3.1	Двійниковий код.....	88
3.1.1	Цифрова обробка мови.....	91
3.1.2	Обробка зображень.....	93
3.2	Передача цифрових сигналів.....	95
3.2.1	Частотний поділ.....	95
3.2.2	Тимчасовий поділ.....	96
3.2.3	Кодове розподілення.....	97
3.2.4	Спотворення сигналу.....	99
3.3	Теорія інформації.....	101
3.3.1	Ентропія.....	101
3.3.2	Ємність каналу інформації.....	104
3.3.3	Теорія кодування.....	106
3.4	Способи підвищення інформаційної ємності каналу.....	109
3.4.1	Швидкість передачі інформації.....	109
3.4.2	Модеми.....	110
3.4.3	Види маніпуляції сигналів у модемах.....	110
3.5	Протоколи.....	113
3.5.1	Протоколи.....	113

3.5.2	Виявлення помилок і корекція цифрової інформації.....	115
3.5.3	Кодування каналів. Коди перевірки парності.....	115
3.5.3.1	Коригувальні коди.....	116
	ЛІТЕРАТУРА.....	119

ПЕРЕДМОВА

Цифрова обробка сигналів широко використовується в системах комп'ютерної обробки інформації, системах зв'язку, метеорологічній радіолокаційній техніці, телеметрії метеорологічних даних.

В цифрову обробку входять різні способи дискретних перетворень сигналів, їх кодування для використання в телеметричних трактах передачі інформації.

В конспекті лекцій розглядаються способи математичного представлення цифрової обробки, теорія фільтрації цифрових сигналів, теорія інформації, теорія кодування сигналів та тактів передачі.

Конспект лекцій призначений для студентів гідрометеорологічного факультету, спеціалізація “радіометеорологія і радіолокація”.

1 МОДЕЛЬ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ

1.1 Перетворення інформаційних повідомлень в електричні сигнали і навпаки. Типи сигналів. Приклади сигналів. Спектри сигналів

Модель інформаційної системи наведена на (рис. 1.1)

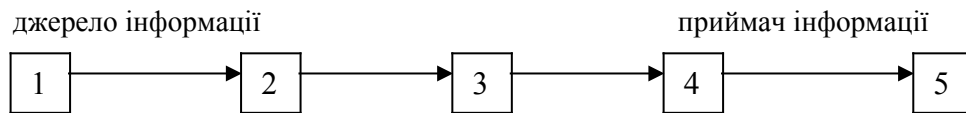


Рис.1.1 - Модель інформаційної системи:
1-формуваць інформації; 2-передавач; 3-передавальна система; 4-приймач; 5-споживач

Головна мета інформаційної системи – це обмін повідомленнями (інформацією) між двома абонентами – джерелом і приймачем (споживачем).

До основних елементів системи входить:

- **формуваць інформації** – прилади, що генерують дані (датчики, комп'ютер, телефон), які повинні бути передані;

- **передавач** – перетворює дані в електромагнітні сигнали для передачі їх через передавальну систему;

Приклад : модем – перетворює цифровий потік від джерела в аналогові сигнали для передачі;

- **передавальна система** – середовище розповсюдження електромагнітних сигналів, в які перетворена інформація (дані);

- **приймач** – приймає електромагнітні сигнали і перетворює їх у форму даних, зручну для споживача.

Наприклад, модем – перетворює прийняті електромагнітні аналогові сигнали в цифровий потік інформації.

1.1.1 Перетворення інформаційних повідомлень в електричні сигнали і навпаки (рис. 1.2)

Порядок перетворення показано на моделі інформаційної системи.



Рис.1.2 - Перетворення інформаційних повідомлень

Тут текст – вхідна інформація, що перетворюється в цифровий потік вхідних даних, який у передавачі перетворюється в аналоговий переданий сигнал. Цей сигнал потім приймається приймачем, який робить зворотне перетворення прийнятого аналогового сигналу в цифровий потік вихідних даних. Далі цей потік перетвориться у вихідну інформацію – текст.

Типи сигналів.

У передачі інформації має місце як перетворення даних у цифровий потік, тобто цифрові сигнали, так використання аналогових – фізичних сигналів у виді потоків напруг, а також електромагнітних хвиль.

Існує два основних типи сигналів – аналогові сигнали, які змінюються безперервно в часі і цифрові сигнали, які перервані в часі

Аналогові сигнали звичайно представляються зміною фізичних величин, наприклад, звукова хвиля, одиночна синусоїдальна хвиля або комбінація хвиль (рис.1.3).

Цифрові сигнали містять в собі в основному імпульси, які розміщені на дискретних інтервалах у часі. Імпульси можуть об'єднуватися в періодичні групи у вигляді кодових форм (рис 1.4).

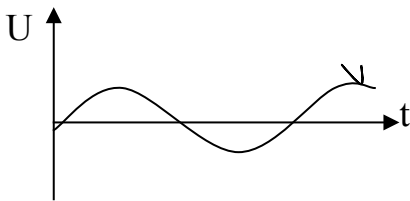


Рис. 1.3 –Простий аналоговий сигнал

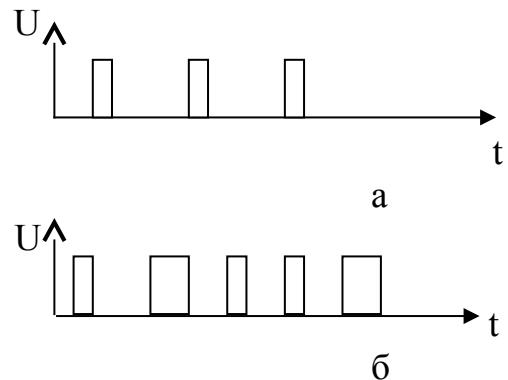


Рис. 1.4 - Цифрові сигнали
а) Простий імпульсний сигнал;
б) кодований сигнал

Приклади сигналів. Типовими є сигнали, використовувані в телеграфі, телефоні, радіозв'язку, телебаченні, радарях.

Телеграфний сигнал. Повідомлення з багатьох слів може бути передане шляхом кодування кожної букви слова (рис.1.5). Це є сигнал в імпульсній формі з додатними і від'ємними величинами.

Швидкість передачі імпульсів називається сигнальною швидкістю. Вона вимірюється в одиницях, названих “Бауд”. Це кількість імпульсів за секунду. Звичайно телеграфна швидкість складає 50-70 бауд. Кожна

імпульсна форма має смугу частот (ширину спектра) порядку 120 Гц на повідомлення, і направляєється **телеграфним каналом**.

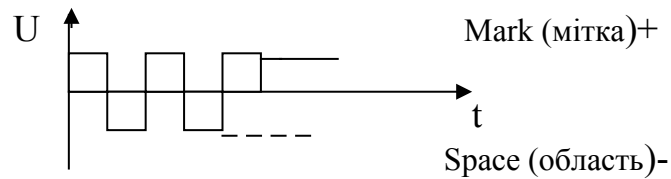


Рис.1.5 - Телеграфний сигнал

Сигнальна швидкість – це кількість елементарних імпульсів, переданих за секунду, і визначається тривалістю імпульсу.

$$\text{сигнальна швидкість} = \frac{1}{\text{тривалість елементарного імпульсу}}$$

Так, для 50 бауд тривалість елементарного імпульсу складає $1/50=20\text{ms}$. Тривалість імпульсу зворотно пропорційна смугі частот, а сигнальна швидкість прямопропорційна частоті. Чим вище сигнальна швидкість, тим ширше смуга частот.

Телефонний сигнал - це – звукові хвилі, створені вібрацією мембрани, або навпаки, звукові хвилі, перетворені в електричні сигнали (рис. 1.6).

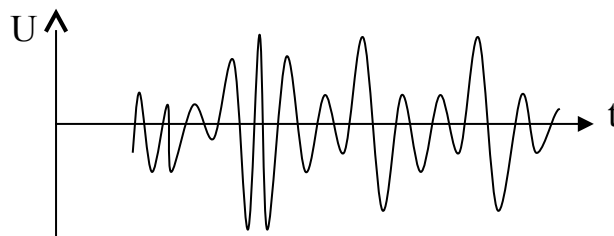


Рис. 1.6 - Електричні сигнали

Основна енергія сигналів мови лежить у смугі частот від 300 до 3400 Гц. Звичайно використовується смуга частот 4кГц – це так званий **телефонний канал**. Телефонний канал може пропускати телеграфні повідомлення, кожне по 120 Гц. Всього в одному телефонному каналі може бути передано 24 телеграфні повідомлення одночасно.

Радіосигнал. Створюється генератором і містить **несучу частоту**, що **моделюється** повідомленням – мовою або музикою. При **амплітудній** модуляції (АМ) сигнал, що модулює, змінює, амплітуду несучої частоти (рис. 1.7). При частотній модуляції (ЧМ) змінюється частота несущого коливання (рис. 1.8).

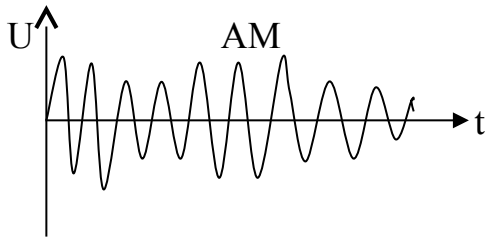


Рис. 1.7 - Амплітудна модуляція

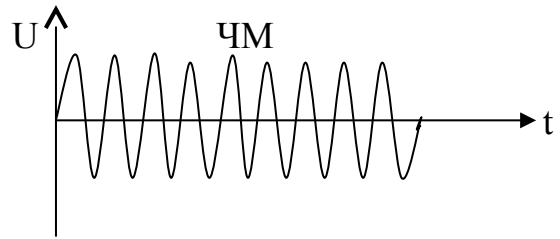


Рис. 1.8 - Частотна модуляція

Для модуляції музикою смуга частотного каналу – 10кГц; для високоякісної передачі – до 15кГц.

Сигнал кольорового телебачення. Це – сполучення сигналів чорно-білого і кольорового сигналів. Відео несуча використовується для переносу чорно-білої (монохромної) інформації, амплітуда якої змінюється відповідно до яскравості зображення; частоти, які піднесуть, використовуються для переносу інтенсивності кольору і колірних відтінків відповідно до PAL і Secam (або інших) системами.

Телевізійний сигнал (рис. 1.9) містить тимчасові інтервали, у плінні яких картина передається зміною яскравості.

Тут передаються синхроімпульси і сигнали кольорової синхронізації для цілей прийому. Типова смуга частот телевізійного каналу від 0 до 8 МГц для 625-лінійної PAL системи (рис. 1.10).

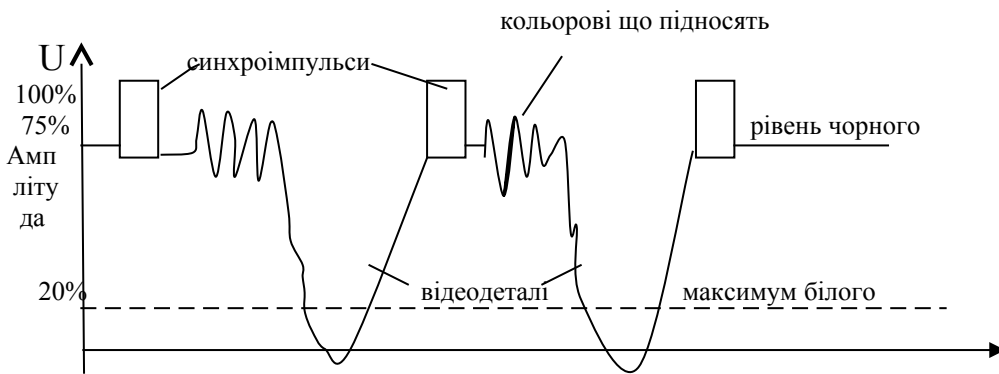


Рис.1.9 - Телевізійний сигнал

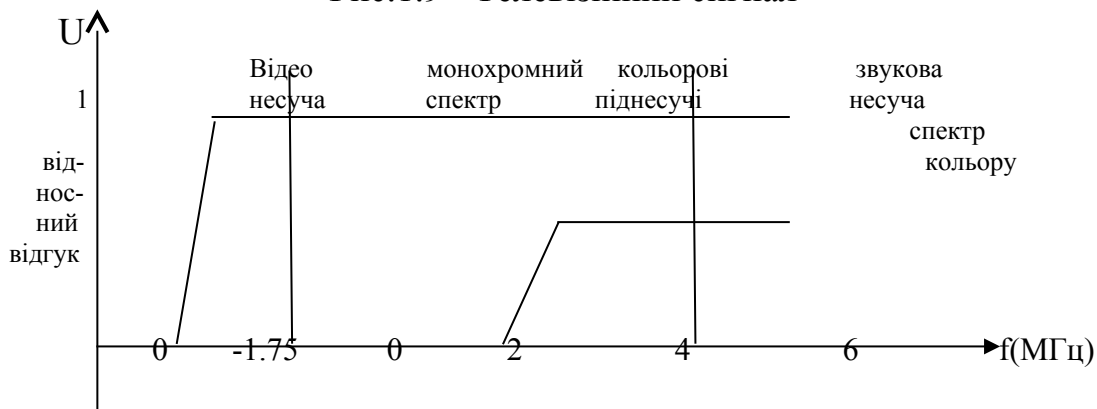


Рис. 1.10 - Типова смуга частот телевізійного каналу

Імпульсний сигнал радару (рис. 1.11). Це - випромінювана радаром послідовність коротких імпульсів, що відбивається від об'єктів і приймається приймачем.

Звичайно ця послідовність прямокутних імпульсів, кожний з яких містить частину електромагнітної енергії з низькою частотою повторення – одиницю кГц. Смуга прийому відбитих від об'єктів сигналів складає одиниці МГц.

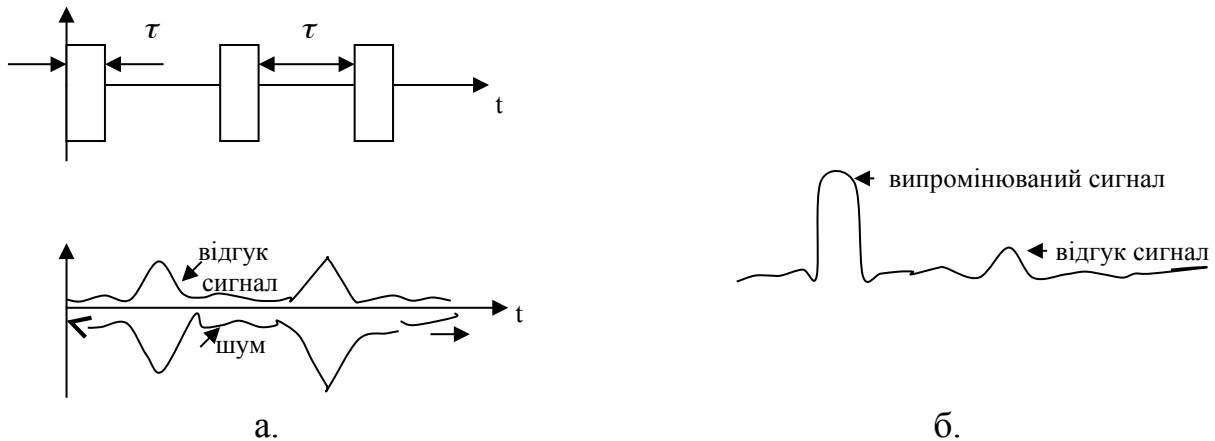


Рис. 1.11 - Імпульсний сигнал радару
 а. Випромінюваний і відбитий сигнал
 б. Екран радару

Параметри сигналу радару:

- середня потужність P_{cp} ;
- пікова потужність $P_{пик}$;
- коефіцієнт заповнення $= \frac{\tau}{T}$;
- мінімальна дальність $R_{min} = \frac{c\tau}{2}$;
- максимальна дальність $R_{max} = \frac{cT}{2}$.

1.1.2 Спектри сигналів

Сигнали можуть бути проаналізовані аналізом Фур'є з різними частотними компонентами. Кожен обмежений у часі сигнал може бути представлений сумою нескінченного числа частотних гармонік. Повний діапазон цих частот представляється частотним спектром сигналу – його найважливішою характеристикою.

Таким чином, у часовій області сигнали можуть бути представлені графіком амплітуда – час, а в частотній області – як графік частотних

компонентів амплітуда – частота. Зв'язок між цими двома представленнями визначається Фур'є – перетворенням.

Сигнали з вибірковою інформацією – дискретний (вибірковий) сигнал. Таким є, наприклад, цифровий сигнал, амплітуда якого може змінюватися в діапазоні величин.

Вибірки виробляються з безупинного аналогового сигналу в дискретні моменти часу. Також вибіркові сигнали використовуються для цифрової обробки інформації (рис. 1.12), як буде вивчено далі.

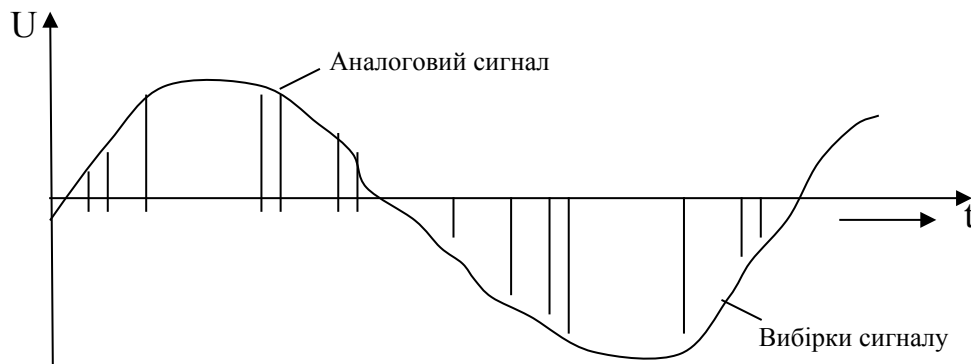


Рис. 1.12 - Цифрова обробка інформації

Контрольні запитання:

1. Які основні елементи в інформаційній системі?
2. Який порядок перетворення сигналів?
3. Що таке аналоговий сигнал?
4. Що таке цифровий сигнал?
5. Які характеристики у телефонного сигналу?
6. Які характеристики у радіосигналу?
7. Які характеристики у сигналу кольорового телебачення?
8. Які характеристики у сигналу радара?
9. Що таке дискретний (вибірковий) сигнал?

1.2 Аналіз сигналів

1.2.1 Ряд Фур'є

На рис. 2.1 – повторюваний сигнал, що має періодичну функцію в часі.

Кожну періодичну функцію в часі $f(t)$ можна представити рядом Фур'є:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t, \quad (2.1)$$

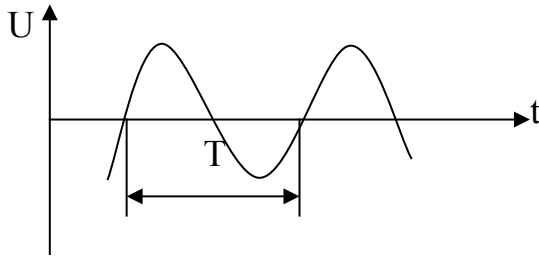


Рис.2.1 - Повторюваний сигнал

Де a_n і b_n еквівалентні коефіцієнти, визначені як (2.2)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega t dt; \quad (2.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \omega t dt, \quad (2.3)$$

де $\omega = \frac{2\pi}{T}$ T – період.

$$\text{Для нульової частоти } a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad (2.4)$$

Зауваження:

-якщо $f(t) = f(-t)$ то функція парна. Вона симетрична щодо центра; присутня лише \cos складова;

-якщо $f(t) = -f(-t)$ – функція непарна; присутні тільки \sin складові;

- якщо $f(t)\left(t + \frac{T}{2}\right) = f(t)$ - то присутня тільки парна гармоніка;
- якщо $f(t)\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$ - то присутні тільки непарні гармоніки.

1.2.2 Дискретний спектр

Ряд Фур'є представляється нескінченним числом частотних компонентів, що складаються в тимчасову функцію $f(t)$. Ці часткові компоненти складають дискретний спектр (рис.2.2).



Рис.2.2 - Дискретний спектр

Амплітуда кожної дискрети представляється коефіцієнтами a_n і b_n . Усі частотні компоненти – гармоніки основної частини $\frac{1}{T}$, і повний діапазон частот – це спектр сигналу.

Спектр може містити нескінченне число дискретних частот, їхні амплітуди убувають зі збільшенням n , і на практиці звичайне число частот обмежене. Знання про спектр частот забезпечує більш ефективне використання сигналів і при передачі, і прийомі.

Приклад 2.1 Амплітуда прямокутної хвилі змінюється від +1 до –1 (рис.2.3).

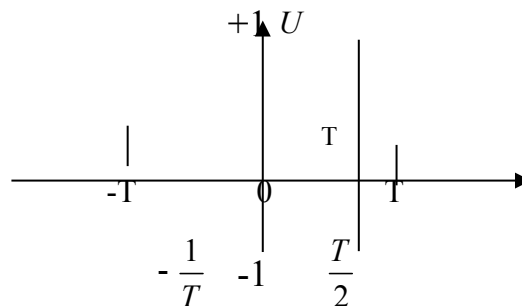


Рис. 2.3 - Амплітуда прямокутної хвилі

Хвиля має період T і симетричний по вертикальній осі в крапці $t = 0$. Визначимо Фур'є - компонента цієї хвилі. Сигнал симетричний по горизонтальній осі з центром у $t = 0$.

Тут постійна складова $a_0 = 0$, $f(t) = f(-t)$ і присутні тільки \cos складові:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt,$$

де $a(t) = +1 \text{ від } -\frac{T}{4} \text{ до } +\frac{T}{4}$; $a(t) = -1 \text{ від } -\frac{T}{2} \text{ до } -\frac{T}{4}$; $a(t) = -1 \text{ від } +\frac{T}{4} \text{ до } +\frac{T}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Далі } a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{4}} \cos n\omega t dt + \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos n\omega t dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega t dt = \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{4}} + \left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega} \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \right\} = \\ &= \frac{8}{n\omega T} \sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right) - \frac{4}{n\omega T} \sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right). \end{aligned}$$

При $\omega T = 2\pi$ маємо $a_n = \frac{8}{2\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$; $a_0 = 0$ - постійна складова;

$$a_1 = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}; a_2 = \frac{4}{2\pi} \sin \pi = 0;$$

$$a_3 = \frac{4}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{4}{3}\pi, \dots$$

Тепер $f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots$,

$$\text{або } f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \dots \right).$$

1.2.3 Типові послідовності сигналів

Нижче представлені Фур'є – компонента типових послідовностей сигналів.

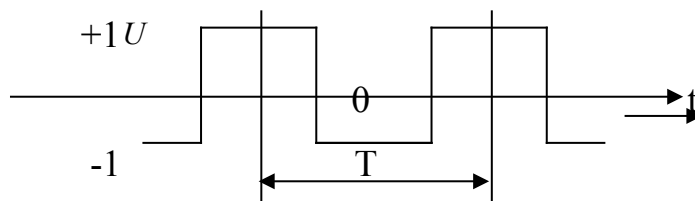


Рис. 2.4 - Симетрична прямокутна хвиля

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \dots \right). \quad (2.5)$$

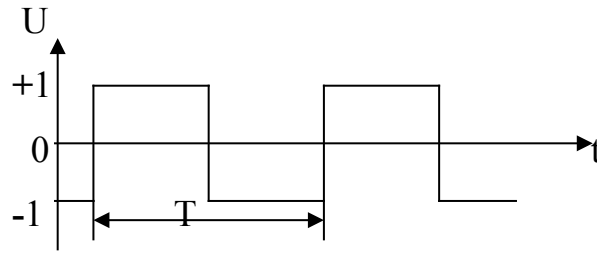


Рис. 2.5 - Асиметрична прямокутна хвиля

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right). \quad (2.6)$$

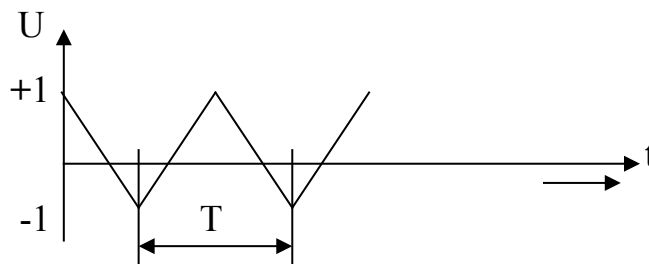


Рис. 2.6 - Трикутна хвиля

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3\omega t + \frac{1}{25} \cos 5\omega t + \dots \right). \quad (2.7)$$

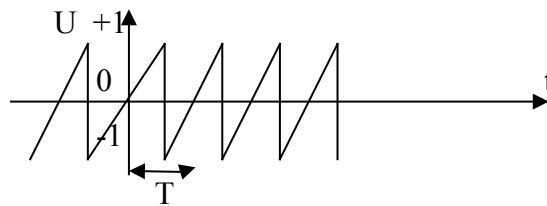


Рис.2.7 - Пилкоподібна хвиля

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t \right) \quad (2.8)$$

1.2.4 Комплексна форма

Періодична $f(t)$ функція може бути представлена в комплексній формі з використанням формул Ейлера:

$$\cos n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}; \quad (2.9)$$

$$\sin n\omega t = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}. \quad (2.10)$$

При цьому в комплексному виді ряд Фур'є має вигляд:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \right) = \\ &= a_0 + \left\{ \frac{(a_n - jb_n)}{2} e^{jn\omega t} + \frac{(a_n + jb_n)}{2} e^{-jn\omega t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Позначимо $C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$; $C_0 = a_0$; C_{-n} - комплексно сполучена з C_n .

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

За аналогією з a_n і b_n можна представити:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos n\omega t] dt; \quad (2.12)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos n\omega t + j \sin n\omega t] dt; \quad (2.13)$$

$$\text{або } C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt; \quad C_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega t} dt;$$

$$\text{і } f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega t}, \quad (2.14)$$

Де n - негативні і включені зі знаком ” – “. З також можна включити під знак суми:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}. \quad (2.15)$$

Бачимо, що періодична функція $f(t)$ представляється в додатніх і відємних областях математично. Відємні частоти представлені обертанням по годинниковій стрілці; додатня – проти годинникової стрілки є фізичний аналог відємних і додатніх частот.

Приклад 2.2. Для послідовності прямокутних імпульсів, з періодом T , тривалістю τ й амплітудою A визначити (рис.2.8) ряд Фур'є.

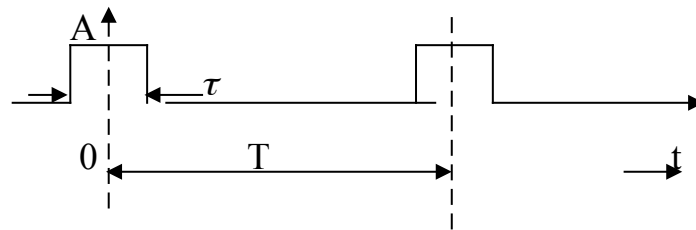


Рис. 2.8 - Ряд Фур'є

Показати, які будуть вихідні сигнали, коли дана послідовність надійде на вхід:

- а. Фільтра високих частот (ФВЧ) з частотою зрізу $f_c = \frac{1}{2T}$;
- б. Фільтра потрібних частот (ФНЧ) з частотою зрізу $f_c = \frac{1}{2T}$;
- в. ФНЧ із частотою зрізу $f_c = \frac{3}{2}T$;
- г. Смугові фільтри (ПФ) з частотою зрізу $\frac{1}{2}T$ і $\frac{3}{2}T$;
- д. Режекторні фільтри (РФ) з частотою зрізу до $\frac{1}{2}T$ до $\frac{3}{2}T$.

Ряд Фур'є даної послідовності імпульсів,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t,$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A dt = \frac{A}{T} t \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A\tau}{T}.$$

Тут $b_n=0$, тому що $f(t)$ парна.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cos n\omega t dt = \frac{2A}{T} \left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{4A}{n\omega T} \sin \frac{n\omega T}{2};$$

$$i f(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sum \frac{\sin(n\omega\tau/2)}{n\omega\tau/2} \cos n\omega t \quad (\text{рис.2.9})$$

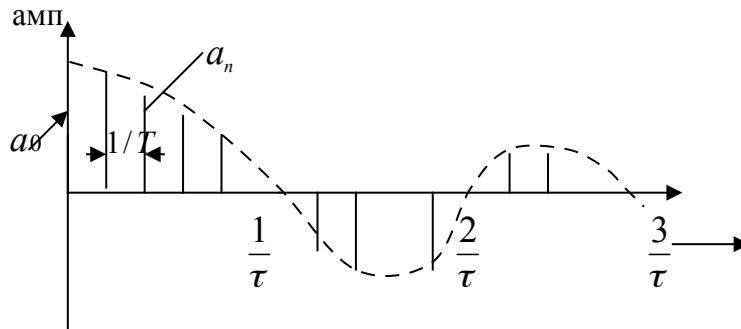


Рис.2.9 - Послідовності імпульсів

Обвідна компонент a_n , що слідує за a_0 , має форму

$$\frac{\sin x}{x}, \text{ де } x = \frac{n\omega\tau}{2}, \text{ і нулі будуть при } \frac{\sin x}{x} = 0,$$

$$\text{або } f(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sum_2^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cos n\omega t. \quad n\tau = k/\tau, \text{ де } k=1,2,3,\dots$$

Тут нулі будуть у точках $\frac{1}{\tau}; \frac{2}{\tau}; \frac{3}{\tau}$ і т.д.

