МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.І.Герасимов, І.С.Андріанова

ФІЗИКА В ЗАДАЧАХ. Ч.І. МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки
України як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів із природничих
напрямів підготовки.

О д е с а
"ТЭС" – 2010

ББК 22.2
Г37
УДК 531

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист №____ від __.__.200__р.).

Рецензенти:

Директор інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України (м.Київ), головний вчений секретар НАН України, академік НАН України
А.Г.Загородній

Академік ВШ України, член-кореспондент АПН України, заслужений діяч науки і техніки України, голова комісії з фізики та астрономії навчально-методичної ради загальноосвітніх навчальних закладів МОН України, зав.каф. медичної та біологічної фізики Національного медичного університету ім. О.О. Богомольця (м.Київ), д.ф.-м.н., проф. О.В.Чалий

Зав.каф. вищої математики Одеського національного політехнічного університету, д.ф.-м.н., проф. В.В.Новіков

Герасимов О.І. , Андріанова І.С.

Г37 Фізика в задачах. Ч.І. Механіка: Навчальний посібник /О.І.Герасимов, І.С.Андріанова.– Одеса: Вид-во "ТЭС", 2010. –105с.

ISBN

Навчальний посібник з розділу «Механіка» курсу загальної фізики має за мету поліпшення засвоєння змісту фізики студентами вищих навчальних закладів природничих напрямів підготовки за допомогою детального розгляду та розв’язання типових задач з окремих її підрозділів.

Акцент посібника спрямовано на роз’яснення, усвідомлення та застосування фізичних законів на шляху розв’язання конкретних задач.

Посібник може бути корисним для студентів, магістрів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників вищих навчальних закладів із природничих напрямків підготовки.

ББК 22.2

ISBN

ЗМІСТ

Передмова

Підручник має за мету формування уявлень знань та навичок в галузі загальної фізики для студентів міждисциплінарних напрямків підготовки, таких, зокрема, як “Науки про Землю”, “Технології захисту навколишнього середовища”.

Значний об’єм різноманітної інформації, який надсилається таким студентам практично не дозволяє зберігати у викладанні сумлінну логіку засвоєння положень фізичної науки. Убезпечити міждисциплінарний контингент від загрози еклектичного принципу формування знань та результатів навчання, на думку авторів підручника, міг би стати концептуальний принцип засвоєння основних положень фізики на шляху розв’язків задач. Саме пошук розв’язків різнорівневих задач від елементарних і до комплексних дозволяє перетворити теоретичні знання на практично-інструментальні, в яких будь яка міждисциплінарна галузь відчуває гостру, наочну потребу.

Автори ставили перед собою мету написати підручник з фізики, який в однаковій мірі можна було б адресувати будь якому міждисциплінарному напряму підготовки, працюючи з яким, студент засвоював би не низку схоластичних та легко втрачаємих визначень, формулювань, постулатів, а суто схему (динаміку) застосувань фізичних законів та підходів до розв’язків різних за складністю та ступеню узагальнень задач. В який мірі вдалося досягти поставленої мети - судити читачеві. Безумовно, була проведена попередня апробація матеріалів підручника на базі матеріалів конспекту кафедри загальної та теоретичної фізики на природоохоронному факультеті ОДЕКУ, яка дала позитивні результати.

На протязі роботи над підручником, авторів стимулювала думка про те, що природа, на щастя, не знає про профільний розділ її дослідників і творить свої явища, кидаючи виклик своєю складністю водночас і фізикам, і хімікам, біологам, математикам, інженерам. Тому оволодіння положеннями, зокрема фізики, з урахуванням їх самих практичних застосувань, викликає нових методичних підходів і виглядає водночас і актуальним, і своєчасним.

Одеса 2016р.

Автори

Частина І. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

Вступ. Попередні відомості.

Задача механіки. Механіка – наука про механічний рух матеріальних тіл і взаємодії, які відбуваються між ними. Під механічним рухом розуміють зміну з часом взаємного положення тіл або їх частин у просторі. В природі ми спостерігаємо рух небесних тіл, коливання земної кори, повітряні та морські течії і т. ін.. В техніці – рух транспорту, частин двигунів та механізмів, деформації елементів конструкцій, рух рідин та газів і багато іншого. Всі ці явища є прикладами механічного руху.

Традиційно механіку поділяють на три розділи: кінематику, динаміку і статику.

Кінематика вивчає властивості механічного руху у просторі та часі без розгляду причин, які його викликають.

Динаміка – розділ механіки, який вивчає вплив взаємодії тіл на механічний рух.

Статика розглядає умови рівноваги тіл під дією сил.

Простір і час. На основі вивчення механічного руху макроскопічних тіл формуються наші уявлення про фізичний простір та час. Ці поняття є фундаментальними, тобто їх неможна визначити через деякі простіші поняття. Простір виражає порядок співіснування окремих об'єктів, їх протяжність; час – послідовність зміни явищ, їх тривалість. Дослідним шляхом установлені властивості простору і часу: простір є тривимірним, однорідним та ізотропним, час – одновимірним і однорідним. Однорідність часу проявляється в незмінності фізичних законів у часі: дослід, проведений в незмінних фізичних умовах у різні моменти часу дає такий самий результат. З однорідністю часу зв'язано збереження енергії. Однорідність та ізотропність простору проявляються в незалежності фізичних явищ у замкненій (ізольованій) фізичній системі від її положення і орієнтації як цілого у просторі. З однорідністю простору зв'язано збереження імпульсу, з ізотропністю – збереження моменту імпульсу.

Саме такі уявлення про простір і час лежать в основі „Класичної механіки", основи якої були закладені Галілеєм, а основні закони сформульовані Ньютоном. І хоча подальший розвиток фізики показав, що класична механіка справедлива лише для опису руху макроскопічних тіл, тобто тіл великих порівняно з атомними розмірами, до того ж за умов їх руху зі швидкостями малими порівняно зі швидкістю світла, вона ні в якому разі не втратила актуальності в сучасній фізиці. Майже всі механічні задачі прикладного характеру вирішуються на основі класичної механіки.

Як вже згадувалось вище, закони класичної механіки справедливі при русі макроскопічних тіл з швидкостями v, малими порівняно з швидкістю світла у вакуумі c. Коли ці швидкості стають порівняними, класична механіка „не працює”, і рух тіл здійснюється за законами релятивістської механіки (зокрема, спеціальної теорії відносності), розробленої на початку XX століття А.Ейнштейном. Теорія відносності не спростовує класичну механіку, а розглядає її як складову частину, область застосування якої визначається умовою $v \ll c$. Виявляється, що спеціальна теорія відносності неспроможна пояснити деякі явища, які відбуваються на величезних галактичних відстанях (або коли маємо справу з дуже великими масами). У цих випадках для розв’язку відповідних задач використовується загальна теорія відносності.

При вивченні явищ, які відбуваються на атомних і ядерних масштабах, для опису поведінки та взаємодії мікрооб’єктів (наприклад, елементарних частинок, атомів, молекул), класична механіка замінюється на квантову механіку – фундаментальну фізичну теорію, яка базується на корпускулярно-хвильовій концепції опису мікрочастинок та використовує статистичну інтерпретацію міри стану – хвильової функції, або релятивістську квантову механіку (у відповідних границях розмірів та швидкостей).

При цьому закони збереження імпульсу, моменту імпульсу, маси - енергії, заряду залишаються справедливими незалежно від розміру та швидкості руху об’єктів.

Міжнародна система одиниць (СІ). Розмірність фізичних величин.

Задача механіки (як і фізики в цілому) полягає у забезпеченні послідовного опису процесів та явищ, який припускає до того ж аналітичну форму запису у вигляді співвідношення між числами. Таким чином, при опису руху тіл перш за все виникає задача завдання способу та одиниць вимірювання величин (скажімо, простору і часу та ін.).

Одиниці вимірювання величин об’єднуються в базові системи одиниць. У кожній з таких систем певна фізична величина має тільки одну одиницю виміру. Система у свою чергу складається з основних та похідних одиниць. В основу системи покладена оптимальна (як правило, невелика) кількість одиниць, які й називають основними. Основні одиниці строго визначені і є незалежними одна від одної. Одиниці вимірювання інших (допоміжних) величин зв’язані з основними або між собою співвідношеннями, які визначають відповідну величину, і носять назву похідних одиниць.

Існує декілька систем, які відрізняються вибором основних одиниць.

З 1982 р. до використання рекомендована Міжнародна система одиниць (СІ), яка містить сім основних одиниць: довжини – метр (м), маси – кілограм (кг), часу – секунда (с), термодинамічної температури – кельвін (К), кількості речовини – моль (моль), величини електричного струму –

ампер (А), сили світла – кандела (кд). Окрім того, використовують дві додаткові одиниці: плоских кутів – радіан (рад) і тілесних – стерадіан (ср).

Наведемо означення основних механічних одиниць СІ.

За основну одиницю довжини в Міжнародній системі одиниць (СІ) прийнятий метр – відстань, яку проходить світло у вакуумі за проміжок часу 1/299792458 секунди.

Сучасна фізика і техніка експерименту дають можливість одержувати інформацію про матерію у масштабах від об'єктів мегасвіту до розміру елементарних частинок, на основі якої установлюються загальні закономірності, що пояснюють та зв'язують їх поведінку. Шкала, що дає уявлення про розміри об'єктів та масштабів у природі, наведена на рис.1. За основну одиницю довжини на цій шкалі прийнятий метр. Відстані відкладені у логарифмічному масштабі: 1метру відповідає точка 0, (lg1 = 0), а кожний наступний інтервал у 10 разів більший за попередній.

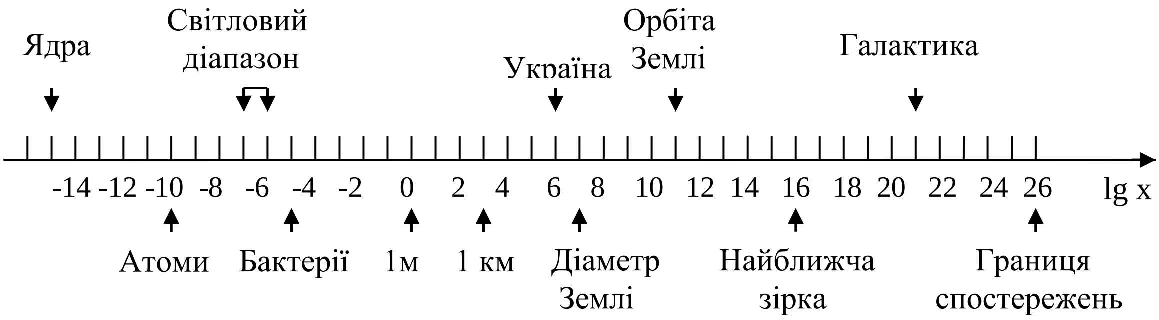


Рис. 1.

Завдання 1. Які непрямі методи вимірювання відстаней (наприклад, глибини моря, висоти гірської вершини, відстані до Луни і т. ін.) вам відомі?

За основну одиницю часу в Міжнародній системі одиниць (СІ) прийнята секунда. Це час, що дорівнює 9 192 631 770 періодам електромагнітного випромінювання, яке відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атому цезію-133.

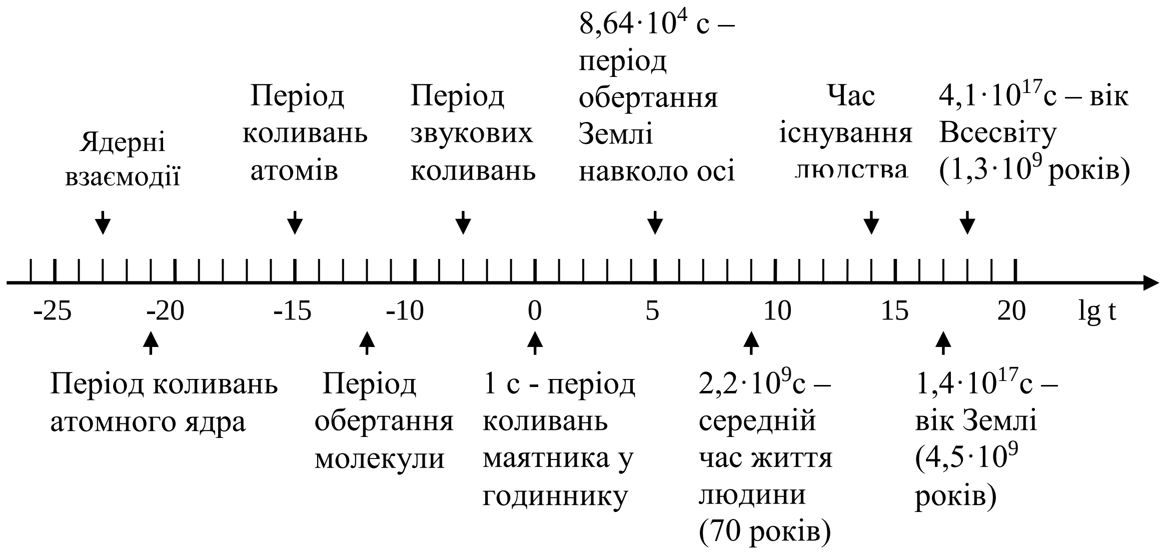


Рис. 2.

Сучасні прямі та непрямі (прикладом останніх може бути використання періоду піврозпаду радіоактивних ізотопів) методи вимірювань дають можливість вимірювати проміжки часу від періоду коливань атомних ядер до віку галактик. Характерні інтервали часу, виражені в секундах, (знов у логарифмічному масштабі) представлені на рис.2.

Завдання 2. Наведіть приклади природних систем, в яких події повторюються через певні детерміновані проміжки часу.

За основну одиницю маси в Міжнародній системі одиниць (СІ) прийнятий кілограм – маса міжнародного еталону речовини, який виготовлено з сплаву платини та іридію (90%Pt, 10% Ir) у вигляді циліндра (діаметром та висотою 39мм), що зберігається в Міжнародному бюро мір і ваг у м. Севрі (поблизу Парижа). Це тіло називають міжнародним прототипом кілограма.

Стандартну масу 1кг (точніше 0,99997кг) має 1дм^3 води при 4^{o}С та атмосферному тиску.

Якщо діапазон лінійних розмірів та часових інтервалів, що є характерними для Всесвіту, становить біля 40 порядків величини, інтервал

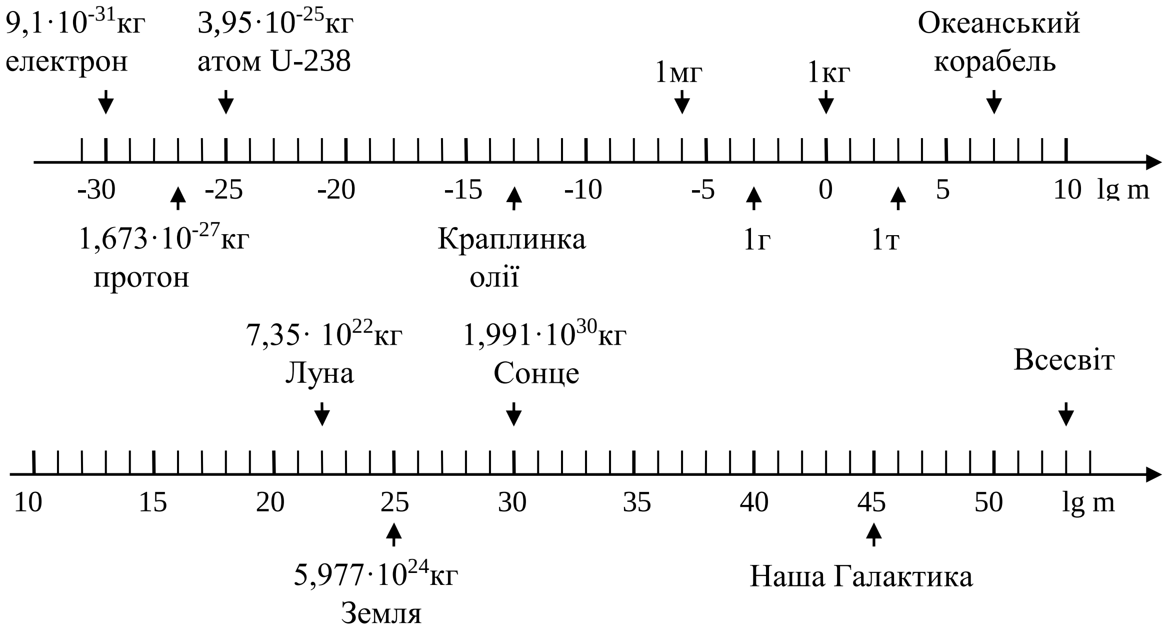


Рис.3

розбіжностей мас електрона і маси Всесвіту досягає приблизно 80 порядків величини (важко уявити собі це число!). Маси деяких найбільш важливих об'єктів природи (у логарифмічному масштабі) представлені на рис.3. За одиницю маси прийнятий кілограм.

Спосіб отримання похідних одиниць вимірювання розглянемо на прикладі швидкості. В елементарну формулу швидкості рівномірного руху $v = \frac{s}{t}$, у якій v – швидкість; s – шлях, який тіло пройшло за час t, треба підставити одиниці вимірювання величин, що входять до неї: $[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{м}{с}$.

Квадратні дужки позначають розмірність величини.

Розмірністю величини називають співвідношення, яке показує, як змінюється одиниця величини при зміні основних одиниць. Для розмінностей довжини l, маси m і часу t використовують позначення:

$$[l] = L, \ [m] = M, \ [t] = T.$$

За допомогою L, M, T розмірність будь-якої фізичної величини f може бути завдана співвідношенням:

$$[f] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma},$$

де α, β, γ - числа, які називають показниками розмінностей. Безрозмірною величиною називають таку, що має нульову розмірність (її значення не залежить від вибору основних одиниць вимірювання).

Перевірка розмірності або одиниць вимірювання у фізичних формулах дозволяє виявити помилку в їх запису. Розмірності обох частин рівняння, що виражає деякий фізичний закон, повинні бути однаковими, оскільки фізичні закони не можуть залежати від вибору одиниць вимірювання. Проте, перевірка розмірності не гарантує правильного запису формул, бо не враховує безрозмірних множників (коефіцієнтів).

Завдання 3. На основі співвідношень $v = at$; $F = ma$; $A = F \cdot s$, що зв'язують фізичні величини, установити розмірності прискорення $[a]$, сили $[F]$ і роботи $[A]$.

Розв'язки фізичних задач надаються числами (із зазначенням одиниці вимірювання). Відповідь не можна вважати повною без наведення одиниці вимірювання, бо вона має кількісну характеристику і є суттєвою частиною відповіді.

Часто при розв'язку задач вихідні дані приводяться в позасистемних одиницях, або одиницях, які не належать до Міжнародної системи одиниць. В цьому випадку перед розрахунками необхідно усі величини виразити в одиницях СІ, скориставшись відомими еквівалентами.

У якості прикладу розглянемо перетворення швидкості v = 72 км/год. в метри в секунду (м/с).

$$v = 72 \text{ км/год.} = 72\frac{(1\text{км})}{(1\text{год})}.$$

Замість попередньої одиниці довжини (км) у чисельник підставляємо її еквівалент в метрах (1000м), у знаменник підставляємо еквівалент часу в секундах (3600с) і отримуємо:

$$v = 72\frac{(1000\text{м})}{(3600\text{с})} = 20\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Порядок фізичних величин, їх форма запису та оцінка. Якщо чисельні значення фізичних величин набагато більші або набагато менші одиниці використовують їх запис у, так званому, стандартному вигляді: у вигляді числа від 1 до 10 (чисельне значення або мантиса), помноженого на відповідний степінь десяти (порядок величини). Приклади такої форми запису величин див. на рис.2, 3. Перевагою є те, що показники степенів при множенні або діленні тільки додаються або віднімаються відповідно.

Наприклад, $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$; $10^a / 10^b = 10^{a-b}$.

Для зручності в метричній системі одиниць часто використовують одиниці, які є кратними або частковими від основної одиниці. При цьому для переходу до основної одиниці до мантиси достатньо додати множник, який дорівнює десяти у відповідному степені (табл.1).

Таблиця 1.

Префікси і множники для утворення кратних і часткових одиниць

Префікс	Позначення	Множник	Префікс	Позначення	Множник

тера гіга мега кіло гекто дека деци	Т Г М к г да д	10^{12} 10^{9} 10^{6} 10^{3} 10^{2} 10^{1} 10^{-1}	санті мілі мікро нано піко фемто атто	с м мк н п ф а	10^{-2} 10^{-3} 10^{-6} 10^{-9} 10^{-12} 10^{-15} 10^{-18}

При проведенні розрахунків перш за все необхідно зробити грубу оцінку першої значущої цифри та визначити порядок шуканої величини, а потім при необхідності провести більш точний розрахунок.

Наведемо приклад такого розрахунку.

Приклад. Середня споживна потужність усіх електростанцій України $P = 54$ млн. кіловат (кВт). Яку площу повинні займати сонячні батареї для отримання такої самої потужності за рахунок сонячної енергії? Коефіцієнт корисної дії (ККД) перетворення сонячної енергії на електричну сучасних промислових сонячних елементів становить у середньому 14-18%. Середньорічна щільність потоку сонячної енергії на території України становить 180 – 250 Вт/м^2.

Розв’язання**:** Якщо прийняти ККД елементів рівним 15%, а щільність потоку сонячної енергії рівною 200 Вт/м^2, після перетворення сонячної енергії на електричну маємо $\frac{P}{S}$=30 Вт/м^2.

Звідки $$S = \frac{5{,}4 \cdot 10^{10}\,\text{Вт}}{30\,\text{Вт}/\text{м}^2} = 1{,}8 \cdot 10^{9}\,\text{м}^2 = 1{,}8 \cdot 10^{3}\,\text{км}^2 .$$

Зауважимо, еквівалентну площу має прямокутник зі сторонами 36х50 км.

Вектори і скаляри. При роботі з фізичними величинами суттєво визначити, до класу яких величин – векторів чи скалярів або тензорів належить дана фізична величина. Відповідно операції над ними здійснюються за різними правилами, які є притаманними типу величини.

Векторами називають величини, що характеризуються числовим значенням (абсолютною величиною або модулем), напрямом. Їх додавання здійснюється за правилом векторної суми – правилом паралелограму (рис.4а) або багатокутника (рис.4б).

Точка прикладання вектора не належить до його основних характеристик, її можна (це інколи дуже зручно) змінювати без шкоди для фізичного сенсу, а іноді (у випадку аксіальних векторів, таких, як кутова швидкість та ін.) вона принципово не визначена.

На рисунках (див. рис.4) вектор $\vec{a}$ зображується стрілкою, яка вказує його напрям. Довжина стрілки у вибраному масштабі визначає модуль вектора $|\vec{a}| = a$. До класу векторних величин належать швидкість, прискорення, сила і т. ін.

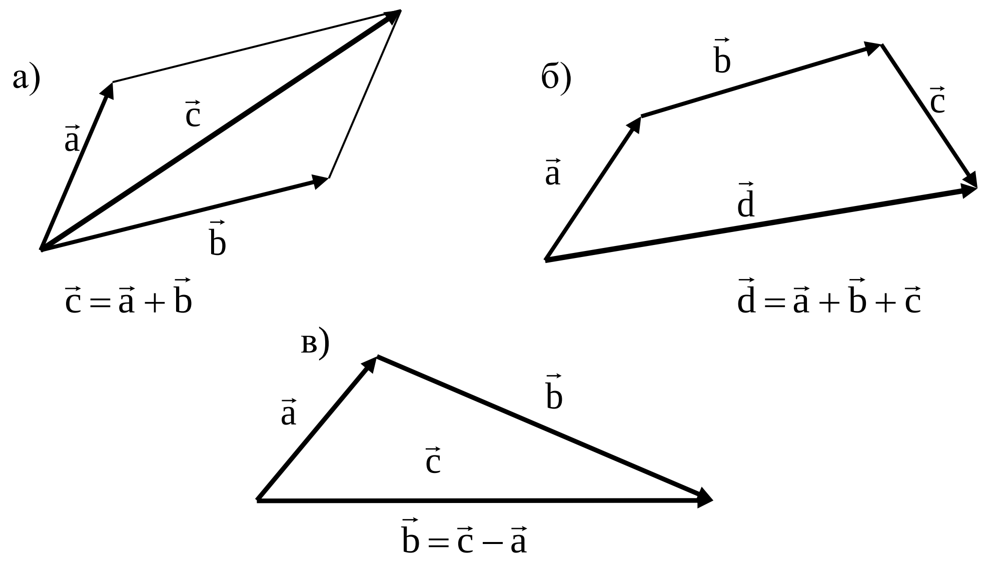


Рис.4 Ілюстрація правил векторної алгебри.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}\vec{b} = ab\cos(\hat{ab})$.

Векторний добуток векторів $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$, $c = ab\sin(\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b})$. Напрям вектора $\vec{c}$ визначається за правилом правого свердлика. Цей вектор змінює свій знак при переході від правої системи координат до лівої (і навпаки) або при зміні послідовності множників і є аксіальним вектором.

Аксіальний вектор, або псевдовектор – величина, яка перетворюється як вектор при операціях повороту, але на відміну від вектора, не змінює свій знак при інверсії (зміні знаку) координат.

Величини, що повністю визначаються своїм числовим значенням, називаються скалярами. Операції над ними задовольняють правилам звичайної алгебри. До класу скалярів належать, наприклад, час, об’єм, маса, робота, температура тощо.

Фізичні моделі. При вивченні фізичних явищ необхідне урахування зв’язку між різними процесами. При цьому можуть виникнути значні, іноді досить суттєві труднощі. Їх подолання можливе шляхом спрощення картини, що аналізується, нехтуванням менш суттєвого зі зосередженням на найбільш важливих характеристиках і властивостях тіл або процесів. Саме цю процедуру називають моделюванням. Взагалі фізика (і зокрема її розділ “Механіка”) завдяки можливості побудови абстрактних моделей володіє унікальною можливістю побудови узагальнюючих уявлень про процеси, які протікають у навколишньому середовищі.

Найбільш важливі моделі, які використовуються в механіці – матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, суцільне середовище.

Матеріальною точкою вважають тіло, розмірами та формою якого в умовах даної задачі можна знехтувати і вважати, що вся його маса зосереджена в одній точці.

Одне тіло у деяких випадках можна вважати матеріальною точкою, в інших – ні. Наприклад, при опису руху Землі уздовж орбіти навколо Сонця її можна прийняти за матеріальну точку. Якщо ж урахувати обертання Землі навколо власної осі, цього не можна робити. Так само, при ковзанні кульки по гладкій поверхні її рух можна розглядати як рух матеріальної точки. Але, коли вона котиться, обертаючись (за наявністю тертя) навколо миттєвої осі, таке модельне уявлення стає неадекватним. Отже, можливість застосування різних модельних уявлень, які спрощують розгляд задач, залежить від масштабів, на яких оцінюється рух тіла, та його характеру.

Абсолютно твердим вважають тіло, форма і розміри якого, залишаються незмінними при будь-яких зовнішніх впливів. Таких тіл не існує в природі, це модель, яку можна собі уявляти як систему жорстко зв'язаних матеріальних точок, відстань між якими не змінюється в процесі руху і взаємодії з іншими тілами. Цією фізичною моделлю зручно користуватися у випадках, коли деформаціями тіл можна знехтувати.

При вивченні руху рідин та газів у багатьох випадках ми можемо абстрагуватися від урахування їх атомно-молекулярної будови. Інакше кажучи – можна розглядати рідини та гази як неперервне, **суцільне середовище.** Саме така фізична ідеальна модель лежить в основі цілого розділу механіки (і взагалі фізики!) – механіки суцільних середовищ.

Розділ 1. Кінематика матеріальної точки і абсолютно твердого тіла

Тема: Кінематичні характеристики руху: траєкторія, шлях, переміщення, швидкість, прискорення. Прямолінійний рівномірний та рівнозмінний рух. Криволінійний рух тіла: тангенціальна та нормальна складові прискорення. Кінематика руху точки по колу: кутова швидкість, кутове прискорення. Рух твердого тіла.

Основні поняття і формули

1.1. Кінематика матеріальної точки.

Кінематичними характеристиками точки є – переміщення, шлях, швидкість, прискорення та час руху. Шлях і час руху – є скалярним величинами, всі інші – векторні.

● **Траєкторія** – лінія вздовж якої рухається точка. Форма траєкторії залежить від вибору системи відліку**.**

● **Система відліку** включає: 1) тіло відліку – довільно вибране тіло або система тіл, відносно якого визначається положення точки; 2)систему координат, що жорстко зв'язана з тілом відліку; 3)зазначення початку відліку часу та способу його вимірювання.

В залежності від форми траєкторії рух поділяють на **прямолінійний та криволінійний.**

● **Шлях s (**Δs**)** – довжина траєкторії, тобто відстань, яку матеріальна точка проходить вздовж траєкторії. Це завжди додатна величина.

● **Переміщення** $\Delta\vec{r}$ – напрямлений відрізок прямої (вектор), який з'єднує початкове положення матеріальної точки на траєкторії з подальшими її положеннями. (рис.1.1).

Модуль переміщення дорівнює довжині шляху при прямолінійному русі, та менше за довжину шляху при криволінійному русі.

● **Радіус-вектор**

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

задає положення матеріальної точки (центра мас твердого тіла) у просторі. Тут $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори напрямів (орти); x, y, z – координати точки (рис.1.2).

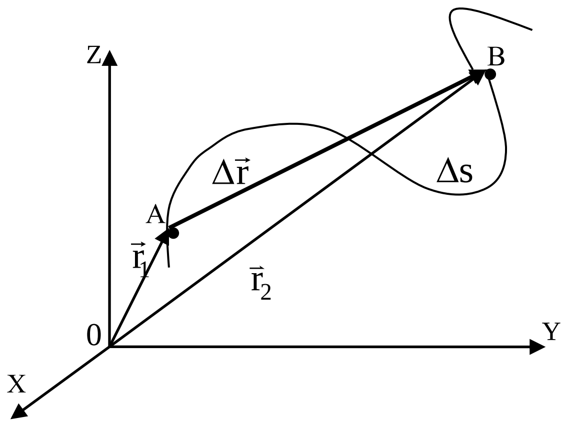


Рис.1.1. Шлях Δs і переміщення $\Delta\vec{r}$ матеріальної точки.

Модуль радіус-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

● Кінематичне рівняння руху матеріальної точки завдає залежність її координат від часу і має вигляд:

у векторній формі $\vec{r} = f(t)$,

у скалярній формі

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

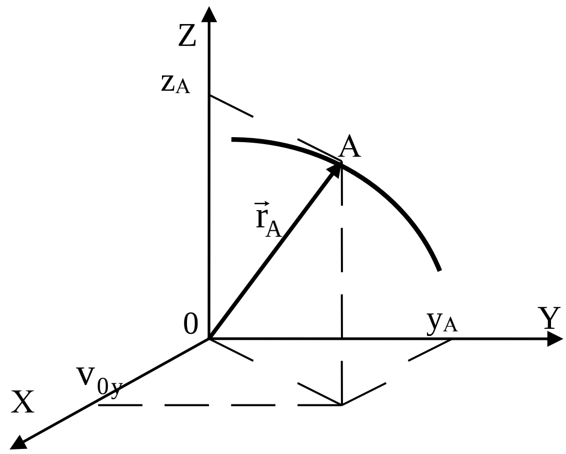


Рис.1.2. Векторний і координатний спосіб завдання положення точки.

● **Переміщення** матеріальної точки $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$;

$$\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

де Δx, Δy, Δz – проекції вектора переміщення на координатні осі.

$$|d\vec{r}| = ds.$$

● **Середня швидкість**

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення матеріальної точки за час Δt.

На практиці розглядають також середню скалярну швидкість $\langle v\rangle$ – середню швидкість проходження шляху ΔS:

$$\langle v\rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Зауважимо**,** що $\langle|\vec{v}|\rangle = \langle v\rangle$ тільки при прямолінійному русі у одному визначеному напрямку (при відсутності точки повороту, тобто без зміни напряму руху на протилежний).

● **Миттєва швидкість** $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. (1.1)

$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, v_y = \frac{\partial y}{\partial t}, v_z = \frac{\partial z}{\partial t}$ – проекції швидкості на осі координат; x, y, z – координати точки.

Вектор миттєвої швидкості у кожній точці траєкторії напрямлений вздовж дотичної до траєкторії у тій самій точці (рис.1.3).

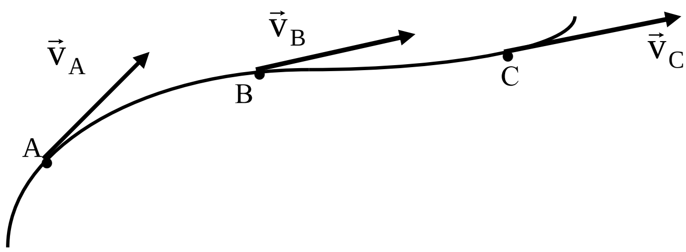


Рис. 1.3 Напрям вектора швидкості.

Модуль вектора швидкості $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. (1.2)

● $S = \int_{t_1}^{t_2} v dt$ – шлях, який точка пройшла за час $\Delta t = t_2 - t_1$. (1.3)

● **Середнє прискорення** $\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

● **Миттєве прискорення**

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$**.** (1.4)

У проекціях

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

де $a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t}, a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t}, v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t}$.

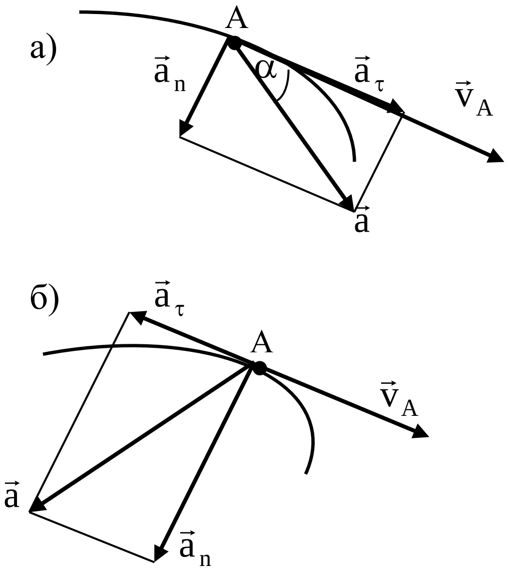


Рис.1.4. Прискорення при криволінійному русі точки
а) прискорений рух;
б) уповільнений рух.

● Для визначення миттєвого прискорення $\vec{a}$ **при криволінійному русі** його зручно розкласти на дві складові: тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ та нормальне прискорення $\vec{a}_n$ (рис. 1.4).

● **Тангенціальне прискорення**

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad (1.5)$$

характеризує зміну швидкості за величиною, спрямовано по дотичній до траєкторії.

● **Нормальне прискорення**

$$a_n = \frac{v^2}{R} \qquad (1.6)$$

характеризує зміну швидкості за напрямком, спрямовано до центру кривизни траєкторії. (R – радіус кривизни траєкторії).

● **Повне прискорення**, виражене через компоненти $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}. \qquad (1.5)$$

Тут $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ - орти (одиничні вектори) дотичної та нормалі до траєкторії.

Величина прискорення обчислюється за формулою $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. (1.5а)

Деякі корисні випадки.

Рівнозмінний прямолінійний рух вздовж осі 0x **(**$\vec{a} = \vec{a}_\tau = \text{const};\ \vec{a}_n = 0$).

● Закон руху

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

де x_0– координата точки в момент часу t=0; v_{0x} та a_x– проекції швидкості та прискорення точки на координатну вісь.

● Проекція переміщення на координатну вісь:

$$S_x = x - x_0 = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

● Швидкість рівнозмінного руху $v_x = v_{0x} + a_x t$

● $v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x S_x$.

Зауваження. При запису рівнянь, що описують прямолінійний рух, індекси, які указують на проекції векторів, часто опускають, а відповідні знаки проекцій

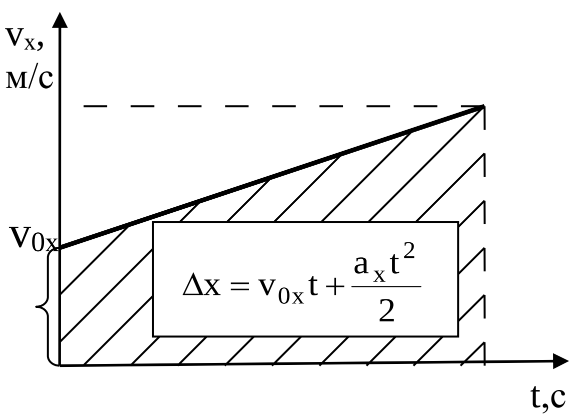


Рис.1.5. Графік швидкості при рівноприскореному прямолінійному русі.

вводять безпосередньо у формулу. Наприклад,

$v = v_0 \pm at$, де «+» відповідає прискореному руху, «–» – уповільненому.

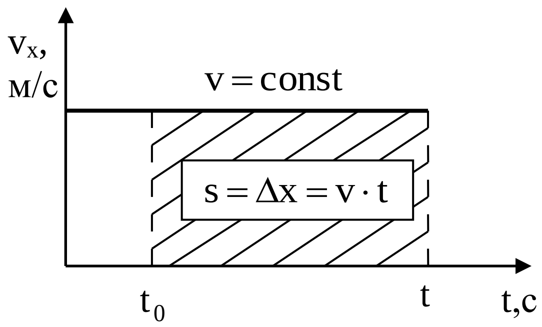


Рис.1.6. Графік швидкості при рівномірному прямолінійному русі.

Рівномірний прямолінійний рух вздовж осі 0x **(**$\vec{v} = const$; $\vec{a} = 0$).

● рівняння руху $x = x_0 + v_x t$.

● $S = vt$ – шлях.

На графіку швидкості (рис.1.5; рис.1.6) переміщення точки чисельно дорівнює площині фігури, яка обмежена графіком швидкості, віссю часів, та координатами крайніх точок, які завдають початок та кінець руху.

Рух точки по колу.

Для опису руху зручно використовувати кутові змінні: кут оберту φ, кутову швидкість ω, кутове прискорення ε.

● **Кінематичне рівняння обертального руху** $\varphi = f(t)$ (φ – кут повороту вектора $\vec{R}$, проведеного із центра кола, вздовж якого рухається точка, до цієї точки) .

● **Величина кутової швидкості**

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} . \qquad (1.6)$$

Вектор $\vec{\omega}$ напрямлений вздовж осі обертання, та зв'язаний з напрямом обертання правилом правого свердлика, тобто його напрям збігається з напрямом поступального руху правого свердлика (гвинта), що повертається за напрямом обертання матеріальної точки (див. рис.1.7).

● **Величина кутового прискорення**

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \qquad (1.7)$$

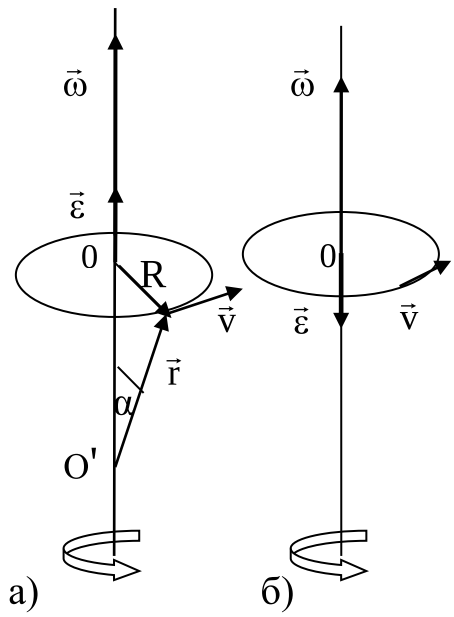


Рис.1.7. Кутова швидкість та кутове прискорення точки при русі по колу.
а) прискорений рух;
б) уповільнений рух.

Напрям вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямом $\vec{\omega}$, або є протилежним при прискореному та уповільненому русі відповідно.

Елементарний кут повороту $d\vec{\varphi}$, кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ – аксіальні вектори (псевдовектори).

● Рівняння **рівнозмінного** обертання ($\vec{\varepsilon} = \text{const}$)

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t;$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2\varepsilon\varphi.$$

Знак «+» відповідає прискореному руху, «–» – уповільненому.

● Рівняння **рівномірного** обертання навколо фіксованої осі ($\vec{\omega} = \text{const}, \vec{\varepsilon} = 0$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Інакше: $\varphi = 2\pi N$,

де N – кількість обертів за час t .

$$\omega = 2\pi n,$$

де n – частота обертання, тобто кількість обертів за одиницю часу.

$$n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$$

де T – період обертання (час, за який здійснюється один оберт).

● Зв'язок між величинами, вираженими у лінійних і кутових змінних:

довжина дуги, що пройдена точкою, $S = \varphi R$, (1.8)

лінійна швидкість точки $v = \omega R$; (1.9)

векторна форма $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]$;

тангенціальне прискорення точки $a_\tau = \varepsilon R$; (1.10)

векторна форма $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\vec{r}]$;

нормальне прискорення точки $a_n = \omega^2 R$. (1.11)

векторна форма $\vec{a}_n = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]]$

де φ – кут обертання, R – радіус кола, по якому рухається точка; $\vec{r}$ – вектор, проведений від деякої точки O', що належить вісі обертання, до матеріальної точки M, $R = r\sin\alpha$ (див.рис.1.7а).

● **Закон додавання швидкостей** (принцип відносності) Галілея зв'язує швидкості точки в різних системах відліку (системах відліку К і К').

Швидкість $\vec{v}$ матеріальної точки відносно нерухомої системи відліку К дорівнює векторній сумі відносної $\vec{v}'$ і переносної $\vec{v}_0$ швидкостей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 . \qquad (1.12)$$

Відносна швидкість $\vec{v}'$ – швидкість точки відносно рухомої системи відліку К'; переносна швидкість $\vec{v}_0$ – швидкість системи відліку К' відносно нерухомої системи К.

1.2. Кінематика абсолютно твердого тіла.

Кількість незалежних координат, що повністю визначають положення тіла або системи тіл у просторі, називають кількістю ступенів вільності.

Абсолютне тверде тіло має шість ступенів вільності (i=6): три ступені вільності поступального руху і три – обертального руху. Отже будь-який механічний рух твердого тіла можна розкласти на поступальний і обертальний.

● При поступальному русі пряма лінія, що сполучає дві довільні точки твердого тіла, залишається паралельною сама собі: всі точки тіла описують однакові траєкторії. Для вивчення такого типу руху достатньо дослідити поведінку однієї з них (див. розділ „Кінематика матеріальної точки“).

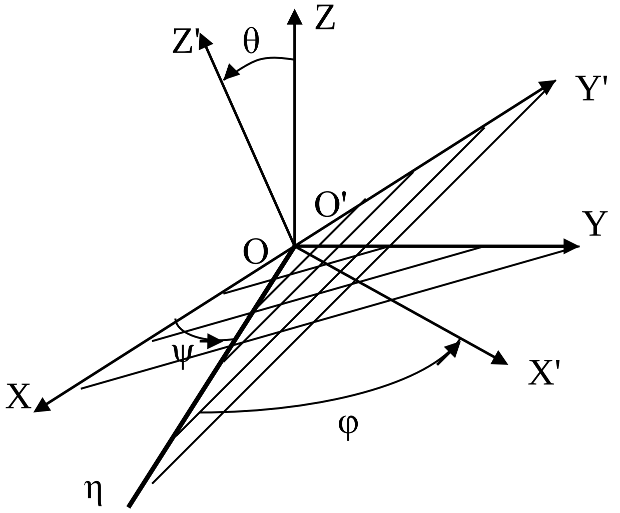
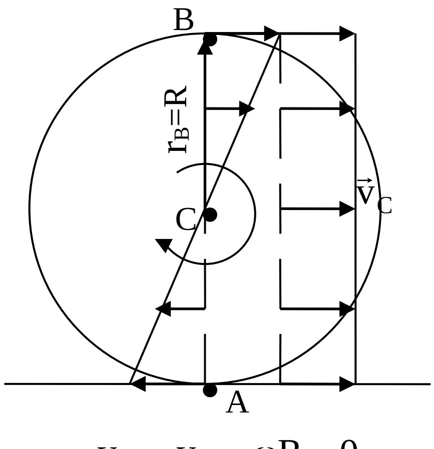


Рис.1.8 Кути Ейлера

$$v_B = v_C + \omega R$$



$$v_A = v_C - \omega R = 0$$

Рис.1.9 Представлення плоского руху циліндру, як поступального з швидкістю $\vec{v}_c$ і обертального відносно осі С з кутовою швидкістю ω.

● Виділяють два види обертального руху твердого тіла.

1. При обертальному русі навколо нерухомої осі всі точки тіла описують концентричні кола у паралельних площинах з центрами на нерухомій осі обертання, мають однакові кутові швидкості і прискорення (див. розділ „Рух матеріальної точки по колу“).

2. При обертальному русі навколо нерухомої точки (полюсу) всі точки переміщуються по поверхні концентричних сфер з центрами у полюсі. Такий рух описують за

допомогою кутів Ейлера, які характеризують взаємне положення двох прямокутних систем координат, початок яких співпадає з точкою О закріплення твердого тіла (рис.1.8). Система X,Y,Z, відносно якої розглядається рух тіла, є нерухомою; система X',Y',Z' зв'язана з тілом, яке обертається; $\varphi = \angle\eta OX'$ - кут власного обертання, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$; $\psi = \angle XO\eta$ - кут прецесії, $(0 \le \psi \le 2\pi)$; $\vartheta = \angle ZOZ'$ - кут нутації, $(0 \le \vartheta \le \pi)$; $O\eta$ - лінія вузлів (лінія перетину площин O'X'Y' і OXY). Позитивний напрям вздовж лінії вузлів задає вектор $\vec{\tau} = \left[\vec{i}_z \vec{i}_{z'}\right]$.

● При плоскому русі тіла, коли всі точки тіла рухаються у паралельних площинах (гвинти, болти, шатуни двигунів внутрішнього згорання, котіння тіла по поверхні без ковзання), швидкість будь-якої точки тіла відносно нерухомої системи відліку

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]. \qquad (1.13)$$

Тут $\vec{v}_0$ - швидкість поступального руху тіла, $\vec{v}' = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]$- швидкість обертального руху точки відносно осі, що проведена через довільну точку тіла перпендикулярно до площини, в якій рухається точка; $\vec{r}$ - радіус-вектор точки з початком відліку в будь-якій точці О, що лежить на осі; $\vec{\omega}$- кутова швидкість, яка не залежить від вибору осі обертання. Вельми зручним є розбиття плоского руху на поступальний зі швидкістю центра мас $\vec{v}_c$ і обертальний відносно осі, що проходить через цей центр (рис.1.9).

Методичні вказівки. При розв'язуванні задач, які пов'язані із вивченням руху тіл, перш за все, необхідно вибрати систему відліку, зв'язати з нею систему координат, записати кінематичні рівняння відповідно до умови задачі (у загальному випадку у векторній формі), а потім спроектувати ці рівняння на координатні осі.

Якщо рух складний, тобто тіло водночас бере участь у декількох типах рухів, то розв'язання задачі здійснюється шляхом розгляду окремих рухів так, ніби вони відбуваються незалежно один від одного. При цьому переміщення, швидкість, прискорення тіла знаходяться як векторна сума відповідних характеристик окремих видів руху.

При розв'язуванні задач, в яких розглядається кінематичний рух тіл у полі тяжіння, систему координат зручно обирати таким чином, щоб частина проекцій вектора швидкості або прискорення на них дорівнювала нулю. Це дозволяє спростити як самий розклад руху на складові частини, так і взагалі розв'язання задачі.

