МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Даус М.Є.

ЗАГАЛЬНА ТА РІЧКОВА ГІДРАВЛІКА

Конспект лекцій

ББК 26.22
Д 21
УДК 556.536

Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету (протокол №_____ від ___.___.200__ р.).

Даус М.Є.

Загальна та річкова гідравліка: Конспект лекцій – : « », 2008. – 98 с.

В конспекті лекцій виділено дві частини – загальна гідравліка та гідравліка відкритих русел, розглядаються основні закони руху і рівноваги рідини та пристосування цих законів для вирішення широкого кола прикладних задач.

Конспект лекцій використовується для студентів гідрометеорологічного напряму спеціальності «Гідрологія та гідрохімія».

© Одеський державний
екологічний університет, 2008

Даус М.Є.

ЗАГАЛЬНА ТА РІЧКОВА ГІДРАВЛІКА

Конспект лекцій

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 5
1 ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИНИ..... 6
2 ГІДРОСТАТИКА..... 11
2.1 Гідростатичний тиск та його властивості..... 11
2.2 Основне рівняння гідростатики в диференціальній формі..... 14
2.3 Закон розподілу гідростатичного тиску по глибині у разі рідини, що знаходиться під дією тільки сили тяжіння..... 16
2.4 Сумарний гідростатичний тиск на плоску фігуру будь-якої форми..... 18
2.5 Сумарний гідростатичний тиск на криволінійну циліндричну поверхню..... 20
3 ГІДРОДИНАМІКА..... 23
3.1 Загальні поняття і визначення гідродинаміки..... 23
3.2 Види та режими руху рідини..... 28
3.3 Рівняння нерозривності у разі сталого руху..... 31
3.4 Два режими руху рідини. Досліди Рейнольдса..... 32
3.5 Число Рейнольдса. Визначення режиму руху рідини..... 35
3.6 Рівняння Бернуллі для елементарної струминки рідини..... 36
3.7 Інтерпретації рівняння Бернуллі..... 38
3.8 Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідни..... 41
3.9 Основне рівняння рівномірного руху..... 42
3.10 Втрати напору при русі води в трубах..... 45
4 ВИТІК РІДИНИ З ОТВОРІВ І НАСАДКІВ..... 47
4.1 Загальні поняття і визначення..... 47
4.2 Витік рідини в атмосферу з малого отвору в тонкій стінці при постійному напорі..... 48
4.3 Вплив стиснення струменя на витік рідини через отвір..... 51
4.4 Розрахунок витоку через великі отвори..... 52
4.5 Витік рідини із насадків при постійному напорі..... 53
5 ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ В БЕЗНАПІРНОМУ ПОТОЦІ..... 58
5.1 Формула Шезі. Швидкісна і витратна характеристики потоку..... 58
5.2 Формули для визначення коефіцієнта Шезі *C*..... 59
5.3 Коефіцієнт шорсткості..... 62
6 НЕРІВНОМІРНИЙ СТАЛИЙ РУХ ВОДИ У ВІДКРИТИХ ПРИЗМАТИЧНИХ РУСЛАХ..... 64
6.1 Питома енергія перерізу. Графік питомої енергії..... 65
6.2 Рівняння критичного стану потоку. Число Фруда..... 67
6.3 Диференціальне рівняння нерівномірного руху рідини, що плавно змінюється, у відкритих руслах..... 68

7 НЕСТАЛИЙ РУХ ВОДИ В ПРИРОДНИХ (РІЧКОВИХ) РУСЛАХ. 74
7.1 Розбиття водотоку на ділянки…… 74
7.2 Диференціальне рівняння сталого нерівномірного руху в умовах природного водотока…… 75
7.3 Загальний прийом побудови кривої вільної поверхні…… 77
8 ВОДОЗЛИВИ…… 80
8.1 Термінологія і класифікації водозливів…… 80
8.2 Основна розрахункова формула для водозливів…… 84
8.3 Водозливи з тонкою стінкою…… 85
8.4 Точність визначення витрати води водозливами…… 87
9 РУХ ПОТОКУ ЗІ ЗМІННОЮ ВИТРАТОЮ…… 89
9.1 Рівняння руху потоку рідини із змінною витратою…… 89
9.2 Математичні моделі руху води із змінною витратою…… 93
9.2.1 Система рівнянь Сен-Венана…… 93
9.2.2 Модель динамічної хвилі…… 94
9.2.3 Модель дифузійної хвилі…… 94
9.2.4 Модель кінематичної хвилі…… 95
9.3 Кінцево-різницеві аналоги диференціальних рівнянь неусталеного руху води …… 95
ЛІТЕРАТУРА…… 98

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна “Загальна та річкова гідравліка” є прикладною дисципліною професійно-практичного циклу підготовки спеціалістів – гідрологів і безпосередньо використовується ними в їх практичній діяльності.

Загальний обсяг навчального часу визначається освітньо-кваліфікаційною характеристикою та освітньо-професійною програмою.

“Загальна та річкова гідравліка” викладається на 3 курсі.

Мета вивчення курсу – забезпечення, відповідно сучасним вимогам, знань студентів по курсу гідравліки, як науково-технічної галузі, що направлено на оптимізацію знань в процесі трудової діяльності.

Гідравліка базується на курсах вищої математики, фізики, гідромеханіки, обчислювальної техніки і програмування.

Знання “Загальної та річкової гідравліки” необхідні для розвитку багаточисленних галузей народного господарства, зв’язаних з використанням водних ресурсів країни.

В результаті вивчення курсу гідравліки студент повинен знати основні закони руху і рівноваги рідини та свідомо пристосовувати ці закони для вирішення широкого кола прикладних задач.

Знання гідравліки необхідні для розвитку багаточисленних галузей народного господарства, зв’язаних з використанням водних ресурсів України.

Дисципліна “Загальна та річкова гідравліка” складається з двох частин – загальна гідравліка та гідравліка відкритих русел.

Дисципліна забезпечена методичним матеріалом.

1 ОСНОВНІ ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РІДИНИ

Рідиною називається тіло, що має легку рухливість частинок або текучість, унаслідок чого рідина не може зберігати свою форму в просторі, а набуває форми посудини, в якій вона знаходиться. Цим рідини відрізняються від твердих тіл.

Рідини ділять на два класи: одні чинять великий опір стискаючому зусиллю, а інші його майже не чинять. За цією ознакою рідини ділять на: рідини стисливі – гази і нестисливі, або краплинні. Об'єктом вивчення гідравліки є будь-яка краплинна рідина, але нас при викладі цього курсу цікавитиме тільки вода.

Багато фізичних властивостей краплинних рідин вивчаються у загальній фізиці, а фізичні властивості води детально досліджуються в курсі "Гідрофізика водоймищ суші". Розглянемо нижче лише основні властивості води, з якими нам доводиться зустрічатися у курсі гідравліки.

Густина рідини ρ**.** Візьмемо деякий об'єм W рідини, що має масу m. Густиною рідини ρ називається відношення

$$\rho = m/W , \tag{1.1}$$

отже

$$m = \rho W. \tag{1.2}$$

Величина ρ має розмірність:

$$[\rho] = \mathrm{M/L^3}, \tag{1.3}$$

де M і L — символи відповідно маси і довжини.

Густина рідини залежить від температури і тиску. Вид цієї залежності визначається експериментальним шляхом і виражається у вигляді таблиці або формули [2] .

Для прісної чистої води при t = 4°C і нормальному тиску ρ дорівнює:

$$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3 .$$

В гідравліці також використовується поняття питомої ваги рідини γ, яке є відношенням сили тяжіння G до її об'єму W . Оскільки питома вага і густина є відношенням сили тяжіння та маси до одного і того ж об'єму, то залежність між ними виражається:

$$\gamma = \rho g,$$

де g – прискорення вільного падіння, м/с^2 .

Питома вага вимірюється у Н/м^3 .

Стисливість (об'ємна пружність) рідини. Ступінь зменшення об'єму рідини під впливом стискаючої сили характеризується коефіцієнтом об'ємного стиснення [4]:

$$\beta_w = \frac{1}{W}\frac{dW}{dp},$$

де W – первинний об'єм; dW – зменшення об'єму; dp – підвищення зовнішнього тиску із усіх сторін. Коефіцієнт об'ємного стиснення води зменшується із зростанням тиску і температури.

Величина, обернена коефіцієнту об'ємного стиснення, називається модулем об'ємної пружності [4]:

$$K = 1 / \beta_w = W\, dp/dW.$$

Для води (у звичайних умовах) $k = 22 \cdot 10^5$ кПа, тобто $k \approx 220$ кН/см^2. Вода в природних водоймищах при невеликих глибинах може вважатися практично нестисливою внаслідок того, що коефіцієнт k має невеликі значення.

Розширення при нагріванні. Зміна об'єму рідини при зміні температури характеризується коефіцієнтом об'ємного розширення [4]:

$$\beta_t = \frac{1}{W}\frac{dW}{dt}.$$

Числове значення β_t дорівнює відносному приросту об'єму при нагріванні його на 1°С. Коефіцієнт об'ємного розширення води змінюється відповідно до її властивостей: при значенні температури від 0 до 4°С β_t має від'ємне значення, а при значенні t вище 4°С β_t додатне. Середнє значення β_t для звичайних температурних умов незначне (приблизно 0.000015) і в звичайних технічних застосуваннях гідравліки не береться до уваги.

Опір розтяжним зусиллям. Здатність різних тіл чинити опір розтяжним силам характеризується розривною напругою. У гідравліці вважають, що вода зовсім не здатна чинити опір розтягуючим зусиллям. Проте, особливими фізичними дослідами було встановлено, що рідина (зокрема, вода, ртуть), що знаходиться у спокої, іноді здатна чинити опір дуже великим розтяжним зусиллям; наприклад, вода в певних умовах може витримувати розтяжну напругу до $2.8 \cdot 10^4$ кПа,не піддаючись розриву [5].

Капілярність. Поверхневий шар нестисливої рідини знаходиться в особливому напруженому стані, яке спричиняється неврівноваженістю дії молекулярних сил та характеризується силами поверхневого натягнення. Вплив цих факторів наочно проявляється в трубках малого діаметра, в яких рідина, що змочує стінки трубки (наприклад, вода), піднімається (рис.1.1б), а яка не змочує (наприклад, ртуть) – опускається (рис. 1.1а). Це явище називається капілярністю.

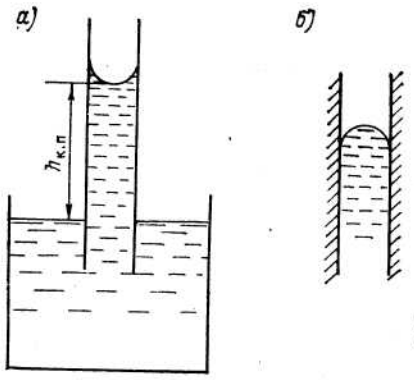

Рисунок 1.1 – Капілярне підняття у випадку “змочуваної” (а) і “не змочуваної” (б) стінки.

Висота капілярного підняття води h, мм, в скляній трубці діаметром d, мм, при температурі t =20°С буде [2]:

$$h = 30/d\ ,$$

а висота опускання ртуті

$$h = 10/d\ .$$

Висоту підняття (опускання) рідини необхідно враховувати у відліках приладів, де використовуються скляні трубки з рідиною.

Питання капілярності є істотними при розгляді підземної фільтрації рідини, процесів випаровування і заболочування.

В’язкість є одною з найважливіших властивостей рухомих рідин. В’язкістю називається здатність рідини чинити опір дотичним зусиллям під час руху рідини. Вона обумовлена силами зчеплення між частинками рідини, а також між рідиною і стінками, що обмежують її, і кількісно виражається через динамічний коефіцієнт в’язкості або просто коефіцієнт в’язкості μ. Величина μ залежить від роду рідини, а також від її температури. Числові значення μ для різних рідин знаходять дослідним шляхом за допомогою віскозиметрів.

В рухомій рідині між її шарами виникають дотичні напруження за рахунок того, що шари рідини мають різні швидкості. М.П. Петровим [2] для визначення дотичних напружень запропонований вираз:

$$\tau = \pm\mu\frac{du}{dn}\ , \qquad (1.4)$$

де μ – динамічний коефіцієнт в’язкості, dn – товщина шару рідини, $\frac{du}{dn}$ – градієнт швидкості. Цей вираз відображає гіпотезу І. Ньютона про внутрішнє тертя між частинками рідини.

У системі СІ розмірність коефіцієнта в’язкості буде:

$$[\mu] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \frac{\text{м}}{\text{см}}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Коефіцієнт в'язкості, віднесений до густини рідини, називається кінематичним коефіцієнтом в'язкості:

$$\nu = \mu / \rho. \qquad (1.5)$$

В системі СІ цей коефіцієнт має розмірність

$$[\nu] = \frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{с}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Величина ν залежить від роду рідини і від температури та практично не залежить від тиску. Значення кінематичного коефіцієнта в'язкості для води наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Коефіцієнт в'язкості для води при різних значеннях температури [4]

t °C	$\nu \cdot 10^{-6}$, м^2/с	t°C	$\nu \cdot 10^{-6}$, м^2/с
0	1.78	15	1.14
5	1.52	20	1.01
10	1.31	30	0.81
12	1.24	40	0.66

При вивченні законів руху реальних рідин навіть таких мало в'язких, як вода, вплив в'язкості враховувати необхідно.

При аналітичних дослідженнях часто користуються поняттям ідеальної рідини. Ідеальною рідиною називають уявну рідину, яка характеризується:

а) абсолютною незмінністю об'єму (при зміні тиску і температури);

б) повною відсутністю в'язкості, тобто сил тертя, при будь-якому її русі.

Ідеальної рідини, на відміну від реальної ("в'язкої"), в природі не існує. Її створюють як деяку наближену модель реальної рідини для полегшення виведення деяких теоретичних положень гідравліки.

Зі сказаного вище ясно, що:

1) при вивченні рідини, що знаходиться у стані спокою, немає потреби розрізняти реальну і ідеальну рідини;

2) при вивченні руху реальної рідини необхідно додатково враховувати сили тертя, тобто в'язкість.

Сили, що діють у рідині. В рідині діють масові і поверхневі сили. Масові сили діють на кожен елемент рідкого середовища і пропорційні масі цього елемента. До масових сил належить сила тяжіння G (вага):

$$G=mg$$

сили інерції рідини j, які дорівнюють добутку маси тіла m на його прискорення $\frac{du}{dt}$ (u – швидкість, t – час), взяте із оберненим знаком:

$$j=-\ m\frac{du}{dt}\ .$$

Поверхневі сили проявляються на межових поверхнях рідкого тіла. Поверхневу силу, що діє нормально до деякої площадки, називають силою тиску. Поверхневу силу, що діє по дотичній до площадки – силою опору. Сили опору, відповідно до виразу (1.4), проявляються під час руху рідини, а сили тиску – як під час руху, так і у період рівноваги рідини [4].

Контрольні питання:

1. Визначення гідравліки як науки. Розділи гідравліки.
2. Визначення рідини. Поділ рідин на класи.
3. Густина рідини.
4. Стисливість рідини.
5. Розширення рідин при нагріванні.
6. Опір рідин розтяжним зусиллям. Визначення ідеальної рідини.
7. В’язкість рідини.
8. Вираз М.П.Петрова, який відображає гіпотезу Ньютона про внутрішнє тертя між частинками рідини.
9. Капілярність.
10. Сили, які діють в рідині.

2 ГІДРОСТАТИКА

2.1 Гідростатичний тиск та його властивості

Гідростатика вивчає закони, яким підкоряється рідина, що знаходиться в стані спокою, сили, що діють в такій рідині, і тиск рідини, що покоїться, на різні поверхні.

Основним поняттям гідростатики є поняття гідростатичного тиску в даній точці рідини, що покоїться. Цей тиск прийнято позначати буквою *p* і скорочено іменувати просто "гідростатичним тиском". Гідростатичний тиск виражається в одиницях напруги, тобто в тоннах на $1м^2$, в кілограмах на $1м^2$, в кілограмах на $1см^2$.

Сила *P*, що діє на всю площу *F*, називається силою гідростатичного тиску (або сумарним гідростатичним тиском) і виражається в тоннах, кілограмах.

Гідростатичний тиск має дві властивості.

1. Гідростатичний тиск завжди направлений нормально до площадки, що сприймає його, і спрямований по внутрішній нормалі, тобто зсередини рідини.

Ця властивість легко доводиться від протилежного і заснована на відміченій вище нездатності рідини чинити опір розривним зусиллям. Представимо деякий об'єм рідини, що знаходиться у спокої (рис. 2.1а). Розітнемо його поверхнею *AB* на два відсіки: *I* і *II*. Відсік *I* буде з деякою силою діяти на поверхню *AB* відсіку *II*; з такою ж силою, але в протилежному напрямку, відсік *II* буде діяти на поверхню *AB* відсіку *I*.

Далі умовимося розглядати тільки тиск на відсік *II*, заштрихований на рисунку (силу, прикладену до відсіку *II* з боку відсіку *I*).

Намітимо на поверхні *AB* точку "*a*". Хай в цій точці діє зовнішня сила P_a, направлена від поверхні *AB* під деяким кутом α (рис. 2.1 а). Силу P_a можна розкласти на нормальну складову P'_a, і дотичну складову P''_a. Оскільки рідина не може чинити опір розривним зусиллям, поява таких сил неминуче викличе порушення умови рівноваги і приведе в рух частинки рідини у відсіку *II*. Отже, сила P_a в рідині, що покоїться, існувати не може. Розглянемо в точці "*b*" силу P_b направлену всередину відсіку *II*; розкладемо її на складові P'_b і P''_b. Поява дотичної сили P''_b негайно порушить стан рівноваги. Таким чином, в рідині, що покоїться, може діяти тільки сила P'_b (що стискує), спрямована по внутрішній нормалі, що і потрібно було довести.

2. Гідростатичний тиск в даній точці не залежить від орієнтування (кута нахилу) площадки дії, тобто гідростатичний тиск в точці рідини однаковий у всіх напрямах.

а) б)

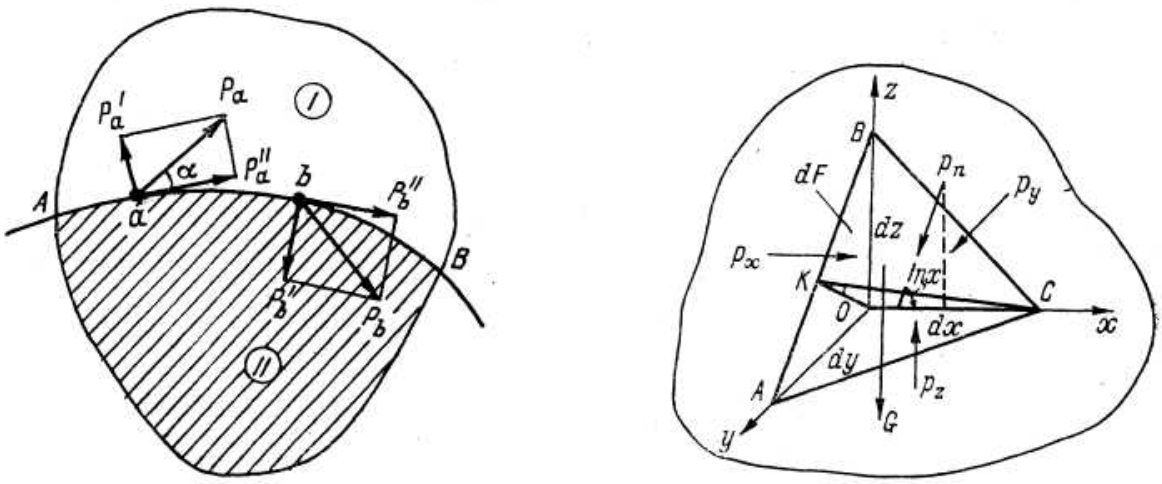

Рисунок 2.1 – а) До доказу першої властивості гідростатичного тиску;
б) до доказу другої властивості гідростатичного тиску.

Для підтвердження цієї властивості в рідині, що покоїться, довільно виділимо будь-яку точку O як центр прямокутної системи координат з осями Ox, Oy, Oz (рис. 2.1б). На координатних осях відкладемо нескінченно малі відрізки dx, dy, dz і через отримані точки проведемо площину ABC. Отримаємо нескінченно малий тетраедр з вершиною в точці O і з ребрами dx, dy, dz.

Позначимо через p_x гідростатичний тиск, що діє на грань, нормальну до осі Ox, через p_y тиск на грань, нормальну до осі Oy і через p_z тиск на грань, нормальну до осі Oz. Гідростатичний тиск, що діє на похилу грань, позначимо через p_n, а площу цієї грані – через dF. Крім того, на всі частки рідини у виділеному тетраедрі діє зовнішня об'ємна сила G (сила тяжіння).

Згідно законам механіки, якщо система знаходиться в рівновазі, то сума проекцій всіх сил, що діють на неї, на осі координат повинна дорівнювати нулю.

Напишемо для виділеного елементарного об'єму умови рівноваги. Спроектувавши всі сили, що діють на тетраедр, на вісь Ox, отримаємо:

$$\frac{1}{2} dydzp_x - p_n dF \cos(n,x) = 0 \qquad (2.1)$$

на вісь Oy

$$\frac{1}{2}dxdzp_y - p_n dF\cos(n,y) = 0 \qquad (2.2)$$

на вісь *Oz*

$$\frac{1}{2}dxdyp_z - p_n dF\cos(n,z) - \rho g\frac{1}{6}dxdydz = 0 \qquad (2.3)$$

де вираз $\frac{1}{6}dxdydz$ об'єм елементарного тетраедра; ρ – густина рідини; g – прискорення вільного падіння. Оскільки *dx*, *dy*, *dz* – нескінченно малі величини, то третім доданком в рівнянні (2.3) можна знехтувати.

На рис. 2.2 опустимо перпендикуляр з точки *O* на пряму *AB,* він перетне її в середині в точці *K*, з точки *C* також опустимо перпендикуляр на *AB*, він попаде в ту ж точку *K*, оскільки *dx*, *dy* і *dz* нескінченно малі, відрізки *AO=BO=OC*.

Розглянемо вираз

$$\frac{1}{2}dydz = \frac{1}{2}AB\cdot OK\,. \qquad (2.4)$$

З трикутника *OKC* запишемо

$$OK = KC\cdot\cos OKC = KC\cdot\cos(n,x), \qquad (2.5)$$

де $\angle OKC = \angle\ n, x$, як кути з взаємно перпендикулярними сторонами.

Підставляючи (2.5) в (2.4), отримаємо

$$\frac{1}{2}dydz = \frac{1}{2}AB\cdot KC\cdot\cos(n,x) = dF\cos(n,x)\,. \qquad (2.6)$$

Порівнюючи (2.6) і (2.1), приходимо до висновку

$$p_x = p_z\,. \qquad (2.7)$$

Аналогічним чином з рівняння (2.2) маємо

$$p_z = p_n\ , \qquad (2.8)$$

а з рівняння (2.3)

$$p_z = p_n\ . \qquad (2.9)$$

З (2.7)–(2.9) отримаємо

$$p_x = p_y = p_z = p_n, \qquad (2.10)$$

що і слід було довести.

2.2 Основне рівняння гідростатики в диференціальній формі

Основне рівняння гідростатики показує, як розподіляється тиск усередині рідини, що знаходиться у стані спокою. Воно може бути отримано з диференціальних рівнянь спокою (рівноваги) рідини.

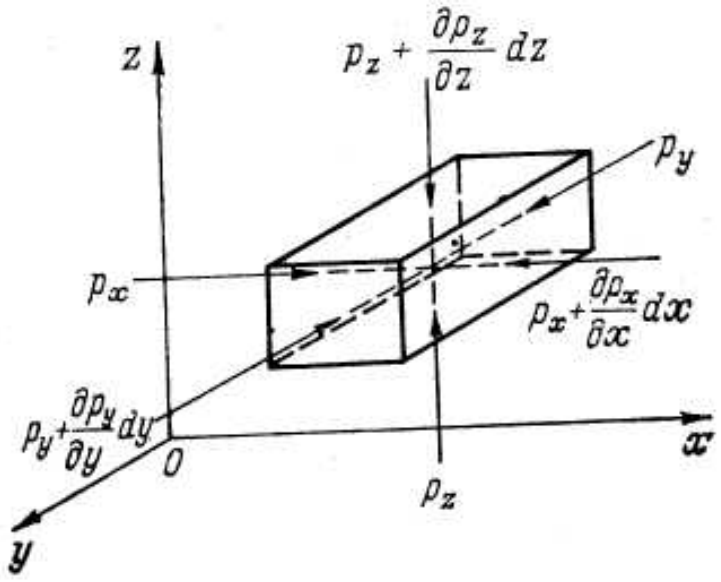

Рисунок 2.2 – До виведення основного рівняння гідростатики.

Розглянемо рідину, що покоїться, на яку діє зовнішня об'ємна сила (не обов'язково сила тяжіння). З рідини, що знаходиться в рівновазі, виділимо в довільному місці елементарний паралелепіпед (рис. 2.2) з ребрами *dx, dy, dz*, паралельними осям координат *Ox, Oy, Oz*. З'ясуємо сили, що діють на нього, і складемо рівняння рівноваги.

Дію рідини, що оточує паралелепіпед, на його грані замінимо відповідними силами тиску рідини, враховуючи вказані вище властивості гідростатичного тиску.