а. ФВЧ; $f = \frac{1}{2T}$. Тут присутні всі частоти, крім a_0 – постійної

$$\text{складової, і } f = \frac{2A\tau}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cos \omega t;$$

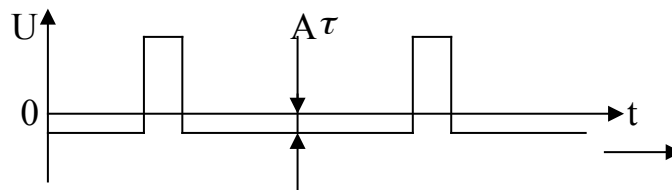


Рис 2.10 - Формула вихідного сигналу на виході ФНЧ

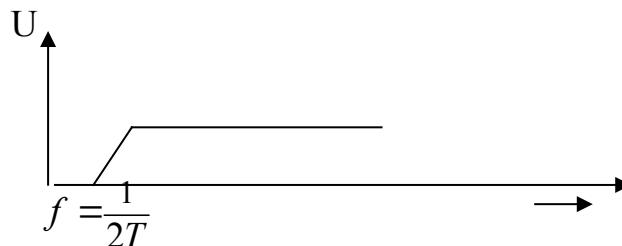


Рис.2.11- Амплітудно частотні характеристики ФВЧ

б. ФНЧ, $f = \frac{1}{2T}$. На виході фільтра буде тільки постійна складова

a_0 (рис.2.12) $f(t) = \frac{2\tau}{T}$

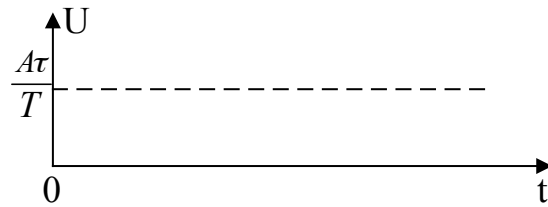


Рис. 2.12 - Постійна складова a_0

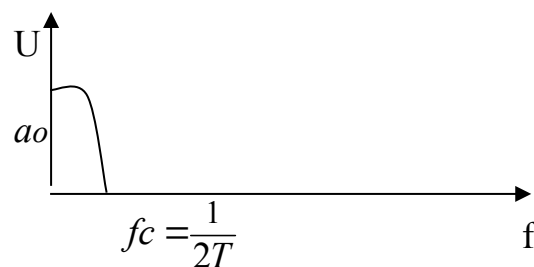


Рис.2.13 - Амплітудно – частотна характеристика ФНЧ

в. ФНЧ $fc = \frac{3}{2}T$ (рис. 2.14, 2.15)

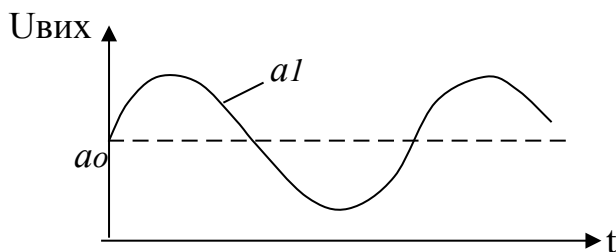


Рис. 2.14 - $ft = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sin x \cos \omega t T$

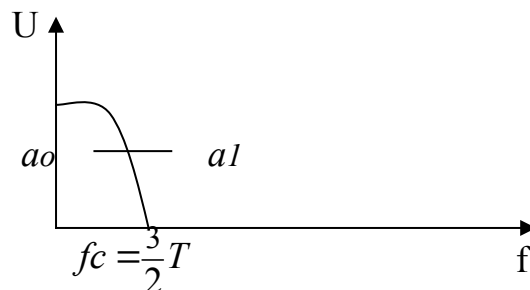


Рис.2.15 - ФНЧ $fc = \frac{3}{2}T$

г. ПФ, $f_{c1} = \frac{T}{2}; f_{c2} = \frac{3}{2}T$. (рис.2.16, 2.17)

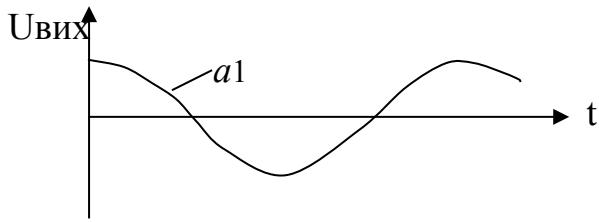


Рис.2.16 - ПФ, $f_{c1} = \frac{T}{2}$; $f_{c2} = \frac{3}{2}T$

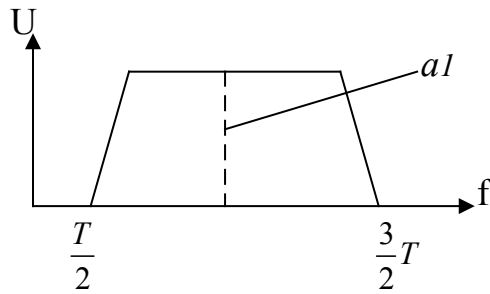


Рис. 2.17 $f(t) = \frac{2A\tau}{T} \frac{\sin x}{x} \cos \omega t$

д. ПФ, $f_{c1} = \frac{T}{2}$; $f_{c2} = \frac{3}{2}T$. (рис.2.18). На виході – усі гармоніки, крім $a1$:

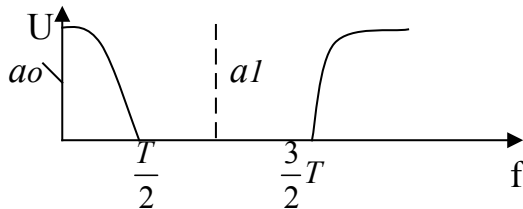


Рис.2.18 - $f(t) = \frac{A\tau}{T} + \frac{2A\tau}{T} \sum_2^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cos n\omega t$

Контрольні запитання:

1. Що таке представлення періодичної функції рядом Фур'є?
2. Що таке дискретний спектр ряду Фур'є?
3. Що таке ряд Фур'є для симетричної прямокутної хвилі?
4. Що таке представлення ряду Фур'є в комплексній формі?
5. Яка форма у вихідних сигналів на виході фільтрів?

1.3 Перетворення Фур'є

1

1.3.1 Пари перетворень Фур'є

Ряд Фур'є може бути розповсюджений на неперіодичні форми сигналів, такі як одиночні імпульси, при періоді $T \rightarrow \infty$. У цьому випадку послідовність імпульсів зводиться до одиночного імпульсу. Вважаючи спочатку $f(t)$ періодичної, маємо:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt;$$

для одиночного імпульсу $T \rightarrow \infty$; $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$ (мала частина) або $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{d\omega}{2\pi}$; відповідно n -я гармоніка ряду Фур'є буде $n\omega \rightarrow nd\omega$, і це дає загальну оцінку обумовлену як ω' . У межі знак суми перетвориться в інтеграл, і ми маємо

$$C_n = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1)$$

$$i \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} \quad (3.2)$$

Частина в дужках, після перетворення, є функцією тільки частоти і визначається як $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.3)$$

вона називається перетворенням Фур'є $F(\omega)$ від $f(t)$.

Підставивши (3.3) у (3.2) одержимо $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \frac{1}{T} \rightarrow 0 T \rightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.4)$$

це інверсне (зворотне) перетворення Фур'є. Тепер тимчасова функція $f(t)$ представляє вираження одиничного імпульсу.

Безперевинний спектр. Кінцевий результат перетворення Фур'є – то, будь-який імпульс можна представити як суму нескінченного числа гармонік $F(\omega)$, де ω - будь-яке загальне значення.

Це приводить до **безупинного спектра**, на відміну від дискретного спектра періодичних послідовностей. Частотні компонент дуже близькі одна до одної, тому що відстань між ними $\frac{1}{T}$ при $T \rightarrow \infty$, і $\frac{1}{T} \rightarrow 0$.

У загальному випадку, $F(\omega)$ - комплексне, і його амплітуда і фаза можуть бути представлені частотним спектром тимчасової функції $f(t)$. Величина $|F(\omega)|$ на графіку показує зміну амплітуди в залежності від частоти, і величина $|F(\omega)| d\omega$ представляє елемент площі під огибаючу в середині області $d\omega$, і називається спектральною щільністю.

1.3.2 Типові функції

а. Прямокутний імпульс (рис. 3.1)

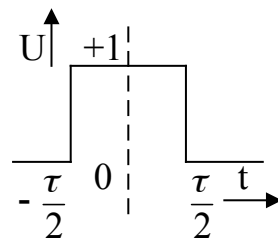


Рис. 3.1- Прямокутний імпульс

$$f(t) = 1, \quad -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2};$$

$$\text{для інших } t. \quad f(t) = 0,$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{-\frac{\tau}{2}} f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

або

$$F(\omega) = 0 + \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{j\omega} \left[e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} \right];$$

$$\text{звідси } F(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}},$$

$$\text{де } x = \frac{\omega\tau}{2}; \quad \frac{F(\omega)}{\tau} = \frac{\sin x}{x} \quad F(\omega) = \tau \frac{\sin x}{x}, \quad (3.5)$$

На рис. 3.2 – графік

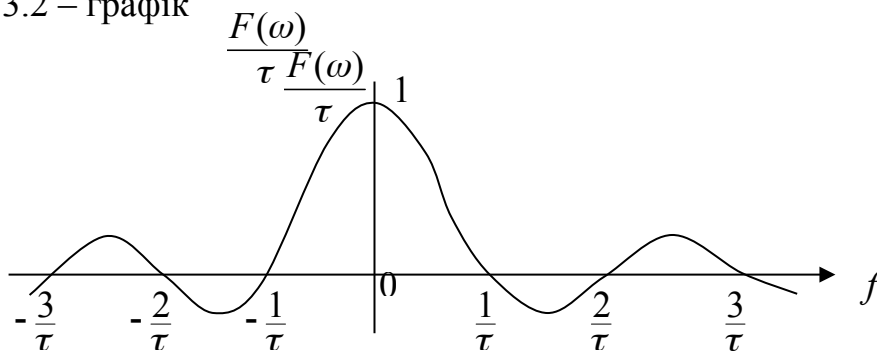


Рис. 3.2 - Неперервний спектр

Амплітуда $|F(\omega)|$ і фаза представляється на різних графіках рис. 3.3.

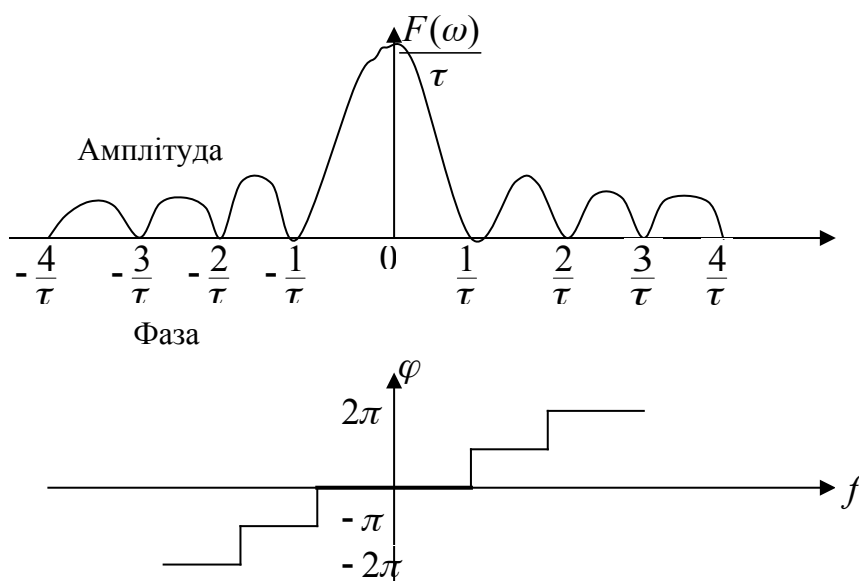


Рис.3.3 - Амплітуда $|F(\omega)|$

Зауваження:

1. $-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ максимум на графіку один.

2. Нулі з'являються при $\frac{\sin x}{x} = 0; \sin x = 0$ або $x = n\pi, n = 1, 2, \dots,$

і $\omega\tau = \pi, 2\pi, \dots, f = \frac{1}{\tau}; \frac{2}{\tau}; \dots$

3. Фазове зрушення – π радіан, коли крива на графіку змінює полярність від + до – або навпаки.

б. Прямокутний імпульс (рис.3.4).

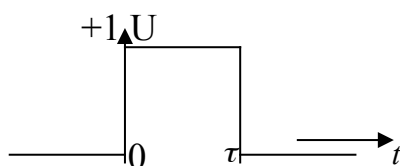


Рис.3.4 - Прямокутний імпульс

Тут $f(t)=1, 0 < t < \tau$;
 $f(t)=0$, для всіх інших випадків

$$F(\omega) = 0 + \int_0^{\tau} e^{-j\omega t/2} dt + 0 = \frac{e^{-j\omega\tau/2}}{-j\omega} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}); \quad (3.6)$$

$$\text{або } F(\omega) = \frac{2e^{-j\omega\tau/2}}{\omega} \left(\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2} \right) = \tau e^{-j\omega\tau/2} \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}, \quad (3.7)$$

$$F(\omega) = \tau e^{-jx} \frac{\sin x}{x}, \text{ де } x = \omega \frac{\tau}{2}; \quad (3.8)$$

$$i \frac{F(\omega)}{\tau} = e^{-jx} \frac{\sin x}{x}. \quad (3.9)$$

Амплітуда $\frac{F(\omega)}{\tau}$ і фаза $\varphi(\omega)$ представлена на різних графіках рис. 3.5.

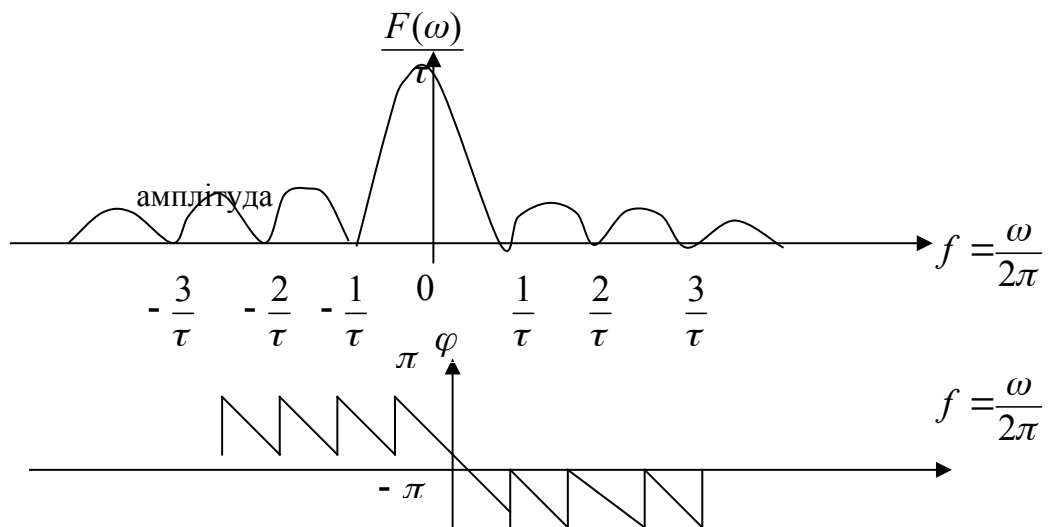


Рис. 3.6 - Амплітуда $\frac{F(\omega)}{\tau}$ і фаза $\varphi(\omega)$

Зауваження:

1. огибаюча спектра така ж, як у випадку а;
2. мається додаткове фазове зрушення e^{-jx} у відмінності від випадку а;
3. даний результат може бути отриманий застосуванням теореми зрушення.

1.3.3 Теорема зрушення

Перетворення Фур'є якої-небудь $f(t)$, затриманої на τ_0 , це те ж перетворення Фур'є, затримане фазовим фактором $e^{-j\omega\tau_0}$.

Доказ: $f(t - \tau_0)$ Нехай $F_1(\omega)$ – перетворення $f(t)$, і $F_2(\omega)$ – від $f(t - \tau_0)$.

$$\text{Тут } F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau_0) e^{-j\omega t} dt, \text{ або } F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'} e^{j\omega\tau_0} dt',$$

де $t' = t - \tau_0$; або $t = t' + \tau_0$, і $dt = dt'$ ($\tau_0 = \text{const}$).

$$\text{Але } \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F_1, \text{ тому що } \omega - \text{це будь-яке значення } t.$$

$$\text{Висновок } F_2(\omega) = F_1(\omega) e^{-j\omega\tau_0} \quad (3.10)$$

1.3.3 δ - функція

Це – функція Дірака з теоретично нескінченною амплітудою і нульовою шириною (рис. 3.7)

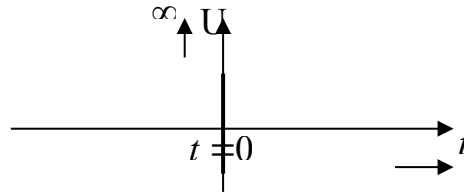


Рис. 3.7 - Функція Дірака

$$1. \delta(t) = 0 \text{ скрізь, крім } t=0; \quad (3.11)$$

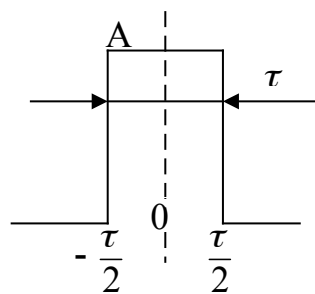


Рис.

$$3.8 - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.12)$$

з (3.12) випливає, що імпульс існує в районі $t=0$ і, площа під ним дорівнює 1. – δ функції як межі тривалості й амплітуди, якщо площа $A\tau=1$.

$$\delta(t) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} f(t)$$

де $f(t) = A, -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}, f(t) = 0$ для інших t .

$F(\omega)$ Якщо перетворення Фур'є від $\delta(t)$ є $F(\omega)$,

Та

$$(3.13) \quad F(\omega) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

У частотній області $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$;

Зворотне перетворення Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = \frac{e^{j\omega t}}{2\pi} \quad (3.14)$$

У (3.13) частина під інтегралом - це функція $\frac{\sin x}{x}$, перетворення Фур'є для прямокутного імпульсу з амплітудою A ;

$$I \quad F(\omega) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} \left[A\tau \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} \right] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}$$

або $F(\omega) = 1 \times 1 = 1$

Частотний спектр δ - функції має постійну амплітуду у всьому діапазоні частот (рис.3.9). Це ідеалізована модель – **білий шум**.

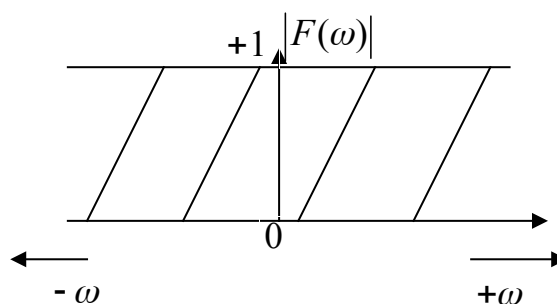


Рис. 3.9 – Ідеалізована модель – білий шум

1.3.4 Спектр потужності

У випадку періодичних сигналів середня потужність асоціюється з напругою $f(t)$ на резисторі величиною 1 а, 4 дана як

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} dt,$$

або

$$P_{cp} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega t} dt = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n C_{-n},$$

$$i P_{cp} = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \text{ Ват.} \quad (3.15)$$

1.3.5 Енергетичний спектр

Для кінцевих сигналів, наприклад, одиночних імпульсів, середня потужність $\rightarrow 0$, тому що $\frac{1}{T} \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$.

Тут зручніше оцінювати повну енергію:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt;$$

при $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$

$$\text{одержуємо } W = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega,$$

$$\text{або } W = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 df, \text{ Джоуль} \quad (3.16)$$

Цей результат відомий як теорема Релея, $|F(f)|^2$ величина називається спектральною щільністю енергії, тому що це – енергія на одиницю частоти.

Контрольні запитання:

1. Що таке пари перетворень Фур'є?

2. Який спектр у прямокутного імпульсу?
3. Що таке теорема зрушення?
4. Які характеристики у δ - функції?
5. Який спектр потужності у періодичних сигналів?
6. Який енергетичний спектр у кінцевих сигналів?

1.4 Дискретне перетворення Фур'є

1.4.1 ДПФ

Перетворення Фур'є може бути застосоване для неперервних сигналів $y(t)$, що представлені в часі вибітками кінцевої довжини (рис. 4.1). Сигнал

поділяється на вибірки з інтервалами T с N вибірками, довжина послідовності NT (рис.4.1)

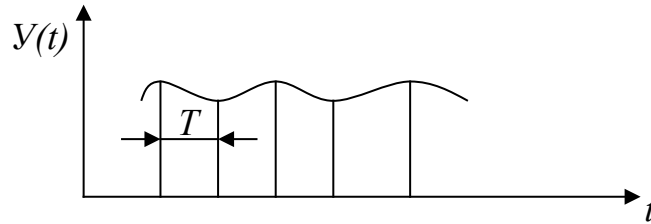


Рис.4.1 - Вибірки з інтервалами T с N

Дискретний сигнал $S(t)$ представляє дискретні вибірки, що можуть бути представлені як δ -функції з амплітудами $f(nT)$, $n=0,1,2,\dots,N-1$, (рис.4.2)

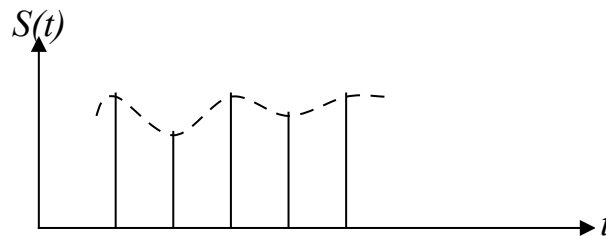


Рис.4.2 - Дискретні вибірки

Дискретні вибірки $f(nT)$ можуть бути представлені як

$$S(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\delta(t - nT), \quad (4.1)$$

де $\delta(t - nT)$ - дельта – функції в $t = nT$.

Якщо цей дискретний сигнал має спектр із N частотами, розподіленими на величину Ω , для зручності, то ми маємо:

$$N\Omega = \frac{2\pi}{T} \text{ або } \Omega = \frac{2\pi}{NT}.$$

Перетворення Фур'є від $f(nT)$ представляється як:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\delta(t - nT)e^{-j\omega t} dt, \quad (4.2)$$

якщо величина $\omega = m\Omega$, $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$, то отримуємо

$$F(m\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-jmn\Omega T} \quad (4.3)$$

с дискретним перетворенням Фур'є N дискретний вибірок, представлених як $f(nT)$.

Тому що $e^{-jmn\Omega T} = e^{-j(mn+N)\Omega T}$, де N кінцеве число, то частотні компоненти повторюють себе після N компонент.

Якщо $(N/2 - 1)$ компонент є дзеркальним відображенням попередніх компонентів, то на практиці досить визначити кількість різних компонентів до $\frac{N\Omega}{2}$ (рис. 4.3)

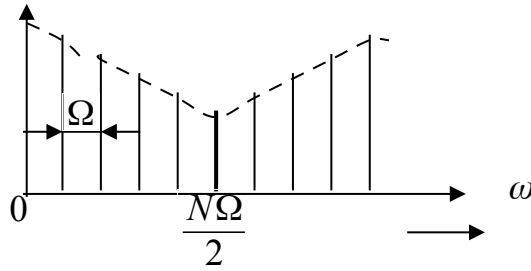


Рис. 4.3 - Кількість різних компонентів до $\frac{N\Omega}{2}$

Зауваження:

1. Інверсне ДПФ:

$$f(nT) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m\Omega) e^{jmn\Omega T}, \quad (4.4)$$

яке легко визначається для $F(m\Omega)$ в правій частині рівняння (4.4):

$$\text{права частина} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(nT) e^{-jmn\Omega T} e^{jmn\Omega T} \quad (4.5)$$

або права частина $= \frac{1}{N} f(nT) N = f(nT)$ з величинами лівої частини рівняння.

2. Так буде показано далі, Z - перетворення $F(z)$ дискретної функції $S(t)$ дано як

$$\text{або } F(z) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) Z^{-n}, \text{ і якщо } z = e^{-jmn\Omega T},$$

$$\text{знайдемо } F(e^{jmn\Omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) e^{-jmn\Omega T} \quad (4.6)$$

це така ж форма як ДПФ.

Таким чином, ДПФ – це об'єднання цифрових величин Z - перетворення на N , рівномірно розподілені в крапках навколо одиничної окружності так, що

$$e^{-jm\Omega T} = e^{-jm2\pi/N}$$

3. При $N\Omega = \frac{2\pi}{T}$, N - дискретні частотні компоненти, ДПФ задовольняє

теоремі дискретизації за умови

$$\omega g = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{і} \quad \omega g = 2 \left\lfloor \frac{N\Omega}{2} \right\rfloor$$

$$\text{або} \quad \omega g > 2 \left\lfloor \frac{N}{2} - 1 \right\rfloor \Omega ; \quad (4.7)$$

коли $\left\lfloor \frac{N}{2} - 1 \right\rfloor \Omega$ найбільша, частотні компоненти - дискрети визначаються

як незалежні.

4. Якщо ж задовольняються умови теореми дискретизації $\omega g = 2 \left\lfloor \frac{N\Omega}{2} \right\rfloor \frac{2\pi}{T}$,

то спектральні компоненти перекриваються біля величини $\frac{N\Omega}{2}$. Це ефекти

накладення спектрів, при яких компоненти спектра вище $\frac{N\Omega}{2}$ не можуть бути виділені без перекручувань.

1.4.2 БПФ

ДПФ можна записати іншим – матричним способом представленийі

$$W = e^{j\frac{2\pi}{N}} \text{ у виді } e^{-jmn\Omega T} = e^{-j\frac{2\pi mn}{N}} = W^{mn}.$$

Далі цей переклад ДПФ у матричну форму представляється як БПФ:

$$F(m\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) W^{mn}, \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.8)$$

$$\text{або} \quad [Fm] = [W^{mn}] [fn] \quad (4.9)$$

У матричній формі

$$[Fm] = \begin{bmatrix} F(0) \\ F(\Omega) \\ \vdots \\ F(m\Omega) \end{bmatrix}; \quad [W^{mn}] = \begin{bmatrix} W^0 W^0 \dots W^0 \\ W^0 \dots W^{N-1} \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \\ W^0 W^{N-1} \dots W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}; \quad [fn] = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(T) \\ \vdots \\ f(nT) \end{bmatrix}; \quad (4.10)$$

m - представляє рядка; n - стовпці в $[W^{mn}]$.

Оцінка будь-якого приватного $F(m\Omega)$ чи компонента $F(\Omega)$ включає комплексні добутки і N комплексних сум, то $2N$ комплексних величин.

$$2N \frac{N}{2} = N^2$$

Оцінка $N/2$ незалежних частотних компонентів вимагає значень величин; при $N = 2^{10} = 1024$ операції.

Для зменшення якості операцій використовуються різні алгоритми, наприклад, алгоритм *Cooley – Tukey*, при якому число операцій зменшується до $N \log_2 N$, то $1024 \log_2 1024 = 10240$ замість $N^2 = (1024)^2$. Це дає відношення $\frac{10240}{(1024)^2} \cdot 100\% = 1\%$, і величина запасу в загальному обсязі необхідних величин складає 99%.

1.4.3 Алгоритм *Cooley – Tukey*

Це алгоритм з числом частотних кроків, рівних числу тимчасових вибірок N . При цьому матриця W представляється як мережа матриць, з $N = 2^v$, де v - ступінь.

На (рис.4.4) для $N=4$. Тут ступінь $v = 2$, що дає дві квадратні матриці $[F_0]^1$ і $[F_0]^2$.

Діаграма містить ряди і стовпці зі значеннями вибірок f_n ліворуч і перетворень F_n праворуч. По середині – проміжні позиції крапок у кружечках із представленням потужності W матриць.

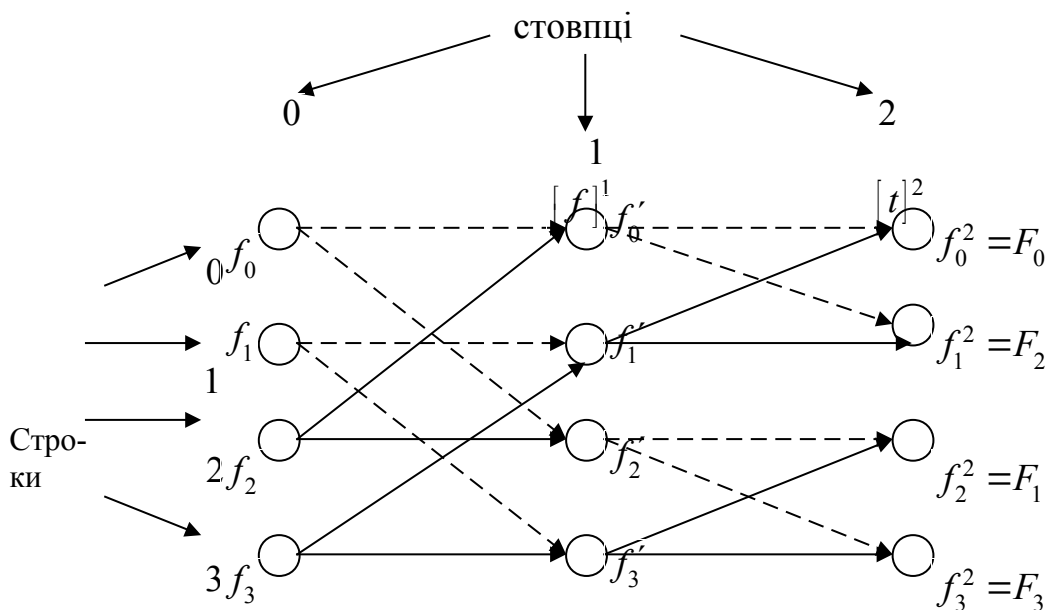


Рис. 4.4 - Дві квадратні матриці $[F_0]^1$ і $[F_0]^2$

З'єднання пунктирними лініями – це додавання, а суцільними лініями – множення. Діаграма використовує бінарну арифметику і логічні правила.

Розрахунок будь-якого конкретного БПФ, такий як F_0 , потребує попереднього розрахунку таких крапок, як $[F_0]^2$ і $[F_0]^1$.

Останнє дається рекурсивним рівнянням.
$$X(c, r) = \underbrace{X(c-1, r_a)}_{\text{сглажуємі величини}} + \underbrace{W^n X(c-1, r_b)}_{\text{умножуючі величини}},$$

де X - вузол у стовпці C , і ряди r, r_a, i, r_b - це ряди положення, n - потужність матриці.

Для F_0 знаходи представлення ДПФ: $F_0 = [f_0]^2 = [f_0]' + W^0 [f_1]^1$;

$$[f_1]' = f_1 + W^0 f_3 = f_1 + f_3;$$

$$[f_0]' = f_0 + W^0 [f_1]' = f_0 + f_2 + W^0 (f_1 + f_2)$$

у результаті $F_0 = [f_0]' + W^0 [f_1]' = f_0 + f_2 + W^0 (f_1 + f_2)$

або $F_0 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$, і БПФ представляється у виді чотирьох часових вибірок.

Приклад 4.1. Для трикутного сигналу визначити дискретні частотні компоненти для алгоритму БПФ із 16 точками вибірок (рис. 4.5).

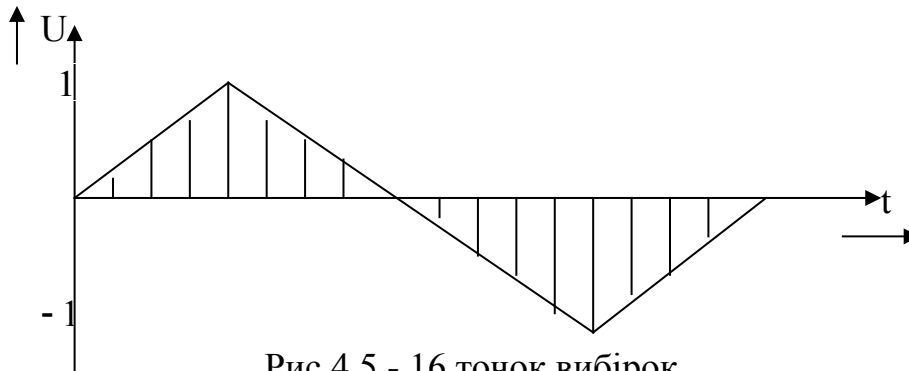


Рис.4.5 - 16 точок вибірок

Таблиця дискретних значень

Точка	Значення	Точка	Значення
0	0,00	8	0,00
1	0,25	9	-0,25
2	0,5	10	-0,5
3	0,75	11	-0,75
4	1,00	12	-1,00
5	0,75	13	-0,75
6	0,5	14	-0,5
7	0,25	15	-0,25

Тут $N = 16$; маємо

$$W = e^{-j2\pi/N} = e^{-j\pi/8} = (0,9239 - j0,3827);$$

$$W^{mn} = (e^{-j\pi/8})^{mn}, m = 0, 1, 2, \dots, 15; n = 0, 1, 2, \dots, 15.$$

$$F(m\Omega) = \sum_{n=0}^{15} f(nT)W^{mn}.$$

а. Розрахунок

Тут $m = 0; mn = 0;$

$$F(0\Omega) \sum_{n=0}^{15} f(nT)W^n, W^0 = (e^{-j\pi/8})^0 = e^0 = 1,$$

і $F(0\Omega) = f_0 + f(T) + \dots + f(15T).$

Підставляючи значення вибірок, отримуємо

$$F(0\Omega) = 0,00 + 0,25 + 0,5 + 0,75 + 1 + 0,75 + 0,5 + 0,25 + 0,00 - 0,25 - 0,5 - 0,75 - 1 - 0,75 - 0,5 - 0,25 = 0;$$
$$F(0\Omega) = 0.$$

б. Розрахунок $F(1\Omega).$

Тут $m = 1; mn = n,$

і $F(1\Omega) = \sum_{n=0}^{15} f(nT)W^n;$

де $W^0 = 0;$

$$W^1 = 0,9239 - j0,3827;$$

$$W^2 = 0,7070 - j0,7070;$$

$$W^3 = 0,3827 - j0,9239;$$

$$W^4 = -j;$$

$$W^5 = -(0,3827 + j0,9239);$$

$$W^6 = -(0,707 + j0,707);$$

$$W^7 = -(0,9239 + j0,3827);$$

$$W^8 = 0$$

Значення W^9 і W^{15} комплексно сполучені з попередніми величинами,
 $W^9 = (-0,9239 + j0,3827)$, яка комплексно сполучена з W^7 ;

Тут

$$F(1\Omega) = f(0)W^0 + f(T)W^1 + \dots + f(15T)W^{15};$$

Підставляючи значення вибірок, отримуємо

$$F(1\Omega) = 0,00 + 0,25(0,9239 - j0,3827) + 0,5(0,707 - j0,707) + 0,75(0,3827 - j0,9239) + 1(-j) + 0,75(-0,3827 - j0,9239) + 0,5(-0,707 - j0,707) + 0,25(-0,9239 - j0,3827) + 0,00 - 0,25(-0,9239 + j0,3827) - 0,5(0,707 + j0,707) - 0,75(0,3827 - j0,9239) - 0,1(j) - 0,75(0,3827 + j0,9239) - 0,5(0,707 + j0,707) - 0,25(0,9239 + j0,3827)$$

або $F(1\Omega) = 1,7429 - j6,5684 \Rightarrow j6,5684$,

або $F(1\Omega) = 6,5684$.