Якщо за умовою задачі розглядається рух декількох тіл, то систему відліку раціонально обирати таким чином, щоб отримати розв'язок у найпростішій формі. Часто це система, що жорстко зв'язана з одним із тіл, які рухаються. При цьому необхідно враховувати принцип відносності, згідно з яким, якщо швидкість тіла А відносно тіла В дорівнює $\vec{v}$, то тіло В рухається відносно тіла А зі швидкістю $-\vec{v}$.

Приклади розв’язання задач

Приклад 1.1. Матеріальна точка рухається вздовж осі Ox за законом $x = A + Bt + Ct^3$, де A=3 м, B=2 м/с, C=0,05 м/с^3. Визначити координату x, швидкість v й прискорення a у моменти часу $t_1 = 0$; $t_2 = 4$ c, а також шлях S, середні значення швидкості $\langle v \rangle$ й прискорення $\langle a \rangle$ за перші 4 с руху.

Дано:
$x = A + Bt + Ct^3$
A=3 м
B=2 м/с
C=0,05 м/с^3
$t_1 = 0$
$t_2 = 4$ c
x_1, x_2, v_1, v_2, a_1, a_2, S, $\langle v \rangle$, $\langle a \rangle$ -?

Розв’язання.

Координати знаходимо підстановкою в закон руху числових значень коефіцієнтів A, B і C і часу t.

$x_1 = 3$м; $\qquad x_2 = \left(3 + 2\cdot 4 + 0{,}05\cdot 4^3\right)$м=14,2 м.

При прямолінійному русі шлях s дорівнює величині переміщення Δx:

$S = x_2 - x_1 = (14{,}2 - 3)$м=11,2 м.

Середня швидкість визначається наступним чином:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{14{,}2 - 3}{4}\ \text{м/с=2,8 м/с.}$$

Миттєва швидкість v є першою похідною від координати за часом: $v = v_x = \dfrac{dx}{dt} = B + 3Ct^2$.

$v_1 = 2$ м/с; $\qquad v_2 = 2 + 3\cdot 0{,}05\cdot 4^2 = 4{,}4$ (м/с).

Середнє прискорення $\langle a \rangle = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{4{,}4 - 2}{4}$ м/с^2=0,6 м/с^2.

Миттєве прискорення: $a = a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$=6Ct.

$a_1 = 6\cdot 0{,}05\cdot 0 = 0$; $\quad a_2 = 6\cdot 0{,}05\cdot 4$ м/с^2=1,2 м/с^2.

Відповідь: $x_1 = 3$м; x_2= 14,2м; $v_1 = 2$ м/с; v_2 =4,4 м/с; $a_1 = 0$; a_2=1,2м/с^2; $S = 11{,}2$ м; $\langle v \rangle$= 2,8 м/с; $\langle a \rangle$= 1,2 м/с^2.

Зауваження. Якщо точка рухається вздовж прямої в одному напрямку, її шлях s співпадає з переміщенням (різницею координат Δx). У випадку, коли в деякий момент часу напрямок руху змінюється на протилежний, координата з даного моменту часу зменшується, а шлях продовжує зростати. Тоді $\langle v \rangle = \dfrac{S_1 + S_2}{t}$, де S_1 та S_2 - шлях, пройдений перед та після повороту. Момент повороту $t_п$ можна визначити за умовою $v(t_п)=0$.

Приклад 1.2. Електрон, початкове положення якого в обраній системі відліку визначається радіус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{i}x_0 + \vec{j}y_0$, де x_0=1м, y_0=2м, $\vec{i}$, $\vec{j}$

– орти декартової системи координат, починає рухатися зі швидкістю $\vec{v}_0 = \vec{k}v_{0z}$, де v_{0z} = 3м/с, і прискоренням $\vec{a}(t) = \vec{j}A + \vec{k}Bt$, де A=10м/с^2, B=12м/с^3. Знайти: а) координати (x,y,z) електрона в момент часу t_1=1c після початку руху; б) переміщення за цей час; в) швидкість електрона в вище означений момент; г) кут між радіусом-вектором та вектором швидкості електрона в початковий момент часу t_0=0.

$\vec{r}_0 = \vec{i}x_0 + \vec{j}y_0$
x_0=1м; y_0=2м
$\vec{v}_0 = \vec{k}v_{0z}$
v_{0z} = 3м/с
$\vec{a}(t) = \vec{j}A + \vec{k}Bt$
A=10м/с^2
B=12м/с^3
t_0=0; t_1=1c
$x(t_1), y(t_1), z(t_1)$, $\lvert\Delta\vec{r}\rvert, v(t_1)$, α_0 - ?

Розв’язання.

а) За означенням прискорення (1.4) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Звідки шляхом інтегрування дістаємо вираз для швидкості електрону в будь-який момент часу t:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}dt + C = \int \left(\vec{j}A + \vec{k}Bt\right)dt + C = \vec{j}At + \vec{k}B\frac{t^2}{2} + C.$$

Константу інтегрування C визначаємо за допомогою початкової умови $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \vec{k}v_{0z} = C$.

Отже, $C = \vec{k}v_{0z}$. Відповідно, для $\vec{v}(t)$ маємо

$$\vec{v}(t) = \vec{j}At + \vec{k}(v_{oz} + B\frac{t^2}{2}). \qquad (1)$$

Аналогічно, користуючись означенням швидкості $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ знаходимо радіус-вектор електрона для довільного моменту часу:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}dt + C_1 = \int \left(\vec{j}At + \vec{k}(v_{oz} + B\frac{t^2}{2})\right)dt + C_1 = \vec{j}A\frac{t^2}{2} + \vec{k}(v_{oz}t + B\frac{t^3}{6}) + C_1.$$

Користуючись початковою умовою $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = \vec{i}x_0 + \vec{j}y_0$, знаходимо константу інтегрування $C_1 = \vec{i}x_0 + \vec{j}y_0$. Остаточно отримуємо:

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x_0 + \vec{j}(y_0 + A\frac{t^2}{2}) + \vec{k}(v_{oz}t + B\frac{t^3}{6}). \qquad (2)$$

За формулою (2) визначаємо координати електрона в момент t_1=1c:

$$x(t_1) = x_0 = 1м; \quad y(t_1) = y_0 + A\frac{t_1^2}{2} = 7м; \quad z(t_1) = (v_{oz}t_1 + B\frac{t_1^3}{6}) = 5м.$$

б) Переміщення електрона $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Модуль переміщення за першу секунду руху дорівнює

$$\lvert\Delta\vec{r}\rvert = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} = 7{,}1(м)$$

в) Величина швидкості електрона визначається через її компоненти, що входять у вираз (1), за формулою $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$:

$$v(t_1) = \sqrt{0 + (At_1)^2 + \left(v_{0z} + B\frac{t_1^2}{2}\right)^2} = 13{,}5 \text{ м/с}.$$

г) За умовою задачі z_0=0, тобто електрон знаходиться у площині XOY, а його початкова швидкість $\vec{v}_0$ спрямована вздовж осі OZ. Звідси випливає, що $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$, тобто кут α між цими векторами дорівнює 90º.

Відповідь: $x(t_1)$=1м; $y(t_1)$ =7м; $z(t_1)$=5м; $|\Delta\vec{r}|$=7,1(м); $v(t_1)$=13,5 м/с; α=90º.

Приклад 1.3. Автомобіль проходить першу третину шляху зі швидкістю $v_1 = 50$ км/год, а залишок шляху – зі швидкістю v_2. Визначити швидкість v_2, якщо середня швидкість на всьому шляху $\langle v \rangle$=72 км/год.

$v_1 = 50$ км/год = 13,9 м/с

$\langle v \rangle$=72 км/год= 20 м/с

$S_1 = \frac{1}{3}S$

$v_2 - ?$

Розв'язання.

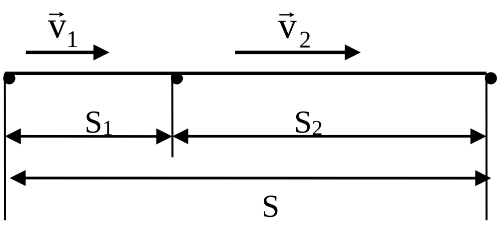


Рис.1.10

За означенням середньої швидкості $\langle v \rangle = \frac{S}{t}$, де $t = t_1 + t_2$.

Час руху на першій (t_1) та другій (t_2) частині шляху (див. рис.1.10) знаходимо за допомогою рівняння рівномірного руху:

$$S_1 = v_1 t_1, \quad \text{звідси } t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{S}{3v_1}; \qquad S_2 = v_2 t_2, \quad \text{звідси } t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{S}{3v_2}.$$

Тоді $t = t_1 + t_2 = \frac{S}{3v_1} + \frac{2S}{3v_2} = \frac{S}{\langle v \rangle}$, тобто $\frac{1}{3v_1} + \frac{2}{3v_2} = \frac{1}{\langle v \rangle}$.

З останнього рівняння знаходимо вираз для швидкості автомобілю на другій частині шляху:

$$v_2 = \frac{2v_1\langle v \rangle}{3v_1 - \langle v \rangle} = \frac{2 \cdot 13{,}9 \cdot 20}{3 \cdot 13{,}9 - 20} = 25{,}6 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь: v_2 = 25,6 м/с.

Приклад 1.4. Потяг рухається у північно-східному напрямі зі швидкістю 60 км/год., а автомобіль – на південь зі швидкістю 80 км/год. Визначити величину і напрям швидкості переміщення потягу відносно автомобіля.

Розв'язання.

v_1=60км/год=
16,7м/с
v_2=80км/год=
22.2м/с
$\alpha_1 = 45^\circ$
$\alpha_2 = -90^\circ$

$v_в$, β - ?

У відповідності із законом додавання швидкостей (1.12) швидкість потягу відносно землі (абсолютна швидкість) $\vec{v}_1$ є векторною сумою швидкості автомобілю відносно землі (переносної швидкості) $\vec{v}_2$ та відносної швидкості руху потягу відносно автомобілю $\vec{v}_в$: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_в$. Звідси (див. рис.1.11) $\vec{v}_в = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

З трикутнику, утвореного означеними векторами швидкостей, користуючись теоремою косинусів знаходимо значення швидкості відносного переміщення

$v_в = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha}$ =36м/с, де $\alpha = 135^\circ$, та $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \frac{v_2^2 + v_в^2 - v_1^2}{2v_2 v_в} = 0{,}94; \quad \beta = \arccos\beta \approx 19^\circ.$$

Зауважимо, що відносно напряму руху автомобілю потяг рухається під кутом 180º, причому β = 180º–19º = 161º.

Відповідь: $v_в$= 36 м/с; $\beta = 161^\circ$.

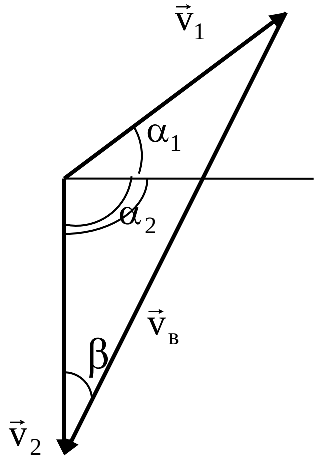


Рис.1.11 Додавання швидкостей.

Приклад 1.5. Автомобіль, що гальмує перед світлофором, за п’яту секунду сповільненого руху проходить шлях 2м і зупиняється. Який шлях автомобіль пройшов за третю секунду руху?

t_5=5с; t_4=4с
Δt_5=1с
$v(t_5) = 0$
t_3=3с; t_2=2с
Δt_3=1с
$\Delta S_5 = 2$м

$\Delta S_3 - ?$

Розв’язання

1-й спосіб.

При рівносповільненому русі модуль швидкості тіла змінюється за законом $v = v_0 - at$. При $t=t_5$ $v=0$. Звідки $v_0 = at_5$.

Шлях, пройдений за п’яту секунду, дорівнює

$$\Delta S_5 = S_5 - S_4 = v_0 t_5 - \frac{at_5^2}{2} - \left(v_0 t_4 - \frac{at_4^2}{2}\right) =$$

$$= v_0(t_5 - t_4) - \frac{a}{2}\left(t_5^2 - t_4^2\right) = at_5\Delta t_5 - \frac{a}{2}\Delta t_5(t_5 + t_4) = a\left(t_5 - \frac{t_5 + t_4}{2}\right)\Delta t_5.$$

Аналогічно знаходимо $\Delta S_3 = a\left(t_5 - \dfrac{t_3 + t_2}{2}\right)\Delta t_3$.

$$\frac{\Delta S_3}{\Delta S_5}=\frac{t_5-\frac{t_3+t_2}{2}}{t_5-\frac{t_5+t_4}{2}}; \qquad \frac{\Delta S_3}{\Delta S_5}=5; \qquad \Delta S_3=10\,\text{м}.$$

Відповідь: $\Delta S_3=10\,\text{м}$.

2-й спосіб.

Якби автомобіль почав рухатися в зворотному напрямі, то його рух був би рівноприскореним рухом без початкової швидкості. При тому п'ята секунда стала би першою секундою руху, а перша – п'ятою. Відомо, що при рівноприскореному русі шляхи, що пройшло тіло в послідовні секунди, відносяться як ряд непарних чисел. Тобто

$$\Delta S_1:\Delta S_2:\Delta S_3:...:\Delta S_n=1:3:5:...:(2n-1).$$

Нагадуємо, за нашою умовою ΔS_1 - шлях, пройдений за останню, п'яту секунду руху.

Тоді $\dfrac{\Delta S_3}{\Delta S_1}=\dfrac{5}{1}$. Отже отримуємо $\Delta S_3=10\,\text{м}$.

Завдання. Доведіть співвідношення

$$\Delta S_1:\Delta S_2:\Delta S_3:...:\Delta S_n=1:3:5:...:(2n-1),$$

яке було використано при розв'язанні задачі: на основі формули $S=\dfrac{at^2}{2}$ отримайте вирази для шляхів ΔS, які пройдені у послідовні моменти часу, починаючи з першої секунди, і знайдіть їх відношення.

Приклад 1.6. Використовуючи умови попередньої задачі, визначити прискорення, початкову швидкість та гальмівний шлях автомобілю.

t_5=5c;
t_4=4c
Δt_5=1c
$v(t_5)=0$
$\Delta S_5=2$м
a, v_0, S - ?

Розв'язання.

Із формули $\Delta S_5=a\left(t_5-\dfrac{t_5+t_4}{2}\right)\Delta t_5$ знаходимо модуль прискорення: $a=\dfrac{\Delta s_5}{\left(t_5-\dfrac{t_5+t_4}{2}\right)\Delta t_5}$. Користуючись співвідношенням $v_0=at_5$ і знайденим прискоренням, знаходимо початкову швидкість v_0 і гальмівний шлях $S=v_0t-\dfrac{at^2}{2}$.

Відповідь: a = 4 м/с^2; v_0=20 м/с; S= 50м.

Приклад 1.7. М'яч кинули з поверхні землі під кутом $\alpha=45^{o}$ до горизонту із швидкістю v_0= 10 м/с. Визначити: а) час польоту $t_п$, висоту

h_{max} та дальність польоту L; б) координати; нормальне a_n, тангенціальне a_τ прискорення, радіус кривизни траєкторії для моменту часу $t_1 = 0{,}5\,с$ після початку руху. в) Записати рівняння траєкторії руху в явному вигляді.

Зауваження. Приклад 1.7 є задачею про рух тіла в полі тяжіння Землі (задача Галілея). Це приклад криволінійного руху тіла (матеріальної точки), при якому незмінним залишається повне прискорення тіла, а тангенціальна та нормальна складові прискорення безперервно змінюються. (За умов масштабу руху, при якому залежністю прискорення вільного падіння від відстані до поверхні Землі можна знехтувати і вважати g=9,8м/с^2).

У цьому випадку закон руху тіла, який дозволяє визначити координати тіла в будь-який момент часу, у векторній формі може бути записаний у вигляді:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \tag{1}$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від початку координат до миттєвого положення тіла; $\vec{r}_0$ – радіус-вектор, що відповідає початковому положенню тіла; $\vec{v}_0$ – початкова швидкість тіла, яке вважаємо матеріальною точкою. З урахуванням початкових умов рівняння (1) охоплює всі види руху тіла, розглянуті в задачі Галілея: рух тіла, кинутого вертикально; рух тіла, кинутого у горизонтальному напрямі та під кутом α до горизонту.

v_0=10м/с
g=9,8м/с^2
$\alpha = 45^\circ$
t_1=0,5с
$t_п$, h_{max}, L,
$x(t_1)$, $y(t_1)$,
a_n, a_τ, R,
y=f(x) - ?

Розв'язання.

Вибираємо систему координат XOY, початок якої O співпадає з початком траєкторії руху тіла (рис. 1.12). Тоді $\vec{r}_0 = 0$ і рівняння (1) у проекціях на координатні вісі набуває вигляду:

$$x = v_{0x}t = v_0(\cos\alpha)t\,; \tag{2}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \tag{3}$$

Відповідно проекції швидкості дорівнюють:

$$v_x = v_{ox} = v_0\cos\alpha = \text{const}, \tag{4}$$

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0\sin\alpha - gt, \tag{5}$$

а повна швидкість має вигляд

$$v = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}. \tag{6}$$

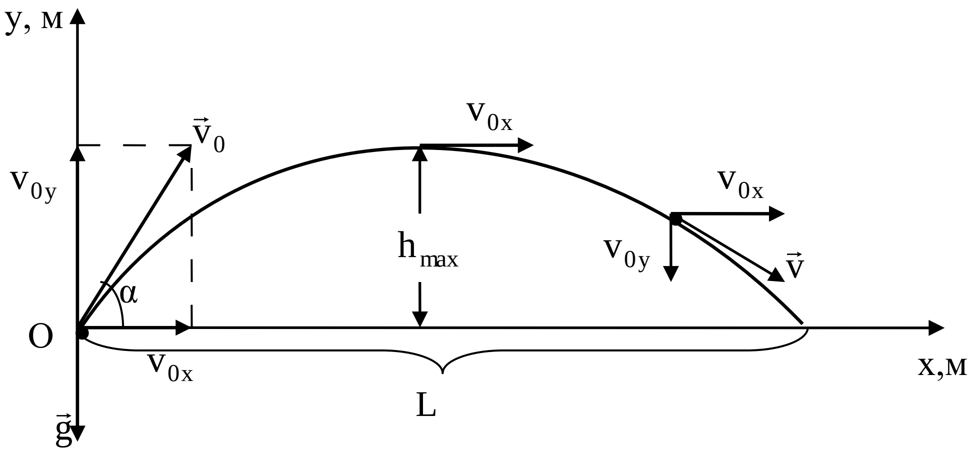


Рис.1.12. Кінематична діаграма руху тіла, кинутого під кутом до горизонту.

а) Час польоту м'яча $t_п$ до його падіння на землю знайдемо з умови $y(t_п)=0$: $\left(v_0\sin\alpha-\frac{gt_п}{2}\right)t_п=0$. Звідки отримуємо

$$t_п=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}. \qquad \textbf{(7)}$$

Другий розв'язок $t_п=0$ відповідає початковому положенню тіла.

Дальність польоту L визначається координатою x в момент падіння:

$$L=x(t_п)=v_0\cos\alpha\cdot\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}. \qquad (8)$$

Максимальній висоті підйому h_{max} відповідає координата $y(t_в)$, де $t_в$ – час підйому до верхньої точки траєкторії. У верхній точці траєкторії вертикальна складова швидкості набуває нульового значення, після чого вертикальний рух із рівноуповільненого стає рівноприскореним. Отже, $t_в$ знаходимо з умови $v_y=v_0\sin\alpha-gt_в=0$:

$$t_в=\frac{v_0\sin\alpha}{g}. \qquad (9)$$

(Зверніть увагу, що $t_п=2t_в$).

Відповідно максимальна висота підйому:

$$h_{max}=y(t_в)=(v_0\sin\alpha)t_в-\frac{gt_в^2}{2}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}. \qquad (10)$$

б) Розглянемо тангенціальну і нормальну складові вектора повного прискорення $\vec{g}$.

Для визначення a_τ і a_n розкладаємо вектор швидкості $\vec{v}$ тіла в даній точці траєкторії на складові, що паралельні вісі OX та OY; вектор повного прискорення – на вектор тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$, дотичний до траєкторії, та вектор нормального прискорення $\vec{a}_n$, перпендикулярний до траєкторії. (Рис.1.13).

З подібності прямокутних трикутників, утворених векторами швидкості і прискорення з їх складовими (на рис. 1.13) виділені штриховими лініями), випливає:

$$a_n = g\cos\varphi, \qquad a_\tau = g\sin\varphi, \qquad (11)$$

де

$$\sin\varphi = \frac{v_y}{v} = \frac{v_0\sin\alpha - gt}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{v_x}{v} = \frac{v_o\cos\alpha}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}}.$$

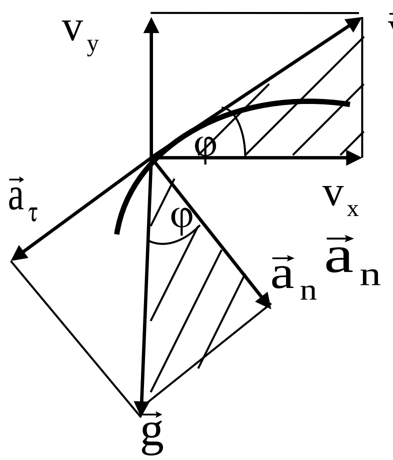


Рис.1.13. Розклад швидкості та прискорення на складові.

Користуючись виразами для повної швидкості та нормального прискорення в заданий момент часу з формули $a_n = \dfrac{v^2}{R}$ знаходимо радіус кривизни траєкторії $R = \dfrac{v^2}{a_n}$.

в) Вирази (2 і (3) задають рівняння траєкторії м'яча у параметричній формі, тобто x та y задані як функції часу. Для отримання рівняння траєкторії в явному вигляді виключимо з цих рівнянь час t. З рівняння (2) знаходимо $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$. Тоді

$$y = x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}\ . \qquad (12)$$

Отже траєкторією руху є парабола, вітки якої спрямовані вниз, а вершина зміщена відносно координатних осей.

З урахуванням попереднього підставляємо числові дані і проводимо необхідні чисельні розрахунки:

$$H = \frac{10^2 \cdot 0{,}707^2}{2\cdot 9{,}8}\ м = 2{,}55 м; \qquad L = \frac{10^2\cdot 1}{9{,}8}\ м = 10{,}2\ м;$$

$$x_1 = 10\cdot 0{,}707\cdot 0{,}5 = 3{,}5 м; \quad y_1 = 10\cdot 0{,}707\cdot 0{,}5 - \frac{9{,}8\cdot 0{,}5^2}{2} = 2{,}3 м;$$

$$a_\tau = 9{,}8 \cdot \frac{10 \cdot 0{,}707 - 9.8 \cdot 0{,}5}{\sqrt{(10 \cdot 0{,}707)^2 + (10 \cdot 0{,}707 - 9{,}8 \cdot 0{,}5)^2}} \text{ м/с}^2 = 2{,}87 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = 9{,}8 \cdot \frac{10 \cdot 0{,}707}{7{,}4} \text{ м/с}^2 = 9{,}36 \text{ м/с}^2; \quad R = \frac{54{,}7}{9{,}36} = 5{,}84 \text{м}.$$

Відповідь: $x_1 = 3{,}5$м; $y_1 = 2{,}3$м; H = 2,55м; L = 10,2м; a_τ = 2,9 м/с^2; a_n = 9,4 м/с^2; $R = 5{,}8$м.

Зауваження. При побудові наочної математичної моделі руху м'яча ми свідомо не враховували деякі фактори, а саме: не враховували опір середовища, який супроводжує рух м'яча у повітрі; наближено вважали, що прискорення, яке надає м'ячу сила тяжіння, не залежить від висоти, а на рух не впливає обертання Землі

Завдання. Чи будуть справедливими отримані нами при розв'язку попередньої задачі співвідношення для опису руху артилерійського снаряду або балістичної ракети? Які фактори, на Ваш погляд, необхідно урахувати при розрахунку в цих випадках?

Ще один приклад, коли не можна обмежитись урахуванням тільки сили тяжіння, розглянемо у наступній задачі.

Приклад 1.8. Тіло, що падає з деякої висоти, за останні дві секунди падіння проходить 1/5 частину свого шляху. Визначити час падіння t, висоту h, з якої падало тіло, та його швидкість v наприкінці падіння.

$v_0 = 0$
$g = 9{,}8$м/с^2
$\tau = 2$с
$S_\tau = \dfrac{h}{n}$
n=5

t, h, v - ?

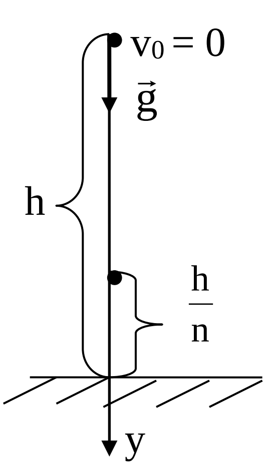


Рис.1.14

Розв'язання.

Припустимо, що на тіло в процесі руху діє тільки сила тяжіння. Тоді рух тіла є вільним падінням, тобто відбувається без початкової швидкості з прискоренням g.

Повний шлях тіла за час падіння t дорівнює

$$h = \frac{gt^2}{2}; \qquad (1)$$

шлях за час (t-τ) (див.рис.1.14) –

$$\left(h - \frac{h}{n}\right) = h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{g(t-\tau)^2}{2}. \qquad (2)$$

З (1) і (2) випливає

$$\frac{gt^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Після скорочення із попереднього співвідношення отримуємо квадратне рівняння $(t-\tau)^2 = t^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$, яке приводиться до вигляду $t^2 - 2n\tau t + n\tau^2 = 0$ і має наступний розв’язок:

$$t_{1,2} = \tau\left(n \pm \sqrt{n(n-1)}\right). \qquad (3)$$

Після визначення часу падіння за формулою (1) знаходимо висоту падіння h, а за формулою $v = gt$ (4) швидкість наприкінці руху.

Обчислення часу падіння $t_{1,2} = 2\left(5 \pm \sqrt{20}\right)$ дає два значення $t_1 = 19с$, $t_2 = 1с$. Друге з них не відповідає умові задачі, за якою $(t-\tau) \geq 0$. Таким чином, t=19с. За формулами (1) і (4) знаходимо h =1770 м; v=185 м/с.

Відповідь: t = 19с; h =1770м; v=185 м/с.

Зауваження. Уявить собі краплину дощу, яка з такою швидкістю, а це близько 670 км/год., падає зверху прямо на вас. Сильний дощ перетворився б у стихійне лихо, яке руйнує до вподоби падінню комет чи метеоритів!

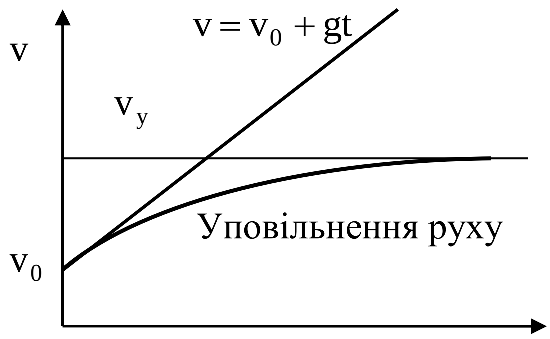


Рис.1.15. Швидкість руху із t урахуванням впливу (опору) повітря.

Насправді ж, швидкість не зростає протягом всього падіння, бо на тіло, окрім сили тяжіння, діє сила опору повітря, яка зростає із зростанням швидкості. Тому для будь-якого тіла існує гранична швидкість, по досягненні якої прискорення тіла стає рівним нулю, і зростання швидкості припиняється (рис.1.15). Наприклад, при затяжному стрибку парашутиста ця швидкість становить близько 350 км/год. Парашутист може легко зменшити її до 200 км/год., просто простягнувши руки у боки.

R=0,1м
a_1=0,2м/с^2
S=0,4м

ω, a, α - ?

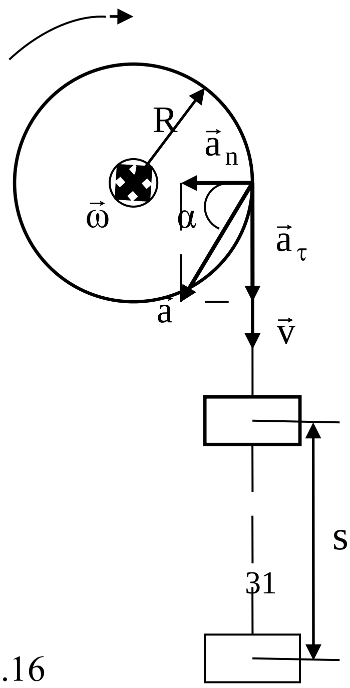


Рис.1.16

Приклад 1.9. Колесо радіуса R=0,1м обертається під дією тягарця, підвішеного на нитці, яка змотується з колеса. Прискорення тягарця a_1=0,2м/с^2. Для моменту часу, коли тягарець пройшов шлях S=0,4м, визначити кутову швидкість колеса ω, а також повне прискорення a будь-якої точки на ободі колеса. Який кут α складає вектор повного прискорення з радіусом колеса?

Розв'язання

Тангенціальне прискорення точок ободу колеса дорівнює прискоренню, з яким рухається тягарець: $a_\tau = a_1$.

Лінійна швидкість точок ободу

$$v = a_\tau t$$

в будь-який момент дорівнює швидкості руху тягарця і може бути визначена через його шлях за формулою рівноприскореного руху без початкової швидкості:

$$v = \sqrt{2a_1S}.$$

Кутова швидкість $$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{2a_1S}}{R}. \qquad (1)$$

Повне прискорення точок ободу складається з тангенціального $\vec{a}_\tau$ і нормального $\vec{a}_n$ прискорення (див. рис.1.16). Його величину можна визначити за теоремою Піфагора, оскільки складові $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ завжди є взаємно перпендикулярними векторами: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

З урахуванням виразу для нормального прискорення $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2a_1S}{R}$ отримуємо

$$a = \sqrt{\frac{4a_1^2S^2}{R^2} + a_1^2} = a_1\sqrt{\frac{4S^2}{R^2} + 1} \qquad (2)$$

З трикутника прискорень визначаємо $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{R}{2S}$. (3)

За формулами (1) – (3) знаходимо значення кутової швидкості обертання колеса ω =4 рад/с та повне прискорення точок ободу a = 1,61 рад/с^2. У свою чергу $\mathrm{tg}\alpha = \frac{0,1}{2\cdot 0,4} = 0,125$; $\alpha = \mathrm{arctg}0,125 = 7,1°$.

Відповідь: ω =4 рад/с; a = 1,61 рад/с^2; $\alpha = 7,1°$.

Приклад 1.10. Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = At + Bt^2$, де A= 12 рад/с; B= –2 рад/с^2. Знайти середнє значення кутової швидкості і кутового прискорення на протязі часу від початку руху (t=0) до зупинки, а також кутове прискорення тіла в момент зупинки $t_к$.

$\varphi = At + Bt^2$
A= 12 рад/с
B= −2 рад/с^2
t_0=0
$\omega_к$= 0

$\langle\omega\rangle$, $\langle\varepsilon\rangle$, $\varepsilon_к$-?

Розв'язання

За означенням $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, тобто $\omega = A + 2Bt$. (1)

Середнє значення модуля кутової швидкості знаходимо за формулою

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t_к) - \varphi(t_0)}{t_к - t_0} = \frac{\varphi(t_к)}{t_к}.$$

З урахуванням заданого закону руху,

$$\langle\omega\rangle = \frac{At_к + Bt_к^2}{t_к} = A + Bt_к. \qquad (2)$$

Час обертання тіла $t_к$ знаходимо, користуючись співвідношенням $\omega(t_к) = A + 2Bt_к = 0$. Звідки $t_к = -\frac{A}{2B}$. Після підстановка до (2) маємо:

$$\langle\omega\rangle = A + B\left(-\frac{A}{2B}\right) = \frac{A}{2}; \qquad \langle\omega\rangle = 6 \text{ рад/с}^2.$$

Середнє значення кутового прискорення визначається за формулою

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t_к) - \omega(t_0)}{t_к - t_0} = \frac{A + 2Bt_к - A}{t_к} = 2B = \mathrm{const}.$$

$\langle\varepsilon\rangle = 2B = –4$ рад/с^2.

Отже, кутове прискорення при заданому законі руху є постійною величиною, а рух – рівноуповільненим з постійним прискоренням $\varepsilon = \varepsilon_к$ = –4 рад/с^2.

Примітка. Розв'язок можна отримати також, користуючись миттєвим кутовим прискоренням $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2B$.

Відповідь: $\langle\omega\rangle = 6$ рад/с^2; $\langle\varepsilon\rangle = –4$ рад/с^2; $\varepsilon_к = –4$ рад/с^2.

Задачі для самостійного розв'язування

1.1.(вар.1 –25)*.У диспетчера аеропорту на момент початку чергування (20год 00хв 00с) є інформація про рух двох літаків, яка наведена у таблиці 1.1. Система координат, що використана в ній, має початок у точці розміщення диспетчера, вісь OX, напрямлена на схід, вісь OY – на північ.

1. Помітьте на координатній площині XOY положення літаків і напрям їх польотів.

2. Запишіть закони руху кожного літака.

3. Знайдіть час вильоту одного з літаків з аеропорту.

4. Визначте мінімальну відстань, на яку наближаються літаки, і час, коли відбудеться наближення.

5. Знайдіть модуль швидкості першого літака у системі відліку, яка жорстко зв'язана з другим літаком (рухається разом з ним).

Швидкості літаків вважати незмінними. Розмірами аеропорту знехтувати.

Таблиця 1.1. Умови до задачі 1.1(вар.1 –25).

Номер задачі	Координати літаків (км)						Проекції швидкостей літаків (км/год.)			
	першого			другого			першого		другого	
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	v_{1x}	v_{1y}	v_{2x}	v_{2y}
1.1.1	30	40	2	30	80	3	432	576	576	-288
1.1.2	40	30	2	60	-60	3	576	432	0	720
1.1.3	60	60	3	-30	40	2	-720	0	-432	576
1.1.4	0	80	3	40	50	5	720	0	576	720
1.1.5	-40	50	3	-90	-20	3	-576	720	0	720
1.1.6	30	80	8	-40	30	3	-720	360	-576	432
1.1.7	-30	-30	2	-80	30	8	-432	-432	0	-720
1.1.8	-80	0	6	-30	30	2	432	432	-432	432
1.1.9	40	-30	3	100	0	8	576	-432	-432	-432
1.1.10	0	90	6	30	30	3	576	-432	540	540
1.1.11	40	-40	4	0	-90	6	432	-432	648	0
1.1.12	-40	40	3	-90	0	7	-576	576	0	576
1.1.13	0	-90	4	-40	-40	5	-432	432	-576	576
1.1.14	50	50	3	50	-20	4	360	-360	720	-288
1.1.15	-50	-20	3	0	-90	3	-720	-288	-360	360
1.1.16	-30	50	2	0	100	9	-432	720	-360	-360
1.1.17	100	0	3	20	-50	2	-360	-360	288	-720
1.1.18	0	50	3	80	80	2	0	576	-576	-144
1.1.19	-50	40	2	-90	0	4	-720	576	576	576
1.1.20	50	70	1	50	0	3	288	-432	720	0
1.1.21	0	-60	3	-40	-30	2	-432	0	-576	-432
1.1.22	-50	30	4	0	90	2	-720	432	-576	0
1.1.23	30	-40	5	100	0	3	432	-576	-432	-432
1.1.24	0	80	3	-50	50	4	-432	-144	-720	720
1.1.25	50	50	5	90	30	3	720	720	-144	-432

1.2. Велосипедист долає ряд пагорбів. На підйомах його швидкість $v_1 =$ 15км/год, а на спусках $v_2 =$ 30 км/год., причому підйоми та спуски мають однакову довжину. Чому дорівнює середня швидкість велосипедиста?

1.3. Велосипедист долає ряд пагорбів. На підйомах його швидкість $v_1 =$ 15км/год, а на спусках $v_2 =$ 30 км/год., причому на підйоми та спуски був витрачений однаковий час. Чому дорівнює середня швидкість велосипедиста?

1.4. Визначити шлях та середню швидкість потягу, який протягом $t = 10$ с збільшив швидкість з $v_1 =$ 36 км/год. до $v_2 =$ 72 км/год., а наступні 20 с рухався рівномірно.

Зобразити графіки залежності шляху та швидкості потягу від часу.

1.5. Автомобіль проходить першу чверть шляху зі швидкістю v_1, а решту шляху зі швидкістю v_2= 50 км/год. Знайти швидкість на першій чверті шляху, якщо середня швидкість автомобіля на всьому шляху дорівнює 54км/год.

1.6. Припустимо, що для комфортних умов польоту горизонтальна складова прискорення авіалайнера не повинна перевищувати прискорення вільного падіння (приблизно 10 м/с^2). Скільки часу за такою умовою буде продовжуватися політ від Одеси до Києва (відстань 500км)? Розрахуйте максимальну швидкість, яку набере літак за таких умов.

Вказівка. Вважайте, що половину шляху рух – рівноприскорений, а другу половину – рівноуповільнений.

1.7. Скутер рухався на захід зі швидкістю 20 м/с, а через 5с він рухався вже на південь зі швидкістю 15 м/с. Визначити модуль та напрям середнього прискорення на протязі указаних п'яти секунд.

1.8. Під яким кутом до берега необхідно направити ніс човна, щоб переправитися поперек через річку при швидкості течії $v_т$=3,6км/год, якщо човен може рухатися зі швидкістю $v_ч$=5,4км/год у нерухомій воді? Який час займе переправа, якщо ширина річки d =200м?

1.9. За умовою попередньої задачі визначити, який час займе переправа, якщо направити ніс човна точно поперек річки так, що човен в момент досягнення протилежного берега унесе течією, а потім повернутися проти течії у місце призначення?

1.10. Визначити прискорення та початкову швидкість руху, якщо рівняння руху має вид $x = 5t + 0{,}6t^2$.

1.11. Матеріальна точка рухається вздовж прямої згідно рівнянню $x = At + Bt^3$, де $A = 7{,}5$ м/с, $B = -1$ м/с^3. Визначити момент часу, в який швидкість точки дорівнюватиме нулю. Що відбудеться з напрямком руху в цей момент? Обчислити середню швидкість руху $\langle v \rangle$ та середнє прискорення $\langle a \rangle$ за проміжок часу від $t_1 = 3$с до $t_2 = 6$с.

1.12. Матеріальна точка рухається вздовж осі ОХ за законом $x = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$, де $A_1 = 2$ м/с, $B_1 = 4$ м/с^2, $C_1 = -1$ м/с^3. Рух другої точки відбувається вздовж осі OY і задовольняє рівнянню $y = A_2 + B_2t + C_2t^2$, де $A_2 = 2$ м, $B_2 = 4$ м/с, $C_2 = 1$ м/с^2. В який момент часу прискорення точок будуть однаковими? Визначити швидкості точок та відстань між точками для цього моменту часу.

1.13. (вар.1 –14).* Дві матеріальні точки рухаються вздовж однієї прямої, яка співпадає з віссю 0X декартової системи координат. Закон руху першої точки має вид $x_1 = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, а прискорення другої точки змінюється згідно рівнянню $a_{2x} = \alpha + \beta t$. У початковий момент часу друга точка мала координату $x_{20} = \gamma t$ і швидкість $v_{20x} = \delta$. Завдання і значення параметрів наведені у таблиці 1.2.

Розмірності параметрів: [A] = м, [B] = м/с, [C] = м/с^2, [D] = м/с^3, [α]=м/с^2, [β] = м/с^3, [γ] = м, [δ] = м/с.

(вар.15 –21).* Дві матеріальні точки рухаються вздовж однієї прямої, яка співпадає з віссю 0X декартової системи координат. Швидкість першої точки змінюється за законом $v_{1x} = A + Bt + Ct^2$, а прискорення другої точки змінюється згідно рівнянню $a_{2x} = \alpha + \beta t$. У початковий момент часу перша точка мала координату $x_{10} = D$. У другої точки у початковий момент часу координата була $x_{20} = \gamma$, а швидкість $v_{20x} = \delta$. Завдання і значення параметрів наведені у таблиці 1.2.

Розмірності параметрів: [A] = м/с, [B] = м/с^2, [C] = м/с^3, [D] = м, [α]=м/с^2, [β] = м/с^3, [γ] = м, [δ] = м/с.

(вар.22 –25).* Дві матеріальні точки рухаються вздовж однієї прямої, яка співпадає з віссю 0X декартової системи координат. Закон руху першої точки має вид $x_1 = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, а швидкість другої точки змінюється згідно рівнянню $v_{2x} = \alpha + \beta t + \gamma t^3$. У початковий момент часу друга точка мала координату $x_{20} = \delta$. Продовження умови і задані параметри наведені у таблиці 1.2. Розмірності параметрів: [A] = м, [B] = м/с, [C] = м/с^2, [D] = м/с^3, [α]=м/с, [β] = м/с^2, [γ] = м/с^3, [δ] = м.

Знаком * помічені завдання, які наводяться за [11].

Таблиця 1.2. Умови до задач 1.13(вар.1 –25).

Номер задачі	Завдання (знайти)	Значення параметрів							
		A	B	C	D	α	β	γ	δ
1.13.1	Визначити відносну швидкість точок у момент збігу їх координат.	2	1	2	1	4	6	4	0
1.13.2	Визначити прискорення першої точки в момент, коли швидкості точок зрівняються.	2	4	2	1	1	6	0	1
1.13.3	Визначити відстань між точками у момент, коли прискорення точок стануть однаковими.	0	0	3	1	1	1	0	2
1.13.4	Визначити прискорення першої точки в момент її зустрічі з другою.	3	8	4	1	8	2	3	2
1.13.5	Визначити відстань між точками у момент, коли їх швидкості будуть мати однакове значення.	1	2	4	3	2	6	4	2
1.13.6	Визначити відносну швидкість точок у момент, коли їх прискорення стануть однаковими.	1	7	1	2	8	6	0	1

1.13.7	У скільки разів будуть відрізняться прискорення точок в момент, коли швидкість другої точки стане удвічі більшою за швидкість першої.	0	1	1	1	4	4	1	6
1.13.8	Визначити прискорення першої точки у момент, коли друга буде знаходитися у початку координат.	2	0	2	1	-2	6	-2	2
1.13.9	Визначити відносну швидкість точок у момент, коли відстані між ними збільшиться у два рази.	6	2	3	2	2	12	2	3
1.13.10	Визначити прискорення першої точки у момент, коли друга зупиниться.	3	2	1	2	0	2	1	-1
1.13.11	Визначити швидкість другої точки у момент, коли прискорення першої стане рівним нулю.	2	1	-6	2	1	4	3	0
1.13.12	Визначити різницю прискорень точок у момент, коли їх швидкості будуть рівними.	7	1	2	2	4	9	9	7
1.13.13	Визначити положення другої точки, у момент, коли перша зупиниться.	3	-3	0	1	-2	9	0	2
1.13.14	Визначити швидкість першої точки у момент, коли друга зупиниться.	5	2	-2	1	0	2	5	-4
1.13.15	Визначити відносну швидкість точок у момент, коли прискорення першої точки стане рівним нулю.	-1	-4	2	2	2	4	-4	-1
1.13.16	Визначити прискорення першої точки у момент, коли швидкості точок стануть рівними.	1	1	1	1	1	1	1	3
1.13.17	Визначити різницю швидкостей точок коли їх прискорення будуть рівними.	3	2	2	7	7	-1	5	3
1.13.18	Визначити прискорення першої точки у момент зустрічі з другою.	2	5	2	4	3	4	8	2
1.13.19	Визначити відстань між точками у момент, коли прискорення точок стануть рівними.	4	3	2	3	2	5	3	2
1.13.20	Визначити прискорення першої точки у момент, коли друга зупиниться.	-4	6	8	0	0	8	6	-4
1.13.21	Визначити різницю прискорень точок у момент, коли друга точка буде рухатися удвічі швидше за першу.	3	2	2	4	3	8	5	7
1.13.22	Визначити відносну швидкість точок у момент, коли вони опиняться на відстані 2м одна від одної.	3	5	4	2	2	8	6	4
1.13.23	Визначити різницю прискорень точок у момент, коли вони зустрінуться.	0	2	1	1	2	2	2	9
1.13.24	Визначити координату другої точки у момент, коли швидкості точок будуть однаковими.	0	3	3	2	7	6	3	0

1.13.25	Визначити відстань між точками у момент, коли прискорення першої точки буде рівним нулю.	6	2	-3	1	2	4	9	5

1.14. Радіус-вектор частинки змінюється з часом за законом $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t^2\vec{j} + 6\vec{k}$, де r вимірюється в метрах. Отримати вирази для векторів швидкості та прискорення частинки. Визначити а) модуль переміщення частинки $|\Delta\vec{r}|$ за перші п’ять секунд руху; б)модуль швидкості в момент часу t = 2c; в) модуль прискорення частинки.

1.15. Частинка рухається зі швидкістю $\vec{v} = \vec{i} + 4t\vec{j} + 6t^2\vec{k}$, де v вимірюється в м/с. Визначити: а) переміщення частинки за перші дві секунди руху; б) модулі швидкості і прискорення частинки в момент часу t_1= 2с.

1.16. Закон руху тіла у координатній формі має вид: $x = At$; $y = Bt^2 + Ct$; $z = 0$. Записати у векторній формі закон руху тіла $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а також рівняння, що надають залежність векторів швидкості та прискорення від часу.

1.17. Закон руху тіла у координатній формі має вид: $x = At$; $y = Bt^2 + Ct$; $z = 0$. Знайти рівняння, що надають залежність модулів переміщення $|\vec{r}|$, швидкості $|\vec{v}|$ та прискорення $|\vec{a}|$ від часу.

1.18. Закон руху тіла у координатній формі має вид: $x = At$; $y = Bt^2 + Ct$; $z = 0$. Записати рівняння траєкторії тіла.

1.19. Два камені кинули вертикально вгору з однаковою початковою швидкістю $v = 14{,}7$ м/с з інтервалом $\Delta t = 1$с. Перший камінь кинуто з балкону на висоті $h = 5$ м, другий – з поверхні землі. Записати закон руху кожного з каменів та визначити відстань між ними через t_1=2 с після початку руху першого каменя.

1.20. Людина, що знаходиться у кімнаті на четвертому поверсі , бачить, як повз його вікна пролітає зверху квітковий вазон. Відстань $\Delta h = 2$м, яка дорівнює висоті вікна, вазон пролетів за час Δt =0,2 с. З вікна якого поверху випав вазон, якщо висота одного поверху h_1 =4м? g = 9,8 м/с^2.

1.21. М’яч упав на плоску поверхню з висоти h_1 = 16м і відскочив на висоту h_2 = 5м. Визначити значення швидкостей м’яча перед та після відскоку. Який час пройшов з моменту початку падіння м’яча до досягнення вищої точки після відскоку? Побудуйте графік залежності висоти h від часу t.

1.22. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом $\alpha = 60^o$ до горизонту із швидкістю v_0= 14,7 м/с. Визначити найбільшу висоту h_{max}, на яку підійметься тіло, та відстань l до точки падіння. Чому дорівнює радіус R кривизни траєкторії тіла в верхній точці та в момент падіння?

1.23. Тіло кинуто в горизонтальному напрямку зі швидкістю $v_0 = 15$ м/с. Визначити нормальне a_n, тангенціальне a_τ прискорення та радіус кривизни R траєкторії тіла через $t_1 = 1{,}5$ с після початку руху.

1.24. Визначити, як зміняться час та дальність польоту тіла, що кинуте горизонтально, якщо збільшити висоту, з якої його кидають у чотири рази. Швидкість v_0, з якою кинули тіло, не змінюється.

1.25. Тіло кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Через час t вектор швидкості v склав кут β з горизонтом, його модуль і проекції на вісі OX і OY дорівнювали відповідно v, v_x і v_y, а нормальна і тангенціальна складові прискорення a_n і a_τ. Визначити величини, позначені в таблиці 1.3 "зірочкою", а також відстань L, на яку переміститься за цей час тіло по горизонталі і висоту h, на якій опиниться.