На грань паралелепіпеда *dy dz*, найближчу до початку координат, діє гідростатичний тиск p_x; на протилежну грань діятиме гідростатичний тиск $p_x^{'}$:

$$p_x^{'} = p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx, \tag{2.11}$$

де $\frac{\partial p_x}{\partial x}$ – характеризує приріст гідростатичного тиску на одиницю довжини по осі *Ox*, вираз $\frac{\partial p_x}{\partial x} dx$ – показує приріст тиску p_x на відстані *dx*.

Аналогічні прирости гідростатичного тиску діятимуть і на інші грані паралелепіпеда (рис. 2.2).

Для отримання сумарного тиску рідини на кожну грань паралелепіпеда необхідно отриманий гідростатичний тиск помножити на відповідні площі граней.

Окрім тиску, у виділеному паралелепіпеді діють також об'ємні (масові) сили. Проекції цих сил на осі координат, віднесені до одиниці маси рідини, нехай дорівнюватимуть *X, Y, Z*. Таким чином, проекція об'ємної сили, наприклад, на вісь *Ox* тоді буде рівна $\rho X dxdydz$, де ρ – густина рідини.

Для рівноваги рідини, що міститься в паралелепіпеді, необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил на кожну з осей координат дорівнювала нулю. Запишемо рівняння рівноваги:

$$p_x dydz - \left(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right) dydz + \rho X dxdydz = 0;$$

$$p_y dxdz - \left(p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy \right) dxdz + \rho Y dxdydz = 0; \qquad (2.12)$$

$$p_z dxdy - \left(p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz \right) dxdy + \rho Z dxdydz = 0.$$

Провівши перетворення та скорочення, одержимо:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Індекси при приватних похідних від гідростатичного тиску опущені на підставі другої властивості гідростатичного тиску.

Система диференціальних рівнянь (2.13) і є рівняннями рівноваги рідини. Вони вперше були виведені Л. Ейлером в 1755 р. і називаються ейлеровими рівняннями рівноваги рідини. Ці рівняння виражають зв'язок між об'ємними силами, тиском і координатами в кожній точці рідини, що покоїться.

Застосуємо систему рівнянь (2.13) до виведення основного закону гідростатичного тиску. Для цього помножимо кожне рівняння відповідно на *dx, dy, dz* і складемо отримані вирази:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)\,. \qquad (2.14)$$

Вираз в лівій частині рівняння (2.14) є повний диференціал гідростатичного тиску *p*:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dp\,, \qquad (2.15)$$

а вираз в дужках правої частини є повний диференціал об'ємних (масових) сил. Позначаючи їх через функцію *W(x, y, z)*, матимемо

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dW \qquad (2.16)$$

Підставляючи (2.15) і (2.16) в (2.14), остаточно отримаємо

$$dp = \rho\,dW. \qquad (2.17)$$

Вираз (2.17) є основне рівняння гідростатики в диференціальній формі.

2.3 Закон розподілу гідростатичного тиску по глибині у разі рідини, що знаходиться під дією тільки сили тяжіння

Розглянемо найбільш важливий для практики окремий випадок рівноваги рідини, що знаходиться під дією тільки однієї об'ємної сили – сили тяжіння (його називають іноді випадком абсолютного спокою).

Представимо посудину, в якій знаходиться рідина, що покоїться (рис. 2.3).

Осі координат розташуємо так, що початок координат і осі *Ox* і *Oy* лежать на вільній поверхні рідини, а вісь *Oz* направлена вертикально вниз. В цьому випадку складові об'ємних сил будуть

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = g, \qquad (2.18)$$

оскільки сила тяжіння в загальному випадку рівна

$$G = mg\ , \qquad (2.19)$$

де m – маса рідини; g – прискорення вільного падіння. Тоді при m=1G=Z=g. Підставляючи (2.18) в (2.14), отримаємо

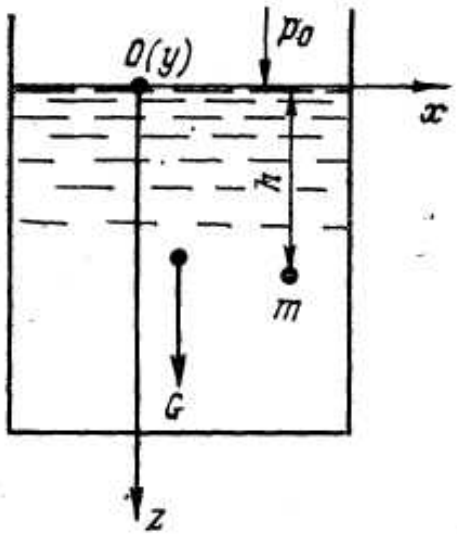

Рисунок 2.3 – Випадок абсолютного спокою рідини.

$$dp = \rho g\, d \tag{2.20}$$

Інтегруючи (2.20), маємо

$$p = \rho gz + C \tag{2.21}$$

де C – постійна інтегрування.

На вільній поверхні $z = 0$ і $C = p_0$ – зовнішній тиск.

В результаті замість (2.21) матимемо

$$p = p_0 + \rho gz\,. \tag{2.22}$$

Вводячи замість координати z глибину занурення точки під рівень вільної поверхні h, отримаємо вираз для гідростатичного тиску в остаточному вигляді

$$p = p_0 + \rho gh\,. \tag{2.23}$$

Вираз (2.23) називається основним рівнянням гідростатичного тиску. Тут p є абсолютним тиском в даній точці (точка m на рис. 2.4); p_0 – зовнішній поверхневий тиск (у відкритих посудинах або водоймищах зовнішнім тиском є атмосферний тиск); тиск $p_{надм} = \rho gh$ називається надмірним гідростатичним тиском. При цьому, якщо зовнішній тиск на вільній поверхні зазвичай постійний, то надмірний гідростатичний тиск залежить від глибини занурення даної точки під рівень вільної поверхні і прямо пропорційний їй. Відповідно до таких позначень вираз (2.23) приймає вигляд

$$p_a = p_0 + p_{надм} \tag{2.24}$$

Закон гідростатичного тиску (2.23) показує, що в загальному випадку для всіх точок рідини абсолютний тиск залежить не тільки від глибини занурення точок під рівнем вільної поверхні, але і від зовнішнього тиску p_0. Тиск p_0 діє однаково в будь-якій точці усередині рідини, і з його зміною на стільки ж зміниться і абсолютний гідростатичний тиск в даній точці.

Звідси витікає відомий закон Паскаля, сформульований ним в 1663 р.: зовнішній тиск p_0, прикладений до вільної поверхні рідини, що знаходиться в стані рівноваги в замкнутій посудині, передається всім часткам рідини з однаковою силою (без зміни).

Виражена законом Паскаля властивість рідини передавати зовнішній тиск, заснований на вказаній вище малій стисливості реальних рідин, отримала широке застосування в техніці. На законі Паскаля заснована дія гідравлічних або водостовпових машин, до яких належать гідравлічні преси, підйомні крани, молоти, домкрати, мультиплікатори (підвищувачі тиску).

2.4 Сумарний гідростатичний тиск на плоску фігуру будь-якої форми.

Тиск рідини, що діє на площу кінцевих розмірів називається сумарним гідростатичним тиском або силою гідростатичного тиску.

Нехай тиск рідини діє на деяку плоску фігуру площею *F*, розташовану похило до горизонту під кутом α (рис. 2.3). Поверхня, що лежить в площині *xOy* (вісь *Ox* перпендикулярна до площини малюнка, а вісь *Oy* направлена вниз по похилій площині), на малюнку проектується у вигляді відрізку *AB*.

Для зручності повернемо фігуру навколо осі *Oy* на 90°; вісь *Ox* займе нове положення. При цьому дана плоска фігура буде зображена без спотворення (рис. 2.3). Вважаємо, що фігура має неправильну довільну форму.

На підставі першої властивості гідростатичного тиску можемо стверджувати, що в усіх точках площі *F* тиск рідини буде направлений по внутрішній нормалі до стінки. Тому і сумарний гідростатичний тиск *P*, що діє на довільну плоску поверхню площею *F*, буде також направлений по нормалі (рис. 2.3).

Намітимо на даній площі *F* довільну точку *m*, занурену на глибину *h*, що має координату *y*. З рис. 2.3 видно, що

$$h = y \cdot \sin\alpha \,. \tag{2.25}$$

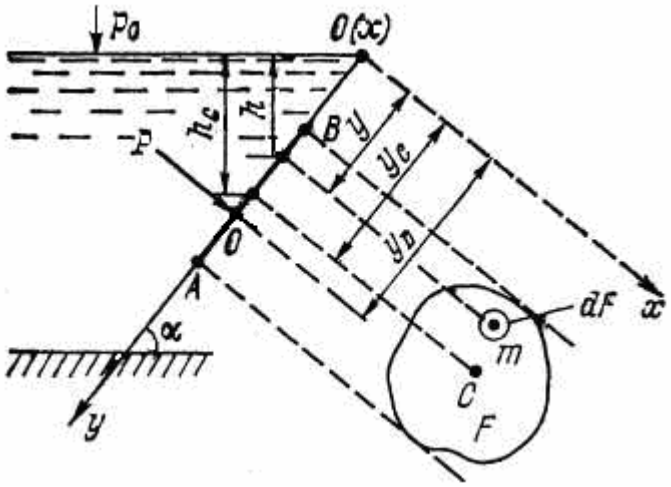

Рисунок 2.3 – Тиск рідини на плоску похилу фігуру.

Біля точки *m* виділимо елементарну площадку *dF*. Сила абсолютного гідростатичного тиску, що діє на цю площадку

$$dP_a = p_a \cdot dF \tag{2.26}$$

або, згідно (2.24) і (2.25)

$$dP_a = (p_0 + \rho g h)dF = p_0 dF + \rho g y \cdot \sin\alpha \cdot dF \ . \tag{2.27}$$

Інтегруючи цей вираз за всією площею *F*, отримуємо

$$P_a = p_0 \int_F dF + \rho g \cdot \sin\alpha \cdot \int_F y dF = p_0 F + \rho g \cdot \sin\alpha \int_F y dF \ . \tag{2.28}$$

Інтеграл $\int_F y dF$ є статичний момент плоскої фігури *AB* щодо осі *Ox:*

$$\int_F y dF = S_{Ox} = F \cdot y_C , \tag{2.29}$$

де y_C – координата центру тяжіння (точки *C*) даної плоскої фігури.

Підставляючи (2.29) в (2.28), отримуємо:

$$P_a = p_0 F + \rho g F \cdot y_C \cdot \sin\alpha \ . \tag{2.30}$$

Оскільки

$$y_C \cdot \sin\alpha = h_C \tag{2.56}$$

де h_C – заглиблення центру тяжіння плоскої фігури під горизонтом рідини, то

$$P_a = p_0 F + \rho g h_C F \ , \tag{2.31}$$

де p_0 – сила, обумовлена атмосферним (поверхневим) тиском, передається через рідину на плоску фігуру *AB*.

Зазвичай при технічних розрахунках враховують силу тиску тільки від надмірного гідростатичного тиску, тобто без урахування атмосферного тиску, оскільки останнє діє на стінки рівномірно з обох боків і само себе врівноважує.

Сила надмірного гідростатичного тиску рівна

$$P = \rho g h_C F \, . \tag{2.32}$$

Отже, *сила надмірного гідростатичного тиску, що діє на плоску поверхню будь-якої форми, дорівнює добутку площі фігури на надмірний гідростатичний тиск в центрі тяжіння цієї фігури.*

2.5 Сумарний гідростатичний тиск на криволінійну циліндричну поверхню

У практиці доводиться визначати силу гідростатичного тиску не тільки на плоскі поверхні, але і на криволінійні поверхні будь-якого вигляду. Особливо важливо це для гідротехніків, оскільки таким шляхом визначають сили, що діють на секторні, сегментні і вальцові затвори водопропускних споруд, на внутрішні стінки водяних баків, трубопроводів. Розглянемо надмірний гідростатичний тиск на циліндричну поверхню, яка зустрічається найчастіше.

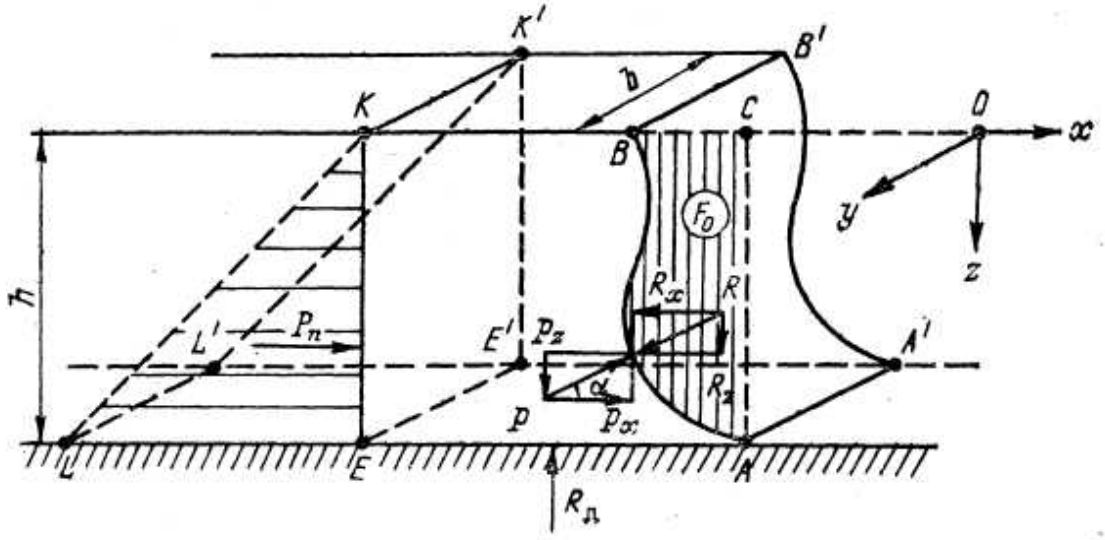

Рисунок 2.4 – Тиск на циліндричну поверхню *AB*.

Розглянемо загальний вид криволінійної циліндричної поверхні *ABB′A′* (рис. 2.4). Крива *AB* є направляюча даної циліндричної поверхні. Довжину циліндричної поверхні, перпендикулярної до площини креслення, позначимо через *b* (*b=const*). Намітимо початок координат *O* на рівні вільної поверхні рідини і осі координат *Ox, Oy, Oz.*

Якщо при визначенні сили гідростатичного тиску, що діє на плоскі фігури, по суті проводимо просте складання елементарних паралельних сил, то при рішенні аналогічної задачі для криволінійної поверхні доводиться складати сили тиску, що має різні напрями. У загальному випадку криволінійної поверхні необхідно знати проекції сумарного тиску на три взаємно перпендикулярних напрями. Завдання спрощується, якщо криволінійна поверхня є циліндричною, оскільки в цьому випадку для визначення сумарного тиску досить знати горизонтальну складову тиску P_x і вертикальну складову P_z. Підсумовуючи ці складові, отримаємо силу тиску рідини на криволінійну поверхню *P* і її напрям.

Щоб знайти вирази для складових P_x і P_z сили *P* проведемо вертикальну площину і спроектуємо на неї криволінійну поверхню *ABB′ A′*. У проекції на вертикальну площину вона дає нам прямокутник *EKK′E′* (рис. 2.4).

Розглянемо умови рівноваги виділеного об’єму рідини *AEKB*, що покоїться. На цей об’єм діють сили:

1) сила гідростатичного тиску P_h, що діє на вертикальну грань *EK* з боку рідини, розташованої зліва від цієї грані;

2) сила $R_Д$ – з боку дна *AE* (реакція дна):

$$R_Д = \rho g h F_{AEE'A'} = \rho g h b \cdot AE = \rho g b F_{AEKC}; \qquad (2.33)$$

3) реакція *R* – з боку циліндричної поверхні; горизонтальну і вертикальну складові реактивної сили *R* позначимо відповідно R_x і R_z;

4) сила тяжіння, що діє на даний об’єм рідини:

$$G = \rho g b F_{AEKB}. \qquad (2.34)$$

Проектуючи всі сили, що діють на об’єм *AEKB*, що покоїться, відповідно на осі *Ox* і *Oz*, отримуємо наступні рівняння рівноваги (не знаючи напряму R_x і R_z, вводимо їх в рівняння із знаком плюс) :

$$P_h + R_x = 0; \quad G + R_z - R_Д = 0, \qquad (2.35)$$

звідки

$$R_x = -P_h; \qquad R_z = R_Д - G. \qquad (2.36)$$

Оскільки сили R_x і R_z дорівнюють шуканим силам P_x і P_z, але направлені в протилежну сторону, можемо написати:

$$P_x = -R_x; \quad P_z = -R_z. \qquad (2.37)$$

При цьому з першого рівняння виразу (2.36) маємо:

$$P_x = P_h, \tag{2.38}$$

тобто *горизонтальна складова P_x сили тиску на криволінійну циліндричну поверхню дорівнює силі гідростатичного тиску рідини на плоску вертикальну прямокутну фігуру ЕК, що є проекцією даної поверхні АВ на вертикальну площину.* У зв'язку з цим сила P_x може бути виражена, як і у разі плоских фігур, трикутником гідростатичного тиску *ELK* (рис. 2.4). Перетворимо друге рівняння виразу (2.36), підставивши в нього (2.33) і (2.34):

$$R_z = \rho g b F_{AEKC} - \rho g b F_{AEKB} = \rho g b F_{ABC}; \tag{2.39}$$

звідки, враховуючи (2.37), отримаємо

$$P_z = -\rho g b F_{ABC} \tag{2.40}$$

Позначимо площу F_{ABC} через F_0 (на малюнку вона заштрихована). Тоді замість (2.40) можна написати

$$P_z = -\rho g b F_0, \tag{2.41}$$

тобто *вертикальна складова P_z сили тиску на криволінійну циліндричну поверхню дорівнює вазі уявного рідкого тіла площею перетину F_0 із знаком мінус . Це уявне рідке тіло називається тілом тиску.* Воно має форму призми з основою площею F_0 і висотою *b*.

Визначимо силу тиску рідини на криволінійну поверхню *P* :

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}. \tag{2.42}$$

Напрям сили тиску *P* визначається кутом її нахилу до горизонту, тобто кутом α, який може бути встановлений із співвідношень:

$$\cos\alpha = \frac{P_x}{P}; \ \sin\alpha = \frac{P_z}{P} \text{ або } tg\alpha = \frac{P_z}{P_x}, \tag{2.43}$$

де P_x, P_y, P_z – складові сили тиску.

Контрольні питання:

1. Основне поняття гідростатики.
2. Властивості гідростатичного тиску.
3. Основне рівняння гідростатики в диференціальній формі.
4. Закон розподілу гідростатичного тиску по глибині в рідині, яка знаходиться під дією сили тяжіння.
5. Закон Паскаля.

3 ГІДРОДИНАМІКА

3.1 Загальні поняття і визначення гідродинаміки

Гідродинаміка вивчає закони руху рідини. Основним її завданням є знаходження швидкостей течії (витрат води) і тиску, що виникають в рухомій рідині, а також визначення форм кривих вільної поверхні. При цьому в гідравліці не цікавляться тиском і швидкістю в окремих точках простору, а використовують деякі усереднені та інтегральні характеристики потоку.

У гідравліці зазвичай розглядають “реальні”, тобто в’язкі, рідини. Проте іноді використовуються рішення, отримані для “ідеальної” рідини з внесенням необхідних поправок на облік сил тертя. Для ідеальної рідини гідродинамічний тиск p має той же зміст і має ті ж властивості, що і гідростатичний тиск p. У разі ж реальної (в’язкої) рідини гідродинамічному тиску р надають особливе значення.

Зупинимося на деяких загальних поняттях і визначеннях, що використовуються в гідродинаміці.

Траєкторія руху – шлях, який проходить частинка рідини за проміжок часу Δt (іншими словами просторовий слід рухомої частинки в часі). Виділимо в потоці рідини деяку частинку A і простежимо за її переміщенням (рис. 3.1а). Вважається, що в кожен момент часу швидкість і напрям руху частинок рідини змінюються, тобто вони пульсують. Унаслідок пульсацій частинка міняє свою траєкторію від моменту до моменту.

Лінія течії – крива, для якої вектори швидкості в будь-якій точці, узяті в один і той же момент часу, є дотичними (рис. 3.1б). Як видно, якби не було пульсацій характеристик руху, то лінія течії співпадала б з траєкторією. Якщо помістити в потік рухомої рідини підфарбовану частинку і спостерігати за її переміщенням деякий проміжок часу, то ми побачимо траєкторію руху. Лінію течії можна було б отримати тільки за допомогою кінозйомки миттєвого поля векторів швидкостей.

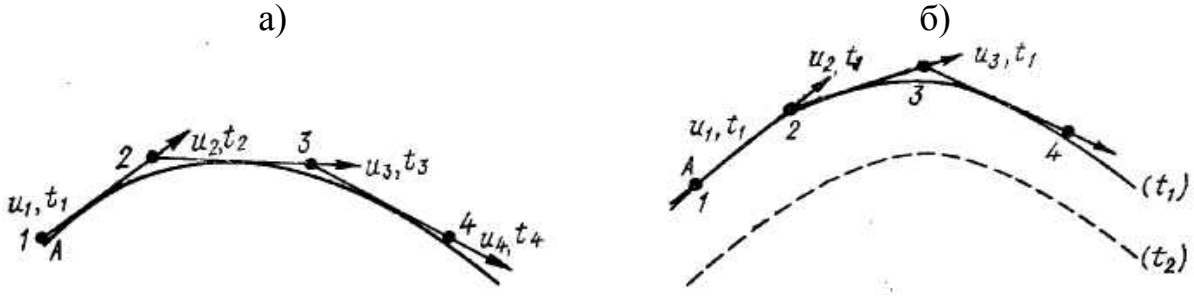

Рисунок 3.1 – а) Траєкторія руху; б) лінія течії.

Елементарна струминка. Намітимо усередині потоку рідини точку *1* і навколо цієї точки, як показано на рис. 3.2, виділимо елементарну площадку $d\omega$, обмеживши її замкнутим контуром. Далі через всі точки площадки $d\omega$ проведемо лінії течії, що відповідають певному моменту часу.

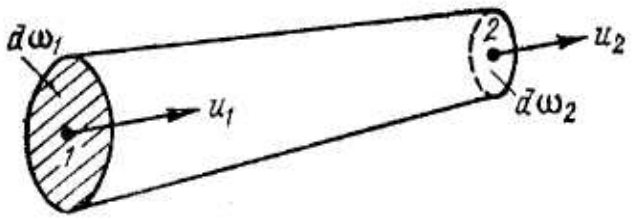

Рисунок 3.2 – Елементарна струминка.

Сукупність ліній течії, проведених через всі точки елементарної площадки $d\omega$, обмеженої замкнутим контуром, називається елементарною струминкою. Одна з важливих властивостей елементарної струминки полягає в тому, що оскільки площа $d\omega$ нескінченно мала, то можна вважати, що швидкості і в усіх точках поперечного перерізу струминки однакові.

Елементарна витрата з урахуванням згаданої вище властивості елементарної струминки має вигляд:

$$dQ = u \cdot d\omega. \qquad (3.1)$$

Живий переріз – це поперечний переріз потоку, обмежений вільною поверхнею і твердими стінками і в усіх своїх точках перпендикулярний до напряму ліній течії – для потоку з відкритою вільною поверхнею (рис. 3.3).

а) б)

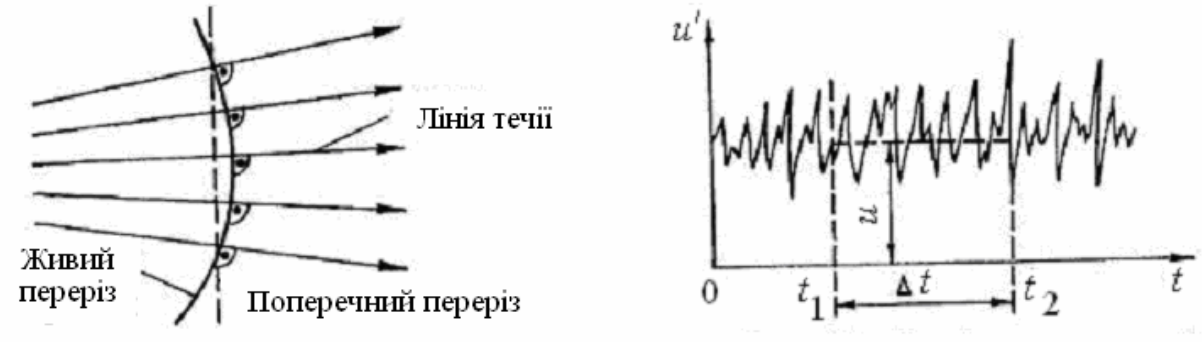

Рисунок 3.3 – Живий переріз потоку (а); графік миттєвої швидкості (б).

Місцева швидкість. Швидкості руху окремих частинок в потоці рідини з часом не залишаються постійними, а весь час змінюються,

пульсують по величині. Сучасна вимірювальна апаратура дозволяє отримати запис пульсації швидкості в точці потоку (рис. 3.3б). З графіка *u'= f(t)* можна зняти значення миттєвих швидкостей в точці у будь-який момент часу. Проте ці значення рідко використовують в гідравлічних розрахунках.