Результати в таблиці дисплей:

F_m	$ F_m $
F_0	0
F_1, F_{15}	6,5684
F_2, F_{14}	0
F_3, F_{13}	0,8099
F_4, F_{12}	0
F_5, F_{11}	0,3616
F_6, F_{10}	0
F_7, F_9	0,2599
F_8	0

Контрольні запитання:

1. Що таке перетворення Фур'є від дискретної функції?
2. Що таке інверсне дискретне перетворення Фур'є?
3. Що таке матрична форма дискретного перетворення Фур'є?
4. Як використовувати алгоритм *Cooley – Twkey*?

1.5 Відклик ланцюгів

1.5.1 Неперіодичні сигнали

Відгук ланцюга – це реакція ланцюга на проходження сигналів (рис. 5.1). Ланцюг має частотну характеристику. Відношення між спектром

вхідного сигналу і вихідним відгуком ланцюга часто алгебраїчне, і знаходиться простіше, ніж альтернативне відношення між тимчасовою вхідною функцією і відгуком ланцюга. Відгук ланцюга на неперіодичні сигнали визначаються за допомогою перетворення Фур'є.

Передатна функція ланцюга $H(\omega)$ визначаються як

$$H(\omega) = \frac{\text{Вихідні перетворення}}{\text{вхідні перетворення}} = |H(\omega)| / \Phi(\omega),$$

де $|H(\omega)|$ - амплітуда відгуку; $\Phi(\omega)$ - фазове зрушення в ланцюзі.

Обидві величини $|H(\omega)|$ і $\Phi(\omega)$ - залежать від частоти.

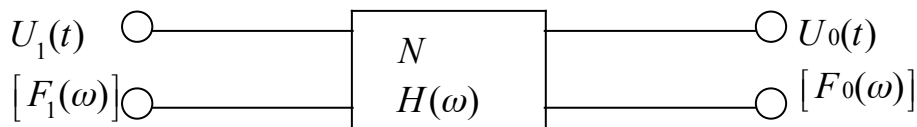


Рис. 5.1 - $U_1(t)$ і $U_0(t)$ - вхідні і вихідні функції часу відповідно

На рис.5.1 $U_1(t)$ і $U_0(t)$ - вхідні і вихідні функції часу відповідно; $F_1(\omega)$ і $F_0(\omega)$ - відповідні перетворення Фур'є.

Для лінійної системи

$$\frac{F_0(\omega)}{F_1(\omega)} = H(\omega), \quad (5.1)$$

або $F_0(\omega) = F_1(\omega)H(\omega)$,

де $F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(t)e^{-j\omega t} dt$

Вихідна функція $U_0(t)$ знаходиться зворотним перетворенням Фур'є:

$$U_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\omega)e^{j\omega t} d\omega ,$$

або
$$U_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F_1(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (5.2)$$

Зауваження.

1. Якщо $U_1(t)$ - постійна напруга, або синусоїдальна напруга $H(\omega)$, дорівнює відношенню вихідної напруги до вхідної напруги.
2. Вихідна напруга може бути також знайдено за допомогою інтеграла згортки.

1.5.2 Ідеальний ФНЧ

Це типовий екземпляр використовуваних при обробці сигналів ланцюгів. Розглянемо ідеальний фільтр із характеристиками (рис. 5.2,а,б);

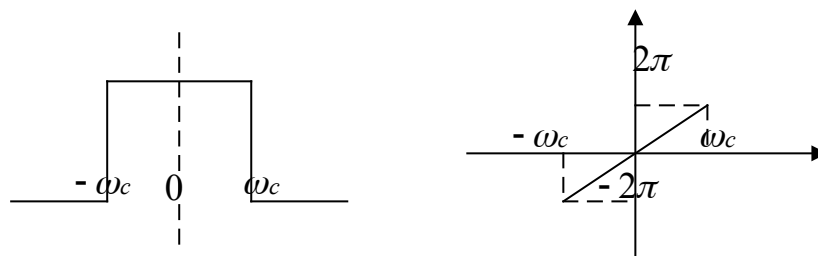


Рис. 5.1 Ідеальний фільтр із характеристиками
а) амплітудний відгук;
б) фазова характеристика.

Характеристики фільтра:

- амплітуда відгуку постійна від $-\omega_c$ до $+\omega_c$;
- крутий вертикальний зріз на $-\omega_c$ і $+\omega_c$;
- лінійна фазова характеристика.

$$T_{\text{УТ}} H(\omega) = 1e^{-j\Phi(\omega)}, |H(\omega)| = 1$$

Такі ідеальні характеристики зручні для перебування результатів з використанням більшості практичних фільтрів.

а. Відгук на ступеневу функцію

Одиничну ступеневу функцію можна представити сумою двох сигналів. Один сигнал – постійна напруга з $|U| = \frac{1}{2}$, а інша одинична ступенева напруга з амплітудою від $-\frac{1}{2}$ до $+\frac{1}{2}$, прикладене в момент $t = 0$ (рис. 5.2).

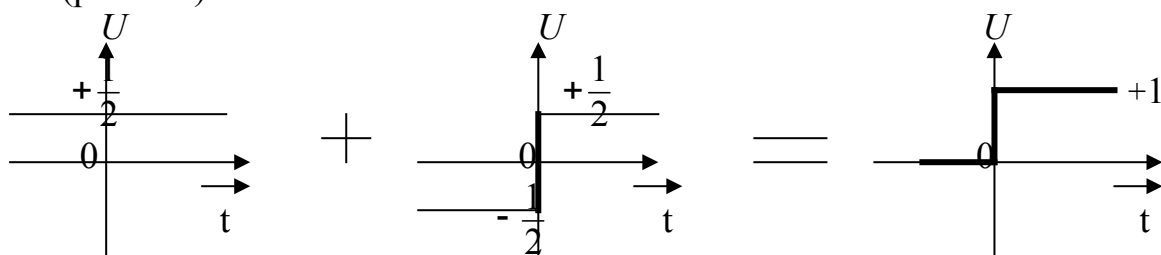


Рис.5.2 – Одинична ступенева функція

Вихідні відгуки $U_0'(t)$ і $U_0''(t)$ відповідно.

Вихідний відгук на перший сигнал: $\frac{U_0(t)}{U_1(t)} = H(\omega) = 1e^{-j\Phi(\omega)}$, тому що $U_1 = U =$

Тут $\Phi(\omega) = 0$, і $U_1(t) = \frac{1}{2}$, тоді $U'(0) = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$.

Відгук $U''(t)$ на одиничну ступеневу функцію з напругою від $-1/2$ до $+1/2$ знаходиться шляхом визначення перетворення Фур'є $F_1(\omega)$, а потім - зворотнім перетворенням Фур'є знаходиться $U_0''(t)$.

$$\text{Тут } F_1(\omega) = \frac{1}{j\omega};$$

$$U''(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (5.3)$$

де $H(\omega) = 1e^{-j\Phi(\omega)}$, і $-\omega_c < \omega < +\omega_c$.

$$\text{У результаті } U_0''(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1e^{-j\Phi(\omega)} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{nj\omega} \int_0^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_3)} d\omega.$$

де $\omega t_3 = \Phi(\omega)$,

$$\text{і } U_0''(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{\sin \omega(t-t_3)}{\omega} d\omega, \text{ з використанням тільки } \sin \text{ компонентів, тому}$$

що друга вхідна функція непарна в часі.

Покладемо $\omega(t-t_3) = x$, і $\omega_c(t-t_3) = X$;

тоді $d\omega = \frac{dx}{t-t_3}$, й одержимо

$$U_0''(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx, \quad (5.4)$$

результати інтегрування показані на рис.5.3:

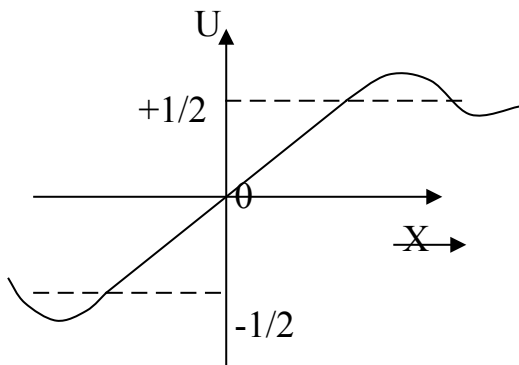


Рис. 5.3 - Результати інтегрування

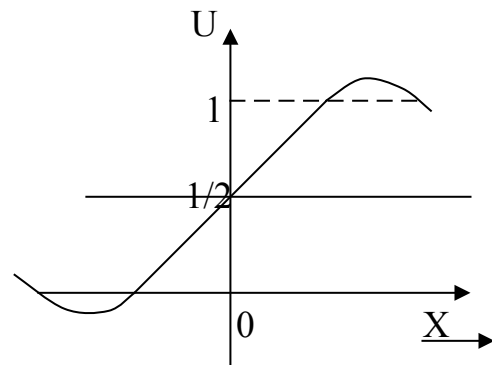


Рис. 5.4 - Повний вихідний відгук

Повний вихідний відгук знаходиться як (рис. 5.4) $U_0(t) = U_0'(t) + U_0''(t)$,

$$\text{або } U_0(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^X \frac{\sin x}{x} dx \quad (5.5)$$

Зауваження: 1. Час зростання tr від 0,1 до 0,99 амплітуди дає $\omega c t r = \pi$; відповідно $t r = \frac{\pi}{\omega c} = \frac{1}{2 f_c}$.

2. Частота пере коливань $f_{nep} = \frac{1}{T}$; $\omega c T f_{nep} = \frac{1}{T}$; $\omega c T = 2\pi$, $u f_{nep} = f_c$.

3. Час затримки на рівні $\frac{1}{2} \in t_3$, $\omega c t_3 = \Phi(\omega)$, $t_3 = \frac{\Phi(\omega)}{\omega c} \approx \frac{2\pi}{\omega c}$ або $t_3 \approx \frac{1}{f_c}$.

б. Відгук на прямокутний імпульс

При ширині імпульсу $\tau \geq \frac{1}{f_c}$ відгук буде такий же, як і на дві східчасті функції – позитивну і негативну, із затримкою включення, рівної τ (рис. 5.5).

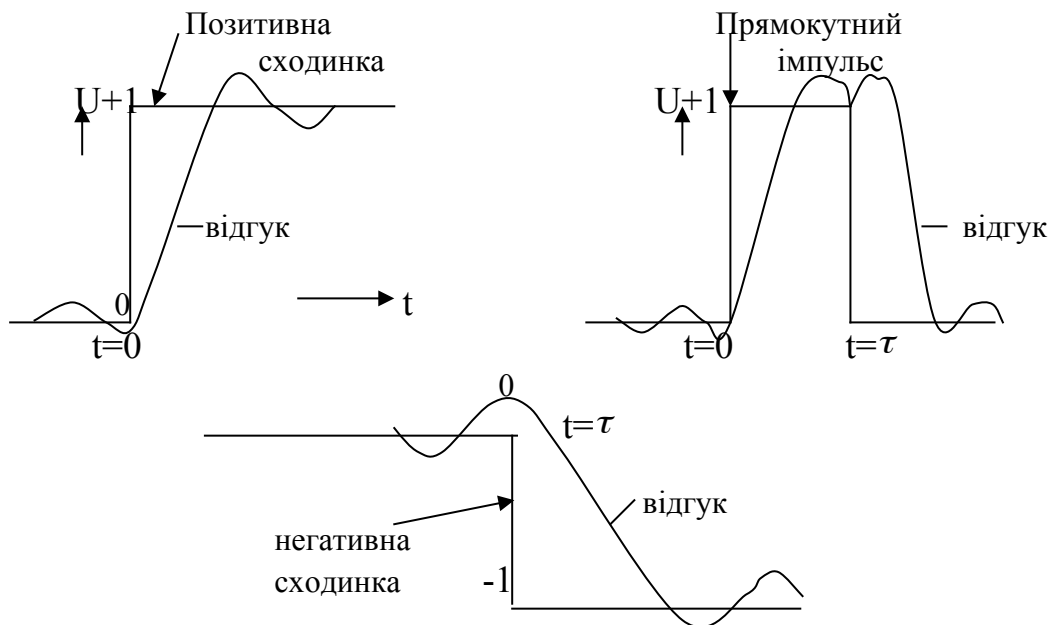


Рис. 5.5 - Відгук на прямокутний імпульс

в. Імпульсна функція (одиничний імпульс)

Це імпульс із шириною $\tau < \frac{1}{f_c}$ - дуже вузький імпульс. Огибаюча відгуку має форму $\sin x/x$. Якщо $U_0(t)$ - вихідний відгук, то

$$U_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) d\omega, H(\omega) = 1 e^{j\Phi(\omega)}, F_1(\omega) = A\tau = 1$$

$$i U_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega c}^{\omega c} e^{-j\Phi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega c}^{\omega c} e^{j\omega(t-t_3)} d\omega; \omega t_3 = \Phi(\omega);$$

$$U_0(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{j\omega(t-t_3)}}{j(t-t_3)} \right]_{-\omega c}^{+\omega c} = \frac{1}{2\pi j} \left[\frac{e^{j\omega c(t-t_3)} - e^{-j\omega c(t-t_3)}}{(t-t_3)} \right]. \quad (5.6)$$

остаточно
$$U_0(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(t - t_3)}{\omega_c(t - t_3)} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin x}{x},$$

(5.7) $x = \omega_c(t - t_3).$

Відгук представлений на (рис. 5.6):

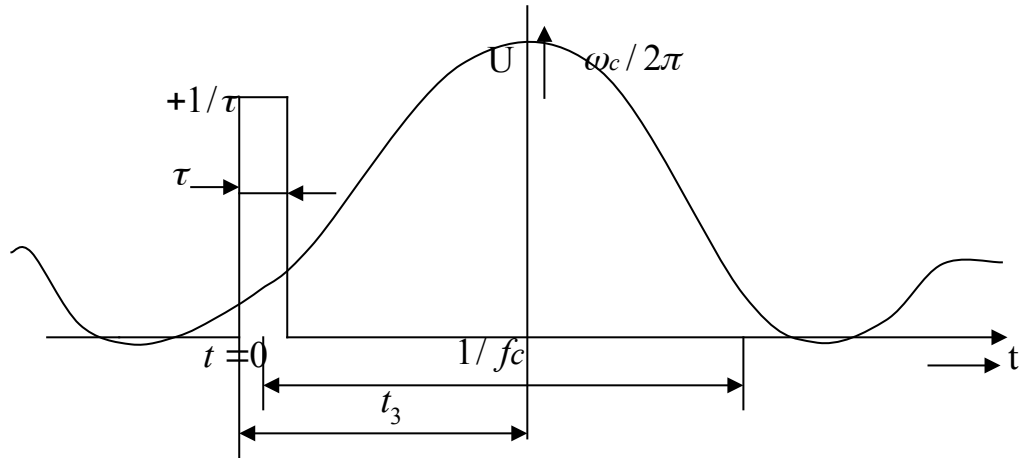


Рис. 5.6 - Вихідний відгук

1.5.3 Періодичні сигнали

Для таких сигналів відгук фільтра знаходиться з використанням розкладання частотних компонентів відгуку в ряд Фур'є. На виході будуть тільки ті компоненти, які пройдуть через фільтр. Знаючи частоту зрізу фільтра f_c , можна визначити, які гармоніки вхідних частот виявляться на виході. У результаті вихідний відгук дає проста суперпозиція частот, що пройшли через фільтр.

1.5.4 Практичний ФНЧ

Передатна функція фільтра (рис.5.7,а,б) має амплітудну і фазову характеристики:

У ланцюзі практичного фільтра має місце загасання, через якого при проходженні через фільтр модуль сигналу зменшується - з'являються втрати, вимірювані в децибелах (ДБ).

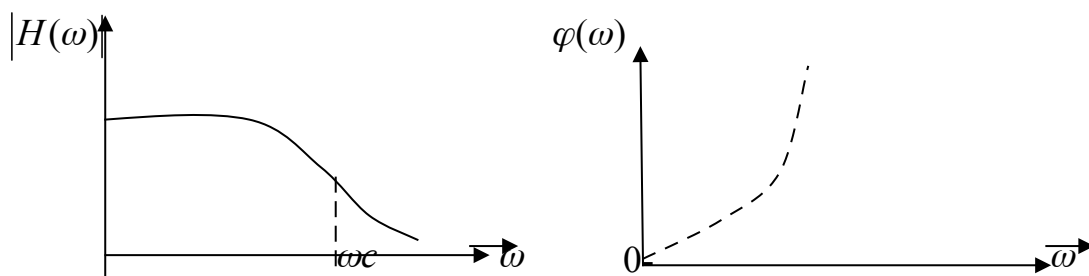


Рис. 5.7 - Передатна функція фільтра
а) амплітудна характеристика б) фазова характеристика

Так, для одиничних синусоїдальних напруг U_0 та U_1

$$\text{маємо } \frac{U_0}{U_1} = H(\omega) = |H(\omega)| e^{-j\Phi(\omega)} ;$$

$$\text{і } \left| \frac{U_0}{U_1} \right| = |H(\omega)| .$$

Утрати на загасання в децибелах визначаються як :

$$\text{Утрати загасання} = 20 \log_{10} \left| \frac{U_1}{U_0} \right|, \text{ дБ,}$$

$$\text{або витрати на загасання } 20 \log_{10} \left| \frac{1}{H(\omega)} \right|, \text{ дБ.}$$

Фазове зрушення в ланцюзі $\Phi(\omega)$ - у або радіанах у градусах.

Контрольні запитання:

1. Що таке передаточна функція ланцюга?
2. Які характеристики у ідеального фільтра нижніх частот?
3. Який відгук на прямокутний імпульс?
4. Який відгук на одиничну функцію?

1.6 Перетворення Лапласа

1.6.1 Перетворення Лапласа

У багатьох практичних задачах функції, що представляють інтерес, починаються $t=0$ точці. У цих випадках більш просто застосовувати перетворення Лапласа.

Головна відмінність між перетвореннями Фур'є і Лапласа в тім, що перетворення Фур'є використовують хвилі позитивних і негативних частот, а перетворення Лапласа використовує загасаючі хвилі з додатковим фактором $e^{-\sigma}$, де σ - позитивне число.

Визначення: Для тимчасової функції $f(t)$, періодичної або неперіодичної, яка визначається від $t=0$ і після перетворення Лапласа $L[f(t)]$ представляється як

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt. \quad (6.1)$$

Представивши $S = \sigma + j\omega$ і $L[f(t)] = F(s)$, одержуємо перетворення Лапласа у вигляді:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (6.2)$$

Приклад 6.1 Знайти перетворення Лапласа для ступеневої функції.

Рішення: $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt$, тому що $f(t) = 1$ для $t > 0$;

$$F(s) = \frac{[e^{-st}]_0^{\infty}}{-s} = \frac{e^{-\infty} - e^0}{-s} = \frac{1}{s} \text{ або } F(s) = \frac{1}{\sigma + j\omega}.$$

Застосування.

Функція $F(s)$ включає тільки параметри s і є алгебраїчним представленням. По порівняно простих правилах при рішенні проблем тимчасова функція $f(t)$ перетвориться в нову функцію $F(s)$. Потім проблема зважується в комплексної s - області, і в кінцевому рахунку знову перетвориться в тимчасову область з використанням зворотного перетворення Лапласа шляхом вибору зі стандартної таблиці 6.1.

На практиці це реально полегшує рішення диференціальних рівнянь у s - області з подальшим перетворенням результату в тимчасову область для остаточного фізичного рішення.

Таблиця 6.1 - Використання зворотного перетворення Лапласа шляхом вибору

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$a(\text{const } t)$	a/s	$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

e^{-at}	$\frac{1}{a+s}$	$\frac{t}{2\omega} \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{s^2 + \omega^2}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
t^n (n - ступінь)	$\frac{n}{S^n + 1}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$

1.6.2 Диференціальне рівняння

Рівняння з тимчасової області перетвориться в \mathcal{Q} – область, за допомогою перетворення Лапласа для кожної складової рівняння. Наприклад, виберемо $i(t) = f(t); i(0) = f(0); i_n(0) = d^n i(t) \Big|_{t=0}$.

Стандартні результати – у таблиці 6.2:

Таблиця 6.2 - Стандартні результати

$f(t)$	$F(s)$
$i(t)$	$I(s)$
$ai(t), a = \text{const}$	$aI(s)$
$\frac{di(t)}{dt}$	$sI(s) - i(0)$
$\frac{d^n i(t)}{dt^n}$	$S^n I(s) - S^{n-1}i(0) - S^{n-2}i_1(0)$
$\int i(t) dt$	$\frac{I(s)}{s}$

1.6.3 Зворотне перетворення Лапласа

Для перебування $f(t)$ з $F(s)$ потрібно зворотне перетворення Лапласа. Математично воно представляється як комплексний інтеграл з інтегруванням

уздовж направляючої лінії в s - області на $s = \sigma_1$, від $s = \sigma_1 - j\infty$ до $s = \sigma_1 + j\infty$

маємо:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (6.3)$$

На практиці не треба проводити звичайне інтегрування. Для перебування рішення диференціального рівняння необхідно тільки представити кінцевий результат, що знаходиться в s - області, у стандартній формі. Це робиться шляхом поділу функції $F(s)$ на частини у відповідності зі стандартними правилами. Ці правила включають використання постійних величин A , B й інших, котрі оцінюються коефіцієнтами або рівняннями підстановкою величин для s так щоб перетворити ці величини в нуль.

Стандартні правила

1. Реальні корені рівняння s_1, s_2 , і так далі;

Вибираємо $F(s) = \frac{A}{(s + s_1)} + \frac{B}{(s + s_2)} + \dots$;

2. Реальні повторювані корені:

Вибираємо $F(s) = \frac{A}{(s + s_1)} + \frac{B}{(s + s_1)^2} + \frac{C}{(s + s_1)^3}$ - тут для трьох

повторюваних коренів;

3. Уявні корені $\alpha + j\omega; \alpha - j\omega$:

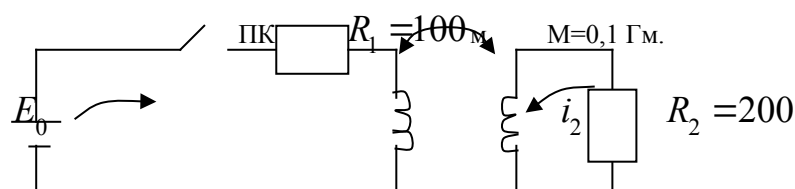
Вибираємо $F(s) = \frac{A}{(s + \alpha) + j\omega} + \frac{B}{(s + \alpha) - j\omega}$.

Потім тимчасова функція $f(t)$ знаходиться шляхом ідентифікації кожної частини зі зворотним перетворенням Лапласа з таблиці 6.1 шляхом використання стовпця $F(s)$ для перебування відповідної $f(t)$. Це розглядається в прикладах .

1.6.4 Приклади

Приклад 6.2 Два ланцюги з'єднані взаємною індукцією M (рис.6.1). Перемикач ПК включений під час $t = 0$, і напруга E_0 підключається до

першого ланцюга. Якщо точки i_1 і i_2 дорівнюють нулю в момент $t = 0$, знайти вираз для струму в другому ланцюзі в момент t .



$$i_1 \quad L_1 = 0,1 \text{ ГМ}$$

$$L_2 = 0,3 \text{ ГМ}$$

Рис. 6.1 - Два ланцюги з'єднані взаємною індукцією М

Рішення. З урахуванням напрямку струмів у ланцюгах, що показано для позитивною взаємоіндукцією, рівняння ланцюга

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} = E_0;$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} = 0.$$

Після перетворення Лапласа з обох сторін рівнянь:

$$L_1 [sI_1(s) - i_1(0)] + R_1 I_1(s) + M [sI_2(s) - i_2(0)] = \frac{E_0}{s};$$

$$L_2 [sI_2(s) - i_2(0)] + R_2 I_2(s) + M [sI_1(s) - i_1(0)] = 0.$$

Тому що $i_1(0) = i_2(0)$ при $t = 0$, маємо

$$(L_1 s + R_1) I_1(s) + M s I_2(s) = \frac{E_0}{s};$$

$$(L_2 s + R_2) I_2(s) + M s I_1(s) = 0.$$

Виключивши $I_1(s)$, одержимо з рівнянь

$$I_2(s) = \frac{M E_0}{(M^2 - L_1 L_2) s^2 - (L_1 R_2 - L_2 R_1) s - R_1 R_2}$$

Після підстановки цифрових величин:

$$M^2 - L_1 L_2 = -0,05; L_1 R_2 + L_2 R_1 = r; R_1 R_2 = 200,$$

$$\text{отримаємо } I_2(s) = \frac{-0,1 E_0}{0,055^2 + 75s + 200} = - \frac{2 E_0}{(s^2 + 140s + 4000)}.$$

По методу поділу на фракції:

$$I_2(s) = -2 E_0 \left\{ \left[\frac{A}{s+100} \right] + \left[\frac{B}{s+40} \right] \right\},$$

і $A(s+40) + B(s+100) = 1$ $A+B=0$, або дає $A = -B$.

$$40A + 100B = 1, \text{ або тут } B = \frac{1}{60} \text{ а } A = -\frac{1}{60};$$

$$I_2(s) = \frac{E_0}{30} \left[\frac{1}{s+100} - \frac{1}{s+40} \right].$$

Робимо зворотне перетворення по таблиці 6.1:

$$i_2 = \frac{E_0}{30} [e^{-100t} - e^{-40t}] .$$

Приклад 6.3

Котушка індуктивності L й опір R (рис.6.2) з'єднані паралельно з конденсатором C . У момент $t=0$ постійний струм E/R проходить через ці елементи, початковий заряд, конденсатора і струм заряду в момент $t=0$ дорівнюють нулю.

При $\frac{R_2}{4L_2} < \frac{1}{LC}$ знайти напругу на конденсаторі в момент t .

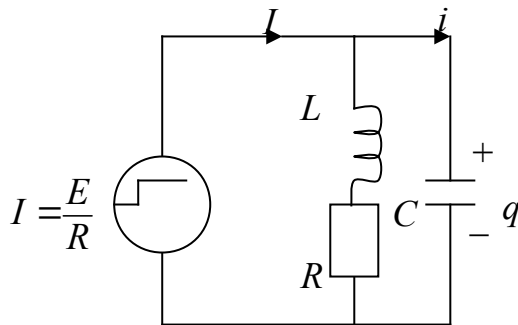


Рис.6.2 - Котушка індуктивності L й опір R

Рішення. Нехай напруга на конденсаторі C дорівнює U , коли його зарядний струм дорівнює i .

$$U = \frac{q}{C}; L \frac{d}{dt}(I - i) + R(I - i) = U;$$

Або тоді $\frac{q}{C} = L \frac{d}{dt}(I - i) + R(I - i)$.

Після перетворення Лапласа з обох сторін :

$$\frac{Q(s)}{C} = Z \left[L \frac{d}{dt}(I - i) + R(I - i) \right] =$$

$$Z \left[L \frac{di}{dt}(I - i) \right] = Ls \left[\frac{E}{Rs} - I(s) \right] \rightarrow (I - i) = 0 \text{ у момент } t = 0;$$

$$\text{і } Z [R(I - i)] = R \left[\frac{I}{s} - I(s) \right] \rightarrow (I - i) = 0 \text{ в момент } t = 0 .$$

Звідси випливає

$$I(s) = sQ(s) - q(0) = sQ(s) \rightarrow q(0) = 0 \text{ при } t = 0 .$$

$$\text{і } \frac{Q(s)}{c} = \frac{EL}{R} - Ls^2Q(s) + \frac{E}{s} - RsQ(s),$$

$$\text{або } Q(s) = \frac{\frac{EL}{R} + \frac{E}{S}}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{c}} = \frac{\frac{E}{R} + \frac{E}{LS}}{\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{Lc}\right)}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \beta^2 = \frac{1}{Lc} - \frac{R^2}{4L^2}; \text{ або позначимо } \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{Lc}.$$

$$\text{Тоді } Q(s) = \frac{E}{R} \left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \right] + \frac{E}{L} \left[\frac{A}{s} + \frac{(Bs+D)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \right],$$

де A, B, D - постійні величини, такі, що $A[(s+\alpha)^2 + \beta^2] + (Bs+D)s = 1$,
або $A+B=0; 2\alpha A+D=0$,

$$\text{що дає } A = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} = +LC; B = -A = -LC; D = -\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = -2\alpha LC.$$

$$\text{У } Q(s) = \frac{E}{R} \left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \right] + \frac{E}{L} \left[\frac{Lc}{s} - Lc \left\{ \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \right\} \right],$$

Або в результаті

$$Q(s) = \frac{E}{Rc} \left[\frac{1}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \right] + \frac{E}{s} - E \left\{ \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \right\}.$$

Провівши зворотне перетворення по таблиці 6.1, отримаємо

$$U = \frac{q}{C} = E \left[1 - e^{-\alpha t} \left\{ \cos \beta t + \left(\frac{R}{2\beta L} - \frac{1}{\beta Rc} \right) \sin \beta t \right\} \right],$$

Це і є напруга на конденсаторі C .

Контрольні запитання:

1. Яке визначення перетворення Лапласа?
2. Яке застосування перетворення Лапласа?
3. Яке визначення у зворотного перетворення Лапласа?
4. Які стандартні правила перебування для зворотного перетворення Лапласа?

1.7 Інтеграл згортки

1.7.1 Інтеграл згортки

В тимчасовій області вихідний відгук лінійного ланцюга може бути отримана в процесі **згортки**.

Згортка двох функцій $U(t)$ і $V(t)$ зважується інтегралом згортки :

$$U(t)*V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau)V(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} V(t)U(t-\tau)d\tau, \quad (7.1)$$

де $*$ позначає згортку; або τ - яка перемінна, що показує час реакції; t - час відгуку.