Таблиця 1.3.

№ вар.	α°	v_0, м/с	t.c	β°	v,м/с	v_x, м/с	v_y, м/с	a_τ, м/с²	a_n, м/с²
1.25.1	60	10	*		8	5	*	*	*
1.25.2		10	*	*	9	*	*		*
1.25.3	40	20	*		*		*	*	*
1.25.4	*	20		*		10			*
1.25.5		30	0,3			10	*	*	
1.25.6	50	30	0,5	*	*	*			*
1.25.7	40	11	*		10		*	*	
1.25.8	*	20	*		12	9		*	
1.25.9	60	30	*				10		*
1.25.10	*	30		*		14	5	*	
1.25.11	*	20		35	12		*		*
1.25.12	50	*				10		4,9	
1.25.13	45	*	*		14		*	*	8
1.25.14	*	15		30			5	*	
1.25.15	30	20	0,5						*
1.25.16	45	*			10			0	
1.25.17	40	20		20		*			*
1.25.18	*	20	*	*	10			*	6
1.25.19		20	*		*	10	5	*	
1.25.20	*	*	0,4	*		10	10		*

1.26. Визначити лінійну швидкість v і нормальне прискорення a_n точки земної поверхні на екваторі, на широті 45° та на полюсі, яке зумовлено обертанням Землі. Радіус Землі прийняти рівним 6400км.

1.27. Визначити кутову швидкість ω, лінійну швидкість v і нормальне прискорення a_n для руху Землі навколо Сонця. Радіус земної орбіти $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м.

1.28. Визначити прискорення і кінцеву кутову швидкість вала, який починає обертатися з постійним прискоренням і за перші $t = 10$ с здійснює N=50 обертів.

1.29. Знайти нормальне та тангенціальне прискорення точки через t_1=15 с після початку руху, якщо вона рухається по колу радіуса R=0,2м так, що залежність кутової швидкості від часу задається рівнянням $\omega = 2 + 0{,}4t$.

1.30. Матеріальна точка рухається по колу радіуса $R = 4$ м згідно рівнянню $s = A + Bt + Ct^2$, де s – криволінійна координата, що відраховується від деякої початкової точки кола; $A = 6$ м; $B = -2$ м/с; $C = 1$ м/с^2. Визначити момент часу, в який нормальне прискорення точки $a_n = 1$м/с^2; швидкість v, тангенціальне a_τ та повне a прискорення точки в цей момент.

1.31. Точка рухається вздовж кола радіуса $R = 12$ см з постійним тангенціальним прискоренням. Визначити нормальне прискорення a_n точки через $t_1 = 10$ с після початку руху якщо відомо, що наприкінці п'ятого оберту швидкість точки становила $v = 40$ см/с .

1.32. Колесо обертається з постійним прискоренням. Визначити кутове прискорення ε колеса, якщо відомо, що через $t_1 = 3$с після початку руху вектор повного прискорення точок його ободу утворює з радіусом кут $\alpha = 30^0$.

1.33. Диск радіусом $R = 25$см починає обертатися з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 0{,}4$ рад/с^2. Визначити нормальне a_n, тангенціальне a_τ та повне a прискорення точок ободу диска в момент $t_1 = 2$ с.

1.34. Маховик починає обертатися з постійним кутовим прискоренням. Знайти кут між вектором повного прискорення будь-якої точки маховика та відповідним радіусом в момент, коли маховик здійснив перші N =2 оберти.

1.35. (вар.1-25)*. У таблиці 1.4 наведені рівняння зміни з часом кінематичних характеристик обертання маховика, закріпленого на валу двигуна.

1. Зобразити графіки зміни з часом кута оберту φ(t), кутової швидкості ω(t), і кутового прискорення ε(t). Поясніть характер руху.

2. Визначити повне прискорення точки, яка знаходиться на відстані R=0,1м від осі вала в момент часу t = 10с.

Кут оберту заданий у радіанах, A=0,0314 рад/с^2, B = 0,1 рад/с.

Таблиця 1.4 (до задач 1.34, вар.1-25)

Номер задачі	Рівняння	Початкові умови (при t = 0)
1.35.1	$\varepsilon = Ae^{-Bt}$	$\varphi = 0, \omega = 0$
1.35.2	$\varphi = 1 - (1 + Bt)^{-1}$	—
1.35.3	$\varepsilon = -A(1 + Bt)^{-2}$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi$ рад / с

1.35.4	$\omega = B(1+e^{-Bt})\varphi = 0$	$\varphi = 0$
1.35.5	$\varphi = \ln(1+Bt)$	—
1.35.6	$\varphi = \sin Bt$	—
1.35.7	$\varphi = 1 - e^{Bt}$	—
1.35.8	$\varepsilon = -A\cos Bt$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi$ рад / с
1.35.9	$\omega = B(1+\sin Bt)$	$\varphi = 0$
1.35.10	$\omega = Be^{-Bt}$	$\varphi = 0$
1.35.11	$\omega = B\sin Bt$	$\varphi = 0$
1.35.12	$\varepsilon = -A\sin Bt$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi$ рад / с
1.35.13	$\varphi = 1 - e^{-Bt} + 2Bt$	—
1.35.14	$\omega = B(1+Bt)^{-1}$	$\varphi = 0$
1.35.15	$\varepsilon = -A(1+Bt)^{-3}$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi$ рад / с
1.35.16	$\varphi = 2Bt - 1 + e^{-Bt}$	—
1.35.17	$\omega = B\cos Bt$	$\varphi = 0$
1.35.18	$\omega = B(1-\sin Bt)$	$\varphi = 0$
1.35.19	$\varphi = Bt - \sin Bt$	—
1.35.20	$\varepsilon = A\cos Bt$	$\varphi = 0, \omega = 0$
1.35.21	$\varphi = 1 - \cos Bt$	—
1.35.22	$\omega = B(1-e^{Bt})$	$\varphi = 0$
1.35.23	$\varepsilon = A\sin Bt$	$\varphi = 0, \omega = 0$
1.35.24	$\omega = -B(1+Bt)^{-2}$	$\varphi = 0$
1.35.25	$\varepsilon = Ae^{-Bt}$	$\varphi = 0, \omega = 0{,}1\pi$ рад / с

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. Траєкторія руху матеріальної точки – це
   1. переміщення матеріальної точки
   2. лінія, яка з’єднує початкове та кінцеве положення матеріальної точки
   3. лінія, яку описує матеріальна точка в процесі свого руху
   4. відстань, яку пройшла матеріальна точка за певний проміжок часу
2. Шлях, пройдений матеріальною точкою – це
   1. величина переміщення матеріальної точки
   2. довжина прямої, яка з’єднує початкове та кінцеве положення матеріальної точки
   3. довжина лінії, яку описує матеріальна точка в процесі свого руху
   4. різниця радіус - векторів, проведених до початкового та кінцевого її положення
3. Переміщення матеріальної точки – це
   1. відстань, яка пройдена матеріальною точкою за певний проміжок часу
   2. довжина лінії, яка з’єднує початкове та кінцеве положення матеріальної точки
   3. довжина лінії, яку описує матеріальна точка в процесі свого руху

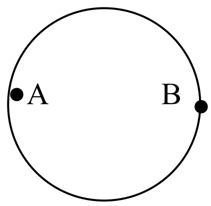
4. вектор, що є різницею радіус - векторів, проведених з початку координат до початкового та кінцевого положення матеріальної точки

4. Величини шляху та переміщення точки співпадають у випадку
   1. руху вздовж будь-якої криволінійної траєкторії
   2. прямолінійного руху при відсутності точки повороту
   3. будь-якого прямолінійного руху
   4. руху вздовж кола

5. Швидкість (миттєва) матеріальної точки – це
   1. величина, що визначається за формулою $v = \frac{S}{t}$
   2. відношення переміщення до часу, за який воно відбулося
   3. похідна радіус - вектора точки за часом
   4. відношення пройденого шляху до часу, за який він був пройдений

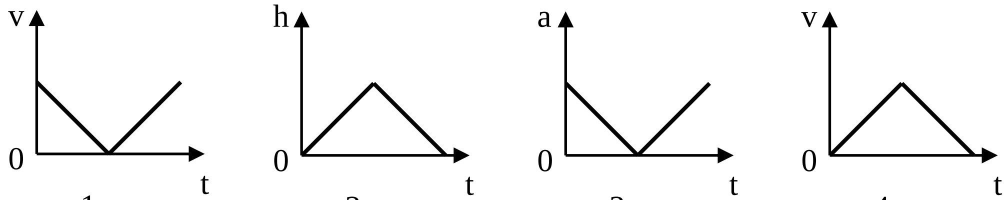
6. Величини середнього значення модуля швидкості $\langle v \rangle$ та модуля середньої швидкості $\left|\langle \bar{v} \rangle\right|$ точки співпадають у випадку
   1. прямолінійного руху при відсутності точки повороту
   2. будь-якого прямолінійного руху
   3. руху вздовж будь-якої криволінійної траєкторії
   4. руху вздовж кола

7. Матеріальна точка пройшла півкола радіус якого 5м від точки A до точки B протягом 10 с. Величина середнього значення модуля швидкості $\langle v \rangle$ у порівнянні з модулем середньої швидкості $\left|\langle \bar{v} \rangle\right|$ точки



   1. має таке саме значення 2. більша у 3,14 рази
   3. більша у 1,57 разів 4. більша у 2 рази

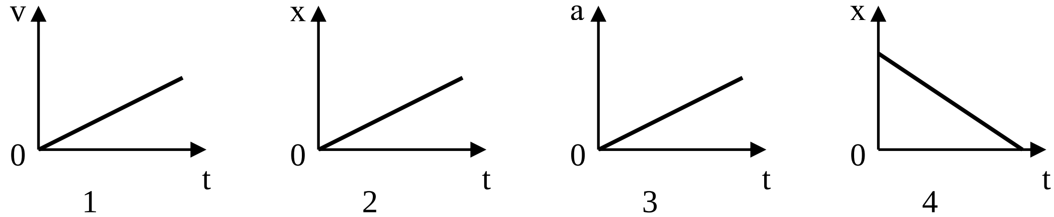
8. Кульку підкинули вертикально вгору. Якщо знехтувати опором повітря, руху цієї кульки відповідає графік (h – висота підйому кульки, v – модуль її швидкості, a – модуль прискорення), зображений на



1 2 3 4

   1. рис.1 2. рис.2 3. рис.3 4. рис.4

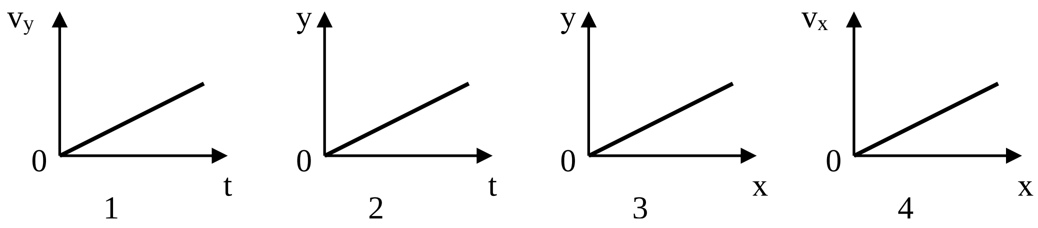
9. Зображені графіки описують прямолінійний рух. Прямолінійному рівноприскореному руху відповідає графік, зображений на



1 2 3 4

   1. рис.1 2. рис.2 3. рис.3 4. рис.4

10. Тіло рухається у площині XOY. Прямолінійному руху тіла незалежно від його прискорення відповідає графік, зображений на

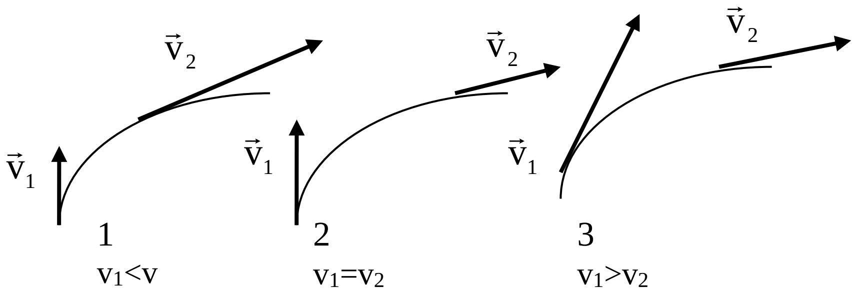


1. рис.1 2. рис.2 3. рис.3 4. рис.4

11. . Кут між векторами швидкості та прискорення для матеріальної точки, яка рухається А) рівноуповільнено вздовж прямої; Б) рівноприскорено вздовж прямої, складає

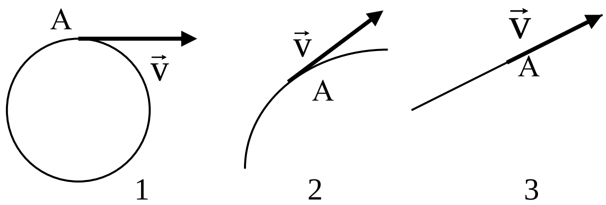
1. 90º 2. 0º 3. 180º 4. 270º

12. На рисунку зображені траєкторії матеріальних точок та вектори їх швидкості у два моменти часу. Встановити відповідність між рисунком та значенням тангенціального прискорення точки.



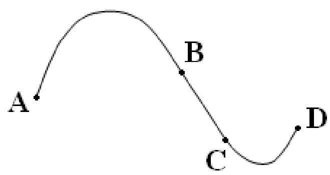
1. Рис. 1 А. тангенціальне прискорення точки a_τ >0
2. Рис. 2 Б. тангенціальне прискорення точки a_τ <0
3. Рис. 3 В. тангенціальне прискорення точки дорівнює нулю (a_τ =0)

13. Матеріальні точки рухаються з однаковою швидкістю вздовж траєкторій, які зображені на рисунках.. Установити відповідність між значенням нормальної складової a_n в точці А та номером зображеної на рисунку траєкторії.



1. Рис. 1 А) мінімальне (нульове) значення a_n в точці А
2. Рис. 2. Б) максимальне значення a_n в точці А
3. Рис. 3. В) проміжне значення a_n в точці А

14. Установити відповідність між значенням прискоренням точки, яка рухається с постійною за величиною швидкістю вздовж траєкторії, зображеній на рисунку, та ділянкою траєкторії.



1. ділянка АВ А) нульове значення прискорення *а*
2. ділянка ВС Б) максимальне значення прискорення *а*
3. ділянка CD В) проміжне значення прискорення *а*

15. Установити відповідність між характером руху матеріальної точки та складовими її прискорення.

1. Рівномірний прямолінійний рух — А. $\vec{a}_\tau = \text{const},\ \vec{a}_n = 0$

2. Рівнозмінний прямолінійний рух — Б. $\vec{a}_\tau = 0,\ |\vec{a}_n| = \text{const}$

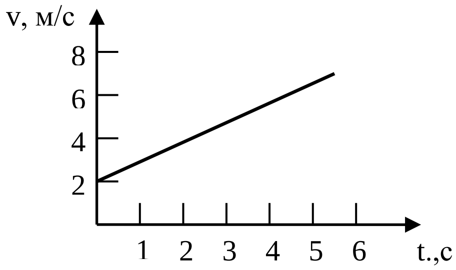
3. Рівномірний криволінійний рух — В. $\vec{a}_\tau = \text{const},\ \vec{a}_n = 0$

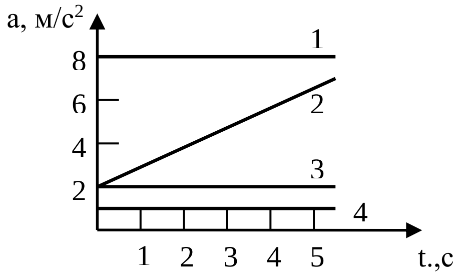
4. Рівномірний рух по колу — Г. $\vec{a}_\tau = 0,\ \vec{a}_n \neq 0$

Вибрати вірну відповідь.

16. Рівноприскорений прямолінійний рух без початкової швидкості задовольняє рівнянню 1. $x = x_0 + v_x t$ 2. $x = v_x t$ 3. $\Delta\vec{r} = \vec{v}t$ 4. $x = x_0 + \frac{at^2}{2}$

17. На рисунку представлений графік залежності проекції швидкості прямолінійного руху тіла від часу. На графіку залежності прискорення від часу цьому руху відповідає





1. пряма 1 2. пряма 2 3. пряма 3 4. пряма 4

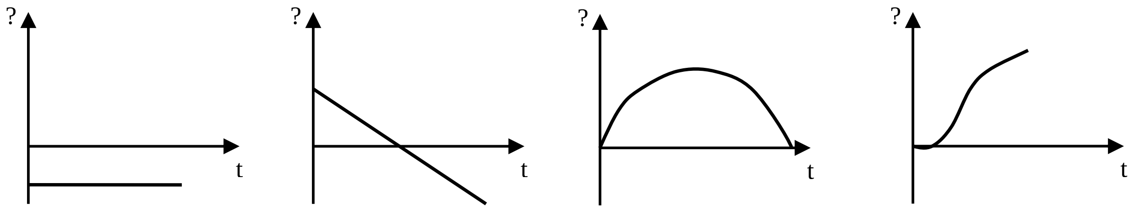
18. Напрям та величину

А) тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$; Б) нормального прискорення $\vec{a}_n$

надає формула:

1. $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 2. $\frac{dv}{dt}\vec{\tau}$ 3. $v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ 4. $\frac{v^2}{R}\vec{n}$

19. Тіло, яке кинули вертикально уверх, падає в початкову точку.



1 2 3 4

Установити відповідність між графіком та зображеною на ньому залежністю. (Вісь координат OY напрямлена уверх.)

1. Залежність пройденого шляху від часу — А. графік 1
2. Залежність прискорення від часу — Б. графік 2
3. Залежність швидкості від часу — В. графік 3
4. Залежність величини переміщення від часу — Г. графік 4

Вибрати вірну відповідь.

20. Тіло кинули під кутом до горизонту. У найвищій точці траєкторії А) найбільше значення має; Б) найменше значення має

1. похідна $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 2. нормальна складова прискорення $\vec{a}_n$

3. тангенціальна складова прискорення $\vec{a}_\tau$ 4. радіус кривизни траєкторії R

21. Тіло кинули під кутом до горизонту. Незмінним у процесі руху залишається

1. повне прискорення 2. нормальна складова прискорення $\vec{a}_n$

3. тангенціальна складова прискорення $\vec{a}_\tau$ 4. швидкість

(Опором повітря знехтувати).

22. Тіло кинули під кутом до горизонту. Тангенціальна складова прискорення $\vec{a}_\tau$ має найменше значення

1. у початковій точці траєкторії;   2. у кінцевій точці траєкторії;
3. у найвищій точці траєкторії;   4. серед наведених немає вірної відповіді..

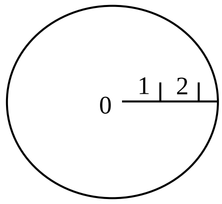
23. Рівноприскорений обертальний рух без початкової швидкості відносно нерухомої осі описує рівняння

1. $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ 2. $\Delta\varphi = \omega t$ 3. $\varphi = \varphi_0 + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$ 4. $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$

24. Нормальне прискорення точки, якщо відстань від осі обертання збільшити у два рази, а кутову швидкість обертання зменшити у два рази,

1. не змінюється;   2. зменшується удвічі;
3. зменшується у 8 разів;   4. удвічі збільшується.

25. Точки 1 і 2 лежать на одному радіусі колеса, яке обертається навколо центра 0 з постійною швидкістю (див. рис.). Для цих точок рівними є:



1. лінійна швидкість та період обертання;
2. період обертання та кутова швидкість;
3. лінійна та кутова швидкості;
4. кутова швидкість та доцентрове прискорення.

26. Не змінюється при рівномірному русі по колу такі характеристики матеріальної точки:

1.вектори кутової та лінійної швидкості   2. кутова швидкість і кінетична енергія
3.вектори кутового та лінійного прискорення   4. лінійна швидкість та момент інерції

27. Лінійна швидкість точки, якщо відстань від осі обертання збільшити у два рази, а кутову швидкість обертання зменшити у два рази:

1. не змінюється   2. зменшується удвічі
3. зменшується у 4 рази   4. удвічі збільшується

28. Кут між векторами швидкості та прискорення для матеріальної точки, яка рівномірно рухається по колу, складає

1. 180º   2. 90º   3. 270º   4. 0º

29. Хвилинна та годинникова стрілки мають однакову довжину. Значення нормальних прискорень кінців годинникової та хвилинної стрілок відрізняються у

1. 24 рази   2. 60 разів   3. 144 рази   4. 3600 разів   5. 12 разів

30. Хвилинна стрілка у 2 рази більша за годинникову. Модулі швидкості кінців годинникової та хвилинної стрілок відрізняються у

1. 24 рази   2. 60 разів   3. 144 рази   4. 3600 разів   5. є рівними

31. У випадку А)рівносповільненого обертального руху; Б) рівноприскореного обертального руху матеріальної точки відносно нерухомої осі вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ спрямований

1. по дотичній до траєкторії проти вектора лінійної швидкості
2. до центра кола
3. по осі обертання вздовж вектора кутової швидкості
4. по осі обертання проти вектора кутової швидкості

32. Установити відповідність між об’єктом, що рухається, та кількістю його ступенів вільності:

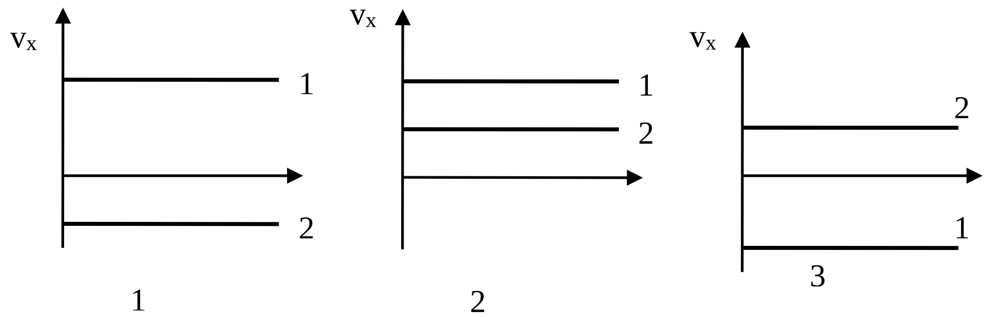
1. матеріальна точка   А. 3 ступені вільності
2. абсолютно тверде тіло при довільному русі   Б. 4 ступені вільності

3. абсолютно тверде тіло, рух якого є плоским В. 5 ступенів вільності
Г. 6 ступенів вільності

33. Якщо швидкість руху човна відносно води v_1 у n разів більша за швидкість течії ріки v_2, то відношення часу поїздки на човні між двома пунктами проти течії до час у поїздки за течією складає

1. $\frac{n+1}{n-1}$ 2. $\frac{n+1}{n}$ 3. $\frac{n-1}{n+1}$ 4. $\frac{n+1}{n-2}$ 5. $\frac{n+1}{n-1}$

34. Графіки швидкостей прямолінійного руху двох мотоциклістів, початкові координати яких 200м і –100м, зображені на рисунку.



Зустріч мотоциклістів під час руху можлива у випадку, зображеному на

1. рис.1 2. рис.2 3. рис.3

35. Два тіла починають рухатися по колу з однієї точки в одному напрямку. Період обертання першого тіла 1 с, другого – 2 с. Перше тіло наздожене друге через

1. 4 с 2. 2 с 3. 6 с 4. 1,5 с

Розділ 2. Динаміка матеріальної точки і системи матеріальних точок

Тема: Принцип відносності Галілея. Перший закон Ньютона. Інерціальна система відліку. Маса тіла. Сила. Імпульс. Другий закон Ньютона. Третій закон Ньютона. Сили в механіці. Гравітаційна взаємодія. Закон всесвітнього тяжіння. Сила тяжіння. Вага тіла. Сили пружності. Закон Гука. Сили тертя. Сила опору.

Основні поняття і формули

● **Перший закон Ньютона (**закон інерції**). Тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не діють інші тіла або дія цих тіл компенсована.**

Це означає, що при $\vec{F}=0$ прискорення тіла $\vec{a}=0$, тобто швидкість $\vec{v}=\mathrm{const}$, або $\vec{v}=0$.

Система відліку, в якій виконується перший закон Ньютона, називається **інерціальною.** Існує безліч інерціальних систем відліку, бо будь-яка система відліку, що рухається рівномірно прямолінійно відносно деякої інерціальної системи також є інерціальною.

● **Другий закон Ньютона,** (рівняння руху матеріальної точки (поступального руху тіла)).

В інерціальній системі відліку швидкість зміни імпульсу матеріальної точки (тіла) дорівнює рівнодійній усіх сил, що діють на цю точку (тіло).

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}, \tag{1.14}$$

де $\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс тіла; $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – **рівнодійна сила.**

Якщо сила, що діє на тіло, постійна за величиною та напрямком, то зміна імпульсу тіла за проміжок часу Δt дорівнює імпульсу сили, тобто добутку сили на час її дії:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t. \tag{1.15}$$

У випадку тіла постійної маси швидкість зміни імпульсу співпадає з добутком маси на прискорення, і другий закон Ньютона може бути представлений у виді:

Прискорення матеріальної точки прямо пропорційне діючій на неї сили і обернено пропорційне масі точки.

$$\vec{F} = m\vec{a}, \text{ або } \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{1.16}$$

Кожна з величин, які входять в другий закон Ньютона, має свій фізичний зміст.

● В цьому законі **маса** m – міра інертності тіла при поступальному русі.

● **Сила** $\vec{F}$ в механіці – це міра механічної дії на дане матеріальне тіло інших тіл, внаслідок чого тіло змінює швидкість або деформується.

Тільки після встановлення вигляду функції $\vec{F}$ як закону взаємодії матеріальної точки з навколишніми тілами формула (1.14) дозволяє визначити закон руху тіла, тобто залежність його швидкості і координат від часу.

● **Імпульс** або **кількість руху** $\vec{p}$ – векторна міра механічного руху тіла, яка визначає можливість передачі механічного руху від одного тіла до іншого. Величина $\vec{p}$ дорівнює добутку маси тіла на швидкість його руху, а напрям співпадає з напрямом швидкості.

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1.17}$$

Повний імпульс системи тіл дорівнює векторній сумі імпульсів окремих тіл: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$.

● **Третій закон Ньютона** вказує на те, що дія одного тіла на інше носить взаємний характер.

Сили дії тіл одне на одне завжди однакові за значенням і протилежні за напрямом:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Сили дії і протидії прикладені до різних тіл і тому не можуть зрівноважувати одна одну.

З іншого боку, за третім законом Ньютона сума всіх внутрішніх сил, що діють у системі матеріальних точок дорівнює нулю

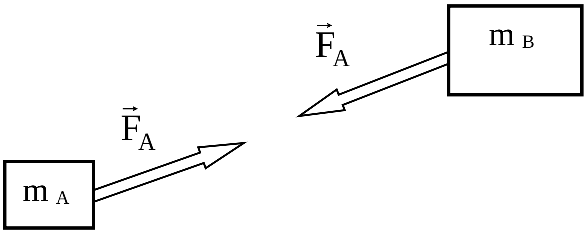


Рис.1.17 Взаємодія двох тіл: $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{j,k} \vec{F}^{(i)}_{j,k} = 0.$$

де індекси j, k – номера матеріальних точок, між якими відбувається взаємодія, ($j \neq k$).

Тому зміна повного імпульсу системи матеріальних точок (тіл) визначається дією тільки зовнішніх сил $\vec{F}^{(e)}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(e)}. \qquad (1.18)$$

Звідки зміна імпульсу системи за проміжок часу (t_0, t) дорівнює

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{(e)} dt, \quad \text{де} \int_{t_0}^{t} \vec{F}^{(e)} dt \text{ - імпульс сили.}$$

● **Центром мас** системи матеріальних точок називають точку С, положення якої характеризує розподіл мас системи і визначається радіусом-вектором $\vec{r}_c$.

У випадку системи матеріальних точок $\vec{r}_c$ визначається за формулою

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}, \qquad (1.19)$$

де m_i та $\vec{r}_i$ – маса і радіус вектор i-ої матеріальної точки, n – кількість матеріальних точок; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – повна маса системи.

У класичній механіці внаслідок незалежності маси від швидкості імпульс системи $\vec{p}$ може бути виражений через швидкість її центра мас $\vec{v}_c$:

$$\vec{p}_c = m\vec{v}_c.$$

Теорема про рух центра мас: центр мас системи рухається так, як рухалась би матеріальна точка, в якій зосереджена маса системи, під дією рівнодіючої усіх зовнішніх сил, що діють на систему:

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{(e)}. \quad (1.20)$$

У випадку замкненої системи ($\vec{F}^{(e)} = 0$) центр мас системи покоїться або рухається рівномірно прямолінійно. Отже **система відліку, яка зв'язана з центром мас замкненої системи завжди є інерціальною**.

● Закони Ньютона однакові для всіх інерціальних систем відліку, тобто механічні явища відбуваються однаково в усіх інерційних системах відліку. В цьому полягає **принцип відносності Галілея** і проявляється рівноправність усіх інерційних систем відліку.

Сили в механіці.

● **Сила гравітаційної взаємодії** двох тіл визначається **законом всесвітнього тяжіння** (закон справедливий для точкових тіл або однорідних тіл сферичної форми).**:**

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.21)$$

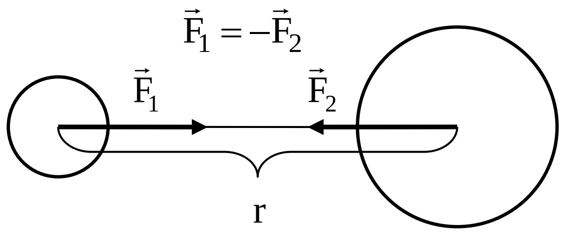


Рис.1.18 Гравітаційні сили

де $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ – гравітаційна стала, яка чисельно дорівнює силі притягання двох тіл масою 1кг кожне, якщо відстань між ними 1м; r – відстань між тілами; m_1 і m_2 – маси тіл.

Гравітаційні сили, прикладені до кожного із взаємодіючих тіл (рис.1.18), протилежні за напрямками, рівні за модулями і діють вздовж прямої, що з'єднує центри цих тіл.

Гравітаційне притягання зумовлене гравітаційним полем, що існує навколо кожного тіла і пов'язане з його масою. Отже, **маса тіла є не тільки мірою інертності, але й мірою його гравітаційних властивостей**.

● **Сила тяжіння** $\vec{F}_T$ є складовою гравітаційної сили, яка врівноважує реакцію земної поверхні.

$$\vec{F}_T = m\vec{g}, \quad (1.22)$$

де $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння, яке залежить від широти внаслідок добового обертання Землі (див. приклад.) та її сплющеності біля полюсів.

Якщо знехтувати впливом обертання Землі, то сила тяжіння, що діє на тіло масою m поблизу поверхні Землі, дорівнює гравітаційній силі

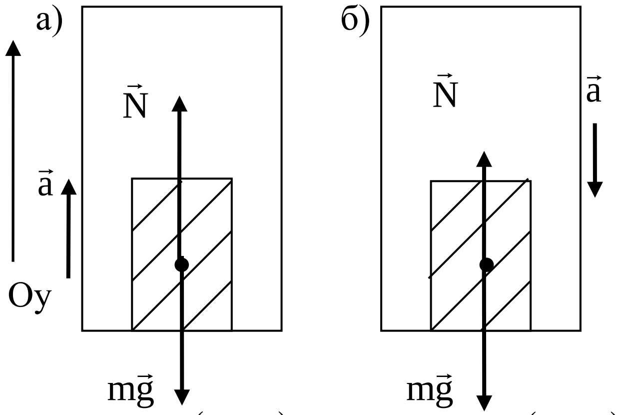
$$F_T = G\frac{mM_З}{R_З^2}.$$

Звідки за другим законом Ньютона отримуємо вираз для прискорення вільного падіння $g = G\frac{M_З}{R_З^2}$, де $M_З$ – маса Землі, $R_З$ – її радіус.

На висоті h прискорення вільного падіння $g = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2}$.

● **Вага тіла** P – сила, з якою тіло внаслідок його притягання до Землі діє на нерухомі відносно нього опору чи підвіс.

За третім законом Ньютона вага тіла за модулем дорівнює прикладеній до тіла силі реакції опори $\vec{N}$, але протилежна за напрямом.



$P = N = m(g + a)$ $\qquad$ $P = N = m(g - a)$

Рис.1.19 Вага тіла при прискореному русі опори.

В інерціальній системі відліку (тобто, якщо опора або точка підвісу не рухаються вниз або вгору з прискоренням), вага тіла $\vec{P}$ і сила тяжіння $\vec{F}_T$ чисельно рівні, однаково напрямлені, але прикладені до різних тіл: вага $\vec{P}$ прикладена до опори або точки підвісу, сила тяжіння $\vec{F}_T$ – до тіла. Якщо тіло разом з опорою рухається вгору або вниз з прискоренням $\vec{a}$, то відповідно до другого закону Ньютона $\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Звідки у проекціях на вісь Oy отримуємо $N - mg = \pm ma$.

Коли опора рухається з прискоренням $\vec{a}$, спрямованим угору, вага тіла збільшується (рис.1.19,а), а якщо донизу – зменшується (рис.1.19,б). В останньому випадку при $\vec{a} = \vec{g}$ досягається стан невагомості, тобто P = 0.

Рух супутників навколо Землі відбувається під дією сили гравітаційного притягання, яка надає супутнику у відповідності з другим законом Ньютона доцентрове прискорення. В цьому випадку тіла на супутнику також знаходяться у стані невагомості.

● Найменша швидкість, яку треба надати тілу під час запуску з якої-небудь планети, щоб воно стало її штучним супутником і при цьому рухалось по колу, називається **першою космічною швидкістю**.

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R^2}} = \sqrt{gR}$$

Для Землі $v_1 = 7{,}9 \cdot 10^3$ м/с.

Друга космічна швидкість v_2 для Землі – це швидкість, яку слід надати тілу, щоб воно подолало Земне тяжіння і стало супутником Сонця.

$v_2 = 11{,}2 \cdot 10^3$ м/с.

● **Сили пружності** $F_{пр}$ – сили реакції, які виникають у тілах при деформаціях під дією прикладеної зовні сили. Сили пружності обумовлені силами взаємодії між молекулами тіла і мають електромагнітну природу. За III законом Ньютона сила пружності дорівнює прикладеній до тіла силі:

$$\vec{F}_{пр} = -\vec{F}.$$

Деформації називають **пружними,** якщо після припинення дії зовнішніх сил тіло відновлює свої розміри і форму. Для пружних деформацій справедливий **закон Гуку,** за яким **величина пружної деформації прямо пропорційна діючій на тіло силі**.

У випадку пружних однобічних **деформацій розтягу або стиску** закон Гуку може бути записаний у наступній формі:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}, \quad \text{або} \quad \sigma = \varepsilon E, \qquad (1.23)$$

де $\dfrac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$ – відносна поздовжня деформація тіла ($\Delta l = l - l_0$ – абсолютна деформація розтягу; l_0 і l – довжина до і після деформації відповідно);

$\dfrac{F}{S} = \sigma$ – механічне напруження, яке дорівнює відношенню модуля сили F, що розтягує або стискує тіло, до площі поперечного перерізу тіла S;

E – модуль Юнга, який характеризує пружні властивості матеріалу. Модуль Юнга чисельно дорівнює механічному напруженню, при якому довжина тіла збільшилась би у два рази (ε=1), за умовою збереження пружного характеру деформації.

Враховуючи, що $\vec{F}_{пр} = -\vec{F}$, отримуємо вираз для пружної сили, який також називають законом Гука:

$$F_{пр} = -kx, \qquad (1.23а)$$

де $x \equiv \Delta l$; $k = \dfrac{ES}{l_0}$ – коефіцієнт пружності (у випадку пружини – її жорсткість).

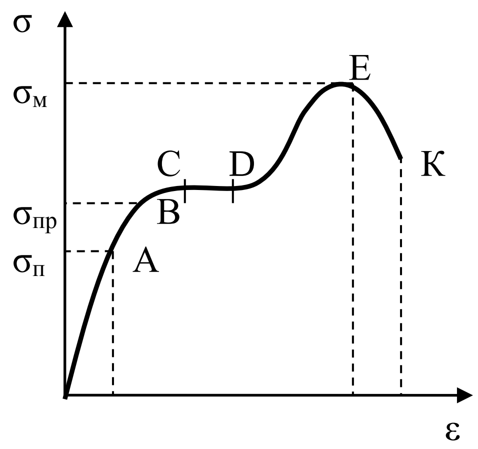


Рис.1.20 Діаграма розтягу

Залежність напруження σ від ε є однією з найважливіших характеристик властивостей твердих тіл. Графічне зображення цієї залежності носить назву діаграми розтягу (рис.2.4). На діаграмі розтягу: $\sigma_п$ (точка А) – межа пропорційності, тобто максимальне напруження, при якому ще виконується закон Гука; $\sigma_{пр}$ (точка В) – межа пружності (максимальне напруження, при якому деформація ще залишається пружною). При напруженнях, більших за $\sigma_{пр}$, деформації приймають залишковий характер, тобто стають пластичними. CD – область текучості, в якій відбувається неперервний зріст деформації з часом при практично сталому напруженні. Матеріали з значною областю текучості можуть без руйнування витримати великі деформації, у протилежному випадку матеріали є крихкими (скло, цегла, чавун та ін.), їх руйнування відбувається вже при незначних деформаціях. $\sigma_м$ (точка E) – межа міцності (максимальне напруження, що виникає в тілі перед початком його руйнування).

Деформація розтягу або стиску супроводжується зміною поперечних розмірів тіл, яку характеризують відносним поперечним стиском або розтягом

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0},$$

де Δd – абсолютна зміна поперечних розмірів тіла, d_0 – поперечні розміри до деформації. Відношення відносної поперечної деформації до відносної повздовжньої деформації носить назву коефіцієнту Пуассона: $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$.

● **Сили тертя** – це сили, що виникають в місцях дотику тіл, напрямлені по дотичній до поверхонь і спрямовані проти швидкості їх відносного переміщення. Сили тертя, як і пружності, зумовлені взаємодією молекул і мають електромагнітну природу.

Закон сухого тертя (Закон Амонтона – Кулона): максимальна сила тертя спокою та сила тертя ковзання не залежить від поверхні дотику тіл і пропорційна силі нормального тиску P_n, яка за величиною дорівнює силі реакції опори N:

$$F_{тер.} = \mu N, \qquad (1.24)$$

де μ – коефіцієнт тертя (спокою або ковзання). Це безрозмірний коефіцієнт, який залежить від природи стичних поверхонь та їх шорсткості, а також від відносної швидкості тіл. Залежність сили тертя від відносної швидкості представлена на рис.1.21 кривою 1. При спеціальній обробці поверхонь сила тертя ковзання може не залежати від швидкості (рис. 1.21, пряма 2). Силі тертя спокою $F_{тер.сп.}$, яка при спокої тіла чисельно дорівнює прикладеній до тіла зовнішній силі (тобто при зростанні зовнішньої сили зростає від 0 до максимального значення F_0), на рисунку відповідає вертикальний відрізок $0F_0$.

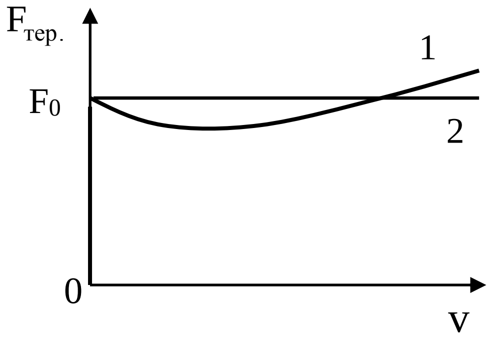


Рис. 1.21 Залежність $F_{тер.}$ від швидкості руху тіл.

На рис.1.22 - 1.24 представлені сили тертя ковзання, що діють на тіла у різних випадках:

а) До тіла на горизонтальній поверхні прикладена сила $\vec{F}$, що діє горизонтально (рис.1.22)

$$F_{тер} = \mu N = \mu mg$$

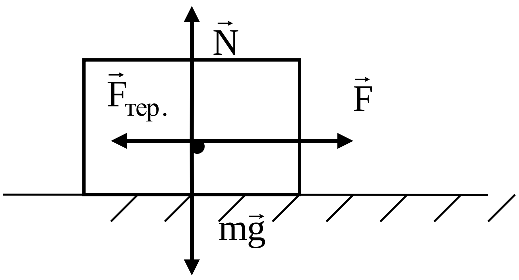


Рис.1.22

б) До тіла на горизонтальній поверхні прикладена сила $\vec{F}$, що діє під кутом α (рис.2.7).

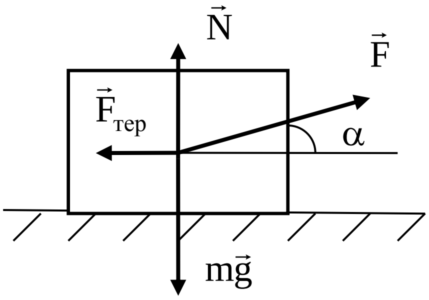


Рис.1.23

$$F_{тер} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha)$$

в) Тіло на похилій площині з кутом α при основі (рис.2.8).

$$F_{тер} = \mu mg\cos\alpha$$

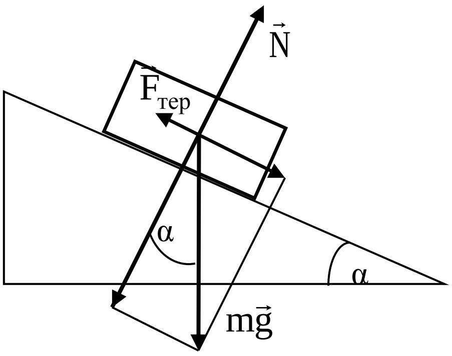


Рис.1.24

Коли тіло рухається рівномірно вздовж похилої площини, чи знаходиться на ній в стані спокою, коефіцієнт тертя дорівнює тангенсу кута нахилу похилої площини: $\mu = tg\alpha$.

У випадку гладких поверхонь помітну роль у формуванні сили тертя відіграє міжмолекулярна взаємодія. Відповідний закон тертя ковзання, набуває форми:

$$F_{тер.} = \mu_{іст}\left(N + SP_0\right),$$

де P_0 – додатковий тиск, зумовлений силами міжмолекулярного притягання, які швидко зменшується при збільшенні відстані між частинками, S – площа дотику тіл, $\mu_{іст.}$ – істинний коефіцієнт тертя ковзання.

Тертя відіграє значну (як позитивну, так і негативну) роль у природі та техніці. Найбільш радикальний спосіб зменшити дію сил тертя – це досягнути зміни тертя ковзання на тертя кочення за допомогою штучних заходів.

Тертя кочення виникає при перекочуванні циліндра або кулі по поверхні іншого тіла. Сила тертя кочення $F_{т.к.}$ – горизонтальна складова сили реакції опори $\vec{F}$, яка внаслідок неабсолютної пружності виниклих деформацій поверхні, по якій котиться тіло спрямована не строго вертикально (рис.1.24).

$$F_{т.к.} = \frac{kN}{R}.$$

Величину k, яка має розмірність довжини, називають коефіцієнтом тертя кочення. Це плече сили Q_n (нормальної складової сили реакції опори $\vec{F}$), яка за величиною практично дорівнює прикладеному нормальному навантаженню N: $Q_n \cong N$.

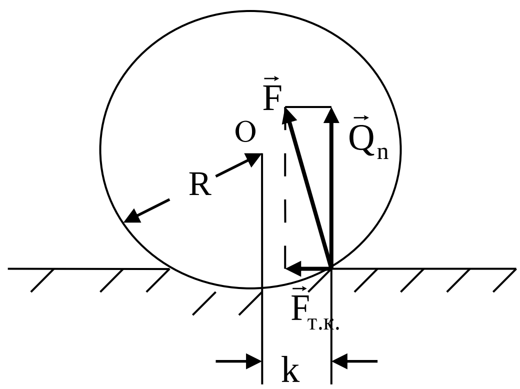


Рис.1.25 Виникнення сили тертя кочення.

2.1. Динаміка прямолінійного руху

Методичні вказівки.

1. При використанні законів Ньютона особливу увагу слід звернути на аналіз сил, що діють на тіло. Основне рівняння руху записують на основі другого закону Ньютона спочатку у векторній формі, а потім, обираючи зручним способом (в залежності від умови задачі) систему координат, – у проекціях на координатні осі. Отриману систему рівнянь доповнюють, у разі необхідності, кінематичними рівняннями та конкретними виразами сил (наприклад, сили тертя або пружності).

2. Розв’язання задач про рух системи зв’язаних тіл зручно здійснювати за такою схемою:

− установити зв’язок між кінематичними характеристиками руху окремих тіл;

− визначити сили, що діють на кожне тіло і зобразити відповідні вектори сил на рисунку;

− якщо тіла зв’язані ниткою, масою якої можна знехтувати, то силу натягу T вважають однаковою по всій довжині нитки. Якщо нитка перекинута через блок, то сили натягу T_1 і T_2 по різні боки блоку є однаковими за величиною ($T_1 = T_2$) тільки у тому випадку, коли можна знехтувати масою блоку та силою тертя, що виникає при його обертанні;

− записати рівняння руху кожного тіла у векторній формі на основі закону динаміки (II закону Ньютона);

− обрати систему координат таким способом, щоб рівняння руху тіл у проекціях на координатні осі мали найбільш просту форму. (При необхідності для кожного тіла може бути обрана своя система координат);

− записати систему рівнянь у проекціях на координатні вісі. При необхідності додати до неї відповідні вирази для сил, що діють на тіла або кінематичні співвідношення, і розв'язати отриману систему рівнянь відносно невідомих величин (змінних), які нас цікавлять.

3. При розв'язуванні задач про рух системи матеріальних точок, слід, перш за все, усі сили, що діють на систему, кваліфікувати як внутрішні або зовнішні. Сума внутрішніх сил дорівнює нулю, і прискорення центру мас системи надає тільки рівнодійна зовнішніх сил. Це прискорення визначається теоремою про рух центра мас.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.11. Матеріальна точка масою m =1кг, що рухається рівномірно по колу радіусу R=1,4 м, описує чверть кола за час Δt = 0,7 с. Знайти зміну імпульсу матеріальної точки.

Розв'язання.

$m = 1$ кг
$R = 1{,}4$ м
$\Delta t = 2$ с
$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$\Delta p - ?$

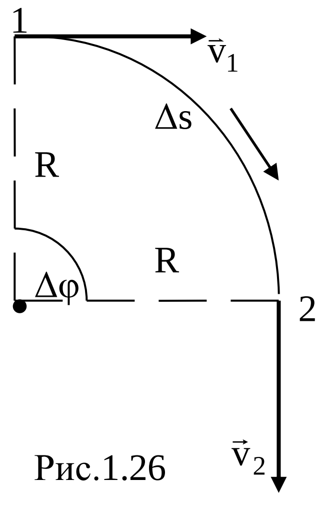


Рис.1.26

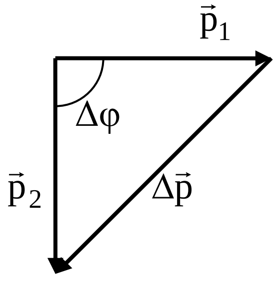


Рис.1.27

Імпульси матеріальної точки в точках 1 і 2 відповідно дорівнюють $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$; $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ (рис.1.26). Причому згідно з умовою, рух є рівномірним, тому $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Зміна імпульсу $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (рис.1.27). З рис.1.27 знаходимо зміну модуля імпульсу матеріальної точки при обертанні на кут $\Delta\varphi = \pi/2$:

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2} = mv\sqrt{2}. \qquad (1)$$

При рівномірному русі $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t}$ (2), де $\Delta\varphi$ – кутове переміщення точки.