Місцевою швидкістю називається усереднена за часом швидкість в точці потоку. Її можна обчислити за формулою:

$$u = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} u' dt$$

Середня швидкість. Є прилади, що дозволяють виміряти епюру розподілу місцевих швидкостей по глибині потоку *u = f(h)* (рис 3.4а). У кожній точці вертикалі *AB* будуть свої значення місцевих швидкостей $u_1, u_2, u_3 \ldots$ Фігура *ABC* представляє характер розподілу швидкостей *u* по вертикалі і називається епюрою швидкостей. Цю фігуру можна замінити рівновеликою їй за площею фігурою *ABED*, якщо провести вертикаль *DE* так, щоб площі, що відсікаються нею, із знаком плюс і із знаком мінус були однаковими. Таким чином, ми отримали на рис. 3.4а значення середньої швидкості υ для даної вертикалі. Середню швидкість іноді відносять до вертикалі, але частіше – до перерізу потоку.

Середньою швидкістю потоку в даному перерізі називається фіктивна швидкість υ, з якою повинні переміщатися всі частинки рідини в цьому перерізі, щоб через нього пройшла витрата води *Q*, рівна витраті при дійсному розподілі швидкостей.

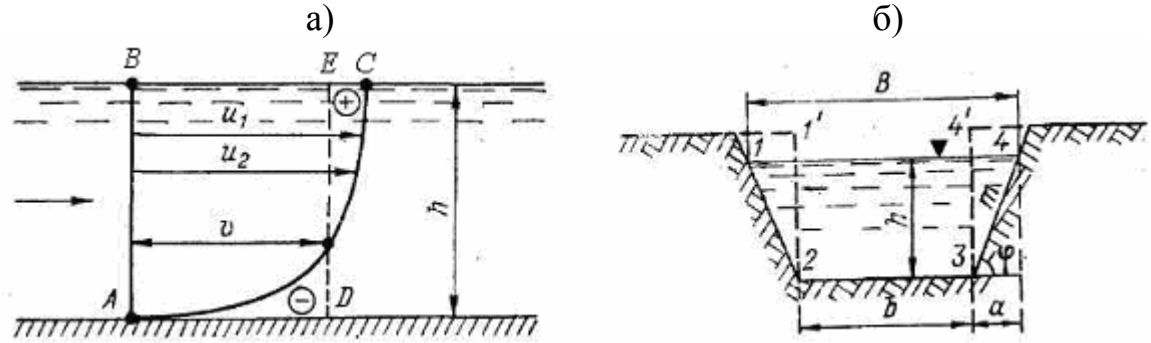

Рисунок 3.4 – Епюра місцевих швидкостей (а); поперечні перерізи прямокутного і трапецеїдального русла (б).

Якщо відомий закон розподілу місцевих швидкостей по перерізу потоку, то середню швидкість можна знайти по формулі

$$\upsilon = \int_{\omega} u d\omega / \omega. \qquad (3.3)$$

Витрата рідини. Витратою рідини називається об'єм її, що протікає в одиницю часу через живий переріз потоку. Розмірність Q:

$$[Q] = L^3/T$$

наприклад, $м^3/с$, $дм^3/с$ (л/с).

Підставляючи у формулу (3.3) вираз для елементарної витрати dQ (3.1), отримаємо

$$\upsilon = \int_{\omega} dQ/\omega = Q/\omega . \qquad (3.4)$$

звідки

$$Q = \upsilon\omega \qquad (3.5)$$

де ω – площа живого перерізу.

Площа живого перерізу. У практиці розрахунків живий переріз часто замінюють плоским поперечним перерізом і знаходять його площу. Поперечний переріз потоку – площина, перпендикулярна загальному (середньому) напряму перебігу потоку і обмежена профілем русла, а зверху рівнем води (для потоку з відкритою вільною поверхнею).

Для русла прямокутної форми (рис. 3.4б) площа перерізу потоку визначається формулою:

$$\omega = bh , \qquad (3.6)$$

де b – ширина русла по дну, h – глибина потоку. Для трапецеїдального перерізу відкритого потоку (рис. 3.4б) площа поперечного перерізу розраховується по формулі:

$$\omega = (b + mh)h \qquad (3.7).$$

де $m = a/h = ctg\varphi$ – коефіцієнт укосу.

Змочений периметр є довжиною лінії зіткнення рухомого потоку з нерухомими стінками в межах поперечного перерізу русла.

У разі прямокутної форми русла змочений периметр дорівнює довжині лінії *1'–2–3–4'* (рис. 3.4б) і виражається формулою

$$\chi = b + 2h . \qquad (3.9)$$

Для широкого прямокутного русла, коли $B >> h, \chi \approx B$ (B – ширина русла по поверхні води).

Для русла трапецеїдальної форми змочений периметр дорівнює довжині лінії *1–2–3–4* (рис. 3.4б) і виражається формулою:

$$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2} . \qquad (3.10)$$

У зимовий час, коли вільна поверхня води покрита льодом, в змочений периметр включається і довжина лінії контакту води і крижаного покриву

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} + B, B = b + 2mh \qquad (3.11)$$

Гідравлічний радіус:

$$R = \omega / \chi \qquad (3.14)$$

Розмірність гідравлічного радіусу [R] = L, наприклад, м, см. Гідравлічний радіус R показує, яка частина площі поперечного перерізу доводиться на одиницю довжини змоченого периметра, тобто в деякій мірі характеризує гальмування потоку з боку русла. За допомогою цієї величини намагаються приблизно врахувати вплив форми (а також розмірів) живого перерізу потоку на рух рідини.

Для випадку широкого прямокутного русла, що характерний для більшості рівнинних річок, гідравлічний радіус в умовах відсутності льодоставу практично дорівнює його середній глибині. Дійсно:

$$R = \omega / \chi = Bh/(B + 2h) \approx h. \qquad (3.15)$$

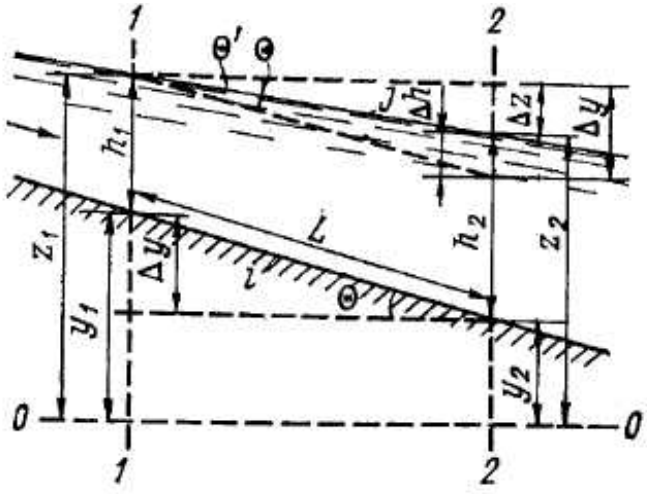

Рисунок 3.5 – Подовжній профіль потоку.

Уклон потоку. Розглянемо поняття уклону на прикладі потоку з відкритою водною поверхнею. Візьмемо подовжній розріз потоку для найбільш загального випадку, коли глибина не залишається постійною по довжині (рис. 3.5). Виберемо ділянку рухомої рідини між перерізами *1–1* і *2–2*. Довжина ділянки L, співвідношення глибин $h_2 > h_1$. Намітимо горизонтальну площину порівняння *00* (рис. 3.5). Позначимо відстані від

площини порівняння до відміток водної поверхні у вибраних перерізах відповідно через z_1 і z_2, відстані до відміток дна – через y_1, y_2.

Уклон дна потоку дорівнює відношенню падіння (різниці відміток) дна потоку на даній ділянці до довжини цієї ділянки, тобто

$$i = (y_1 - y_2)/L = \Delta y / L = \sin\Theta, \tag{3.16}$$

де Θ – кут нахилу лінії дна до горизонту (рис. 3.5).

Уклон вільної поверхні дорівнює відношенню різниці висотних відміток рівня води на даній ділянці до довжини ділянки, тобто

$$J = (z_1 - z_2)/L = \Delta z / L = \sin\Theta' \tag{3.17}$$

де Θ' – кут між лінією водної поверхні і горизонтом (рис.3.5).

Як видно з рис. 3.5, в загальному випадку

$$\Delta z = \Delta y - \Delta h \tag{3.18}$$

де Δh – різниця глибин на даній ділянці потоку. З (3.18) витікає, що тільки при $\Delta h = 0$ матимемо $\Delta z = \Delta y$, а значить $J=i$, тобто уклон вільної поверхні виявляється рівним ухилу дна потоку (що відповідає рівномірному руху потоку).

3.2 Види та режими руху рідини

Режим руху рідини буває: 1) ламінарний і 2) турбулентний.

При **ламинарному режимі** окремі шари рідини ковзають щодо один одного, не змішуючись між собою (струминність), а частинки рідини рухаються прямолінійно по паралельним одна одній траєкторіям. При цьому режимі в кожній точці потоку швидкості не змінюються в часі, по величині та по напряму; зміна швидкості течії може бути пов'язана тільки із зміною витрати води в потоці.

Турбулентный режим характеризується порушенням "струминності" руху і зміною в часі місцевих швидкостей потоку по величині і напряму – пульсацією швидкостей; при цьому частинки рідини рухаються по складних траєкторіях, що весь час змінюються. Одночасно з пульсацією швидкості спостерігається і пульсація тиску. З пульсацією швидкості тісно зв'язаний і процес турбулентного перемішування (турбулентної дифузії), що є набагато інтенсивнішим (іноді в десятки тисяч разів і більш), ніж молекулярна дифузія, характерна для ламінарних потоків. Рух води в

річках і каналах має турбулентний характер; ламінарний режим в природі спостерігається в тонких капілярних трубках.

Залежно від загальних умов і характеру сил, що діють, розрізняють безнапірний і напірний рухи.

Безнапірний рух (вільний) характеризується наявністю вільної поверхні рівня води і здійснюється під дією сили тяжіння. Такий рух спостерігається у відкритих природних і штучних руслах і в деяких окремих випадках в трубах, коли вони працюють неповним перерізом.

Представимо на рис. 3.6а подовжній розріз потоку з відкритою вільною поверхнею. Рух частинки A в потоці здійснюється під дією проекції сили тяжіння на напрям руху

$$G_x = G \cdot \sin\Theta \qquad (3.19)$$

або, підставляючи в (3.19) вираз (3.16), отримаємо:

$$G_x = iG\,. \qquad (3.20)$$

Звідси видно, що уклон дна грає важливу роль при вільному, безнапірному (гравітаційному) русі потоку.

Напірний рух – це рух, при якому потік з усіх боків обмежений твердими стінками, а сам рух виникає під впливом сил тиску, що подається зовнішнім джерелом. Такий рух спостерігається в напірних трубопроводах (рис. 3.6 б).

а) б)

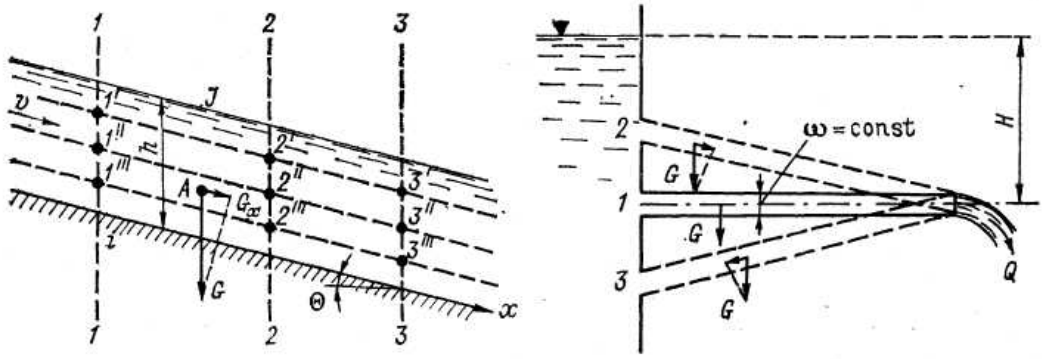

Рисунок 3.6 – а) Безнапірний (вільний) рух; б) напірний рух

Він може мати місце і в повністю заповненому водоносному пласті, перекритому зверху і знизу водотривким шаром (артезіанські води), і в річці – за наявності щільного крижаного покриву.

Залежно від характеру зміни елементів поперечного перерізу і гідравлічних характеристик по довжині потоку рух ділять на: 1) рівномірний, 2) нерівномірний і 3) такий, що плавно змінюється.

Рівномірним рухом називається рух, при якому гідравлічні елементи потоку (глибина, площа живого перерізу, витрата, середня швидкість і ін.) при переході від одного перерізу до іншого залишаються постійними, тобто не змінюються по довжині потоку. При рівномірному русі епюри швидкостей для всіх перерізів мають однакову площу і однакову форму. Це означає, що місцева швидкість у відповідних точках (рис 3.6а) будь-яких живих перерізів даного потоку однакова (точки *1', 2', 3'* ..., або *1", 2", 3"* ...). Такий рух може спостерігатися в каналі з постійними розмірами і живим перерізом потоку, причому середня швидкість v в цих умовах постійна уздовж потоку ($\upsilon = const$). В природних умовах в річках рівномірний рух неможливий і лише на окремих прямолінійних ділянках невеликої довжини L він лише може наближатися до рівномірного.

У разі вільного рівномірного руху уклони водної поверхні потоку і дна русла рівні ($J=i$); лінії поверхні води і дна русла паралельні (рис. 3.6а).

Нерівномірним рухом називається рух, характеристики якого змінюються по довжині потоку. Він може бути викликаний:

а) зміною живого перерізу потоку;

б) зміною середніх швидкостей в різних живих перерізах;

в) зміною обох характеристик одночасно.

Прикладом нерівномірного руху потоку є рух води в річці на ділянці перед дамбою: по довжині потоку у напрямі руху площа живого перерізу і глибина збільшуються, швидкості – зменшуються, при звуженні або розширенні річки, при виході води на заплаву, на ділянці різкого повороту.

Рух, що плавно змінюється, – проміжна форма руху між рівномірним і нерівномірним. Для руху, що плавно змінюється, характерні наступні ознаки:

а) у потоках, що звужуються або розширюються, кут збіжності (розбіжності) струминок повинен бути достатньо малий;

б) при русі на повороті кривизна струминок повинна бути незначною;

в) живі перерізи потоку є плоскими, нормальними до осі потоку.

Залежно від зміни характеристик руху в часі рух ділять на: 1) сталий, 2) несталий і 3) такий, що поволі змінюється.

Сталим рухом називається рух, характеристики якого (рівень вільної поверхні, витрата і швидкість в даному перерізі потоку), не змінюються в часі. Прикладами сталого руху можуть бути рух води в каналі або річці при постійному рівні води. Сталий рух може бути як рівномірним, так і нерівномірним.

Несталим рухом називається рух, при якому гідравлічні характеристики потоку змінюються в часі. Несталим рухом є найбільш загальний вид руху, по відношенню до якого сталий рух є окремим випадком.

У природному потоці (річці) несталий рух може бути викликаний хвилею повені або хвилями попусків з водосховищ, коли в кожному перерізі потоку відбувається безперервна зміна рівнів, витрат і інших гідравлічних параметрів. Таким чином, вільний несталий рух завжди буде нерівномірним. Але навіть і за відсутності хвиль паводків або попусків в природних потоках швидкість і тиск в кожній точці потоку рідини з часом змінюються. Проте при виконанні гідравлічних розрахунків ми умовно вважаємо такі потоки сталими, приймаючи в розрахунках швидкості і тиск, усереднені за достатній проміжок часу.

Рух, що поволі змінюється, – проміжна форма руху між сталим і несталим. Наприклад, підйом рівня в річці не обов'язково малий в порівнянні з первинною глибиною водотоку, але збільшення глибини відбувається достатньо поволі.

Рух рідини за станом ділять на: 1) спокійний і 2) бурхливий.

Спокійний стан характеризується порівняно малими, швидкостями руху і великими глибинами. Він спостерігається на рівнинних річках і в каналах при малих уклонах дна. **Бурхливий стан** виникає при великих уклонах дна, великих швидкостях і порівняно малих глибинах. Він характерний для гірських річок, водоскидів ГЕС.

3.3 Рівняння нерозривності у разі сталого руху

Представимо струмінь рідини і намітимо два перерізи *1–1* і *2–2* (рис. 3.7). Будемо вважати рух таким, що плавно змінюється і сталим. Розглянемо відсік *abcd*, що знаходиться між перерізами.

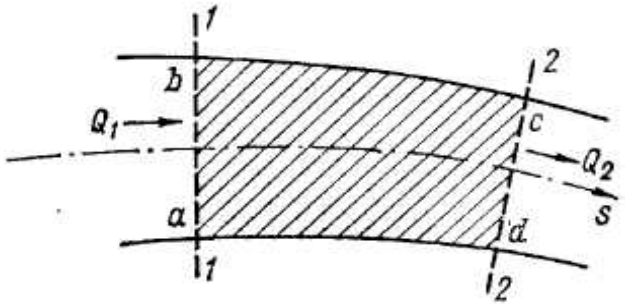

Рисунок 3.7 – До виведення рівняння нерозривності.

Позначимо через Q_1 і Q_2 витрати відповідно для перерізів *1–1* і *2–2*. За час dt у відсік *abcd* через живий переріз *1–1* поступить об'єм рідини, що дорівнює $Q_1 \cdot dt$; за цей же час через живий переріз *2–2* з відсіку *abcd* витече об'єм рідини, рівний $Q_2 \cdot dt$.

Візьмемо до уваги такі обставини:

1) рідина є нестискуваною;

2) рідина рухається суцільним потоком без розривів і порожнеч;

3) відтік або приплив рідини через бічні поверхні *ad* і *bc*, а також через дно виділеного відсіку *abcd* виключено.

Враховуючи ці обставини, можна стверджувати, що:

$$Q_1 \cdot dt = Q_2 \cdot dt \tag{3.21}$$

або

$$Q_1 = Q_2 . \tag{3.22}$$

Окрім перетинів *1–1* і *2–2*, можна намітити уздовж потоку по осі *s* (рис. 3.7) цілий ряд інших поперечних перерізів і, розглядаючи їх так само, як і перерізи *1–1* і *2–2*, прийти до висновку, що

$$\frac{dQ}{ds} = 0 , \tag{3.23}$$

тобто при сталому русі витрата Q для всіх перерізів потоку однакова.

Рівняння (3.23) відображає властивості нестискуваності і нерозривності рухомої рідини. Тому далі ми будемо називати його рівнянням нерозривності.

Підставляючи у вираз (3.22) витрату води Q, обчислену за формулою (3.5), перепишемо його у вигляді

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} , \tag{3.24}$$

тобто середні швидкості потоку обернено пропорційні площам живих перерізів.

3.4 Два режими руху рідини. Досліди Рейнольдса

У першій половині XIX ст. завдяки проведенню експериментальних досліджень Пуазейля (Франція), Дарсі (Франція), Хагена (Німеччина) було встановлено, що в природі існують два принципово різні режими руху рідини.

Проте ясне уявлення про обставини, що визначають умови переходу від одного режиму до іншого, дали тільки дослідження англійського фізика і інженера О. Рейнольдса, виконані в 1881–1883 рр.

Рейнольдс провів свої спостереження на спеціальній установці, принципова схема якої до теперішнього часу використовується для демонстрації режимів руху (рис. 3.8). Дослідна установка складається з

великого бака *1*, заповненого водою, і невеликого бачка *2*, в який налита темна фарба з густиною, близькою густині води. Від бачка *2* тонка трубочка підводиться до вхідного перетину скляної трубки *3*, що має на

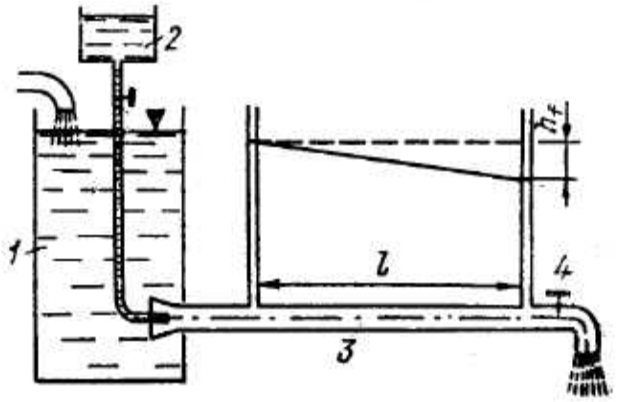

Рисунок 3.8 – Схема дослідної установки Рейнольдса.

кінці кран *4*. Відкриваючи або закриваючи цей кран, змінюємо витрату води, в трубці, а отже, і середню швидкість υ.

В результаті таких дослідів було встановлено наступне[4]:

1) при швидкостях в трубці υ, менших деякої критичної швидкості υ_k, фарба, що потрапляє в трубку, забарвлює тільки одну струминку потоку (ламінарний режим);

2) при швидкостях $\upsilon > \upsilon_k$ струминка з фарбою спочатку втрачає свою виразну форму, а потім при подальшому збільшенні швидкості вся рідина, що знаходиться в трубці, забарвлюється за всім своїм об'ємом. Рідина в цілому має поступальний рух зліва направо, а її частинки переміщаються по випадкових невизначено викривлених траєкторіях; даний рух носить безладний хаотичний характер і супроводжується постійним перемішуванням рідини (турбулентний режим).

При проведенні досліду у зворотному напрямі, тобто при поступовому закритті крана *4*, явище повторюється в зворотному порядку. Проте необхідно відзначити, що перехід від безладного руху в струменевий відбувається при нижчих швидкостях. Очевидно, і в даному випадку є якась критична швидкість, нижче за яку неможливе фарбування всієї рідини в горизонтальній трубці, тобто турбулентний рух. Друга критична швидкість менше першої, тому першу критичну швидкість називають критичною швидкістю верхньої межі – $\upsilon_{кв}$, а другу – критичною швидкістю нижньої межі – $\upsilon_{кн}$.

Досліди Рейнольдса показали, що різним режимам руху відповідають і різні залежності втрат напору від середньої швидкості. Якщо на початку і кінці горизонтальної трубки в описаній установці (рис. 3.8) поставити

п’єзометри, то різниця висот рівнів в них покаже втрату напору h_j, що витрачається потоком на подолання сил тертя на відстані l. Результати дослідів схематично показані у вигляді залежності $h_j = f(\upsilon)$ (рис. 3.9). На ділянці OA при швидкостях менше $\upsilon_{кн}$ залежність має лінійний характер:

$$h_j = k_л \upsilon, \tag{3.25}$$

де $k_л$ – коефіцієнт пропорційності, що залежить від фізичної в’язкості рідини. Ця область відповідає ламінарному режиму[4].

На ділянці BC при швидкостях більше $\upsilon_{кв}$ залежність має вигляд:

$$h_j = k_m \upsilon^n, \tag{3.26}$$

де k_m – коефіцієнт пропорційності, в загальному випадку що є величиною змінною і залежною від цілого ряду чинників, а $n \to 2$. Тут діє квадратичний закон опору, тобто втрати напору пропорційні середній швидкості в квадраті. Ця область на графіку відповідає турбулентному режиму[4].

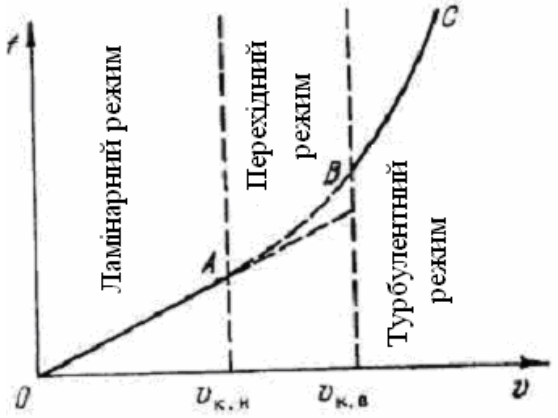

Рисунок 3.9 – Залежність втрат напору при різних режимах руху.

В області AB можливі обидва режими руху залежно від характеру зміни швидкостей (збільшення або зменшення їх); для неї можна записати

$$h_j = k_л \upsilon + k_m \upsilon^2. \tag{3.27}$$

Отже, при ламінарному режимі енергія потоку витрачається тільки на подолання сил внутрішнього тертя між сусідніми шарами рідини, що

рухаються з різною швидкістю; при турбулентному режимі – значна частка енергії потоку витрачається на процес перемішування.

3.5 Число Рейнольдса. Визначення режиму руху рідини

Рейнольдс провів досліди в трубках різного діаметру, крім того, він проаналізував дані дослідів Пуазейля і Дарсі і прийшов до висновку, що режим руху залежить від середньої швидкості потоку υ, діаметру трубки d і кінематичного коефіцієнта в'язкості води ν. На основі методу розмірностей Рейнольдс склав безрозмірне характерне число, яке згодом отримало назву числа Рейнольда

$$\mathrm{Re} = \frac{\upsilon d}{\nu}. \qquad (3.28)$$

Число Рейнольдса може розглядатися як міра відношення кінетичної енергії даного елементу рідини до роботи сил в'язкості. Чим менше число Re, тим більшу роль грають сили в'язкості в рухомій рідині, а чим більше число Re, тим більші сили інерції.

Розрізняють два критичні числа Рейнольдса: $\mathrm{Re}_к$ – нижнє критичне число і $\mathrm{Re}'_к$ – верхнє критичне число, що відповідають нижній ($\upsilon_{кн}$) і верхній ($\upsilon_{кв}$) критичним швидкостям.