Процес згортки показаний на рис.7.1; тут $U(\tau)$ і $V(\tau)$ - функції перемінної τ ;

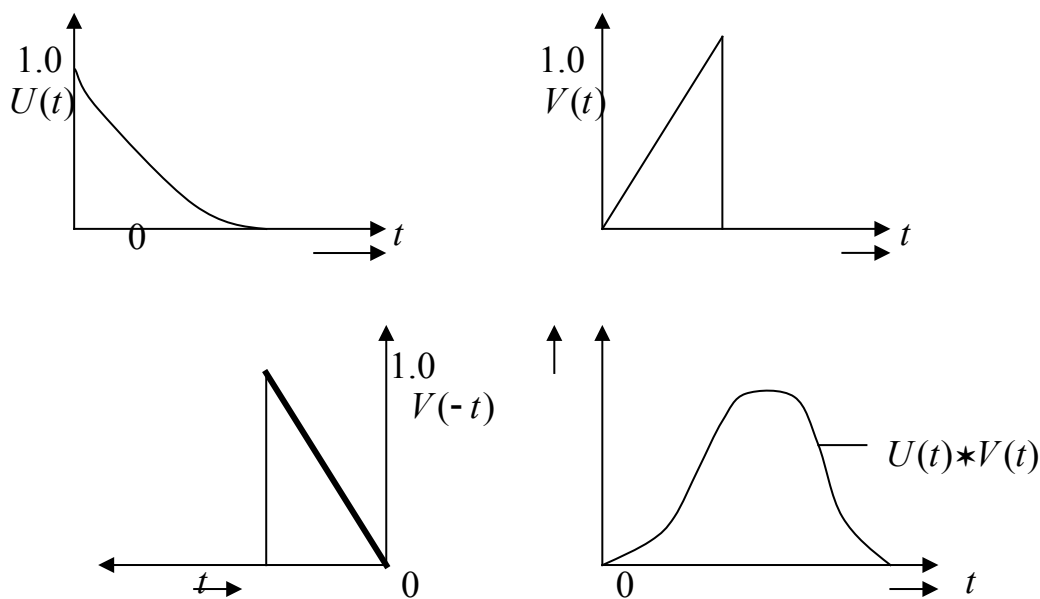


Рис. 7.1- Процес згортки

Для перебування $V(t-\tau)$ спочатку знайдемо $V(-t)$, а потім, рухаючи сигнал вперед за часом t , $V(-t)$.

Результат $U(\tau)V(t-\tau)$ потім і буде інтегралом згортки $U(t)*V(t)$.

Згортка тут включає згортання або поворот навколо одного із сигналів, наприклад, такого, як $V(t)$.

Якщо відомий імпульсний відгук $h(t)$ ланцюга на вхідний імпульс $\delta(t)$, інтеграл згортки може використовуватися для перебування вихідного відгуку $U_0(t)$ для даного вихідного сигналу $U_1(t)$. Так, якщо $U(t)=h(t)$ і $V(t)=U_1(t)$,

знаходимо $U_0(t)=h(t)*U_1(t)$,

$$\text{або } U_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)U_1(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\tau)h(t - \tau)dt, \quad (7.2)$$

і вихідний сигнал потім визначається як результат згортки вхідного сигналу й імпульсного відгуку ланцюга.

Зауваження: Згортка в тимчасовій області еквівалентна множенню в частотній області і навпаки.

1.7. 2 Приклад

Одиничний ступеневий імпульс прикладений до RC ланцюга, що інтегрується, (рис.7.2). Знайти вихідний відгук вихідного ланцюга $U_0(t)$

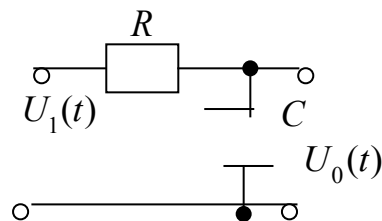


Рис.7.2 - Одиничний ступеневий імпульс прикладений до RC ланцюга, що інтегрується

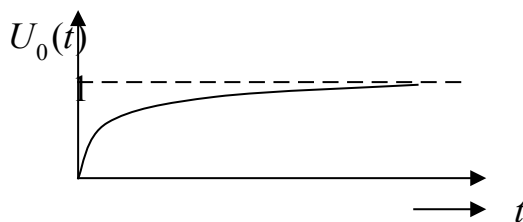


Рис. 7.3 - Вихідний відгук вихідного ланцюга $U_0(t)$

Для перебування $U_0(t)$ по теоремі згортки потрібно відгук ланцюга $h(t)$. Відповідно до перетворення Лапласа знаходимо $\frac{U_0(s)}{U_1(s)} = H(s)$, де $H(s)$ - передатна функція ланцюга з $s = j\omega$. Позначивши $RC = \alpha$, отримаємо :

$$H(s) = \frac{1}{s\alpha + 1} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{s + \frac{1}{\alpha}}$$

Для вхідної δ - функції $U_0(s) = 1$;
тоді $U_0(s) = H(s)U_0(s) = H(s)$,

$$\text{або } U_0(s) = \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{s + \frac{1}{\alpha}};$$

по таблицях зворотнього перетворення Лапласа $h(t) = \frac{e^{-t/\alpha}}{\alpha}$.

З інтеграла згортки :

$$U_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)U_0(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t/\alpha}}{\alpha}d\tau = - \left[e^{-t/\alpha} \right]_0^t,$$

або $U_0(t) = 1 - e^{-t/\alpha} = 1 - e^{-t/RC}$, що показано на (рис. 7.3).

1.7.3 Кореляційний аналіз

Використовується для аналізу детермінованих і випадкових сигналів. Для послідовності X і Y із середніми .

$$\bar{X}_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n, \bar{Y}_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n,$$

і дисперсіями $S_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X_n - \bar{X}_n)^2; S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (Y_n - \bar{Y}_n)^2$,

мірою зв'язку є **кваріантність** σ_{xy} , обумовлена як

$$\sigma_{xy} = S_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (X_n - \bar{X}_n)(Y_n - \bar{Y}_n).$$

При $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, S_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n Y_n$.

Коефіцієнт кореляції і двох випадкових величин – це **нормована кваріантність**:

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, -1 < r < 1.$$

Послідовності $x(n)$ і $y(n)$ можуть бути отримані з тимчасових функцій шляхом дискретизації;

тоді $X_n = x(nT); Y_n = y(nT)$.

Значення **кваріації** або **кореляції** перевіряються для величин, отриманих одночасно, або в дійсній X_n і попередньої Y_n дискретах. У цьому випадку визначається кваріантність вибірок $x(nT)$ і вибірки $y[(n - k)T]$ - вибірки з затримкою.

Для кожного з $T, k = 1, 2, \dots$ виникають різні значення кваріантність, описувані функцією, залежать від часу затримки kT . Це взаємкореляційна функція (ВКФ):

$$F(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N x(nT)y[(n-k)T],$$

$$\text{або } F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{\infty} x(n)y(n-k),$$

$$\text{і } \Phi_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=k}^{\infty} X_n Y_{n-k}.$$

Кореляція не залежить від вибору початку відліку по осі часу, тому

$$\sum_{n=k}^N X_n Y_{n-k} = \sum_{n=k}^N X_{n+k} Y_n;$$

$$\sum_{n=k}^N X_n Y_{n+k} = \sum_{n=k}^N X_{n-k} Y_n.$$

Якщо замість Y_n записати X_n , отримаємо дзеркальне відображення ВКФ:

$$\Phi_{xy}(kT) = \Phi_{yx}(-kT).$$

1. Кореляційна функція для безупинних сигналів

$$\bar{X} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt; S_x^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt;$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt; S_y^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [y(t) - \bar{y}]^2 dt;$$

$$\text{Кваріантність: } \sigma_{xy} = S_{xy} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}][y(t) - \bar{y}] dt.$$

Ефективне значення сигналу:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = x^2; \sigma_y = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t) dt;$$

$$\Phi_{xx}(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t-r) dt;$$

$$\Phi_{xy}(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t-r) dt;$$

$$\Phi_{\text{норм}}(r) = \frac{\Phi_{xy}(r)}{\sqrt{\Phi_{xx}(0)\Phi_{yy}(0)}}.$$

2. Властивості кореляційної функції (КФ)

а. КФ періодичного сигналу є періодичною функцією з періодом функції сигналу.

б. КФ періодичного сигналу незалежно від його фази є парною функцією - $\Phi_{xx}(r) = \Phi_{xx}(-r)$.

в. КФ при $r=0$ дає квадрат ефективного значення

$$\Phi_{xx}(r=0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$$

с максимумом у точці $r=0$. Для періодичних сигналів максимум повторюється.

г. Чим ширше спектр, тим вужче КФ.

д. Для білого шуму КФ маємо єдине ненульове значення в точці максимуму при $r=0$ (δ - функція).

3. Спектральна щільність потужності (СПМ)

По теорії Вінера - Хінчіна КФ після трансформування з тимчасової в часткову область перетвориться в **спектральну щільність потужності і взаємо спектральну щільність потужностей (ВСПМ)**

$$S_{xx}(j\omega) = F[\Phi_{xx}(r)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(r) e^{-j\omega r} d\tau \rightarrow \text{це КФ};$$

$$S_{xy}(j\omega) = F[\Phi_{xy}(r)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(r) e^{-j\omega r} d\tau \rightarrow \text{це ВКФ}.$$

Справедливо і зворотне перетворення:

$$\Phi_{xx}(\tau) = F^{-1}[S_{xx}(j\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(j\omega) e^{j\omega \tau} d\omega;$$

$$\Phi_{xy}(\tau) = F^{-1}[S_{xy}(j\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega \tau} d\omega.$$

у такий спосіб

КФ $\rightarrow \Phi_{xx}(\tau) \leftrightarrow S_{xx}(j\omega) \rightarrow$ СПМ;

ВКФ $\rightarrow \Phi_{xy}(\tau) \leftrightarrow S_{xy}(j\omega) \rightarrow$ ВСПМ.

Рівність Парсеваля встановлює, якщо СПМ дорівнює квадрату амплітудного спектра, діленого на інтервал спостереження:

$$S_{xx}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X(j\omega) X^*(j\omega).$$

Аналогічно для ВКФ:

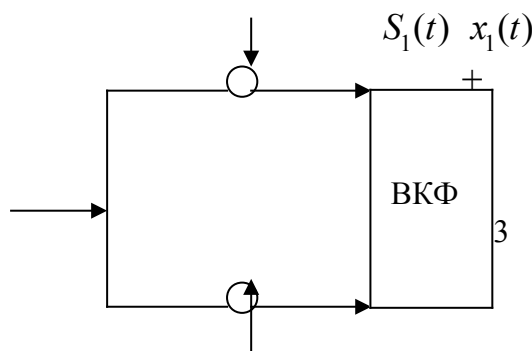
$$S_{xy}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X(j\omega) Y^*(j\omega).$$

4. Виділення коррелірованих складових сигналу (рис. 7.4)

Є сигнал $x_0(t)$ і перешкоди

$$S_1(t) \text{ и } S_2(t):$$

$$x_1(t) = x_0(t) + S_1(t); x_2(t) = x_0(t) + S_2(t).$$



$$x_0(t) \longrightarrow \Phi_{xx}(\tau)$$

$$S_2(t) + x_2(t)$$

Рис.7.4 - Виділення корелірованих складових сигналу

Тут ВКФ

$$\begin{aligned} \Phi_{x_1 x_2}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t - \tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} [x_0(t) + S_1(t)] [x_0(t - \tau) S_2(t - \tau)] dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} [x_0(t) + x_0(t - \tau)] dt + \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) S_2(t - \tau) dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t) x_0(t - \tau) dt + \int_{-\infty}^{\infty} S_2(t) x_0(t) dt, \end{aligned}$$

тоді

$$\Phi_{x_1 x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_0(t) x_0(t - \tau) dt .$$

Тому що перешкоди і сигнал взаємно некоррелірованні, та ВКФ не залежить від перешкод.

Контрольні запитання:

1. Що таке процес згортки двох функцій?
2. Що таке інтеграл згортки?
3. Що таке кваріантність сигналів?
4. Що таке коефіцієнт кореляції двох випадкових величин?
5. Що таке взаємкореляційна функція?
6. Які властивості у кореляційної функції?
7. Що таке спектральна щільність потужності?

2 Дискретно – тимчасова фільтрація

2.1 Безупинний і дискретний тимчасовий аналіз

У безупинному за часом процесі операція фільтрації асоціюється з RC або LC ланцюгами, де диференціальні рівняння представляється в S -області перетворення Лапласа і визначається частотний відгук уздовж осі $s = j\omega$. Відповідно, різницеві рівняння в дискретно - тимчасовій області перетворюються в z - області з використанням z - перетворення, що буде розглянуто далі.

Раніше ми знайомилися з описом безупинних у часі процесів у лінійних ланцюгах за допомогою диференціальних рівнянь. При описі дискретно - тимчасових процесів фільтрації використовується перетворення цих рівнянь у їх дискретно - тимчасові еквіваленти – **різницеві рівняння**.

а. R - C - фільтр першого порядку

Тут x і y - вхідні і вихідні напруження відповідно, зв'язані диференціальним рівнянням

$$RC \frac{dx}{dt} + y = x \quad (8.1)$$

Рішення для вхідної одиничної ступеневої функції при нульових початкових умовах (рис. 8.1)

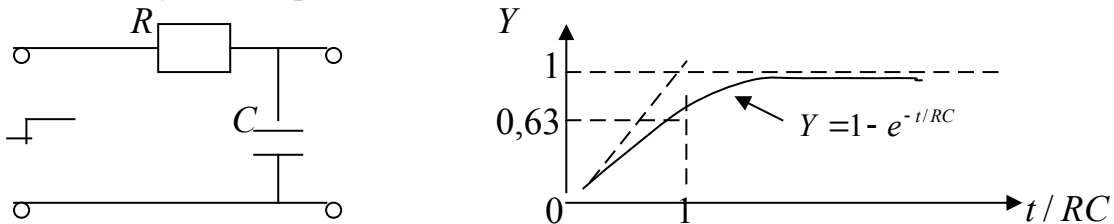


Рис.8.1 - Рішення для вхідної одиничної ступеневої функції при нульових початкових умовах

Для представлення дискретно – тимчасового еквівалента рівняння (8.1) використовуємо **метод зворотних відмінностей**:

$$RC \frac{Y_k - Y_{k-1}}{\Delta t} + Y_k = X_k \quad (8.2)$$

Вирішуючи для Y_k , отримаємо
$$Y_k = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{RC}} Y_{k-1} + \frac{\frac{\Delta t}{RC}}{1 + \frac{\Delta t}{RC}} X_k \quad (8.3)$$

Використовуючи апроксимацію
$$\left(1 + \frac{\Delta t}{RC}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{\Delta t}{RC}, \quad (8.4)$$

де ми зневажаємо величинами вищого порядку, отримаємо:

$$Y_k = a_0 x(k) + b_1 y(k - 1), \quad (8.5)$$

де $a_0 = \frac{\Delta t}{RC}$; $b_1 = 1 - a_0$.

Помітимо, що ми прийшли до дискретного процесу вибірок із представленням k як дискретний часовий параметр $t = k\Delta t$.

Цей результат представлений на (рис. 8.2), що є дискретно-тимчасовим еквівалентом безупинної в часі системи (рис. 8.1).

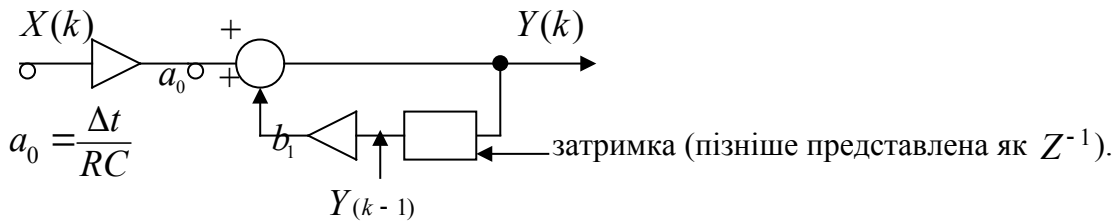


Рис. 8.2 - Дискретно-тимчасовим еквівалентом безупинної в часі системи

На рисунку трикутники використані для представлення множення на фактор поруч зніми; прямокутники представляють величини затримки, позначені як $D(=\Delta t)$, і окружності і представляють додавання. Обравши цифрову величину $a_0 = \frac{\Delta t}{RC} = 0,1$; $b = 1 - a_0 = 0,9$ і $y(-1) = 0$ як початкові умови, ми отримаємо результат (рис.8.3), де перших 10 точок розраховані з використанням правил, що згладжують.

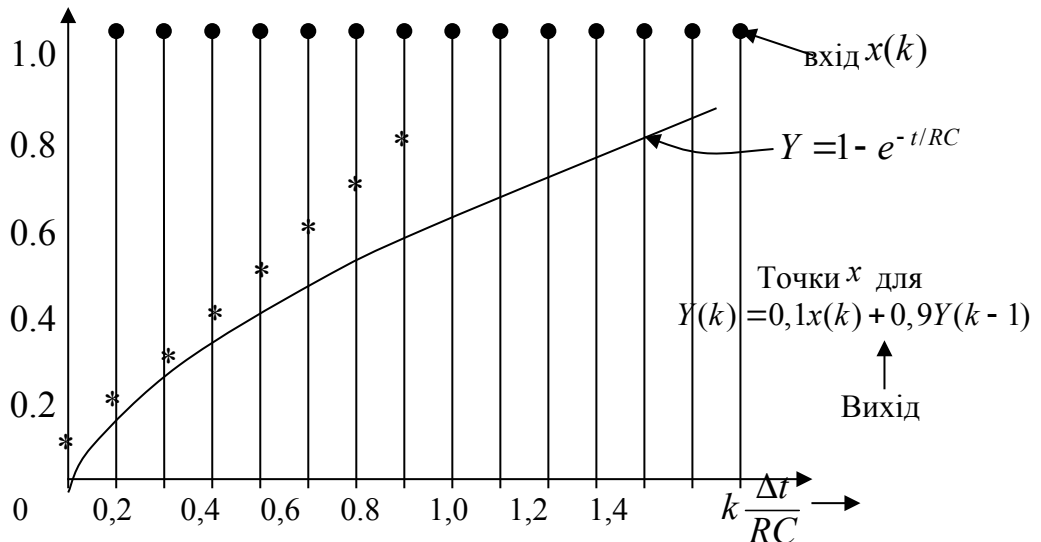
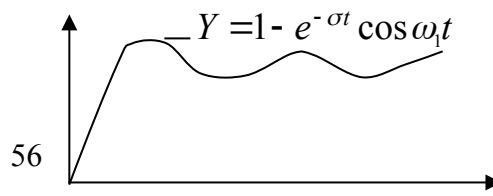
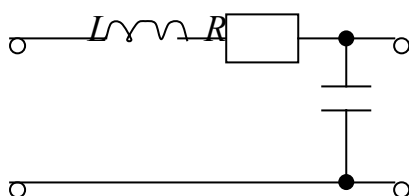


Рис. 8.3 - Рішення для одиничної крокової функції

б. RLC фільтр (рис. 8.4,а,б)



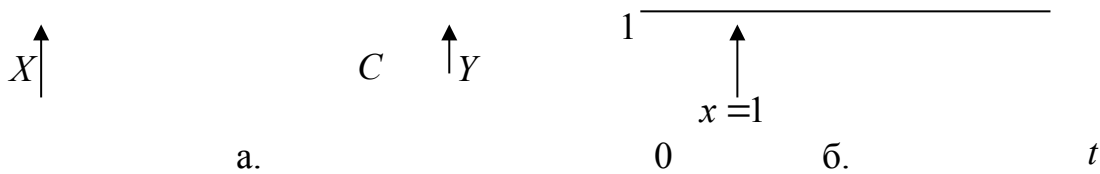


Рис. 8.4 - RLC фільтр

- а) диференціальне рівняння другого порядку
- б) рішення рівняння фільтра в безупинній тимчасовій області

Рівняння фільтра (рис. 8.4,а) – диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + 2\sigma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x \quad (8.5)$$

На (рис. 8.4,б) – рішення рівняння фільтра в безупинній тимчасовій області; x і y - вхід і вихід відповідно. Дане рівняння описує RLC ланцюг, де $\sigma = \frac{R}{2L}$ і $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Рішення для одиничної ступеневої функції – (рис. 8.4, б),

де $\omega_1 = \sqrt{(\omega_0^2 - \sigma^2)} \gg 1$.

Дискретно – тимчасова операційна схема для рівняння (8.5) представляється як:

$$Y(k) = a_0 x(k) + b_1 y(k - 1) + b_2 y(k - 2), \quad (8.6)$$

де після перетворення

$$\frac{Y_n - 2Y_{n-1} + Y_{n-2}}{\Delta t^2} + 2\sigma \frac{Y_n - Y_{n-1}}{\Delta t} + \omega_0^2 Y_n = \omega_0^2 X_n, \quad (8.7)$$

і після перетворення

$$Y_n = \frac{2(1 + \sigma\Delta t)}{D} Y_{n-1} - \frac{1}{D} Y_{n-2} + \frac{\omega_0^2 \Delta t^2}{D} X_n, \quad (8.8)$$

де $D = 1 + 2\sigma\Delta t + \omega_0^2 \Delta t^2$.

Перші два додатки в (8.8) праворуч можуть бути модифіковані з використанням біноміального представлення $x = 2\sigma\Delta t + \omega_0^2 t$. Одержимо коефіцієнти різницевого рівняння

$$Y_n = b_1 Y_{n-1} + b_2 Y_{n-2} + a_0 x_n \quad (8.9)$$

у виді

$$\begin{aligned} b_1 &\approx 2(1 - \sigma\Delta t + \dots) [1 - (\omega_0^2 - \sigma^2)\Delta t^2 + \dots] \approx \\ &\approx 2e^{-\sigma\Delta t} \cos \Delta t \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}; \\ b_2 &= -(1 - 2\sigma\Delta t + \dots) \approx e^{-2\sigma\Delta t}; \\ a_0 &= \frac{\omega_0^2 \Delta t^2 + 1}{(1 + 2\sigma\Delta t)} = \frac{1}{\frac{1 + 2\sigma\Delta t}{\omega_0^2 \Delta t^2 + 1}} \approx 1. \end{aligned}$$

Тому що $\omega_0 \gg \delta, \omega_0 \Delta t \gg 1$.

На (рис. 8.5) представлена дискретно – тимчасова схема рівняння (8.9).

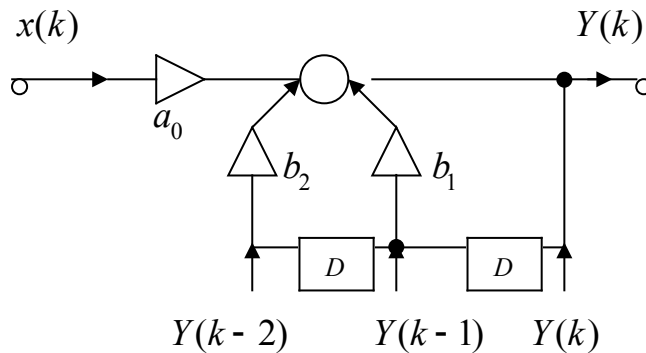


Рис.8.5 - Дискретно – тимчасова схема рівняння

Тут $a_0 = 1; b_1 = 2e^{-\sigma\Delta t} \cos \omega_1 \Delta t; b_2 = -e^{-2\sigma\Delta t}$.

Вхідні $x(t)$ і вихідні $y(t)$ перемінні в рівняннях $RC \frac{dx}{dt} + Y = x$ і $\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\sigma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x$ представлені у виді диференціальних рівнянь для безупинної в часі системи: $y(t) = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau$, де $h(\tau)$ - відгук на δ - функцію; $x(t)$ - вихідний сигнал.

Дискретно – тимчасова форма цього рівняння:

$$y(k) = \sum_{i=0}^k h(i) x(k - i), \quad (8.10)$$

відоме як **сумарна згортка**, звичайно записувану як $y = h * x = x * h$.

Для δ -функції на виході $x(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$

Для будь-якої іншої $x(k)$ маємо нульові початкові умови. Рівняння (8.10) робить послідовність для $\delta(k)$:

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0) = a_0; y(1) = a_0 x(1) + a_0 b_1 x(0); \\ y(1) &= a_0 x(1) + a_0 b_1 x(0); \\ y(2) &= h(2) + a_0 b_1^2, \dots, Y(k) = h(k) = a_0 b_1^k. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Для будь-якої іншої вхідної функції $x(k)$ маємо:

$$\begin{aligned} y(0) &= a_0 x(0); y(1) = a_0 x(1) + a_0 b_1 x(0); \\ y(2) &= a_0 x(2) + a_0 b_1 x(1) + \dots + a_0 b_1^2 x(0); \\ &\vdots \\ y(k) &= a_0 x(k) + a_0 b_1 x(k-1) + \dots + a_0 b_1^k x(0). \end{aligned}$$

Порівнюючи ці рівняння з набором (8.11), маємо

$$y(k) = h(0)x(k) + h(1)x(k-1) + \dots + h(k)x(0). \quad (8.12)$$

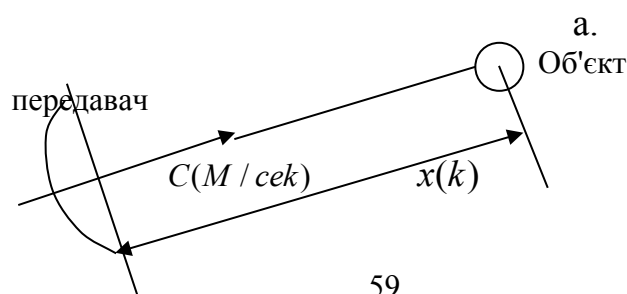
або $y(k) = \sum_{i=0}^k h(i)x(k-i)$ - сумарна згортка, дана рівнянням (8.10).

2.1.1 Дискретно тимчасова обробка реальних сигналів. Цифрові фільтри.

Розглянемо таку обробку сигналів при **авто супроводі радара**.

Це приклад прямого формулювання проблеми в дискретному часі, і проста діаграма (рис. 8.6) показує основні обговорювані моменти.

Промінь радара використовується для визначення дальності і швидкості об'єктів на дистанції x від передавача. На (рис. 8.6) показаний набір **ідеальних** випромєнених і прийнятих відбитих сигналів у місці з **реально** прийнятим імпульсом. Необхідна інформація - це часовий інтервал Δt , що представляє час проходження радіоімпульсів до об'єкта і назад.



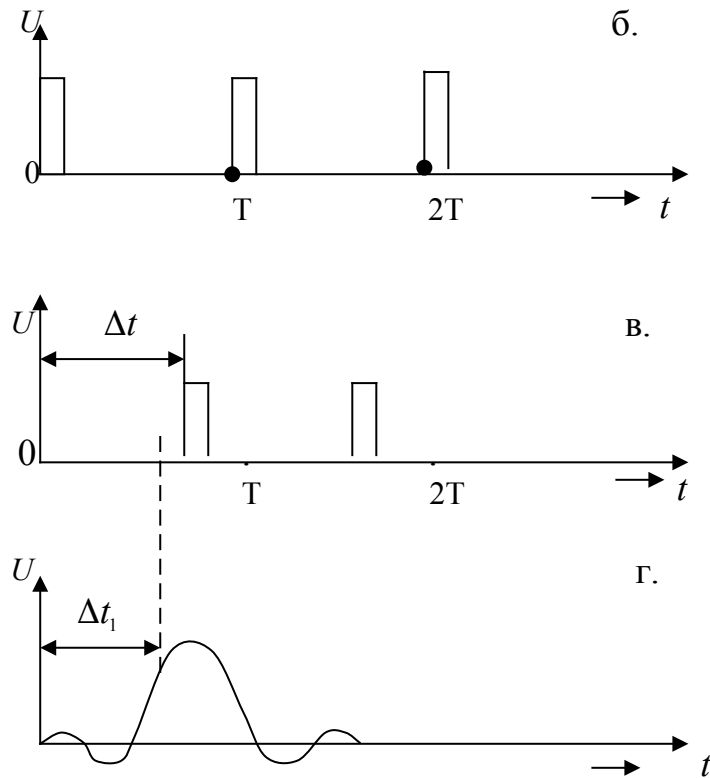


Рис. 8.6 - Прямі формулювання проблеми в дискретному часі, і проста діаграма

- а – найпростіша схема супроводу радара
- б – ідеальні випромінювані імпульси
- у – ідеальні відбиті прийняті імпульси
- г – реальні прийняті імпульси

Звичайний прийнятий відбитий сигнал не має ідеальної огибаючої через перекручування, і вимірюється $\Delta t_1 \neq \Delta t$.

Оцінювана дальність $x = \frac{c\Delta t_1}{2}$ може мати велику погрішність в одному вимірі; c - швидкість поширення імпульсів у просторі. Для зменшення помилок передається періодична послідовність імпульсів з періодом T секунд, за допомогою яких виходить послідовність результатів вимірів $x(0), x(1), \dots, x(k)$. У багатьох випадках об'єкт рухається, і його швидкість (величина зміни дальності) потрібно разом з дальністю об'єкта на час одного майбутнього імпульсу.

Для представлення схеми обробки даних радара введемо наступні величини:

- $x(k)$ - результат виміру дальності для K -го імпульсу радара;

- $y(k)$ - оцінка дальності для K -го імпульсу після обробки даних;
- $y'(k)$ - оцінка швидкості для K -го імпульсу після обробки даних;
- $Y_p(k)$ - розрахована дальність для K -го імпульсу радара, знайдена (до-1) імпульсу після обробки даних.

Ця величина представляється як $Y_p(k) = y(k - 1) + T\dot{y}(k - 1)$,

де T - період випромінюваних імпульсів.

Наступне співвідношення $Y(k) = Y_p(k) + \alpha [x(k) - Y_p(k)]$, де $\beta > 0$.

Набір відносин формується з наступних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} Y_p(k) &= y(k - 1) + T\dot{y}(k - 1); \\ Y(k) &= Y_p(k) + \alpha [x(k) - Y_p(k)]; \\ \dot{Y}(k) &= \dot{Y}(k - 1) + \beta / T [x(k) - Y_p(k)]. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Система рівнянь (8.13) описує схему обробки, відому як $(\alpha - \beta)$ рівняння супроводу.

2.1.2 Цифрові фільтри

Структура обробки, обумовлена рівнянням (8.13), представлена на (рис. 8.7). Це цифровий фільтр або процесор, представлений елементами обробки.

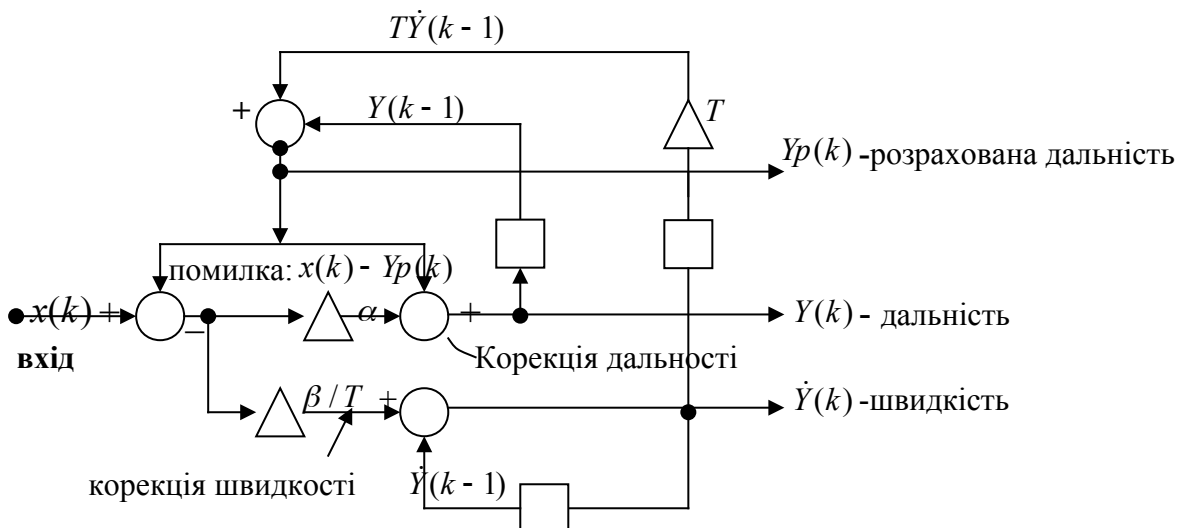


Рис. 8.7 - Структура обробки

Діаграми рис. 8.2, 8.5 і 8.7 – цифрові фільтри, представлені рівнянням (8.5), (8.9) і (8.13). Їхні розрахункові аналоги часто використовуються в послідовності тимчасовому аналізі.