З урахуванням співвідношення (2) зміна модулю імпульсу матеріальної точки дорівнює:

$$\Delta p = \frac{mR\Delta\varphi}{\Delta t}\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Користуючись формулою (3), отримуємо

$$\Delta p = \frac{1кг \cdot 1{,}4м \cdot 3.14}{2с \cdot 2}\sqrt{2} = 1{,}55\frac{кг \cdot м}{с}.$$

Відповідь: $\Delta p = 1{,}55\frac{кг \cdot м}{с}$.

Приклад 1.12. М'яч масою m=0,5кг кинули з поверхні землі під кутом $\alpha = 40^o$ до горизонту із швидкістю v_0= 15 м/с. Визначити зміну імпульсу м'яча за час його руху. Опором повітря знехтувати.

m=0,5кг
v_0= 15 м/с
$\alpha = 40^o$
g = 9,8м/с^2
$\Delta\vec{p}$-?

Розв'язання.

1-й спосіб. Імпульси м'яча на початку і наприкінці руху відповідно дорівнюють

$$\vec{p} = m\vec{v}_0; \quad \vec{p} = m\vec{v}.$$

Аналогічно розв'язку попередньої задачі знайдемо зміну імпульсу $\Delta\vec{p}$. Почнемо з побудови векторів імпульсу в початковий і кінцевий моменти руху. При побудові векторної діаграми (рис.1.27) урахуємо, що у випадку, коли опором повітря можна знехтувати, вектор швидкості $\vec{v}$ у момент падіння дорівнює за модулем початковій швидкості v_0 і утворює з горизонтом кут $-\alpha$.

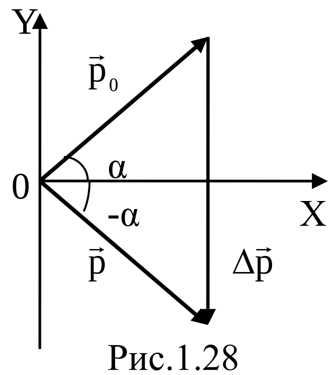


Рис.1.28

Зміна імпульсу дорівнює $\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = m\vec{v} - m\vec{v}_0$. З трикутника, утвореного векторами $\vec{p}_0$, $\vec{p}$ і $\Delta\vec{p}$, визначаємо модуль вектора $|\Delta\vec{p}|$:

$$|\Delta\vec{p}| = 2mv_0\sin\alpha.$$

Чисельний розрахунок дає: $\Delta p = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 15 \cdot 0{,}6428 = 9{,}64$ (кг·м/с).

Оскільки вектори $\vec{p}_0$ та $\vec{p}$ рівні за величиною і утворюють рівні за величиною кути з горизонтом, вектор $\Delta\vec{p}$ є перпендикулярним до горизонту і направлений вертикально донизу, тобто протилежно осі 0Y.

Відповідь: $\Delta\vec{p} = -9{,}64\vec{j}$ кг·м/с, де $\vec{j}$ − координатний орт (одиничний вектор), напрямлений вздовж осі 0у.

2-й спосіб. Оскільки на м'яч діє постійна за величиною та напрямом сила тяжіння $\vec{F}_т = m\vec{g}$, то зміна імпульсу тіла за проміжок часу Δt, як випливає із формули (1.15) дорівнює імпульсу сили, тобто добутку сили тяжіння на час її дії:

$$\Delta\vec{p} = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = m\vec{g}\Delta t.$$

Час руху м'яча знаходимо за допомогою співвідношення $\Delta t = t_n = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (див. приклад 1.7).

Остаточно знаходимо: $\Delta\vec{p} = \dfrac{2m\vec{g}v_0 \sin\alpha}{g} = -2mv_0 \sin\alpha\vec{j} = -9{,}64\vec{j}$ (кг·м/с).

Приклад 1.13. На нерухоме тіло масою m=5кг діє у горизонтальному напрямі сила F_1=2Н. У протилежному напрямі починає діяти сила, яка зростає пропорційно часу за законом $F_2 = kt$, де k=0,1. Коефіцієнт тертя між тілом і горизонтальною поверхнею μ=0,10. Побудувати графік залежності сили тертя від часу. Записати закон, за яким із часом змінюється прискорення тіла.

Дано
m=5кг
F_1=2Н
$F_2 = kt$
k = 0,1
μ=0,10
$F_{тер.}=f(t)$ - ?

Розв'язання

За другим законом Ньютона рівняння руху тіла має вигляд:

$$\vec{N} + \vec{F}_т + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}\ , \qquad (1)$$

де сила тяжіння $F_т = mg$.

В початковий момент $\vec{F}_2$=0, тіло знаходиться у стані спокою (рис.1.29). При t=0 проекція рівняння (1) на вісь Ох має вид: $-F_1 + F_{тер.} = 0$. Отже, сила тертя спокою у початковий момент дорівнює силі F_1 і її проекція на вісь Ох має знак «+»: $F_{тер} = F_1 = 2H$.

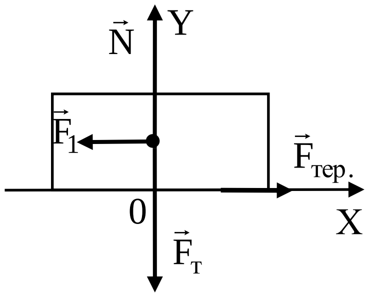


Рис.1.29

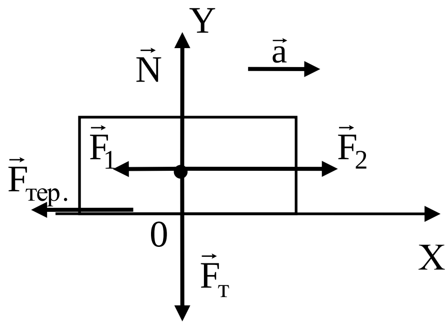


Рис.1.30

З урахуванням сили $\vec{F}_2$ до початку руху тіла рівняння (1) набуває вигляду:

$$-F_1 + F_{тер.x} + F_2 = 0 \quad \text{або} \quad -F_1 + F_{тер.x} + kt = 0. \qquad (2)$$

Із зростання модулю сили $\vec{F}_2$, рівнодійна сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, зменшується за модулем. Відповідно, зменшується сила тертя спокою. В момент t_1, коли $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|$ сила тертя обертається на нуль. Момент часу t_1 знаходимо за умовою: $F_1=F_2=0{,}1t_1$. Звідси отримуємо $t_1=\frac{2}{0{,}1}=20c$.

В момент часу t_1 внаслідок подальшого зростання сили F_2 рівнодійна $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ змінює напрям. Відповідно змінюється напрям дії сили тертя і знак її проекції $F_{тер.x}$ на вісь 0X (рис.1.30). Модуль сили тертя спокою зростає внаслідок зростання сили $\vec{F}_2$ доти, доки в деякий момент часу t_2 сягає максимального значення сили тертя спокою:

$$F_{тер.} = \mu N = \mu mg = 0{,}1 \cdot 5 \cdot 9{,}8 = 4{,}9H \qquad (3)$$

Це значення дорівнює силі тертя ковзання, яка залишається незмінною в процесі руху тіла, тобто при $t > t_2$.

Момент t_2 визначаємо з рівняння (2) з урахуванням виразу (3):

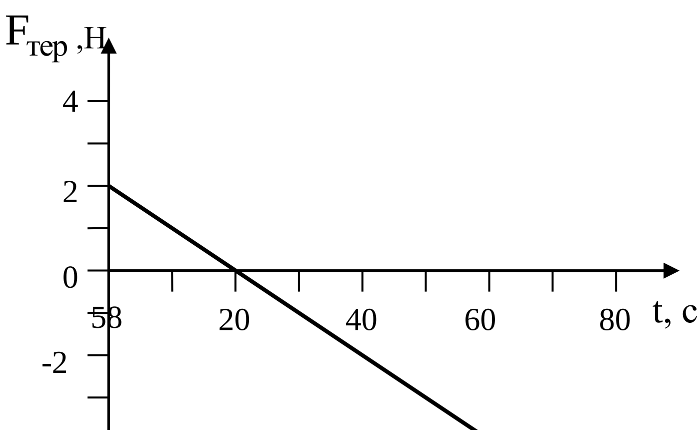
$$-F_1 - \mu mg + kt_2 = 0. \qquad (4)$$

Звідки знаходимо $t_2 = \frac{\mu mg + F_1}{k}$. $t_2=\frac{0{,}1 \cdot 5 \cdot 9{,}8 + 2}{0{,}1} = 69c$.

Користуючись вище отриманим, будуємо графік залежності сили тертя $F_{тер}$ від часу (рис.1.31).

З моменту часу t_2 тіло починає рухатися з прискоренням, яке може бути знайдено за допомогою закону руху тіла (1), записаного в проекції на вісь 0X:

$$-F_1 - \mu mg + kt = ma. \quad (5)$$



Визначимо залежність прискорення від часу. У рівнянні (5) представимо силу F_2 у тотожній формі $F_2 = kt_2 + k(t - t_2)$ та використаємо умову (4). Отримуємо:

$$k(t - t_2) = ma .$$

Звідси маємо:

$$a = \begin{cases} 0; & 0 < t < t_2 \\ \dfrac{k(t - t_2)}{m} = 0{,}02(t - t_2); & t > t_2 \end{cases} .$$

Приклад 1.14. На тіло маси m діє пропорційна часу сила $F = kt$.Знайти рівняння руху тіла за умови, що при t=0 швидкість тіла дорівнювала $\vec{v}_0$, а сила діє у напрямі початкового руху тіла.

Розв'язання.

$F = kt$
$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$
$m = const$
$x(t) - ?$

При $m = const$ рівняння II закону Ньютона має вигляд:

$$\vec{F} = m\vec{a} .$$

В проекції на вісь OX, яку направимо вздовж вектора початкової швидкості $\vec{v}_0$, $ma = kt$.

За означенням прискорення $a = \dfrac{dv}{dt}$. Тоді $m\dfrac{dv}{dt} = kt$, звідки отримуємо $dv = \dfrac{ktdt}{m}$. Інтеграл від обох частин останнього рівняння є елементарним:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \frac{k}{m}\int_{t_0}^{t} tdt .$$

Отже, отримуємо $v - v_0 = \dfrac{kt^2}{2m}$ та $v = v_0 + \dfrac{kt^2}{2m}$.

За означенням швидкості $v = \dfrac{dx}{dt}$. Звідси маємо $dx = v \cdot dt = \left(v_0 + \dfrac{kt^2}{2m} \right) dt$.

Виконуючи інтегрування знаходимо закон руху тіла:

$$x = \int_{t_0}^{t} vdt = \int_{0}^{t} \left(v_0 + \frac{kt^2}{2m} \right) dt = v_0 t + \frac{kt^3}{6m} .$$

Відповідь: $x = v_0 t + \dfrac{kt^3}{6m}$.

Розглянемо, як впливає урахування різних факторів на характер та результат руху тіла на прикладі руху тіла вздовж похилої площини.

Приклад 1.15. Два тіла сковзають без початкової швидкості $(v_0 = 0)$ з похилих площин 1 та 2 (рис.1.32), які мають однакову висоту h та різні кути нахилу α_1 та α_2 $(\alpha_2 > \alpha_1)$. Порівняти швидкості тіл наприкінці площин у випадку, коли дією сили тертя та опору повітря можна знехтувати.

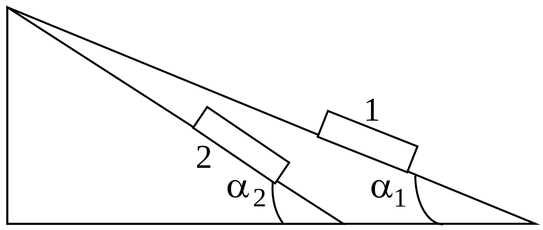


Рис.1.32

Задачу можна розв'язати різними способами: на основі рівняння динаміки; на основі теореми про кінетичну енергію та на основі закону збереження енергії.

Розглянемо розв'язок задачі на основі рівняння динаміки поступального руху (II закону Ньютона).

$h_1 = h_2 = h$
$\alpha_2 > \alpha_1$
$\frac{v_2}{v_1}$ - ?

Розв'язання.

Рух тіл є поступальним. Згідно з умовою задачі форма та розмір тіл не впливають на характер їх руху, тому достатньо описати рух однієї точки – центра мас тіла, вважаючи, що в ній зосереджена вся маса тіла, і до неї прикладені всі сили.

Сили, що діють на тіло, зображені на рис. 1.33. За відсутністю сил тертя та опору на тіло діють сила тяжіння $\vec{F}_T = m\vec{g}$, (m – маса тіла, $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння) та сила реакції опори $\vec{N}$. Рівняння руху тіла, яке записуємо на основі II закону Ньютона, має вигляд:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}. \quad (1)$$

У проекції на вісь ОХ маємо

$$mg\sin\alpha = ma.$$

Звідси знаходимо, що прискорення тіла дорівнює: $a = g\sin\alpha$.

З законів кінематики прямолінійного рівноприскореного руху $v^2 - v_0^2 = 2aS$, де $S = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ (2) – довжина шляху тіла, тобто довжина похилої площини.

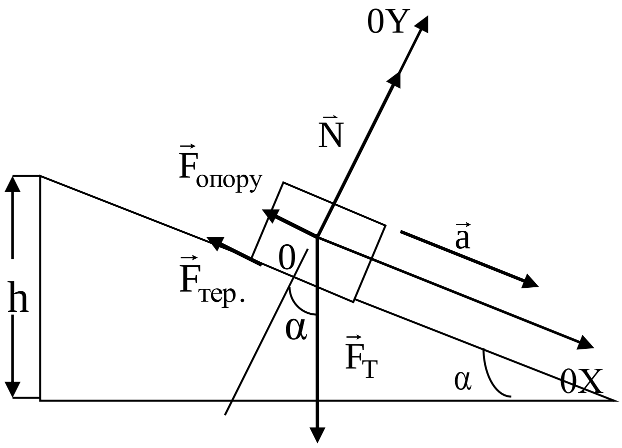


Рис.1.33

Остаточно, з урахуванням виразів для a та S, отримуємо

$$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2g\sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gh}.$$

Отже, за відсутністю дії сили тертя (точніше, нехтуючи дією цієї сили) кінцева швидкість тіла не залежить від кута нахилу похилої площини і визначається лише її висотою. Тому швидкості тіл, які сковзають з похилих площин однакової висоти та різних кутів нахилу, наприкінці руху будуть однаковими: $v_1 = v_2$.

Відповідь: $\frac{v_2}{v_1} == 1$.

Приклад 1.16. Розв'язати попередню задачу про рух тіла вздовж похилої площини (приклад 1.15) з урахуванням сили тертя, яка діє на тіло.

Розв'язання.

Оскільки за законом Амонтона – Кулона сила тертя не залежить від площі стичних поверхонь, як і у попередньому випадку, будемо вивчати рух центра мас тіла.

З урахуванням сили тертя $\vec{F}_{тер.}$ рівняння руху тіла набуває наступної форми:
$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

У проекції на вісь 0X (див.рис.1.33) маємо: $mg\sin\alpha - F_{тер.} = ma$; (2)

Відповідно, у проекції на вісь 0Y отримуємо: $N - mg\cos\alpha = 0$. (3)

Сила тертя дорівнює $F_{тер.} = \mu N$ (4)

Рівняння (2), (3) та (4) утворюють систему, з якої знаходимо
$$F_{тер.} = \mu mg\cos\alpha, \qquad (5)$$

та прискорення тіла $a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Відповідно швидкість тіла наприкінці руху дорівнює
$$v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2g(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)\frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gh(1 - \mu\mathrm{ctg}\alpha)}. \qquad (6)$$

Аналіз формули (6) приводить до висновку, що при незмінній висоті збільшення кута нахилу α похилої площини приводить то збільшення швидкості тіла, оскільки $\mathrm{ctg}\alpha$ зменшується із збільшенням кута (у межах першої координатної чверті). З фізичної точки зору це зрозуміло і пояснюється зменшенням шляху тіла та відповідним зменшенням витрат енергії на роботу проти сили тертя (вона, у свою чергу, також зменшується).

Відповідь: $\frac{v_2}{v_1} == \sqrt{\frac{1 - \mu\mathrm{ctg}\alpha_2}{1 - \mu\mathrm{ctg}\alpha_1}}$.

Приклад 1.17. Розв'язати задачу про рух тіла вздовж похилої площини (приклад 1.15) з урахуванням сили тертя та сили опору повітря, що діють на тіло. Силу опору вважати пропорційною швидкості руху тіла ($\vec{F}_{оп.} = -r\vec{v}$, де r – коефіцієнт опору, залежить від форми та розмірів тіла).

Розв'язання.

Рівняння руху тіла (див. рис.1.33, приклад 1.15) з урахуванням $\vec{F}_{оп.}$, приймає вигляд: $$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер.} + \vec{F}_{оп.}. \quad (1)$$
У проекції на вісь OX, користуючись отриманим вище виразом для сили тертя (див. формулу (5), приклад 1.14), маємо:
$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - rv.$$
Замінюючи прискорення a на $\frac{dv}{dt}$, записуємо диференціальне рівняння першого порядку відносно v із змінними, які розділяються:
$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v, \quad (2)$$
Переписуємо (2) у наступному вигляді $\dfrac{dv}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v} = dt$.

При використанні заміни $g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v = z$ попереднє рівняння приводить до $\frac{dz}{z} = -\frac{r}{m}dt$, елементарний розв'язок якого має наступний вигляд: $\ln z = \ln(g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v) = -\frac{r}{m}t + C_1$.
Сталу інтегрування знаходимо із початкової умови: v=0 при t =0:
$$C_1 = \ln(g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)).$$
Тоді $\ln\dfrac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = -\frac{r}{m}t$, звідки остаточно отримуємо
$$\frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{r}{m}v}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = e^{-\frac{r}{m}t}; \quad \to \quad v = \frac{mg}{r}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\left(1 - e^{-\frac{r}{m}t}\right) \quad (3).$$
Розв'язок (3) рівняння (2) указує на нелінійний характер залежності швидкості від часу. На відміну від двох попередніх випадків, рух тіла не є рівноприскореним. До того ж, швидкість при $t \to \infty$ асимптотично прямує до деякого граничного значення, яке є максимальним.

Зауважимо, що навіть при порівняно невеликих значеннях часу $t > \frac{m}{r}$, $e^{-\frac{r}{m}t} << 1$, наближено нехтуючи експонентою у формулі (3), для v_{max} отримуємо: $v = \frac{mg}{r}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. (4)

З (4) випливає, що при достатній довжині похилої площини на певних відрізках часу рух тіла стає практично рівномірним. При цьому величина швидкості залежить від коефіцієнтів тертя та опору.

Із збільшенням кута нахилу α значення $\sin\alpha$ зростає, а $\cos\alpha$ зменшується. Відповідно формулі (4) зростає швидкість руху тіла v_{max}.

Відповідь: $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{\sin\alpha_2 - \mu\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1}$.

Приклад 1.18. Тягарці однакової маси $m_1 = m_2 = 1$ кг з'єднані ниткою, яка перекинута через блок, закріплений наприкінці столу. Коефіцієнт тертя тягарця, що рухається по столу, μ=0,1. Визначити прискорення, з яким рухаються тягарці та сили натягу ниток. Блок вважати невагомим, нитки – нерозтяжними. Вагою нитки знехтувати.

Розв'язання.

$m_1 = 1$ кг
$m_2 = 1$ кг
g = 9,8м/с^2
μ=0,1
a - ? T_1-? T_2 - ?

Розглянемо сили, які діють на тіла, що входять у систему, та відповідний рух. Тіла рухаються поступально, тіло 1 – вниз, тіло 2 – вправо (див. рис.1.34). На тіло m_1 діє сила тяжіння $m_1\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}_1$. На тіло m_2 – сила тяжіння $m_2\vec{g}$, сила натягу нитки $\vec{T}_2$, сила тертя $\vec{F}_{тер}$ та сила реакції опори $\vec{N}$. На блок – сили натягу нитки $\vec{T}_1'$ і $\vec{T}_2'$. Згідно із третім законом Ньютона $\vec{T}_1 = -\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2 = -\vec{T}_2'$. Відповідно до умов задачі маємо знехтувати масами блоку і нитки. Тоді сили натягу задовольняють умові $T_1 = T_2$. На підставі другого закону Ньютона запишемо рівняння динаміки для кожного з тягарців: $m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$; $\vec{T}_2 + \vec{F}_{тр} = m_2\vec{a}$.

В проекції на напрямок руху відповідного тягарця попередні рівняння мають вигляд:

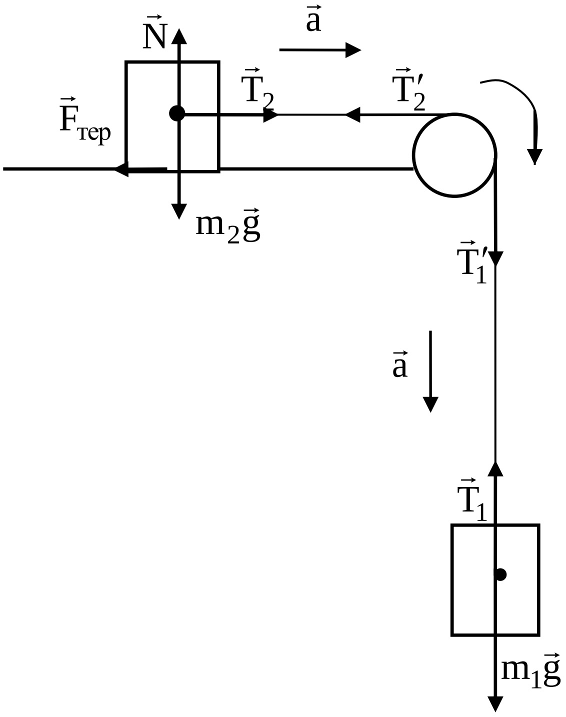


Рис.1.34

$$m_1 g - T_1 = m_1 a;$$
$$T_2 - F_{тр} = m_2 a.$$

З урахуванням виразу для сили тертя $F_{тр} = \mu N = \mu m_2 g$ та за умовою рівності сил натягу $T_1 = T_2 = T$ перепишемо ці рівняння у наступному вигляді:

$$m_1 g - T = m_1 a;$$
$$T - \mu m_2 g = m_2 a.$$

Складаючи рівняння, знаходимо величину прискорення а:

$$a = g\frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2}.$$

З рівняння руху першого тягарця отримуємо силу натягу:

$$T = m_1(g - a).$$

Чисельний розрахунок дає

$$a = 9{,}8 \cdot \frac{1 - 0{,}1 \cdot 1}{1 + 1}\ \text{м/с}^2 = 4{,}41\ \text{м/с}^2;\quad T = 5{,}4\ \text{Н}.$$

Приклад 1.19. Потяг, що складається з n однакових вагонів, рухається з місця з прискоренням a. Вагони між собою зчеплені пружинами, коефіцієнт пружності яких дорівнює k. Коефіцієнт тертя між колесами і рейками − μ, маса кожного вагону – m. Знайти силу тяги локомотива та деформацію (видовження) кожної пружини.

$m_1 = m_2 = \ldots = m$
n
μ
$k_1 = k_2 = \ldots = k$
$F_{тяги}$ - ? Δx_i - ?

Розв’язання.

Прискорення системи тіл (вагонів потягу) визначається дією зовнішніх сил: силою тяги $\vec{F}_{тяги}$, тертя $\vec{F}_{тер.}$, тяжіння $\vec{F}_{т}$ і силою реакції опори $\vec{N}$. Векторна сума внутрішніх сил пружності, які діють на окремі вагони, внаслідок третього закону Ньютона дорівнює нулю.

Рівняння другого закону Ньютона для всього потягу має вигляд:

$$\vec{F}_{тяги} + \vec{F}_{тер.} + \vec{F}_{т} + \vec{N} = nm\vec{a}, \qquad (1)$$

де $\vec{F}_{т} = n\vec{F}_{т1} = nm\vec{g}$; $\vec{F}_{тер.} = n\vec{F}_{тер.1}$; $\vec{N} = n\vec{N}_1$ - сумарні сили, що діють на всі n вагонів.

Запишемо рівняння (1) в проекціях на координатні вісі (див. рис.1.35) і додамо до системи рівнянь співвідношення для сили тертя:

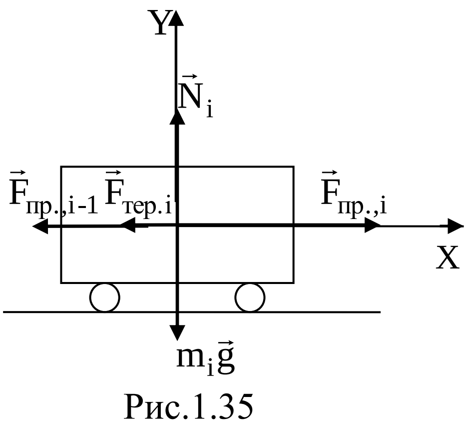


Рис.1.35

$$\begin{cases} F_{тяги} - nF_{тер.1} = nma; \\ -nmg + nN_1 = 0; \\ F_{тер.1} = \mu N_1. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що сила тертя, яка діє на один вагон, має дорівнювати

$$F_{тер.1} = \mu mg.$$

А сила тяги, відповідно, має вигляд: $F_{тяги} = nm(a + \mu g)$.   (2)

Для визначення видовження пружин розглянемо рівняння руху певної кількості (і) вагонів (відлік вагонів починаємо з кінця потягу). Роль зовнішньої сили, що надає прискорення вагонам, відіграє сила пружності $F_{пр.i} = k\Delta x_i$, яка діє на найближчий (з розглянутих) до голови потягу вагон з номером і. За другим законом

Ньютона рівняння руху цих вагонів в проекції на вісь 0X з урахуванням співвідношень для сил пружності і тертя має вигляд: $k\Delta x_i - i\mu mg = ima$. (3)
З (3) отримуємо вираз для видовження і-ої (відраховуючи з кінця потягу) пружини: $$\Delta x_i = \frac{im(a+\mu g)}{k}.$$

Відповідь: $F_{тяги} = nm(a+\mu g)$; $\Delta x_i = \dfrac{im(a+\mu g)}{k}$.

Приклад 1.20. На висоті h =30м над землею зависнув вертоліт масою M =1200 кг. З вертольоту опущені вірьовчані сходини, по яким спускається на землю людина масою m = 80кг. Яку довжину повинні мати сходини, щоб людині не довелось зістрибувати з них на землю? Масою сходин знехтувати.

M =1200 кг m = 80кг h =30м
L - ?

Розв’язання.

Розглянемо систему тіл, яку складають вертоліт, сходини та людина. Сили взаємодії між цими тілами є внутрішніми, їх сума дорівнює нулю. Оскільки сила тяжіння урівноважена силою реакції струменю повітря, яке відштовхують гвинти вертольоту, сума зовнішніх сил також дорівнює нулю. За теоремою про рух центру мас, прискорення системи також дорівнює нулю, і координати центру мас системи не будуть змінюватися, бо у момент t = 0 його швидкість $\vec{v}_c$ дорівнювала нулю.

Зв’яжемо систему координат з Землею, і вісь OY спрямуємо вздовж вертикалі. Тоді, до початку руху людини координата центру мас дорівнює
$$(y_c)_1 = h.$$
Наприкінці спуску людини координата центра приймає значення
$$(y_c)_2 = \frac{M \cdot L + m \cdot 0}{M+m} = \frac{M \cdot L}{M+m}.$$
Оскільки $(y_c)_1 = (y_c)_2$, звідси можна знайти довжину сходин: $L = \dfrac{(M+m)h}{M}$.

Чисельний розрахунок дає L = 32м. Відповідь: L = 32м.

Зауважимо, що задача може бути розв’язана також за допомогою закону збереження імпульсу (див. приклад 1.24, розд.3).

Задачі для самостійного розв’язування

1.36. Хлопчик масою m=40 кг стрибає з обриву висоти h =3,2 м зі швидкістю v=5 м/с в горизонтальному напрямку. Визначити а) імпульс сили F, що діє на хлопчика на протязі стрибка; б) зміну імпульсу $\Delta\vec{p}$ хлопчика.

1.37. На лобове скло автомобіля падають вертикально краплі дощу. Густина дощу $n = 5 \cdot 10^4$ крапель у кубічному метрі. Маса однієї краплі

$m_1 = 40$ мг, швидкість її падіння v = 4,5 м/с. Обчислити тиск P дощу на поверхню скла, якщо скло утворює кут α = 60^0 з горизонтом. Вважати, що краплі не відскакують від поверхні скла.

1.38. Вертоліт масою m = 3,2 т з ротором, діаметр якого d =16 м, „зависає” в повітрі. З якою швидкістю ротор відштовхує вертикально вниз струмінь повітря? Діаметр струменя вважати рівним діаметру ротору. Густина повітря за нормальними умовами ρ=1,29 кг/м^3.

1.39. Електровоз тягне два вагони, маси яких $m_1 = 60$ т, $m_1 = 40$ т, надаючи їм прискорення $a = 0{,}2$ м/с^2 Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}005$. З якими силами F_1 і F_2 розтягуються пружини буферів між вагоном та електровозом та між вагонами?

1.40. Визначити жорсткість k пружини, за допомогою якої по похилій площині рівномірно тягнуть тіло масою $m = 0{,}5$ кг, якщо вона розтягнулася на $\Delta x = 2$ см. Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}1$.

1.41. Яким має бути мінімальний коефіцієнт тертя між шинами коліс велосипеда і дорогою, щоб велосипедист міг рухатися вгору з прискоренням $a = 0{,}1$ м/с^2? Кут нахилу дороги $\alpha = 20^0$.

1.42. Тіло рухається з постійною швидкістю по горизонтальній поверхні під дією сили F. Коефіцієнт тертя тіла μ = 0,4. Який кут з горизонтом повинна утворювати ця сила, щоб її значення було мінімальним?

1.43. Яким повинен бути найменший уклін даху, щоб дощова вода з нього стікала якнайшвидше?

1.44. По покритому льодом схилу пагорбу, який утворює кут $\alpha = 30^0$ з горизонтом, пустили знизу уверх каміння, яке за час t =1,6с проходить відстань s = 12м, після чого починає сковзати униз. Визначити час спуску каміння та коефіцієнт тертя.

1.45. Яку силу тяги розвиває автомобіль, якщо він рухається з постійною швидкістю під гору, уклін якої складає 1м на кожні 50м шляху. Маса автомобіля m = 1т, сила тертя дорівнює 0,1 від сили тяжіння автомобіля.

1.46. Верьовка з двома однаковими за масою m вантажами перекинута через блок, закріплений на вершині похилої площини (рис.1.37). Коефіцієнт тертя між вантажами і похилою площиною дорівнює μ, кут нахилу похилої площини – α . Визначити силу тиску на вісь блока. Тертям в осі блока і масою блока знехтувати.

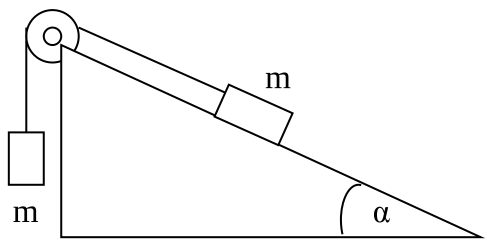


Рис.1.36

1.47. На гладкій горизонтальній поверхні лежить брусок масою M=2кг, на якому знаходиться інший брусок масою m=1кг.

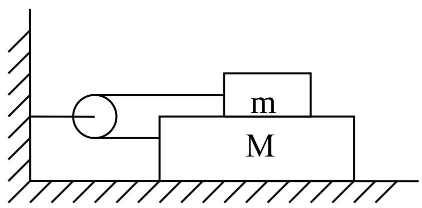


Рис.1.37

Обидва бруски з’єднані ниткою, яка перекинута через невагомий блок (рис.1.37).
Яку силу необхідно прикласти до нижнього бруску, щоб він почав рухатися з постійним прискоренням a=g/2?

1.48. З яким максимальним прискоренням можна піднімати на сталевому дроті діаметром $d = 2{,}4$ мм вантаж масою $m = 350$ кг? Межа міцності сталі $\sigma_м = 785$ МПа.

1.49. На стрижні довжиною $l = 1{,}2$ м і діаметром $d = 0{,}2$ см, який закріплений на стелі підйомника, висить вантаж масою $m = 2{,}0$ т. Підйомник рухається вгору з прискоренням $a = 1 м/с^2$. Чому дорівнює модуль пружності (модуль Юнга) матеріалу стрижня, якщо довжина стрижня збільшилась на $\Delta l = 1{,}2$ мм?

1.50. Вантажний автомобіль взяв на буксир легковий автомобіль масою $m = 2{,}0$ т і , рухаючись рівноприскорено (початкова швидкість дорівнює нулю) за час t =40с проїхав шлях s = 320м. Знайти здовження троса, який з’єднує автомобілі, якщо коефіцієнт пружності k = 2,0 МН/м. Тертям та силою опору знехтувати.

1.51. Визначити коефіцієнт жорсткості пружини, якщо відомо, що на Луні під дією тіла масою $m = 6$ кг її довжина збільшилася б на $\Delta l = 4$ см. Маса Луни в 81 разів менша за масу Землі, радіус Луни в 3,6 рази менший за радіус Землі.

1.52. За значеннями гравітаційної сталої, відстані від Землі до Сонця та періоду обертання Землі навколо Сонця визначити масу Сонця.

1.53. На якій відстані від Землі знаходиться точка, в якій рівнодійна гравітаційна сила, що діє на космічний корабель з боку Землі і Місяця дорівнює нулю?

2.2. Динаміка криволінійного руху

Методичні вказівки. При розв’язуванні задач даного розділу перш за все необхідно визначити, які сили діють на тіло і які саме з них призводять до криволінійного руху, тобто надають тілу нормальне (доцентрове) прискорення. Далі записують рівняння руху у векторній формі, а потім у проекціях на координатні осі. Осі координат зручно вибрати так, щоб вісь 0X була направлена вздовж радіуса кривизни і співпадала з напрямом нормального прискорення, вісь 0Y була спрямована перпендикулярно до неї. Отриману систему рівнянь, у разі необхідності, доповнюють виразами для сил, що діють на тіла або кінематичними співвідношеннями і знаходять невідомі величини.

Приклади розв’язання задач

Приклад 1.21. Якою повинна бути швидкість руху мотоцикліста вздовж горизонтального кола внутрішньої поверхні вертикального циліндру радіусу R = 5м, щоб він не впав униз? Коефіцієнт тертя дорівнює μ=0,4.

$\mu = 0{,}4$ $R = 5м$
v - ?

Розв'язання.

На мотоцикліста в процесі руху діють сили тяжіння $\vec{F}_т = m\vec{g}$; тертя $\vec{F}_{тер.}$ і реакції $\vec{N}$. Остання надає мотоциклісту нормальне прискорення $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}$, яке спрямоване до осі циліндру вздовж його радіусу (див. рис.1.38).

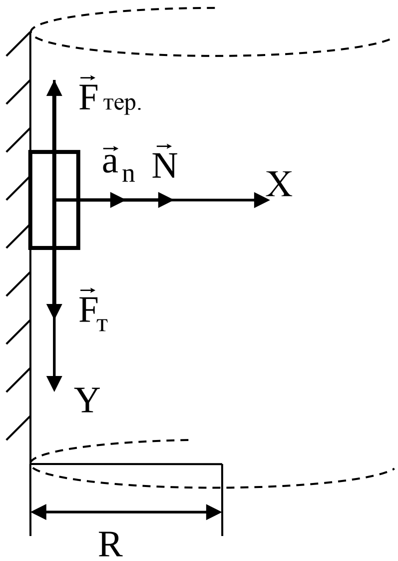


Рис.1.38

Рівняння динаміки, яке описує рух мотоцикліста, має вигляд:

$$\vec{F}_{тер.} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_n.$$

У проекціях на вісі OX і OY, з урахуванням співвідношень для нормального прискорення та сили тертя ковзання, отримуємо систему трьох рівнянь:

$$N = \frac{mv^2}{R}; \quad mg - F_{тер.} = 0; \quad F_{тер.} = \mu N.$$

Звідки випливає: $N = \frac{mg}{\mu}$ і $v = \sqrt{\frac{NR}{m}} = \sqrt{\frac{gR}{\mu}}$.

Чисельний розрахунок за отриманими формулами дає $v = 11{,}1 м/с$.

Відповідь: $v = 11{,}1 м/с$.

Приклад 1.22. Математичний маятник масою m та довжиною нитки l обертається в горизонтальній площині з періодом τ (рис. 1.39). Визначити силу натягу нитки T і кут α, який вона утворює з вертикаллю.

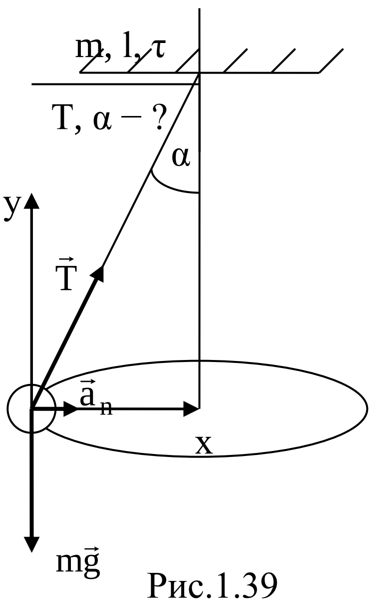


Рис.1.39

Розв'язання.

На маятник діють дві сили: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}$. Рівняння другого закону Ньютона у векторній формі має наступний вигляд:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

У проекціях на осі координат рівняння породжує систему:

$$ma_n = T\sin\alpha \qquad (1)$$

$$0 = -mg + T\cos\alpha . \qquad (2)$$

Нормальне (доцентрове) прискорення визначається за формулою:
$a_n = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R$, (3)

де кутова швидкість маятника

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \ (4), \text{ а } \quad R = l\sin\alpha . \qquad (5)$$

Із співвідношень (1) - (5) знаходимо

$$T = \frac{4\pi^2 ml}{\tau^2} . \qquad (6)$$

Користуючись (2) з урахуванням (6) отримуємо: $\cos\alpha = \dfrac{g\tau^2}{4\pi^2 l}$.

Відповідь: $T = \dfrac{4\pi^2 ml}{\tau^2}$; $\alpha = \arccos\dfrac{g\tau^2}{4\pi^2 l}$.

Приклад 1.23. Ковзаняр на льодовій доріжці намагається пройти віраж якнайближче до внутрішньої бровки. Велосипедист на велотреку проходить віраж якомога далі від внутрішньої бровки. Як пояснити цю різницю у тактиці конькобіжця й велосипедиста?

Розв’язання.

1. За умови, що величина швидкості ковзаняра не змінюється, векторна сума сил, що діють у напрямі руху, дорівнює нулю. Тоді, за другим законом Ньютона, рівняння руху ковзаняра має вигляд:

$$\vec{F}_т + \vec{N} + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}_n , \quad (1)$$

де $F_т = mg$ – сила тяжіння; N – реакція опори; $F_{тер.} = \mu N$ – сила тертя;

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$ – нормальне (доцентрове) прискорення (рис. 1.40,а).

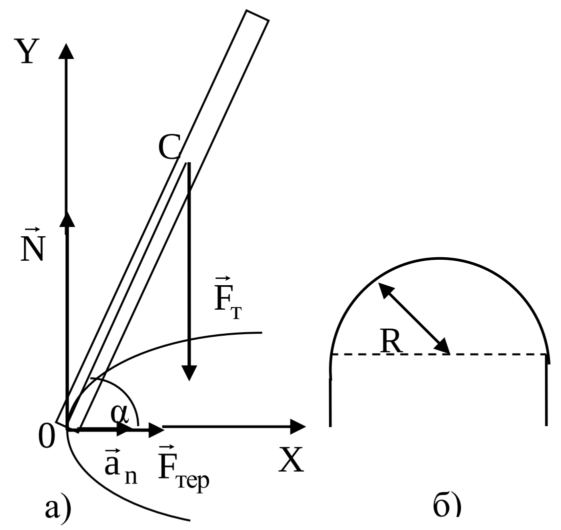


Рис.1.40.

Оскільки ковзаняр не має прискорення у вертикальному напрямі, рівняння (1) у проекції на вісь OY породжує: $N - mg = 0$. Відповідно сила тертя дорівнює $F_{тер.} = \mu mg$.

Проектуючи рівняння (1) на вісь OX отримуємо:

$$F_{тер.} = ma_n , \quad \mu mg = \frac{mv^2}{R} . \qquad (2)$$

Отже, оскільки льодова доріжка не

має нахилу, ковзаняру на віражі, нормальне прискорення надає сила тертя. Користуючись (2), знаходимо $v = \sqrt{\mu g R}$. На повороті ковзаняр рухається вздовж півкола, довжина якого дорівнює $s = \pi R$ (рис.2.30,б). Відповідно, час, який він витрачає на поворот, буде дорівнювати

$$t = \frac{\pi R}{v} = \pi\sqrt{\frac{R}{mg}}.$$

Чим більше радіус R, тим більший час витрачає ковзаняр. Тому він намагається пройти поворот якнайближче до внутрішньої бровки.

Кут нахилу ковзаняра на віражі можна визначити за допомогою співвідношення

$$tg\alpha = \frac{F_{тер.}}{N} = \frac{\mu mg}{mg} = \mu.$$

2. Розглянемо тепер рух велосипедиста. Велотрек має нахил, кут α якого збільшується із збільшенням відстані від внутрішнього краю. При незмінній величині швидкості рівняння руху велосипедиста на повороті має вид аналогічний рівнянню (1) (рис. 1.41):

$$\vec{F}_т + \vec{N} + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}_n. \qquad (3)$$

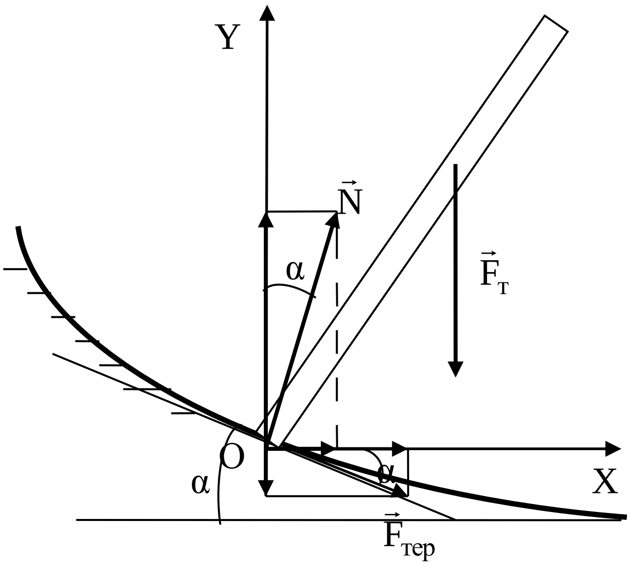


Рис.1.41

В проекціях на вісі 0X і 0Y (3) призводить до:

$$F_{тер}\cos\alpha + N\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}; \qquad (4)$$

$$N\cos\alpha - F_{тер}\sin\alpha - mg = 0. \quad (5)$$

Таким чином, велосипедисту, який проходить віраж, нормальне прискорення надає сума горизонтальних складових сили тертя $\vec{F}_{тер.}$ і сили реакції опори $\vec{N}$.

Із рівняння (5), користуючись $F_{тер.} = \mu N$, знаходимо силу реакції $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$. З урахуванням отриманого рівняння (4) набуває форми:

$$\frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{mv^2}{R}.$$

Звідки для максимальної швидкості, з якою може рухатися велосипедист, отримуємо:

$$v=\sqrt{gR\cdot\frac{\mu\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}}=\sqrt{gR\cdot\frac{\mu+tg\alpha}{1-\mu tg\alpha}}.$$

Час, необхідний велосипедисту для проходження повороту (півкола радіусу R), дорівнює

$$t=\frac{\pi R}{v}==\pi\sqrt{\frac{R}{g}\cdot\frac{1-\mu tg\alpha}{\mu+tg\alpha}}.$$

Коли велосипедист проходить поворот по велотреку якомога далі від бровки зростає не тільки радіус R, але й кут нахилу α (відповідно, зростає $tg\alpha$), що таким чином приводить до зменшення часу проходження повороту.

Задачі для самостійного розв'язування.

1.54. Визначити, при якому радіусі орбіти R супутник може рухатися в площині екватора так, щоб весь час знаходитися "зависати" над тією самою точкою поверхні Землі.

1.55. Конічний маятник на нитці довжиною 1,47м рівномірно обертається по колу в горизонтальній площині. Визначити період обертання маятника, якщо кут, утворений ниткою з вертикаллю дорівнює $\alpha = 60^{\circ}$.

1.56. Людина стоїть на краю круглої горизонтальної платформи радіусом R= 3м. Скільки обертів за хвилину навколо вертикальної осі повинна робити платформа, щоб людина не могла утриматися на ній, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ=0,25?

1.57. Каміння масою m = 0,5кг прив'язали до мотузки довжиною l=0,5м і розкрутили так, що сила натягу мотузки у найнижчій точці траєкторії T=45Н. На яку висоту підійметься каміння, якщо мотузка обірветься в момент, коли швидкість направлена вертикально уверх?

1.58. Трамвай масою m = 4,5 т йде по закругленню радіусом R = 110м зі швидкістю v=10 км/год. Визначити силу бокового тиску коліс на рейки.

1.59. Поїзд рухається по закругленню радіусом 765м зі швидкістю v=72км/год. Наскільки зовнішня рейка повинна бути вищою за внутрішню, якщо відстань між рейками дорівнює l=1,5м?

1.60. При виході з піке винищувач рухається зі швидкістю 720км/год вздовж дуги радіусом 400м. Яке максимальне перевантаження відчуває пілот (перевантаження визначається відношенням ваги пілота до його сили тяжіння)?

1.61. Визначити силу натягу нитки математичного маятника масою m і довжиною L, якщо в момент, коли нитка утворює кут α з вертикаллю, його швидкість дорівнює v.

1.62. Кулька з масою m рухається з постійною кутовою швидкістю ω по внутрішній поверхні

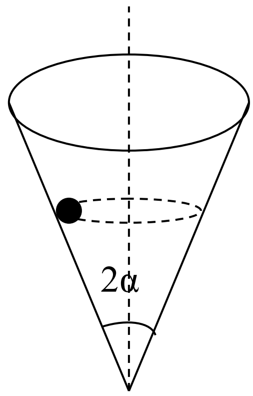


Рис.1.42

перевернутого конуса (рис.1.42) по горизонтальному колу. Кут при вершині конуса 2α. Знайти радіус кола. Тертям знехтувати.

1.63. На внутрішній поверхні перевернутого конуса з кутом 2α при вершині на висоті h знаходиться тіло. При якій мінімальній швидкості обертання конуса відносно вертикальної осі тіло залишиться нерухомим відносно поверхні конуса?