Якщо число Рейнольдса менше його нижнього критичного значення $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_к$,то можливий тільки ламінарный режим руху. Якщо число Рейнольдса лежить в проміжку між нижним і верхнім критичними значеннями $\mathrm{Re}_к < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}'_к$, то можливі обидва режими руху. Це частково залежить від ступеня шорсткості русла або стінок труби: при більшій шорсткості турбулентність розвивається при менших значеннях Re. Важливо також і напрям зміни режиму руху: якщо потік спочатку мав ламінарний режим, то при зростанні швидкостей течії перехід до турбулентного режиму здійснюється при $\mathrm{Re}'_к$; якщо спочатку режим був турбулентний, то при убуванні швидкостей перехід до ламінарного режиму здійснюється, коли число Re стане нижче $\mathrm{Re}_к$. У цій області може також спостерігатися і перехідний режим, що характеризується не цілком розвиненою турбулентністю. Нарешті, якщо $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}'_к$ можливий тільки турбулентний режим.

У розрахунках приймають для круглих труб $\mathrm{Re}_к$=2400, $\mathrm{Re}'_к$=13 000.

3.6 Рівняння Бернуллі для елементарної струминки рідини

Рівняння Бернуллі встановлює зв'язок між тиском в рідині і швидкістю руху частинок. За допомогою цього рівняння виводиться значна кількість розрахункових формул і вирішується багато інженерних завдань, пов'язаних з розрахунками турбулентного руху води в трубах і відкритих руслах.

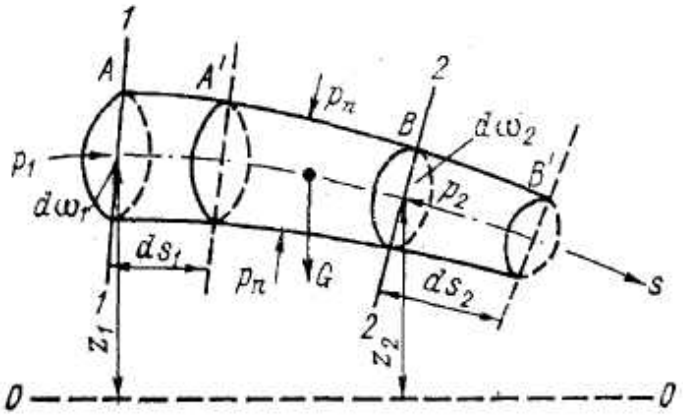

Рисунок 3.10 – До виведення рівняння Бернуллі.

Для виведення рівняння Бернуллі використовують відому з механіки теорему, що стосується зміни кінетичної енергії: зміна кінетичної енергії даного тіла на деякому його переміщенні дорівнює сумі робіт всіх сил (зовнішніх і внутрішніх), прикладених до даного тіла, на тому ж переміщенні [2,4].

Розглянемо елементарну струминку сталого потоку ідеальної рідини (рис. 3.10). Виділимо перерізами *1–1* і *2–2* деякий відсік струминки *AB*. Намітимо горизонтальну площину порівняння *00*. Позначимо через z_1 і z_2 перевищення центрів тяжіння перерізів *1–1* і *2–2* над площиною *OO*, через $d\omega_1$ і $d\omega_2$ – нескінченно малі площі живих перерізів струминки.

Вважатимемо, що за час *dt* відсік *AB* струминки переміститься в положення *A'B'*; при цьому переріз *1–1* струминки переміститься на відстань ds_1 і переріз *2–2* струминки – на відстань ds_2:

$$ds_1 = u_1 dt;\ ds_2 = u_2 dt, \tag{3.29}$$

де u_1 і u_2 – швидкості в перерізах *1–1* і *2–2*; на основі властивості елементарної струминки вони є постійними в межах даних перерізів струминки.

Міркуючи, як і в п. 3.3, можемо показати, що об'єми *dW* елементарних відсіків струминки *A A'* і *BB'* рівні, причому

$$dW = d\omega_1 ds_1 = d\omega_2 ds_2 = d\omega_1 u_1 dt = d\omega_2 u_2 dt = dqdt\,, \qquad (3.30)$$

де dq – витрата рідини для струминки.

Позначимо масу елементарного об'єму dW через dm:

$$dm = \rho\ dW = \rho\ dq\ dt. \qquad (3.31)$$

Знайдемо зміну кінетичній енергії відсіку AB при переміщенні його в положення $A'B'$ і роботу сил, прикладених до цього відсіку, на вказаному переміщенні. Зміна кінетичній енергії виділеного об'єму дорівнює:

$$\frac{dmu_2^2}{2} - \frac{dmu_1^2}{2}$$

або, враховуючи (3.30) і (3.31)

$$\frac{\rho dqdt(u_2^2 - u_1^2)}{2} = \frac{\rho dt}{2}(u_2^3 d\omega_2 - u_1^3 d\omega_1)\,. \qquad (3.32)$$

Робота сили тяжіння виявляється як би в тому, що відсік AA' перемістився в положення BB' (а відсік $A'B$ залишився на місці):

$$\rho g dW(z_1 - z_2)$$

або, враховуючи (3.30)

$$\rho g dt(z_1 u_1 d\omega_1 - z_2 u_2 d\omega_2)\,. \qquad (3.33)$$

Робота сил гідродинамічного тиску, що діє на торцеві перетини 1– 1 і 2– 2 відсіку AB (з боку рідини, що оточує його) рівна

$$p_1 d\omega_1 ds_1 - p_2 d\omega_2 ds_2$$

або, враховуючи (3.29)

$$dt(u_1 p_1 d\omega_1 - u_2 p_2 d\omega_2)\,. \qquad (3.34)$$

Робота зовнішніх сил тиску навколишньої рідини на бічну поверхню відсіку AB дорівнює нулю, оскільки сили p_n (рис. 3.10) направлені перпендикулярно до переміщень рідких частинок, що рухаються уздовж бічної поверхні відсіку AB.

Робота зовнішніх і внутрішніх сил тертя дорівнює нулю, оскільки в тій, що розглядається нами ідеальній рідині сили тертя відсутні.

Використовуючи теорему зміни кінетичній енергії, можемо написати:

$$\frac{\rho dt}{2}(u_2^3 d\omega_2 - u_1^3 d\omega_1) = \rho g dt(z_1 u_1 d\omega_1 - z_2 u_2 d\omega_2) + dt(u_1 p_1 d\omega_1 - u_2 p_2 d\omega_2) \quad (3.35)$$

Розділимо цей вираз на g і на ρdW, тобто віднесемо його до одиниці маси того об'єму рідини, який проходить за час dt через живий переріз струминки:

$$\frac{1}{2g}(u_2^2 - u_1^2) = z_1 - z_2 + \frac{1}{\rho g}(p_1 - p_2).$$

Отримане рівняння представимо у вигляді:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \ . \quad (3.36)$$

Оскільки перерізи *1–1* і *2–2* були намічені довільно, то (3.36) можна переписати у вигляді:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = const \quad \text{(вздовж струминки)}. \quad (3.37)$$

Рівняння (3.36) або (3.37), що відноситься до елементарної струминки ідеальної рідини, називається рівнянням Данили Бернуллі, який в 1738 р. описав (словесно) співвідношення величин, що входять в дане рівняння у разі сталого руху.

Реальна в'язка рідина характеризується наявністю сил тертя, які виникають при її русі і викликають гідравлічні опори. Завдяки роботі сил тертя частина механічної енергії рідини переходить в тепло, яке розсіюється. Та частина механічної енергії, яка перетворилася на тепло, вже не може бути використана.

Тому її називають втратами енергії і позначають втрачену питому енергію h_f. Тоді рівняння Бернуллі для будь-яких двох перерізів елементарної струминки реальної рідини можна написати у вигляді:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_f . \quad (3.38)$$

3.7 Інтерпретації рівняння Бернуллі

Складовим рівняння Бернуллі (3.73) можна дати інтерпретації з трьох точок зору: геометричної, енергетичної і механічної.

1. Геометрична інтерпретація. Розглянемо елементарну струминку реальної рухомої рідини (рис. 3.11). Намітимо перерізи *1– 1* і *2 –2* і горизонтальну площину порівняння *OO*. Умовимося відносити складові рівняння Бернуллі до відповідних точок m_1 і m_2, що лежать в центрах тяжіння живих перерізів струминки.

Складові z_1 і z_2 показують відстані центрів живих перерізів над площиною порівняння *OO*. Член $\frac{p}{\rho g}$ є п'єзометричною висотою, що відповідає гідродинамічному тиску p в точці. Член $\frac{u^2}{2g}$ називається швидкісним напором, може бути виміряний за допомогою гідрометричної трубки (трубки Піто), у якої нижній кінець заломлений так, щоб швидкість була направлена у вхідний отвір трубки. Розмірність складових рівняння лінійна.

Встановимо в деякому перерізі струминки вертикальні трубки: п'єзометричну трубку для вимірювання тиску p та трубку Піто. За рахунок швидкісного напору набігаючого потоку горизонт води в трубці *б* встановлюється вище за горизонт води в трубці *а* на величину

$$h_u = \frac{u^2}{2g}. \tag{3.39}$$

Змірявши швидкісний напір h_u, знаходимо швидкість руху рідини в тій точці, де встановлений наконечник трубки Піто за допомогою залежності

$$u = k\sqrt{2gh_u}\,, \tag{3.40}$$

де k – поправочний коефіцієнт, який знаходиться для даної трубки шляхом її тарування.

З'єднавши плавною кривою рівні в п'єзометричних трубках, отримаємо п'єзометричну лінію (лінія *p–p*). Елементарне падіння п'єзометричної лінії *p–p*, віднесене до відповідної елементарної довжини *ds* струминкики (відміряною по її осі) називається п'єзометричним уклоном і записується:

$$J_p = \pm\frac{d(z + p/(\rho g))}{ds}. \tag{3.41}$$

Сума трьох висот називається повним напором і позначається *H*:

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}. \qquad (3.42)$$

Падіння напірної лінії *HH*, віднесене до відповідної елементарної довжини *ds* струминки називається гідравлічним уклоном і записується:

$$J = \pm \frac{d(z + p/(\rho g) + u^2/2g)}{ds}. \qquad (3.43)$$

У разі рівномірного напірного руху $u_1 = u_2$ п'єзометричний уклон J_p дорівнює гідравлічному *J*.

2. Енергетична інтерпретація. Розглянемо три доданки, що складають повний напір (3.42), з енергетичної точки зору перші два доданки представляють собою потенційний напір:

$$H = z + \frac{p}{\rho g}, \qquad (3.44)$$

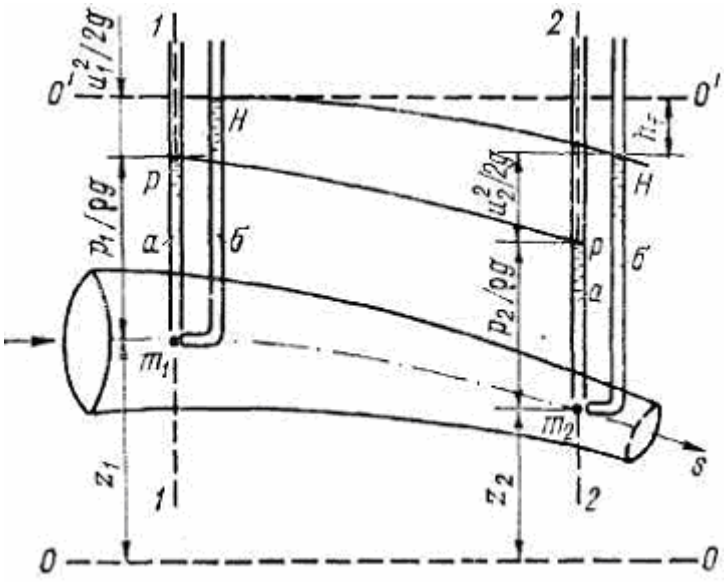

Рисунок 3.11 – Геометрична інтерпретація рівняння Бернуллі.

тобто питому потенційну енергію E_n, що належить одиничній масі рідини, яка проходить через живий переріз елементарної струминки. Ця енергія складається з двох частин: питомої енергії положення E_z рідини, що знаходиться на висоті *z* над умовною горизонтальною площиною порівняння, і питомої енергії тиску E_p, обумовленої напором тиску *p/(pg)*.

Доданок $\frac{u^2}{2g}$ представляє собою питому кінетичну енергію E_k, що належить одиничній масі рідини.

Енергетичний вираз повного напору можна представити в наступному вигляді:

$$H = \underbrace{E_z + E_p}_{E_n} + E_k,$$

рівняння Бернуллі (3.38) у вигляді

$$E_{z_1} + E_{p_1} + E_{k_1} = E_{z_2} + E_{p_2} + E_{k_2} + \Delta E, \qquad (3.45)$$

де ΔE – втрати енергії в елементарній цівці на шляху переміщення рідини від перетину *1–1* до перетину *2–2*, віднесені до одиниці маси рідини. Розглянуте рівняння Бернуллі виражає загальний закон збереження енергії, застосований до випадку руху рідини.

3. Механічна інтерпретація. Рівняння Бернуллі є виразом закону зміни живих сил для одиниці маси рухомої рідини, згідно з яким приріст живої сили для одиниці маси рухомої рідини дорівнює сумі робіт сили тяжіння при переміщенні одиниці маси рідини з висоти z_1 до z_2, сили гідродинамічного тиску і сил опору на даному відрізку руху.

3.8 Рівняння Бернуллі для потоку реальної рідни.

В інженерних розрахунках ми маємо справу з потоком води певних поперечних розмірів, тому щоб пристосувати рівняння Бернуллі до потоку рідини представимо його у вигляді сукупності елементарних струминок та припустимо, що в порівнюваних перерізах – усталений плавно змінний рух. Це припущення дає змогу знехтувати впливом сил інерції на розподіл тиску і вважати, що в живих перерізах потоку тиск розподіляється по гідростатичному закону:

$$z + p/(\rho g) = const.$$

Розповсюдимо закон зміни кінетичній енергії (3.35), одержаний для елементарної струминки, на потік рідини, тобто проінтегруємо його по площі живого перерізу потоку. Швидкості в потоці змінюються і по вертикалі і по перерізу потоку. Щоб перейти до середньої швидкості використаємо коефіцієнт α, фізичний зміст якого заключається у тому, що він характеризує відношення дійсної кінетичної енергії потоку до кінетичної енергії, яка обчислена у припущенні, що швидкості у всіх точках живого перерізу дорівнюють середній швидкості. Коефіцієнт α

враховує вплив нерівномірності розподілу швидкості по перерізу потоку і називається коректівом швидкості або коефіцієнтом нерівномірності розподілу швидкості по перерізу потоку. Дослідження показали, що для руху у відкритих руслах при турбулентному рівномірному русі середнє значення $\alpha_{cp} \approx 1.1$.

Після інтегрування одержимо ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$):

$$\frac{\rho dt}{2}(\alpha \upsilon_2^3 \omega_2 - \alpha \upsilon_1^3 \omega_1) = \rho g dt(z_1 \upsilon_1 \omega_1 - z_2 \upsilon_2 \omega_2) + dt(p_1 \upsilon_1 \omega_1 - p_2 \upsilon_2 \omega_2). \quad (3.46)$$

Розділимо всі члени виразу (3.46) на $\rho g dW$, тобто віднесемо їх до одиниці маси того ж об'єму рідини, який проходить за час *dt* через живий переріз потоку:

$$\frac{\alpha \upsilon_2^2}{2g} - \frac{\alpha \upsilon_1^2}{2g} = z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g}. \quad (3.47)$$

Перепишемо рівняння (3.47) у вигляді:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha \upsilon_2^2}{2g}. \quad (3.48)$$

По аналогії з поняттям середньої швидкості потоку скористаємося поняттям про середню втрату енергії в струминках між перерізами *1–1* і *2–2*. Позначаючи втрату енергії, що втрачається в середньому одиницею маси рідини на шляху від першого до другого перерізу потоку за рахунок зовнішніх і внутрішніх сил тертя, через h_f і вводячи її в праву частину (3.48), отримаємо рівняння Бурнуллі для сталого потоку реальної рідини в остаточному вигляді

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha \upsilon_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha \upsilon_2^2}{2g} + h_f. \quad (3.49)$$

3.9 Основне рівняння рівномірного руху

Розглянемо безнапірний рівномірний потік рухомої рідини, що має постійну глибину *h* та нахилений до горизонту під кутом Θ. Виділимо в потоці перерізами *1– 1* і *2 –2* відсік рідини довжиною *l.* Знайдемо центри перерізів C_1, C_2 і проведемо через них вісь потоку *s.* Вздовж осі виділимо

об'єм призматичної форми, який має по довжині постійний живий переріз ω. Намітимо горизонтальну площину порівняння *OO* та позначимо через z_1 і z_2 відстані центрів тяжіння перерізів над площиною порівняння.

З механіки відомо, що прямолінійний рівномірний рух можливий, якщо виконується теорема рівноваги: сума проекцій на напрям руху всіх діючих та інерційних сил дорівнює нулю. Оскільки, рух потоку у виділеному відсіку рівномірний, то сили інерції відсутні.

Розглянемо сили, які діють на виділений об'єм рідини.

Сила тяжіння, що діє на відсік довжиною *l*, обмежений перерізами *1–1* і *2–2* :

$$G = \rho g l \omega . \tag{3.50}$$

Проекція сили тяжіння на вісь потоку *s*, направленої за течією рідини:

$$G = \rho g l \omega \cdot \sin\Theta . \tag{3.51}$$

З рисунка видно, що

$$l \cdot \sin\Theta = z_1 - z_2 , \tag{3.52}$$

тому

$$G_s = \rho g \omega (z_1 - z_2) . \tag{3.53}$$

Сили тиску P_1 і P_2 на перетини *1– 1* і *2 –2* з боку оточуючої рідини:

$$P_1 = p_1 \omega , P_2 = p_2 \omega , \tag{3.54}$$

де p_1 і p_2 – гідродинамічний тиск в центрах тяжіння перерізів *1– 1* і *2 –2*:

Сили P_1 і P_2**,** що направлені нормально до перерізів, проектуються на вісь *s* без викривлення, а сила P_2, направлена проти руху рідини, проектується із знаком мінус.

Проекції нормальних сил гідродинамічного тиску p_n на бічні поверхні виділеного об'єму дорівнюють нулю.

Сили тертя *T*, обумовлені дотичними напругами τ в рухомій рідині,

$$T = \tau \chi l , \tag{3.55}$$

де χ – змочений периметр перерізу виділеного об'єму. Сила *T* направлена проти руху рідини, проектується на напрям руху без викривлення.

Сума проекцій всіх сил на вісь руху дорівнює нулю. Тому маємо:

$$\rho g \omega (z_1 - z_2) + p_1 \omega - p_2 \omega - \tau \chi l = 0 . \tag{3.56}$$

Поділимо вираз (3.56) на $\rho g \omega$ і одержимо:

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{\tau \chi l}{\rho g \omega}. \qquad (3.57)$$

Скористаємося для виділеного об'єму рівнянням Бернуллі (3.49) та віднесемо його складові до центрів тяжіння перерізів *1–1* і *2–2*. У цьому рівнянні h_f – втрати напору на ділянці довжиною *l*. Враховуючи, що при рівномірному русі $\upsilon_1 = \upsilon_2$ з (3.49) одержимо:

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h_f. \qquad (3.58)$$

З (3.57) та (3.58) запишемо:

$$\frac{\tau \chi l}{\rho g \omega} = h_f, \text{ звідки } \frac{\tau}{\rho g} = \frac{h_f \omega}{l \chi}. \qquad (3.59)$$

У останньому виразі відношення (h_f / l) є гідравлічним уклоном *J*, а $\omega / \chi = R$ – гідравлічний радіус. Одержимо вираз, який називають основним рівнянням рівномірного руху:

$$\frac{\tau}{\rho} = gRJ. \qquad (3.60)$$

При безнапірному рівномірному русі гідравлічний уклон *J*, п'єзометричний уклон J_p (уклон вільної поверхні) і уклон дна *i* потоку рівні між собою.

Рівняння (3.60) одержане для безнапірного рівномірного руху рідини. Для напірного рівномірного руху воно матиме вигляд:

$$\frac{\tau}{\rho} = gRJ_p. \qquad (3.61)$$

Це рівняння дозволяє встановити залежність для втрат напору по довжині. Досліди Рейнольдса показують, що для турбулентного режиму втрати напору пропорційні квадрату середньої швидкості потоку, тобто

$$\frac{\tau}{\rho} = k\upsilon^2, \qquad (3.62)$$

де *k* – коефіцієнт пропорційності, визначається дослідним шляхом.

З (3.60) та (3.62) запишемо:

$$k\upsilon^2 = gRJ, \text{ звідки } J = \frac{h_f}{l} = \frac{k\upsilon^2}{gR}. \qquad (3.63)$$

Враховуючи, що при рівномірному русі місцеві втрати напору відсутні, то $h_f = h_l$, запишемо:

$$h_l = 2k \frac{l}{R} \frac{\upsilon^2}{2g}. \qquad (3.64)$$

Позначимо $2k = \lambda_R$, де λ_R – коефіцієнт гідравлічного тертя, та одержимо загальну залежність для втрат напору по довжині:

$$h_l = \lambda_R \frac{l}{R} \frac{\upsilon^2}{2g}. \qquad (3.65)$$

3.10 Втрати напору при русі води в трубах

Гідравлічні опори викликають втрату напору (енергії) в потоці. Розрізняють два види втрат:

1) втрати напору по довжині, викликані тертям усередині рідини і між рідиною і стінками русла. Ці втрати розподіляються по довжині потоку рівномірно (при рівномірному русі) або нерівномірно (при нерівномірному русі, що плавно змінюється). Такі втрати позначатимемо через h_l;

2) місцеві втрати напору, що утворюються тільки в окремих місцях потоку, де він зазнає ту або іншу місцеву деформацію, викликану різкою зміною його конфігурації: розширенням або звуженням потоку, поворотом, вигином в плані або у вертикальній площині, наявністю в трубі різних засувок, кранів і діафрагм, що деформують потік. Кожну окрему місцеву втрату напору позначатимемо через h_r, причому знайдене значення місцевої втрати напору h_r відносять до одного поперечного перетину потоку; втрату ж по довжині h_l умовно вважають розподіленими по всій довжині потоку рівномірно.

У загальному випадку для ділянки потоку, що міститься між двома перерізами, можна записати:

$$h_f = h_l + \sum h_r, \qquad (3.66)$$

де h_f – повна втрата напору (питомої енергії) для даної ділянки потоку.

Втрати напору по довжині потоку визначаються формулою Вейсбаха – Дарсі:

$$h_l = \xi_l \frac{\upsilon^2}{2g}, \qquad (3.67)$$

де $(\xi_l = \lambda l / d)$ – коефіцієнт опору по довжині для потоку рідини в трубі. Коефіцієнт гідравлічного тертя λ залежить від шорсткості стінок труби та числа Рейнольдса. Основною причиною втрат напору, що викликаються місцевими опорами, є різка зміна швидкості руху рідини і її напряму. Будь-

яку місцеву втрату напору можна виразити загальною формулою Вейсбаха:

$$h_r = \xi_r \frac{\upsilon^2}{2g}, \tag{3.68}$$

де ξ_r – коефіцієнт місцевого опору, визначається експериментальним шляхом для різних місцевих опорів, що зустрічаються в практиці. Значення місцевих коефіцієнтів опору ξ_r приводяться в довідковій літературі [3].

Якщо на трубопроводі є ряд місцевих опорів (засувки, крани, повороти), то загальні втрати напору можуть бути знайдені складанням втрат (арифметичне підсумовування їх). Цей принцип можна застосовувати якщо відстань між окремими місцевими опорами достатньо велика і їх взаємний вплив практично відсутній. Відстань, на якій позначається взаємний вплив місцевих опорів складає від 20 до 50d. Тому втрати енергії можна визначити за допомогою формули:

$$h_f = (\xi_l + \sum \xi_r) \frac{\upsilon^2}{2g}. \tag{3.69}$$

Вираз у дужках є сумою всіх коефіцієнтів місцевих опорів та коефіцієнта опору по довжині.

Контрольні питання:

1. Траєкторія руху частки рідини. Лінія течі.
2. Поняття «елементарна струминка», «елементарна витрата».
3. Поняття «місцева швидкість», «середня швидкість».
4. Поняття «змочений периметр», «гідравлічний радіус». Навести приклад.
5. Поняття «живий переріз потоку».
6. Площа живого перерізу. Навести приклад. Витрата рідини.
7. Уклон потоку.
8. Визначення рівномірного і нерівномірного руху потоку.
9. Визначення усталеного та неусталеного руху потоку.
10. Визначення напірного і безнапірного руху потоку.
11. Визначення руху потоку, який плавно змінюється та такого, який повільно змінюється. Рівняння нерозривності у випадку усталеного руху.
12. Ламінарний і турбулентний режими руху рідини. Число Рейнольда.
13. Функція $h_f = f(\upsilon)$ в залежності від режиму руху рідини.
14. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки рідини.
15. Геометрична та енергетична інтерпретації рівняння Бернуллі.
16. Втрати напору в потоці.

4 ВИТІК РІДИНИ З ОТВОРІВ І НАСАДКІВ

4.1 Загальні поняття і визначення

У інженерній практиці часто розглядається питання витоку рідини через отвори різних форм і розмірів, а також через короткі патрубки або насадки. До цього виду руху рідини відноситься витік з отворів в стінках різних резервуарів, витік з-під гідротехнічних затворів на дамбах і шлюзах, розрахунок наповнення і спорожнення шлюзових судноплавних камер, отворів гідротехнічних споруд, витік із посудин через приєднані до отворів насадки, через водовипуски, рух в водоструминних насосах, гідромоніторах, пожежних пристроях і у ряді інших випадків.