Контрольні запитання:

1. Який вигляд в різницевого рівнянні фільтра першого порядку?
2. Яка дискретно-тимчасова структура фільтра першого порядку?
3. Яка дискретно-тимчасова структура фільтра другого порядку.
4. Який принципи авто супроводу у радара?
5. Який вид у рівняння супроводу радара?
6. Який вид у дискретно-тимчасова структура схеми супроводу радара?

2.2 Z - перетворення

2.2.1 Z - перетворення

В інженерній практиці часто зручно працювати в частотній області: така обробка дає більш наочне представлення про тип фільтра, а також вимір більш частий точніше в частотній області, ніж у часовій.

Безупинна в часі функція сигналу перетвориться в комплексну частотну S - область з використанням перетворення Лапласа.

У дискретно-тимчасових структурах ми можемо використовувати для аналізу цих сигналів у частотній області спеціальне Z - перетворення. Розглянемо його. Нехай $f(k)$ - дискретна в часі перемінна, наприклад, $[f(k)] = f(0), f(1), f(2), \dots, f(k)$ - послідовність перемінних у момент часу $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, k\Delta t$.

Ці дані представляються у виді полінома:

$$f(0) + f(1)Z^{-1} + f(2)Z^{-2} + \dots + f(k)Z^{-k},$$

де коефіцієнт Z^{-k} величини тимчасової послідовності $[f(k)]$. З іншого боку, у комплексній формі

$$Z[f(k)] = f(z) \sum_{k=0}^{\infty} f(k)Z^{-k}, \quad (9.1)$$

де $f(k) = 0$ для $k < 0$.

Така функція відома як Z - перетворення $f(k)$ послідовності.

Z - перетворення дає процедуру, за допомогою якої послідовність величин може бути перетворена у функцію комплексної перемінної Z . Перемінна Z^k може бути представлена оператором, що після перемноження зрушує вибірку сигналу (затримує) на k одиницю - це зрушення вправо. Множення на Z^k - зрушує сигнал вліво (прискорює).

Виявляється, Z у системі з вибірками - це комплексне число, таке, як $Z = e^{st}$, де $T(=\Delta t)$ - це інтервал дискретизації між вибірками.

Розглянемо випадок експонентного сигналу, представленого як

$$f(k) = C^k, k \geq 0 \text{ у } f(k) = 0, k < 0.$$

Z - перетворення цього сигналу: $Z[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C^k Z^{-k}$.

Це геометричний ряд із сумою $S = A \frac{1-r^k}{1-r}$, де $r = CZ^{-1}$; $A = 1$ у $k \rightarrow \infty$.

відповідно

$$Z[e^k] = \frac{1}{1-eZ^{-1}} \text{ для } |r| = |CZ^{-1}| < 1, \text{ або } |Z| > |C|. \quad (9.2)$$

З рівняння (9.2) можуть бути отримані наступні перетворення послідовностей:

- $Z[1] = \frac{1}{1 - Z^{-1}}$ для $|Z| > 1$; Це Z - перетворення для послідовностей постійних величин (або дискретної одиничної східчастої функції);
- для $C = ae^{jb}$;

$$Z[a^k e^{jkb}] = \frac{1}{1 - ae^{jb} z^{-1}}, \text{ для } |Z| > a.$$

Звідси знаходиться $Z[a^k \cos b_k \Delta t]$ і $Z[a^k \sin b_k \Delta t]$, як показано в таблиці:

Таблиця 9.1 - Z - перетворення

$x(k), k > 0$	$x(z)$
$\delta(k)$	1
1	$\frac{1}{(1 - Z^{-1})}$
C^k	$\frac{1}{(1 - CZ^{-1})}$
k	$\frac{Z}{(1 - Z^{-1})^2}$
$a^k \cos b_k T$	$\frac{1 - az^{-1} \cos bT}{1 - az^{-1} \cos bT + a^2 z^{-2}}$
$a^k \sin b_k T$	$\frac{az^{-1} \cos bT}{1 - 2az^{-1} \cos bT + a^2 z^{-2}}$

При затримці сигналу на i дискрет у часі, його Z - перетворення

$$Z[f(k - i)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k - i) Z^{-k},$$

або $Z[f(k - i)] = Z^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} f(k - i) = Z^{-in} \sum_{m=i}^{\infty} f(m) e^{-m},$

$$\text{у результаті } Z[f(k - i)] = Z^{-i} F(z) \tag{9.3}$$

З початковою умовою $f(m) = 0$ для $m < 0$ (для ненульових умов).

Це – так назване вправо зрушує властивість. Відношення (9.3) відповідає час, що зрушує по теоремі Лапласа:

$$L[f(t - \tau)] = e^{-js} F(s). \quad (9.4)$$

Математичне представлені Z - перетворення,

$$\text{дане як } F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)Z^k, \quad (9.5)$$

відомо як Лапласовське визначення Z - перетворення.

2.2.2 Зв'язок Z - перетворення з перетворенням Лапласа

В електронній практиці дискретні тимчасові послідовності $x(k)$ і $y(k)$ або, узагальнено, $f(k)$ - це вибірки з безупинних у часі сигналів. Це може бути представлено як форма модуляції сигналу $f(k)$ послідовністю імпульсів (рис. 9.1):

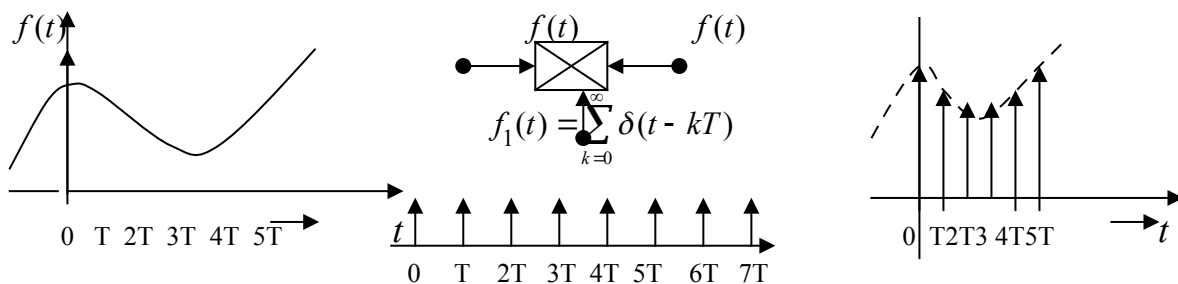


Рис. 9.1- Форма модуляції сигналу $f(k)$ послідовністю імпульсів

Сигнал $f(t)$ дискредитується кожні T секунд, і дискретний вихід $f_g(t) = f(t)f_1(t)$ можна представити як $f_g(t) = f(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$,

$$\text{або } f_g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT), \quad (9.6)$$

де \mathcal{G} - дискрета сигналу. Дискретне представлення включає дві дії - $f(k)$ змінюється на $f(kT)$, а Δt міняється на T . Це представлення використовується в області цифрових сигналів.

Перетворення Лапласа від $\delta(t - kT)$ - це

$$L[\delta(t - kT)] = e^{-skT}. \quad (9.7)$$

Перетворення Лапласа від дискретного сигналу (9.6):

$$Fg(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}. \quad (9.8)$$

Порівнюючи (9.8) з $Z[f(k)] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)Z^{-k}$,

з урахуванням змін $f(k)$ на $f(kT)$ і Δt на T , маємо:

$$F(z) = Fg(s)|_{e^{sT} = z}, \quad (9.9)$$

з установленням залежності між Z і комплексною величиною S , тоді

$$Z = e^{sT} \quad (9.10)$$

це дуже важливе співвідношення.

2.2.3 Зв'язок між S і Z областями

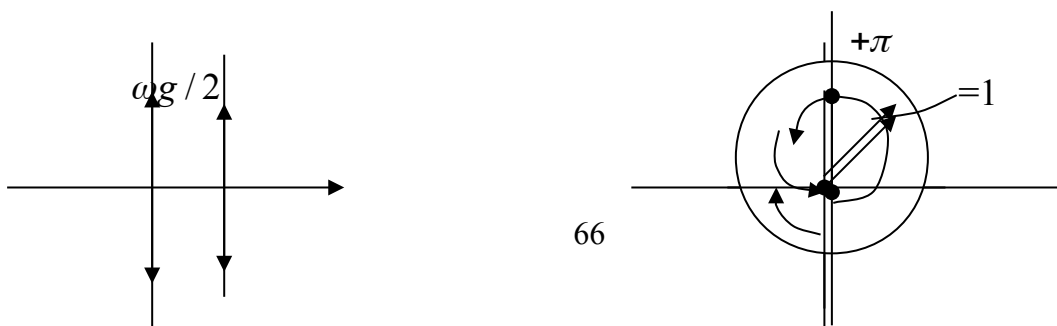
Точка $S_1 = \sigma + j\omega_1$ в області S перетвориться в точку Z_1 в Z -області, визначеної рівнянням (9.10): $z_1 = e^{S_1 T} = e^{\sigma T} e^{j\omega_1 T}$; $|z_1| = e^{\sigma T}$, $\angle z_1 = \omega_1 T$ (рис. 9.2).



Рис. - 9.2 Зв'язок S і Z областями

Відмітимо, що положення точки $\angle Z_1$ міняється при зміні інтервалу дискретизації T . Для аналізу покладемо $\sigma_1 = 0$, і знайдемо ω_1 , для якої $\angle Z_1$ змінюється від $-\pi < \omega_1 T < \pi$, або $-\frac{\pi}{T} < \omega_1 < \frac{\pi}{T}$, або $-\frac{\omega g}{2} < \omega_1 < \frac{\omega g}{2}$.

Далі, частина уздовж уявної осі $j\omega \rightarrow \pm \frac{\omega g}{2}$ перетвориться в одиничну окружність у Z -області, (рис. 9.3), тому що для $\sigma = 0$, $|Z| = 1$.



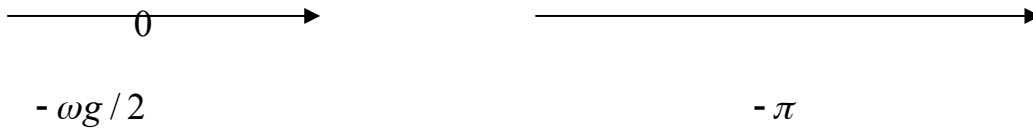


Рис. 9.3 - Перетворення S й Z областями

З цього випливає, що смуга шириною ωg в S - області перетвориться у внутрішнє одиничне коло ($\sigma < 0$). Відповідна смуга ($\sigma > 0$) перетвориться в зовнішню область навколо одиничного кола (рис. 9.4).

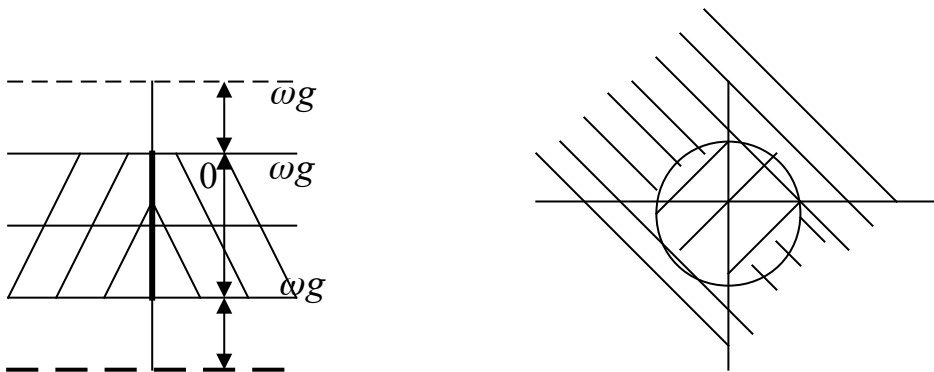


Рис. 9.4 - Перетворення S й Z областями

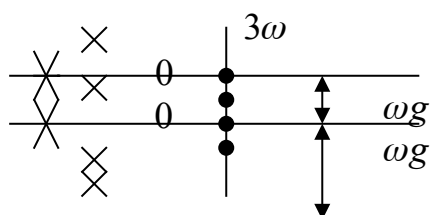
Таким чином, смуги з S - області перетворюються в кола в Z - області.

Відмітимо, що використовуване тут перетворення $Z = e^{sT}$ застосовується в автоматизованих системах рівняння (АСР). У зв'язку й у радіолокації використовується $Z = e^{-sT}$, у цьому випадку на (рис. 9.4) зовнішня область і внутрішнє коло міняються місцями. Перетворення Лапласа

$Fg(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$ дає нам зв'язок S - області з Z - областю, відповідно до рівняння $Z = e^{sT}$. Інша форма перетворення Лапласа дискретного

сигналу: $Fg(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega g)$,

де $\omega g = \frac{2\pi}{T}$ - частота дискретизації, $F(s)$ - перетворення Лапласа для вхідного сигналу. Корені рівняння $Fg(s)$ - періодичні в S - області (рис. 9.5). Від вибору ωg залежить наявність або відсутність перекриття спектрів: (рис.9.6)



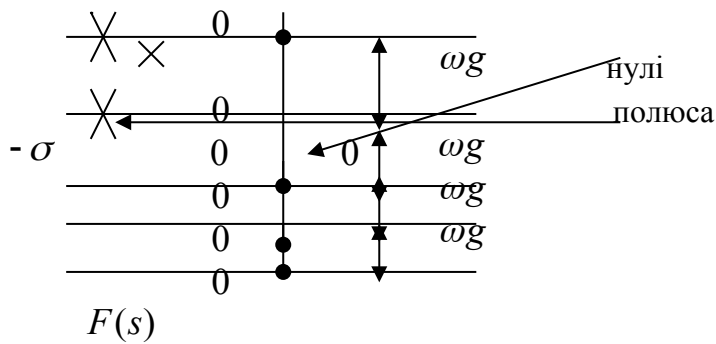


Рис. 9.5 - Корені рівняння $Fg(s)$ - періодичні в S - області

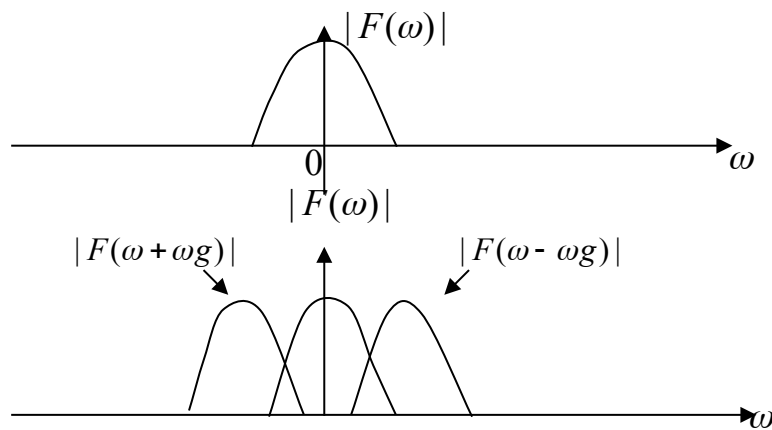
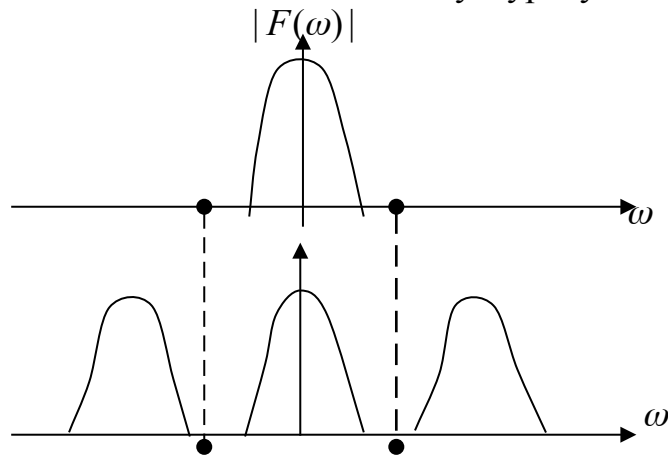


Рис. 9.6 - Відсутність перекриття спектрів

З (рис. 9.5 і 9.6) випливає, що для виключення перекриття спектрів сигнал повинний бути обмежений на частоті нижче $\omega g/2$. Тому цифрові фільтри мають діапазон частот

$$-\frac{\omega g}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega g}{2}, \text{ як показано на (рис 9.7)}$$

На практиці необхідна частотна характеристика фільтра вибирається всередині заданого частотного діапазону з урахуванням розглянутих умов.



$$-\omega g - \frac{\omega g}{2} \quad \frac{\omega g}{2} \quad \omega g$$

Рис. 9.7 - Діапазон частот $-\frac{\omega g}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega g}{2}$

На (рис. 9.8) представлена загальна схема перетворення безупинного сигналу в дискретно-тимчасову форму.

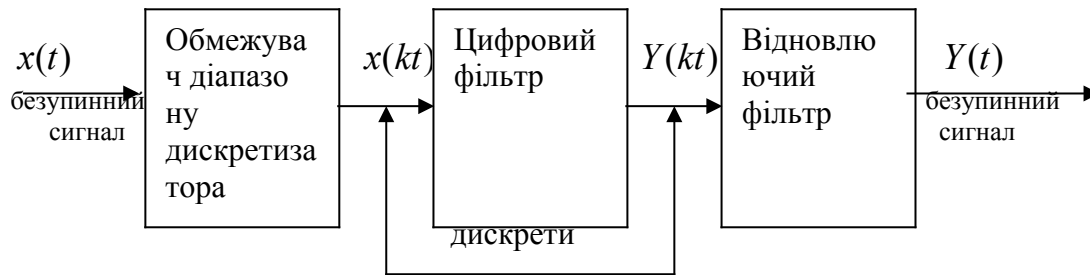


Рис. 9.8 - Загальна схема перетворення безупинного сигналу в дискретно-тимчасову форму

Сигнали обробляються в смузі частот $\pm \frac{\omega g}{2}$.

Контрольні запитання:

1. Яке визначення у Z - перетворення?
- 3 2. Які здвигаючі властивості у Z - перетворенні?
3. Який зв'язок Z - перетворення з перетворенням Лапласа?
4. Який зв'язок між S і Z областями.
5. Яка умова для виключення перекриття спектрів у цифрових фільтрах?

2.3 Цифрові фільтри

2.3.1 Класифікація цифрових фільтрів

Цифровий фільтр - це ланцюг для перетворення послідовності дискрет сигналу на виході в іншу серію дискрет на виході.

Дискрети можуть бути у формі двійникових або чисел в інших видах; цифровий фільтр - це техніка. Для перетворення однієї послідовності двійникових чисел в іншу задану серію двійникових чисел шляхом обробки їх при проходженні через цей фільтр.

Цифрова фільтрація представляється у виді програмного забезпечення – у виді комп'ютерної програми (алгоритму). Відповідно сучасний комп'ютер може також використовуватися як цифровий фільтр для необхідних перетворень сигналів. Наприклад, при розробці інтегральних ланцюгів мікроелектроніки різної складності в їхній технології можуть бути включені цифрові фільтри як елементи у виді суми, перемножників, сдвигових регістрів; усі вони можуть об'єднатися в єдиний інтегральний ланцюг.

Вартість і складність упровадження цифрових фільтрів знижується. Використання забезпечує такі достоїнства, як сумісність, гнучкість, стабільність, заміну аналогових фільтрів на цифрові в багатьох областях. Звичайно, для цифрових фільтрів існують обмеження. Тому що цифровий сигнал – це квантовані дискрети сигналу, квантизація створює помилки, що залежать від числа біт, використовуваних для представлення кожної дискрети сигналу. Дискретизація також обмежує точність або якість процесу фільтрації, створюючи «шуми дискретизації». Ці шуми визначаються якістю перемножників, використовуваних у цифрових фільтрах.

Двома основними типами цифрових фільтрів є:

- фільтр із нескінченним імпульсним відгуком (IIR),
- фільтр із кінцевим імпульсним відгуком (FIR).

У залежності від способу реалізації, цифрові фільтри класифікуються на:

- рекурсивні;
- нерекурсивні.

Рекурсивні фільтри реалізують структуру з прямими ланцюгами зворотного зв'язку, що представляються як IIR фільтри.

Нерекурсивні фільтри містять тільки прямі ланцюги звичайно реалізуються як FIR фільтри.

2.3.2 Реалізація схеми цифрових фільтрів

Загальна технологія реалізації схем таких фільтрів близько асоціюється з технологією реалізації для аналогових фільтрів. Так головна задача фільтра – це процес фільтрації, спочатку вибираються необхідні частотні характеристики. Метод, використовуваний для цього, включає аналіз у S - області і добре відомі раціональні функції фільтрів Баттерворта, Чебишева й інші.

Щоб реалізувати відповідний цифровий фільтр, необхідно перейти до Z - аналізу шляхом Z -перетворень. Для розробки цифрового фільтра це – просте «планування» дій з S - області в Z - область, що включає

використання замість поліноміальних і різницевих функцій параметра $Z = e^{sT}$, де $S = j\omega$, T - період дискретизації. На (рис. 10.1 і 10.2) показані приклади реалізації рекурсивної і нерекурсивної схеми цифрового фільтра відповідно.

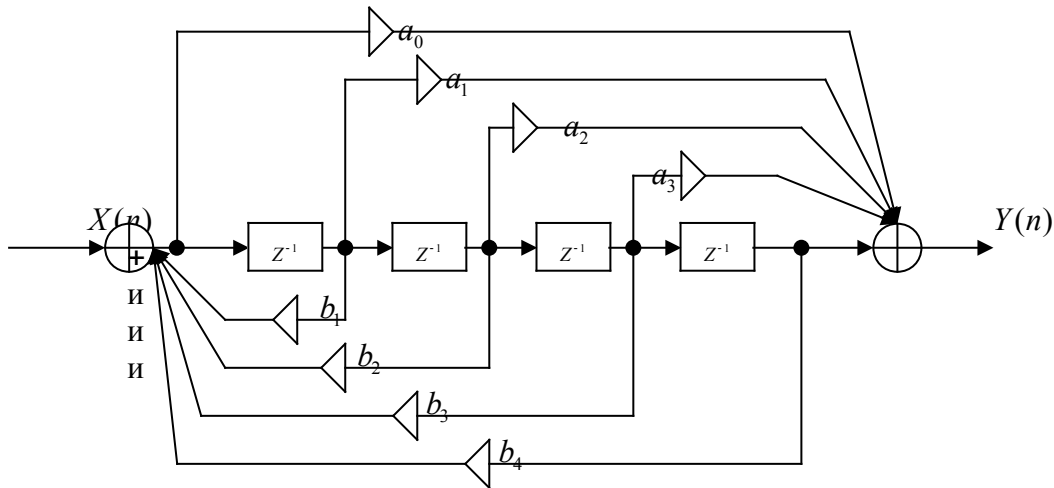


Рис. 10.1 - Рекурсивний фільтр 4-го порядку

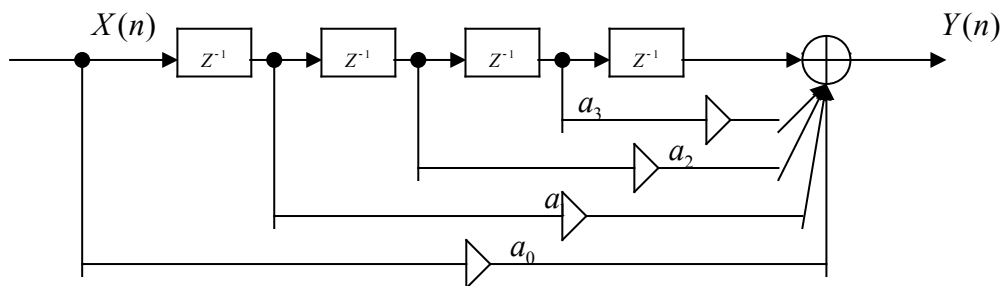


Рис. 10.2 - Нерекурсивний фільтр 4-го порядку

2.3.3 Інверсне Z - перетворення

Пряме Z - перетворення послідовності дискрет цифрового сигналу представляється як

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n}, z = e^{sT} = e^{j\omega T}. \quad (10.1)$$

Тут Z^{-1n} визначає фактор затримки; $X(n)$ - змінні значення величини вхідних дискрет сигналу $x(t)$, такі, як $x(1), x(2) \dots x(n)$, розміщених на часових інтервалах T . Щоб знайти $x(n)$ з $X(z)$, потрібно

інверсне або зворотне Z -перетворення. Воно може бути знайдено трьома методами.

Перший метод – метод конкретного інтеграла:

$$X(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)Z^{n-1} dz, \quad (10.2)$$

шлях інтегрування тут - це одиничне коло в Z -області.

Другий метод - $X(z)$ представляється як послідовність, а потім по стандартних таблицях знаходяться значення $X(n)$.

Третій метод – часто використовується в практиці – представлення $X(z)$ у величинах часткових дробів, що потім ідентифікуються зі стандартними таблицями. Це метод аналогічний на перебування інверсного (зворотного) перетворення Лапласа.

Приклад 10.1 Знайти інверсне Z -перетворення функції $X(z)$:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3Z^{-1} + 2Z^{-2}}.$$

Рішення: $X(z) = \frac{Z^2}{Z^2 - 3Z + 2}$, або $\frac{X(z)}{Z} = \frac{Z}{(z-2)(z-1)}$.

Представляючи частотними дробами, отримуємо:

$$\frac{Z}{(z-2)(z-1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-1}, \text{ або } Z \equiv A(z-1) + B(z-2).$$

Зрівнявши коефіцієнти на Z і постійні величини на обох сторонах, отримуємо

$$1 = A + B;$$

$$0 = -A - 2B;$$

$$1 = -2B + B.$$

Потім $\frac{X(z)}{Z} = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$, або $X(z) = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$.

З таблиць $x(n) = 2(2)^n - 1$ (у таблиці $a = 2, u \frac{z}{z-2} \rightarrow 2^n; \frac{z}{z-1} \rightarrow 1$).

2.3.4 Цифрова передатна функція

Для вхідної $x(n)$ і вихідний $y(n)$ дискретних послідовностей передатна функція фільтра $H(z)$ визначається як

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}, \quad (10.3)$$

яке може бути представлено нулями і смугами у формі:

$$H(z) = \frac{k(z^{-1} - z_1)(z^{-1} - z_2)\dots}{(1 - P_1 z^{-1})(1 - P_2 z^{-1})\dots}, \quad (10.4)$$

де z_i - нулі; P_i - смуга передавальної функції.

У загальному вигляді

$$H(z) = \frac{k \prod_{i=1}^{i=N} (z^{-1} - z_i)}{\prod_{j=1}^{j=N} (1 - P_j z^{-1})}, \quad (10.5)$$

де k - постійна величина; z_i і P_i - нулі в полюсах Z -області.

2.3.4.1 Передавальна функція фільтра з нескінченним імпульсним відгуком(ПР)

ПР фільтр визначається імпульсним відгуком $h(n)$ з нескінченним числом дискрет, $h(n) \neq 0$ в області $0 \leq n \leq \infty$. Передатна функція має вигляд

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^n b_j z^{-j}},$$

де a_i - коефіцієнти, що визначають нулі; b_j - полюси передавальної функції. ПР фільтр стабільний, якщо всі полюси $H(z)$ розташовані усередині одиничного кола Z -області. Звичайно $b_0 = 1$, і передавальна функція ПР фільтра звичайно розраховується аналоговий фільтр із необхідними властивостями, а потім, використовуючи техніку перетворення, розраховують цифровий фільтр.

Реально цей фільтр буде відповідати відомим розробкам для низькочастотних, високочастотних, смугових фільтрів, у яких використовуються раціональні функції, що відповідають функціям розрахунку фільтрів Баттерворта, Чебишева або еліптичним функціям розрахунку.

Для розрахунку таких фільтрів застосовуються два способи техніки перетворення:

1. Білінеарне перетворення.
2. Інваріантне – імпульсне перетворення.

2.3.4.2 Білінеарне перетворення

Це процедура розробки ПР фільтра з представленням відповідних аналогових фільтрів у термінах частотного відгуку – процедура перетворення з S - області в Z - область. Перетворення – періодичне з багаторазовими вибірками частот $fs = \frac{1}{T}$.

Перетворення визначається за допомогою

$$s = f(z) \triangleq \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})}$$

$$\text{або } j\omega = \frac{2(1 - e^{-j\omega T})}{T(1 + e^{-j\omega T})},$$

$$\text{де } \omega \frac{2(1 - e^{-j\omega T})}{jT(1 + e^{-j\omega T})} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2},$$

і частоти в S - області відносяться до частот у Z - області як $fs = \frac{1}{\pi T} \operatorname{tg}(\pi fzt)$,

$$\text{або } \omega s = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\omega_2 \frac{T}{2}\right) \quad (10.7)$$

У залежності від функції тангенса, імпульсний відгук істотно стискується по частотній шкалі цифрового фільтра. Це відомо як **частотне перекручування**.

Звичайно, перетворення зберігає масштаб модульних значень аналогового фільтра, і квазіхвильність аналогового фільтра стає після перетворення квазіхвильність цифрового фільтра. Відповідно **передатна функція** знаходиться простою заміною S на Z в передатній функції аналогового фільтра, і представляється як

$$H(s) \rightarrow H\left[\frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)\right] = H(z). \quad (10.8)$$

Зауваження: білінеарне перетворення практично використовується для розробки високочастотних і ресекторних фільтрів із заданою передатною характеристикою.

2.3.4.3 Імпульсно – інваріантне перетворення

При цьому способі цифровий фільтр може бути розроблений, якщо його імпульсний відгук буде дискретною версією імпульсного відгуку аналогового фільтра.

Імпульсний відгук інваріантний до процедури перетворення, тому спосіб називається **імпульсно – інваріантним перетворенням**. Основна процедура - це перебування початкової передатної функції $H(s)$ аналогового фільтра у формі:

$$H(s) = \sum_{i=1}^m \frac{g_i}{(s + P_i)}, \quad (10.9)$$

де g - фактор посилення; P_i - полюс аналогового фільтра. Імпульсний відгук $h(t)$ фільтра представляється інверсним перетворенням Лапласа:

$$h(t) = Z^{-1} [H(s)], \quad (10.10)$$

або $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_i e^{-P_i t}$.

Для $h(n)$ - імпульсного відгуку еквівалентного цифрового фільтра

$$h(n) \triangleq h(t)|_{t=nT}, \quad (10.11)$$

або $h(n) = h(t)$, T – період дискретизації.

Тепер передавальна функція цифрового фільтра визначається з відношення

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) Z^{-n} \quad (10.12)$$

де $h(n) = \sum_{i=1}^m g_i e^{-P_i nT} Z^{-n}$.

Далі, заміною $h(n)$ отримаємо $H(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} g_i e^{-P_i nT} Z^{-n}$, або

$$H(z) = \sum_{i=1}^m \frac{g_i}{(1 - z^{-1} e^{-P_i T})}. \quad (10.13)$$

Порівнюючи (10.13) з (10.9), бачимо що в $H(z)$ знаходиться зі $H(s)$ шляхом заміни фактора $\frac{1}{s+P_i}$ на фактор $\frac{1}{1-z^{-1}e^{-P_iT}}$.

2.3.5 Частотний відгук

Розробивши низькочастотний фільтр з частотним відгуком, що має частоту зрізу ω_c , можлива розробка цифрових фільтрів інших конфігурацій шляхом заміни Z відповідної білінійною трансформацією, представлена в таблиці 10.1.