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. Два тіла однакової маси рухаються рівномірно перше – по горизонтальній поверхні; друге –по похилій площині, яка утворює з горизонтом кут $\alpha=60^0$. Коефіцієнт тертя μ в обох випадках однаковий. Сили тертя, що діють на тіла задовольняють співвідношенню

1. $F_1 = F_2$ 2. $F_1 = 2F_2$ 3. $F_1 = 0{,}5F_2$ 4. $F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}F_2$

2. За третім законом Ньютона натяг каната буде найбільшим, якщо
   1. канат розтягують із протилежних кінців дві людини із силами $F_1 = F_2$
   2. один кінець закріплений, із другого тягнуть із силою F_1
   3. один кінець закріплений, із другого тягнуть із силою $2F_1$

3. Внаслідок взаємодії двох тіл швидкість першого тіла збільшилась у 3 рази за швидкість другого тіла. Співвідношення між масами тіл має вид

1. $m_1 = 3m_2$ 2. $m_1 = \frac{1}{3}m_2$ 3. $m_1 = 0{,}3m_2$ 4. $m_1 = m_2$

4. Одиниця вимірювання імпульсу у Міжнародній системі одиниць (СІ) вимірюється у

1. $кг \cdot м/с$ 2. $кг \cdot м/с^2$ 3. $кг \cdot м^2/с^2$ 4. $кг \cdot м^2/с^3$

5. Одиниця вимірювання сили, виражена через основні одиниці системи СІ:

1. $кг \cdot м/с$ 2. $кг \cdot м/с^2$ 3. $кг \cdot м^2/с^2$ 4. $кг \cdot м^2/с^3$

6. За законом Гука при заміні стального дроту дротом тієї самої довжини, але удвічі більшого діаметру (за умовою незмінного навантаження)

А) абсолютна деформація розтягу Δl; Б) відносна деформація розтягу $\frac{\Delta l}{l}$

1.не зміниться 2.збільшиться у 2рази
3.зменшиться у 2рази 4.зменшиться у 4рази

7. За законом Гука при заміні стального дроту дротом того самого перерізу, але удвічі більшої довжини з постійним навантаженням

А) абсолютна деформація розтягу Δl; Б) відносна деформація розтягу $\frac{\Delta l}{l}$

1.не зміниться 2.збільшиться у 2рази
3.зменшиться у 2рази 4.зменшиться у 4рази

8. Щоб пасажир у ліфті знаходився у стані невагомості, ліфт повинен:
   1. підійматися вгору рівномірно 2. опускатися вниз рівномірно
   3. підійматися з прискоренням g=9,8м/с^2 4. опускатися з прискоренням g=9,8м/с^2

9. Щоб вага пасажира у ліфті зменшилась удвічі, ліфт повинен:
   1. підійматися вгору рівномірно 2. опускатися з прискоренням g=4,9м/с^2

3. опускатися з прискоренням g=9,8м/с^2 4. підійматися з прискоренням g=4,9м/с^2

10. Характер руху окремої матеріальної точки, яка належить до системи матеріальних точок, визначається дією

1. рівнодіючої зовнішніх сил, що діють на систему
2. рівнодіючої зовнішніх сил, що діють на матеріальну точку
3. рівнодіючої усіх сил, що діють на матеріальну точку
4. рівнодіючої внутрішніх сил, що діють на матеріальну точку

11. Характер руху системи матеріальних точок як цілого визначається дією

1. рівнодіючої зовнішніх сил, що діють на систему
2. рівнодіючої усіх сил, що діють на матеріальні точки системи;
3. рівнодіючої внутрішніх сил, що діють у системі

12. Сума внутрішніх сил замкненої системи

1.залежить від системи відліку 2. дорівнює нулю 3. залежить від природи сил

13. Центр мас замкненої системи тіл

1. покоїться або рухається рівномірно прямолінійно
2. рухається рівномірно криволінійно
3. рухається з постійним прискоренням
4. серед наведених немає вірної відповіді

14. Сумарний імпульс системи частинок

1. дорівнює нулю
2. є завжди більшим нуля
3. залежить від характеру руху частинок
4. дорівнює добутку швидкості $\vec{v}_c$ центра мас на масу системи

15. Якщо сумарний імпульс системи частинок дорівнює нулю, центр мас цієї системи

1. рухається рівномірно прямолінійно 2. рухається рівномірно криволінійно
3. рухається з постійним прискоренням 4. залишається нерухомим

16. Система тіл, що взаємодіють між собою, знаходиться у полі тяжіння поблизу поверхні Землі. Якщо знехтувати опором повітря, центр мас цієї системи тіл

1. залишається нерухомим
2. рухається рівномірно прямолінійно
3. рухається з прискоренням $\vec{g}$

17. У загальному випадку рівняння руху

А) системи матеріальних точок як цілого

Б) рівняння руху окремої матеріальної точки системи

має вигляд 1. $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(i)} + \vec{F}^{(e)}$ 2. $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(i)}$ 3. $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$

($\vec{F}^{(i)}$ і $\vec{F}^{(e)}$- відповідно рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на матеріальну точку)

18. Рух тіла змінної маси може бути описаний за допомогою рівняння:

1. $m\vec{a} = \vec{F}$ 2. $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ 3. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x$

19. На рисунку А) представлені напрямки векторів швидкості $\vec{v}$ і прискорення $\vec{a}$ м'яча.
Напрям вектору рівнодійної всіх сил, що діють на м'яч, на рис. Б) збігається з напрямом вектору

1. 1 2. 2; 3. 3; 4. 4; 5. 5.

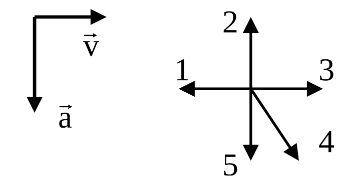


Рис. А) Рис. Б)

20. Зміна імпульсу тіла $\Delta\vec{p}$ дорівнює

1. $m\vec{a}$ 2. $\frac{mv^2}{2}$ 3. mgh 4. $\vec{F}\Delta t$

21. Тіло рухається прямолінійно. Залежність його модуля швидкості від часу представлена на рисунку А).

На рисунку Б) графік залежності модуля рівнодійної сил, що діють на тіло, від часу надає лінія

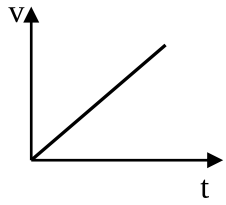


Рис.А)

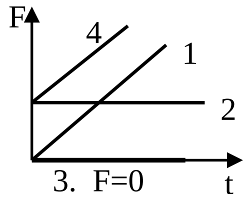


Рис.Б)

1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

22. Вантаж, підвішений на мотузці до повітряної кулі, підіймається рівномірно уверх із швидкістю $\vec{v}$. Якщо мотузку перерізати, рух вантажу (нехтуючи опором повітря) буде

1. вільним падінням без початкової швидкості;
2. рівномірним;
3. вільним падінням з початковою швидкістю $\vec{v}$, спрямованою уверх;
4. падінням з початковою швидкістю $\vec{v}$, спрямованою униз.

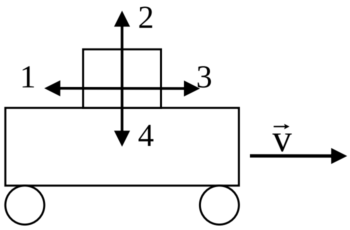
23. Сила земного тяжіння є у 16 разів меншою, ніж у поверхні Землі, на відстані від поверхні Землі (R – радіус Землі)

1. 2 R 2. 3 R 3. 8 R 4. 9 R

24. У поверхні Землі на тіло діє сила тяжіння, яка дорівнює 72 Н. На відстані 2R від поверхні Землі (R –радіус Землі) на тіло буде діяти сила

1. 36 Н 2. 12 Н 3. 18 Н 4. 8 Н 5. 4 Н

25. Брусок лежить нерухомо на горизонтальній платформі, що рухається рівномірно прямолінійно із швидкістю $\vec{v}$. Вектор сили тертя $\vec{F}_{тер}$, що діє на брусок спрямований уздовж напряму



1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

26. Тіло маси m кинули під кутом 30^0 до горизонту з початковою швидкістю $\vec{v}_0$. У момент падіння модуль зміни імпульсу тіла $|\Delta\vec{p}|$ складає

1. mv_0 2. $2mv_0\sin\alpha$ 3. $2mv_0$ 4. $2mv_0\cos\alpha$ 5. $\frac{1}{2}mv_0$

27. Тіло маси m кинули під кутом α до горизонту із швидкістю $\vec{v}_0$. Через проміжок часу τ тіло впало на землю. Якщо знехтувати опором повітря,

А) зміна імпульсу тіла $\Delta\vec{p}$ за час польоту

Б) середній імпульс $\langle\vec{p}\rangle$ тіла за час польоту τ становить

$2mv_0$ 2. $m\vec{g}\tau$ 3. $-2mv_0$ 4. $m\vec{v}_0 + \frac{m\vec{g}\tau}{2}$

28. Мірою інертних властивостей при поступальному русі тіла є його

1. маса 2. імпульс 3. момент інерції 4. прискорення 5. кінетична енергія

29. Навантажена та порожня вантажівки на момент відключення двигуна рухалися з однаковою швидкістю. Коефіцієнт тертя однаковий, опір повітря не враховувати. При відключених гальмах гальмівний шлях

1.більший у першої вантажівки 2.більший у другої вантажівки 3.є однаковим

30. На підлозі стоїть на легких колесах дошка. Людина, що стоїть на одному кінці дошки, переходить на другий її кінець. При цьому відносно підлоги центр мас системи

1. не змінює свого положення
2. зміщується у напрямку руху людини

3. зміщується у протилежному руху людини напрямку

31. Під дією сили F=20 Н тіло рухається за законом $s = \left(6 - 3t + t^2\right)$м. Маса тіла дорівнює

1. 20кг 2. 10кг 3. 2кг 4. 5кг

32. Тіло масою m=0,5 кг рухається прямолінійно за законом $x = \left(5 - 2t^3\right)$м. Сила, яка діє на тіло наприкінці першої секунди, дорівнює

1. -6 Н 2. 12 Н 3. –12 Н 4. -3 Н

33. Матеріальна точка маси m=100 г рухається прямолінійно за законом $x = \left(3 + 0,05t^3\right)$м. У момент часу $t = 2$с імпульс точки дорівнює

1. 0, 06 $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ 2. 0, 03 $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ 3. 0, 6 $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ 4. 0, 15 $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$

34. За будь-який проміжок часу довжиною у 0,1с модуль імпульсу тіла зростає на 6$\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$. При цьому модуль рівнодійної усіх сил, що діють на тіло, дорівнює

1. 0,6 Н 2. 6 Н 3. 60 Н 4. 0,017 Н

35. Тіло кинуте зі швидкістю 20 м/с під кутом 60^0 до горизонту. Відношення модуля імпульсу тіла у початковий момент до модуля імпульсу у верхній точці траєкторії становить

1. 1 2. 1,3 3. 1,7 4. 2

36. Гальмівний шлях автомобіля , який рухається із швидкістю 60 км/год., складає 10м. При швидкості руху 90 км/год. гальмівний шлях автомобіля становитиме

1. 15м 2. 20м 3. 22,5м 4. 45м

37. Швидкість руху тіла масою 0,5кг змінюється за законом $v = \left(5 + 3t^2\right)$м/с. Сила, що діє на тіло у момент часу t = 2 с, дорівнює

1. 3 Н 2. 6 Н 3. 9 Н 4. 12 Н

Розділ 3. Закони збереження у механіці.

Тема: Закон збереження імпульсу. Механічна робота. Потужність. Кінетична енергія, зв’язок із роботою. Консервативні сили і потенціальна енергія. Закон збереження енергії у механіці. Закони збереження при абсолютно пружному та абсолютно непружному ударах.

Закони збереження у механіці є фундаментальними законами природи, які відображують основні властивості простору і часу, а саме – однорідність і ізотропність простору (закони збереження імпульсу і моменту імпульсу), однорідність часу (закон збереження енергії). Ці закони можуть бути отримані шляхом інтегрування динамічних рівнянь, тому їх називають першими інтегралами руху. Використання законів збереження дозволяє спростити отримання інформації про кінцевий стан системи за початковими характеристиками стану без розгляду фізичних процесів, які відбуваються між ними.

Основні поняття і формули

● Імпульсом або кількістю руху тіла називають величину $\vec{p} = m\vec{v}$.

● Для замкнутої системи тіл виконується **закон збереження імпульсу**: повний імпульс замкнутої системи тіл є величина стала, тобто

$$\sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j^{(e)} = 0; \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const}, \qquad (1.25)$$

де $\sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j^{(e)}$ – рівнодійна усіх зовнішніх сил, n – кількість тіл системи.

● З використанням поняття центру мас системи тіл закон збереження імпульсу записується у наступній формі:

$$\sum_{j=1}^{r} \vec{F}_j^{(e)} = 0; \qquad M\vec{v}_c = \text{const},$$

де M – сумарна маса системи, $\vec{v}_c$ – швидкість центру мас.

● Закон збереження імпульсу дозволяє отримати рівняння динаміки у випадку, коли маса системи змінюється в процесі руху (рівняння Мещерського):

$$m\frac{dv}{dt} = F - \mu u, \qquad (1.26)$$

де m – змінна маса системи, $\mu = \frac{dm}{dt}$ – швидкість зміни маси, u – відносна швидкість частин, які відділяються або приєднуються до тіла змінної маси, μu – реактивна сила.

● Елементарна робота визначається скалярним добутком сили $\vec{F}$ на переміщення $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos\left(\vec{F},^\wedge d\vec{r}\right) = F_s ds,$$

де ds –модуль елементарного переміщення $d\vec{r}$, $F_s = F\cos\alpha$ – проекція сили на напрям елементарного переміщення,

● Робота змінної сили на шляху s може бути знайдена інтегруванням виразу (4.4) для елементарної роботи

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_s F_s ds. \qquad (1.27)$$

У випадку постійної сили, що діє під кутом α до переміщення, вираз (1.27) спрощується:

$$A = Fs\cos\alpha. \qquad (1.27а)$$

● Миттєва потужність характеризує швидкість виконання роботи:

$$P=\frac{dA}{dt}=\vec{F}\vec{v}=Fv\cos\alpha, \qquad (1.28)$$

де α – кут між векторами сили і швидкості.

● Кінетична енергія тіла є скалярною мірою його кількості руху. Кінетична енергія тіла маси m при поступальному русі із швидкістю $\vec{v}$ дорівнює:

$$W_k=\frac{mv^2}{2}. \qquad (1.29)$$

Кінетична енергія – суттєво додатна адитивна величина, а її значення залежить від вибору системи відліку, оскільки відносною величиною є швидкість руху тіла.

Приріст кінетичної енергії тіла (теорема про кінетичну енергію)

$$W_{k2}-W_{k1}=A, \qquad (1.30)$$

де A – **робота** рівнодійної **всіх сил**, що діють на частинку.

● **Консервативні сили** – сили, робота яких не залежить від форми шляху, а визначається тільки початковою і кінцевою конфігурацією тіл системи (сили гравітаційної взаємодії, сила пружності, кулонівська сила).

● Робота консервативної сили вздовж замкненої траєкторії дорівнює нулю:

$$\oint_{(L)}\vec{F}d\vec{r}=0,$$

де $\oint_{(L)}$ – криволінійний інтеграл уздовж замкненої кривої L, яка співпадає з траєкторією.

● У випадку дії консервативних сил стан системи можна охарактеризувати потенціальною енергією.

Потенціальна енергія системи в деякому стані дорівнює роботі консервативних сил по переводу системи із зазначеного стану на нульовий рівень (початок відліку):

$$W_{p1}=A_{10}.$$

Зв'язок між роботою консервативних сил та потенціальною енергією системи (тіла) у початковому та кінцевому станах

$$A=-(W_{p2}-W_{p1})=W_{p1}-W_{p2}. \qquad (1.31)$$

● Зв'язок між консервативною силою і потенціальною енергією має вигляд:

$$\vec{F}=-\mathrm{grad}W_p, \qquad (1.32)$$

де $\mathrm{grad}W_p\equiv\nabla W_p=\frac{\partial W_p}{\partial x}+\frac{\partial W_p}{\partial y}+\frac{\partial W_p}{\partial z}$ – градієнт потенціальної енергії.

Знак «–» у формулі (1.33) вказує на те, що вектор сили завжди має напрям, протилежний напряму найшвидшого збільшення потенціальної енергії у просторі.

● Потенціальна енергія тіла в однорідному полі сили тяжіння Землі

$$W_p = mgh, \qquad (1.33)$$

де g – прискорення вільного падіння, h– відстань між тілом і поверхнею Землі. За початок відліку потенціальної енергії, тобто її нульовий рівень, прийнята поверхня Землі.

● Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох тіл

$$W_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \qquad (1.34)$$

Знак „–” відповідає тому, що потенціальна енергія двох взаємодіючих тіл дорівнює нулю при $r = \infty$ і зменшується при їх наближенні (тобто за початок відліку прийнята потенціальна енергія $W_{p_0} = 0$ при $r = \infty$.

● Потенціальна енергія при пружній деформації тіла (пружини)

$$W_p = \frac{kx^2}{2}. \qquad (1.35)$$

● **Закон збереження механічної енергії** для консервативної системи: повна механічна енергія замкненої системи, в якій діють тільки консервативні сили, є величина стала.

$$W_k + W_p = const.$$

Повною механічною енергією називають суму кінетичної і потенціальної енергій.

● Зміна повної механічної енергії системи дорівнює сумі роботи внутрішніх дисипативних сил, що діють у системі, та роботи всіх зовнішніх сил, які діють на систему

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{12}^{дис} + A_{12}^{зовн}. \qquad (1.36)$$

Дисипативні сили – це сили, повна робота яких у системі завжди є від’ємною величиною (сила тертя, сила опору середовища).

● Застосування законів збереження енергії і імпульсу до прямого центрального удару двох куль.

1. При **абсолютно непружному ударі,** при якому деформації, виниклі в тілах момент удару, після удару повністю зберігаються, виконується закон збереження імпульсу. Частина механічної енергії системи переходить у внутрішню.

а) Швидкість v' абсолютно непружних куль після удару:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad (1.37)$$

де m_1 і m_2 – маси куль, v_1 і v_2 – проекції швидкостей куль на вибраний напрямок, який збігається з напрямом руху однієї з куль до удару.

б) Робота (приріст внутрішньої енергії) при ударі абсолютно непружних куль дорівнює утраті кінетичної енергії:

$$A = -\Delta W_k = (W_{k1} + W_{k2}) - W_k, \tag{1.38}$$

де $(W_{k1} + W_{k2}) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$ – кінетична енергія кульок перед непружним ударом; $W_k = \frac{(m_1 + m_2)v'^2}{2}$ – механічна енергія цієї системи після удару.

2. При ударі **абсолютно пружних** куль зберігаються імпульс і кінетична енергія системи. Проекції швидкості куль після удару на виділений напрямок, який збігається з напрямом руху однієї з куль до удару:

$$v_1' = -v_1 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \qquad v_2' = -v_2 + 2\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.39}$$

Абсолютно пружний удар - удар, після якого тіла повністю встановлюють свою початкову форму та розміри.

3. Можуть виконуватися також частково пружні (непружні) зіткнення. Коли зіткнення не може бути віднесено до абсолютно пружного (або абсолютно непружного) удару, швидкості кульок після зіткнення можна знайти за формулами:

$$v_1' = v_1 + (1 + e)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1);$$

$$v_2' = v_2 + (1 + e)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2),$$

де e – коефіцієнт непружних втрат (e =1 у випадку абсолютно пружного удару; e = 0, якщо зіткнення абсолютно непружне).
тобто її нульовий рівень, прийнята поверхня Землі.

3.1. Закон збереження імпульсу.

Методичні вказівки. Використання при розв’язуванні задач закону збереження імпульсу, який дозволяє зв’язати початкове і кінцеве значення імпульсу замкненої системи, дає можливість виключити із розгляду внутрішні сили, що діють між частинами системи. Це особливо важливо у тих випадках, коли взаємодії між тілами носять складний характер або взагалі невідомі, як це, наприклад, відбувається при зіткненні тіл.

При розв’язуванні задач за допомогою закону збереження імпульсу необхідно:

1) дослідити, чи є система тіл замкненою (або чи існує напрямок, на який проекція зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю). У

останньому випадку проекція імпульсу системи на цей напрямок зберігається.

Зауважимо, що у випадку, коли у системі, на яку діють зовнішні сили (наприклад, сила тяжіння) , відбуваються процеси, що призводять до швидкої зміни імпульсу за короткий час (удар, вибух), то зміною імпульсу за рахунок дії цих зовнішніх сил можна знехтувати і вважати імпульс незмінним.

2) рух усіх тіл слід розглядати у одній і тій самій інерціальній системі відліку, оскільки імпульс і кінетична енергія залежать від її вибору.

У неінерціальній системі відліку діють сили інерції, які є зовнішніми відносно даної системи тіл, отже система не є ізольованою, і її повний імпульс і енергія не зберігаються.

Якщо в умові задачі задана відносна швидкість двох частинок, що рухаються вздовж однієї прямої, систему відліку зручно зв'язати з однією з них. Тоді одна з частинок залишається нерухомою, а швидкість другої буде дорівнювати відносній швидкості $v_{відн.}$;

3) систему координат необхідно вибрати так, щоб система тіл була замкнутою хоча б відносно однієї осі, а проекції векторів імпульсу тіл на координатні вісі знаходилися найпростішим способом (при необхідності зробити рисунок);

4) записати рівняння збереження імпульсу спочатку у векторній формі, а потім у проекціях на координатні осі;

5) якщо кількість невідомих величин перевищує кількість рівнянь, додати до системи відповідні кінематичні або динамічні співвідношення.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.24. На нерухомій воді озера стоїть човен довжиною L= 3м і масою M= 150кг. На кормі човна стоїть хлопчик масою m = 50кг. На яку відстань s відносно берега переміститься човен, якщо людина перейде з корми на ніс човна?

L= 3м
M= 150кг
m = 50кг

s - ?

Розв'язання.

Розглянемо систему відліку, яка пов'язана з берегом. Припустимо для простоти, що людина рухається відносно човна з постійною швидкістю $\vec{u}$. Тоді човен також буде рухатися рівномірно, а його переміщення s відносно берега дорівнює:

$$s = v \cdot t, \tag{1}$$

де v – швидкість човна відносно берега, t – час руху людини (й човна).

На початку руху людини човен є нерухомим. Закон збереження імпульсу має наступний вигляд:

$$M\vec{v} + m(\vec{u} + \vec{v}) = 0,$$

де $(\vec{u} + \vec{v})$- швидкість переміщення людини відносно берега.

У проекції на напрямок руху людини останнє рівняння виглядає як:

$$m(u - v) - Mv = 0.$$

Звідки для швидкості човна отримуємо $v = \dfrac{mu}{m + M}$. (2)

Час руху човна дорівнює часу руху людини вздовж човна, тобто

$$t = \frac{L}{u}. \tag{3}$$

Підставляємо отримані для v і t вирази (2) та (3) у формулу (1) і знаходимо переміщення човна.

$$s = \frac{mu}{m + M} \cdot \frac{L}{u} = \frac{m}{m + M} \cdot L. \tag{4}$$

Чисельні розрахунки за формулою (4) дають значення s = 0,75м.

Зауважимо, що задача може бути розв’язана також за допомогою теореми про рух центра мас (див. приклад 1.20, розд.2).

Відповідь: s = 0,75м.

Приклад 1.25. Снаряд, випущений з гармати під кутом α=30º до горизонту із швидкістю v_0=200 м/с, у верхній точці траєкторії внаслідок вибуху розірвався на два осколки, маси яких відносяться як 1:3. Швидкість меншого осколка v_1=40м/с і спрямована вертикально уверх. Визначити модуль і напрям швидкості $\vec{v}_2$ другого осколка. Опором повітря в момент розриву знехтувати.

Дано
$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{3}$
v_0=200 м/с
α=30º
v_1=40м/с
β=90º
v_2 ; γ – ?

Розв’язання.

Розглянемо фізичну систему, яка містить снаряд і ядро. Земля і повітря по відношенню до виділеної системи – зовнішні тіла. Система, таким чином, незамкнена. Але законом збереження імпульсу можна наближено скористатися в момент розриву, коли сила тяжіння за досить короткий проміжок часу не встигає змінити імпульс.

Систему відліку зв'яжемо з землею і будемо вважати інерціальною, осі координат вибираємо вздовж горизонтального і вертикального напрямків (рис.1.43).

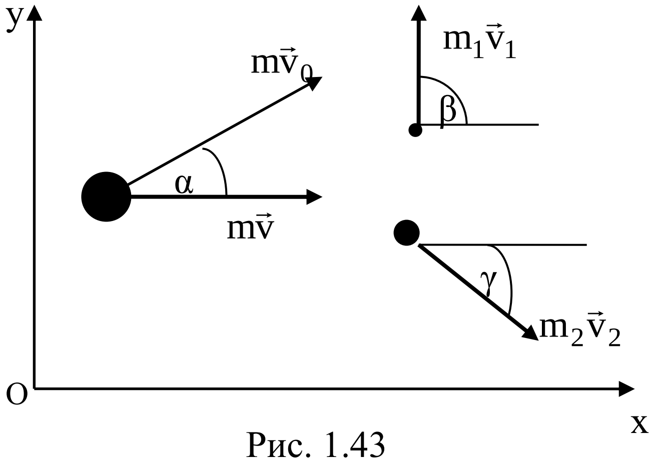


Рис. 1.43

Виділимо два моменти часу: початок і кінець фізичної вибуху. Імпульс системи безпосередньо перед вибухом дорівнює $\vec{p} = m\vec{v}$ і спрямований горизонтально, оскільки вибух відбувся у верхній точці траєкторії, де вертикальна складова швидкості снаряду дорівнює нулю. Кінцевий імпульс $\vec{p}' = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Згідно закону збереження імпульсу $\vec{p} = \vec{p}'$, або $m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. (1)

У проекціях на координатні осі з урахуванням того, що у верхній точці траєкторії $v = v_0 \cos\alpha$, отримуємо

$$mv_0 \cos\alpha = m_2 v_2 \cos\gamma;$$

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \sin\gamma.$$

Звідки маємо

$$v_2 = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m^2 v_0^2 \cos^2\alpha}}{m_2}; \ (2) \qquad \mathrm{tg}\gamma = \frac{m_1 v_1}{m v_0 \cos\alpha}. \ (3)$$

Якщо виразити маси осколків m_1 і m_2 через масу снаряду m ($m_1 = \frac{1}{4}m$; $m_2 = \frac{3}{4}m$), вирази (2) і (3) для v_2 і tgα набувають наступного вигляду:

$$v_2 = \frac{1}{3}\sqrt{v_1^2 + 16 v_0^2 \cos^2\alpha}; \qquad (4)$$

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{v_1}{4 v_0 \cos\alpha}. \qquad (5)$$

Чисельний розрахунок за формулами (4) і (5) дає v_2 = 349 м/с; $\mathrm{tg}\gamma = 0{,}115$.

Відповідь: v_2 = 349 м/с; γ=6,6°.

Приклад 1.26. Маса метеорологічної ракети в момент запуску m_0=0,30кг, маса пального заряду в ній $m_з$=0,20кг. Швидкість виходу продуктів згорання відносно ракети u=30 м/с. Кожну секунду ракета здійснює викид речовини масою μ=60г/с. Знайти швидкість ракети в момент повного згорання пального заряду. Опором повітря та зміною сили тяжіння з висотою знехтувати.

m_0=0,30кг
$m_з$=0,20 кг
u=30 м/с
μ=0,06кг/с

v - ?

Розв'язання.

1. Шукаємо розв'язок задачі у припущені, що на ракету діє лише реактивна сила μu, тобто силою тяжіння знехтуємо. Для розв'язку задачі скористуємося рівнянням динаміки руху тіла змінної маси (рівнянням Мещерського), яке у відсутності дії зовнішніх сил виглядає як $m\frac{dv}{dt}=-\mu u$.

Ураховуючи, що швидкість зміни маси $\mu=\frac{dm}{dt}$, попереднє рівняння приймає вигляд $mdv=-udm$, і, відповідно, $\frac{dv}{u}=-\frac{dm}{m}$. Інтегруючи ліву частину останнього рівняння від нуля до кінцевої швидкості v, а праву – від m_0 до маси ракети після вигорання запалу, яка дорівнює $m_к=m_0-m_з$:

$$\frac{1}{u}\int_0^v dv=-\int_{m_0}^{m_к}\frac{dm}{m},$$

отримуємо $v=u\ln\frac{m_0}{m_к}$. Підстановка чисельних даних у формулу дає: $v=30\ln\frac{0{,}30}{0{,}10}=33$ м/с.

2. Знайдемо швидкість ракети враховуючи дію силу тяжіння на ракету в процесі руху.

Рівняння руху ракети в цьому випадку приймає вигляд:

$$m\frac{dv}{dt}=-\mu u-mg.$$

Переписуючи його у тотожній формі $m\frac{d}{dt}(v+gt)=-\frac{dm}{dt}u$ або $d(v+gt)=-\frac{dm}{m}u$ і інтегруючи останнє рівняння у межах, що характеризують початковий та кінцевий стани, отримуємо: $v+gt=u\ln\frac{m_0}{m_к}$,

де час вигорання запалу $t=\frac{m_з}{\mu}$.

Остаточно знаходимо $v=u\ln\frac{m_0}{m_к}-\frac{m_з}{\mu}g$.

Чисельний розрахунок дає v =0,33 м/с.

Отже, урахування сили тяжіння суттєво вплинуло на отриманий результат, і її урахування є обов'язковим при розв'язуванні подібної задачі.

3.2. Закон збереження та зміни механічної енергії.

Методичні вказівки. Використання закону збереження механічної енергії спрощує розв'язання задач, у яких розглядається два стани системи взаємодіючих між собою тіл, і дозволяє не розглядати діючі між тілами сили.

Перш, ніж скористатися законом збереження та перетворення енергії, необхідно:

− визначити початковий і кінцевий стан системи;

− визначити, чи є система тіл замкнутою, які сили є зовнішніми, а які внутрішніми;

− з'ясувати характер внутрішніх сил – які з них консервативні, які ні;

− вибрати нульовий рівень відліку потенціальної енергії. Зазвичай нульовий рівень зв'язують з найменшим значенням потенціальної енергії. Наприклад, у полі тяжіння це найнижче положення тіла, яке рухається.

Зауважимо, що при розв'язанні задач про рух тіла у полі тяжіння Землі, ізольованою системою, до якої можна застосовувати закон збереження енергії, виступає система "тіло + Земля". Але, оскільки кінетична енергія, яку отримують тіла внаслідок взаємодії, обернено пропорційна масам тіл, зміною енергії Землі при її взаємодії з тілом, що падає, можна знехтувати і розглядати тільки зміну потенціальної і кінетичної енергії тіла.

Якщо при переході системи тіл із початкового в кінцевий стан у системі діяли сили тертя (окрім сили тертя спокою) або на неї діяли зовнішні сили і сили непружних деформацій, то механічна енергія не зберігається. У цьому випадку для розв'язання задачі зручно скористатися теоремою про кінетичну енергію.

Розв'язування великої групи задач вимагає одночасного використання закону збереження імпульсу і закону збереження або зміни механічної енергії. Це, перш за все, задачі про пружний або непружний удар, до яких зводяться задачі про зіткнення або розпад тіл. Оскільки енергія – скалярна величина, а імпульс – векторна , то рівняння закону збереження імпульсу при цьому найчастіше записують у проекціях на координатні осі, обираючи систему координат найзручнішим способом.

У випадках, коли кількість рівнянь, записаних за законами збереження недостатня для визначення усіх невідомих величин, систему рівнянь слід доповнити основним рівнянням динаміки та необхідними кінематичними рівняннями.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.27. Велосипедист повинен проїхати по замкненому колу радіуса R=3м. З якої висоти (див. рис.1.44) він має скотитися, щоб не зірватися в процесі руху? Тертям знехтувати.

Розв'язання.

R=3м
h - ?

На тіло у верхній точці кола діють дві сили, які спрямовані вертикально донизу: сила тяжіння $\vec{F}_T = m\vec{g}$ и реакція опори $\vec{N}$. Вони надають тілу нормальне (доцентрове) прискорення:

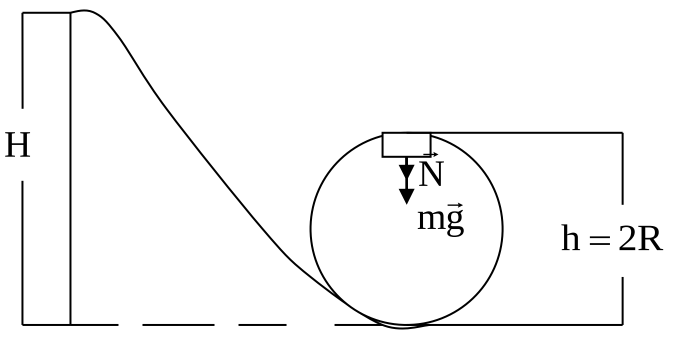


Рис.1.44

$$a_n = \frac{mv^2}{R}.$$

За другим законом Ньютона $m\vec{a}_n = m\vec{g} + \vec{N}$.

У проекції на напрямок прискорення, з урахуванням виразу для нього, отримуємо $\frac{mv^2}{R} = mg + N$. Таким чином, щоб не впасти велосипедист повинен мати швидкість, при якій задовольняється умова $\frac{mv^2}{R} \geq mg$, або

$$mv^2 \geq mgR. \qquad (1)$$

Необхідну швидкість велосипедист набуває, скотившись із гірки висотою H. За законом збереження механічної енергії його повна енергія W_1 на початку руху дорівнює повній енергії W_2 у верхній точці кола.

$$W_1 = mgH; \qquad W_2 = mgh + \frac{mv^2}{2} = mg \cdot 2R + \frac{mv^2}{2}.$$

Користуючись критерієм (1), отримуємо:

$$mgH \geq mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mgR = \frac{5}{2}mgR.$$

Звідки, остаточно, маємо $H \geq= \frac{5}{2}R$.

Відповідь: $H \geq 7{,}5$м.

Приклад 1.28. Гиря, яка покладена на верхній кінець пружини, стискає її на x_0=1,0мм. На скільки стисне пружину та сама гиря, якщо її кинути з висоти h=0,3м зі швидкістю v=1,0м/с?

$x_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$м
h=0,3м
v=1,0м/с
x - ?

Розв'язання.

Величина деформації пружини x визначає потенціальну енергію пружини, тому для розв'язання задачі скористуємося законом збереження енергії. Оскільки на гирю діє сила тяжіння, розглядаємо замкнену систему

„пружина - гиря - Земля “. За відсутністю дії сили тертя повна механічна енергія цієї системи буде зберігатися.

У початковому стані енергія системи W_1 складається з потенціальної і кінетичної енергії гирі. Якщо вибрати за початок відліку висоти найнижче положення гирі, яке відповідає стиснутій пружині (рис.1.45), то

$$W_1 = mg(h + x) + \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

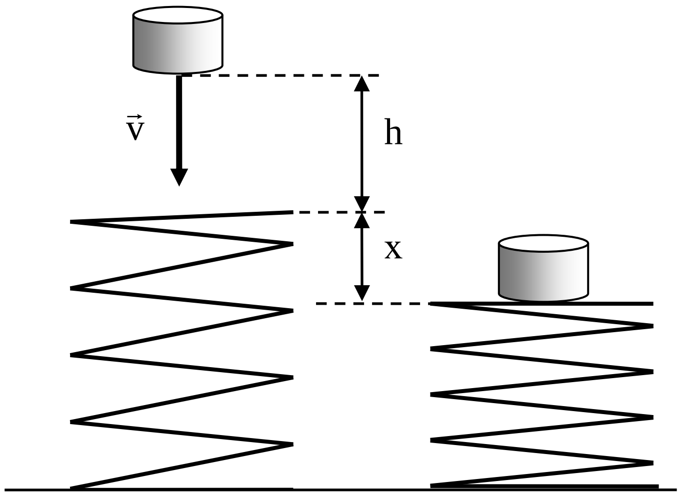


Рис. 1.45.

У кінцевому стані гиря зупиняється, і енергія системи W_2 – енергія деформованої пружини, дорівнює

$$W_2 = \frac{kx^2}{2}, \quad (2)$$

де коефіцієнт пружності k визначається за допомогою співвідношення $kx_0 = mg$:

$$k = \frac{mg}{x_0}. \quad (3)$$

Враховуючи закон збереження енергії, прирівнюємо праві частини виразів (1) і (2). З урахуванням (3) для коефіцієнту пружності отримуємо квадратне рівняння відносно x:

$$x^2 - 2gx_0x - \left(2gx_0h + v^2x_0\right) = 0.$$

Його розв’язок має вигляд:

$$x_{1,2} = gx_0 \pm \sqrt{g^2x_0^2 + 2gx_0h + v^2x_0}. \quad (4)$$

Від’ємний корінь рівняння (4) відповідає розтягненню пружини і таким чином не задовольняє умові задачі. Чисельний розрахунок дає $x=9{,}3\cdot10^{-2}$м.

Відповідь: $x=9{,}3\cdot10^{-2}$м.

Приклад 1.29. Ланцюжок довжиною L = 1,8м лежить на столі так, що один його кінець звисає зі столу. Якщо довжина частини, яка звисає, перевищує $L_0 = \frac{1}{3}L$, ланцюжок зісковзує зі столу. Визначити швидкість ланцюжка v в момент його відриву від столу.

Розв’язання.

Дано
L = 1,8м
$L_0 = \frac{1}{3}L$
v - ?

1. Ланцюжок, стіл та Земля утворюють замкнену систему, в якій окрім сили тертя діють консервативні сили - сили тяжіння та сили реакції опори (пружні сили). Сила тертя

– дисипативна сила, що приводить до дисипації (втрат) механічної енергії. Тому рівняння балансу енергії системи приймає вигляд:

$$\Delta W = \Delta W_p + \Delta W_k = A^{дис.} \qquad (1)$$

З урахуванням того, що початкова швидкість ланцюжка $v_0 = 0$, зміна кінетичної енергії складає:

$$\Delta W_k = W_k - W_{k0} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Масу одиниці довжини ланцюжка означимо через ρ_l. Тоді маса ділянки ланцюжка довжиною l складає $\rho_l l$, а повна маса дорівнює $\rho_l L$. Звідси

$$\Delta W_k = \frac{\rho_l L v^2}{2}. \qquad (2)$$

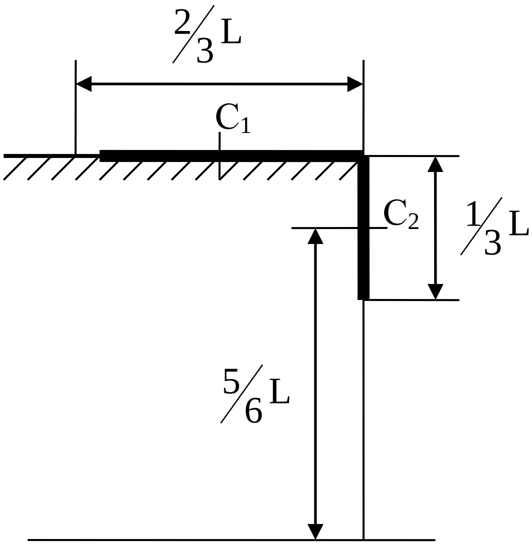


Рис. 1.46,а

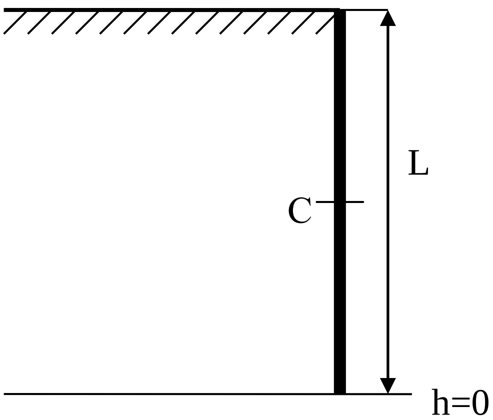


Рис. 1.46,б

Визначимо зміну потенціальної енергії ланцюжка $\Delta W_p = W_p - W_{p0}$. За початок відліку приймаємо рівень, на якому знаходиться нижній кінець ланцюжка в момент відриву від столу.

Потенціальна енергія ланцюжка в момент початку руху складається з двох доданків – потенціальної енергії частини довжиною $\frac{2}{3}L$, яка лежить на столі (її центр мас C_1 знаходиться на висоті $h_{10}= L$), і потенціальної енергії частини довжиною $\frac{1}{3}L$, що звисає зі столу (висота знаходження її центру мас C_2 дорівнює $h_{20} = \frac{5}{6}L$) (див. рис. 1.46,а). Користуючись формулою для визначення потенціальної енергії тіла у полі тяжіння Землі $W_p = mgh$ отримуємо:

$$W_{p0} = \frac{2}{3}\rho_1 L^2 g + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\rho_1 L^2 g = \frac{17}{18}\rho_1 L^2 g. \qquad (3)$$

Потенціальна енергія ланцюжка в момент відриву від столу (див. рис. 1.46,б):

$$W_p = \frac{1}{2}\rho_1 L^2 g. \qquad (4)$$

Отже, зміна потенціальної енергії ланцюжка має наступний вигляд:

$$\Delta W_p = W_{p2} - W_{p_1} = \frac{1}{2}\rho_1 l^2 g - \frac{17}{18}\rho_1 l^2 g = -\frac{4}{9}\rho_1 l^2 g. \qquad (5)$$

Робота дисипативної сили – це робота сили тертя, яка змінюється в процесі руху, бо діє тільки на частину ланцюжка, яка рухається вздовж столу (рис.1.47). Якщо позначити довжину частини ланцюжка, що звисає зі столу у деякий довільний момент руху, через x, то сила тертя буде діяти лише на його частину довжиною (L–x). За формулою $F_{тер.} = \mu N = \mu mg$ з урахуванням того, що маса частини ланцюжка, яка лежить на столі, дорівнює $\rho_1(L-x)$, сила тертя дорівнюватиме $F_{тер.} = \mu\rho_1(L-x)g$.

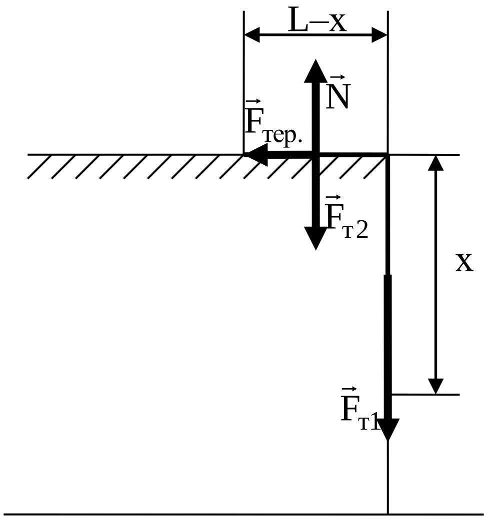


Рис. 1.47

Елементарна робота, яка виконується цією силою, на переміщенні dx є від’ємною величиною, оскільки сила утворює з напрямом переміщення кут 180º, і дорівнює:

$$dA = -F_{тер.}dx = -\mu\rho_1 g(L-x)dx. \qquad (6)$$

Повну роботу знаходимо шляхом інтегрування співвідношення (6) за змінною x у межах від початкового значення $x_1 = {}^1\!/_3 L$ до кінцевого $x_2 = L$:

$$A_{тер.} = -\mu\rho_1 g \int_{\frac{1}{3}L}^{L}(L-x)dx = -\mu\rho_1 g\left(\left(Lx\Big|_{\frac{1}{3}L}^{L}\right) - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{3}L}^{L}\right) =$$
$$= -\mu\rho_1 g\left(\frac{2}{3}L^2 - \frac{4}{9}L^2\right) = -\frac{2}{9}\mu\rho_1 g L^2. \qquad (7)$$

З урахуванням (2), (5), (7) рівняння балансу енергії (1) приймає вигляд:

$$\frac{\rho_1 L v^2}{2} - \frac{4}{9}\rho_1 g L^2 = -\frac{2}{9}\mu\rho_1 g L.$$

Після скорочення на ρ_1 отримуємо для v:

$$v = \frac{2}{3}\sqrt{gL(2-\mu)}. \qquad (8)$$

Значення коефіцієнту тертя μ знаходимо, користуючись умовою початку руху ланцюжка, з якої випливає, що максимальне значення сили тертя спокою, яка діє на $\frac{2}{3}$ довжини ланцюжка дорівнює силі тяжіння, що діє на його третину: $\frac{2}{3}\mu\rho_1 gL = \frac{1}{3}\rho_1 gL$. Звідки маємо $\mu = \frac{1}{2}$.

Скористуємося знайденим значенням коефіцієнту тертя для розрахунку за формулою (8) і отримуємо значення для швидкості ланцюжка в момент відриву v = 3,4 м/с.

Зауважимо, що оскільки у даному випадку сила тертя зв'язана з переміщенням лінійним законом, її роботу можна було б визначити, користуючись середнім значенням сили, яке дорівнює

$$\langle F_{\text{тер.}} \rangle = \frac{F_{\text{початк.}} + F_{\text{кінц.}}}{2} = \frac{\frac{2}{3}\mu\rho_1 gL + 0}{2} = \frac{1}{3}\mu\rho_1 gL.$$

Відповідно робота середньої сили тертя на шляху $\frac{2}{3}L$ дорівнює (див. (7)):

$$A_{\text{тер.}} = -\frac{1}{3}\mu\rho_1 gL \cdot \frac{2}{3}L = -\frac{2}{9}\mu\rho_1 gL^2.$$

2. Задача може бути також розв'язана за допомогою основного рівняння динаміки, яке в проекції на напрям прискорення тіла має вигляд:

$$m\frac{dv}{dt} = F_{\text{т}1} - \mu N = F_{\text{т}1} - \mu F_{\text{т}2}.$$

Якщо x – довжина частини, що звисає зі столу, а ρ_l - маса одиниці довжини, тоді $m = \rho v L$; $F_{\text{т}1} = \rho_1 xg$; $F_{\text{тер.}} = \mu\rho_1(L-x)g$.

Представимо похідну $\frac{dv}{dt}$ у виді $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$.

Після підстановки наведених виразів у рівняння динаміки і скорочення на ρ_l отримуємо диференціальне рівняння зі змінними, які розділяються:

$$Lv\frac{dv}{dx} = g[x - \mu(L-x)] = g[x(1+\mu) - \mu L],$$

$$vdv = \frac{g}{L}[x(1+\mu) - \mu L]dx.$$

Після інтегрування отриманого рівняння маємо:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L}\left[x^2\frac{(1+\mu)}{2} - \mu Lx\right] + C.$$

Константу інтегрування знаходимо, користуючись початковою умовою $v\big|_{x=\frac{L}{3}}=0$:

$$0=\frac{g}{L}\left(\frac{L^2}{9}\cdot\frac{1+\mu}{2}-\mu\frac{L^2}{3}\right)+C,\quad \text{звідки маємо:}\quad C=gL\frac{5\mu-1}{18}.$$

Швидкість при будь-якій довжині x звислої частини канату дорівнює:

$$v=\sqrt{2g\left(\frac{1+\mu}{L}\cdot\frac{x^2}{2}-\mu x+L\frac{5\mu-1}{18}\right)}\ . \tag{9}$$

Для моменту відриву ланцюжка від столу після підстановки значення $x=L$ в (9) маємо вираз $v=\frac{2}{3}\sqrt{gL(2-\mu)}$, який співпадає із (8).

Приклад 1.30. Молот масою m = 10кг вдаряє по залізному виробу, який лежить на ковадлі. Маса ковадла разом із виробом дорівнює M=120кг. Чому дорівнює к. к. д. процесу кування при заданих умовах?

m = 10кг M=120кг
η - ?

Розв’язання.

Внаслідок того, що час, за який відбувається удар, є малим, а сили ударної взаємодії тіл навпаки – великими, систему можна вважати замкнутою і для розв’язання задачі скористатися законами збереження енергії і імпульсу.