Витік рідини з отворів і насадків відноситься до гідравлічних явищ, які відбуваються на коротких ділянках потоку. Внаслідок цього втрати енергії на тертя по довжині потоку незначні і мають місце тільки втрати від місцевих опорів.

При дослідженні витоку рідини з отворів і насадків розрізняють:

1) Витік з отворів в тонкій і товстій стінці.

Тонкою називається така стінка резервуару, товщина якої не впливає на витік рідини і витікаючий струмінь (рис. 4.1а) стикається тільки з внутрішнім краєм отвору, не торкаючись його бічних поверхонь. Краї отвору зазвичай мають загострені краї. Товщина стінки δ не впливає на витрату і характер витікаючого струменя.

Товстою називається стінка резервуару, товщина якої впливає на витік рідини, викликаючи постійне або періодичне прилипання витікаючого струменя (рис. 4.1б) до бічної поверхні отвору або до частини її, що, у свою чергу, може відбитися на зміні пропускної спроможності отвору.

2) Витік з малих та великих отворів.

Малим (у гідравліці) називається отвір, вертикальні розміри якого (висота, діаметр) настільки малі в порівнянні з напором над центром отвору H (рис. 4.1), що напори і швидкості течії можуть бути прийняті практично однаковими для всіх точок перетину потоку в площині отвору. Для малих отворів розмір їх по вертикалі не більш $0.1H$.

Великим називається отвір, вертикальні розміри якого одного порядку з напором над центром тяжіння отвору. В цьому випадку напори у верхній і нижній точці отвору і швидкості в цих точках істотно різняться і не можуть бути прирівняні до середніх значень напору і швидкості; при цьому абсолютні розміри отворів не мають значення.

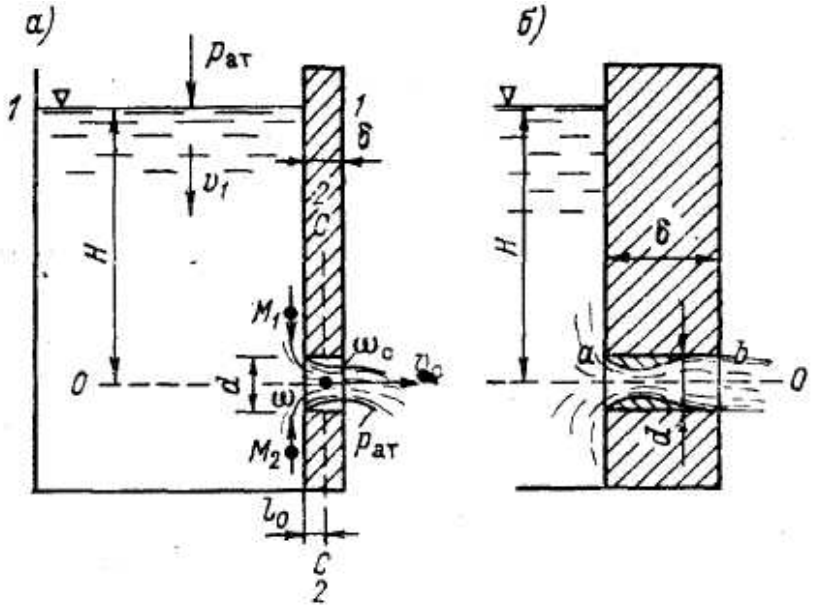

Рисунок 4.1 – Витік рідини із отворів в тонкій (а) і товстій (б) стінці.

3) Витік рідини з отворів і насадків при постійному напорі над центром отвору та при напорі, що змінюється.

При постійному напорі витрата, швидкість і траєкторія витікаючого струменя залишаються постійними в часі і явище витоку відноситься до випадку сталого руху рідини.

При змінному напорі (наприклад, у разі поступового спорожнення або наповнення резервуару) елементи руху змінюються в часі, тобто має місце випадок несталого руху рідини.

4) По характеру сполучення витікаючого з отвору струменя з рівнем рідини за отвором може бути: витік через незатоплений отвір, якщо рівень рідини за отвором знаходиться нижче за центр отвору (витік в атмосферу); витік через затоплений отвір, якщо рівень рідини за отвором знаходиться вище за центр отвору (витік під рівень).

4.2 Витік рідини в атмосферу з малого отвору в тонкій стінці при постійному напорі

Витік рідини через малий отвір у вертикальній тонкій стінці деякого резервуару представлений на рис. 4.1а. Як показують досліди, при виході з отвору струмінь рідини різко стискується на відстані до перетину $C - C$, який називають стисненим перерізом. Таке стиснення обумовлене інерцією частинок рідини, які рухаються по криволінійних траєкторіях при підході до отвору. Віддаляючись від

площини отвору кривизна траєкторій зменшується і рух частинок в струмені стає таким, що плавно змінюється.

Якщо отвір круглий, то відстань від внутрішньої поверхні стінки до стисненого перерізу приймається $l_0 \approx 0.5d$, де d – діаметр отвору. В результаті стиснення відбувається зменшення площі живого перерізу струменя до ω_c в порівнянні з площею отвору ω ($\omega > \omega_c$). Позначимо

$$\omega_c / \omega = \varepsilon, \tag{4.1}$$

де ε – коефіцієнт стиснення струменя. В стисненому перерізі тиск дорівнює тиску у навколишньому повітрі, тобто він атмосферний p_{am}.

Скористаємося рівнянням Бернуллі (3.49) для висновку формул для визначення середньої швидкості υ та витрати Q рідини, що витікає з отвору. Рівняння записано для перерізу *1–1* на рівні вільної поверхні в резервуарі і для стисненого перетину $C - C$ (переріз *2 – 2*). Площина порівняння *OO* проведена на рівні центра тяжіння отвору. Відповідно до вищесказаного складові рівняння Бернуллі (3.49) будуть:

$$\begin{aligned} z_1 &= H, \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{am}}{\rho g}, \frac{\alpha \upsilon_1^2}{2g} \approx 0, \\ z_2 &= 0, \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_{am}}{\rho g}, \frac{\alpha \upsilon_2^2}{2g} = \frac{\alpha \upsilon_c^2}{2g}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Швидкістю руху рідини в резервуарі можна знехтувати, тому що швидкість υ_1 набагато менше швидкості, з якою швидкість витікає з резервуару υ_c ($\upsilon_c >> \upsilon_1$).

Втрати напору від перерізу *1–1* до перерізу *2 – 2* будуть:

$$h_f = \xi \frac{\upsilon_c^2}{2g}, \tag{4.3}$$

де ξ – коефіцієнт опору, що враховує втрати напору від перерізу *1–1* до перерізу *2 – 2*, які зосереджуються в районі отвору і можуть бути віднесені до швидкості в стисненому перерізі υ_c.

Підставляючи (4.2) і (4.3) в (3.49) одержимо:

$$H = (\alpha + \xi) \frac{\upsilon_c^2}{2g} \ . \tag{4.4}$$

Позначимо $\varphi = \sqrt{1/(\alpha + \xi)}$, та з (4.4) визначимо швидкість струменя в стисненому перерізі:

$$\upsilon_c = \varphi\sqrt{2gH}\,, \tag{4.5}$$

де φ – коефіцієнт швидкості.
Він завжди менше одиниці, оскільки α>0, ξ>0.

Знайдемо витрату Q в стисненому перерізі:

$$Q = \omega_c\upsilon_c = \omega_c\varphi\sqrt{2gH}\,. \tag{4.6}$$

Враховуючи (4.1) і позначивши $\mu = \varepsilon\varphi$ одержимо формулу для розрахунку витрати у вигляді:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH}\,, \tag{4.7}$$

де μ – коефіцієнт витрати отвору, який завжди менше одиниці, оскільки $\varphi < 1, \varepsilon < 1$.

Для розрахунку витоку рідини через отвір введено коефіцієнти: стиснення ε,опору ξ, швидкості φ, витрати μ. Вони є основними гідравлічними характеристиками витоку рідини через отвори, значення яких визначається дослідним шляхом.

4.3 Вплив стиснення струменя на витік рідини через отвір

Ступінь стиснення струменя впливає на витрату рідини, яка витікає із отвору. В залежності від розташування отвору в стінці резервуару відносно його бокових стінок або дна має місце витік з повним або неповним стисненням струменя.

Повне стиснення спостерігається у випадку, коли має місце стиснення струменя з усіх боків отвору. Повне стиснення може бути досконалим або недосконалим.

Досконалим називається стиснення, коли бокові стінки і дно резервуару не впливають на витік із отвору. Для цього повинні бути виконані умови:

$$n>3a;\ \ m>3b, \tag{4.8}$$

де n – відстань від отвору до бокової стінки; m – відстань від отвору до дна; a і b – розміри сторін прямокутного отвору *1* (рис. 4.2). При таких умовах коефіцієнт стиснення ε практично не залежить від розмірів n і m.

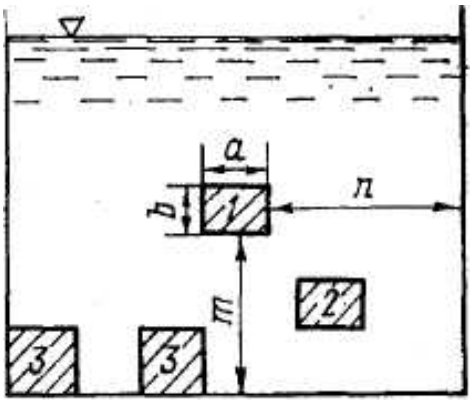

Рисунок 4.2 – Повне (1,2) і неповне (3) стиснення струменя.

Як показують дослідні дані, для випадку досконалого стиснення при витоку рідини через круглі і квадратні отвори середні значення коефіцієнтів $\varepsilon, \xi, \varphi, \mu$ можуть бути прийняті:

$$\varepsilon=0.64;\ \ \xi = 0.06;\ \ \varphi = 0.97;\ \ \ \mu = 0.62. \tag{4.9}$$

Недосконале стиснення виходить при недотриманні умов (4.8), тобто коли отвір *2* розташований порівняно близько до бічної стінки або дна резервуару (рис. 4.2). При недосконалому стисненні значення коефіцієнта ε залежить від розмірів n і m; чим вони менші, тим менше

стиснення струменя і, отже, тим більше ε. Для уточнення значень ε при недосконалому стисненні користуються довідковими даними.

Неповне стиснення виходить, коли *n* або *m* або обидва ці розміри разом – отвори *3* – виявляються рівними нулю (рис. 4.2). В цьому випадку витікаючий з отвору струмінь не зазнає стиснення з однієї або декількох сторін. При неповному стисненні площа ω_c виходить відносно більша, ніж при повному стисненні, за рахунок чого коефіцієнт μ збільшується. Для визначення коефіцієнта μ у довідковій літературі приводяться спеціальні рекомендації.

4.4 Розрахунок витоку через великі отвори

Для великого прямокутного отвору в тонкій стінці, висота *a* якого порівнюється з напором H_c над центром отвору, приймати однаковими напір і швидкості витоку по всьому перерізу, як для малого отвору, не можна. Для визначення в цьому випадку витрати Q виділимо в отворі нескінченно малу горизонтальну смужку висотою *dH*. Площа смужки запишеться у вигляді

$$d\omega = b \cdot dH, \tag{4.10}$$

де *b* – ширина отвору.

Елементарна витрата dQ через площадку $d\omega$, нехтуючи швидкістю підходу υ_0, виразимо аналогічно формулі (4.7)

$$Q = \mu b dH \sqrt{2gH}. \tag{4.11}$$

Витрату через отвір отримаємо інтегруванням рівняння (4.11) в межах зміни напору від H_1 до H_2 (рис. 4.3). Вважаючи наближено, що μ не залежить від напору, а *b=const* для прямокутного отвору, маємо

$$Q = \mu b\sqrt{2g}\int_{H_1}^{H_2} H^{\frac{1}{2}} dH = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}(H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}}) \tag{4.12}$$

Для зручності розрахунків напори H_1 і H_2 виразимо через напір H_c та вертикальний розмір отвору a: $H_1 = H_c - a/2$ і $H_2 = H_c + a/2$. Тоді формула (4.12) матиме вигляд:

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}H_c^{\frac{3}{2}}\left[\left(1+\frac{a}{2H_c}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1-\frac{a}{2H_c}\right)^{\frac{3}{2}}\right]. \qquad (4.13)$$

Якщо розкласти вирази в круглих дужках в ряд по формулі бінома Ньютона і узяти перші чотири його члени, то формула витрати матиме вигляд

$$Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}H_c^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3}{2}\frac{a}{H_c} - \frac{1}{64}\left(\frac{a}{H_c}\right)^3\right] = \mu b\sqrt{2gH_c}\left[1-\frac{1}{96}\left(\frac{a}{H_c}\right)^2\right]. \qquad (4.14)$$

Якщо знехтувати другим членом в квадратних дужках, то отримаємо формулу повністю аналогічну формулі (4.7) для малого отвору:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_c}\ . \qquad (4.15)$$

Розглянемо член $(1-1/96(a/H_c)^2)$, який показує, що, чим менше H_c в порівнянні з a, тим більше різниця між формулами (4.14) і (4.15). При $a = H_c$ ця різниця рівна (1–1/96); тобто біля 1%. Отже, з точністю, приблизно, до 1 % отвори, у яких d (діаметр) або $a \le H_c$, можна розраховувати як малі; якщо ж d або $a > H_c$ їх треба розраховувати по формулі (4.14), як великі.

4.5. Витік рідини із насадків при постійному напорі

Насадком називається коротка трубка, приєднана до отвору в тонкій стінці, через яку витікає рідина, також насадком можна вважати отвір в товстій стінці, товщина якої задовольняє вимогам, що ставляться до необхідної довжини насадка. При гідравлічному розрахунку насадків нехтують втратами напору по довжині і враховують тільки місцеві втрати напору.

Насадки різних типів широко застосовуються в різних областях техніки: для збільшення витрати з отвору, отримання струменю з великим запасом кінетичної енергії, розсіяння зайвих запасів енергії в струмені і тому подібне.

Розрізняють основні типи насадків (рис. 4.3): *а* – зовнішній циліндричний; *б* – внутрішній циліндричний; *в* – конічно збіжний; *г* – коноїдальний; *д* – конічно розбіжний.

Так само, як і витік із отворів, витік із насадок може відбуватися при постійному і змінному напорі. Насадки можуть бути незатопленими (витік в атмосферу) і затопленими (витік під рівень).

У разі постійного напору витрата Q при протіканні рідини через насадки визначається по тій же формулі (4.7), що і для отворів в тонкій стінці, але зі своїми значеннями коефіцієнтів швидкості φ і витрати μ для кожного типу насадок. Насадки змінюють умови протікання струменя і тим самим впливають на стиснення, опір, швидкість і витрату витікаючого струменя.

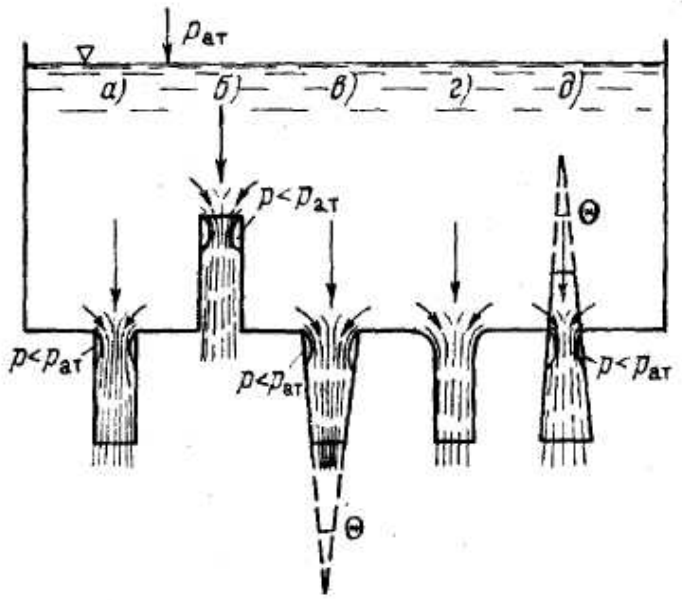

Рисунок 4.3 – Типи насадок.

Розглянемо особливості витоку рідини через різні типи насадок і умови їх застосування.

Зовнішній циліндричний насадок (насадок Вентурі) має довжину $l = (3 \div 4)d$ (рис. 4.4). Витік рідини через циліндричний насадок істотно відрізняється від витоку з отвору в тонкій стінці. Струмінь рідини, потрапляючи в насадок, завдяки силам інерції частинок рідини (наприклад, частинок M_1, M_2 на рис. 4.4), стискається до перерізу ω_c, а потім, проходячи через насадок, розширюється і виходить з насадка повним перерізом, отже, коефіцієнт стиснення струменя $\varepsilon = 1$. Звуження (стиснення) і розширення струменя в насадку є основною причиною виникнення гідравлічних опорів. Цим можна пояснити той факт, що коефіцієнт опору циліндричного насадка $\xi = 0.5$, тобто майже

вдесятеро перевищує коефіцієнт опору при витоку рідини з малого отвору в тонкій стінці ($\xi = 0.06$). Разом з тим, в стисненому перерізі в результаті різкого зменшення діаметру струменя усередині насадки тиск менше атмосферного (вакуум) p і за рахунок різниці між цим тиском і атмосферним p_{am} насадок підсмоктує додаткову витрату рідини, збільшуючи коефіцієнт витрати і саму витрату.

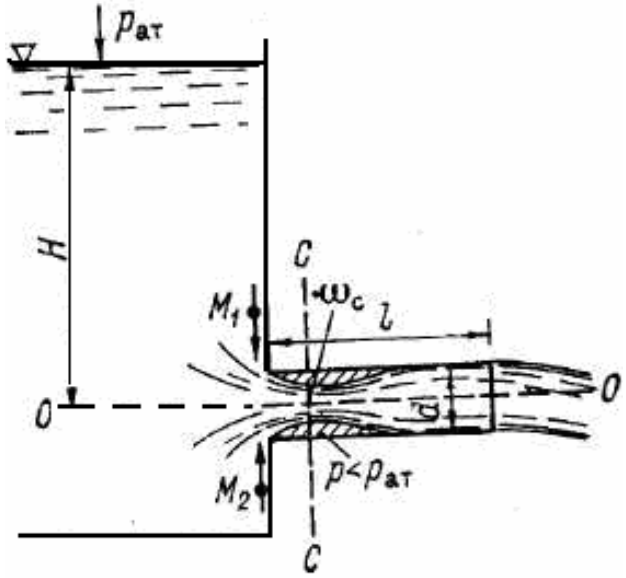

Рисунок 4.4 – Насадка Вентурі.

Оскільки, $\varphi = \sqrt{1/(\alpha + \xi)}$, то при $\xi = 0.5$ і $\alpha = 1.0$ коефіцієнт швидкості зовнішнього циліндричного насадка φ, а отже, і коефіцієнт витрати μ (оскільки $\mu = \varphi\varepsilon$, а $\varepsilon = 1$) рівні $\varphi = \mu = 0.82$. При витіканні рідини з отвору в тонкій стінці $\mu = 0.62$. Таким чином, якщо приєднати до отвору у тонкій стінці циліндричний насадок, то витрата Q збільшиться приблизно на 30 % (по відношенню до витрати з отвору в тонкій стінці) при одному і тому ж напорі H і діаметрі отвору d. Це збільшення витрати води пояснюється наявністю вакууму в насадку і тим, що насадок знижує до мінімуму ступінь стиснення струменя, що витікає.

Якщо трубка насадка буде дуже довгою, то ефект збільшення витрати може бути зведений до нуля за рахунок зростання втрат по довжині. Разом з тим, якщо довжина насадка недостатня для того, щоб струмінь у ньому міг вільно розширитися, то повітря з атмосферним тиском потрапляє в стиснений переріз струменя в насадку, ліквідуючи вакуум, і насадок працюватиме як отвір. У зв’язку з цим на

підставі дослідних даних довжина насадка повинна знаходитися в межах

$$(3 \div 4)d \le l \le (6 \div 7)d ,$$

де d – діаметр насадка. Зовнішній циліндричний насадок застосовують тоді, коли необхідно збільшити витрату води, не змінюючи діаметр отвору. Використовуються вони у дамбах для водоспусків, а також в гідрометричних цілях для вимірювання витрат води.

Внутрішній циліндричний насадок (насадок Борда) (рис. 4.3 б) відрізняється від насадка Вентурі умовами входу – він є короткою трубкою, що повернута всередину резервуару. При довжині насадка $l = (3 \div 4)d$ струмінь витікає з насадка повним перерізом.

При витіканні рідини через внутрішній циліндричний насадок мають місце додаткові опори (в порівнянні із зовнішнім циліндричним насадком) унаслідок складнішого шляху руху частинок рідини при попаданні з резервуару в насадок. Тому коефіцієнт опору тут більший, а коефіцієнти швидкості і витрати менші в порівнянні з насадком Вентурі, а саме:

$$\xi = 1.0, \varepsilon = 1.0, \mu = \varphi = 0.71 .$$

Таким чином, насадок Борда збільшує витрату рідини, у порівнянні з витратою з круглого отвору в тонкій стінці, але трохи менше, ніж насадок Вентурі. На практиці він застосовується тоді, коли необхідно збільшити витрату з отвору, а зовнішній циліндричний насадок застосувати не має можливості.

Конічно збіжний насадок має форму усіченого конуса, що сходиться у напрямку до його вихідного перерізу (рис. 4.3в). У конічно збіжному насадку має місце невелике зменшення тиску при вході рідини в нього і незначне стиснення струменя при виході з насадка. Втрати напору в цьому насадку менші, ніж в циліндричному, головним чином за рахунок зменшення втрат на вході (менше кут повороту струменів рідини). Властивістю конічно збіжного насадка є вихід струменя з великим запасом кінетичної енергії. Коефіцієнти швидкості і витрати залежать від кута конусності насадка Θ. Дослідним шляхом встановлено, що коефіцієнт витрати μ найбільший при куті конусності $\Theta \approx 13°$. Якнайкращі гідравлічні показники конічно збіжного насадка характеризуються наступними значеннями:

$$\xi = 0.08, \varepsilon = 0.98, \varphi = 0.97, \mu = 0.95 .$$

Наявність струменя з великим запасом кінетичної енергії, що має, велику швидкість і дальність польоту, дозволяє широко застосовувати конічно збіжні насадки в соплах гідротурбін і гідромоніторів, в пожежних брандспойтах.

Коноїдальний насадок має плавний контур вхідних кромок (рис.4.3г), близький за формою до траєкторії витікаючого струменя, завдяки чому забезпечується плавний вхід рідини в насадок і значно зменшується (або зовсім зникає) стиснення і зворотне розширення струменя. Опори при вході в насадок незначні, унаслідок чого коефіцієнти швидкості і витрати великі. Згідно з дослідними даними, коноїдальний насадок має коефіцієнти

$$\xi = 0.06, \varepsilon = 1.0, \varphi = \mu = 0.97 .$$

Коноїдальні насадки особливо вигідні з погляду збільшення витрати води. Струмінь, що виходить з такого насадку, має ще більшу, ніж в конічно збіжному насадку, кінетичну енергію. Застосовуються вони в тих же випадках, що і конічно збіжні насадки.

Конічно розбіжний насадок має форму усіченого конуса, менша основа якого приєднана до отвору в стінці (рис. 4.3 д). В протилежність попереднім, цей насадок гасить кінетичну енергію витікаючого струменя. Кут конусності Θ в такому насадку не повинен перевищувати 5–7°. При такому куті конічно розбіжний насадок працює повним перерізом і має такі гідравлічні показники (віднесені до вихідного перерізу):

$$\xi = 3.75, \varepsilon = 1.0, \varphi = \mu = 0.46 .$$

Високе значення коефіцієнта опору ξ вказує на великі гідравлічні опори при розширенні струменя в насадку.

Конічно розбіжні насадки застосовуються в тих випадках, коли при великій витраті бажано мати невеликі вихідні швидкості, тобто погасити кінетичну енергію витікаючого струменя. Вони використовуються в гідротехнічних спорудах (відвідні труби турбін ГЕС, труби – водовипуски).

Контрольні питання:

1. Що називається насадком?
2. Особливості витікання рідини із отворів та насадків.
3. Яка стінка називається тонкою і, яка – товстою?
4. Витікання рідини із отвору в тонкій стінці при H=const.
5. Типи насадків та їх особливості.

5 ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ В БЕЗНАПІРНОМУ ПОТОЦІ

5.1 Формула Шезі. Швидкісна і витратна характеристики потоку

У гідравліці часто користуються терміном «гідравлічні опори», під яким розуміють сили тертя, що виникають в рухомій рідині і обумовлені її в'язкістю і зміною форми перерізу по довжині потоку.