Таблиця 10.1- Білінійна трансформація

Перетворення	Параметри
Фільтр високої частоти $-\left[\frac{z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha z^{-1}} \right];$	ω_H - низька частота зрізу; ω_B - висока частота зрізу. $\alpha = -\frac{\cos[(\omega_H - \omega_B)T/2]}{\cos[(\omega_H + \omega_B)T/2]}$
Смуговий фільтр $-\left[\frac{Z^{-2} - \left(\frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)Z^{-1} + \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)}{\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)Z^{-2} - \left(\frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)Z^{-1} + 1} \right];$	ω_H - низька частота зрізу; ω_B - висока частота зрізу. $\alpha = \frac{\cos[(\omega_H + \omega_B)T/2]}{\cos[(\omega_H - \omega_B)T/2]}$ $\beta = \text{ctg}[(\omega_H - \omega_B)T/2] \text{tg}(\omega_s T/2)$
Режекторний фільтр $\left[\frac{Z^{-2} - \left(\frac{2\alpha}{\beta+1}\right)Z^{-1} + \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)}{\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)Z^{-2} - \left(\frac{2\alpha\beta}{\beta+1}\right)Z^{-1} + 1} \right];$	ω_H - низька частота зрізу; ω_B - висока частота зрізу. $\alpha = \frac{\cos[(\omega_H + \omega_B)T/2]}{\cos[(\omega_H - \omega_B)T/2]}$ $\beta = \text{tg}[(\omega_H - \omega_B)T/2] \text{tg}(\omega_s T/2)$

2.3.5.1 Кінцевий імпульсний відгук - FIR фільтри

Такі фільтри мають лінійну фазову характеристику і стабільні в роботі.

Методи створення FIR фільтрів – метод рядів Фур'є і метод дискретизації частот.

1. Метод рядів Фур'є

Частотний відгук $H(e^{j\theta})$ будь-якого цифрового фільтра – це періодична функція $\theta = \omega T$; це може бути поширене на ряди Фур'є у формі:

$$He^{j\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-jn\theta}, \quad (10.14)$$

$$\text{або } h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (He^{j\theta})e^{jn\theta} d\theta;$$

тут коефіцієнти $h(n)$ ряду Фур'є представляють послідовність імпульсних відгуків цифрового фільтра. При цьому нескінченна послідовність сума може бути усічена після N кроків для FIR фільтра. Звичайно, усікання приведе до сильного коливання і хвильового перекручування частотного відгуку відповідно до **явища Гіббса**, що виникає при цьому.

Для обмеження цих ефектів використовується додаткове **зважування** коефіцієнтів рядів $h(n)$ за допомогою **функцій «вікон»**, таких, що кінцеві усічені значення $h_T(n)$ тепер даються як

$$h_T(n) = h(n)W(n), \quad (10.15)$$

де $W(n)$ - вагова функція «вікна».

Це дає ефект згладжування модуля відгуку і вводимо перемножування в тимчасовій області інтеграл згортки бажаного частинного відгуку з перетворенням Фур'є функції «вікна» у частинній області. Різні види функцій «вікон» $W(n)$ з їхніми Фур'є – перетвореннями $W(f)$ представлені на (рис. 10.3).ь

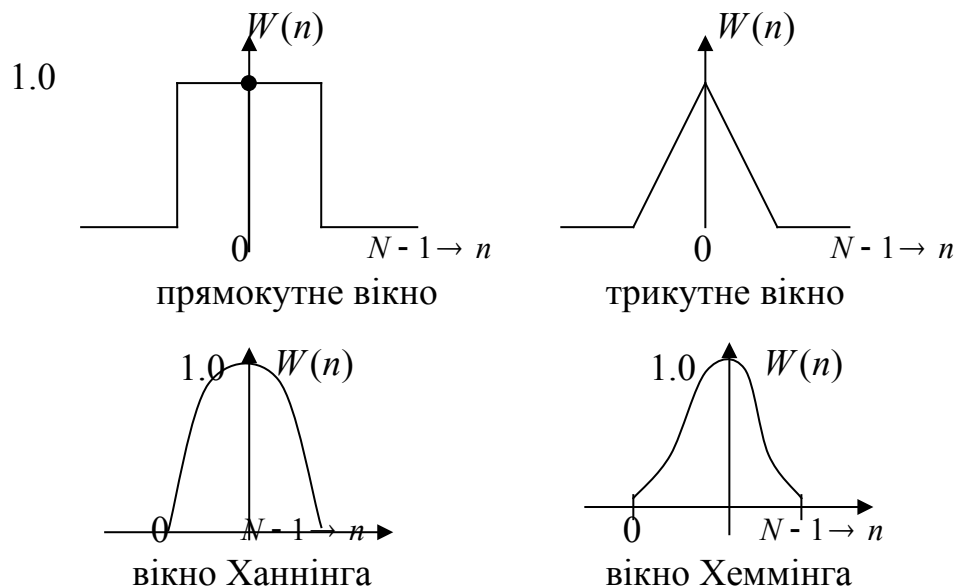


Рис. 10.3 - Перетвореннями $W(f)$

Прямокутне вікно $W(n) = 1$ для $0 \leq n \leq N-1$, і 0 в інших випадках.

$$W(f) = \frac{(N-1)\sin[\pi f(N-1)]}{\pi f(N-1)} \quad (10.15)$$

Трикутне вікно

$$\begin{aligned} W(n) &= \frac{2n}{N-1}, 0 \leq n \leq \frac{(N-1)}{2}; \\ &= 2 - \frac{2}{N-1}, \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1; \\ &= 0, \text{ в інших випадках} \\ W(f) &= \frac{N-1}{2} \left[\frac{\sin[\pi f(N-1)/2]}{\pi f(N-1)/2} \right]^2 \end{aligned} \quad (10.16)$$

Вікно Ханнінга $W(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right], 0 \leq n \leq N-1$
 $= 0$, в інших випадках

$$W(f) = \frac{N-1}{2} \frac{\sin[\pi f(N-1)]}{\pi f(N-1)} \left[\frac{1}{1 - [f(N-1)]^2} \right], \quad (10.17)$$

Вікно Хеммінга $W(n) = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), 0 \leq n \leq N-1$
 $= 0$, в інших випадках.

$$W(f) = \frac{(N-1)\sin[\pi f(N-1)]}{\pi f(N-1)} \left[\frac{0,54 - 0,08[f(N-1)]^2}{1 - [f(N-1)]^2} \right], \quad (10.18)$$

де N - парне.

Передатна $H(z)$ FIR фільтра може бути знайдена заміною на Z величини $e^{j\theta}$ у вираженні $He^{j\theta}$.

$$\text{Тоді } H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h_T(n)Z^{-n}, \quad (10.19)$$

$$\text{або } H(z) = h(0) + h_1Z^{-1} + h_2Z^{-2} + \dots + h_{N-1}Z^{-(N-1)}, \quad (10.20)$$

де імпульсний відгук $h(n)$ визначається після N кроків містить тільки N кінцевих дискрет. Варіант такого фільтра відомий як нерекурсивний трансверсальний фільтр (рис.10.4).

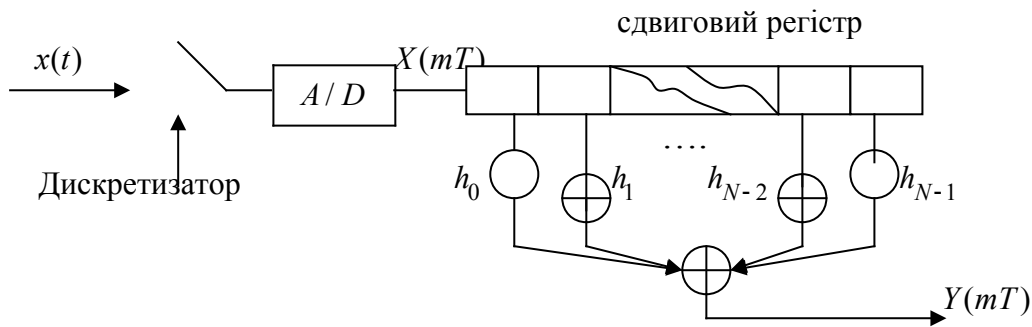


Рис. 10.4 - Нерекурсивний трансверсальний фільтр

Аналоговий вхідний сигнал $x(t)$ переводиться в цифрову форму аналого-цифровим перетворенням A/D . N -розрядний сдвиговий регістр працює як лінія затримки, що зберігає цифри і зрушує послідовність на один крок при надходженні тактового імпульсу кожні T секунд.

Вхідна цифрова послідовність $Y(mT)$

$$Y(mT) = \sum_{n=0}^{N-1} h_T(n)x(m-n)T \quad (10.21)$$

$h_T(n)$ - вагові коефіцієнти, що відповідають необхідній частотній характеристиці. Точність вихідної послідовності визначається кількістю біт, що містяться в кожній двійниковій цифрі, і від цифрового множення, що додає помилку в бінарну арифметику.

2. Метод частотної дискретизації

FIR фільтр може бути представлене дискретним перетворення Фур'є (ДПФ), послідовність якого

$$H(m) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j(2\pi/N)mn} \quad (10.22)$$

$$i \quad h(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H(m)e^{j(2\pi/N)mn}$$

Послідовність $H(m)$ представляється як цифрові вибірки Z -перетворення характеристики фільтра, охоплені як N однаково розподілених точок в одиничному колі Z -області.

Тоді

$$H(m) = H(z) \Big|_{z=e^{j(2\pi/N)m}} \quad (10.23)$$

$$\text{де } H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H(m)e^{j(2\pi/N)mn} Z^{-n} \right], \quad (10.24)$$

$$\text{або } H(z) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{H(m)}{N} \left[\frac{1 - e^{j2\pi m} Z^{-N}}{1 - Z^{-1} e^{j(2\pi/N)m}} \right]. \quad (10.25)$$

Це – передатна функція FIR фільтра, частотний відгук якого в дискретних точках дається як $\theta = (2\pi m / N)$ Б де $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

Це показано на (рис.10.4), де між дискретними точками функція відгуку має вибірки, що з'являються відповідно до **явища Гібса**.

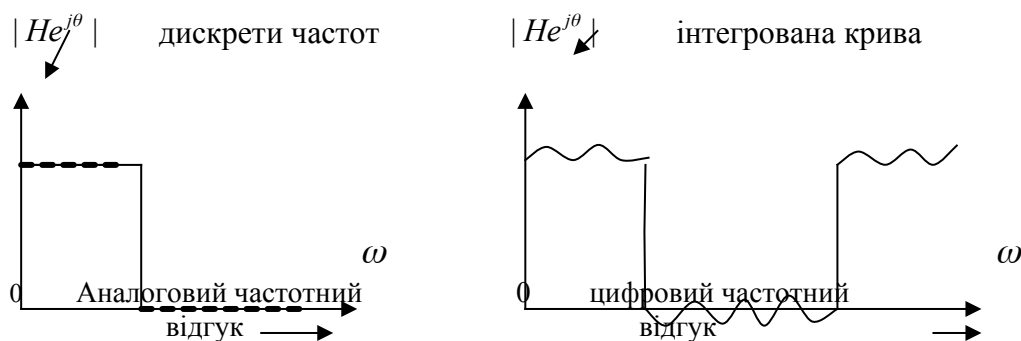


Рис. 10.4 - Передаюча функція FIR фільтра

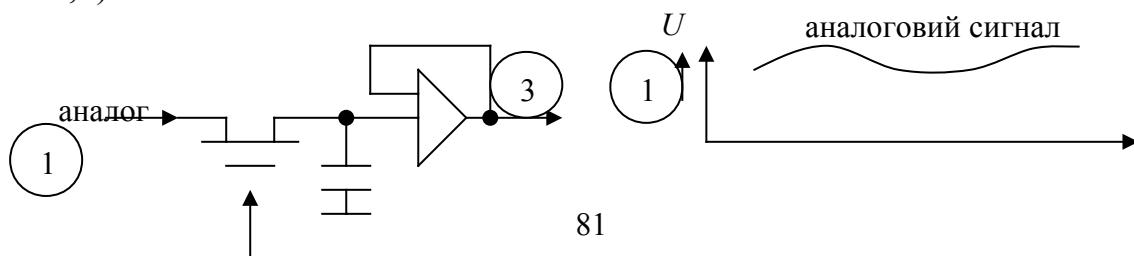
Контрольні запитання:

1. Які основні типи у цифрових фільтрів?
2. Що таке рекурсивний фільтр?
3. Що таке нерекусивний фільтр?
4. Яка структурна схема рекурсивного фільтра 4-го порядку?
5. Яка структурна схема нерекусивного фільтра 4-го порядку?
6. Які методи перебування зворотного Z - перетворення?
7. Яка передаюча функція у фільтра з нескінченним імпульсним відгуком?
8. Що таке білінеарне перетворення?
9. Яка передатна функція фільтра з кінцевим імпульсним відгуком?
10. Що таке функція «вікна»?
11. Що таке метод частотної дискретизації?

2.4 Цифрова обробка сигналів

2.4.1 Дискретизація сигналів

Безупинні сигнали перетворюються в дискрети (вибірки) з тимчасовими інтервалами між дискретами. Таке перетворення називається дискретизацією в часі. Процес дискретизації представлений на (рис. 11.1а,б).



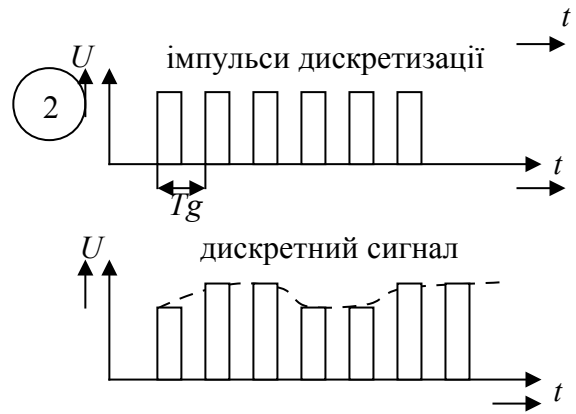


Рис. 11.1 - Процес дискретизації
 а) дискретизатор
 б) процес дискретизації

Частота повторюваність імпульсів дискретизації $f_g = \frac{1}{T_g}$. Якщо сигнал має амплітудну модуляцію, тоді дискретні послідовності z теж буде амплітудно-модульована. Кожен імпульс дискретизації можна представити δ - функцією. На практиці ці імпульси мають кінцеву тривалість. В обох випадках спектр дискретного сигналу практично однаковий. Представимо спектр сигналу з вищою частотою f_B (рис. 11.2).

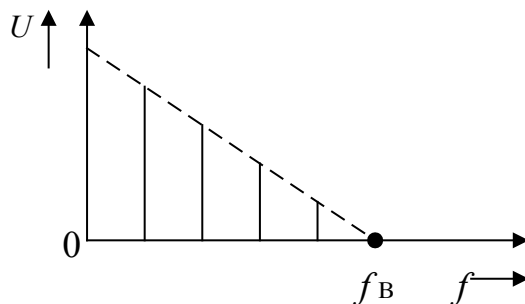
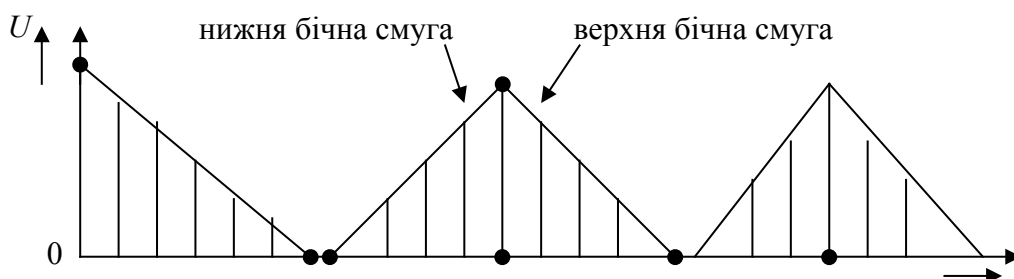


Рис. 11.2 - Спектр сигналу з вищою частотою f_B

Спектр амплітудно-модульованої імпульсної послідовності містить дискретні частоти Фур'є - компонента $0; f_0; 2f_0; \dots; i$ т.д.

На нульовій частоті буде тільки сума частот до f_B (рис. 11.3).



$$f_0 \quad f_B \quad fg - f_B \quad fg \quad fg + f_B \quad 2fg \quad f$$

Рис. 11.3 - Сума частот до f_B

Частоти f_B і $fg - f_B$ не перекриваються і це дозволяє виділити першу групу частот до f_B на виході нижніх частот (ФНЧ) з частотою зрізу $f_c = f_B$.

$$fg - f_B \geq f_B, \text{ або } fg \geq 2f_B, \quad (11.1)$$

тобто частота дискретизації повинна бути щонайменше в два рази вище найвищої частоти аналогового сигналу. Ця умова дає верхнє обмеження для f_B ; з іншого боку, fg повинна бути досить високої й імпульси дискретизації екстримально вузькими. На практиці досить важко формувати вузькі імпульси – це збільшує смугу частот.

Техніка дискретизації застосовна в системах, де ширина спектра дискрети може відповідати максимальній величині f_B без перекручувань інформації в сигналі. Умова дискретизація – використання частотно-обмеженого сигналу представляється у виді теореми дискретизації теореми Найквіста (Котельникова).

2.4.2 Теорема дискретизації

Будь-яка тимчасова функція $f(t)$ з найвищою частотою f_B може бути цілком визначена шляхом дискретизації з дискретами, розподіленими в часі з інтервалом

$$Tg = \frac{1}{2f_B} \quad (11.2)$$

одна від іншої.

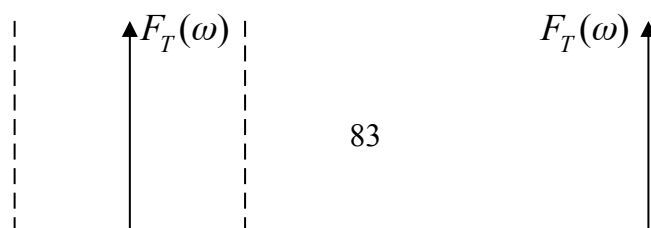
Доказ. Представимо комплексний спектр безупинної функції $f(t)$

як $F(\omega)$, тоді
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Параметр t має кінцеве значення, так що $f(t)$ - імпульс, якщо частота ω розподілена на $\pm\infty$.

З іншого боку, якщо ω має скінченну величину $\pm 2\pi f_B$, то t буде розподілена на $\pm\infty$.

Нехай $F_T(\omega)$ - це зрізана версія форми $F(\omega)$ вище інтервалу $\pm 2\pi f_B$ (рис. 11.4):



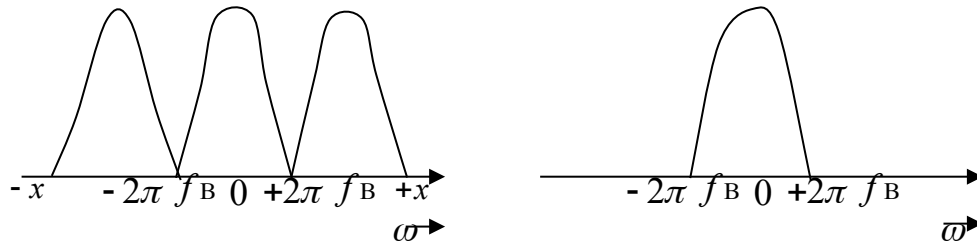


Рис.11.4 - $F_T(\omega)$ - це зрізана версія форми $F(\omega)$ вище інтервалу $\pm 2\pi f_B$

$F(\omega)$ - це періодична функція перетворення Фур'є від тимчасової функції $f(t)$.

Для $t = \frac{1}{2f_B} n$ маємо далі $nt = \frac{n}{2f_B}$, $-\infty \leq n \leq \infty$.

Отже,

$$f(t) = f\left(\frac{n}{2f_B}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_T(\omega) e^{j\omega\left(\frac{n}{2f_B}\right)} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} F(\omega) e^{j\omega\left(\frac{n}{2f_B}\right)} d\omega, \quad (11.3)$$

тому що $F_T(\omega) = F(\omega)$ в інтервалі від $-2\pi f_B$ до $+2\pi f_B$. Виражені праворуч – це проста форма коефіцієнтів Фур'є C_{-n} . Воно представляє n -й коефіцієнт ряду Фур'є по ω , маючи періодичність $4\pi f_B$ і у $f(t)$ воно перетвориться за допомогою $F(\omega)$:

$$C_{-n} = \frac{1}{4\pi f_B} \int_{-2\pi f_B}^{2\pi f_B} F(\omega) e^{j\omega\left(\frac{n}{2f_B}\right)} d\omega, \quad (11.4)$$

Це представлення ідентичне з $f\left(\frac{n}{2f_B}\right)$, за винятком фактора $\frac{1}{2f_B}$.

$$\text{Тут: } C_{n-1} = \frac{1}{2f_B} f\left(\frac{n}{2f_B}\right);$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{2f_B} f\left(-\frac{n}{2f_B}\right).$$

Цей результат показує, що коефіцієнти C_n цілком визначають періодичну функцію $f(t)$, тут вона ідентична з дискретними вибірками $f\left(\pm\frac{n}{2f_B}\right)$.

Висновок: дискретні величини цілком визначають функцію $f(t)$.

2.4.3 Дискретний відгук

Кожна дискретна вибірка повинна відрізнятися від наступної. Вона може бути представлена як вузький прямокутний імпульс. Відгук кожного імпульсу проходить потім через ідеальний фільтр нижніх частот і являє собою криву $\frac{\sin x}{x}$ (рис. 11.5).

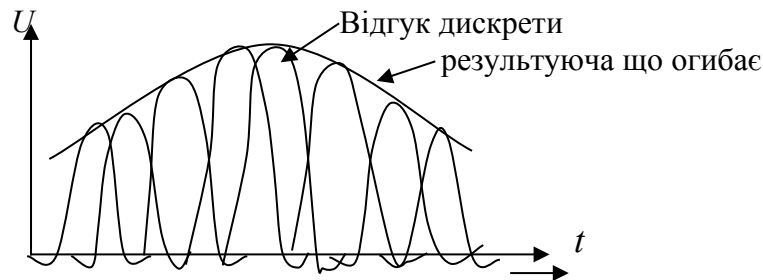


Рис. 11.5 - Крива $\frac{\sin x}{x}$

Кожна дискрета затримується на інтервал $\frac{1}{2f_B}$.

Алгебраїчна сума відгуків робить результуючий сигнал, аналогічний дискретному сигналу.

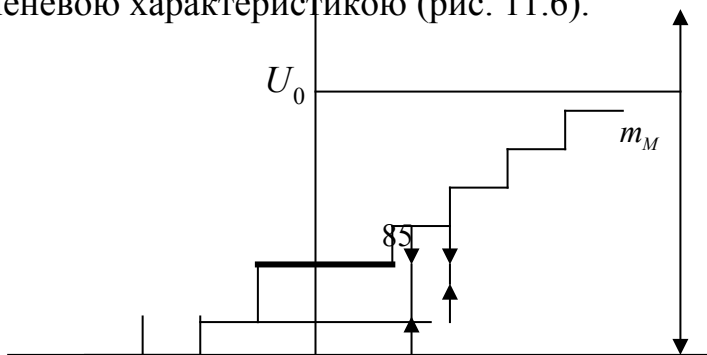
Цифрова передача припускає аналогових сигналів у цифрову форму; анально-цифрове перетворення використовується при передачі, а цифро-аналогове – при прийомі цифрового повідомлення. При цьому широко використовується представлення цифрових сигналів у виді кодових імпульсних послідовностей. У комп'ютерах інформація представлена у виді двійникових кодів, що представляють номери, букви, спеціальні символи для передачі.

Найбільше, широко використовується «двійниковий код» зв'язку «Ass-key» - ASCII- американський стандартний код.

Дискрети цифрового сигналу різні по амплітуді. Амплітуда кожної дискрети представляється двійниковим кодом за допомогою операції квантування за рівнем – перекладу значень амплітуд дискрет у двійниковий код.

2.4.4 Квантування сигналів

Квантування здійснюється в аналого-цифровому перетворювача (АЦП) з ступеневою характеристикою (рис. 11.6).



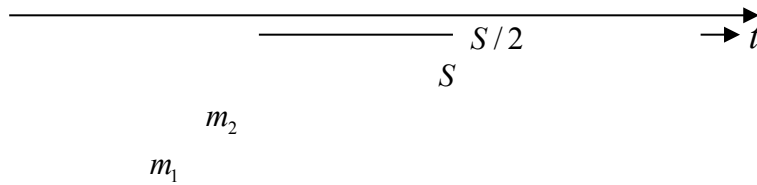


Рис. 11.6 - Ступенева характеристика

Аналоговий і перетворень сходовою характеристикою сигнал відрізняються. Ця відмінність визначається **помилкою квантування**. Це помилка квантування – випадкова, і залежить від кроку квантування S . Середня квадратична помилка квантування

$$e^{-2} = \frac{S^2}{12}. \quad (11.5)$$

2.4.4.1 Приклад квантування імпульсного сигналу

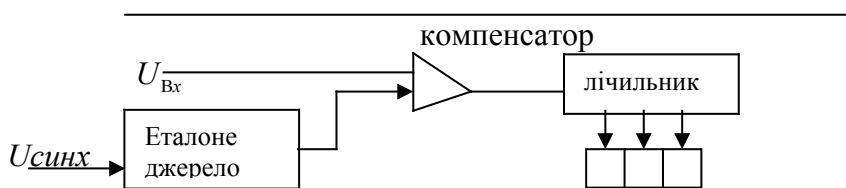
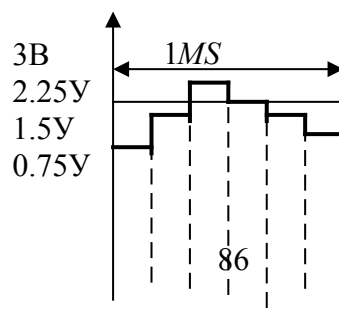


Рис.11.7 - Квантування імпульсного сигналу

- Алгоритм роботи:
1. $U_{вх} > U_1 \rightarrow \text{"1"}$
 2. $U_{вх} \geq U_1 + U_2 \rightarrow \text{"1"}$
 3. $U_{вх} < U_1 + U_2 + U_3 \rightarrow \text{"0"}$
 4. $U_{вх} < U_1 + U_2 + U_4 \rightarrow \text{"0"}$
 5. $U_{вх} < U_1 + U_2 + U_5 \rightarrow \text{"0"}$
 6. $U_{вх} < U_1 + U_2 + U_6 \rightarrow \text{"0"}$.

Це – двійниковий сигнал 000011.



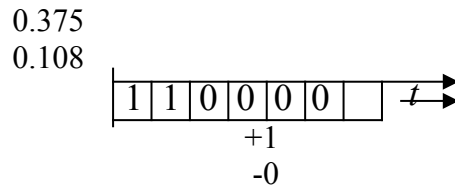


Рис. 11.8 - Двійниковий сигнал

Таблиця 11.1 $U_{\text{эт}} = 3\varepsilon$

1	1.5У	U_1
2	0.75У	U_2
3	0.375В	U_3
4	0.188В	U_4
5	0.094В	U_5
6	0.047В	U_6

Контрольні запитання:

1. Що таке умова дискретизації?
2. Що таке теорема дискретизації?
3. Який висновок випливає з теореми дискретизації?
4. Як здійснюється квантування дискретних сигналів?
5. Що таке середня квадратична помилка?

3 Кодування

3.1 Двійковий код. Код Грея. Код Баркера

Двійниковий код. Код базується на двійковій арифметиці, використовуваної в комп'ютерах і зв'язку. Код має два значення – 0 і 1. Як сигнал 0- це відсутність сигналу; 1 – наявність сигналу. Кожна двійкова 1 або 0 - це біт мовою зв'язку .

Приклад (рис.12.1) комбінація двійкового коду 101:

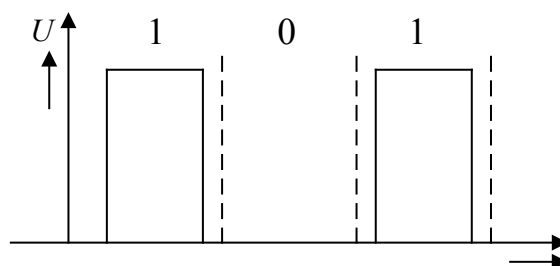


Рис. 12.1 - Двійкові імпульси

Для визначення десяткових цифр використовуються двійкові комбінації 0 і 1, представлені в таблиці 12.1.

Таблиця 12.1 – Двійникові комбінації 0 і 1

Десяткова система	Двійкова система
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010

Бінарна арифметика представимо число в десятковій системі $10^3 10^2 10^1 10^0$. 1234=1 2 3 4 .

У бінарній системі:

$$1234 = 1024 + 128 + 64 + 16 + 2 =$$

$$= 1 * 2^{10} + 0 * 2^9 + 0 * 2^8 + 1 * 2^7 + 1 * 2^6 + 0 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 +$$

$$+ 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0,$$

$$\text{або } 1234 = \begin{matrix} & 2^{10} & 2^9 & 2^8 & 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 1234 = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Додавання

Віднімання

Множення

Ділення

$$0+0=0$$

$$0-0=0$$

$$0*0=0$$

$$0 \div 0=0$$

$$0+1=1$$

$$1-0=1$$

$$0*1=0$$

$$1 \div 1=1$$

$$1+1=1 \text{ і перенос } 1$$

$$1-1=1$$

$$1*1=1$$

$$1+1+1(\text{з переносу})=1+\text{перенос}1.$$

Зауваження: застосування двійного рахунка в логічних ланцюгах мають вид операцій п, або, не.

У техніку зв'язку інформація перетворюється в цифрову форму. Для цей сигнал поділяється на рівні по амплітуді, кожному з яких привласнюється десятковий номер з наступним представленням у двійниковому коді (рис. 12.2).

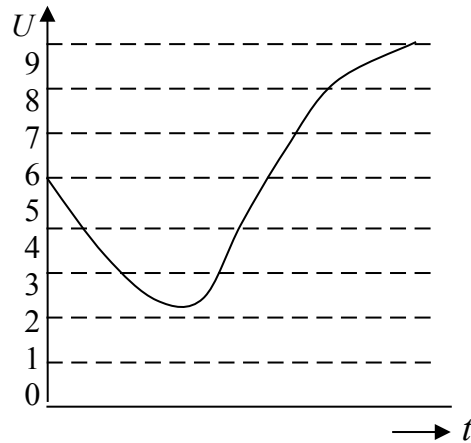


Рис. 12.2 - Двійниковий код

Квантування за рівнем перетворить аналоговий сигнал у дуже елементарний сигнал з 0 і 1 у формі коду. Це є основою для ІКМ - імпульсно-кодової модуляції, використовуваної в системах зв'язку.

Приклад – одноканальна система зв'язку (рис.12.3).

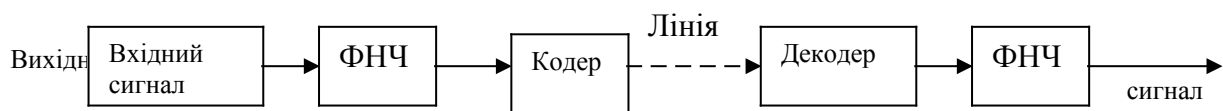


Рис. 12.3 - Одноканальна система зв'язку

Вхідний сигнал обмежений по частоті за допомогою ФНЧ і потім дискретизований. Кожен дискретний імпульс перетворений у групу імпульсів у кодері відповідно до двійникового коду. Група імпульсів передається по лінії, потім декодується в приймачі для відтворення первісного дискретизованого імпульсу кожної дискрети. Результат потім проходить через ФНЧ і перетворюється у вхідний сигнал на виході.

Різновид двійникового коду – **двійниковий – кодований десятиричний**. У ньому групи двійникових цифр використовується для позначення цифрових номерів; наприклад, цифра 9583 буде позначена як 1001 0101 1000 0011, і вимагає 16 цифрових двійникових комбінацій. Код широко використовується в комп'ютері й у зв'язку.

Код Грея. Застосовується для перетворення результатів вимірів кутових положень при обертанні, наприклад, антени радара. Код змінюється від однієї цифри до іншої тільки однією двійковою цифрою (таблиця 12.2).