Коефіцієнт корисної дії системи η визначається відношенням корисної енергії до повної (витраченої) енергії: $\eta=\frac{W_{\text{кор.}}}{W_{\text{повн.}}}$. (1)

За умов задачі корисна енергія – це енергія, яка витрачається на кування виробу. Вона дорівнює різниці кінетичних енергій системи до і після удару, оскільки зміною потенціальної енергії при незначному переміщенні тіл під час удару можна знехтувати. Отже маємо:

$$W_{\text{кор.}}=W_{\text{деф.}}=\frac{mv^2}{2}-\frac{(m+M)v'^2}{2}, \tag{2}$$

де v – швидкість молоту перед ударом, v' - загальна швидкість обох тіл після абсолютно непружного удару. Цю швидкість знаходимо, користуючись законом збереження імпульсу. Враховуючи, що швидкість ковадла перед ударом дорівнювала нулю, рівняння має вигляд: $mv=(m+M)v'$. Звідки отримуємо:

$$v'=\frac{mv}{m+M}. \tag{3}$$

Підстановка (2) у формулу (1) надає:

$$W_{деф.} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{M}{m+M}. \qquad (4)$$

Витрачена енергія – це кінетична енергія молоту перед ударом, яка дорівнює

$$W_{повн.} = \frac{mv^2}{2}. \qquad (5)$$

Користуючись (4) і (5), згідно з (1) отримуємо

$$\eta = \frac{M}{m+M}. \qquad (6)$$

Із співвідношення (6) випливає, що к. к. д. процесу кування η тим більший, чим більша маса ковадла порівняно з масою молота.
Чисельний розрахунок за формулою (6) дає $\eta = 0,92$.
Відповідь: $\eta = 0,92$.

Приклад 1.31. Бойок (ударна частина) молоту для забивання палів масою $m = 500$кг падає на палю масою $M = 120$кг. Чому дорівнює к. к. д. процесу забивання палі при заданих умовах?

$m = 500$кг
$M = 120$кг
η - ?

Розв'язання.

Аналогічно попередньому аналізу (див.4.8), систему можна вважати замкнутою і для розв'язання задачі скористатися законами збереження енергії і імпульсу. Але, на відміну від попередньої задачі, корисною слід вважати кінетичну енергію W'_k руху бойку і палі, витрачену на заглиблення палі у ґрунт.

Оскільки удар абсолютно непружний, бойок і паля після удару рухаються як єдине ціле з однаковою швидкістю. Внаслідок опору ґрунту ця швидкість швидко гаситься, а кінетична енергія витрачається на заглиблення палі. Отже, коефіцієнт корисної дії η дорівнюватиме відношенню кінетичної енергії W'_k системи після удару до кінетичної енергії бойка перед ударом W_k, яка є витраченою (повною) енергією:

$$\eta = \frac{W_{кор.}}{W_{повн.}} = \frac{W'_k}{W_k}. \qquad (1)$$

Кінетична енергії бойка до удару дорівнює

$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \qquad (2)$$

де v – швидкість бойка перед ударом.

Швидкість бойка і палі після удару знаходимо, користуючись законом збереження імпульсу $mv = (m+M)v'$, з якого отримуємо $v' = \frac{mv}{m+M}$. Кінетична енергія W'_k дорівнює:

$$W_{кор.} = W'_k = \frac{(m+M)v'^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2(m+M)}. \qquad (3)$$

Підставляємо (2) і (3) в (1), після скорочення отримуємо:

$$\eta = \frac{m}{m+M}. \qquad (4)$$

З формули (4) можна зробити висновок, що к. к. д. процесу забивання палі тим більший, чим більша маса бойка m порівняно з масою палі M.
Розрахунок за наведеними в умові задачі даними дає $\eta = 0{,}81$.
Відповідь: $\eta = 0{,}81$.

Приклад 1.32. Кулька масою m, рухаючись зі швидкістю v, налітає на нерухому кульку масою $\frac{m}{2}$. Після пружного удару перша кулька продовжує рухатися під кутом $\alpha = 30^o$ до напрямку початкової швидкості. Знайти швидкості кульок після удару.

$m_1 = m$
$m_2 = \frac{m}{2}$
$v_1 = v$
$v_2 = 0$
$\alpha = 30^o$

v'_1-?
v'_2-?

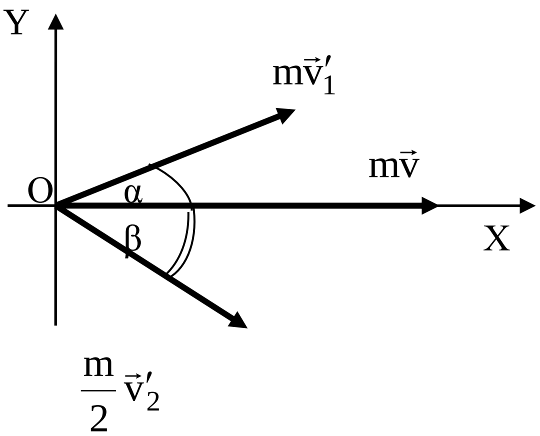


Рис.1.48

Розв’язання.

Удар абсолютно пружний. Система замкнута. Для розв’язання задачі можна скористатися законами збереження енергії і імпульсу:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{v_2'^2}{2}; \quad (1)$$

$$m\vec{v} = m\vec{v}'_1 + \frac{m}{2}\vec{v}'_2. \qquad (2)$$

Знаходимо проекції рівняння (2) на координатні осі, які вибрані таким чином, що вісь OX спрямована вздовж імпульсу $m\vec{v}$ (див. рис. 1.48). Проекції рівняння (2) мають вигляд:

$$mv = mv'_1\cos\alpha + \frac{m}{2}v'_2\cos\beta; \qquad (3)$$

$$0 = mv'_1\sin\alpha - \frac{m}{2}v'_2\sin\beta. \qquad (4)$$

Рівняння (1), (3), (4) утворюють систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Розв’язання цієї системи (з урахуванням значення кута $\alpha = 30°$) приводить до квадратного рівняння

$$3v_1' - 2\sqrt{3}vv_1' + v^2 = 0,$$

з якого визначаємо v_1', за значенням якого знаходимо v_2':

$$v_1' = \frac{\sqrt{3}}{3}v; \qquad v_2' = \frac{2\sqrt{3}}{3}v.$$

Задачі для самостійного розв'язування.

1.64. Візок масою $m_1 = 15$кг рухається із швидкістю $v_1 = 5$м/с. З нього під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту у напрямку руху зістрибує людина масою $m = 65$кг. Яку швидкість має людина в момент стрибка, якщо швидкість візка внаслідок стрибка зменшилась до $v_1^/ = 4$м/с?

1.65. Снаряд масою m = 12кг розірвався на два осколки в верхній точці траєкторії. Швидкість снаряду в цей момент v = 240 м/с. Менший осколок масою m_1= 4кг полетів уперед під кутом α=30° до горизонту зі швидкістю v_1=360 м/с. З якою швидкістю і в якому напрямку полетіла більша частина снаряду?

1.66. Нейтрон зіткнувся з атомом кисню. Маса атома кисню у 16 разів перевищує масу нейтрона (m_0=16m_n). У скільки разів зменшилась кінетична енергія нейтрона при зіткненні, якщо удар є центральним і абсолютно пружним?

1.67. Куля масою m_1 =1кг при зіткненні з кулею більшої маси відскочила від неї, втративши 30% своєї кінетичної енергії. Визначити масу більшої кулі. Удар вважати центральним, абсолютно пружним.

1.68. В човні масою $m_1 = 150$ кг, який рухається зі швидкістю v = 2м/с, стоїть хлопчик масою m_2= 50кг. Хлопчик зістрибує в горизонтальному напрямку з швидкістю v_2 = 4м/с (відносно човна). Визначити швидкість човна v_1 після стрибка хлопчика: а) в напрямку руху човна; б) в протилежному напрямку.

1.69. З гармати, яка закріплена на залізничній платформі, вистрілили вздовж полотна залізничної дороги під кутом α = 45° до горизонту. Визначити швидкість v_1, з якою відкочується платформа, якщо швидкість снаряду при пострілі v_2= 500 м/с. Маса платформи з гарматою та снарядом m_1 = 15 т, маса снаряду m_2 = 60кг.

1.70. Визначити імпульс $\vec{p}$, отриманий стінкою при зіткненні з нею молекули кисню масою $m_0 = 5{,}32 \cdot 10^{-26}$ кг. Молекула рухалась із швидкістю v = 500 м/с під кутом α =60° до стінки. Удар вважати абсолютно пружним.

1.71. Вздовж похилої площини з кутом α=30° при основі рівномірно сковзає ящик з піском зі швидкістю v = 0,8м/с. Коли в ящик влучає куля масою m=10г, що летіть горизонтально, він зупиняється. Маса ящику M=10 кг. Визначити швидкість кулі.

1.72. На висоті h =32м над землею зависнув вертоліт масою M =1500кг. З вертольоту опущені вірьовчані сходини, по яким спускається на землю людина масою m = 90кг. Яку довжину повинні мати сходини, щоб, ступив на останню сходинку, людина торкнулася землі?

1.73. Куля, яка рухалась із швидкістю v = 6 м/с, зіткнулась з нерухомою кулею. Удар центральний, абсолютно непружний. Визначити швидкість кожної кулі після зіткнення і роботу деформації в двох випадках: а) маса рухомої кулі $m_1 = 1$кг, нерухомої $m_2 = 4$кг; б) маса рухомої кулі $m_1 = 4$кг, нерухомої $m_2 = 1$кг.

1.74. Ковзаняр масою $M = 60$кг, стоячи на льоду, кидає під кутом $\alpha=30^0$ до горизонту камінь масою $m_1 = 2$ кг із швидкістю $v = 10$м/с. На яку відстань відкотиться ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя ковзанів по льоду $\mu = 0{,}01$?

1.75. Пістолетна куля масою $m_1 = 10$г, яка рухається із швидкістю $v_1 = 250$м/с, влучає в дерев'яну кулю масою $m_2 = 1{,}5$кг, що підвішена на нитці довжиною l = 1м і застрягає в ній. Визначити: а) кут α, на який відхилиться нитка з дерев'яною кулею при зіткненні; б) кількість тепла, яке виділиться при зіткненні. Масою нитки знехтувати.

1.76. М'яч падає на гладку підлогу з висоти $h = 6$м. Яку початкову швидкість необхідно надати м'ячу, щоб після двох ударів о підлогу він піднявся до початкової висоти, якщо при кожному ударі о підлогу м'яч втрачає $k = 30\%$ своєї енергії?

1.77. Акробат масою $m = 60$кг плигає з висоти $h = 5$м на батут. З якою середньою силою $\langle F \rangle$ він тисне на сітку батуту, якщо вона прогинається на $\Delta h = 0{,}5$м?

1.78. Санки спускаються з гірки висотою h = 10м та довжиною l = 40м , а потім проходять по горизонтальній поверхні шлях s = 80м і зупиняються. Визначити коефіцієнт тертя μ, якщо він на обох відрізках шляху є однаковим.

1.79. Автомобіль з виключеним двигуном спускається по ділянці шосе з уклоном 1м на кожні 25м шляху з постійною швидкістю $v = 72$км/год. Визначити потужність, яку розвиває двигун автомобіля при підійманні по цьому уклону з тією ж самою швидкістю. Маса автомобілю m = 1,5 т.

1.80. Невеличке тіло зісковзує з вершини гладкої півсфери радіусом R=1,5м. На якій висоті h від її основи тіло відірветься від поверхні?

1.81. Ланцюжок довжиною L = 1,6м лежить на столі. Якщо довжина частини, що звисає зі столу більша за ¼ L, ланцюжок зісковзує зі столу. Визначити швидкість v ланцюжка в момент відриву від столу.

1.82. Визначити потужність N повітряного потоку перерізом $s = 0,6\ м^2$ при швидкості руху повітря v = 20 м/с. Густина повітря $\rho = 1,29 кг/м^3$.

1.83. Вагон масою m = 18 т, який рухається з швидкістю v = 1 м/с, гальмує при зіткненні з двома пружинними буферами. Визначити найбільше стиснення кожної пружини , якщо відомо, що кожний з буферів можна стиснути на 1см силою в 10^4 Н.

1.84. У скільки разів кінетична енергія W_k штучного супутника, який обертається по круговій орбіті навколо Землі менша за його потенціальну енергію W_p?

Тестові завдання.

Вибрати вірну відповідь.

1. Закон збереження імпульсу є наслідком

   1. однорідності простору 2. ізотропності простору
   3. однорідності часу 4. серед наведених немає вірної відповіді

2. Кулька маси m, що рухалася із швидкістю $\vec{v}$ зіткнулася з нерухомою кулькою такої самої маси. Удар – абсолютно пружний, центральний. Швидкість першої кульки після зіткнення дорівнюватиме

   1. $-2\vec{v}$ 2. $-\vec{v}$ 3. 0 4. $-\frac{\vec{v}}{2}$ 5. $\frac{\vec{v}}{2}$

3. Кулька маси m, що рухалася із швидкістю $\vec{v}$ зіткнулася з нерухомою кулькою такої самої маси. Удар – абсолютно непружний, центральний. Швидкість кожної з кульок після зіткнення дорівнюватиме

   1. $-2\vec{v}$ 2. $-\vec{v}$ 3. 0 4. $-\frac{\vec{v}}{2}$ 5. $\frac{\vec{v}}{2}$

4. Кулька маси m, що рухалася із швидкістю $\vec{v}$ зіткнулася з нерухомою кулькою з такою ж самою масою. Удар – абсолютно пружний, центральний. Швидкість другої кульки після зіткнення дорівнюватиме

   1. $\vec{v}$ 2. $-\vec{v}$ 3. 0 4. $-\frac{\vec{v}}{2}$ 5. $\frac{\vec{v}}{2}$

5. Відбувається центральний, абсолютно пружний удар кулі маси m_1, яка рухається із швидкістю $\vec{v}$, із нерухомою кулею маси m_2. Перша куля зупиниться, якщо

   1. $m_1 >> m_2$ 2. $m_1 = m_2$ 3. $m_1 = 2m_2$ 4. $m_1 < m_2$

6. Відбувається прямий центральний абсолютно пружний удар кулі маси m_1, що рухається із швидкістю $\vec{v}$, із нерухомою кулею маси m_2. Швидкість першої кулі після удару буде дорівнювати $-\vec{v}$, якщо

   1. $m_1 > m_2$ 2. $m_1 = m_2$ 3. $m_1 = 2m_2$ 4. $m_1 << m_2$

7. Куля маси m, що летить горизонтально, влучивши у підвішене на нитці тіло такої самої маси, застрягає в ньому і надає швидкість v. Якщо, при тих самих умовах, збільшити масу тіла удвічі, швидкість, яку набуває тіло, дорівнюватиме

1. $\frac{v}{2}$ 2. $\frac{3v}{2}$ 3. $\frac{v}{3}$ 4. $\frac{2v}{3}$

8. При підійманні тіла масою 5 кг на висоту 1 м з прискоренням 2 м/с^2 людина виконує роботу (прийняти g = 10м/с^2, опором повітря знехтувати)

1. 100 Дж; 2. 60 Дж; 3. 50 Дж; 4. 10 Дж.

9. Куля, що має швидкість 300 м/с, заглибилась у стіну на відстань 2см. Якщо швидкість кулі збільшити удвічі, відстань, на яку заглибиться куля

1. не зміниться 2. збільшиться у 4 рази

3. збільшиться удвічі 4. збільшиться у $\sqrt{2}$ раз

10. Мопед масою 40кг на початковій ділянці шляху рухається за законом $x = (20 + 0{,}5t^2)$м/с. Потужність двигуна в момент часу t= 2 с складає

1. 10 Вт 2. 20 Вт 3. 40 Вт 4. 80 Вт

11. Одиниця вимірювання енергії, виражена через основні одиниці Міжнародної системи одиниць (СІ):

1. $кг \cdot м^2/с$ 2. $кг \cdot м/с^2$ 3. $кг \cdot м^2/с^2$ 4. $кг \cdot м/с$

12. Умовою рівноваги системи у механіці є:

1. замкненість системи 2. відсутність сил тертя

3. мінімум потенціальної енергії 4. серед наведених немає вірної відповіді

13. Сила тяжіння не виконує роботу у випадку:

1. руху тіла вертикально вгору 2. руху тіла по похилій площині

3. руху штучного супутника по круговій орбіті 4. руху тіла вертикально вниз

14. Сила тяжіння не виконує роботу у випадку:

1. руху тіла вертикально вгору 2. руху тіла по похилій площині

3. руху тіла вертикально вниз 4. руху тіла в горизонтальному напрямку

15. Одиниця вимірювання роботи, виражена через основні одиниці Міжнародної системи одиниць (СІ):

1. $кг \cdot м^2/с$ 2. $кг \cdot м/с^2$ 3. $кг \cdot м^2/с^2$ 4. $кг \cdot м/с$

16. Одиниця вимірювання потужності, виражена через основні одиниці Міжнародної системи одиниць (СІ):

1. $кг \cdot м/с$; 2. $кг \cdot м^2/с^3$ 3. $кг \cdot м/с^2$ 4. $кг \cdot м^2/с^2$

17. Механічна робота консервативної сили залежить від

1. траєкторії руху тіла 2. початкового і кінцевого положення тіла

3. швидкості переміщення тіла 4. кінетичної енергії тіла

18. В консервативній механічній системі тіло після переміщення вернулось в початкове положення. Робота сил, що діють на тіло:

1. дорівнює нулю 2. залежить від вибору системи відліку

3. залежить від траєкторії руху 4. швидкості переміщення тіла

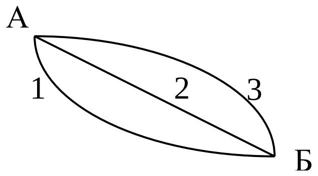
19. Тіло масою m підіймають вертикально на висоту h із прискоренням a. Робота, яку виконує при цьому сила натягу канату, дорівнює

1. A=m(g-a)h 2. A=mgh 3.A=m(g+a)h 4.A=mah.

20. Сила не виконує роботи, якщо кут між векторами сили і переміщення дорівнює

1. нулю 2. 45^0 3. 90^0 4. 180^0

21. Тіло переміщується з точки А у точку Б у вертикальній площині за різними траєкторіями. Робота сили тяжіння при цьому задовольняє співвідношенню

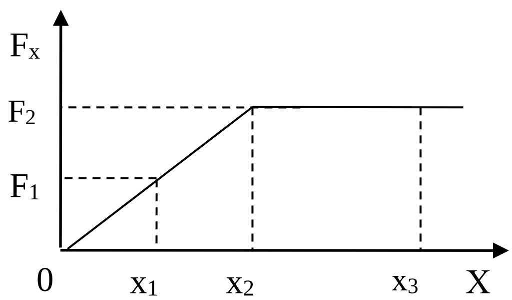


1. $A_1 < A_2 < A_3$ 2. $A_1 > A_2 > A_3$
3. $A_1 < A_2 = A_3$ 4. $A_1 = A_2 = A_3$

22. З нижче перелічених сил неконсервативною є сила

1. пружності; 2. гравітаційної взаємодії; 3. кулонівська сила; 4. сила тертя.

23. Тіло переміщується вздовж вісі 0X. На рисунку показана залежність проекції F_x сили, що діє на тіло, від координати x.



А) Робота сили на ділянці шляху (x_1, x_2) визначається за формулою

1. $A = F_1 \cdot (x_2 - x_1)$
2. $A = F_2 \cdot (x_2 - x_1)$
3. $A = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) \cdot (x_2 - x_1)$

Б) Робота сили на ділянці шляху (x_2, x_3) визначається за формулою

1. $A = F_2 \cdot (x_3 - x_2)$ 2. $A = \frac{1}{2} F_2 \cdot x_3$ 3. $A = \frac{1}{2} F_2 \cdot (x_3 - x_2)$ 4. $A = \frac{1}{2} F_2 \cdot x_2$

24. Кран потужністю 2кВт підіймає вантаж з постійною швидкістю 0,5м/с. Максимальна маса вантажу, який може підняти цей кран дорівнює (g = 10м/с^2).

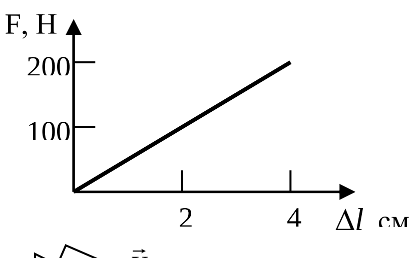
1. 400кг 2. 100кг 3. 4000кг 4. 1000кг

25. Вантаж масою 100кг підняли за допомогою канату вертикально угору на висоту 5 метрів. Робота, що виконана силою натягу канату,

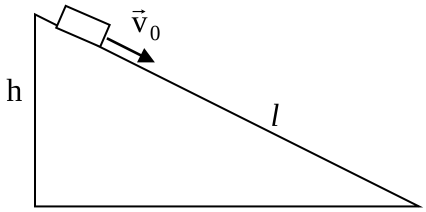
1. дорівнює 5 кДж 2. дорівнює 2,5 кДж
3. дорівнює 10 кДж 4. залежить від характеру руху вантажу

26. На рисунку наведений графік залежності сили пружності від видовження пружини. Потенціальна енергія пружини, яка розтягнута на 2см, дорівнює

1. 0,5 Дж 2. 1,0 Дж 3. 50 Дж 4. 100 Дж.



27. Тіло маси m зісковзує з похилої площини з початковою швидкістю v_0. У нижній точці траєкторії швидкість тіла має початкове значення v_0.



У процесі руху на тіло діє сила тертя. Робота сили тертя на усьому шляху руху тіла дорівнює

1. 0 2. mgh 3. $-mgh$ 4. $-mgl$ 5. $\frac{mv_0^2}{2}$

28. Механічна енергія системи зберігається, якщо
   1. система замкнена
   2. у системі діють тільки консервативні сили
   3. система замкнена й у ній діють консервативні та дисипативні сили
   4. система замкнена й у ній діють тільки консервативні сили

29. За теоремою про кінетичну енергію зміна кінетичної енергії системи тіл дорівнює роботі:
   1. тільки консервативних сил, що діють у системі
   2. тільки дисипативних сил, що діють у системі
   3. тільки зовнішніх сил, що діють на систему
   4. усіх сил, що діють на систему

30. Градієнт потенціальної енергії тіла в полі тяжіння Землі
   1. дорівнює mgh і є скалярною величиною
   2. дорівнює mg і спрямований вертикально униз
   3. дорівнює mg і спрямований вертикально уверх

31. Градієнт потенціальної енергії пружно деформованої пружини
   1. дорівнює kx і спрямований від положення рівноваги
   2. дорівнює $\frac{kx^2}{2}$ і є скалярною величиною
   3. дорівнює kx і спрямований до положення рівноваги

32. Під час прискореного руху тіла його кінетична енергія збільшилася у 4 рази. Імпульс тіла при цьому збільшився у
   1. 2 рази 2. 4 рази 3. 16 разів

33. Для замкненої системи тіл, у якій діють тільки консервативні сили, рівняння збереження та перетворення механічної енергії має вид
   1. $W = W_k + W_p$ 2. $\Delta W = 0$ 3. $\Delta W = A^{дис.}$. 4. $\Delta W = A^{зовн.}$.

34. Для замкненої системи тіл, у якій діють консервативні та дисипативні сили, рівняння збереження та перетворення механічної енергії має вид
   1. $W = W_k + W_p$ 2. $\Delta W = 0$ 3. $\Delta W = A^{дис.}$. 4. $\Delta W = A^{зовн.}$.

35. Для незамкненої системи тіл, внутрішні сили у якій є тільки консервативними, рівняння збереження та перетворення механічної енергії має вид
   1. $W = W_k + W_p$ 2. $\Delta W = 0$ 3. $\Delta W = A^{дис.}$. 4. $\Delta W = A^{зовн.}$.

36. З наведених стверджень не справджується для кінетичної енергії таке:
   1. суттєво додатна величина 2. є відносною величиною
   3. не залежить від системи відліку 4. є адитивною величиною

37. З наведених тверджень не справджується для потенціальної енергії таке:
   1. суттєво додатна величина 2. вводиться тільки у випадку дії консервативних сил
   3. є алгебраїчною величиною 4. залежить від вибору нульового рівня

38. Робота, яка виконується при підійманні літака на висоту 5км більша роботи по наданню йому при цьому швидкості 360км/год у

1. 20 разів   2. 10 разів   3. 5 разів   4. 12 разів

(Прискорення вільного падіння прийняти рівним 10 м/с^2).

39. На катер діє сила опору, пропорційна квадрату його швидкості. Для збільшення швидкості човна у 2 рази потужність його двигуна необхідно збільшити у

1. 8 разів   2. 4 рази   3. 2 рази   4. $\sqrt{2}$ раз.

40. Тіло масою 10кг рухається за законом $x = (5 + 2t^3)$м. Через 1 с після початку руху кінетична енергія тіла дорівнюватиме

1. 360Дж   2. 180Дж   3. 90Дж   4. 120Дж

41. Для збільшення швидкість тіла масою 2кг від 3 м/с до 5 м/с треба виконати роботу, яка дорівнює

1. 4Дж   2. 8Дж   3. 16Дж   4. 32Дж

42. Сила тяги двигунів літака при швидкості польоту 650м/с дорівнює 200кН. Потужність двигунів при такому режимі польоту дорівнює

1. 650 кВт   2. 1300 кВт   3. 130 МВт   4. 65 МВт   5. 13 МВт.

43. Максимальна висота підйому тіла масою 1кг, кинутого з поверхні Землі зі швидкістю 10 м/с складає 3м. Якщо знехтувати опором повітря, кінетична енергія тіла у верхній точці траєкторії дорівнює (прийняти g = 10м/с^2)

1. 10Дж   2. 20Дж   3. 50Дж   4. 0

44. При переміщенні тіла по горизонтальній поверхні на відстань 5м силою 20Н була виконана робота 50Дж. Кут між напрямами сили та переміщення складає

1. 0^0 2. 30^0 3. 45^0 4. 60^0

45. При переведенні системи з початкового у кінцевий стан зовнішніми силами була виконана робота 13Дж. Потенціальна енергія системи зросла на 19Дж. Тертя відсутнє. Зміна кінетичної енергії системи при цьому дорівнює

1. 32 Дж   2. 6 Дж   3. -6Дж   4. -32 Дж

46. Для підйому однорідного стриженя довжиною 2м та масою 120кг у вертикальне положення необхідно виконати роботу (прийняти g = 10м/с^2)

1. 0,6 кДж   2. 1,2 кДж   3. 2,4 кДж   4. 4.8 кДж

47. Тіло кинули уверх зі швидкістю 20 м/с. На висоті 10м відношення кінетичної енергії тіла до потенціальної становить (прийняти g = 10м/с^2)

1. 0,5   2. 1   3. 1,5   4. 2

48. Якщо кінетична енергія тіла масою 2 кг у деякий момент часу дорівнює 25Дж, модуль його імпульсу у цей момент дорівнює

1. 5 $^{кг \cdot м}\!/_{с}$ 2. 10 $^{кг \cdot м}\!/_{с}$ 3. 12.5 $^{кг \cdot м}\!/_{с}$ 4. 50 $^{кг \cdot м}\!/_{с}$

49. На моторний човен діє сила опору, пропорційна його швидкості. Для збільшення швидкості човна у 2 рази потужність його двигуна необхідно збільшити у

1. 8 разів   2. 4 рази   3. 2 рази   4. $\sqrt{2}$ разів

Розділ 4. Динаміка обертального руху твердого тіла

Тема: Момент інерції як міра інертних властивостей тіла при обертальному русі. Залежність моменту інерції від розмірів, форми тіла та осі обертання. Момент сили відносно полюсу і відносно осі. Момент імпульсу відносно полюсу і відносно осі. Рівняння моментів. Момент імпульсу абсолютно твердого тіла. Основний закон динаміки обертального руху твердого тіла. Закон збереження моменту імпульсу. Кінетична енергія обертального руху абсолютно твердого тіла. Робота сили при обертальному русі тіла. Умови рівноваги тіл, що мають вісь обертання.

Основні поняття і формули

● **Момент інерції I** є мірою інертних властивостей тіла при обертальному русі.

Момент інерції I матеріальної точки відносно довільної осі

$$I = mr^2 \tag{1.40}$$

де m – маса точки; r – відстань від точки до осі.

Момент інерції тіла є адитивною величиною, тобто дорівнює сумі моментів інерції матеріальних точок, з яких воно складається:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 ,$$

де n – кількість матеріальних точок.

При суцільному розподілі мас з урахуванням виразу елементарної маси dm через густину речовини ρ, момент інерції знаходиться за формулою:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV .$$

Моменти інерції деяких тіл, знайдені за формулою(5.3):

а) тонкостінного циліндра (тонкого кільця) відносно осі, що збігається з віссю циліндра (кільця),

$$I = mR^2, \tag{1.41}$$

де R – радіус циліндра (кільця), m – його маса;

б) товстостінного циліндру (кільця) відносно осі, що збігається з віссю циліндра (кільця),

$$I = \frac{1}{2} m\left(R_1^2 + R_2^2\right), \tag{1.42}$$

де R_1 і R_2– відповідно внутрішній і зовнішній радіуси циліндра (кільця), m – його маса;

б) суцільного однорідного циліндра (диска) радіуса R відносно його осі

$$I = \frac{1}{2} mR^2; \tag{1.43}$$

в) однорідного стрижня масою m, що має довжину l, відносно осі, яка проходить через центр мас перпендикулярно до осі стриженя,

$$I = \frac{1}{12} ml^2; \tag{1.44}$$

г) однорідної кулі масою m і радіуса R відносно осі, яка проходить через центр кулі, тобто збігається з діаметром кулі

$$I = \frac{2}{5} mR^2 . \qquad (1.45)$$

Теорема Гюйгенса – Штейнера дозволяє виразити момент інерції тіла I відносно довільної осі O′O′, якщо завдано момент інерції I_0 відносно осі OO, що проходить через центр мас тіла C паралельно даній осі,

$$I = I_0 + ml_0{}^2 , \qquad (1.46)$$

де m – маса тіла; l_0 – відстань між осями (рис.1.49).

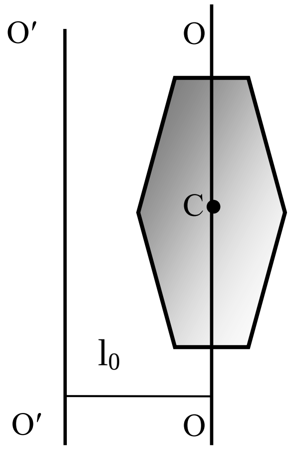


Рис.1.49 До теореми Гюйгенса-Штейнера

● **Момент сили** характеризує обертальну дію сили, прикладеної до тіла, яке має центр або вісь обертання.

Моментом сили $\vec{M}$ **відносно точки** (полюсу) O називають векторний добуток радус-вектору $\vec{r}$, проведеного від полюса до точки прикладання сили, на вектор сили:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]. \qquad (1.47)$$

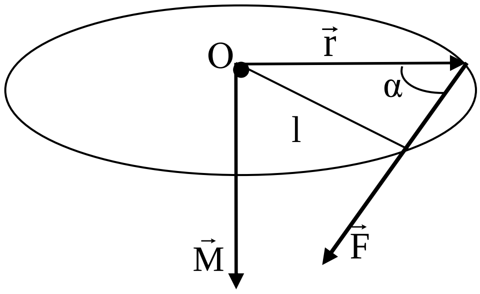


Рис.1.50 Момент сили відносно полюсу.

Вектор моменту сили $\vec{M}$ завжди перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}$, а його напрям визначається за правилом правого свердлика (рис.1.50).

Величина моменту сили може бути визначена як добуток модуля сили на плече l:

$$M = Fl \qquad (1.47a)$$

Плече сили - найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили*:*

$$l = r \sin\alpha$$

де α - кут між напрямом дії сили та радіус-вектором точки прикладення сили $\vec{r}$.

Моментом сили відносно осі називають проекцію моменту сили відносно точки, що лежить на осі на цю вісь:

$$M_z = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]_z .$$

Величина моменту сили M_z відносно деякої осі 0Z може бути визначена за формулою

$$M_z = F_{\perp} l , \qquad (1.48)$$

де $F_{\perp}$ – проекція сили $\vec{F}$ на площину, яка є перпендикулярною до осі 0Z, l – плече проекції $F_{\perp}$ відносно точки перетину цієї площини з віссю.

У випадку дії сили по дотичній до поверхні тіла, переріз якого має форму кола (колесо, циліндр, куля і т. ін.), а вісь обертання збігається з віссю симетрії, плече сили – це радіус кола (рис.1.51).

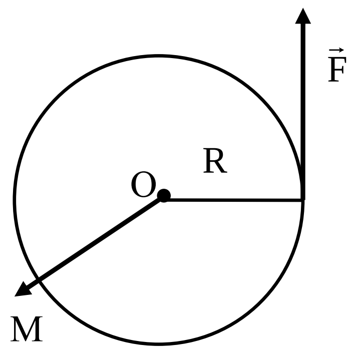


Рис.1.51 Момент сили, що діє по дотичній.

● **Момент імпульсу** $\vec{L}$ є векторною мірою руху при обертальному русі тіла.

Моментом імпульсу $\vec{L}$ **матеріальної точки відносно полюсу O** називають векторний добуток радус-вектору $\vec{r}$, проведеного від полюса до матеріальної точки, на вектор її імпульсу:

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right]. \qquad (1.49)$$

Напрям вектора $\vec{L}$ визначається за правилом **правого** свердлика.

В окремому випадку руху матеріальної точки по колу радіусу r, момент її імпульсу за величиною дорівнює:

$$L = mrv. \qquad (1.50)$$

Моментом імпульсу відносно осі називають проекцію моменту імпульсу відносно точки, що лежить на осі на цю вісь:

$$L_z = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right]_z.$$

Величина моменту імпульсу L_z **твердого тіла** відносно осі обертання 0Z знаходиться за формулою:

$$L_z = I_z\omega, \qquad (1.51)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі OZ, ω – кутова швидкість.

● **Рівняння динаміки обертального руху** твердого тіла навколо нерухомої осі 0Z має вигляд:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{(e)}, \qquad (1.52)$$

де $M_z^{(e)}$ – алгебраїчна сума моментів усіх зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно осі 0Z.

Якщо момент інерції залишається постійним у процесі руху, рівняння (1.52) приймає вигляд:

$$I_z\varepsilon = M_z^{(e)}, \qquad (1.53)$$

де ε – кутове прискорення.

● Зміна моменту імпульсу твердого тіла при обертанні відносно нерухомої осі згідно (1.52) дорівнює:

$$d(I_z\omega) = M_z dt.$$

Якщо $M_z^{(e)} = 0$ (система замкнена або рівнодійна моментів зовнішніх сил дорівнює нулю), виконується закон збереження моменту імпульсу відносно осі 0Z:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} I_{zi}\omega_i = \text{const}. \tag{1.54}$$

● **Умови рівноваги** тіла, що має вісь обертання:

А) Векторна сума усіх зовнішніх сил, що діють на тіло дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} = 0. \tag{1.55}$$

Б) Векторна сума моментів усіх зовнішніх сил, що діють на тіло дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(e)} = 0. \tag{1.56}$$

● **Робота сили при обертанні твердого тіла** визначається за формулою:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_\omega d\varphi \tag{1.57}$$

де M_ω – проекція моменту сили на напрям вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$, φ–кут, на який повертається тіло.

У випадку дії постійного моменту сили вираз (1.57) приймає вигляд:

$$A = M_\omega(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi M_\omega N, \tag{1.57а}$$

де N – кількість обертів тіла.

● **Миттєва потужність** при обертальному русі твердого тіла дорівнює:

$$P = M_\omega \cdot \omega$$

● **Кінетична енергія** тіла, що обертається навколо нерухомої осі, обчислюється за формулою:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{1.58}$$

Кінетична енергія тіла, що котиться без ковзання, дорівнює:

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \tag{1.59}$$

де $v_c = \omega R$ – швидкість центра мас, R – радіус тіла; I_c – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас паралельно миттєвій осі обертання.

Методичні вказівки. Розв’язання задач про обертальний рух тіл за допомогою законів динаміки зручно здійснювати за такою схемою:

− установити кількість тіл, що рухаються та характер руху кожного тіла (поступальний чи обертальний);

− розглянути сили та моменти сил, які діють на кожне тіло (при необхідності зробити рисунок);

– записати рівняння руху кожного тіла: на основі другого закону Ньютона (для тіл, які рухаються поступально) і на основі закону динаміки обертального руху (для тіл, що обертаються).
– якщо тіло одночасно приймає участь у поступальному та обертальному русі, для нього можна записати або два рівняння (поступального руху центра мас та обертального руху відносно осі, що проходить через центр мас і є паралельною миттєвій осі обертання), або одне рівняння (обертального руху відносно миттєвої осі обертання);
– до системи рівнянь слід додати співвідношення, які надають зв’язок між кінематичними характеристиками поступального і обертального рухів.

У запропонованих для розв’язку задачах розглядається або плоский рух тіл, при якому вісь обертання переміщується у просторі паралельно сама до себе, або обертання тіл навколо нерухомої осі. При цьому у більшості випадків моменти сил спрямовані вздовж осі обертання, що спрощує перехід до запису рівнянь у проекціях на координатні вісі.

У деяких випадках використання законів збереження, зокрема закону збереження енергії, дозволяє виключити з розгляду сили і моменти сил, визначити які іноді досить складно, і спрощує розв’язування задач. Але такий метод потребує попереднього аналізу правомірності застосування законів збереження.

Приклади розв’язання задач

Приклад 1.33. Плоский маховик завтовшки h=0,02 м і радіусу R_1=0,5м закріплений на осі двигуна. Маховик має чотири циліндричні вирізи радіусу r = 0,1м, які симетрично розташовані на відстані R_2=0,3м від осі (рис.1.52). Визначити момент інерції маховика відносно осі. Маховик виготовлений із сталі, густина якої ρ=7800 кг/м^3.

h=0,02 м
R_1=0,5м
r = 0,1м
R_2=0,3м
N=4
ρ=7800 кг/м^3

I – ?

Розв’язання.

Момент інерції тіла є адитивною величиною. Це дозволяє визначити момент інерції маховика як момент інерції суцільного диска I_0 без моментів інерції чотирьох вирізаних частин.

Момент інерції суцільного диску визначається за формулою $I_0 = \frac{1}{2} m_0 R_1^2$. Маса суцільного диску дорівнює

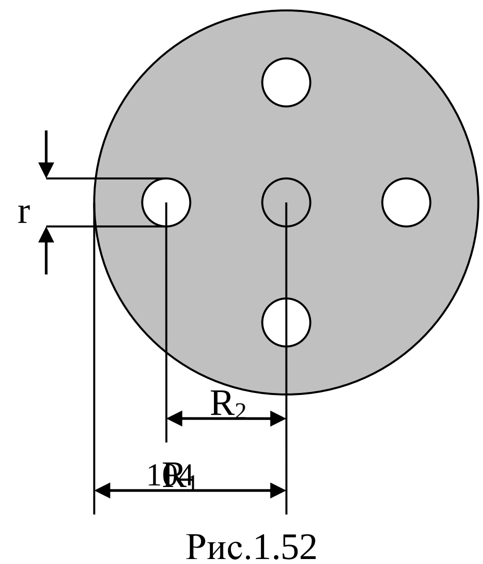


Рис.1.52

$m_0 = \rho V = \rho\pi R_1^2 h$. Звідси маємо:

$$I_0 = \frac{1}{2}\pi\rho R_1^4 h. \qquad (1)$$

Момент інерції однієї з вирізаних частин диску I_1' знаходимо за теоремою Гюйгенса - Штейнера: $I_1' = I_1 + m_1 l_0^{\,2}$, де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2$, $l_0 = R_2$; $m_1 = \rho\pi r^2 h$ – маса вирізаної з отвору частини диску. Отже, маємо:

$$I_1' = \pi\rho r^2 h\left(\frac{1}{2} r^2 + R_2^2\right). \qquad (2)$$

Користуючись (1) і (2), отримуємо формулу для моменту інерції маховика відносно осі валу:

$$I = I_0 - 4I_1' = \pi\rho h\left(\frac{1}{2} R_1^4 - 4r^2\left(\frac{1}{2} r^2 + R_2^2\right)\right).$$

Чисельний розрахунок дає:

$$I = 3{,}14 \cdot 7800 \cdot 0{,}02\left(0{,}5 \cdot 0{,}5^4 - 4 \cdot 0{,}1^2\left(0{,}5 \cdot 0{,}1^2 + 0{,}3^2\right)\right) = 13{,}4\,(\text{кг}\cdot\text{м}^2).$$

Відповідь: I=13,4 кг·м^2.

Приклад 1.34. Маховик, момент інерції якого I=13,4 кг·м^2 (див. приклад 1.33), розкручують так, що його кутова швидкість змінюється з часом за законом $\omega = \omega_0 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right)$, де τ = 8 с, ω_0= 25,12 рад/с. Знайти: а) момент зовнішніх сил, що діють на маховик через 2 секунди після початку руху; б) кінетичну енергію, яку маховик запасає на цей момент часу.

I=13,4 кг·м^2
$\omega = \omega_0 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right)$
$\tau = 8$ с
ω_0= 4π рад/с
M_z; W_k – ?

Розв’язання.

За законом динаміки обертального руху твердого тіла момент сил M_z, що діють на нього, зв’язаний з кутовим прискоренням ε рівнянням

$$I_z \varepsilon = M_z^{(e)}, \qquad (1)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання.

Кутове прискорення маховика знаходимо за означенням:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{4\pi}{\tau}\omega_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right) = \frac{2\pi}{\tau}\omega_0 \sin\left(\frac{4\pi}{\tau} t\right). \qquad (2)$$

З (1) з урахуванням (2) визначаємо момент сил, що діють на маховик:

$$M_z = I_z \frac{2\pi}{\tau}\omega_0 \sin\left(\frac{4\pi}{\tau} t\right).$$

Обчислення дає $M_z = 13{,}4 \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14}{8} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \sin\left(\frac{4\pi}{8} \cdot 2\right) = 132 \sin\pi = 0$.

Отже, через дві секунди після початку руху момент сил, що діють на маховик, буде дорівнювати нулю.

Кінетичну енергію маховику обчислюємо за формулою $W_k = \dfrac{I\omega^2}{2}$, або

$$W_k = \frac{I\omega_0^2}{2}\sin^4\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right).$$

Чисельний розрахунок дає

$$W_k = \frac{13{,}4\cdot 16\cdot 3{,}14^2}{2}\sin^4\left(\frac{2\pi}{8}\cdot 2\right) = 1057\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1057\,(\text{Дж}).$$

Кінетична енергія маховика дорівнює роботі, яку він може виконати після відключення двигуну. Ця властивість маховиків використовується в інерційних двигунах.

Відповідь: $M_z = 0$; $W_k = 1057$ Дж.

Приклад 1.35. Блок масою m = 1кг закріплений наприкінці столу. Тягарці однакової маси $m_1 = m_2 = 1$ кг з'єднані ниткою, яка перекинута через блок. Коефіцієнт тертя тягарця 2 о стіл дорівнює $\mu = 0{,}1$. Визначити прискорення a, з яким рухаються тягарці. Блок вважати однорідним диском. Тертям у блоці та вагою нитки знехтувати.

$m = 1$ кг
$m_1 = 1$ кг
$m_2 = 1$ кг
$g = 9{,}8$ м/с^2
$\mu = 0{,}1$

a-?

Розв'язання.

Обидва тягарця рухаються поступально, а рух блоку – це обертальний рух навколо нерухомої осі.

Рівняння руху тягарців, які записані на основі другого закону Ньютона, мають вигляд (див. приклад 1.18):

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}; \tag{1}$$

$$\vec{T}_2 + \vec{F}_{тр} = m_2\vec{a}. \tag{2}$$

Рух блоку описує основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = I\cdot\vec{\varepsilon}, \tag{3}$$

де $\vec{M}_1$ і $\vec{M}_2$ - моменти сил $\vec{T}_1'$ і $\vec{T}_2'$, що діють на блок з боку нитки (див. рис. 1.53); I – момент інерції блоку; $\vec{\varepsilon}$ - кутове прискорення.

За третім законом Ньютона маємо: $\vec{T}_1 = -\vec{T}_1'$, $\vec{T}_2 = -\vec{T}_2'$. Якщо радіус блоку дорівнює R, моменти $\vec{M}_1$ і $\vec{M}_2$ відповідно дорівнюють $M_1 = T_1\cdot R$; $M_2 = T_2\cdot R$. З урахуванням вище отриманого рівняння (3) в проекції на вісь O приймає вид:

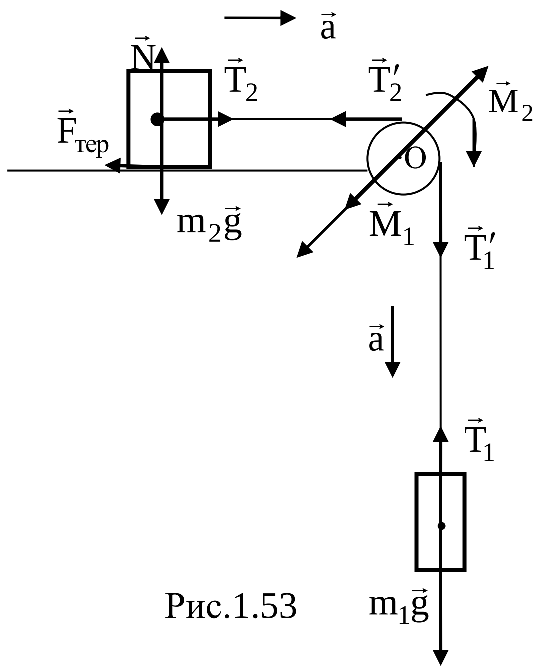


Рис.1.53

$$(T_1 - T_2)R = I\varepsilon. \qquad (4)$$

Момент інерції блоку, який має форму диска, надає формула $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Кутове прискорення ε, з яким рухається блок, пов'язано з лінійним прискоренням а співвідношенням

$$a = \varepsilon R.$$

Після підстановки ε та I у (4) отримуємо:

$$T_1 - T_2 = \frac{ma}{2}. \qquad (5)$$

Рівняння руху (1) і (2) тіл m_1 і m_2 в проекції на напрямок руху (з урахуванням виразу для сили тертя $F_{тр} = \mu N = \mu m_2 g$) приймають вигляд:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a; \qquad (6)$$

$$T_2 - \mu m_2 g = m_2 a. \qquad (7)$$

Рівняння (5), (6) і (7) утворюють систему. Додаючи їх одне до одного, визначаємо прискорення

$$a = g\frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}.$$

Чисельний розрахунок дає

$$a = 9{,}8 \cdot \frac{1 - 0{,}1 \cdot 1}{1 + 1 + 0{,}5} \text{ м/с}^2 = 3{,}53 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: a = 3,53 м/с^2.

Приклад 1.36. З похилої площини висотою h, яка утворює кут α з горизонтом, скочується без ковзання порожній тонкостінний циліндр маси m. Знайти а) прискорення центру мас циліндру; б) силу тертя, що діє на нього; в) швидкість центру мас циліндру наприкінці руху.

h
$I = \gamma m R^2$
$\gamma = 1$
α
m
a - ?
$F_{тер.}$ - ?
v_c - ?