Гідравлічні опори в рідині викликають втрати напору. Вище була отримана формула (3.65), яка встановлює залежність для втрат напору по довжині при рівномірному сталому русі рідини. У цю залежність входить коефіцієнт гідравлічного тертя λ_R. Проте в практиці розрахунків безнапірного рівномірного руху рідини частіше користуються швидкісним коефіцієнтом C, що входить у формулу Шезі, яку так само, як і залежність (3.65), можна отримати з основного рівняння рівномірного руху. Враховуючи, що при розвиненому турбулентному русі рідини втрати напору пропорційні квадрату середньої швидкості течії, із виразу (3.63) можна одержати

$$\upsilon = \sqrt{g/k}\sqrt{RJ}\,. \tag{5.1}$$

Позначивши

$$\sqrt{g/k} = C\,, \tag{5.2}$$

отримаємо остаточний вираз для середньої швидкості течії при рівномірному русі

$$\upsilon = C\sqrt{RJ}\,. \tag{5.3}$$

Формула (5.3) (з постійним значенням коефіцієнта C) була вперше отримана з досліджень французького ученого Шезі в 1775р.; вона отримала назву «формули Шезі» і має велике значення в практиці розрахунків. Коефіцієнт C, що входить в (5.3), називається коефіцієнтом Шезі.

Розмірність C дорівнює кореню квадратному з розмірності прискорення, згідно (5.2), оскільки k – безрозмірний коефіцієнт пропорційності. З формули Шезі

$$[C] = \left[\upsilon/\sqrt{RJ}\right] = L/(TL^{0.5}) = L^{0.5}/T\,.$$

Тут $J = h_f/l$ – величина безрозмірна.

Величина C змінюється у великих межах; вона залежить від цілого ряду чинників, і насамперед від шорсткості русла і гідравлічного радіусу перерізу (або від глибини потоку).

Формула Шезі широко застосовується при розрахунках середньої швидкості руху води в річках, каналах, лотках і безнапірних трубах (каналізаційних і дренажних), які з гідравлічної точки зору є відкритими руслами. Застосовна вона і до напірного руху в трубах,

оскільки при рівномірному русі справедлива рівність ($J = J_p$), тобто гідравлічний уклон дорівнює п'єзометричному. Разом з тим необхідно завжди пам'ятати, що формула Шезі отримана для квадратичної області опору у разі сталого рівномірного руху рідини в руслах так званого «правильного» поперечного перерізу.

Вираз для витрати води при рівномірному русі з урахуванням формули Шезі отримує вигляд

$$Q = \omega\upsilon = \omega C\sqrt{RJ} \ . \tag{5.4}$$

При розрахунках зручно користуватися такою швидкісною характеристикою потоку. Розділимо у формулі Шезі (5.3) ліву і праву частини на $\sqrt{J}$:

$$\upsilon / \sqrt{J} = C\sqrt{R} = W , \tag{5.5}$$

тоді

$$\upsilon = W\sqrt{J} . \tag{5.6}$$

Величина W називається модулем швидкості або швидкісною характеристикою. З (5.5) витікає, що W є швидкістю υ при $J = 1,0$. Розмірність W та ж, що і υ.

Поділимо обидві частини виразу (5.4) на $\sqrt{J}$, отримаємо

$$Q / \sqrt{J} = \omega C\sqrt{R} = K . \tag{5.7}$$

Величина K називається модулем витрати або витратною характеристикою. Модуль витрати K має розмірність витрати рідини і є витратою Q при $J=1,0$.

Тоді замість (5.4) отримаємо

$$Q = K\sqrt{J} . \tag{5.8}$$

5.2 Формули для визначення коефіцієнта Шезі *C*

Коефіцієнт C, що входить у формулу Шезі, грає важливу роль в практичних розрахунках. Для його визначення запропонована велика кількість емпіричних і напівемпіричних формул, що пов'язано з різноманіттям умов руху потоку. Докладні огляди існуючих формул, їх класифікації і результати розглядаються у ряді спеціальних вітчизняних і зарубіжних робіт.

Зупинимося нижче на формулах, які представляють найбільший історичний інтерес, а також широко застосовуються в даний час в практиці розрахунків.

Формула Гангільє – Куттера. У 1869 р. два шведські інженери Гангільє і Куттер на основі обробки даних виміряних витрат води в

каналах різних типів, а також вимірювань на багатьох європейських річках і на р.Міссісіпі запропонували формулу наступного вигляду[4]:

$$C = \frac{23 + 0.00155/J + 1/n}{1 + (23 + 0.00155/J)(n/\sqrt{R})}, \tag{5.9}$$

де J – уклон вільної поверхні ділянки потоку, що відповідає умовам рівномірного руху; R – гідравлічний радіус, м; n – коефіцієнт шорсткості, що характеризує шорсткість стінок русла.

Хоча формула (5.9) здається громіздкою, вона дає цілком задовільні результати і широко застосовується в зарубіжній практиці розрахунків. Гангільє і Куттер склали коротку таблицю числових значень n для стінок русла різної шорсткості. В даний час ця таблиця значно розширена і деталізована [3], а для користування формулою (5.9) складені спеціальні номограми.

При $J > 0{,}0005$ вплив уклону на коефіцієнт C незначний, тому формулу (5.9) записують в скороченому вигляді[4]:

$$C = \frac{23 + 1/n}{1 + 23n/\sqrt{R}}. \tag{5.10}$$

З ранніх емпіричних формул для коефіцієнта Шезі слід зазначити також формулу Маннінга (1889 р.), яку записують у вигляді (у метричних одиницях) [4]:

$$C = (1/n)R^{1/6} \tag{5.11}$$

Коефіцієнт шорсткості, що входить у формулу (5.11), призначається за шкалою Гангилье і Куттера. Завдяки простоті і достовірності формулою Маннінга широко користуються для розрахунку каналів, штучних водоводов, а іноді і природних річкових русел у нас в країні і за кордоном.

Деякі зміни в цю формулу, що стосуються показника степеня при гідравлічному радіусі, внесли Ф. Форхгеймер (1923г.) і Н. Н. Павловський (1925г.).Формула Ф о р х г е й м е р а має вигляд[4]:

$$C = (1/n)R^{1/5} \tag{5.12}$$

Павловський, проаналізувавши великий матеріал натурних спостережень (більше 300 дослідних точок, в основному по руху води в різних каналах) запропонував узагальнену формулу для коефіцієнта Шезі[4]:

$$C = (1/n)R^{y}, \tag{5.13}$$

де y – змінний показник степеня, залежний від гідравлічного радіусу R і коефіцієнта шорсткості n і визначуваний по формулі

$$y = 2.5\sqrt{n} - 0.13 - 0.75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0.1). \tag{5.14}$$

Для наближених розрахунків формулу (5.14) Павловський декілька спрощує, додаючи показнику у такі значення:

при $R < 1$ м $y = 1.5\sqrt{n}$; (5.15)

при $R > 1$ м $y = 1.3\sqrt{n}$. (5.16)

Формулу (5.13) Павловський рекомендував для розрахунку відкритих русел при 0,1 м $< R <$3,0 м і для значень n від 0,011 до 0,04. Іноді при попередніх розрахунках цю формулу, так само як формули Маннінга і Форхгеймера, екстраполюють до R = 5,0 м.

Для призначення коефіцієнта шорсткості n Павловським складена спеціальна таблиця, а коефіцієнт Шезі визначається за допомогою номограм.

З 1949 р. в практиці гідравлічних розрахунків, стала застосовуватися напівемпірична формула логарифмічного типу формула Агроскіна[4]:

$$C = 1/n + 17.72 \lg R \ , \tag{5.17}$$

де $17.72 = 4\sqrt{2g}$.

Формула (5.17) пов'язана із шкалою коефіцієнтів шорсткості n Гангільє і Куттера і рекомендована для розрахунку відкритих штучних каналів.

В 1965 р. І. І. Агроскін и Д. В. Штеренліхт уточнили формулу (5.17), бажаючи привести її в більшу відповідність з формулою Павловського[4]:

$$C = 1/n + (27.5 - 300n) \lg R. \tag{5.18}$$

Формула (5.18) при R<5м і n<0,020 дає значення C, менші на 1–2%, чим формула Павловського, а користуватися цією формулою значно простіше, ніж формулою (5.13).

Аналогічну формулу для значень 5 $< R <$ 10м запропонував В.Г.Талмаза за результатами обробки великого числа натурних вимірювань в річках і каналах:

$$C = 1/n + (21 - 100n) \lg h \ , \tag{5.19}$$

де h –середня глибина потоку, м.

В 1968 р. Г.В.Железняков, виходячи з логарифмічного закону розподілу швидкостей, запропонував узагальнену формулу для коефіцієнта Шезі [4]:

$$C = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{\sqrt{g}}{0.13}\left(1 - \lg R\right)\right] + \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n} - \frac{\sqrt{g}}{0.13}\left(1 - \lg R\right)\right]^2 + \frac{\sqrt{g}}{0.13}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{g}\lg R\right)}, \tag{5.20}$$

Формула (5.20) на відміну від інших, формул справедлива у великому діапазоні глибин потоку і коефіцієнтів шорсткості. Складний вид формули не є перешкодою для її практичного застосування, оскільки по ній складена таблиця. Значення C, знайдені по формулі Железнякова, при $R <$ 5м на ±3–5% відрізняються від значень, обчислених за формулою Павловського, а при $R >$ 5м вони повністю співпадають із значеннями, визначеними за формулою Талмази.

Треба підкреслити, що всі приведені емпіричні і напівемпіричні формули для коефіцієнта Шезі відносяться до рівномірного руху води в області квадратичного закону опору і є наближеними.

5.3 Коефіцієнт шорсткості

У всі розглянуті вище формули для C входить коефіцієнт шорсткості n, який встановлюється по таблицях на основі описових характеристик поверхні русла. Найбільшого поширення в практиці гідрологічних розрахунків набули таблиці М. Ф. Срібного, складені окремо для рівнинних і гірських річок, таблиці Н. Н. Павловського для орієнтовних розрахунків штучних і природних русел. У зарубіжній практиці широко використовується таблиця коефіцієнта шорсткості В. Т. Чоу [38]. При призначенні коефіцієнта шорсткості n по таблицях необхідно враховувати, що значення його носить умовний характер і результати розрахунків відрізнятимуться від фактичних даних.

Розглянемо вплив лише деяких найбільш істотних чинників на значення коефіцієнта шорсткості як штучних, так і природних водотоків.

Шорсткість поверхні, яка характеризується формою, розмірами і порядком розміщення зерен матеріалу, що складає русло по змоченому периметру і справляє гальмуючу дію на потік. Цей чинник нерідко розглядається як єдиний при виборі коефіцієнта шорсткості, але насправді він є одним з багатьох важливих чинників.

Рослинність можна розглядати як різновид шорсткості поверхні. Вона зменшує пропускну спроможність русла і гальмує рух. Дія її залежить головним чином від висоти, густоти і типу рослин. Унаслідок сезонного зростання рослинності в руслі і на берегах значення коефіцієнта n збільшується у вегетаційний період і зменшується в період відмирання рослин.

Перешкоди. Наявність нагромаджень валунів, коріння, крупного каміння, мостові стояки і інші перешкоди обумовлюють збільшення значень n. Ступінь збільшення залежить від виду перешкод, їх розмірів, форми, числа до розміщення в руслі.

Неоднорідність **розмірів** і форми **русла** по довжині. У природних руслах така неоднорідність зв’язана з меандруванням

річок. Плавне викривлення русла з великим радіусом кривизни дає відносно низьке значення *n*, в той час, як різке викривлення з багатьма меандрами збільшує значення *n*. Викривлення русла, у свою чергу, сприяє відкладенню наносів на дні потоку, що веде до утворення піщаних мілин і гряд, унаслідок чого збільшується шорсткість. При цьому значення *n* зростають.

Рівень і витрата. В більшості випадків збільшення витрати і підйом рівня спричиняє зменшення значення *n*. Це пов'язано з тим, що при низьких рівнях шорсткість поверхні і зміни профілю русла потоку більш відчутні, ніж при високих відмітках. Проте значення *n* можуть і зростати з підвищенням рівня; коли витрата дуже велика, потік може вийти з головного русла, і частина його рухатиметься по заплаві. Значення *n* для заплави зазвичай більше, ніж для головного русла, оскільки в період межені заплава заростає травою і чагарником, а в період паводку на заплаву виноситься багато уламкового матеріалу, крупні валуни, коріння дерев, які залишаються на ній після спаду рівня. Значення коефіцієнта *n* для заплави залежить від стану поверхні заплави і рослинності.

Завислі та донні наноси своєю наявністю обумовлюють додаткові до звичайних втрат напору (енергії), збільшуючи руслову шорсткість. Значення *n* при цьому зростають.

Льодяний покрив. Річки та канали взимку покриваються льодом. При цьому нижня поверхня льоду є для потоку додатковим опором, що збільшує коефіцієнт шорсткості. Під дією течії поверхня льоду згладжується і її шорсткість зменшується.

Контрольні питання:

1. Формула Шезі для швидкості та витрати.
2. Поняття модуля швидкості та модуля витрати.
3. Що називається гідравлічним опором?
4. Формули для визначення коефіцієнту Шезі.
5. Коефіцієнт шорсткості.

6 НЕРІВНОМІРНИЙ СТАЛИЙ РУХ ВОДИ У ВІДКРИТИХ ПРИЗМАТИЧНИХ РУСЛАХ

У інженерній практиці нерівномірний рух води у відкритих руслах зустрічається значно частіше, ніж рівномірний. Нерівномірним рухом називається такий рух, характеристики якого залежать від вибору координат, тобто змінюються по довжині потоку. При цьому робота сил тяжіння не врівноважується роботою сил тертя і рівність гідравлічного уклону і уклону дна водотоку порушується. Воно може бути викликане: 1) зміною живого перерізу по довжині потоку; 2) при постійному живому перерізі зміною розподілу швидкостей і прискорень у відповідних точках різних живих перерізів; 3) зміною і того і іншого одночасно.

Розрізняють дві категорії русел: 1) призматичні, 2) непризматичні. **Призматичним** називається русло, яке має незмінну форму і геометричні розміри поперечного профілю по довжині. Якщо поперечний профіль русла окреслюється кривою лінією (наприклад, квадратичною параболою), визначуваною в будь-якому перерізі одним і тим же рівнянням, то таке русло називається циліндровим. Очевидно, що циліндрове русло по своїх властивостях аналогічно призматичному.

У разі **непризматичного** русла площа поперечного перерізу потоку ω є функцією двох змінних – глибини h потоку і відстані s, відлічуваної по довжині потоку від деякого «початкового» перерізу:

$$\omega = f(h,s). \tag{6.1}$$

У разі ж призматичного русла поперечний переріз потоку не залежить від відстані s і, отже

$$\omega = f(h). \tag{6.2}$$

Таким чином, для призматичного русла матимемо:

$$\partial\omega / \partial s = 0. \tag{6.3}$$

Якщо зміна гідравлічних характеристик відбувається достатньо поволі і поступово, то рух води називається таким, що плавно змінюється. При цьому місцеві втрати енергії (напору), пов'язані з деформацією потоку, незначні і ними нехтують, а враховують лише втрати енергії по довжині. У даному розділі розглядається саме цей випадок, а тому надалі, кажучи про нерівномірний рух, матимемо на увазі плавний сталий нерівномірний рух води, що змінюється, у відкритому руслі.

При розгляді нерівномірного руху, що плавно змінюється, головним чином займаються питанням про побудову кривої вільної поверхні. Основне інженерне завдання при цьому зводиться до знаходження зв'язку глибини з довжиною розповсюдження підпору або спаду, тобто встановлення залежності $h = f(s)$. З цим завданням

ми зустрічаємося, наприклад, при визначенні судноплавних глибин води в каналах і річках.

Іноді доводиться визначати довжину розповсюдження кривої підпору або спаду; знайти довжину ділянки, що забезпечує задані глибини і ін. З цим випадком ми зустрічаємося при будівництві дамб на річках там, де підпір перед спорудою викликає затоплення берегів. Визначення зони затоплення (її довжини і ширина) пов'язане з економічним і екологічним обгрунтуванням проекту.

Таким чином, побудова кривої вільної поверхні при нерівномірному русі представляє великий практичний інтерес.

6.1 Питома енергія перерізу. Графік питомої енергії

Розглянемо поперечний переріз якого-небудь русла (рис. 6.1), причому вкажемо на рисунку площину порівняння *ОО*. Повна питома енергія для даного перерізу потоку, відповідно до рівняння Бернуллі виражається залежністю [4]:

$$E = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha \upsilon^2}{2g}, \qquad (6.4)$$

де величина питомої енергії положення z відлічується від площини порівняння *ОО*.

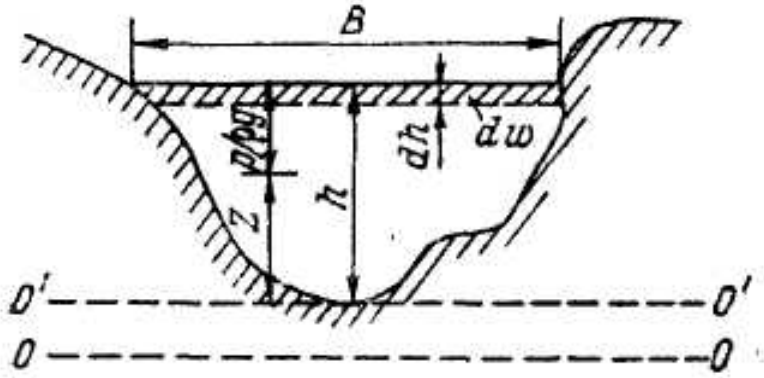

Рисунок 6.1 – Поперечний переріз водотоку.

Щоб мати можливість порівнювати питому енергію положення різних перерізів потоку необхідно умовитися про вибір місцеположення площини відліку. *Питомою енергією перерізу Е називається часткове значення повної питомої енергії, підраховане в припущенні, що площина порівняння проведена через саму нижню точку дна перерізу русла (лінія О'О')*. Для площини порівняння *О'О'* маємо [4]:

$$E = h + \frac{\alpha \upsilon^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}, \qquad (6.5)$$

де

$$h = z + \frac{p}{\rho g}. \qquad (6.6)$$

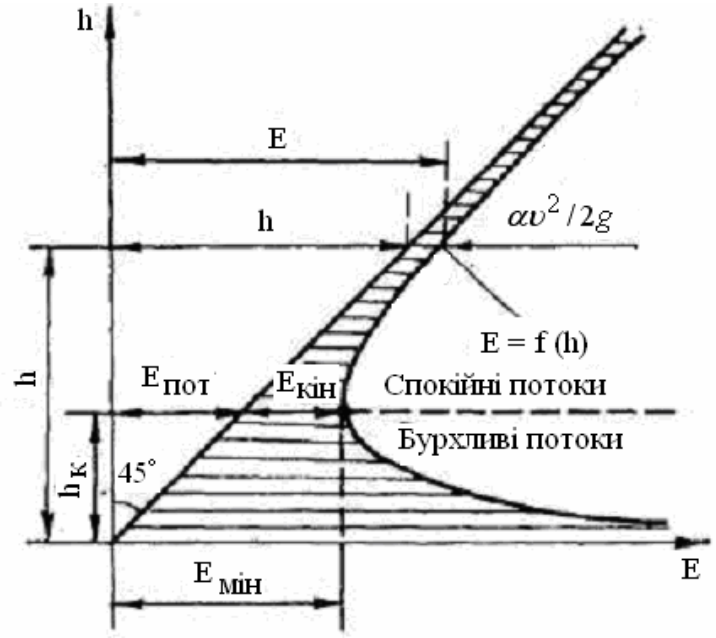

Рисунок 6.2 – Графік питомої енергії перерізу.

Таким чином, для відкритого плавно рухомого потоку, що змінюється, можна вважати, що глибина h є мірою питомої потенційної енергії. При заданій витраті води Q потік через даний переріз русла може протікати з різними глибинами h (залежно від уклону дна русла, його шорсткості і т. п.). Тому вираз питомої енергії (6.5) для правильної форми живого перерізу є функція тільки глибини потоку $E = f(h)$.

Дослідимо цю функцію при Q = *const*. Як видно з рівняння (6.5), якщо h прагне до нуля, E прагне до нескінченності (оскільки при $h \to 0$ другий доданок правої частини рівняння прагне до нескінченності). Якщо h прагне до нескінченності, E також прагне до нескінченності, а рівняння питомої енергії перерізу в граничних умовах прагне до рівності $E = h$. Виконаний аналіз показує, що функція $E = f(h)$ може бути представлена кривою (рис. 6.2), що має при деякому проміжному значенні h – мінімальне значення. Ця крива називається графіком питомої енергії перерізу. Крива $E = f(h)$ має дві асимптоти:

верхньою асимптотою є пряма, направлена під кутом 45° до осей координат (бісектриса прямого кута); нижньою – горизонтальна вісь графіку. Площа, заштрихована на малюнку, дає картину зміни питомої кінетичній енергії $\alpha\upsilon^2/(2g)$.

Точці перегину на графіку питомої енергії перерізу надається особливе значення. Цій точці відповідає мінімальна питома енергія $E_{мін}$ (рис. 6.2). Глибина потоку, при якій задана витрата Q проходить в даному перерізі русла з мінімальним запасом питомої енергії, називається критичною глибиною і позначається $h_к$.

Критична точка ділить криву $E = f(h)$ на дві гілки. Верхня гілка відноситься до потоків з глибиною $h > h_к$ (із збільшенням глибини відбувається збільшення питомої енергії $dE/dh>0$), а нижня – до потоків з глибиною $h < h_к$ (із зростанням глибини питома енергія зменшується $dE/dh<0$). У критичній точці питома енергія має конкретне значення, рівне мінімальному, і $dE/dh = 0$.

При $h> h_к$ переважає потенційна енергія, частка кінетичної складової в сумарній питомій енергії перерізу мала, тобто малі і швидкості – це область спокійного стану. При $h< h_к$ переважає кінетична енергія, тобто потік має великі швидкості, потенційна енергія тут мала – це область бурхливого стану.

Якщо глибина $h= h_к$, то при цьому отримуємо критичний стан потоку. Це не означає, що під час переходу потоку із спокійного в бурхливий стан потенційна і кінетична енергія рівні. У критичній точці $E_{пот} \neq E_{кін}$, між ними буде певне співвідношення.

6.2 Рівняння критичного стану потоку. Число Фруда

Стан потоку при заданій витраті Q, що відповідає мінімальній питомій енергії, називається критичним, і всі характеристики цього стану (глибина, уклон, швидкість, площа живого перерізу і ін.) також називаються *критичними* і позначаються індексом «*к*», наприклад, $h_к, i_к, \upsilon_к$ і т.д. Встановимо залежність для визначення критичних характеристик потоку. Критичному стану потоку відповідає мінімальна питома енергія перерізу, а похідна $dE/dh = 0$. Продиференціюємо вираз (6.5) по h, вважаючи $Q = const$:

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{d\omega}{dh} = 0. \qquad (6.7)$$

З рис. 6.1 видно, що $d\omega = Bdh$, звідки $d\omega / dh = B$. Тоді вираз (6.7) перепишеться у вигляді [4]:

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B_к}{\omega_к^3} = 0 \tag{6.8}$$

або остаточно отримаємо

$$\alpha Q^2 / g = \omega_к^3 / B_к, \tag{6.9}$$

де гідравлічні елементи площа поперечного перерізу $\omega_к$ і ширина русла зверху $B_к$ відповідають критичній глибині $h_к$. Рівняння (6.9) називається *рівнянням критичного стану потоку*. З нього можна отримати кількісну характеристику критерію переходу з бурхливого в спокійний стан потоку.

У разі прямокутного русла рівняння (6.8) приймає вигляд [4]:

$$1 = \frac{\alpha \upsilon_к^2 \omega_к^2 B_к}{g \omega_к^3} = \frac{\alpha \upsilon_к^2 B_к}{g B_к h_к} = \frac{\alpha \upsilon_к^2}{g h_к}. \tag{6.10}$$

Безрозмірний вираз, що стоїть в правій частині (6.10), називається *критичним числом Фруда* і позначається так:

$$Fr_к = \alpha \upsilon_к^2 / (g h_к) = 1. \tag{6.11}$$

При α=1 для будь-якого стану потоку можна записати:

$$Fr = \upsilon^2 / (gh). \tag{6.12}$$

Цей вираз називають числом Фруда. Замінюючи в (6.12) глибину потоку *h* гідравлічним радіусом *R*, отримуємо формулу числа Фруда для русла будь–якої форми [4]:

$$Fr = \upsilon^2 / (gR). \tag{6.13}$$

Для бурхливих потоків $h < h_к$, тоді, згідно (6.11) і (6.12), $Fr > Fr_к$, тобто $Fr > 1$; для спокійних потоків $h > h_к$, тоді $Fr < Fr_к$, тобто $Fr < 1$.

Таким чином, критерій, що визначає спокійний і бурхливий стан потоку, можна записати $Fr \lessgtr 1$.

Фізичний зміст числа Фруда можна представити так: домноживши чисельник і знаменник у виразі (6.12) на 2, представимо його у вигляді

$$Fr = \frac{\upsilon^2/(2g)}{h/2} = \frac{E_{кін}}{E_{пот}/2} = 2\frac{E_{кін}}{E_{пот}}. \qquad (6.14)$$

Отже, число Фруда можна трактувати як подвоєне відношення питомої кінетичної енергії потоку в даному перерізі до питомої потенційної енергії потоку в тому ж перерізі, тобто воно є мірою кінетичності потоку. Тому число Фруда іноді називають параметром кінетичності потоку або критерієм бурхливості потоку. Використовуючи вираз для числа Фруда (6.14), легко можна отримати співвідношення кінетичної і потенційної енергії для потоку в критичному стані (точка перегину на графіку питомої енергії перерізу). Підставляючи в (6.14) значення $Fr_к = 1$, отримаємо $E_{пот} = 2E_{кін}$, тобто в точці перегину на рис. 6.2 питома потенційна енергія дорівнює подвоєній кінетичній енергії.