Таблиця 12.2 - Десятковий код і код Грея

Десятковий код	Код Грея
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111

Код Баркера. Потік інформації повинен бути синхронізований синхроімпульсами з крапкою тимчасовою прив'язкою. Для цього існує спеціальний клас кодів, відомі як коди Баркера.

Такі коди є послідовністю імпульсів з довжиною послідовності не більш 13.

Сигнали, що представляються такими послідовностями, наприклад, з фазою, що змінюється від імпульсу до імпульсу, називають фазо-кодоманіпульованим сигналом.

Типові коди Баркера:

n	Рівень бічних пелюстків $\leq \frac{1}{n}, \text{ дБ}$											
2	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table> ; <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table> - 6 дБ	1	0									
1	0											
3	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> - 9,5 дБ	1	1	0								
1	1	0										
4	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table> - 12 дБ	1	1	0	1							
1	1	0	1									
5	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table> - 14 дБ	1	1	1	0	1						
1	1	1	0	1								
7	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> - 16,9 дБ	1	1	1	0	0	1	0				
1	1	1	0	0	1	0						
11	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> -20,8 дБ	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0		

13

1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

-22,3 дБ

Пік автокорреляційної функції дорівнює n .

ASCII код. Це американський стандартний код, використаний у зв'язку для передачі інформації. Містить групи-байти з восьми біт, одна з яких – перевірна, з ємністю 128 варіантів. Використовується в системах передачі інформації зі швидкістю від 300 біт/секунду до 9,6 Кбіт/секунду.

3.1.1 Цифрова обробка мови

У каналах передачі сигнали мови перетворюються в електричні сигнали, при цьому застосовується 4 різні технології обробки мови: амплітудна компресія; тимчасова компресія; частотна компресія і техніка синтезу-аналізу мови.

Мова фізично – це акустичний сигнал з рівнем, що змінюється, по амплітуді і періодом більш 20-30 мілі секунд, у смузі частот 50 Гц - 10 кГц.

Мову роблять вокальні органи людини – легені, дихальна трубка, гортань, горло і ніс. У процесі мови повітряно вокальному тракту піднімається від легень до губ, змінюючи форму такту шляхом руху губ, мови і щелеп, що називається **артикуляцією**.

Мова містить голосові, глухі і дзвінкі звуки. Голосові звуки, що включають голосні і частина приголосних, залежать від вібрації голосових зв'язувань при русі повітря через голосовий тракт. Звукові частоти формують лінійний спектр, і, у залежності від порожнини горла, рота і носа, резонують на **трьох основних форматних частотах**.

Глухі звуки, такі як приголосні Ф, с і р, виробляються повітряним завихренням десь уздовж голосового тракту.

Дзвінкі звуки, такі, як приголосні δ і g, створюються зупинкою потоку повітря від легень у крапці закриття тракту чи мовою губами.

Система мови людини може бути змодельована у виді ланцюгів лінійного фільтра.

Голосові звуки можуть імітуватися генератором імпульсів, неголосові генератори шуму. Фільтр може імітувати резонансні частоти вокального тракту.

Мовні коливання містять надлишкову інформацію, і це дозволяє включати в обробку мови техніку стиску спектра використовуючи більш вузькі частотні смуги, чим в оригіналі спектра мови. Мова створюється повільними артикуляційними рухами, що вимагає більш низький рівень інформації, що реально має акустичний спектр. Через це мова має велику надмірність інформації що дозволяє використовувати цю надмірність для одержання важливих інформаційно-цільових параметрів. Ця надмірність

використовується в спектральних приладах – **вокодерах** або **голосових кодерах**.

Вокодери вимірюють спектральну огибаючу сигналів мови і її параметрів для передачі інформації мовного сигналу в більш вузькій смузі частот чим ті, котрі вимагаються для даних сигналів мови.

Прийнятий у вузьких смугах частота сигналу на прийомній стороні синтезується з деякими втратами якості, але без серйозних втрат інформативного змісту.

Використовують різні варіанти вокодерів; для цифрової обробки мови використовують **форматні вокодери**. Сигнал цифрової мови використовують кодування коливань і техніку аналіз-синтез.

При кодуванні коливань сигнали мови дискретизуються і квантуються, претворити в кодові послідовності.

При аналізі-синтезі на прийомний конус оригінал сигналу не відновлюється. Використовується теоретична модель з параметрами реального сигналу мови. Ці параметри передаються на прийомну сторону, використовуючи цифрове представлення, і сигнал відновлюється відповідно до моделі, використаної для аналізу, та синтезується.

У дискретно-часовій моделі відгук вокального тракту може бути представлений трансверсальним фільтром зі зворотним зв'язком. Коефіцієнти зворотного зв'язку моделюють три основні резонансні частоти вокального тракту.

Ці резонансні частоти можуть бути виключені із сигналів мови прямим зв'язком трансверсального фільтра. Горловий імпульс також може бути представлений дискретним сигналом трикутної форми.

Лінійна передбачуваність сигналу мови заснована на лінійності моделі генерування мови (рис. 12.4).

Голосові звуки генеруються генератором імпульсів, неголосові – генератором шуму. Вокальний тракт представлений цифровим фільтром коефіцієнтом, що міняються в часі. Обрані коефіцієнти повинні забезпечувати необхідні виході бажані код-мовні параметри.

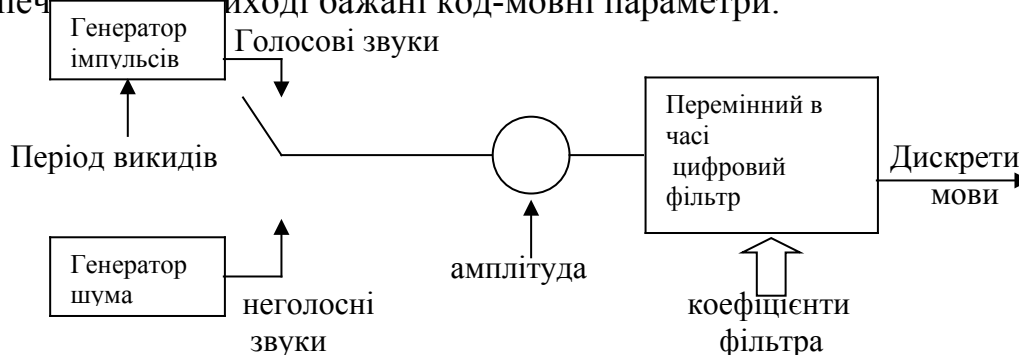


Рис. 12.4 - Лінійна передбачуваність сигналу мови

3.1.2 Обробка зображень

Оптичні зображення можуть бути оброблені електроні в різних цілях, наприклад, для стиску інформації в області часів-смуг частот, кореляції перекручувань, посилення контрастності, виділення частин з ланцюгом зображуючи, змінюючи масштабування і так далі. Для перебування зв'язку між оптичної й електронної обробки використовуються просторові перетворення зображення I_{xy} в просторі X_1Y_1 в образ $i_{x_1y_1}$ у просторі (x_1, y_1) .

Операція може бути представлена як
$$i_{x_1y_1} = \iint_{xx} I_{xy} h(x, X, y, Y) dXdY,$$

де $h(x, X, y, Y)$ - точково-розподіляюча функція "визначальна" розподіл яскравості по поверхні образа в залежності від нескінченно малого крапкового джерела на поверхні X_1Y_1 .

Для просторово-інваріантного оператора $h(x, X, y, Y)$ операція може бути представлена інтегралом згортки
$$i_{x_1y_1} = \iint_{xx} I_{xy} h(x - X)(y - Y) dXdY,$$
 або
$$i_{x_1y_1} = I_{xy} * h(xy).$$

Оригінал зображення знаходиться в такий спосіб. Виходить просторове перетворення Фур'є на (UV) поверхню, а потім за допомогою зворотного перетворення знаходиться I_{xy} , та знаходимо

$$I(UV) = \frac{i(UV)}{H(UV)}, \text{ и } I_{xy} = F^{-1} \left[\frac{i(UV)}{H(UV)} \right],$$

де F^{-1} - зворотне перетворення Фур'є, а $I(UV), i(UV), H(UV)$ - це перетворення Фур'є від $I(XY), i(XY), H(XY)$ відповідно. Надмірність інформації в зображенні дозволяє використовувати техніку стиску зображення. Типові використовувані методи при цьому – перетворюючі кодування, кореляції між елементом зображуючи, статистичну надмірність і так далі.

Для зменшення впливу шумів може проводиться обробка зображення перед або після передачі.

У багатьох випадках бажана не тільки реконструкція оригіналу зображення, але і його поліпшення.

Оптимальною стратегією є розробка процедур по виділенню необхідних частин зображення, таких, як підвищення контрастності, просторової частотної фільтрації, рівняння розподілу щільності імовірності і застосування нелінійних передатних функцій.

Контрольні запитання:

1. Як представити число 5678 у бінарній системі?

2. Як працює схема одноканальної системи зв'язку?
- 3.Яке застосування коду Грея?
- 4.Яке застосування кодів Баркера?
- 5.Як представляється модель системи мови людини?
6. Який спосіб знаходження оригіналу зображена за допомогою просторових перетворень Фур'є?

3.2 Передача цифрових сигналів

3.2.1 Частотний поділ

Для передачі цифрові сигнали перетворюються у фізичні аналогові сигнали з використанням різних видів модуляції і поділ переданих символів. Для ощадливого використання передачі сигналів через лінію, що оточують простір звичайно використовуються багатоканальні операції, при цьому відразу кілька повідомлень через кілька каналів одночасно посиляються на навколишнє середовище. Таке можливо, якщо канали розділені.

Є три способи розподілу каналів:

- частотний розподіл;
- тимчасовий розподіл;
- кодовий розподіл.

При **частотному розподілі** кожне повідомлення або канал зосереджений у смузі частот і різних частотних смуг розташовані одна біля одної, створюючи в загальному близько 24 каналів у телеграфі або 10800 у телефонному коаксіальному кабелі.

Усі частоти змішуються по передаючому боці і посилаються абоненту. Цей процес називається **частотним поділом** або **частотним ущільненням**.

Частотна смуга кожного каналу може бути виділена за допомогою відповідного фільтра на прийомному кінці, і в результаті різні повідомлення приймаються окремо і правильно (рис. 13.1).

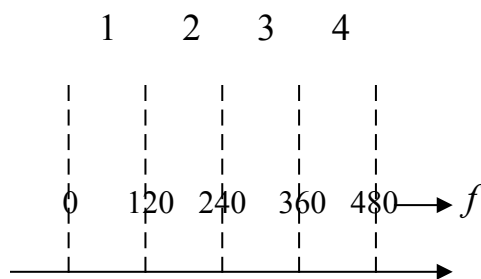


Рис. 13.1 - Частотні ущільнення

На (рис.13.2) представлена схема частотного ущільнення для телеграфу. Тут кожне вхідне повідомлення модулює іншу несучу; результат модуляції обмежується за спектром частот у фільтрах передавача. Потім усі канали поєднуються і посилаються на лінії, що передаються. На прийомному кінці канали розділяються прийомними фільтрами і потім демодуються.

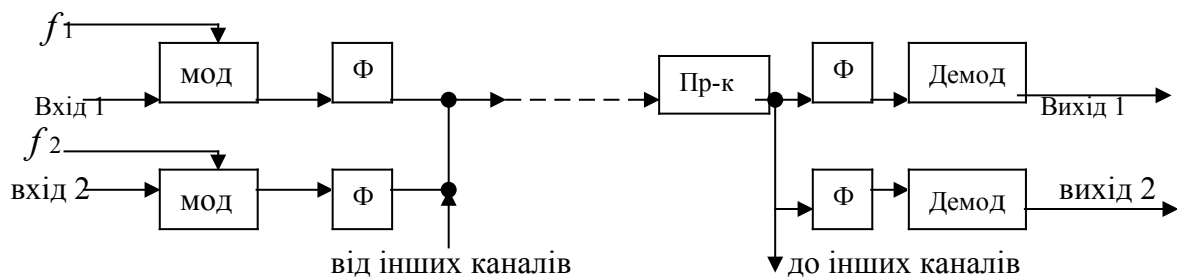
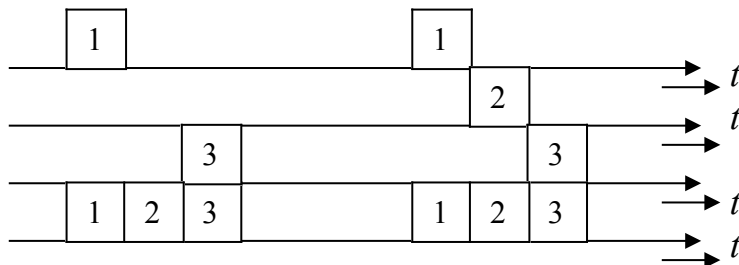


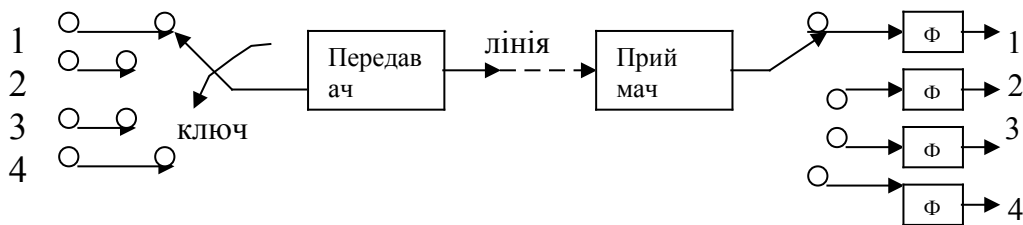
Рис. 13.2 - Схема частотного ущільнення для телеграфу

3.2.2 Тимчасовий поділ

Інший метод поділу (ущільнення) – зосередити тимчасові інтервали для кожного повідомлення або каналу з затримкою кожного інтервалу на невелику величину з наступною їх ідентифікацією. При цьому для кожного повідомлення використовується та сама смуга частот. Економія досягається за рахунок тимчасового ущільнення (рис. 13.3 а,б):



а)



б)

Рис13.3 - Ущільнювачі
а) тимчасове ущільнення;
б) часовий ущільнювач.

Поділ у часі виконується за допомогою електронного ключа. Об'єднаний сигнал потім передається по дроту. Прийнятий сигнал розділяється за допомогою іншого ключа, що синхронізований із ключем передавача.

3.3.3 Кодове розподілення

Це третя форма ущільнення, усі канали об'єднані в загальну смугу частот і передаються одночасно. Кожен канал містить окрему форму сигналу за рахунок модуляції кодовою послідовністю. Це – **кодове ущільнення**. Кодові послідовності представляють ортогональну групу кодів, таких, як набір функцій Уолша, або дискретні зрушення в псевдо випадкових кодах.

Функції Уолша. Це набір ортогональних функцій визначених на одиничному інтервалі (0,1), представлені на (рис. 13.4), і приймаючі значення від +1 до -1. Ці безупинні функції визначаються як $Wal_j(t)$, де j

- номер нуль-перетинань в одиничному інтервалі (0,1) на x - осі, що звичайно представляє час t . Альтернативно можна використовувати послідовність $cal_s(t)$ для парних функцій і $sal_s(t)$ для непарних, де s - це послідовність; кожна з цих функцій представляє половину середнього числа нульових перетинань в одиничному інтервалі (0,1). Функції Уолша і послідовності cal_s й sal_s аналогічні синусоїдальними функціями з частотами. На (рис. 13.4) представлені перші сім функцій Уолша.

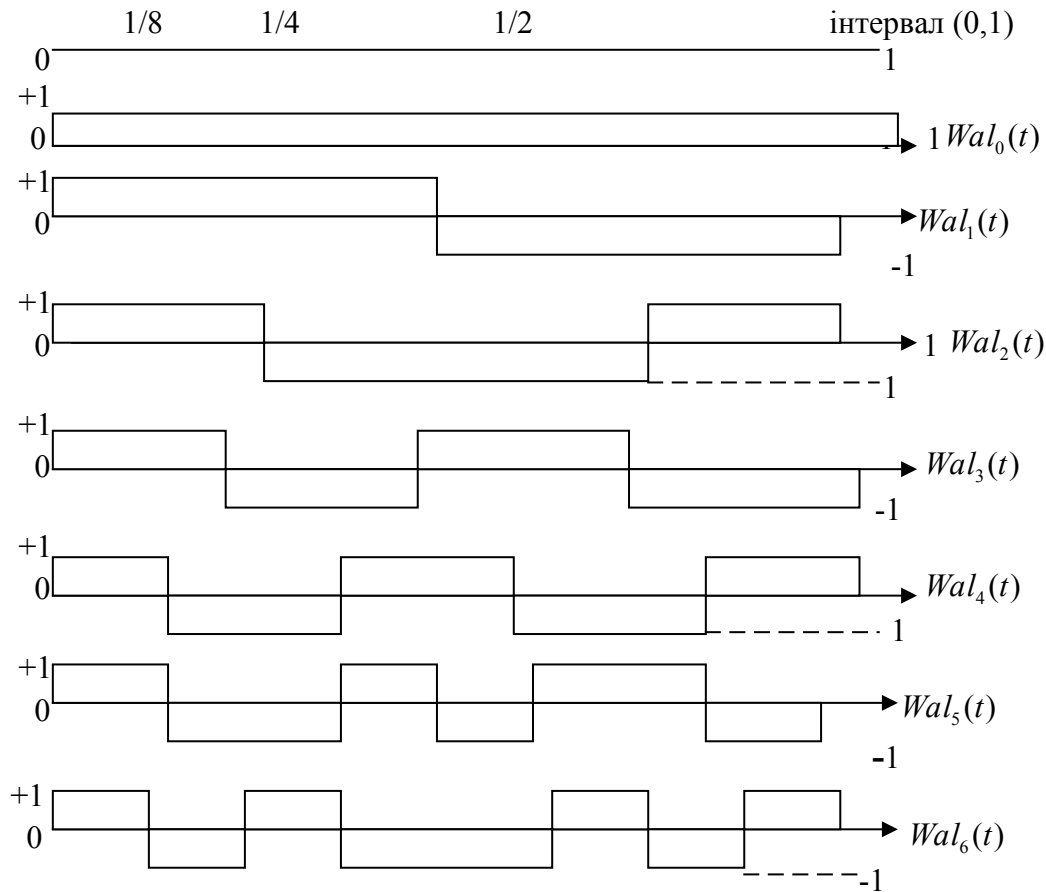


Рис. 13.4 - Перші сім функцій Уолша

Функції Уолша визначаються властивостями крапок розділяється $1/2, 1/4, 1/8, \dots, 1/2^n$ одиничного інтервалу (0,1). Індекс j - це двійниковий номер, де 0 і 1 визначають парну або непарну симетрію в крапках нуль-перетинань.

Дуже важлива цифра нуль-перетинання в точці $1/2^n$ інтервалу (0,1) і в нулі-перетинання в середині інтервалу – у точці $1/2$. Наприклад $Wal_6(t)$ на (рис. 13.4) може бути визначена як Wal_{110} .

Функції ортогональні; для кожної пари Wal_j і Wal_k маємо співвідношення

$$\int_0^1 WaljWalk = 0, j \neq k;$$

$$\int_0^1 WaljWalk = 1, j = k.$$

Продукт перемножування двох функцій Уолша є інша функція Уолша; вона знаходиться як додавання по модулю 2 \oplus - величин J і k . Тут ми маємо $WaljWalk = Walj \oplus k$. Функції Уолша відносяться до функцій Радамахера і матрицям Адамара. Одномірна і двовимірна обробка сигналів за допомогою швидкого перетворення Адамара або швидкого перетворення Уолша зараз досліджується, тому що вони дозволяють знизити розряди біт переданих сигналів. Дискрети функції Уолша можуть бути визначені як дискретні вибірки з безупинних функцій Уолша в N еквідістантних позиціях на одиничному інтервалі $(0,1)$, $N = 2^n$.

Позначають $Walj(k)$,

де J - номер змін знака від ∓ 1 до ± 1 ; k - називана перемінна, J і k можуть приймати дискретні значення $0, 1, 2, \dots, N-1$, де $N = 2^n$, n - ступінь.

Поділ сигналів утворюється на основі **кореляційного детектирування**. Ортогональність в обох – частотній і тимчасовій областях відповідає умовам **нульової** кореляції між повідомленнями.

Розглянемо випадок множення двох цифрових сигналів $S_1(t)$ і $S_2(t)$. Несучі – це дві псевдослучайные кодові послідовності $C_1(t)$ і $C_2(t)$ (рис. 13.5).

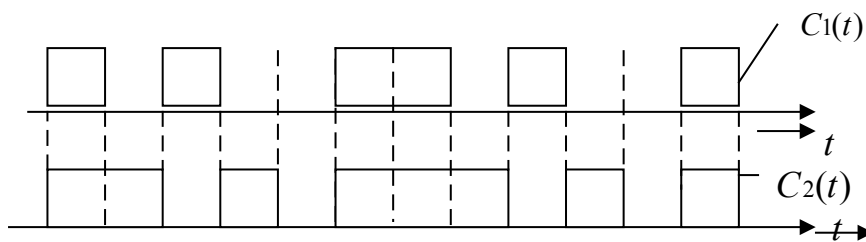


Рис. 13.5 - Дві псевдо випадкові кодові послідовності $C_1(t)$ і $C_2(t)$

Цифрові сигнали перемножуються з несучої, і потім лінійно складаються для передачі по дротах або радіо (рис. 13.6).

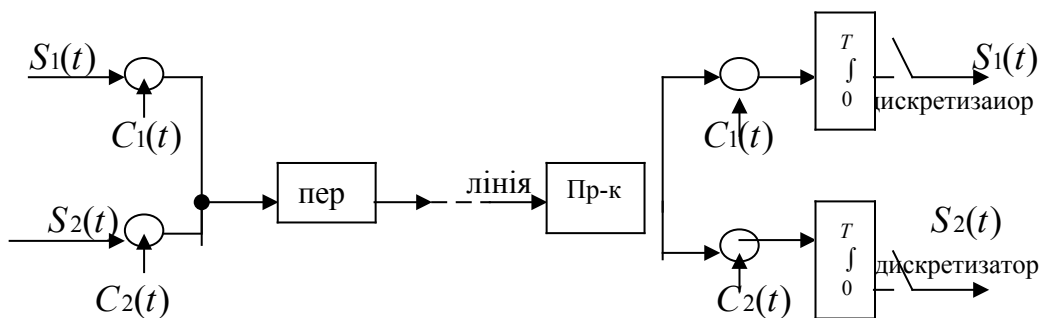


Рис. 13.6 - Цифрові сигнали

На прийомному боці виділяється кореляційна функція послідовностей $C_1(t)$ і $C_2(t)$ з відповідними цифровими сигналами $S_1(t)$ і $S_2(t)$. При цьому використовуються погоджені фільтри, що відповідає інтегруванню кількості біт за інтервал T , що відповідає інтервалу дискретизації після тимчасового інтервалу T .

3.3.4 Спотворення сигналу

Прийняті сигнали не ідентичні переданому через спотворення в процесі передачі.

Класифікація спотворень:

а. Спотворення при загасанні. Амплітуда сигналу зменшується аж до його зникнення; можуть зменшуватися амплітуди частот спектра сигналу. У результаті обмежується дальність передачі сигналу даної потужності. При P_1 - переданій потужності і P_2 - прийнятої потужності сигналу втрати або загасання втрати на передачу $= 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}, \text{дБ}$.

б. Фазові спотворювання. У комплексному сигналі різні частоти проходять через середовище з різними швидкостями, і в пункті прийому мають різні фази. Такі перешкоди несуттєві для телефону, але істотні для телебачення.

$$\text{Фазова швидкість сигналів } V_{\Phi} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f.$$

Якщо зрушення фази на одиницю довжини дорівнює β , то в довжині хвилі зрушення по фазі дорівнює $\beta\lambda = 2\pi$; $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, і $V_{\Phi} = \lambda f = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{\omega}{\beta}$.

Групова швидкість – це швидкість огибаючого поширення пакета хвиль сигналу $V_{gp} = \frac{d\omega'}{d\beta}$.

Якщо групова швидкість не постійна, виникають фазові перекручування.

в. Гармонійні спотворювання. Вони асоціюються з підсилювачем, і виникають через не лінійність характеристик підсилювальних елементів, тому що з'являються нові гармоніки, яких немає в оригіналі сигналу.

г. Інтермодуляційні спотворювання. Виникають при проходженні багато частотного сигналу зріз приладу з нелінійною характеристикою; при цьому утвориться нова сума і різниця частот.

д. **Перехресні спотворювання.** Виникають у багато каналних системах через інтерференцію частот, в основному через нелінійності передавача.

е. **Цифрові спотворювання.** У цифрових повідомленнях можливі помилки. Наприклад повідомлення з 5- розрядним кодом має імовірність помилки p ; імовірність правильного повідомлення – $1 - p$.

Обчислення імовірності помилки:

- **помилки в одному розряді** – імовірність однієї помилки – P , і імовірність, що інші розряди правильні - $(1 - p)^4$. Значить спільна імовірність однієї помилки і чотирьох правильних розрядів дорівнює $P \cdot (1 - p)^4$. Це визначається як сполучення C_1^5 варіантів; повна імовірність $= 5p(1 - p)^4 \approx 5p(1 - 4p)$, $p \ll 1$.

- **помилка у двох розрядах** - P_2 ; імовірність правильності в трьох розрядах $(1 - p)^3$; спільна імовірність $p^2(1 - p)^3$; кількість варіантів - C_2^5 ; повна імовірність $= 10p^2(1 - p)^3 \approx 10p^2(1 - 3p)$, і так далі.

Звичайно $p \approx 10^{-4}$, і імовірність двох і більш помилок у повідомленні дуже мала.

Контрольні запитання:

1. Які відомі способи поділу каналів передачі сигналів?
2. Що таке частотне ущільнення?
3. Що таке тимчасове ущільнення?
4. Що таке кодове ущільнення?
5. Що таке функції Уолша?
6. Що таке кореляційне детектування?
7. Які бувають види перекручувань сигналу?

3.3 Теорія інформації

Основоположники теорії інформації – Харлі і Шеннон. Саме вони дали визначення «зв'язку» і «інформації». Зі звичайної точки зору «зв'язок» несе ідею усного або письмового спілкування або словами повідомленнями. Середовищем, використовуваної для цього, є мова, а

письмове спілкування здійснюється за допомогою алфавіту. Не всі слова використовуються увесь час; це означає, що існує мінімум необхідний для здійснення зв'язку. Щоб спілкуватися, необхідно передавати інформацію іншим або, більш предметно, між суб'єктами машинами. Це є головним у визначенні слова «інформація», і, з погляду зв'язку, інформація не передається постійно.

Інформація – це не всі те, що включає в повідомлення, але-це те, що **може бути** включене в нього. Використання слів «може бути» дає статистичне визначення того, що нам ще невідомо, може бути в можливому повідомленні. Найважливіша частина повідомлення – **інформація – це те, що нам заздалегідь невідомо**. Чим більше невідомості, тим більше ми будемо мати інформації в отриманому повідомленні.

Це – **кількісне** визначенні інформації, що вимірюється в термінах можливих величин, що можуть бути. Харлі перший запропонував **логарифмічні одиниці як міру інформації**, що визначив як **імовірність повідомлення**. Вибір логарифмічних одиниць як міри інформації має практичне і математичне застосування. Це дозволяє використовувати достоїнства лінійної залежності тепер для одержання зручних математичних форм.

3.3.1 Ентропія

Імовірність передачі повідомлення **перед його прийомом** – це **апостеріорна імовірність**.

Відповідно, імовірність передачі повідомлення **після його прийому** – це апостеріорна імовірність. Чим більше апостеріорна імовірність, тим більше прийнято інформації. Можна визначити інформацію, прийняту з повідомлення у величинах логарифма відносини цих двох імовірностей:

$$\text{Прийнята інформація } I = \log \left[\frac{\text{апостеріорна ймовірність}}{\text{апостеріорна ймовірність}} \right].$$

Розглянемо тепер дискретні повідомлення з набору імпульсів з різними імовірностями P_i, P_j, \dots, P_m .

Якщо немає шуму, передані імпульси повідомлення можуть бути прийняті цілком. Апостеріорна імовірність тут дорівнює 1, апостеріорна імовірність для i -го імпульсу - P_i , і

$$I = \log \frac{1}{P_i} = - \log P_i \quad (14.4)$$

ця величина називається **власне-інформацією**.

У випадку більшого числа імпульсів n , i -й імпульс з'являється з імовірністю nP_i , і інформація, прийнята від джерела, є сума всіх таких величин у всіх варіаціях величини i :

Повна інформація

$$I = \sum_{i=1}^m nP_i \log P_i = -n \sum_{i=1}^m P_i \log P_i \quad (14.2)$$

і величина

$$H = \frac{I}{n} = - \sum_{i=1}^m P_i \log P_i \quad (14.3)$$

визначається як **ентропія**.

Ентропія – це середня інформація на один імпульс, якщо імовірність прийому імпульсу до кожен момент часу $P_i=1$, те

$$H = - \sum 1 \log 1 = 0; \quad (14.4)$$

це означає, що в цілком відомому сигналі міра інформації дорівнює нулю. Виявляється, чим більше невизначеність у прийнятому повідомленні, тим більше ентропія H .

Шеннон перший показав, що інформація може бути представлена в бінарній системі – «так» або «ні», представляючи між двома рівними альтернативами. Це представляється двійниковими числами 0 і 1, або «бітами».

Одиниця ентропії (середньої інформації) H -те біт, і база логарифма – 2:

$$H = - \sum_{i=1}^m P_i \log_2 P_i \text{ біт / символ(імпульс)} \quad (14.5)$$

Якщо кількість переданих символів у секунду дорівнює n_1 , то кількість біт інформації, переданих у секунду - H_1 ,

$$H_1 = n_1 H \text{ біт / с} \quad (14.6)$$

Наприклад, ми хочемо передати 4 різних повідомлень з рівною імовірністю. Для кодування нам не потрібно 4 біти інформації; досить двох біт, та використовувати двох двійникових цифр 0 і 1, і повідомлення ці – 00, 01, 10, 11, та $2^2 = 4$, або $H = \log_2 4 = 2$, біти.

У загальному виді, для N варіантів: $2^k = N$; $k = \log_2 N$; $H = \log_2 N$ біт.

Результат, отриманий для дискретного джерела, застосуємо і для безупинного джерела, тому що інформація від такого джерела може бути представлена в дискретному виді (теорема дискретизації), якщо сигнал обмежений по частоті.

Приклад 3.1 Визначити середню H та максимальну H_{\max} інформація дискретного двійникового сигналу, якщо імовірність передачі двох сигналів 0 і 1 дорівнює P и $(1 - P)$ відповідно.

Рішення:

$$\text{Ентропія } H = - \sum_{i=1}^m P_i \log_2 P_i \text{ біт/символ,}$$

де

$$H = - [P \log_2 P + (1 - P) \log_2 (1 - P)]$$

$$= - \log_2 e^{[P \ln P + (1 - P) \ln (1 - P)]}$$

с переходом до підстави натурального логарифма e .

Максимальне значення H знаходяться з похідної:

$$\frac{dH}{dp} = - \log_2 e^{[1 + \ln P - \ln(1 - P)]} = 0;$$

$$1 + \ln p = 1 + \ln(1 - p); p = 1 - p; p = \frac{1}{2};$$

$$H_{\max} = - \log_2 e^{\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}\right)} = \log_2 e \ln_2,$$

або $H_{\max} = 1$ біт/символ, що показано на (рис. 14.1).

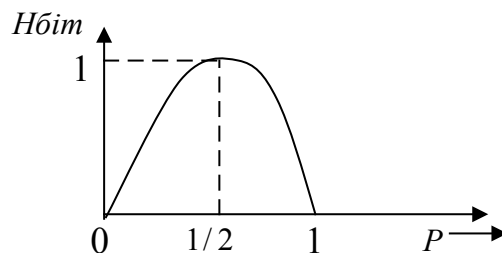


Рис.14.1 - $H_{\max} = 1$ біт/символ

3.3.2 Ємність каналу інформації

Для систем передачі і прийому сигналів ентропія показує міру невизначеності, є сигнали або ні.