Розв'язання

Рух циліндру при скочуванні з похилої площини розглядаємо як поступальний рух центра мас циліндру з одночасним обертанням циліндру відносно осі OZ, що проходить через центр мас. На циліндр діють сили тяжіння $\vec{F}_т$, реакції опори $\vec{N}$, а також сила тертя $\vec{F}_{тер.}$. Моменти сил $\vec{F}_т$ і $\vec{N}$ дорівнюють нулю, оскільки лінії дії цих сил проходять через вісь обертання (рис.1.54). Таким чином, до обертання циліндру при скочуванні з похилої площини призводить момент сили тертя $M_{тер} = RF_{тер.}$ (R – радіус циліндру). На основі законів динаміки записуємо рівняння поступального та обертального руху циліндру у проекціях на координатні осі OX і OZ відповідно:

$ma = mg\sin\alpha - F_{тер.}$; (1)

$I\varepsilon = RF_{тер.}$. (2)

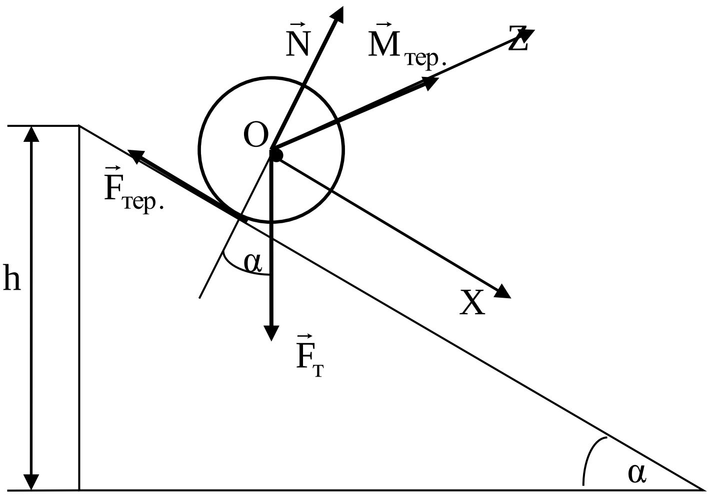


Рис. 1.54

Ці рівняння справедливі незалежно від характеру руху циліндру з ковзанням чи без ковзання. Якщо циліндр рухається без ковзання, до них можна додати кінематичне рівняння, яке зв’язує лінійне та кутове прискорення:

$a = \varepsilon R$ (3)

Рівняння (1)–(3) утворюють замкнену систему. З рівняння (2) виражаємо силу тертя:

$$F_{тер.} = \frac{I\varepsilon}{R} = \frac{Ia}{R^2}. \qquad (5)$$

Підстановка (5) в (1) дозволяє визначити лінійне прискорення центру мас циліндру:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \dfrac{I}{mR^2}}. \qquad (6)$$

Представимо момент інерції тіла, що скочується, у вигляді:

$$I = \gamma mR^2, \qquad (7)$$

де γ – чисельний коефіцієнт, який ураховує розподіл мас у тілі. (Для порожнього циліндру або обруча γ =1; для суцільного циліндру або диску γ =1/2; для кулі γ =2/5).

З урахуванням (7) прискоренню (6) можна надати вигляду:

$$a=\frac{g\sin\alpha}{1+\gamma}\ . \qquad (6a)$$

Із (5), з використанням (6а) та (7), для сили тертя отримуємо:

$$F_{\text{тер.}}=\frac{Ig\sin\alpha}{\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)R^2}=\frac{\gamma mg\sin\alpha}{(1+\gamma)}. \qquad (8)$$

Швидкість центру мас циліндра наприкінці рівноприскореного руху вздовж похилої площини можна визначити за кінематичним виразом: $v^2-v_0^2=2aS$. Початкова швидкість циліндра $v_0=0$, а довжина шляху S дорівнює довжині похилої площини $S=\frac{h}{\sin\alpha}$. Звідси, з урахуванням (6а) і (7), для кінцевої швидкості маємо:

$$v_c=\sqrt{\frac{2ah}{\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mR^2}}}=\sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}}. \qquad (9)$$

Формули (6а), (8), (9) записані у вигляді, який дозволяє визначити шукані величини при різних значеннях γ, тобто для тіл з різним розподілом мас. У випадку указаного в умові задачі порожнього циліндра $\gamma=1$.

Відповідь:

$$a=\frac{g\sin\alpha}{1+\gamma}=\frac{1}{2}g\sin\alpha;\quad F_{\text{тер.}}=\frac{\gamma mg\sin\alpha}{(1+\gamma)}=mg\sin\alpha;\quad v_c==\sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}}=\sqrt{gh}.$$

Зауважимо, що отриманий для сили тертя вираз (8) дозволяє визначити умову, за якою скочування тіла відбудеться без ковзання. Якщо вважати, що сила тертя при скочуванні (подібно силі тертя спокою) має максимальне значення, умовою скочування без ковзання буде виконання нерівності $F_{\text{тер.}}<F_{\text{тер.сп.}}$. Для тіла на похилій площині $F_{\text{тер.сп.}}=\mu mg\cos\alpha$. Тоді нерівність можна записати у виді $\frac{\gamma mg\sin\alpha}{(1+\gamma)}<\mu mg\cos\alpha$. Звідки умові відсутності ковзання при скочуванні можна надати вигляду $\mathrm{tg}\alpha<\frac{\mu(1+\gamma)}{\gamma}$.

Розглянемо розв'язання задачі про швидкість руху тіла, що скочується без ковзання з похилої площини (приклад 5.4), за законом збереження енергії, використання якого значно спрощує задачу.

Приклад 1.37. З похилої площини висотою h скочується без проковзування порожній тонкостінний циліндр. Знайти швидкість поступального руху циліндра наприкінці площини.

h
$I=\gamma mR^2$
$\gamma=1$
v_c -?

Розв'язання

При відсутності проковзування сила тертя не виконує роботу. Тоді, згідно закону збереження механічної енергії потенціальна енергія циліндру , яка у верхній точці дорівнює

$$W_p = mgh, \qquad (1)$$

у нижній точці повністю перетворюється у кінетичну енергію поступального та обертального руху циліндру

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}. \qquad (2)$$

У формулі (2): $I_c = \gamma mR^2$ – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас паралельно миттєвій осі обертання (див. (7), пр.5.4.), $v_c = \omega R$ – швидкість центра мас, R – радіус тіла.

Підстановка вищезазначених виразів у формулу (2) дає для кінетичної енергії:

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{\gamma mR^2 v_c^2}{2R^2} = \frac{mv_c^2}{2}(1+\gamma).$$

За законом збереження енергії $mgh = \frac{mv_c^2}{2}(1+\gamma)$.

Звідси $$v_c = \sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}},$$

що збігається з виразом, який був отриманий при розв'язанні попередньої задачі за допомогою законів динаміки.

Відповідь: $v_c == \sqrt{\frac{2gh}{1+\gamma}} = \sqrt{gh}$.

Приклад 1.38. На горизонтальній шорсткій поверхні лежить котушка ниток маси m. Момент інерції котушки відносно власної осі симетрії $I = \gamma mR^2$, де γ – чисельний коефіцієнт, R – зовнішній радіус котушки. Радіус шару ниток дорівнює r. Котушку тягнуть без проковзування за нитку з постійною силою $\vec{F}$, яка утворює кут α з горизонтом. З яким прискоренням a_x рухається вісь котушки? За якою умовою котушка буде рухатися у бік натягнутої нитки?

M
$I = \gamma mR^2$
R
r
α
$\vec{F}$

a_x - ?

Розв'язання

На котушку діють зовнішня сила $\vec{F}$, сила тяжіння $\vec{F}_т$ і сила реакції опори $\vec{N}$, а також сила тертя

$\vec{F}_{тер.}$ (див.рис1.55). Записуємо рівняння поступального та обертального руху котушки:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{тер.} + \vec{F}_{т.} + \vec{N}; \qquad (1)$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_F + \vec{M}_{тер.} \qquad (2)$$

У рівнянні (2) $\vec{M}_F$ і $\vec{M}_{тер.}$ – моменти сили $\vec{F}$ та сили тертя відносно осі симетрії котушки, як чисельно дорівнюють $M_F = F \cdot r$; $M_{тер.} = F_{тер.} \cdot R$ (3).

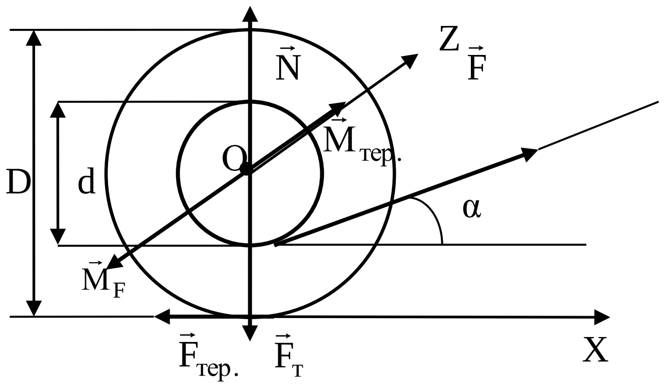


Рис.1.55

У проекції на осі OX та OZ рівняння (1) і (2) відповідно приймають вид:

$$ma_x = F\cos\alpha - F_{тер.}; \qquad (1а)$$

$$I\varepsilon = M_{тер.} - M_F, \qquad (2а)$$

або

$$I\varepsilon = F_{тер.} \cdot R - F \cdot r. \qquad (2б)$$

З рівняння (1а) виражаємо силу тертя

$$F_{тер.} = -ma_x + F\cos\alpha. \qquad (4)$$

З урахуванням (4), а також зв’язку між кутовим та лінійним прискоренням точок ободу котушки $\varepsilon = \frac{a_x}{R}$ рівнянню (2б) надаємо вигляду:

$$\frac{Ia_x}{R} = FR\cos\alpha - mRa_x - Fr.$$

Звідси
$$a_x = \frac{F(R\cos\alpha - r)}{\frac{I}{R} + mR} = \frac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{\frac{I}{R^2} + m}. \qquad (5)$$

Враховуючи, що за умов задачі момент інерції котушки $I = \gamma mR^2$ (γ – чисельний коефіцієнт, що ураховує форму котушки), отриманій формулі можна надати вигляд

$$a_x = \frac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{(1+\gamma)m}. \qquad (6)$$

Аналіз формули (6) показує, що знак a_x, тобто напрям прискорення і руху котушки залежать від співвідношення між величинами $\cos\alpha$ та $\frac{r}{R}$.

Кут, при якому змінюється напрям руху котушки знаходимо за умовою $\cos\alpha = \frac{r}{R}$. Якщо $\cos\alpha$ о $> \frac{r}{R}$, тобто кут α невеликий, то $a_x>0$, котушка котиться у позитивному напрямку осі OX. Якщо $\cos\alpha < \frac{r}{R}$, то $a_x<0$, і напрям руху змінюється на протилежний.

Слід звернути увагу на те, що сила тертя у даному випадку – це та сила, завдяки якій котушка рухається до нас при підтягуванні нитки.

Відповідь: $a_x = \dfrac{F(\cos\alpha - \frac{r}{R})}{(1+\gamma)m}$.

Приклад 1.39. На нерухомій платформі у формі однорідного горизонтального диску масою M=260кг і радіусом R=1,5м стоїть людина масою m=60 кг. Диск може обертатися навколо вертикальної осі, що проходить через його середину. В деякий момент людина почала рухатися зі швидкістю v=1,6м/с відносно платформи по колу радіусом r =1,2м, центр якого лежить на осі диска. З якою кутовою швидкістю ω почне обертатися диск? Людину вважати матеріальною точкою.

Дано
M =260кг
m =60 кг
R =1,5м
r =1,2м
v =1,6м/с
$\omega_0 = 0$
ω -?

Розв'язання

На систему діє зовнішня сила – сила тяжіння, момент якої відносно осі обертання дорівнює нулю. Це означає, що для системи „платформа – людина" виконується закон збереження моменту імпульсу:

$$L_{0z} = L_z. \quad (1)$$

Початковий момент імпульсу системи відносно осі платформи

$$L_{0z} = 0. \quad (2)$$

Момент імпульсу системи L_z після початку руху людини дорівнює сумі моментів імпульсу платформи (диску) L_{1z} і людини L_{2z} відносно осі платформи:

$$L_z = L_{1z} + L_{2z}. \quad (3)$$

Момент імпульсу диску $L_{1z} = I_1\omega$, де $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$. Звідси маємо:

$$L_{1z} = \frac{1}{2}MR^2\omega. \quad (4)$$

Момент імпульсу людини надається виразом

$$L_{2z} = I_2(\frac{v}{r} + \omega), \qquad (5)$$

де $I_2 = mr^2$– момент інерції людини, який розраховуємо за формулою моменту інерції матеріальної точки (поперечними розмірами людини нехтуємо порівняно з відстанню r); $(\frac{v}{r} + \omega)$ – швидкість обертання людини у системі відліку, що зв'язана із землею. Підстановка зазначених співвідношень в (5), дає:

$$L_{2z} = mr(v + \omega r). \qquad (6)$$

Підставляючи (2) і (3) з урахуванням (4) і (6) в (1), за законом збереження моменту імпульсу отримуємо:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + mr(v + \omega r) = 0.$$

Виражаємо кутову швидкість платформи:

$$\omega = -\frac{mrv}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}. \qquad (7)$$

Знак „–“ у формулі (7) означає, що платформа обертається у напрямку, протилежному напрямку руху людини.

Обчислення значення за формулою (8) дає ω=0,30 рад/с.
Відповідь: ω=0,30 рад/с.

Приклад 1.40. Маятник у виді однорідної кулі, жорстко скріпленої з тонким стрижнем довжиною l_0 = 20см, може коливатися відносно горизонтальної осі, що проходить через кінець стрижня (рис.5.8). У кулю нормально до її поверхні ударяє куля маси m = 10г, що рухалася зі швидкістю v = 800м/с, і застрягає в ній. Маса кулі M = 8кг, радіус R=10см. На який кут α відхилиться маятник внаслідок удару кулі? Масою стрижня знехтувати.

l_0 = 0,20м
m = 0,01кг
v = 800м/с
M = 8кг
R=0,1м

α - ?

Розв'язання

З рис. 1.56 витікає, що кут α зв'язаний з висотою підйому h центра кулі співвідношенням:

$$\cos\alpha = \frac{l_0 + R - h}{l_0 + R} = 1 - \frac{h}{l_0 + R}. \qquad (1)$$

За величиною h можна визначити потенціальну енергію, яку отримує маятник внаслідок удару кулі m.

Удар є непружним, оскільки після нього тіла рухаються як єдине ціле. В процесі зіткнення механічна енергія системи “маятник + куля” не зберігається, її частина переходить у внутрішню енергію.

Після удару для системи “маятник з кулею + Земля” закон збереження механічної енергії буде виконуватися, оскільки у системі діють тільки консервативні сили. Кінетична енергія обертального руху системи при підйомі маятника перетворюється в потенціальну енергію тіл у гравітаційному полі Землі. За законом збереження енергії,

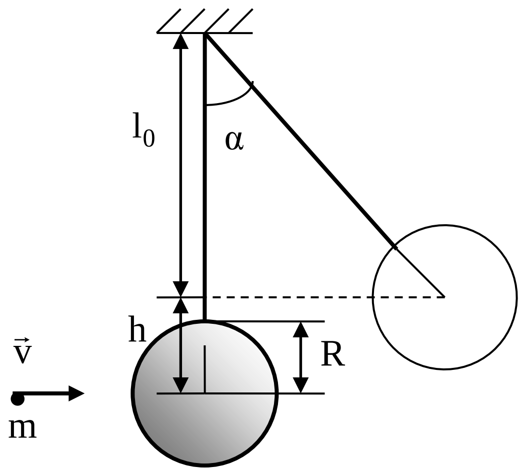


Рис.1.56

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mgh + mgh', \qquad (2)$$

де I – момент інерції маятника разом із кулею, що застрягла в ньому; h – висота підйому центра тяжіння маятника; h′ – висота підйому кулі. Точні значення величин I та h′ можна знайти тільки, якщо відомо місце, в яке влучила куля. Але, за умовою задачі, $M >> m$. Це дозволяє знехтувати величиною mgh' у рівнянні (2), а момент інерції визначити за теоремою Гюйгенса-Штейнера як момент інерції кулі M:

$$I = \frac{2}{5}MR^2 + M(l_0 + R)^2 = M\left(\frac{2}{5}R^2 + (l_0 + R)^2\right). \qquad (3)$$

Для визначення кутової швидкості ω, яку отримує система внаслідок удару, скористаємося законом збереження моменту імпульсу. Його використання є правомірним, бо моменти зовнішніх сил (реакції опори і сили тяжіння) в момент удару дорівнюють нулю, бо лінія їх дії проходить через вісь обертання.

Момент імпульсу системи L_1 до зіткнення дорівнює моменту імпульсу пулі відносно осі обертання маятника, який в цей момент є нерухомим:

$$L_1 = mv(l_0 + R). \qquad (4)$$

Момент імпульсу L_2 маятника з кулею, що застрягла в ньому, дорівнює

$$L_2 = I\omega. \qquad (5)$$

За законом збереження моменту імпульсу $L_1 = L_2$, звідки для кутової швидкості отримуємо

$$\omega = \frac{mv(l_0 + R)}{I}. \qquad (6)$$

Виключив з системи (2), (3), (6) невідомі I та ω, знаходимо

$$h = \frac{I\omega^2}{2Mg} = \frac{m^2v^2(l_0 + R)^2}{2M^2g\left(\frac{2}{5}R^2 + (l_0 + R)^2\right)}. \qquad (7)$$

Далі за формулою (1) визначаємо $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{m^2v^2(l_0 + R)}{2M^2g\left(\frac{2}{5}R^2 + (l_0 + R)^2\right)}. \qquad (8)$$

Чисельний розрахунок за формулою (8) дає $\cos\alpha = 0{,}837$; $\alpha = 33°$.
Відповідь: $\alpha = 33°$.

Приклад 1.41. Драбина довжиною l = 2,6м приставлена до стіни так, що утворює з підлогою кут α = 60º (рис. 1.57). Коефіцієнт тертя між драбиною і підлогою дорівнює μ=0,4. На яку висоту s по цій драбині може піднятися людина, перш ніж драбина почне падати? Вважати, що маса людини значно більша за масу драбини. Тертям між драбиною та стіною у точці опори знехтувати.

Розв’язання

l = 2,6м	
α = 60º	
μ=0,4	
s - ?	

На драбину діють такі сили: вага людини, яка дорівнює силі тяжіння людини $m\vec{g}$, сили реакції опори з боку підлоги $\vec{N}$ та стіни $\vec{N}_1$ та сила тертя спокою $\vec{F}_{тер.}$. За першою умовою рівноваги векторна сума усіх зовнішніх сил, що діють на драбину дорівнює нулю:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тер.} = 0. \qquad (1)$$

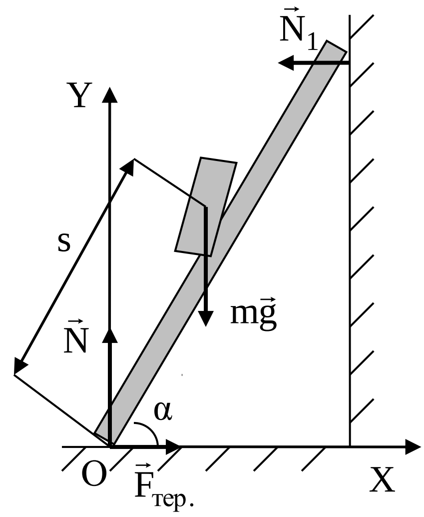


Рис. 1.57

Проектуючи рівняння (1) на осі OY та OX, отримуємо:

$$F_{тер.} - N_1 = 0; \qquad (1а)$$

$$N - mg = 0. \qquad (1б)$$

За другою умовою рівноваги векторна сума моментів усіх зовнішніх сил, які діють на драбину, дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{(e)} = 0. \qquad (2)$$

Обираємо у якості осі обертання лінію опори О драбини о підлогу. Тоді моменти сил $\vec{N}$ та $\vec{F}_{тер.}$ дорівнюють нулю, і до умови (2) увійдуть тільки моменти сил $m\vec{g}$ і $\vec{N}_1$:

$$N_1 l\sin\alpha + (-mgs\cos\alpha) = 0.$$

Звідси виражаємо $\vec{N}_1$:

$$N_1 = \frac{mgs}{l}\mathrm{ctg}\alpha. \qquad (3)$$

Згідно рівнянню (1а) $N_1 = F_{тер.}$. Коли людина досягає точки, з якої драбина починає зісковзувати, то сила тертя спокою досягає максимального значення $F_{тер.} = \mu N = \mu mg$. Отже

$$N_1 = \mu mg. \qquad (4)$$

Із (3) і (4) випливає:

$$\mu mg = \frac{mgs}{l}\mathrm{ctg}\alpha,$$

звідки знаходимо максимальну відстань, на яку людина може піднятися вздовж драбини: $s = \mu l \mathrm{tg}\alpha$.

Обчислення за умовами задачі дає $s = 0{,}69 \cdot l = 1{,}79$ м, тобто при заданих значеннях коефіцієнту тертя та кута α не слід підійматися по драбині вище за дві третини її довжини.

Відповідь: $s = 1{,}79$ м.

Задачі для самостійного розв’язування

1.85.(вар.1-25). За кінематичними характеристиками руху маховика, визначеними при розв’язанні відповідного варіанту задачі 1.35**,** знайти для моменту часу t=10с: а)момент імпульсу маховика; б) його кінетичну енергію; в) момент сили, що діє на маховик; г) миттєву потужність. Момент інерції маховика I = 6 кг·м^2.

1.86. На маховик діаметром d = 40см намотали шнур, до кінця якого прив’язали вантаж масою m = 2кг. Під дією вантажу система починає рухатися з постійним прискоренням. Визначити момент інерції I маховика, якщо відомо, що за час t = 2 с маховик набув кутову швидкість ω = 8 рад/с.

1.87. Через блок у вигляді диска перекинуто легку нерозтяжну нитку, до кінців якої прив’язані вантажі масою m_1= 0,4кг, m_2 = 0,6кг. Визначити кутове прискорення ε диска та силу F, з якою блок діє на вісь. Маса блоку m = 0,4кг, радіус R = 10см. Тертям знехтувати.

1.88. Блок у вигляді однорідного диска обертається з частотою n = 16 об/с. Визначити момент сили M, який необхідно прикласти до блоку, щоб зупинити його за час t = 8 с. Маса блоку m =5 кг, діаметр блоку d = 20см.

1.89. Однорідний стрижень довжиною L = 0,5м і масою m = 0,6кг обертається в горизонтальній площині відносно вертикальної осі, що проходить через його кінець. На стрижень діє момент сили M = 240 мН·м. Визначити прискорення ε, з яким обертається стрижень.

1.90. Диск обертається відносно осі, що проходить через центр перпендикулярно до площини диска. Маса диска m = 4кг, радіус R =0,2 м.

Залежність кута повороту диска від часу надається рівнянням φ=($A + Dt + Ct^2$)рад, де C = 3 рад/с^2. Визначити силу F, яка прикладена по дотичній до диска.

1.91. Маховик у формі диска обертається навколо своєї осі з частотою n = 30 об/с. Визначити масу маховика, якщо відомо, що гальмуючий момент M= 251,2 мН зупиняє маховик за час t = 12 с. Радіус диска R = 10см.

1.92. Дві кулі однакового радіуса R = 5см закріплені на кінцях невагомого стрижня. Відстань між центрами куль L = 0,8м. Маса кожної кулі m = 1кг. Визначити: а) момент інерції I_1 системи відносно осі, що проходить перпендикулярно до стержня через його середину; б) момент інерції I_2 тієї самої системи, якщо вважати кулі матеріальними точками; в) відносну помилку $\varepsilon = {(I_1 - I_2)}/{I_2}$ при обчисленні моменту інерції другим способом.

1.93. Визначити момент інерції однорідного диска масою m =1,5 кг і радіусом R = 12см відносно осі, що проходить перпендикулярно до площини диска через середину одного з радіусів.

1.94. Куля масою m = 5кг і радіусом R = 10см обертається відносно осі, що проходить через її центр. Рівняння, яке описує обертальний рух кулі φ = $A + Bt^2 + Ct^3$, де A = 10 рад, B= 6 рад/с^2, C= –2 рад/с^3. За яким законом змінюється момент сил, що діють на кулю? Чому дорівнює величина моменту сил M в момент часу t = 3 с?

1.95. Вал масою m = 60кг і радіусом R= 5см обертався з частотою n=10об/с. Для гальмування до циліндричної поверхні валу із силою F=50Н притиснули колодку, під дією якої вал зупинився через t = 10 с. Визначити коефіцієнт тертя μ між валом та колодкою.

1.96. Визначити швидкість поступального руху суцільного циліндра, який скотився без проковзування з похилої площини висотою h = 50см. Початкова швидкість циліндра v_0 = 0.

1.97. Тонкий обруч масою m = 0,8кг і радіусом R = 0,4м, котиться без проковзування зі швидкістю v = 2,5м/с по горизонтальній поверхні. Визначити момент імпульсу L обруча відносно миттєвої осі обертання (лінії доторкання обруча до поверхні).

1.98. Куля масою m = 1кг, яка котиться без проковзування, відбивається від стінки. Швидкість кулі до удару о стінку v_1=20см/с, після удару v_2=15см/с. Визначити кількість тепла Q, яка виділяється внаслідок цього зіткнення.

1.99. Колесо, яке обертається уповільнено з постійним прискоренням, за час t = 2 хв. зменшило частоту обертання з n_1 =360 об/хв. до n_2 = 120 об/хв. Визначити роботу гальмуючих сил A та повну кількість обертів N, зроблених колесом за цей час.

1.100. Маховик обертався з постійною частотою n = 900 об/хв. Після припинення дії на нього сил, які підтримували рівномірний рух, маховик зробив до зупинки N = 800 обертів. Момент інерції маховика I = 200 кг·м^2. Визначити момент сили M, яка гальмує рух, та її роботу A.

1.101. Маховик діаметром d = 40см і масою m = 30кг може накопичити 10кВт-год. енергії. З якою кутовою швидкістю він повинен обертатися? На яку максимальну висоту по гірській дорозі може піднятися автомобіль, повна маса якого M=1000кг, якщо на ньому установити цей маховик? Вважати, що вся накопичена енергія витрачається на підйом.

1.102. Олівець довжиною l = 12см, який поставили вертикально, падає на стіл. Визначити кутову швидкість ω та лінійну швидкість v середини та верхнього кінця олівця наприкінці падіння.

1.103. Обід велосипедного колеса діаметром d = 8м має масу m = 1,5кг. Чому дорівнює момент імпульсу колеса, якщо швидкість велосипедиста v=3,2м/с.

1.104. Куля, радіус якої = 0,2м і маса = 10кг, обертається навколо своєї осі згідно з рівнянням φ = $A + Bt^2 + Ct^3$, де B= – 3 рад/с^2, C = 1 рад/с^3. Визначити момент імпульсу кулі L та момент сили M, який діє на кулю, для моментів часу $t_1 = 1c$ і $t_2 = 2c$.

1.105. На краю платформи у виді диску стоїть хлопчик масою m_1 =50 кг. Платформа обертається за інерцією з частотою n_1=10 об/хв. Коли хлопчик перейшов до центру платформи, частота її обертання збільшилася до n_2=12об/хв. Визначити масу платформи m_2. Момент інерції людини розраховувати за формулою моменту інерції матеріальної точки.

1.106. На краю платформи у вигляді диска стоїть хлопчик масою m_1 =50 кг. На який кут φ обернеться платформа, якщо хлопчик обійде її по краю один раз? Маса платформи m_2=500 кг. Момент інерції людини розраховувати за формулою моменту інерції матеріальної точки.

1.107. Кулька масою m =200 г, яку прив’язали до нитки довжиною l = 0,8м, обертається, спираючись на горизонтальну площину, із частотою n_1=0,5об/с. З якою частотою n_2 буде обертатися кулька, якщо в процесі обертання довжину нитки скоротити удвічі? Яку роботу A виконає при цьому зовнішня сила, яка скорочує нитку? Тертям знехтувати. Кульку вважати матеріальною точкою.

1.108. Дробину масою m=10кг прислонили під кутом α=45° до гладкої стіни. З якою силою дробина тисне на стіну?

1.109. Однорідний стрижень масою m=10кг прислонили під кутом α=45° до стіни. Сила тертя стрижня о підлогу дорівнює 40Н. Чому дорівнює сила тертя стриженя о стінку?

1.110. До кінців однорідного стриженя вагою P=100Н і довжиною l=60см підвішені вантажі вагою P_1=400Н і P_2=100Н. На якій відстані від більшого вантажу слід підкласти опору, щоб стрижень залишився у рівновазі?

1.111. Однорідна балка масою m=120кг лежить на платформі так, що її кінець у чверть довжини балки виступає за край платформи. Яку мінімальну силу під кутом 60^o до вертикалі слід прикласти до цього кінця, щоб підняти протилежний її кінець?

1.112. Однорідний стрижень шарнірно закріплений за верхній кінець. Нижній кінець стриженя опущений у воду. Стрижень знаходиться у рівновазі, коли у воду занурена третина його довжини. Визначити густину речовини стриженя.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. Мірою інертних властивостей при обертальному русі тіла є його

1. маса 2. імпульс 3. момент інерції 4. прискорення 5. кінетична енергія

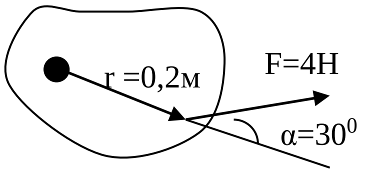
2. Момент сили відносно осі дорівнює

1. $\left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right]$

2. проекції моменту сили відносно полюса, що лежить на осі обертання на цю вісь

3. $rF\sin\alpha$

3. Момент сили відносно полюса у випадку, зображеному на рисунку дорівнює



1. 0,4 Н•м і спрямований вертикально униз
2. 0,8 Н•м і спрямований вертикально уверх
3. 0,4 Н•м і спрямований вертикально уверх
4. 0,8 Н•м і спрямований вертикально униз

4. **Установити відповідність:**

Момент інерції відносно осі симетрії тіла	Формула
1. тонке кільце радіуса R	А. $I=\frac{1}{2}mR^2$
2. суцільний циліндр радіуса R	Б. $I=\frac{2}{5}mR^2$
3. момент інерції суцільної кулі радіуса R	В. $I=\frac{2}{3}mR^2$
	Г. $I=mR^2$

Вибрати вірну відповідь.

5. Відношення моменту інерції тонкого кільця радіуса R відносно його осі до моменту інерції тонкостінного циліндру того самого радіуса, якщо маси тіл однакові, дорівнює

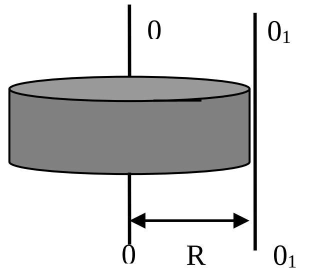
1. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{1}{2}$ 2. $\frac{I_1}{I_2}=2$ 3. $\frac{I_1}{I_2}=1$ 4. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{3}{2}$

6. Відношення моменту інерції диска радіуса R відносно його осі до моменту інерції суцільного циліндру того самого радіуса, якщо маси тіл однакові, дорівнює

1. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{1}{2}$ 2. $\frac{I_1}{I_2}=2$; 3. $\frac{I_1}{I_2}=1$ 4. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{3}{2}$

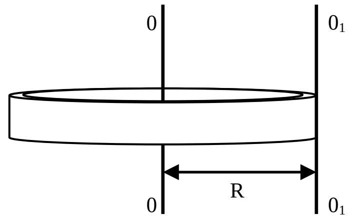
7. Відношення моменту інерції диска радіуса R відносно осі $0_1 0_1$ (див. рис.) до його моменту інерції відносно осі 00 дорівнює

1. 2 2. 1/2 3. 3 4. 1



8. Відношення моменту інерції стриженя довжиною l відносно перпендикулярної осі, що проходить через кінець стриженя, до його моменту інерції відносно паралельної осі, що проходить через середину стриженя, дорівнює

1. 2 2. 4 3. 1/2 4. 3/2



9. Відношення моменту інерції тонкого кільця радіуса R відносно осі $0_1 0_1$ (див. рис.) до його моменту інерції відносно осі 00 дорівнює

1. 2 2. ½ 3. 3/2 4. 1

10. Момент імпульсу абсолютно твердого тіла відносно осі обертання, визначає формула

1. L= rpsinα 2 $\vec{L}=[\vec{r}\cdot\vec{p}]$ 3. L=Iω

11. Момент імпульсу матеріальної точки відносно осі дорівнює

1. $L = rp\sin\alpha$
2. $\vec{L} = [\vec{r}\cdot\vec{p}]$
3. проекції моменту імпульсу відносно полюса, що лежить на осі обертання на цю вісь

12. Закон збереження моменту імпульсу є наслідком

1. однорідності простору 2. ізотропності простору
3. однорідності часу 4. серед наведених немає вірної відповіді

13. . Нитку, яка утримує маленьку кульку, що обертається, починають намотувати на стрижень, зменшуючи тим самим радіус обертання кульки. Момент зовнішніх сил при цьому дорівнює нулю.

1). Момент імпульсу кульки при цьому
2) Швидкість кульки при цьому

1. збільшується 2. зменшується 3. не змінюється

14. З одного рівня h похилої площини скочуються обруч, циліндр і куля. Більшу швидкість наприкінці шляху буде мати:

1. куля 2. циліндр 3. обруч 4. швидкість усіх тіл однакова

15. До циліндру, кулі та кільця, які мають однакові маси и радіуси, прикладені однакові моменти сил. Рухається з більшим прискоренням:

1. циліндр 2. куля 3. кільце 4. прискорення – однакове

16. Момент інерції точки, яка розташована на відстані вдвічі більшій від осі колеса, ніж друга точка такої самої маси,

1. удвічі більшій 2. такий самий 3. удвічі менший 4. більший у 4 рази

17. З одного рівня h похилої площини скочуються без ковзання обруч, циліндр і куля. Більший час на проходження шляху витратить:

1.обруч 2. циліндр 3. куля 4. час – однаковий

18. По горизонтальній поверхні котяться без ковзання кільце та диск, які мають однакові швидкості центрів мас і однакові маси. Відношення кінетичної енергії диска до кінетичної енергії кільця дорівнює:

1. 2 2. ½ 3. 1 4. ¾

19. Справедливим для обертального руху тіла, момент інерції якого змінюється у процесі руху, є закон динаміки обертального руху у виді

1. $\frac{dL_z}{dt} = M_z$ 2. $I\varepsilon = M$ 3. $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M$

20. Система матеріальних точок обертається відносно деякої осі. L_z - момент імпульсу системи відносно осі; M_z^i та M_z^e відповідно сумарні моменти внутрішніх та зовнішніх сил, що діють на систему, відносно ос. Рівняння моментів для цієї системи має вид:

1. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^i + M_z^e$ 2. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^i$ 3. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^e$ 4. $I\varepsilon = M$

21. Система матеріальних точок обертається відносно деякої осі. L_z - момент імпульсу окремої матеріальної точки відносно осі; M_z^i та M_z^e - сумарні моменти внутрішніх та зовнішніх сил, що діють на точку, відносно осі. Рівняння моментів для цієї матеріальної точки має вид

1. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^i + M_z^e$ 2. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^i$ 3. $\frac{dL_z}{dt} = M_z^e$ 4. $I\varepsilon = M$

22. У процесі гравітаційного стиску радіус зірки, що обертається навколо своєї осі, зменшився в 400 разів. Швидкість обертання зірки при цьому

1. збільшилась в 400 разів 2. зменшилась в $1{,}6 \cdot 10^5$ разів
3. збільшилась в $1{,}6 \cdot 10^5$ разів 4. зменшилась в 400 разів

23. Фігурист обертається навколо вертикальної осі з витягнутими руками. Якщо спортсмен підійме руки вгору, момент інерції тіла зменшиться від I_1 до I_2. Частота обертання при цьому

1. не зміниться 2. зменшиться у I_1/I_2 разів

3. збільшиться у I_1/I_2 разів 4. збільшиться у $\left(I_1/I_2\right)^2$ разів

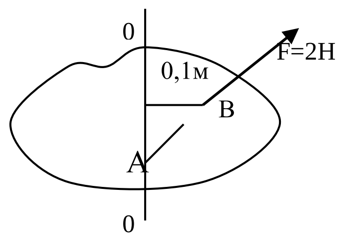
24. Спортсмен, який плигнув із вишки у воду, за рахунок зміни моменту інерції свого тіла від I_1 до I_2 збільшив швидкість обертання. Лінійне прискорення, з яким падає спортсмен, при цьому

1. зменшилось у I_1/I_2 разів 2. залишилось незмінним

3. збільшилось у I_1/I_2 разів 4. збільшилось у $\left(I_1/I_2\right)^2$ разів

25. Сила 2 Н прикладена до тіла в точці В, яка знаходиться на відстані 0,1м від осі обертання і напрямлена вздовж прямої АВ. Момент сили відносно осі дорівнює

1. 0,2 Н·м 2. нулю 3. 0,1 Н·м 4. $0{,}2\sin\alpha$ Н·м



26. Маховик, момент інерції якого $I = 100$ кг·м^2, обертається за законом $\varphi = \left(2 + 32t - 4t^2\right)$рад. Момент сили, що діє на маховик, дорівнює

1. 400 Н·м 2. - 800 Н·м 3. - 400 Н·м 4. 2400 Н·м

27. Вентилятор, що обертався рівносповільнено, зробив до зупинки 100 обертів. Робота гальмівних сил А= 62,8 Дж. Гальмівний момент дорівнює

1. 1 Н·м 2. 0,1 Н·м 3. 0,628 Н·м 4. 0,2 Н·м 5. 3.14 Н·м

28. Момент інерції кільця масою 500г і радіусом 10см відносно осі, яка є дотичною до кільця, дорівнює

1. 0,050 кг·м^2 2. 0,010 кг·м^2 3. 0,020 кг·м^2 4. 0,100 кг·м^2 5. 0,500 кг·м^2.

29. Повна енергія обруча, що котиться по горизонтальній поверхні, дорівнює 14 Дж. Кінетична енергія поступального руху обруча при цьому дорівнює

1. 10 Дж 2. 8 Дж 3. 7 Дж 4. 6 Дж 5. 4 Дж

30. Повна енергія суцільного циліндру, що котиться по горизонтальній поверхні, дорівнює 12 Дж. Кінетична енергія обертального руху циліндру при цьому дорівнює

1. 10 Дж; 2. 8 Дж 3. 7 Дж 4. 6 Дж 5. 4 Дж

31. Маховик обертається за законом $\varphi = 2 + 5t^2$ під дією моменту сили М= 500 Н·м. Момент інерції маховика дорівнює

1. 5000кг ·м^2 2. 200кг ·м^2 3. 100кг ·м^2 4. 50кг ·м^2 5. 20кг ·м^2

32. Алюмінієва та залізна кулі урівноважені на важелі. $\rho_{Al} < \rho_{Fe}$. Кулі мають однакову масу. Якщо кулі занурити у воду,

1. рівновага важеля не порушиться
2. переважить залізна куля
3. переважить алюмінієва куля
4. речовина куль не впливає на рівновагу

33. Алюмінієва та залізна кулі урівноважені на важелі. $\rho_{Al} < \rho_{Fe}$. Кулі мають однаковий об’єм. Якщо кулі занурити у воду,

1. рівновага важеля не порушиться
2. переважить залізна куля
3. переважить алюмінієва куля
4. речовина куль не впливає на рівновагу

Розділ 5. Неінерціальні системи відліку

Тема: Основне рівняння динаміки у неінерціальних системах відліку. Сили інерції при поступальному русі системи відліку. Сили інерції при обертальному русі системи відліку: відцентрова сила інерції; сила Коріоліса.

Основні поняття і формули

● Основне рівняння динаміки у неінерціальній системі відліку має вигляд:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ін},$$

де $\vec{a}'$ – прискорення матеріальної точки в неінерціальній системі відліку К′, $\vec{F}$ –рівнодійна сил, що діють на матеріальну точку з боку інших тіл, $\vec{F}_{in}$ – сили інерції.

● При поступальному русі неінерціальної системи відліку К′ відносно інерціальної системи К з прискоренням $\vec{a}_0$ сила інерції (поступальна)

$$\vec{F}_{ін} = -\, m\vec{a}_0. \qquad (1.60)$$

● Рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку, яка обертається зі сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ відносно нерухомої осі

$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\omega^2\vec{R} + 2m[\vec{v}'\vec{\omega}].$$

До рівняння, окрім сили $\vec{F}$, входять:

а) відцентрова сила інерції, яка спрямована вздовж радіуса кола, яке матеріальна точка описує в процесі свого руху,

$$\vec{F}_{вц} = m\omega^2\vec{R}, \qquad (1.61)$$

де $\vec{R}$ – вектор, що лежить у площині обертання і проведений від осі обертання до матеріальної точки;

б) сила Коріоліса

$$\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}], \qquad (1.62)$$

де $\vec{v}'$- швидкість, з якою матеріальна точка рухається відносно неінерціальної системи відліку К′.

Напрям сили визначається за правилом векторного добутку (тобто за правилом правого свердлика); величина сили Коріоліса залежить від кута α між напрямами векторів $\vec{v}'$ і $\vec{\omega}$ і дорівнює

$$F_{кор} = 2mv'\omega\sin\alpha \qquad (1.62а)$$

● Якщо система обертається нерівномірно, з'являється ще одна сила інерції $\vec{F}_i = m\left[\vec{r}\cdot\vec{\beta}\right]$, де $\vec{\beta}$ - кутове прискорення системи.

Методичні вказівки. При розв'язанні задач про рух тіла у неінерціальній системі відліку передусім необхідно встановити, відносно яких тіл система відліку є неінерціальною. Рівняння руху у неінерціальних системах відліку мають такий самий вид, як і в інерціальних, якщо до сил взаємодії з іншими тілами додати сили інерції. Отже при графічному зображенні, крім сил, що діють на тіло з боку оточення, належить враховувати ще сили інерції. Розв'язок задачі продовжують у тій самій послідовності, як це проводилось в інерціальних системах: записують рівняння руху тіла, обирають найзручнішу систему координат, знаходять проекції рівняння на координатні осі і т. ін .

Слід зауважити, що розв'язання задачі про рух тіла у неінерціальній системі відліку та пояснення особливостей цього руху, зв'язаних, наприклад, з обертанням системи, можливо й відносно інерціальної системи, без уведення сил інерції, але введення у розгляд цих сил формалізує задачу і спрощує її розв'язання.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1.42. Тіло, що знаходиться на вершині похилої площини, утримується силою тертя За який час тіло спуститься з похилої площини, якщо вона у свою чергу починає рухатися в горизонтальному напрямку з прискоренням a_0=0,8 м/с^2? Довжина площини l=1,6м, кут нахилу $\alpha=30^o$, коефіцієнт тертя між тілом і площиною μ=0,6.

a_0=0,8 м/с^2 l=1,6м $\alpha=30^o$ μ=0,6	
t=?	

Розв'язання

Згідно постановці задачі необхідно визначити час руху тіла вздовж похилої площини. Зв'яжемо систему відліку і систему координат (рис.1.58) з похилою площиною.

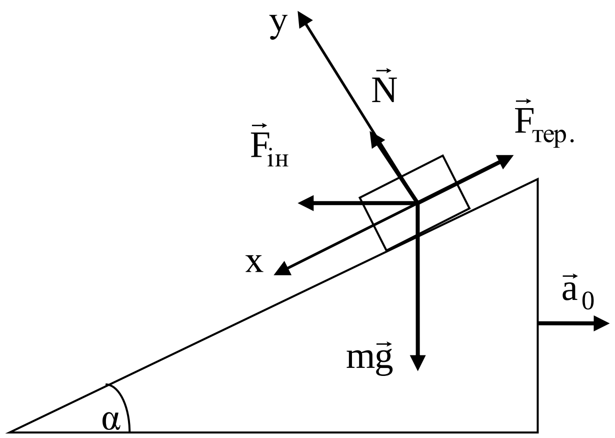


Рис.1.58

З боку оточення на тіло діють сила тяжіння $m\vec{g}$, реакція опори $\vec{N}_1$ і сила тертя $\vec{F}_{тер}$, рівнодійна яких за відсутністю руху похилої площини дорівнює нулю, а саме тіло залишається у стані спокою.

З початком руху площини з прискоренням a_0 система відліку буде неінерціальною. До діючих сил слід додати силу інерції

$$\vec{F}_{ін} = m\vec{a}_0. \qquad (1)$$

Умова рівноваги порушується, і тіло починає зісковзувати вздовж площини. З рівняння руху тіла можна знайти його прискорення $\vec{a}$ відносно похилої площини. Користуючись формулою шляху при рівноприскореному русі без початкової швидкості, знайдемо час сковзання t:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \ . \qquad (2)$$

Рівняння руху тіла у неінерціальній системі відліку має наступний вигляд:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} + \vec{F}_{ін} = m\vec{a} \,. \qquad (3)$$

У проекціях на координатні вісі (див. рис. 3.1) рівняння (3) з урахуванням виразу (1) для сили інерції породжує систему, яка складається з двох скалярних рівнянь:

$$mg\sin\alpha - F_{тер} + ma_0\cos\alpha = ma; \qquad (4)$$

$$-mg\cos\alpha + N + ma_0\sin\alpha = 0 \,. \qquad (5)$$

Додаємо до системи рівнянь (4), (5) вираз для сили тертя

$$\vec{F}_{тер} = \mu N \,. \qquad (6)$$

Розв'язок системи (4)-(6) відносно прискорення тіла дає

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha). \qquad (7)$$

Користуючись формулою (2), остаточно отримуємо

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}} = \qquad (8)$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6}{9{,}8(\sin 30° - 0{,}6 \cdot \cos 30°) + 0{,}8(\cos 30° + 0{,}6\sin 30°)}} = 2{,}08 \text{ (c)}$$

Відповідь: $t = 2{,}08$ с.

Приклад 1.43. На яку долю $\left(\Delta P / P\right)$ ваги тіла на полюсі P зменшується вага тіла на широті $\varphi = 45^0$ за рахунок обертання Землі навколо власної осі? Який кут β утворює напрямок сили тяжіння з радіусом Землі? Радіус Землі прийняти рівним $R_З = 6370$ км.

$\varphi = 45^0$
$R_З = 6370$ км
$M_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
$G = 6{,}67 \cdot 10^{11}$ $м^3 \cdot кг^{-1} \cdot с^{-2}$
$T = 8{,}64 \cdot 10^4$ с

$\dfrac{\Delta P}{P}$? $\beta - ?$

Розв'язання

Вага тіла, (тобто сила тиску на нерухому відносно нього опору), чисельно дорівнює силі тяжіння $F_т$, що діє на тіло. На тіло маси m на поверхні Землі діє не тільки сила гравітаційного притягання $F_{грав.} = G\dfrac{mM_З}{R_З^2}$ (G – гравітаційна стала, $M_З$ – маса Землі) , але й відцентрова сила інерції $\vec{F}_{вц}$, яка обумовлена добовим обертанням Землі навколо власної осі (рис.1.59). Відцентрова сила інерції спрямована по радіусу кола $r = R_З\cos\varphi$, вздовж якого обертається тіло, що

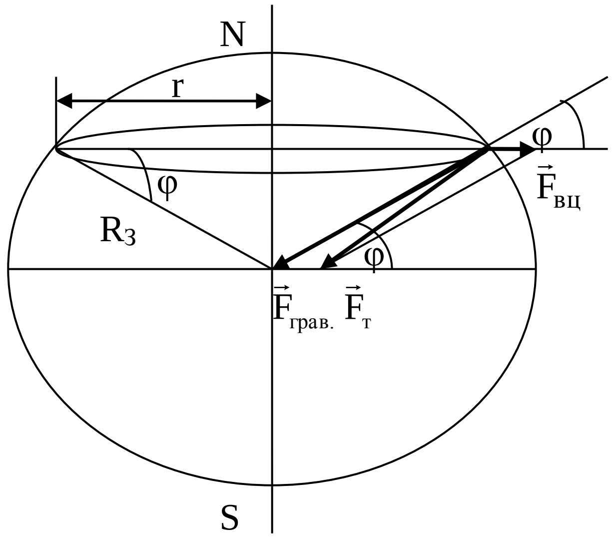


Рис. 1.59

знаходиться на широті φ, і дорівнює $\vec{F}_{вц} = m\omega_З^2\vec{r}$ ($\omega_З = \frac{2\pi}{T}$ – кутова швидкість добового обертання Землі, T – період обертання Землі навколо власної осі, тобто продовжність доби). Таким чином, рівнодійна сила (сила тяжіння) $\vec{F}_т = m\vec{g}$ є векторною сумою двох сил,

$$\vec{F}_т = \vec{F}_{грав.} + \vec{F}_{вц.}$$

Значення відцентрової сили зменшується з широтою φ, від максимального на екваторі, де $r=R_З$, до нуля на полюсах. Відповідно, сила тяжіння збільшується з широтою і на полюсі досягає значення $\vec{F}_{грав.}$. Отже, на полюсі вага тіла $P = F_{грав.} = G\frac{mM_З}{R_З^2}$.