6.3 Диференціальне рівняння нерівномірного руху рідини, що плавно змінюється, у відкритих руслах

Розглянемо нерівномірний рух води, що плавно змінюється, у відкритому непризматичному руслі. Представимо подовжній розріз потоку (рис. 6.3). Допустимо, що при заданій витраті води Q потік проходить ділянку між перерізами *1–1* і *2–2* з глибиною h_0 при рівномірному русі. Після споруди дамби рівномірний рух порушився і на ділянці встановилася крива підпору АВ. Позначимо відстань від постійного початку до перерізу *1–1* через s_1, до перерізу *2–2* через s_2, відстань між перерізами Δs.

Застосуємо рівняння Бернуллі до руху рідини на ділянці *1–2*. Намітимо горизонтальну площину порівняння *OO* (рис. 6.3). Позначимо відстані від площини порівняння до відміток вільної поверхні у вибраних перерізах відповідно через z_1 і z_2, відстані до відміток дна через y_1 і y_2. Умовимося відносити складові рівняння Бернуллі до частинок рідини на вільній поверхні, оскільки головне завдання при розрахунку нерівномірного руху зводиться до встановлення зв'язку $h = f(s)$, тобто нас цікавить рівняння кривої вільної поверхні потоку.

У рівнянні Бернуллі для ділянки потоку (3.49) p_1 і p_2 – тиск на рівні вільної поверхні. Для перерізів *1–1* і *2–2* вони дорівнюють атмосферному тиску p_{am} і тому доданки $p_1/(\rho g)$ і $p_2/(\rho g)$ в рівнянні (3.49) скорочуються. Втрати енергії h_f при русі, що плавно змінюється, можна розглядати як втрати, обумовлені тертям при русі

потоку на ділянці 1–2 і прирівняти їх до втрат напору по довжині ($h_f = h_l$).

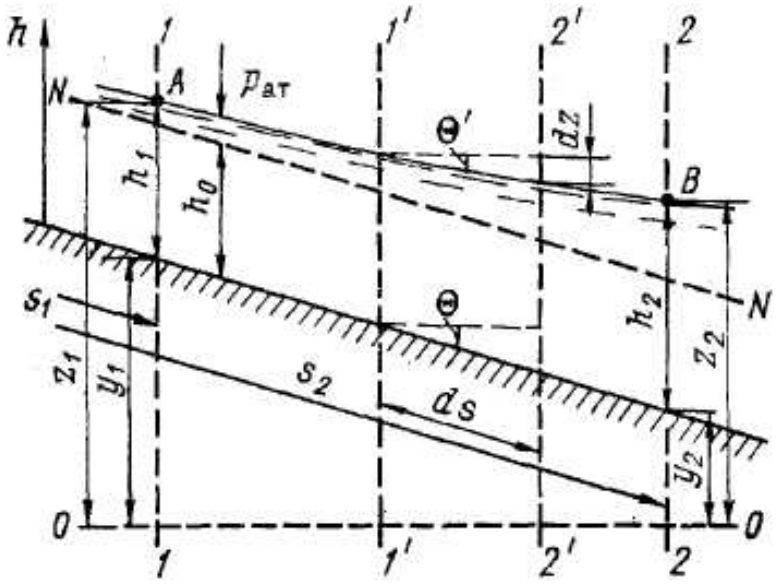

Рисунок 6.3 – До виведення диференціального рівняння нерівномірного руху

Рівняння Бернуллі перепишемо в наступному вигляді [4]:

$$z_1 - z_2 = \frac{\alpha_2 \upsilon_2^2}{2g} - \frac{\alpha_1 \upsilon_1^2}{2g} + h_f . \qquad (6.15)$$

Зблизимо перерізи *1–1* і *2–2* так, щоб між ними залишилася нескінченно мала відстань *ds* (рис. 6.3), на якому втрати напору складають нескінченно малу величину dh_l. Коефіцієнти, що враховують нерівномірність розподілу швидкостей по перерізах потоку α_1 і α_2, в цьому випадку можна прирівняти α, а рівняння (6.15) записати в диференціальній формі:

$$-dz = \alpha d\left[\upsilon^2/(2g)\right] + dh_l . \qquad (6.16)$$

Розділимо всі члени рівняння (6.16) на *ds*:

$$-\frac{dz}{ds} = \alpha \frac{d\left[\upsilon^2/(2g)\right]}{ds} + \frac{dh_l}{ds} . \qquad (6.17)$$

Складові виразу (6.17) мають наступний зміст. З рис. 6.3 витікає, що $-dz/ds = \sin\Theta' = J$ – п'єзометричний уклон (уклон вільної

поверхні); знак мінус показує, що при пониженні вільної поверхні ($dz<0$) уклон буде позитивним ($J>0$). Оскільки при нерівномірному русі вільна поверхня криволінійна, то під уклоном J треба розуміти уклон дотичної в будь-якій точці до вільної поверхні [4].

Другий член виразу $d\left[\upsilon^2/(2g)\right]/ds = i_\upsilon$ – це уклон, який утворюється за рахунок зміни швидкості на ділянці ds. Цей член рівняння (6.17) характеризує зміну уклону вільної поверхні при переході від рівномірного руху до нерівномірного.

Третій член виразу (6.17) $dh_l/ds = i_l$ – уклон тертя, який, користуючись формулою Шезі, можна виразити $i_l = \upsilon^2/\left(C^2R\right)$, втрати напору на тертя h_l на одиницю довжини потоку при нерівномірному русі, що плавно змінюється, ми виразимо формулою того ж вигляду, що і при рівномірному русі, що є допущенням. Проте в цьому випадку, на відміну від випадку рівномірного руху, гідравлічні елементи υ, C, R – змінні по довжині потоку. Після необхідних підстановок в рівняння (6.17) отримаємо:

$$J = \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{\upsilon^2}{2g}\right)+\frac{\upsilon^2}{C^2R}. \tag{6.18}$$

Це рівняння є першою формою основного диференціального рівняння нерівномірного руху. При рівномірному русі $i_\upsilon = 0$, тоді

$$J = \upsilon^2/\left(C^2R\right). \tag{6.19}$$

Перетворимо рівняння (6.18), ввівши в розгляд глибину потоку h. Вважаючи величину Q і форму русла заданими, звернемося до рис. 6.4, з якого видно, що для довільно вибраного перерізу *2–2*, віддаленого від початкового перерізу *1–1* на відстань s, можна написати:

$$z = h + y - is, \tag{6.20}$$

де постійна величина y – піднесення дна водотока в початковому перерізі над площиною порівняння *00*; i – уклон дна водотока.

Диференціюючи вираз (6.20) по s і маючи на увазі, що $J = -dz/ds$, остаточно для п'єзометричного уклону J отримаємо залежність

$$J = i - dh/ds. \tag{6.21}$$

Підставимо вираз (6.21) в ліву частину рівняння (6.18)

$$i - \frac{dh}{ds} = \alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{\upsilon^2}{2g}\right)+\frac{\upsilon^2}{C^2R}. \tag{6.22}$$

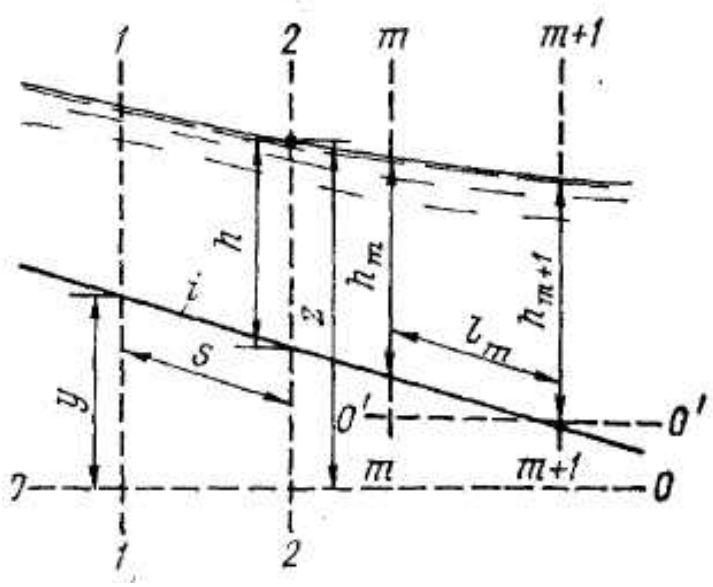

Рисунок 6.4 – До обґрунтування формули рівняння нерівномірного руху (6.20).

Розглянемо доданки правої частини виразу (6.22). Припустимо, що витрата потоку Q задана.

Член $\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{\upsilon^2}{2g}\right)$. Виражаючи υ через Q, отримаємо [4]

$$\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{\upsilon^2}{2g}\right) = \alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{Q^2}{\omega^2 2g}\right) = \frac{\alpha Q^2}{2g}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) = -\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{1}{\omega^3}\frac{d\omega}{ds}. \quad (6.23)$$

У загальному випадку для русла непризматичної форми $\omega = f(h,s)$. Маючи це на увазі, можемо записати:

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \omega}{\partial h}\frac{dh}{ds} = \frac{\partial \omega}{\partial s} + B\frac{dh}{ds}, \quad (6.24)$$

де $B = \partial\omega / \partial h$ – ширина потоку зверху (рис. 6.1).

Підставляючи (6.24) в (6.23), отримаємо

$$\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{\upsilon^2}{2g}\right) = -\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B\frac{dh}{ds}\right) \quad (6.25)$$

Член $\upsilon^2 / \left(C^2 R\right)$, що входить в праву частину рівняння (6.22), можна представити у вигляді

$$\upsilon^2 / \left(C^2 R\right) = Q^2 / \left(\omega^2 C^2 R\right). \qquad (6.26)$$

Підставимо тепер знайдені вирази (6.25) і (6.26) в (6.22):

$$i - \frac{dh}{ds} = -\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B\frac{dh}{ds}\right) + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}. \qquad (6.27)$$

Вирішуючи рівняння (6.27) відносно dh/ds, остаточно отримаємо [4]:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}\left(1 - \frac{\alpha C^2 R}{g\omega}\frac{\partial \omega}{\partial s}\right)}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}}. \qquad (6.28)$$

Рівняння (6.28) є другою формою диференціального рівняння усталеного нерівномірного руху; воно відноситься до загального випадку непризматичного русла. Як видно, за допомогою цього рівняння можна виразити приріст глибини потоку dh на елементарній його довжині ds. Підкреслимо, що рівняння (6.28) відноситься до випадку $Q=const$ (уздовж потоку).

Для випадку призматичного русла, враховуючи (6.3), рівняння (6.28) перепишемо у вигляді

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}}. \qquad (6.29)$$

Необхідно пам’ятати, що призматичні русла – це русла „правильної” форми, для яких модуль витрати збільшується із збільшенням глибини наповнення русла.

Контрольні питання:

1. Питома енергія перерізу. Графік питомої енергії.
2. Рівняння критичного стану потоку. Число Фруда.
3. Диференціальне рівняння нерівномірного плавно змінного руху рідини у відкритих руслах.

7 НЕСТАЛИЙ РУХ ВОДИ В ПРИРОДНИХ (РІЧКОВИХ) РУСЛАХ

7.1 Розбиття водотоку на ділянки

У розділі 6 вказувалося, що нерівномірний рух характерний для річкових потоків, русло яких значно змінює свою форму і розміри поперечного перерізу по довжині. У зв'язку з цим русла природних водотоков (річок) повинні розглядатися як непризматичні. Для нерівномірного руху води в річках характерна зміна по довжині потоку швидкості течії, середньої глибини, площі перерізу, коефіцієнта шорсткості і уклону дна.

При проектуванні дамб на річках, а також при проектуванні розчищень природних русел і вирішенні питань, пов'язаних з розробкою кар'єрів в руслах і на затоплюваній частині заплави річки, доводиться будувати криві вільної поверхні потоку, які спостерігатимуться після зміни його природного режиму.

Отримане вище диференціальне рівняння нерівномірного руху води (6.28) у разі природних (непризматичних) русел інтегруванню не піддається. В цьому випадку доводиться звертатися до різних наближених методів розрахунку, причому вибір того або іншого методу, а рівно і точність розрахунку залежать від повноти і надійності гідрометричних і топографічних матеріалів, що є у розпорядженні проектувальника. При проектуванні кривої вільної поверхні в природних водотоках доводиться оперувати з деякими середніми значеннями гідравлічних елементів потоку, які і беруться за дійсні характеристики даного водотоку.

При розбитті русла на окремі розрахункові ділянки керуються тим, щоб кожна з них була більш менш однорідною відносно його поперечних перерізів, шорсткості і уклонів вільної поверхні, наявних в природному стані (до споруди дамби або виконання розчищень).

Розбиття водотоку на ділянки здійснюють різними способами залежно від наявного гідрометричного матеріалу.

Якщо є спостережений природний подовжній профіль вільної поверхні, то розбиття рекомендується здійснювати так, щоб в межах даної ділянки спостерігався по можливості одноманітний уклон вільної поверхні і разом з тим щоб живий переріз не зазнавав різких змін форми. В межах кожної такої ділянки криву вільної поверхні потоку вважають прямою лінією, що має той або інший уклон.

Якщо спостережених природних подовжніх профілів вільної поверхні немає, то при розбитті водотоку на ділянки доводиться

керуватися тільки даними про живі перерізи потоку. В цьому випадку при рішенні задачі можна йти двомя шляхами: по-перше, водотік можна розбити таким чином. щоб впродовж ділянок площі живого перерізу були приблизно постійні; по-друге, водотік можна розбити на ділянки так, щоб в межах одних ділянок спостерігалося тільки збільшення площі живого перерізу (ділянка, що розширюється), а в межах інших – тільки зменшення її (ділянка, що звужується).

Падіння рівня води в межах кожної розрахункової ділянки в природних умовах, зазвичай, не перевищує 0,5–1,0 м. Довжина розрахункових ділянок може бути різною; іноді вона досягає декількох кілометрів.

Способи розрахунку кривої вільної поверхні, що викладаються нижче, для природних водотоків застосовні лише в тих випадках, коли витрата потоку в межах кожної розрахункової ділянки залишається постійною. Тому, якщо водотік має притоки, то розбивати його на ділянки потрібно так, щоб в гирлах притоків або в безпосередній близькості від них знаходилися роздільні створи. В окремі розрахункові ділянки рекомендується також виділяти частини природних водотоків із заплавами і ділянки у разі роздвоєння русла.

Завдання проектування вільної поверхні для заданого природного водотоку, полягає у відшуканні відміток рівнів води в граничних перерізах *(m-1), m, (m+1)* і т.д. Для вирішення цього завдання мають бути заданими: витрата Q і відмітка рівня води в одному з перерізів. Наприклад, якщо виконується розрахунок кривої підпору, то заданою, є відмітка рівня води в створі дамби m+1.

7.2 Диференціальне рівняння сталого нерівномірного руху в умовах природного водотоку

Основним рівнянням при побудові кривої вільної поверхні в природних водотоках є рівняння сталого нерівномірного руху, що плавно змінюється (6.16). При розгляді нерівномірного руху в призматичних руслах ми прийняли, що втрати напору на подолання місцевих опорів $dh_j = 0$. Враховуючи можливість появи в природних водотоках місцевих втрат напору, обумовлених зміною живих перетинів по довжині потоку, залежність (6.16) в даному випадку слід переписати в повнішому вигляді [4]:

$$-dz = dh_\upsilon + dh_l + dh_j, \tag{7.1}$$

де

$$dh_\upsilon = d\left[\alpha\upsilon^2/(2g)\right], \tag{7.2}$$

$$dh_l = \frac{\upsilon^2}{C^2 R} ds = \frac{Q^2}{K^2} ds\,, \tag{7.3}$$

$$dh_j = \xi d\left[\alpha\upsilon^2/(2g)\right] = \xi dh_\upsilon\,, \tag{7.4}$$

де ξ–коефіцієнт опору, залежний від характеру зміни живих перетинів.

Підставляючи (7.2), (7.3) і (7.4) в (7.1), маємо [4]:

$$-dz = (1+\xi)d\left(\frac{\alpha\upsilon^2}{2g}\right) + \frac{Q^2}{K^2} ds\,. \tag{7.5}$$

Розглянемо одну з ділянок природного водотоку, яка обмежена роздільними створами m і $(m+1)$; відлік перерізів ведемо за течією (рис.7.1).

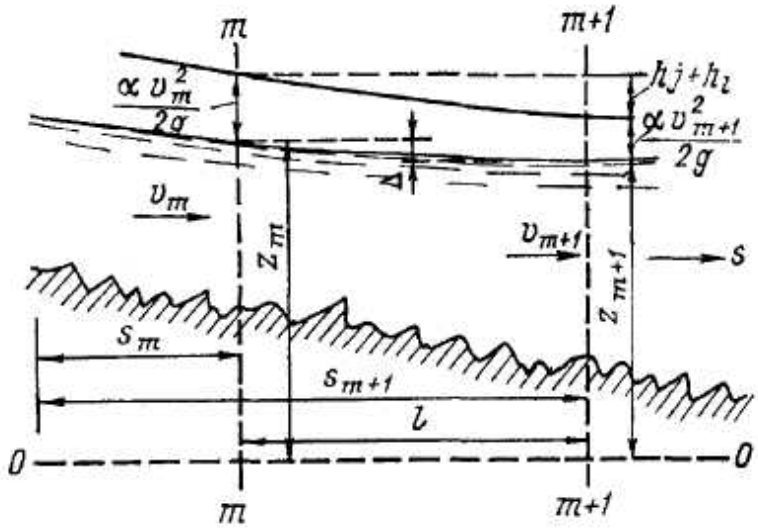

Рисунок 7.1 – До висновку основних розрахункових залежностей для природного водотоку.

Інтегруючи рівняння (7.5) від перерізу m до перерізу $(m+1)$ отримаємо

$$z_m - z_{m+1} = (1+\xi)\left(\frac{\alpha\upsilon_{m+1}^2}{2g} - \frac{\alpha\upsilon_m^2}{2g}\right) + Q^2 \int_{S_m}^{S_{m+1}} ds / K^2\,, \tag{7.6}$$

де z_m і z_{m+1} – відмітки рівнів води в роздільних створах, відлічувані від площини порівняння 00; υ_m і υ_{m+1} швидкості в цих перерізах.

З деяким наближенням можна вважати, що [4]:

$$Q^2 \int_{S_m}^{S^{m+1}} ds / K^2 = \left(Q^2 / K^2\right)\left(s_{m+1} - s_m\right) = Q^2 l / \overline{K}^2, \qquad (7.7)$$

де K – середнє значення модуля витрати на даній ділянці.

Підставляючи (7.7) в (7.6), отримуємо:

1) повну форму рівняння, що враховує як зміну швидкісного напору по довжині потоку, так і місцеві втрати напору:

$$\Delta = z_m - z_{m+1} = Q^2 \left[(1+\xi) \frac{\alpha}{2g} \left(\frac{1}{\omega_{m+1}^2} - \frac{1}{\omega_m^2} \right) + \frac{1}{\overline{K}^2} \right], \qquad (7.8)$$

2) проміжну форму, що враховує зміну швидкісного напору, але що не враховує місцеві втрати напору:

$$\Delta = z_m - z_{m+1} = Q^2 \left[\frac{\alpha}{2g} \left(\frac{1}{\omega_{m+1}^2} - \frac{1}{\omega_m^2} \right) + \frac{1}{\overline{K}^2} \right], \qquad (7.9)$$

3) спрощену формулу, що не враховує змін швидкісного напору і місцевих втрат напору і враховує тільки втрати напору на тертя по довжині потоку:

$$\Delta = z_m - z_{m+1} = Q^2 l / \overline{K}^2. \qquad (7.10)$$

Місцеві втрати, обумовлені нерівностями русла, враховуються в (7.10) заданням відповідного значення коефіцієнта шорсткості, від якого залежить модуль витрати $\overline{K}$. Величину $\overline{K}^2$ можна визначати по формулі

$$\overline{K}^2 = \frac{1}{2}\left(K_m^2 + K_{m+1}^2\right). \qquad (7.11)$$

7.3 Загальний прийом побудови кривої вільної поверхні

Перший етап проектування вільної поверхні полягає в розбитті за допомогою роздільних створів природного русла на розрахункові ділянки. При побудові кривої вільної поверхні зазвичай відомі: витрата потоку Q і відмітка рівня води в одному з граничних створів даної ділянки водотока.

Хай, наприклад, нам буде відома відмітка *(m+1)* рівня води в кінцевому створі останньої (вважаючи вниз за течією) розрахункової ділянки. Останньою є ділянка, безпосередньо прилегла до підпірної споруди, так що побудова кривої підпору ведеться від споруди вгору за течією. Розрахунок відміток вільної поверхні можна виконати, користуючись одним з рівнянь (7.8), (7.9) або (7.10), застосовуючи їх до кожної розрахункової ділянки водотока.

Для вирішення завдання перепишемо рівняння (7.8) у такому вигляді:

$$z_m - Q^2\left[\frac{l}{\overline{K}^2} - (1+\xi)\frac{\alpha}{2g\omega_m^2}\right] = z_{m+1} + (1+\xi)\frac{\alpha Q^2}{2g\omega_{m+1}^2}. \quad (7.12)$$

Введемо позначення:

$$f(z_m) = z_m - Q^2\left[\frac{l}{\overline{K}^2} - (1+\xi)\frac{\alpha}{2g\omega_m^2}\right], \quad (7.13)$$

$$A = z_{m+1} + (1+\xi)\frac{\alpha Q^2}{2g\omega_{m+1}^2}. \quad (7.14)$$

Маючи на увазі, що при заданій відмітці z_{m+1} рівня води в кінцевому створі розрахункової ділянки величина A є відомою, можна написати:

$$f(z_m) = A. \quad (7.15)$$

Оскільки величини ω_m і $\overline{K}$, що входять в ліву частину рівняння (7.15) є функціями шуканої відмітки z_m, то це рівняння доводиться вирішувати методом послідовного наближення або графічно. Задаючись довільно рядом значень відмітки z_m знаходимо відповідні величини ω_m і $\overline{K}$ і далі по виразу (7.13) – значення функції $f(z_m)$. На підставі цих розрахунків будується графік функції $f(z_m)$, за допомогою якого по величині A визначається z_m. Знайдена відмітка z_m рівня води на початку останньої ділянки є граничною відміткою для передостанньої ділянки і, отже, ця ділянка може бути піддана розрахунку аналогічно тому, як це було викладено вище, тобто по відмітці z_m знаходимо відмітку z_{m+1} і т.д.

В результаті подібних розрахунків ми отримаємо відмітки рівня води у всіх створах, і, таким чином, матимемо можливість побудувати

проектну криву вільної поверхні. На практичних заняттях розглянемо побудову кривої вільної поверхні способами О.М.Рахманова, М.М.Павловського, М.М.Бернадського та у випадку роздвоєння русла.

Контрольні питання:

1. Розбиття водотоку на ділянки.
2. Повна форма рівняння кривої вільної поверхні.
3. Проміжна форма рівняння кривої вільної поверхні.
4. Спрощена форма рівняння кривої вільної поверхні.

8 ВОДОЗЛИВИ

8.1 Термінологія і класифікації водозливів

Водозливом називається всяка перешкода (стінка, поріг), через яку переливається потік води. Перелив рідини відбувається через верх (гребінь) цього порогу або через спеціальний виріз в гребені порогу. Гідравлічне явище руху рідині через таку перешкоду називається переливом рідини через водозлив. Гребенем водозливу називається верхній край водозливної стінки в межах струменя, що переливається.

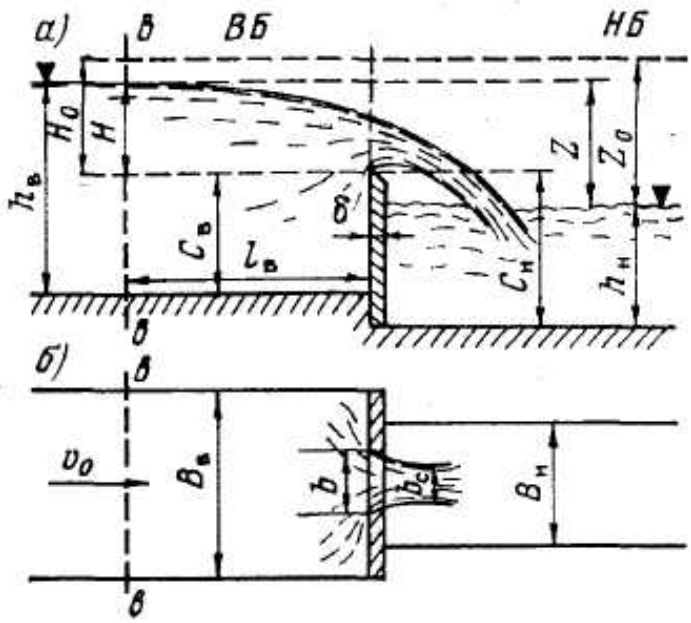

Рисунок 8.1 – Витікання через водозлив з тонкою стінкою.
а – в подовжньому розрізі; б – в плані.

Надалі будемо, користуватися наступними термінами і позначеннями (рис. 8.1). Ділянка потоку перед водозливом називається верхнім б'єфом (ВБ); область потоку за водозливом – нижнім б'єфом (НБ). Величина H, вимірювана в перерізі *в – в*, називається геометричним напором на водозливі і є перевищенням над гребенем водозливу рівня води в перетині *в – в*, де ще немає помітного спаду вільної поверхні, обумовленого переливом води через водозлив. Відстань $l_в$, що визначає положення перетину *в – в*, в якому вимірюється H, як видно з дослідів, дорівнює $(3 \div 5)H$ [4].