Чим більше ентропія системи, тим більше в каналі зв'язку невизначеності. Якщо ентропія дорівнює нулю, сигнал цілком відомий.

Для каналів без шуму передані і передані і прийняті сигнали – такі ж, з такою ж ентропією.

Для каналів із шумом ці сигнали будуть відрізнятися, і ентропія має величину невизначеності, що визначається шумом. Використовуючи визначення, що визначається шумом. Використовуючи визначення Шеннона, нехай X і Y - це вихід передавача і вхід приймача відповідно; $H_1(x)$ - величина ентропії переданого сигналу, $H_1(y)$ - прийнятого сигналу, $H_1(y/x)$ - умовна ентропія переданого сигналу за умови, що прийнятий сигнал відомий.

Шеннон показав, що величина R переданої інформації

$$R = [H_1(x) - H_1(y/x)] = [H_1(y) - H_1(y/x)], \text{ біт/с} \quad (14.7)$$

Ємність каналу інформації Z визначається як величина інформації, що передана правильно за одну секунду, дається в одиницях $[\text{біт/секунду}]$. У будь-якій системі є шум, якому треба враховувати. Величину $H_1(y/x)$ Шеннон назвав **невизначеністю** і визначив, що **ємність каналу Z – це максимальне значення R - величина переданої інформації:**

$$C = \max [H_1(x) - H_1(y/x)]; \quad (14.8)$$

$H(y/x)$ - залежить від величини шуму в каналі. Таким чином, якщо $R > C$, неможливо передавати сигнали без помилок. У практичних каналах сигнал має різні рівні, що представляються комбінаціями 0 і 1. Нехай S - потужність сигналу; N - спектральна щільність потужності шуму; повний рівень напруги сигналу дорівнює $\sqrt{S+N}$, і мінімальний рівень дорівнює \sqrt{N} . Виходить, кількість припустимих рівнів визначається як $\sqrt{\frac{S+N}{N}}$.

Ентропія

$$H = \log_2 \sqrt{\frac{S+N}{N}} \text{ біт};$$

час передачі сигналу - t ; частота дискретизації $fg = 2f\vartheta$; $t = \frac{1}{2f\vartheta}$; звідси випливає, що максимальне число імпульсів (символів) за одну секунду дорівнює: $n = \frac{1}{t} 2f\vartheta$ символів.

При цьому

$$H_1 \max = nH = 2f\vartheta \log_2 \sqrt{\frac{S+N}{N}} \text{ біт/с} \quad (14.9)$$

Якщо ємність каналу Z , то

$$C = \frac{H}{t} = H_1 \max = nH = 2f\beta \log_2 \sqrt{\frac{S+N}{N}} \text{ біт/с};$$

$$\text{або } H = Ct = f\beta T \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \text{ біт} \quad (14.10)$$

це закон інформації Харлі-Шеннона.

Теорема Харлі-Шеннона. Теорема визначає співвідношення між ємністю каналу C , смугою пропускання каналу B і відношенням сигнал - шум S/N :

$$C = f\beta B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right). \quad (14.11)$$

Приклад: розрахувати інформаційну ємність каналу зв'язку зі смугою $B = 3100$ Гц і відношенням $S/N = 30$ дБ.

$$1. \quad 30 \text{ дБ} : \text{дБ} = 10 \log P; P = \text{антилог} \frac{\text{дБ}}{10} \text{ антилог } 3 = 1000.$$

$$2. \quad C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) = 3100 \log_2 1001 = \\ = (3.32 \log_{10} 1001) 3100 \approx (3.32 * 3 \approx 10) = 31000$$

Протиріччя: максимальна ємність $C = 2B = 2 * 3100 = 6200$ біт/с, а по теорії Харлі-Шеннона $C = 31000$?

Повернемося до представлення $C = B \log_2 N$, при $C = 31000$ і $B = 3100$ Гц знайдемо N :

$\log_2 N = \frac{C}{B} = 10$; $N = \text{антилог} 10 = 2^{10} = 1024$. Це означає, що ємність 31000 біт/с досягається в багаторівневій схемі з використанням 10 рівнів. При використанні 2-х рівнів схеми отримаємо $C = 2B = 2(3100) = 6200$ біт/с (бауд).

Але для $N = 1024$ ємність каналу складає 31000 бауд. На практиці реалізована область каналу складає від $1/3$ до $1/2$ від максимальної для стійкої передачі сигналів у присутності шуму.

Надлишок. Якщо повідомлення містить більше символів, чим це необхідно для передачі інформації, це повідомлення, має надлишок використовується для корекції помилок.

Якщо ентропія джерела дорівнює H_{\max} , відносна ентропія або ефективність дорівнює H/H_{\max} , і надлишок дається як:

$$\text{надлишок} = 1 - H/H_{\max}.$$

У випадку межсимвольної залежності використовується умова ентропія H_y замість H , надлишок дається як $\text{надлишок} = 1 - H_y / H_{\max}$.

Звичайно $H_y \leq H$, і знак рівності справедливий, коли символи взаємно незалежні. Наприклад для 8-буквеного слова H_y для англійської мови складає ≈ 2 біт/секунду; для 26 букв алфавіту плюс нуль отримаємо: $H_{\max} = \log_2 27 = 4,76$ біт/символ, $\text{надлишок} = 1 - \frac{2}{4,76} = 50\%$.

3.3.3 Теорія кодування

Узгодження джерела інформації з ємністю каналу зв'язку виконується шляхом кодування і відомо як **кодування джерела і кодування каналу**.

При **кодування джерела** принциповим є мінімізація числа біт для ефективної передачі, і справа лише у виборі точних критеріїв. Тут ціль - виключення або надмірності меж символної залежності без руйнування інформації.

При **кодування каналу** надмірність додається для боротьби із шумовими помилками при передачі. Воно включає ретельне звірення переданих цифр у кодовій формі з інформаційними цифрами. Це коригувальні коди.

Основний розвиток теорії кодування відноситься до кодування каналу, і тільки частина – до більш важкого дріботі-кодуванню джерел.

Кодування джерел сигналу. Цю ідею ілюструють дві технології - коди Фано і коди Хоффмана.

а. Код Фано. У цьому кодуванні повідомлення складаються в убутній ступені імовірності і групуються в найближчі рівноймовірної групи. Кожна група відзначається символами 0 або 1. Це показано в таблиці 14.1 для джерела, що робить 8 повідомлень m_1, m_2, \dots, m_8 , з імовірностями P_1, P_2, \dots, P_8 .

$$\text{Ентропія джерела} = \sum_{i=1}^m P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \approx 2,44 \text{ біт};$$

$$\text{ефективність} = \frac{2,44}{2,55} = 95,5\% .$$

Таблиця 14.1 - Код Фано

m	P	1	1		код	біт
m_1	0,4		0		11	$2 * 0,4$
m_2	0,2		1	1	10	$2 * 0,2$
m_3	0,15			0	011	$3 * 0,15$
m_4	0,1	0		1	010	$3 * 0,1$

m_5	0,06		0			0011	$4*0,06$
m_6	0,04			0	1	0010	$4*0,04$
m_7	0,03					0001	$4*0,03$
m_8	0,02				0	0000	$4*0,02$
ΣP							$=2,55$

б. Код Хаффмана. Повідомлення складаються в стовпець по ступені убування імовірності, і дві найменші імовірності поєднуються у форму нової імовірності. Нова імовірність поєднується з найближчої найменший і розташовується в новому стовпці з убутою ступеня, як раніш. Процедура повторюється до кінцевої імовірності рівної 1. Кожна зі згрупованих форм імовірностей – об'єднання, позначаємо цифрами 0 або 1. Кодування будь-якого повідомлення виробляється проходженням по горизонтальній лінії об'єднання і стрілки, що додається, до кінцевій крапці 1,0. Кодові об'єднання дають необхідний код послідовності ліворуч на право. Це показано прикладом таблицю 14.2, де знаходимо:

ентропія джерела = 2,44 біт

ефективність = $2,44/2,49=98\%$.

Таблиця 14.1 - Код Хоффмана

m	P								коди	біти
m_1	0,4	0,4	0,4	0,4					0	$1*0,4$
m_2	0,2	0,2	0,2	0,2					111	$3*0,2$
m_3	0,15	0,15	0,15	0,15					011	$3*0,15$
m_4	0,1	0,1	0,1	0,15					001	$3*0,1$
m_5	0,06	0,06	0,09	0,1					0101	$4*0,06$
m_6	0,04	0,05	0,06	0,1					01101	$5*0,04$
m_7	0,03	0,04	0	0					111101	$6*0,03$
m_8	0,02	0	0	0					011101	$6*0,02$
										2,49

Контрольні запитання:

1. Що таке ентропія?
2. Що таке одиниця ентропії?
3. Що таке величина переданої інформації?
4. Що таке ємність каналу інформації?
5. Що таке закон інформації Харли-Шеннона?
6. Яка теорема Харли-Шеннона?
7. Які коди, використання для кодування джерел сигналів?

3.4 Способи підвищення інформаційної ємності каналів

3.4.1 Швидкість передачі інформації

Швидкість передачі інформації звичайно представляється кількістю біт/с. Звичайна швидкість передачі даних складає кілька тисяч біт/с. Наприклад персональні комп'ютери зв'язуються зі швидкістю від 1200 до 2400 біт/с по телефонній лінії. У зв'язних системах швидкість передачі інформації – сотні мільйонів біт/с.

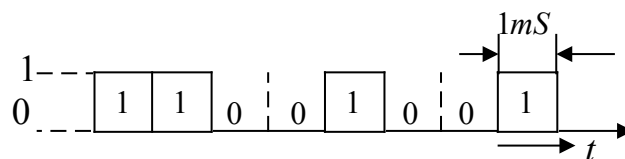
Інше представлення швидкості передачі інформації – це швидкість у **баудах** (бауд/с). Бауд – це кількість символів, що передається за одиницю часу, наприклад, секунду.

Символи в багатьох випадках – це двійниковий логічний рівень, наприклад 0 або 1. У цьому випадку біт/с просто дорівнює швидкості інформації в біт/с. **В інших випадках символ** – це один з амплітудних чи рівнів фазових зрушень сигналу, кожний з яких представляє два чи більш біти інформації. Тут кожен бауд представляє групу біт. Кількість бауд/с – не більше кількості біт у секунду, але кожен бауд означає відразу трохи біт, і в кінцевому рахунку інформаційна ємність зростає.

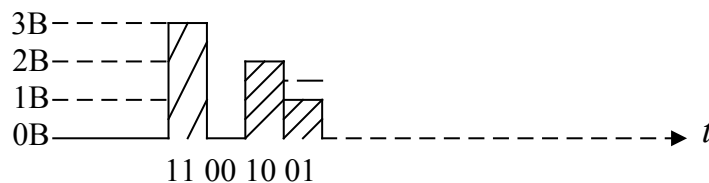
Приклад: кожен рівень амплітуди сигналу представляє відразу 2 біти інформації:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \quad 0V; 10 \quad 2V; \\ 01 \quad 1V; 11 \quad 3V. \end{array} \right\} \text{Тут система з 4 символами – з 4 різними рівня напруги.}$$

Передається сигнал 201 у двійниковому коді – у бітове число 11001001 (рис.15.1).



a)



б)

Рис. 15.1 - Сигнал 201 у двійниковому коді – у бітове число 11001001

a) $\text{біт/с} = \text{бауд/с} = 1 \text{ біт/мс} = 1000 \text{ біт/с};$

б) $\text{бауд/с} = 1000; \text{біт/с} = 2 \text{ біт/бауд} = 2000 \text{ біт/с}.$

Тут кожен бауд представляє 2 біти; інформаційна ємність зросла в бітах у 2 рази.

3.4.2 Модеми

Різні способи одержання баудів реалізовані в модемах. Передача цифрових сигналів по лініях передачі практично не реальна і – це сигнали постійного струму, що загасають у лініях зв'язку. Тому використовуються сигнали перемінного струму – цифрові сигнали є моделюючими для несучої частоти. Прийняті аналогові сигнали демодулюючими і перетворюються знову в цифрові.

Операції модуляції і демодуляції виробляються в модемах. Модем використовується для перетворення двійникових сигналів в аналоговий сигнал, що може бути переданий по провідній чи радіолінії, і для

модуляції цього аналогового сигналу і відновлення еквівалентного двійникового сигналу. Модем – це інтерфейс між комп'ютерами; модем також погодить цифровий потік інформації з аналоговою лінією зв'язку.

3.4.3 Види маніпуляції сигналів у модемах

а. Частотна маніпуляція. По частотній маніпуляції дві синусоїдальні хвилі використовуються для представлення 0 і 1. Наприклад, 0 має частоту 1070 Гц (телефонія), а 1 – 1270 Гц. Ці частоти по черзі передаються і створюють послідовну двійникову інформацію (рис. 15.2).

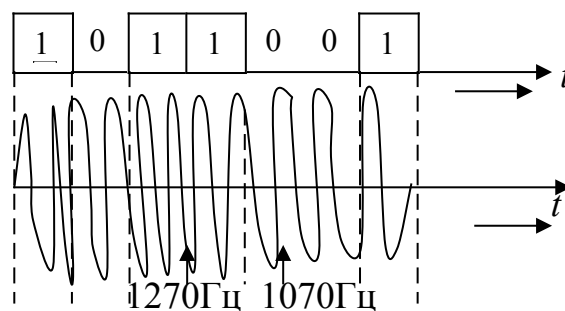


Рис. 15.2 - Послідовна двійникова інформація

Для одночасного – дискретного прийому і передачі з модемом (повний дуплекс) використовуються й інші частоти: 0-2025Гц; 1-2225Гц. Частоти 1070 Гц і 1270Гц використовуються для передачі (запиту), а частоти 2025 Гц і 2225 Гц – для прийому (відповіді); ці частоти – усередині смуги телефонного каналу 3 кгц (рис.15.3)

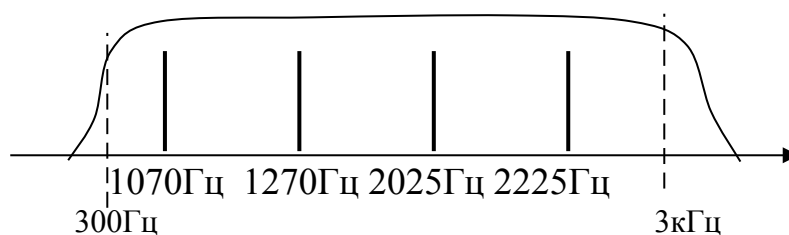


Рис. 15.3 - Частоти – усередині смуги телефонного каналу

б. Фазова маніпуляція. При фазовій модуляції сигнал передається зі зрушенням по фазі в синусоїдальній хвилі. «1» передається без зрушення по фазі, «0» – зі зрушенням на 180^0 - це так називається бінарна фазова маніпуляція (рис. 15.4):

1

1

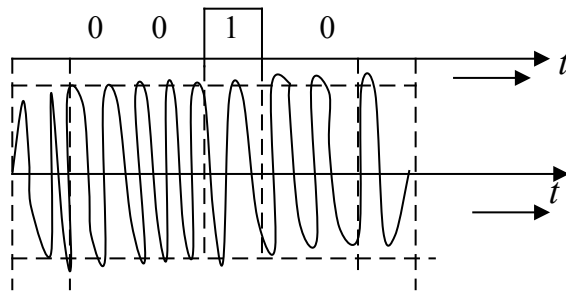


Рис. 15.4 - Бінарна фазова маніпуляція

в. **Квадратурна фазова маніпуляція.** Тут кожна пара біт у переданому сигналі відповідає своїй фазі. Між кожною парою біт – зрушення на 90° (рис. 15.5).

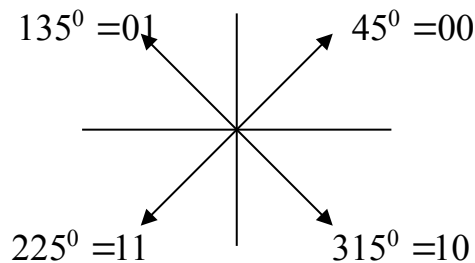


Рис. 15.5 - Квадратурна фазова маніпуляція

Можна також використовувати, наприклад, 3 послідовних біт – для створення 8 фазових зрушень, 4 біти – для 16 фазових зрушень. Основна тут ідея – кодувати більше біт на кожне фазове зрушення несучої або частоти більше біт на один бауд, щоб передавати більше інформації через даний канал зв'язку.

г. **Квадратурна амплітудна модуляція (КАМ).** Це техніка одночасного використання амплітудної і фазової модуляції несучої. Крім фазових зрушень, маємо зміна амплітуди. Популярною версією КАМ є 8-КАМ. Ця система використовує 4 фазових зрушення і 2 зміни амплітуди, формуючи 8 різних станів для передачі (рис. 15.6).

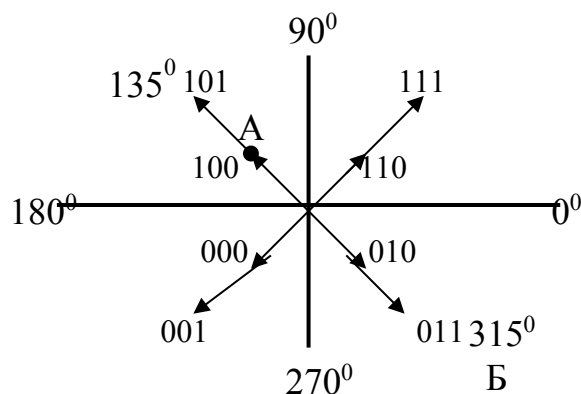


Рис 15.6 Квадратурна амплітудна модуляція

Відповідно, 16-QAM сигнал може бути генерований кодуванням 4 біт у кожному бауді. У результаті буде 8 фазових зрушень і два амплітудних рівні, що створюють 16 різних комбінацій.

QAM широко використовується в модемах, що передають інформацію з комп'ютера на комп'ютер по телефонних лініях. Швидкість передачі – 1200 бауд/с, що відповідає в перекладі на біти – до 9600 біт/с.

Усі види маніпуляції, квадратурна фазова маніпуляція, квадратурна амплітудна маніпуляція широко використовується на СВЧ і супутниковому зв'язку. На дуже високих частотах швидкість передачі інформації – мільйони біт/с – може бути легко отримана з мінімальними помилками в шумливій середовищі.

Контрольні запитання:

1. Що таке швидкість передачі інформації?
2. Що таке бауд?
3. Яке призначення модемів?
4. Що таке частотна маніпуляція в модемі?
5. Що таке фазова маніпуляція в модемі?
6. Що таке квадратурна фазова маніпуляція?
7. Що таке квадратурна амплітудна модуляція?

3.5 Протоколи

3.5.1 Протоколи

Існує два основних шляхи передачі послідовної двійникової інформації – асинхронний і синхронний.

При асинхронному - кожне слово повідомлення містять біти «Старт» і «Старт», що визначає кінець і початок слова. Кожне слово в двійниковій коді представляє один знак. Після біт «Старт» передається слово - наприклад, 7біт коду *FSCII*, і останній передається битка «Стоп» (рис. 16.1).

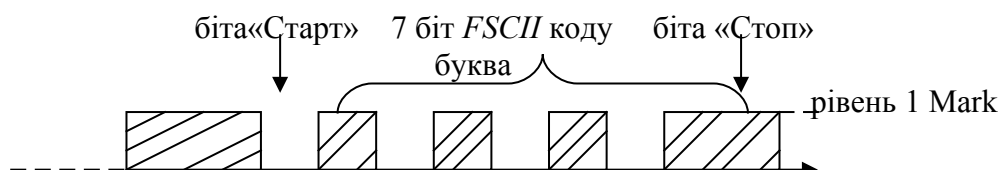


Рис. 16.1 - 7 біт коду *FSCII*

Усього для передачі слова потрібні 9 біт.

Інший спосіб – **передача блоками – синхронна**. Синхронізація створюється між приймачем і передавачем за допомогою синхронізуючих біт, що розташовуються перед блоком слів і наприкінці блоку (рис. 16.2).

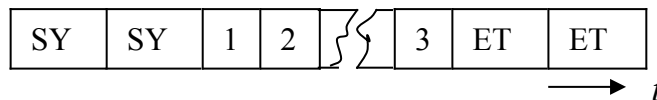


Рис. 16.2 - Передача блоками

SYN – 8 -бітові синхрознаки;

EXT – 8 –бітові знаки кінця передачі;

1,2 – інформаційні байти;

3 – останній інформаційний байт.

Швидкість передачі тут вище, ніж в асинхронному способі. Для успішного прийому і передачі інформації повинні бути спеціальні правила – угода між передавальними приймальними пунктами. Ці правила і процедури називаються **протоколами**.

Найпростіша форма протоколу – використання біт «Старт» і «Стоп» розрядів в асинхронному методі. Тут, коли нам інформації, система знаходиться в стані «1» або «Mark». Початок передачі 7 чи 8-розрядного ASCII знака – це генерування коду «Старт» - це «0» переданий за час одного біта. Це – сигнал приймачу, що інформація буде послана, і приймач повинний приготуватися до прийому слова.

Потім відбувається передача слова, до появи коду «Стоп» - «1», або «Mark», переданого один або два тимчасових інтервали. Це показує, що слово закінчиться. Так виглядає найпростіший протокол.

Що буде при передачі мульти слів у синхронній формі?

Тут повідомлення складається з безлічі слів. При передачі повідомлення поділяється на блоки з фіксованою кількістю символів у кожному. Блок тут – основна одиниця передачі. Кожен блок ідентифікується одним або більш спеціальним символом, переданих до і після блоку. Це додаткові символи включаються для початку і кінця блоку й інших функцій. Ці спеціальні символи – у 7 або 8-розрядному коді. Як і коди «Старт» і «Стоп», коди початку і кінця передачі, додаткові знаки використовуються для ідентифікації кожного блоку, а також для проведення процедур для виявлення помилок і їхньої корекції.

Частина символів спочатку і кінці блоку використовуються для «квитанцій» установлення зв'язку (рис.16.3). Вони дають передавачу і приймачу інформацію про її статус.

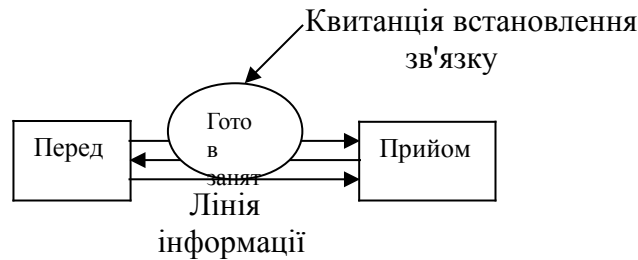
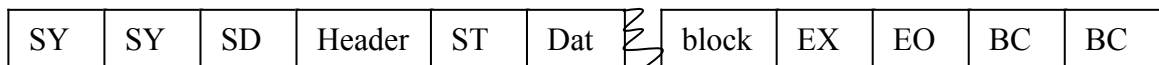


Рис. 16.3 - Квитанція встановлення зв'язку

Приклад: Протокол IBM Bisyna для синхронної передачі.



- SYN - 8- розрядних синхроімпульсів;
- SDH – 8- розрядна старт база;
- Header – 8- розрядний символ база;
- STX - 8- розрядний символ початку тексту;
- Datablock – текст блоку;
- EXT – кінець блоку або тексту;
- EOT – кінець передачі;
- BCC – перевірочні коди.

3.5.2 Виявлення помилок і корекція цифрової інформації

Для виявлення і корекції помилок у каналах, що виникають через імпульси, використовуються спеціальні коди, що коректують помилки, що звичайно класифікуються як або Коди **Коди згортки**.

У блок - кодах перевірочна цифра використовується для перевірки рядів інформації в блоках; у кодах згортки – виробляється перевірка розрядів інформації в попередніх блоках.

3.5.3 Кодування каналів. Коди перевірки парності

Звичайно в (n, k) коді міститься усього n розрядів з k розрядами інформації і $(n-k)$ перевірочних розрядів. Блок – код $[C] = [C_1, C_2, \dots, C_n]$ може бути визначений за допомогою матриці перевірки (*parity-check*) H або парності

$$[H] \oplus [C]^T = 0 \quad (16.1)$$

де символ \oplus визначає логічне додавання по модулі 2. Якщо ж $[H] \oplus [C]^T \neq 0$, це показує на помилку в кодовому слові, що може бути визначена за допомогою синдрому $[syndrome][S]$, що є стовпцем матриці, що визначає двійниковий номер, що показує позицію помилки. Наприклад якщо $[C_1]$ - прийняте кодове слово, нехай $[H] \oplus [C_1] = [S]$, і, якщо

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

те тут помилка – у першій цифрі коду.

Одна із широко застосовуваних систем виявлення помилки відомий як *Parity* - код з контролем по парності. Це система, де кожне слово передається з включенням додаткового – **контрольного біта**. Це може бути 0 або 1, у залежності від кількості нулів або одиниць в слові.

Для контролю можливе використання двох систем – **парної** і **непарний**. Парна – коли загальне число біт плюс контрольна одиниця \rightarrow парні.

Приклад: 7-розрядний ASCII код із включенням праворуч контрольної одиниці:

а. Непарна система контролю: 10110011; 00101001.

б. Парна система контролю: 10110010; 00101000.

На (рис. 16.4) приклад генератора контрольного імпульсу з логічних елементів «або».

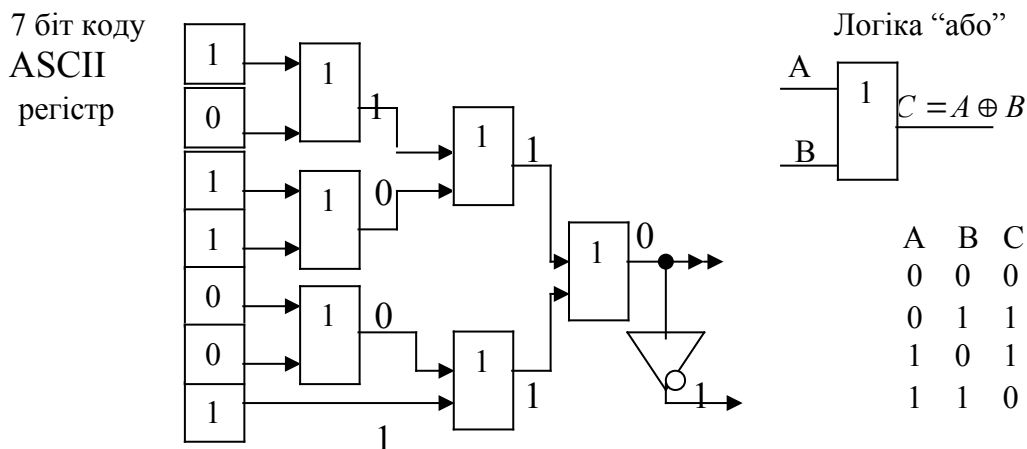


Рис. 16.4 - Генератор контрольного імпульсу з логічних елементів «або».

3.5.3.1 Коригувальні коди

Приклади таких кодів є коди Хеммінга і ВСН коди. При використанні кодових слів виробляється їхня оцінка ваговою функцією Хеммінга, де кількість «одиницю» у слові C_j і C_k по-різному. Це представляється як

$$d_{jk} = W(C_j \oplus C_k).$$

Наприклад, слова 00101 і 11100 – для них ваги Хеммінга дорівнює 2 і 3 відповідно, і дистанція Хеммінга тут 3, т-є $d_{jk} = (00101 \oplus 11100) = 3$. Коди і перевірки парності виявляють одну помилку в передатному повідомленні. Частотність переданого повідомлення перевіряється при прийомі. Наприклад, перевірна цифра додається в потік, цифр повідомлень так, що загальне число переданих цифр чотири. При помилці приймається непарне число цифр. Це виявляється, і передача повторюється.

а. Код Хеммінга. Код використовується для виявлення і корекції одиничних помилок у послідовностях прийнятих двійникових цифр. Набір n цифр поділяється на групи з do інформаційного і з перевірочними цифрами, чи $n = z + k$. Щоб перевірити n позицій, необхідне відношення $2^c - 1 \geq n$. Тут chi надмірність екстра – перевірочні цифри використовуються для перевірки помилок, і для мінімальної надмірності $2^c - 1 = n$.

Матриця перевірки парності конструюється дуже просто з використанням двійникового еквівалента кожного стовпця, що нумерується праворуч ліворуч десятиричними цифра. Так, для 4х інформаційних і 3х перевірочних цифр, $n=7$, і $do=4$. Це складає (7,4) кодове слово Хеммінга з формою P – матриці:

$$[H] = \begin{bmatrix} 0001111 \\ 0110011 \\ 1010101 \end{bmatrix},$$

і кодове слово $[C] = [C_1 C_2 K_1 C_3 K_2 K_3 K_4]$, де K_1, K_2, K_3, K_4 - інформаційні цифри; C_1, C_2, C_3 - перевірочні цифри, що задовольняють лінійним рівнянням:

$$\begin{aligned} C_1 &= K_1 \oplus K_2 \oplus K_4; \\ C_2 &= K_1 \oplus K_3 \oplus K_4; \\ C_3 &= K_2 \oplus K_3 \oplus K_4. \end{aligned}$$

Приклад: представимо кодове слово як 0010110; воно приймається з помилкою як 0010010, де помилка – у 5 -й позиції. Для визначення синдрому $[S]$, що визначає позицію помилки в двійниковій формі, використовуємо арифметику по модулю 2 для перебування:

$$[H] \oplus [C]^T = \begin{bmatrix} 0001111 \\ 0110011 \\ 1010101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \\ 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \\ 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

або $[S] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ - це в двійниковому коді 5, що показує помилку в 5-й

позиції.

б. ВСН код (Бозе-Чаудхурн-Хоквенхема). Це - блок-код, у якого перший набір до біт – це інформаційні біти, а інший набір $(n-k)$ – перевірочні біти. Це – циклічний код, і кодові слова можуть бути легко генеровані за допомогою здвигового регістра як кодера. Для декодування ВСН коду синдром S формується шляхом подачі прийнятого потоку біт у сдвиговий регістр – такої ж, як і при передачі. Порівняння біт за бітом перевірочних цифр, що показують наявність помилки виробляє синдром, що є записом прийнятої помилки. Декодер робить відповідну корекцію для біт інформації, і після декодера читається корегована інформація.

ВСН коди широко використовуються для виправлення випадкових помилок, тому що вони вимагають мінімальне число біт для заданої надійності. Коди складаються так, що $n = 2^m - 1$, де m -ступінь. Вони містять m перевірочних біт, що можуть виправити e помилок і знайти $2e$ помилок.

Наприклад, $(127, 106)$ ВСН код $n=127$, $m=7$ і $e=3$ може коректувати до 3 помилок і знайти 6 помилок у кожному даному блоці.

Контрольні запитання:

1. Що таке a синхронна передача інформації?
2. Що таке синхронна передача інформації?
3. Яка найпростіша форма протоколу?
4. Що таке протокол IBM Bisyna?
5. Що таке кодування каналів?

6. Що таке генератор контрольного імпульсу?
7. Які приклади коригувальних кодів?

Використана література

1. Б. Голд, И. Рейдер. Цифрова обробка сигналів. М, «Сов. Радіо», 1973.
2. F. Connor Signals. Thomson Litho Ltd, East Kilbride, Scotland, 1985.
3. F. Connor. Networks Edward Arnold, 1986.

Навчальне видання

ЛІМОНОВ О. С.

**ЦИФРОВА ОБРОБКА
СИГНАЛІВ**

Конспект лекцій

Підп. до друку 12.04.2011. Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 6,98. Тираж 50. Зам. № 138.

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15

Друкарня видавництва "Екологія"
65045, м. Одеса, вул. Базарна, 106
Тел.: (0482) 33-07-18, 37-07-95, 37-14-25

0 C 2 6 7 E F 8 4 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z