Оскільки напрями $\vec{F}_{грав.}$ і $\vec{F}_т$ на будь якій широті відрізняються несуттєво (внаслідок того, що $\vec{F}_{вц} << \vec{F}_{грав.}$), модуль сили тяжіння можна наближено представити як різницю $\vec{F}_{грав.}$ і проекції $\vec{F}_{вц}$ на напрям вектора $\vec{F}_{грав.}$, яка дорівнює $F_{вц}\cos\varphi$. На цьому шляху отримуємо

$$F_т = G\frac{mM_З}{R_З^2} - m\omega_З^2 R_З\cos^2\varphi$$

$$\Delta P = F_{грав.} - F_т = m\omega_З^2 R_З\cos^2\varphi.$$

І таким чином:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{F_{вц}\cos\varphi}{F_{грав}} = \frac{m\omega_З^2 R_З\cos^2\varphi}{G\frac{mM_З}{R_З^2}} = \frac{\omega_З^2 R_З^3\cos^2\varphi}{GM_З} = \frac{4\pi^2 R_З^3\cos^2\varphi}{T^2 GM_З} = \qquad (1)$$

$$= \frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^3\cdot 0{,}5}{(8{,}64\cdot 10^4)^2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}} = 1{,}71\cdot 10^{-3}.$$

Для визначення кута β між напрямом сили тяжіння і радіусом Землі, з трикутника ABC (рис. 1.60) знаходимо

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{F_{вц}\sin\varphi}{F_{грав} - F_{вц}\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\frac{F_{грав}}{F_{вц}} - \cos\varphi}. \qquad (2)$$

Переписуючи співвідношення $\frac{F_{грав}}{F_{вц}} - \cos\varphi$ з використанням результату (1) отримуємо:

$$\frac{F_{грав}}{F_{вц}} - \cos\varphi = \frac{F_{грав}\cos\varphi}{F_{вц}\cos\varphi} - \cos\varphi = \left(\frac{F_{грав}}{F_{вц}\cos\varphi} - 1\right)\cos\varphi = \left(\frac{P}{\Delta P} - 1\right)\cos\varphi.$$

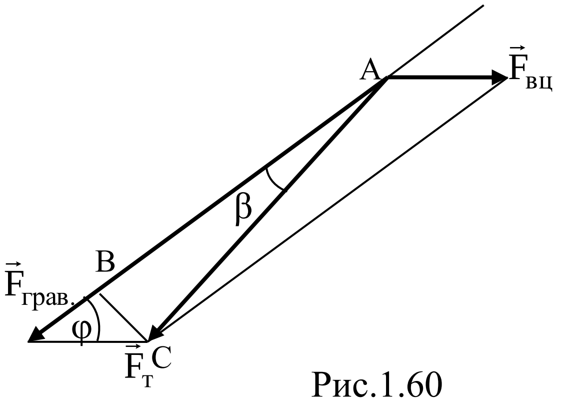


Рис.1.60

Нехтуючи одиницею у порівнянні зі значенням $\frac{P}{\Delta P}$, маємо більш просте співвідношення

$$\frac{F_{грав}}{F_{вц}} - \cos\varphi = \frac{P}{\Delta P}\cos\varphi. \qquad (3)$$

Після підстановки (3) у (2) для кута β отримуємо:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\varphi}{\left(\frac{P}{\Delta P}\right)\cos\varphi} = \frac{\Delta P}{P}\mathrm{tg}\varphi.$$

(4)

$\mathrm{tg}\beta = 1{,}71\cdot10^{-3}\cdot \mathrm{tg}45° = 1{,}71\cdot10^{-3}$; β = 0,098º.

Відповідь: $\frac{\Delta P}{P} = 1{,}71\cdot10^{-3}$; β = 0,098º.

Зауважимо, що насправді Земля є еліпсоїдом обертання, сплюснутим з боку полюсів, і її радіус $R_З$, залежить від широти. Ця обставина поряд з обертанням Землі, також впливає на зменшення ваги тіла із зменшенням широти.

Приклад 1.44. Порожиста сталева кулька підіймається з глибини води h = 400м на поверхню. Швидкість установленого руху кульки v′ = 1,2 м/с. На яку відстань в якому напрямі відхилиться кулька? Широта місцевості φ= 60°.

h = 400м
v′ = 1,2 м/с
T = $8{,}64\cdot10^4$ с
φ= 60°
Δx - ?

Розв’язання.

Розглядаємо рух кульки у системі відліку, яка зв’язана із Землею. На кульку діють сили: гравітаційна $\vec{F}_g$, відцентрова $\vec{F}_{вц}$, виштовхуюча (архімедова) $\vec{F}_A$, стоксова сила опору з боку середовища $\vec{F}_c$ та сила Коріоліса $\vec{F}_k$. Векторна сума перших чотирьох сил визначає рух по вертикалі для заданого місця Землі. Їх рівнодійна дорівнює нулю, внаслідок чого рух кульки по вертикалі є рівномірним.

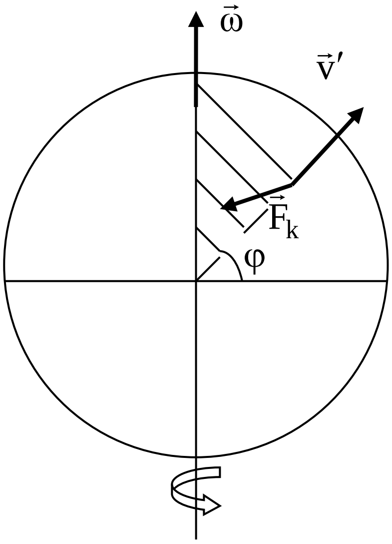


Рис.1.61

Сила Коріоліса, яка дорівнює

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}]$$

перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори $\vec{v}'$ і $\vec{\omega}$. Її напрямок визначається за правилом правого гвинта. У даному випадку вона перпендикулярна до площини рисунка (рис. 1.61) і спрямована на нас. Величина сили

$$F_k = 2mv'\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2mv'\omega\cos\varphi, \qquad (1)$$

де v' – швидкість, з якою кулька рухається відносно Землі; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кутова швидкість обертання Землі; T – добовий період обертання Землі; φ – широта місцевості.

Сила $\vec{F}_k$ надає кульці у напрямку горизонтально на захід постійне прискорення величини

$$a_k = 2v'\omega\cos\varphi. \qquad (2)$$

За формулою шляху при рівноприскореному русі без початкової швидкості знаходимо, що зміщення кульки у напрямку на захід Δs за час підйому $t = \frac{h}{v'}$ дорівнює

$$\Delta s = \frac{a_k t^2}{2} = v'\omega\cos\varphi \cdot \left(\frac{h}{v'}\right)^2 = \frac{2\pi h^2 \cos\varphi}{Tv'}. \qquad (3)$$

Чисельний розрахунок за формулою (3) дає $\Delta s = 4{,}65$м.

Відповідь: $\Delta s = 4{,}65$м.

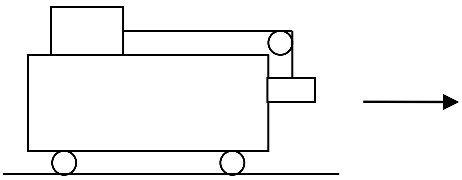
Задачі для самостійного розв’язування.

1.113. Космічний корабель масою $m=10^6$ кг підіймається вертикально вверх. Сила тяги його двигунів $F=2{,}94\cdot10^7$ Н. Визначити прискорення корабля а та вагу космонавта P_1, що знаходиться в ньому, якщо на Землі його вага дорівнює P = 650 Н.

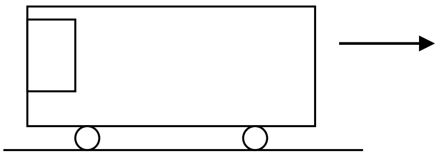
1.114. На яку долю $\left(\Delta P/P\right)$ ваги тіла P на полюсі зменшується вага тіла на широті $\varphi = 30^0$ за рахунок обертання Землі навколо власної осі? Радіус Землі прийняти рівним $R_з = 6370$ км.

1.115. У ліфті тіло падало з висоти h=2 м протягом t=0,8 с. Визначити величину та напрямок прискорення ліфту.

1.116. Яку постійну горизонтальну силу треба прикласти до візка, маса якого m=1 кг (див. рис.), щоб бруски масами m_1 = 0,4кг і m_2 = 0,2кг залишались нерухомими відносно візка? Коефіцієнт тертя між кожним з вантажів і поверхнею візка $\mu = 0{,}2$. Масою блока та нитки знехтувати.



1.117. До стінки візка, що рухається з прискоренням, прикладений брусок (див. рис.). При якому прискоренні візка брусок буде залишатися у стані спокою тобто не падає на дно візка)? Коефіцієнт тертя між стінкою та бруском μ = 0,45.



1.118. При гальмуванні потягу його швидкість рівномірно зменшується від $v_1 = 54$км/год до $v_2 = 28.8$км/год за t=3,5 с. Яке найменше значення може мати коефіцієнт тертя μ між чемоданом і полицею, щоб чемодан залишився у спокої при гальмуванні?

1.119. Трамвай масою m = 4,5 т їде по закругленій траєкторії радіуса R = 110м із швидкістю v=10 км/год. Визначити силу бокового тиску коліс на рейки колії.

1.120. Корабель рухається вздовж меридіана на північ із швидкістю v′=60 км/год. Чому дорівнює прискорення корабля? На яку відстань Δx і в якому напрямі відхилятиметься корабель від курсу за t = 1 год. внаслідок дії сили Коріоліса? Широта місцевості φ = 60°.

1.121. Краплина дощу падає з висоти h = 200м. Швидкість установленого руху краплини v = 4 м/с. На яку відстань Δx і в якому напрямі відносно вертикалі відхилиться краплина внаслідок дії сили Коріоліса? Широта місцевості φ = 45°.

1.122. Річка, швидкість течії якої $v' = 0{,}5$м/с, тече з півночі на південь. Широта місцевості φ = 60°. Визначити кут нахилу α, який утворює поверхня води із горизонтом внаслідок дії сили Коріоліса, та перепад висот Δh рівнів води біля правого та лівого берегів, якщо ширина річки d = 1км.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

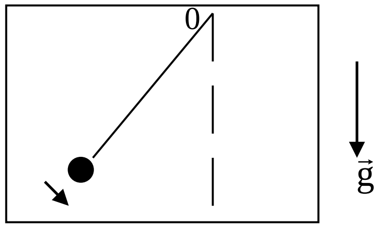
1. Сила Коріоліса, яка діє на тіло у неінерціальній системі відліку, що обертається, змінює

1. величину швидкості тіла
2. величину та напрям швидкості
3. напрям швидкості

2. Якщо швидкість частинки паралельна осі обертання системи відліку, сила Коріоліса, що діє на частинку, дорівнює

1. $2mv\omega$ 2. 0 3. $m\omega^2R$ 4. $-m\vec{a}_0$

3. Маятник може обертатися навколо осі 0, що з'єднана з кабіною. Маятник відхиляють убік і відпускають. Коли він проходить положення рівноваги, кабіна починає падати вільно. При вільному падінні кабіни

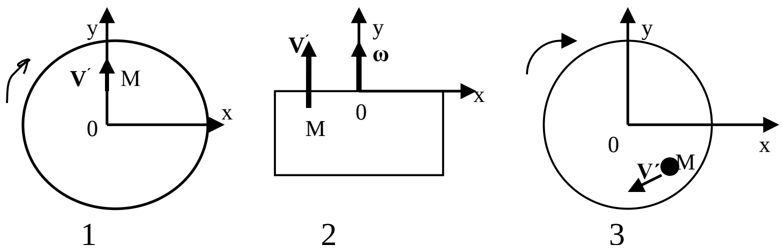


1.маятник зупиниться
2. маятник буде обертатися
3. маятник буде коливатися

4. Сила Коріоліса не впливає на траєкторію руху снаряда при пострілі:
1. на екваторі вздовж паралелі 2. на полюсі Землі вертикально вгору
3. на екваторі вертикально вгору 4. на полюсі Землі вздовж меридіану

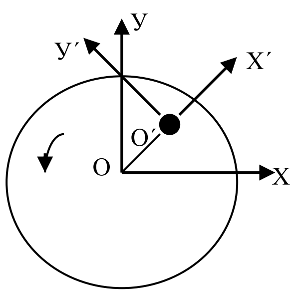
5. На рисунку показані три системи відліку, які обертаються навколо осі О. Відносно кожної з них із швидкістю $\vec{v}$ рухається матеріальна точка М. На точку М діє тільки відцентрова сила інерції, не діє сила Коріоліса, у системі

1. 1
2. 2
3. 3



6. Маятник, що підвішений у кабіні ліфта, відхилили від положення рівноваги. Потім одночасно звільнили і маятник, і кабіну. При вільному падінні кабіни маятник
1. залишиться нерухомим
2. повернеться у положення рівноваги
3. буде обертатися
4. буде коливатися

7. Куля, прикріплена до нитки, обертається з постійною кутовою швидкістю відносно центра 0. З кулею жорстко зв'язана система координат X′O′Y′. $\vec{F}_{в.ц.}$ - відцентрова сила інерції, $\vec{F}$ - рівнодіюча всіх сил, що діють на тіло з боку інших тіл.



А) При описі руху кулі відносно нерухомої інерціальної системи відліку XOY справедливе рівняння

1. $m\vec{a}=\vec{F}$ 2. $m\vec{a}' = \vec{F}+\vec{F}_{в.ц.} \neq 0$ 3. $m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_{в.ц.}=0$

Б) При описі руху кулі відносно неінерціальної системи відліку X′O′Y′, що обертається разом з кулею, справедливе рівняння

1. $m\vec{a}=\vec{F}$ 2. $m\vec{a}' = \vec{F}+\vec{F}_{в.ц.} \neq 0$ 3. $m\vec{a}'=\vec{F}+\vec{F}_{в.ц.}=0$

8. Сила Коріоліса діє на тіло, якщо воно
1. рухається у системі відліку, яка рівномірно обертається;

2. знаходиться у стані спокою в системі, яка рівномірно обертається;
3. знаходиться у стані спокою в системі, яка рухається прямолінійно прискорено.

9. Тіло пересувається по поверхні диска, який обертається навколо своєї осі. Робота сили Коріоліса при цьому
1. дорівнює нулю 2. залежить від швидкості пересування тіла
3. залежить від траєкторії руху тіла 4. залежить від швидкості обертання диска

10. На теплу течію в океані, що спрямована з екватора до північного полюсу діє сила Коріоліса, яка спрямована
1. на захід 2. на схід 3. донизу 4. вертикально уверх

11. Сила Коріоліса, що діє на потік води у річці, яка тече
А) у північній півкулі вздовж меридіану, спрямована
1. до лівого берегу 2. до правого берегу 3. донизу 4. вертикально уверх

Б) у південній півкулі вздовж меридіану, спрямована
1. до лівого берегу 2. до правого берегу 3. донизу 4. вертикально уверх

12. Сила Коріоліса, що діє на снаряд, випущений вздовж паралелі
А) з заходу на схід, спрямована
1. на захід; 2. на схід; 3. до землі; 4. від землі.

Б) зі сходу на захід, спрямована
1. на захід; 2. на схід; 3. до землі; 4. від землі.

13. Сила Коріоліса, що діє на метеорит, який падає на землю, спрямована
1. на захід; 2. на схід; 3. до землі; 4. вертикально уверх.

14. Два тіла, зв'язані нерозтяжною ниткою, обертаються з однаковими кутовими швидкостями на горизонтальній поверхні відносно вертикальної осі, яка ділить нитку у відношенні 2:5. Відношення маси першого тіла до другого становить тіл становить
1. $5/2$; 2. $2/5$; 3. $4/25$; 4. $25/4$.

15. Дія відцентрової сили інерції
1. не впливає на прискорення вільного падіння;
2. збільшує прискорення вільного падіння із зменшенням широти;
3. зменшує прискорення вільного падіння із зменшенням широти.

16. У випадку, коли швидкість частинки паралельна осі обертання систему відліку, на неї діє
1. відцентрова сила інерції та сила Коріоліса;
2. тільки сила Коріоліса;
3. тільки відцентрова сила інерції;
4. не діють сили інерції.

Розділ 6. Гідростатика і елементи гідродинаміки.

● **Тиск** – скалярна величина, яка дорівнює силі, що діє на одиницю площі поверхні тіла перпендикулярно до цієї поверхні (рис.1.62):

$$p = \frac{F_n}{S} = \frac{F\cos\alpha}{S}, \qquad (1.63)$$

де F_n - нормальна складова сили $\vec{F}$, яку називають силою тиску, що діє на поверхню S.

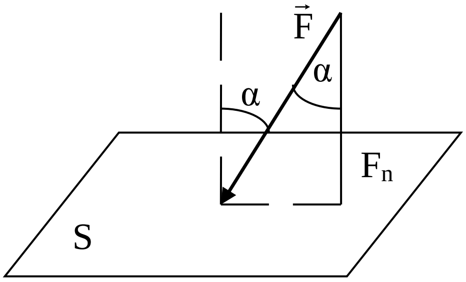


Рис.1.62 Тиск сили $\vec{F}$ на поверхню S визначається величиною її нормальної складової $F_n = F\cos\alpha$ та площею поверхні S.

● **Гідростатичний тиск** – тиск, обумовлений вагою стовпа рідини або газу. Він залежить від густини ρ і висоти стовпа h рідини (або газу):

$$p = \rho g h. \qquad (1.64)$$

Гідростатичний тиск на заданій глибині не залежить від напряму. Цим пояснюється "гідростатичний парадокс": тиск на дно посудини не залежить від форми посудини, в якій знаходиться рідина (рис.1.63).

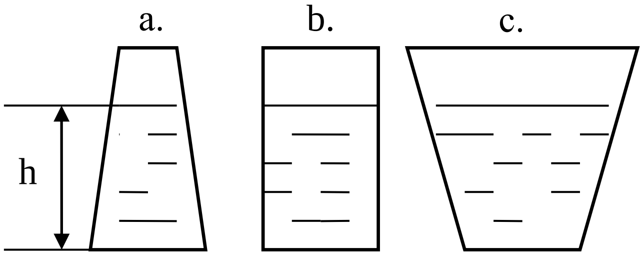


Рис.1.63 $p_a = p_b = p_c = \rho g h$

З урахуванням атмосферного тиску p_0 тиск у рідині на глибині h дорівнює:

$$p = p_0 + \rho g h. \qquad (1.65)$$

● **Атмосферний тиск** – це тиск на тіла, зумовлений дією сили тяжіння атмосферного повітря. Атмосферний тиск зменшується з висотою за експоненціальним законом (рис.1.64):

$$p = p_0 e^{-\rho_0 g h / p_0}, \qquad (1.66)$$

де p_0 і p - атмосферний тиск у поверхні Землі та на висоті h; ρ_0 - густина повітря біля поверхні Землі. Тиск атмосферного повітря у поверхні Землі (на рівні моря), врівноваженого при 0°C

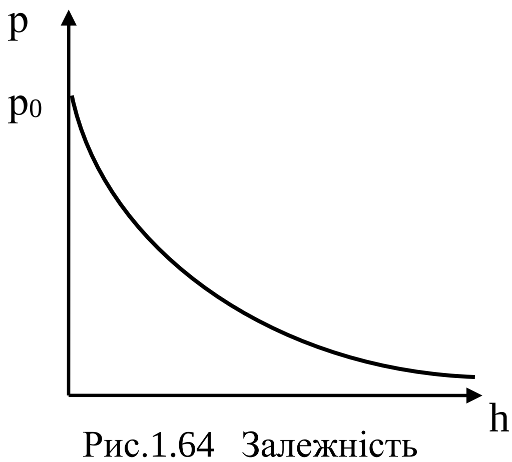


Рис.1.64 Залежність атмосферного тиску від висоти.

стовпчиком ртуті заввишки 760мм, називають **нормальним тиском.**

● **Закон Паскаля:** тиск у будь-якій точці рідини або газу, які перебувають у стані спокою, передається по всьому об'єму (в усіх напрямах) однаково.

Сили тиску в рідині - це сили пружності, які виникають під час її стискування. Сили тиску в газі зумовлені зіткненнями молекул із стінками посудини, в якій він міститься.

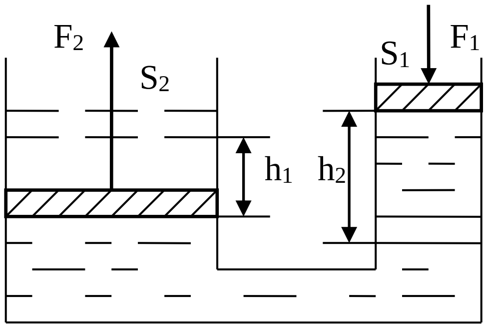


Рис.1.65 Принцип дії гідравлічного пресу.

Закон Паскаля лежить в основі роботи гідравлічних пресів (рис.2.13), підйомників, гідравлічних і пневматичних гальм автомобілів та деяких інших механізмів. Гідравлічний прес надає виграш у силі у стільки разів, у скільки площа його великого поршня більша за площу малого поршня:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

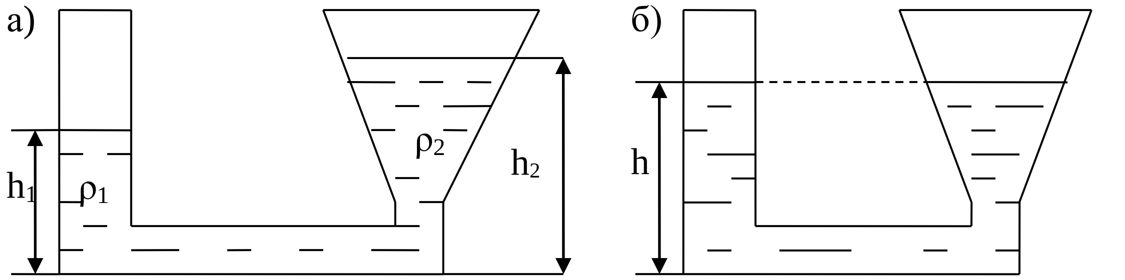
● **Закон сполучених посудин:**

Висоти урівноважених стовпів різнорідних не змішуваних рідин у відкритих сполучних посудинах обернено пропорційні значенням їх густини (рис.1.66,а):

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (1.67)$$

Тобто рівні рідини установлюються таким чином, що гідростатичний тиск на основи в обох посудинах є однаковим.

Якщо у сполучених посудинах знаходиться однорідна рідина ($\rho_1 = \rho_2$), то її вільна поверхня у всіх посудинах встановлюється на однаковому рівні (рис.1.66,б).



$\rho_1 > \rho_2; p_1 = p_2; h_1 < h_2$ $\qquad$ $\rho_1 = \rho_2 = \rho; p_1 = p_2; h_1 = h_2 = h$

Рис.1.66 Рівні рідини в сполучених посудинах.

● **Закон Архімеда:** на тіло, занурене в рідину або газ, діє виштовхуюча сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини (або газу) і спрямована вертикально уверх:

$$F_A = \rho g V, \tag{1.68}$$

де V – об’єм витісненої рідини, який дорівнює об’єму зануреної в рідину частини тіла; ρ – густина рідини (або газу).

Виштовхуюча сила виникає через те, що на верхню і нижню поверхню тіла з боку рідини діють різні сили гідростатичного тиску, прикладені до тіла в точці, яка збігається з центром тяжіння витісненої тілом рідини.

Рівнодійна сили Архімеда і сили тяжіння $\vec{F}_т$, що діє на тіло, носить назву **підйомної сили**.

$$\vec{F}_п = \vec{F}_A + \vec{F}_т; \qquad F_п = F_A - F_т.$$

Умови плавання тіл. В залежності від модуля і знака підйомної сили, що, у свою чергу, залежить від співвідношення між густиною рідини $\rho_р$ та середньої густини тіла $\rho_т$ занурене тіло поводить себе по різному:

1. $F_A > F_т$; $\rho_р > \rho_т$; $F_п > 0$ − тіло спливає.
2. $F_A = F_т$; $\rho_р = \rho_т$; $F_п = 0$ − стан рівноваги, тіло може плавати на будь-якій глибині;
3. $F_A < F_т$; $\rho_р < \rho_т$; $F_п < 0$ − тіло опускається на дно.

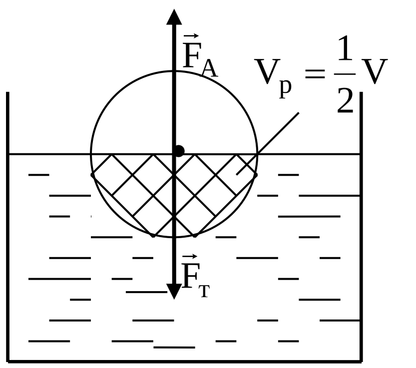


Рис. 1.67. Плавання тіла на поверхні рідини у випадку $\rho_т = 0{,}5\rho_р$

4. Однорідне тіло об'ємом $V_т$ плаває на поверхні рідини, якщо діюча на

нього сила тяжіння урівноважується силою Архімеда: $\rho_т V_т = \rho_р V_р$, або $\frac{V_т}{V_р} = \frac{\rho_р}{\rho_т}$, де $V_р$ - об'єм частини тіла, зануреної у рідину, тобто об'єм витісненої тілом рідини (рис.1.67).

● **Теорема нерозривності течії.** Добуток швидкості течії нестисливої рідини на площу поперечного перерізу трубки течії є величина стала для даної трубки течії:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \qquad (1.69)$$

де S_1, S_2 – площі перерізу трубки течії, v_1, v_2 –швидкості течії у перерізі S_1 і S_2, відповідно.

Трубкою течії називають частину рідини, обмежену лініями течії, тобто лініями, дотична до яких у кожній точці збігається з вектором швидкості потоку рідини $\vec{v}$ в даній точці простору.

● **Рівняння Бернуллі** (для стаціонарного потоку ідеальної рідини)

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}, \qquad (1.70)$$

де ρ – густина рідини, v – швидкість течії в деякому перерізі потоку, h – висота даного перерізу над рівнем відліку, p – тиск рідини в перерізі.

Швидкість витікання ідеальної рідини крізь малий отвір у широкій посудині (формула Торрічеллі)

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1.71)$$

де h – висота стовпа рідини над отвором.

● **Сила опору** діє на тверде тіло, що рухається в газі або рідині.
При невеликих швидкостях опір обумовлений дією **сили в'язкого тертя**, величина якої пропорційна швидкості v, тобто

$$\vec{F} = -C\vec{v}, \qquad (1.72)$$

де C – коефіцієнт опору, який залежить від динамічної в'язкості середовища η, розмірів і форми тіла, його орієнтації відносно потоку.

Наприклад, для кульки радіусу r, що рухається зі швидкістю v у рідині або газі з густиною ρ та динамічною в'язкістю η, величина сили опору може бути визначена за допомогою емпіричної формули Стокса:

$$F = 6\pi\eta r v. \qquad (1.73)$$

При збільшенні швидкості, коли потік, який обтікає тіло набуває турбулентний (вихровий) характер, сила опору, яку в цьому разі називають **силою лобового опору**, пропорційна густині середовища ρ, квадрату відносної швидкості v та площі перерізу тіла S, тобто

$$F = C_1 \rho S v^2, \tag{1.74}$$

де C_1 – коефіцієнт пропорційності, який залежить від числа Рейнольдса, форми тіла та його орієнтації у потоці.

Число Рейнольдса – безрозмірна величина, чисельне значення якої визначає характер течії (ламінарний або турбулентний).

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu}, \tag{1.75}$$

де $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ – кінематична в’язкість, d – характерний лінійний розмір, $\langle v \rangle$ – середня швидкість течії. Наприклад, у випадку руху рідини або газу вздовж труби $\langle v \rangle$ – середня (по перерізу труби) швидкість течії, d – діаметр труби.

Звернемо увагу на суто емпіричний характер співвідношень (1.73) і (1.74).

Приклади розв’язання задач

Приклад 1.45. В акваріум з прямокутним дном розміром 30х50 см^2 налили воду. Визначити висоту h рівня води в акваріумі, якщо сила тиску води на дно $F_д$ дорівнює половині силі тиску $F_{ст}$ на бічну поверхню.

a=0,3м
b=0,5м
$F_д$=0,5$F_{ст}$
h - ?

Розв’язання.

За визначенням сила тиску на дно акваріуму $F_д = p \cdot S$, де $p = \rho g h$ – гідростатичний тиск на дно, S = a·b – площина дна. Тоді знаходимо

$$F_д = \rho g h a \cdot b. \tag{1}$$

Тиск на стінки акваріуму дорівнює нулю у поверхні води, і $p = \rho g h$ – біля дна. Залежність тиску від глибини є, очевидно, лінійною, тому для оцінки сили тиску на бічну поверхню можна скористатися середнім значенням $\langle p \rangle$, яке визначається середнім арифметичним:

$$\langle p \rangle = \frac{0 + \rho g h}{2} = \frac{1}{2}\rho g h. \tag{2}$$

Площина бічної поверхні, на яку діє сила тиску, дорівнює

$$S_б = 2(a + b)h. \tag{3}$$

З урахуванням (2) і (3) маємо:

$$F_{ст} = \rho g h^2 (a + b). \tag{4}$$

Користуючись (1) і (4), дістаємо значення h:

$$\rho g h^2 (a + b) = 2\rho g h a \cdot b;$$

$$h = \frac{2ab}{a+b}. \tag{5}$$

Чисельні розрахунки за формулою (5) показують h = 0,375м.

Приклад 1.46. У сполучених посудинах знаходиться вода. Діаметр однієї з посудин у 4 рази більший за діаметр другої. У широку посудину наливають шар олії (густиною $\rho_{ол.}$= 800 кг/м^3) заввишки h_1=50см. Наскільки підійметься рівень води у вузькій посудині порівняно з початковим?

$\rho_в=10^3$кг/м^3
$\rho_{ол}=0{,}8\cdot10^3$кг/м^3
h_1=0,5м
$\frac{d_1}{d_2}=4$
$h_2-?$

Розв’язання.

Нехай рівень води у широкій посудині після того, як у неї налили олію, знизився на Δh (рис.1.68). Тоді об’єм води, який дорівнює $\Delta V_1 = S_1\Delta h$, перейде у вузьку посудину, де займе об’єм $\Delta V_2 = S_2 h_2$.

За умови нестисливості рідини, $\Delta V_1 = \Delta V_2$, тобто $S_1\Delta h = S_2 h_2$, де $S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$, $S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$ – відповідно площі перерізу широкої і вузької посудин. Звідки отримуємо

$$\Delta h = \frac{S_2}{S_1}h_2 = \frac{d_2^2}{d_1^2}h_2 \tag{1}$$

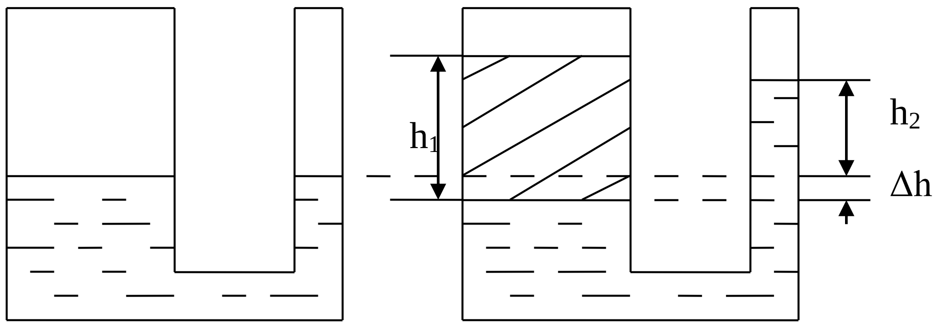


Рис.1.68

Величину Δh визначимо, користуючись умовою рівноваги рідини у сполучених посудинах, тобто однаковості гідростатичних тисків у колінах. Причому відлік висоти стовпчиків будемо здійснювати від найнижчого рівня води рівня води (у широкій посудині).

$$\rho_{ол.}h_1 g = \rho_в(h_2 + \Delta h)g. \tag{2}$$

З урахуванням (1) вираз (2) набуває вигляду:

$$\rho_{ол.}h_1 = \rho_в\left(h_2 + \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 h_2\right) = \rho_в\left(1 + \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right)h_2.$$

Звідки знаходимо $$h_2 = \frac{h_1}{\left(1+\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right)} \cdot \frac{\rho_{ол.}}{\rho_в}.$$

Чисельний розрахунок дає: $$h_2 = \frac{0{,}5}{1+\frac{1}{16}} \cdot \frac{0{,}8\cdot 10^3}{1\cdot 10^3} = \frac{16}{17}\cdot 0{,}4 = 0{,}376 \approx 0{,}38(м).$$

Відповідь: h_2 = 0,38м.

Приклад 1.47. Металевий кубик плаває на поверхні ртуті так, що у ртуть занурена чверть його об'єму. Яка частина його об'єму буде занурена у ртуть, якщо зверху налити шар води, який повністю закриє тіло?

$\rho_{рт}=13{,}6\cdot 10^3$кг/м^3
$\rho_в=1\cdot 10^3$кг/м^3
$V_1=0{,}25\ V$

$k = V_1'/V$ – ?

Розв'язання.

За умови плавання кубика у ртуті сила тяжіння має дорівнювати силі Архімеда;

$$\rho g V = \rho_{рт} g V_1 = \frac{1}{4}\rho_{рт} g V,$$

де ρ – густина матеріалу кубика. Звідки знаходимо

$$\rho = \frac{1}{4}\rho_{рт} \quad (1).$$

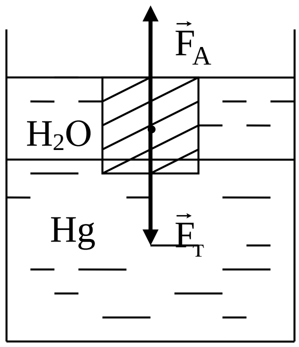


Рис. 1.69.

Якщо поверх ртуті налита вода (рис.1.69), виштовхуюча сила складається з двох доданків – сили $F_{A1} = \rho_{рт} g V_1' = \rho_{рт} g k V$, що діє на частину тіла $k = V_1'/V$, занурену у ртуть, та сили F_{A2}, що діє на об'єм тіла, який покриває вода.

$$F_{A2} = \rho_в g (V - V_1') = \rho_в g (1-k) V.$$

Умова рівноваги кубика у цьому випадку виглядає як

$$\rho_{рт} g k V + \rho_в g (1-k) V = \rho g V.$$

З урахуванням знайденого для густини матеріалу виразу (1), попередня умова приймає вигляд:

$$\rho_{рт} g k V + \rho_в g (1-k) V = \frac{1}{4}\rho_{рт} g V,$$

Скорочуючи на gV, маємо:

$$\rho_{рт} k + \rho_в (1-k) = \frac{1}{4}\rho_{рт}.$$

І остаточно, знаходимо для k:

$$k = \frac{0{,}25\rho_{рт} - \rho_{в}}{\rho_{рт} - \rho_{в}}.$$

Чисельний розрахунок дає: $k = \frac{(0{,}25 \cdot 13{,}6 - 1) \cdot 10^3}{(13{,}6 - 1) \cdot 10^3} = 0{,}19$.

Відповідь: k = 0,19.

Приклад 1.48. В посудині з гліцерином тоне свинцева кулька. Визначити максимальне значення діаметра кульки, при якому рух шарів гліцерину, спричинений рухом кульки, залишається ламінарним. В’язкість гліцерину η=1,0 Па·с.

Розв’язання.

η=1,0 Па·с
$\rho_{гл}$=1,26·10^{3}кг/м^3
$\rho_{св}$=11,3·10^{3}кг/м^3
$Re_{кр}$ = 0,5
d_{dax} - ?

Критерієм змін руху рідини (який виникає завдяки силам внутрішнього тертя) внаслідок падіння кульки, є число Рейнольдса Re. Якщо число Рейнольдса менше деякого критичного значення $Re_{кр}$, рух рідини буде ламінарним, в протилежному випадку – турбулентним.

Якщо тіло, яке рухається в рідині, має форму кулі діаметром d, то число Рейнольда визначається як

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}, \tag{1}$$

де ρ – густина рідини (в нашому випадку $\rho_{гл}$); η – коефіцієнт внутрішнього тертя рідини; v – швидкість руху кульки.

К значення числа дорівнює $Re_{кр}$ = 0,5.

Сили, які діють на кульку у процесі руху, це:

1) сила тяжіння кульки $F_т = \rho_{св} gV = \frac{1}{6}\pi\rho_{св} d^3$, де $\rho_{св}$ – густина свинцю, V– об’єм кульки;

2) виштовхуюча сила F_A, яка визначається за законом Архімеда,

$$F_A = \rho_{гл} Vg = \frac{1}{6}\pi\rho_{гл} gd^3,$$ де $\rho_{гл}$ – густина гліцерину;

3) сила внутрішнього тертя $F_{тр}$, яка визначається формулою Стокса,

$$F_{тр} = 6\pi\eta Rv = 3\pi\eta dv.$$

При стаціонарному русі кульки в рідині (v = const) сила тяжіння урівноважується сумою виштовхуючої сили та сили внутрішнього тертя:

$$\frac{1}{6}\pi\rho_{св} d^3 = \frac{1}{6}\pi\rho_{гл} gd^3 + 3\pi\eta dv,$$

Звідки знаходимо $v = \frac{(\rho_{св} - \rho_{гл})g}{18\eta} d^3$. (2)

Користуючись (1) і (2) знайдемо d:

$$d = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 Re}{\rho_{гл}(\rho_{св} - \rho_{гл})g}}.$$

Максимальне значення діаметра кульки має відповідати критичному значенню числа Рейнольдса. На підставі вище означеного, маємо

$$d_{макс} = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 Re_{кр}}{\rho_{гл}(\rho_{св} - \rho_{гл})g}}.$$

Розмірність d_{max}, яке визначається (3)

$$[d] = \left(\frac{Па^2 \cdot c^2}{кг^2 \cdot м^{-6} \cdot м \cdot c^{-2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{кг^2 \cdot м^2 \cdot c^4 \cdot м^5}{c^4 \cdot кг^2 \cdot м^4}\right)^{\frac{1}{3}} = м.$$

Користуючись $\rho_{гл} = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3; $\rho_{св} = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, здійснюючи чисельні розрахунки за формулою (3), остаточно отримуємо:

$$d_{макс} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 1 \cdot 0{,}5}{1{,}26 \cdot 10^3 \cdot (11{,}3 - 1{,}26) \cdot 10^3 \cdot 9{,}8}} = 4{,}17 \cdot 10^{-3}.$$

Відповідь: $d_{макс} = 4{,}17 \cdot 10^{-3}$ м.

Задачі для самостійного розв’язування.

1.123. У циліндричну посудину радіуса R=15см налили воду. Визначити висоту h рівня води в посудині, якщо сила тиску води на дно $F_д$ дорівнює силі тиску $F_{ст}$ на бічну поверхню.

1.124. Мідна куля з порожниною всередині має вагу у повітрі 2.64 Н, а у воді – 2,21 Н. Визначити об’єм внутрішньої порожнини.

1.125. Об’єм човна v=1,5м^3, маса M=35кг. Скільки пасажирів (маса кожного m=70кг) може уміститися в човні, якщо найменша висота надводного борту h=10см? Площа перерізу корпуса човна на рівні ватерлінії 3,4м^2.

1.126. Стрижень шарнірно укріплений за верхній кінець, а його нижній кінець опущений у воду. Стрижень знаходиться у рівновазі, коли у воду занурено 2/3 його довжини. Визначити густину матеріалу стриженя.

1.127. Визначити найменшу площину плоскої криги, що здатна утримати людину вагою 75кг.

1.128. У сполучені посудини налита ртуть, а поверх неї водну посудину стовпчик олії висотою 50см, а в другу – стовпчик гасу висотою 20см. Визначити різницю рівнів ртуті в обох посудинах.

1.129. Малий поршень гідравлічного пресу за один хід опускається на 20см під дією сили 0,5кН, а великий підіймається на 1см. З якою силою діє прес на затиснуте в ньому тіло, якщо його к. к. д. дорівнює 60%?

1.130. В посудину за одиницю часу вливається об'єм води $V_1 = 0{,}2$ л/с. У дні посудини зроблений отвір діаметром $d = 1{,}4$см. Який рівень води буде утримуватися в посудині?

1.131. Струмінь води виштовхується вертикально вверх насосом через отвір діаметром $d = 2$см. Діаметр поршня насоса $D = 20$см; швидкість руху поршня $v = 0{,}1$м/с. Визначити: а) надлишковий тиск води в циліндрі насоса; б) висоту, на яку підніметься струмінь води.

1.132. Бак висотою $h = 1$м наповнений водою. На відстані $h_1 = 0{,}75$м від верхнього краю бака утворився маленький отвір. На якій відстані від бака попадає на підлогу струмінь води, що витікає з бака?

1.133. По трубі змінного перерізу тече рідина. Різниця рівнів рідини у двох манометричних трубках, які встромлені в широку та вузьку частини труби, $\Delta h = 10$см. Площі перерізу труби складають $S_1 = 20$ см^2 і $S_2 = 8$см^2. Визначити об'ємну витрату V_1 рідини, тобто об'єм, який витрачається за одиницю часу.

1.134. Зігнута трубка занурена у річку отвором проти течії. Яка швидкість v течії ріки у цьому місці, якщо вода в трубці піднялася на $h_1 = 115$ мм?

1.135. Якої найбільшої швидкості може набути крапля дощу діаметром $d = 0{,}3$мм, що падає в повітрі? Рух повітря при обтіканні краплі вважати ламінарним. Динамічна в'язкість повітря $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$мкПа·с.

1.136. Коркова кулька радіусом $r = 5$мм спливає в посудині з гліцерином із постійною швидкістю $v = 3{,}7$см/с. Визначити динамічну та кінематичну в'язкість гліцерину.

1.137. Визначити максимальну масову витрату m_1 води, що тече по трубі з внутрішнім діаметром $d = 5$ см при ламінарній течії. Вважати, що ламінарний характер течії рідини в циліндричній трубі зберігається при числі Рейнольда $Re \le 3000$. Масова витрата – кількість рідини, що витікає з труби за одиницю часу.

1.138. Свинцева дробинка діаметром $d = 2$мм падає з постійною швидкістю $v = 2{,}25$см/с у вертикальній трубі, яка заповнена касторовим маслом. Визначити динамічну в'язкість касторового масла.

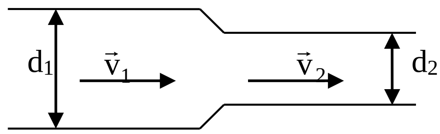
1.139. По горизонтальній трубі радіуса $R = 12$мм тече вода із швидкістю $v = 8$см/с. Визначити: а) характер течії, вважаючи, що $Re_{кр} = 3000$; б)перепад тиску dp/dl на одиницю довжини труби.

Тестові завдання

Вибрати вірну відповідь.

1. Переріз струменя рідини, що витікає з отвору донизу, із відстанню від отвору
1. зменшується 2. не змінюється 3. збільшується

2. Рідина тече трубою змінного перерізу. При цьому $d_1 = 2d_2$ (d – діаметр труби). Швидкість течії v_1 порівняно із швидкістю v_2



1. удвічі менша
2. удвічі більша
3. має таке саме значення
4. менша у 4 рази
5. більша у 4 рази

3. Посудина з рідиною, в якій плаває тіло, міститься у ракеті. Під час виведення ракети на орбіту штучного супутника Землі глибина занурення тіла в рідину
1. не зміниться 2. збільшиться 3. зменшиться

4. Переріз струменя рідини, яка виливається із шлангу вертикально вверх, із збільшенням відстані від отвору шлангу
1. зменшується 2. не змінюється 3. збільшується.

5. Градієнт швидкості рідини, що тече по трубі
1. спрямований вздовж радіуса до стінок труби 2. дорівнює нулю
3. спрямований вздовж радіуса до осі труби 4. спрямований вздовж осі труби

6. По трубі діаметром 2см тече вода. В'язкість води $\eta = 1$ мПа•с. Критичне значення числа Рейнольдса $Re_{кр}$ =3000. Максимальна швидкість потоку в трубі, при якій рух води залишається ламінарним, дорівнює
1. 0,30 м/с 2. 3 м/с 3. 1,5 м/с 4. 0,15 м/с 5. 0,6 м/с

7. У рівнянні Бернуллі $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$ установити відповідність між видом тиску, який презентують його складові, і формулою, що відповідає цьому тиску:

1. статичний тиск А) $\frac{\rho v^2}{2} + p$
2. повний тиск Б) p
3. гідростатичний тиск В) $\frac{\rho v^2}{2}$
4. динамічний тиск Г) $\rho g h$

8. Посудина, яка має форму куба зі стороною а заповнена доверху рідиною. Сила гідростатичного тиску рідини А) на одну з стінок посудини; Б) на бічну поверхню посудини порівняно із силою тиску на дно посудини
1. удвічі більша 2. більша у 4 рази 3. дорівнюють одна одній
4. удвічі менша 5. менша у 4 рази

9. Атмосферний тиск дорівнює 100 кПа. Тиск у воді більший за атмосферний у 6 разів на глибині
1. 70м 2. 60м 3. 50м 4. 120м 5. 30м.

10. Атмосферний тиск дорівнює 100 кПа. Гідростатичний тиск у воді більший за атмосферний у 6 разів на глибині
1. 70м 2. 60м 3. 50м 4. 120м 5. 30м

11. Атмосферний тиск дорівнює 100 кПа. На глибині 60м тиск у воді дорівнює
1. 700 кПа 2. 600 кПа 3. 500 кПа 4. 1200 кПа 5. 300 кПа

12. Щоб сила тиску рідини на дно циліндричної посудини радіуса R дорівнювала силі тиску на бічну поверхню, необхідно налити рідину до висоти
1. R/2 2. R 3. 2R 4. 3R 5. 4R

13. Якщо у сполучені посудині налиті не змішувані рідини з різними густинами ρ_1 і ρ_2, причому $\rho_1 > \rho_2$, то висоти стовпчиків рідин у посудинах зв'язані співвідношенням

1. $h_1 > h_2$ 2. $h_1 = h_2$ 3. $h_1 < h_2$
4. відповідь залежить від площин перерізу посудин
5. відповідь залежить від чисельних значень густин

14. Кусок льоду плаває у воді, яка налита у посудину. Якщо лід повністю розтане, рівень води в посудині

1. зменшиться 2. не зміниться 3. збільшиться
4. відповідь залежить від об'єму льоду
5. відповідь залежить від об'єму посудини

15. Кусок дерева плаває у воді занурившись на 3/4 свого об'єму. Густина дерева має дорівнювати

1. 250 кг/м^3 2. 500 кг/м^3 3. 750 кг/м^3 4. 1000 кг/м^3 5. 1250 кг/м^3

16. Одиниця вимірювання тиску паскаль, виражена через основні одиниці системи СІ, має розмірність:

1. $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$ 2. $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$ 3. $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$ 4. $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ 5. $\text{кг}/\text{м}\cdot\text{с}^2$.

17. Підводний човен знаходиться на глибині h = 45м. Тиск повітря у човні дорівнює атмосферному. Швидкість, з якою через отвір у човні буде уриватися струмінь води, дорівнюватиме

1. 45 м/с 2. 30 м/с 3. 25 м/с 4. 20 м/с 5. 15 м/с.