Введемо ще такі позначення: b – ширина водозливу, або, інакше, ширина водозливного отвору; b_c – ширина струменя; зазвичай $b_c < b$ за рахунок викривлення струменів в плані; δ – товщина водозливної стінки;

$C_в, C_н$ – висота водозливної стінки відповідно у верхньому і нижньому б'єфах; у випадку $C_в = C_н$ ця висота позначається через C; $B_в, B_н$ – ширина русла, в якому влаштований водозлив, відповідно у верхньому і нижньому б'єфах; у разі $B_в = B_н$ ця ширина позначається через B; $h_в, h_н$ – глибина води відповідно у верхньому і нижньому б'єфі; Z – геометричний перепад на водозливі (різниця горизонтів води у верхньому і нижньому б'єфах); υ_0 – швидкість підходу, тобто середня швидкість,що виміряна у перетині *в – в*; H_0 – повний напор на водозливі (напор з урахуванням швидкості підходу), рівний

$$H_0 = H + \upsilon_0^2/(2g),$$

Z_0 – повний перепад на водозливі (перепад з урахуванням швидкості підходу)

$$Z_0 = Z + \upsilon_0^2/(2g),$$

Q – витрата через водозлив, рівна об'єму рідини, що переливається через гребінь водозливу в секунду.

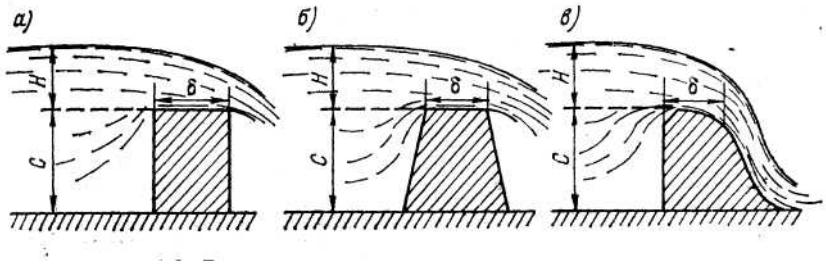

Рисунок 8.2 – Водозливи із стінкою практичного профілю.
а – прямокутний; б – трапецеїдальний; в – криволінійний.

Водозливи класифікують за наступними ознаками[4]:

1) *залежно від форми і розмірів поперечного перерізу водозливної стінки* розрізняють:

а) водозливи з тонкою стінкою. «Тонкою стінкою» називається поріг водозливу, товщина гребеня якого настільки незначна, що не впливає на потік, що переливається через водозлив, та не викликає прилипання струменя до оголовку гребеня (рис. 8.1 а). Водозлив з тонкою стінкою має місце, коли

$$\delta = (0.1 \div 0.5)H. \qquad (8.1)$$

Ці водозливи набули широкого поширення в гідрометричній практиці і на зрошувальних системах для вимірювання витрат води;

б) водозливи практичного профілю (рис. 8.2). Ці водозливи можуть мати саму різну форму профілю водозливної стінки: прямокутну, трапецеїдальну, криволінійну. Криволінійні водозливи, у яких низова

грань окреслена за формою траєкторії падаючого струменя, найбільш поширені в гідротехнічній практиці. Для цього типу водозливів характерне співвідношення

$$2H \geq \delta \geq 0.5H\,; \qquad (8.2)$$

в) водозливи з широким порогом, що мають водозливну стінку будь-якої висоти, гребінь якої (у разі прямокутного отвору) є горизонтальною площиною (рис. 8.3). Товщина (довжина) порогу δ у разі водозливу з широким порогом повинна задовольняти двом умовам:

1) на відстані δ втрата напору по довжині h_l повинна бути така мала, щоб нею можна було знехтувати;

2) в межах відстані δ повинна бути хоч би невелика ділянка потоку, яка характеризується наявністю руху, що плавно змінюється. У разі прямокутного водозливу з широким порогом товщина стінки δ, що задовольняє таким умовам, лежить у межах

$$8H \geq \delta \geq 2H\,. \qquad (8.3)$$

Якщо водозлив зробити дуже довгим (δ>8H), то рух води буде проходити практично як у каналі, а якщо товщина порогу δ буде недостатньою (δ < 2H), то водозлив буде працювати у режимі практичного профілю (рис. 8.3б).

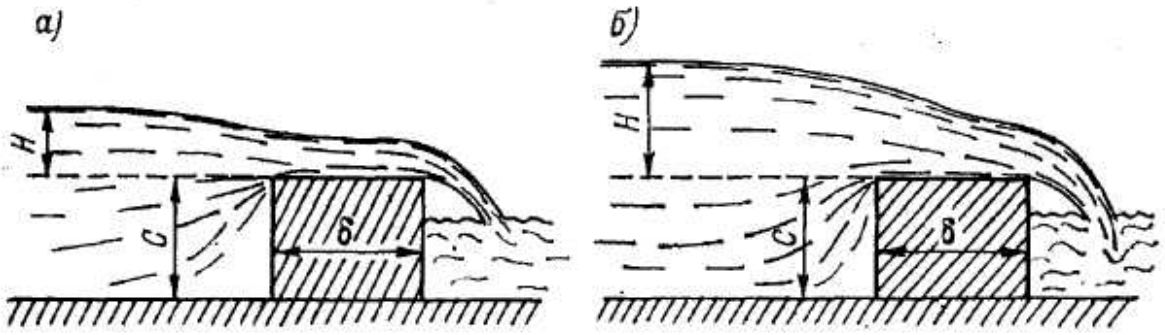

Рисунок 8.3 – Водозлив з широким порогом (а – нормальний режим роботи; б – режим роботи водозливу практичного профілю).

2) *залежно від контура гребеня водозливної стінки в плані* розрізняють:

а) водозливи з прямолінійним в плані гребенем водозливної стінки: прямі (рис. 8.4а); косі (рис. 8.4б); бічні (рис. 8.4в);

б) водозливи з непрямолінійним в плані гребенем водозливної стінки: полігональні (рис.8.5а); криволінійні (рис.8.5б); замкнуті (кільця, рис.8.5в);

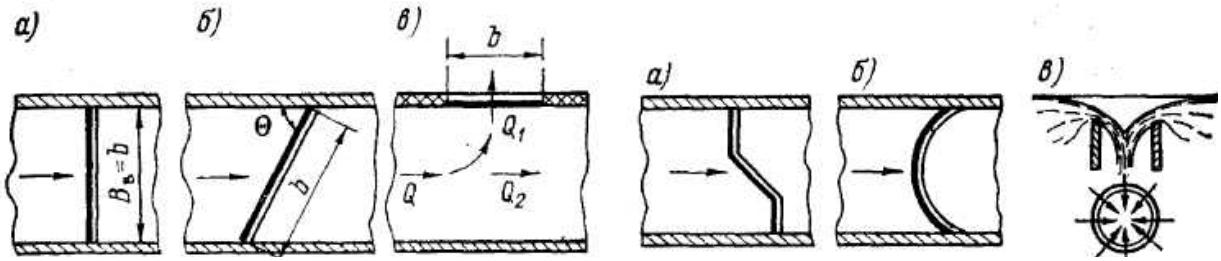

Рисунок 8.4 – Водозливи з прямолінійним гребенем в плані,
а – прямий; б– косий; в – бічний.

Рисунок 8.5 – Водозливи з непрямолінійним гребенем в плані:
а –полігональний; б – криволінійний; в – замкнутий.

3) в *залежності від геометричної форми водозливного отвору* розрізняють (рис. 8.6): а) прямокутні; б) трикутні; у) трапецеїдальні; г) кругові; д) параболічні; е) з похилим гребенем; же) пропорційні; з) рівноточні; і) щілинні. Ця класифікація найчастіше відноситься до тонкостінних водозливів;

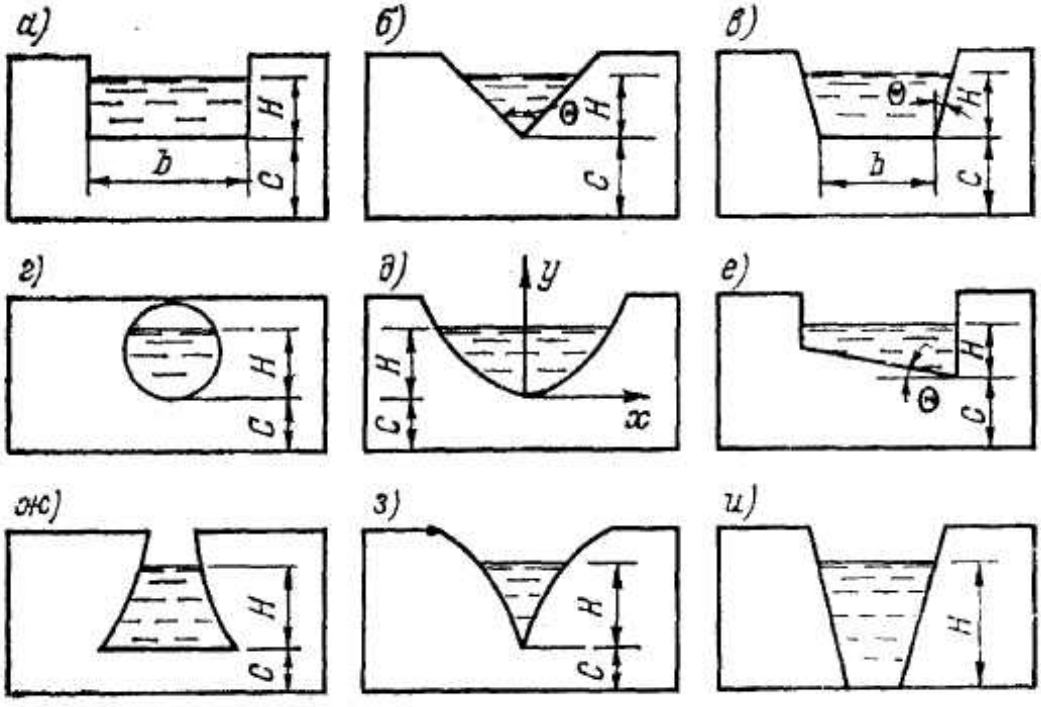

Рисунок 8.6 – Різні форми водозливного отвору.

4) *залежно від впливу нижнього б'єфу на витікання* розрізняють:

а) непідтоплені водозливи, коли Q і H не залежать від глибини води в нижньому б'єфі $h_н$;

б) підтоплені водозливи, коли нижній б'єф впливає на характер витікання і на пропускну спроможність водозливу. Ця класифікація, так само як і класифікація (1), є важливою і загальною для всіх типів водозливів;

5) *залежно від співвідношення ширини водозливу* b *і ширини русла верхнього б'єфу* $B_в$ (у разі прямокутних водозливів) розрізняють:

а) водозливи без бічного стискування, коли $b = B_в$ (рис. 8.4а);

б) водозливи з бічним стискуванням, коли $b < B_в$ (рис. 8.1б).

Ширину струменя b_c іноді називають ефективною шириною водозливу.

6) *по величині тиску повітря під струменем, що переливається*, розрізняють:

а) безвакуумні водозливи, у яких тиск під струменем більше або дорівнює атмосферному (рис. 8.7);

б) вакуумні, у яких тиск під струменем менше атмосферного (рис.8.8).

Ця класифікація відноситься частіше до водозливів практичного профілю і має істотне значення для великих водозливних дамб.

8.2 Основна розрахункова формула для водозливів

Скористаємося методом розмірностей при виведенні основної розрахункової формули для тонкостінного прямокутного водозливу без бічного стискування (рис. 8.1 і 8.4а). Спостерігаючи перетікання рідини через водозлив, припустимо, що його пропускна спроможність (витрата води Q) при ширині водозливу b залежить від напору H і прискорення вільного падіння g. Тоді для одиничної витрати $q = Q/b$ функціональна залежність буде

$$q = f(H, g) \tag{8.4}$$

або

$$q = kH^x g^y \tag{8.5}$$

де k – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, який визначають зазвичай експериментальним шляхом; x і y – невідомі показники степеня, які при переході від фізичних величин до їх розмірностей можуть бути визначені на основі властивості однорідності.

Замінюючи в рівнянні (8.5) фізичні величини їх розмірностями, отримаємо [4]:

$$L^2T^{-1} = L^{x+y}T^{-2y} \tag{8.6}$$

де L і T – відповідно символи довжини і часу.

Прирівнюючи показники степеня в лівій і правій частинах, виразу (8.6) у однакових одиниць вимірювання, отримаємо два рівняння з двома невідомими, з яких знайдемо значения показників степеня x і y:

$$x = 3/2, \quad y = 1/2.$$

Підставляючи ці значення в початкове рівняння (8.5), знаходимо:

$$q = k\sqrt{g}H^{3/2}. \tag{8.7}$$

Позначаючи $k = m\sqrt{2}$, введемо його у вираз (8.7):

$$q = m\sqrt{2g}H^{3/2} \tag{8.8}$$

Домножуючи ліву і праву частини (8.8) на ширину b, отримаємо загальну формулу для витрати води Q на водозливі

$$Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2} \tag{8.9}$$

де m – коефіцієнт витрати, що визначається за результатами дослідів для кожного типу водозливів.

Замінюючи в (8.9) геометричний напір H повним напором H_0. можемо врахувати вплив швидкості підходу υ_0 на витрату Q [4]:

$$Q = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2} \tag{8.10}$$

Експериментальними дослідженнями встановлено, що коефіцієнт витрати m, а отже і пропускна спроможність водозливу (витрата Q), залежать від багатьох чинників, в числі яких можна назвати: тип водозливу, величина напору води H, ступінь підтоплення, бічне стискування, швидкість підходу υ_0, наявність вакууму під струменем.

8.3 Водозливи з тонкою стінкою

При перетіканні через тонкостінні водозливи зустрічаються різні типи (форми) струменя:

1) вільний струмінь має місце, коли під струменем тиск p дорівнює атмосферному тиску p_{am}. Щоб ця умова могла бути виконана, в простір під струмінь з боків повинен бути забезпечений вільний доступ повітря або необхідно забезпечити його подачу по трубці A (рис. 8.7). Водозлив з вільним перетіканням відрізняється стійким

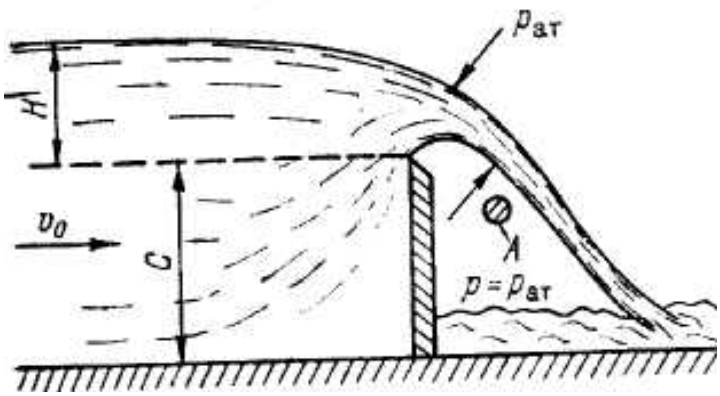

Рисунок 8.7 – Тонкостінний водозлив з вільним струменем.

переливом води через його гребінь, і внаслідок цього застосовується для вимірювання витрати води в лабораторних дослідженнях і при гідрометричних роботах на каналах і малих річках:

2) струмінь підібганий, не підтоплений знизу; в цьому випадку під струменем тиск повітря менше атмосферного, тобто $p < p_{am}$ (рис. 8.8а). Такий струмінь утворюється, коли простір під струменем не сполучається з атмосферою. Струмінь захоплює повітря і створює вакуум, завдяки чому струмінь декілька притискається до водозливної стінки, а коефіцієнт витрати m збільшується;

3) струмінь підібганий, підтоплений знизу (рис. 8.8б); тут весь підструменевий простір заповнений водою; вакуум під струменем в цьому випадку більше, ніж в попередньому (за інших рівних умов);

4) прилиплий струмінь (рис. 8.8в); тут вакуум під струменем вельми великий, завдяки чому коефіцієнт витрати m виходить найбільшим. Прилиплий струмінь утворюється в особливих випадках, наприклад при поступовому наростанні напору від нуля і за відсутності доступу повітря під струмінь. Струмінь цей має найменшу стійкість. Виникаючий вакуум, що розвивається під струменем, надає істотний вплив на розмір коефіцієнта витрати m, а отже, і на пропускну спроможність водозливу, збільшуючи її у разі прилиплого струменя до 28% в порівнянні з вільним струменем [3].

Непідтоплений прямокутний водозлив з вертикальною стінкою за наявності вільного витікання і за відсутності бокового стискування називається нормальним водозливом (рис. 8.7). Витрату води Q у разі нормального водозливу визначають по формулі

$$Q = m_{0H} b \sqrt{2g} H^{3/2}, \qquad (8.11)$$

де H – геометричний (а не повний) напір на водозливі; тут швидкість підходу υ_0 враховується коефіцієнтом витрати m_{0H}, а не шляхом заміни H на H_0.

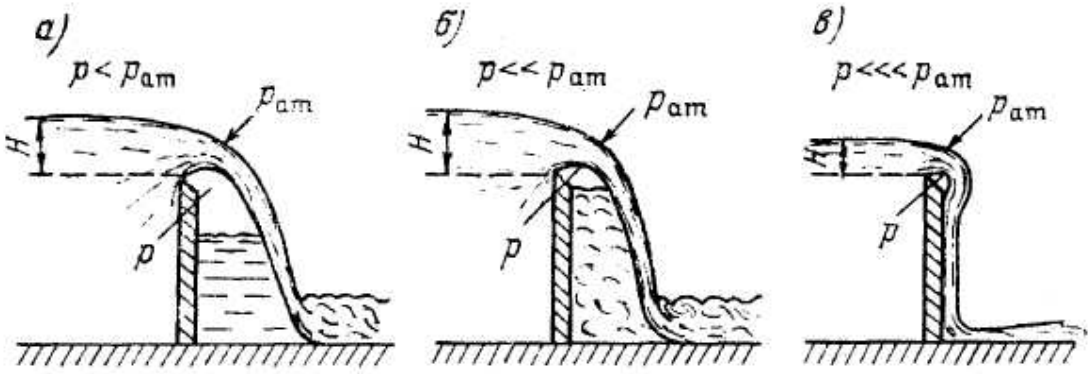

Рисунок 8.8 – Сковане витікання через тонкостінний водозлив (а–підібганий струмінь, не підтопленная знизу; б – підібганий підтоплений струмінь; в – прилиплий струмінь).

Існує декілька різних емпіричних формул для визначення коефіцієнта витрати m_{0H} нормального водозливу (Базена, Ребока і ін.). Найбільш раціональною є формула, запропонована Р. Р. Чугаєвим для технічних умов і норм [5]:

$$m_{0H} = 0.40 + 0.05H / C_B . \qquad (8.12)$$

Її можна застосовувати, коли $C_B \geq 0.5H$ і $H \geq 0.1м$. Для інших умов значення m_{0H} слід уточнювати лабораторними дослідами.

Відносно висока точність розрахункових формул для нормальних водозливів дозволяє застосовувати їх як вимірювальні водозливи на каналах. Змірявши в натурі напір H на водозливі, спеціально влаштованому в каналі, по формулах (8.11) і (8.12) легко можна знайти витрату води в ньому.

8.4 Точність визначення витрати води водозливами

При використанні тонкостінних водозливів в якості вимірювальних необхідно знати точність вимірювання ними витрат води Q. Також потрібно знати з якою точністю слід визначити параметри водозливу і потоку для забезпечення потрібної точності вимірювання витрати води.

Для прямокутного водозливу формула витрати має вигляд (8.11). Знайдемо точність визначення втрати Q по цій формулі в залежності від похибок вимірювання елементів потоку і параметрів водозливу, які входять у формулу. Для цього прологарифмуємо формулу (8.11), а потім продиференціюємо її:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dm_{0H}}{m_{0H}} + \frac{db}{b} + \frac{3}{2}\frac{dH}{H}. \qquad (8.13)$$

Після заміни в (8.13) повних диференціалів на кінцеві різниці, що приймаються за абсолютні похибки, отримаємо формулу для відносної похибки при вимірюванні витрати прямокутним водозливом в наступному вигляді:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta m_{0H}}{m_{0H}} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{3}{2}\frac{\Delta H}{H}. \qquad (8.14)$$

Дослідження Г. В. Железнякова і Б. Б. Данілевича [1] показали, що два перші члени правої частини виразу (8.14) такі малі в порівнянні з членом $(3/2)(\Delta H / H)$, що ними можна знехтувати. Це дозволяє при практичному використанні формули (8.14) враховувати тільки відносну похибку вимірювання напору $(\Delta H / H)$.

Контрольні питання:

1. Визначення водозливу, гребеня водозливу, верхнього і нижнього б'єфу.
2. Класифікація водозливів в залежності від форми та розмірів поперечного перетину водозливної стінки.
3. Основна розрахункова формула для водозливів.
4. Класифікація водозливів практичного профілю.
5. Класифікація водозливів в залежності від контуру гребеня водозливної стінки в плані.
6. Класифікація водозливів в залежності від впливу нижнього б'єфу на протікання через водозлив.
7. Класифікація водозливів в залежності від геометричної форми водозливного отвору.
8. Класифікація водозливів в залежності від співвідношення ширини водозливу та ширини русла.
9. Класифікація водозливів по величині тиску повітря під струменем, що переливається через водозлив.
10. Типи струменя при протіканні через тонкостінні водозливи.

9 РУХ ПОТОКУ ЗІ ЗМІННОЮ ВИТРАТОЮ

9.1 Рівняння руху потоку рідини із змінною витратою

У інженерній практиці часто зустрічаються випадки нерівномірного руху рідини із змінною уздовж потоку витратою води. У річках зміна витрати уздовж шляху може бути викликана різними причинами: бічною припливністю, інфільтрацією в грунт, водозабором, скиданням води і так далі. До цього випадку можна віднести безперервну роздачу і збір витрати води в трубах, бічні водозливи, а також канали зрошувальної мережі і канали водозбірно–скидної і дренажної мережі.

Основні закономірності руху рідини із змінною витратою були встановлені ученими В. М. Маккавєєвим і І. М. Коноваловим, Я. Р. Ненько, А. Н. Патрашевим. Надалі їх ідеї отримали розвиток в роботах Р. А. Петрова, П. Р. Кисельова, А. І. Єгорова, К. Ш. Латіпова, М. Шаюсупова і ін. Проте в навчальній літературі це питання освітлене слабо. Деякі відомості з нього можна знайти в роботах [2, 3, 4].

У гідравліці в основу виведення рівнянь руху потоку із змінною витратою покладені ідеї І. В. Мещерського про рух точки із змінною масою. Рівняння динамічної рівноваги для такої точки записується у вигляді (диференціал кількості руху точки змінної маси дорівнює імпульсу рівнодіючої всіх зовнішніх сил – проекція на напрям руху та кількості руху часток, що приєднуються до цієї точки та відділяються від неї):

$$d\left(mu\right) = FM + dm_1\Theta_1 - dm_2\Theta_2 \ , \tag{9.1}$$

де m – маса точки, що рухається у момент часу t з швидкістю u; dm_1 – додаткова маса, що приєдналася до точки за час dt із проекцією швидкості на напрям руху, рівною Θ_1; dm_2 – маса, що відокремилася, за той же проміжок часу з відповідною проекцією швидкості Θ_2; F – рівнодіюча всіх зовнішніх сил, що діють на точку.

Для гідрологічних задач часто спостерігається тільки процес приєднання або тільки процес відокремлення частинок, тому рівняння (9.1) записується у вигляді:

$$d\left(mu\right) = Fdt + dm\Theta \, , \tag{9.2}$$

де dm – зміна маси за рахунок приєднання або відокремлення в проекції на напрям u, Θ – швидкість приєднання або відокремлення в проекції на напрям u.

Запишемо рівняння (9.2) для безкінечно малої струминки:

$$mdu + udm = Fdt + dm\Theta \, . \tag{9.3}$$

Розділимо (9.3) на dt:

$$m\frac{du}{dt} = F + (\Theta - u)\frac{dm}{dt}. \qquad (9.4)$$

Застосуємо рівняння (9.4) до елементу потоку масою m та довжиною ds (рис. 9.1). Позначимо середню площу виділеного елементу $\overline{\omega}$ ($\omega, \omega + d\omega$ – площі поперечного перетину у створах 1 і 2 відповідно), тоді його маса буде:

$$m = \rho W = \frac{\gamma}{g} W,$$

де W– об'єм елементу потоку:

$$W = \overline{\omega} \cdot ds;\ \overline{\omega} = \frac{\omega + \omega + d\omega}{2} = \omega + \frac{1}{2} d\omega;\ W = \left(\omega + \frac{1}{2} d\omega\right) ds.$$

Тоді

$$m = \frac{\gamma}{g}\left(\omega + \frac{1}{2} d\omega\right) ds. \qquad (9.5)$$

Якщо $ds = u \cdot dt$, то одержимо

$$m = \frac{\gamma}{g}\overline{\omega} \cdot u \cdot dt \text{ або } m = \frac{\gamma}{g} Q dt. \qquad (9.6)$$

Продиференціюємо (9.5):

$$dm = \frac{\gamma}{g} dQ dt. \qquad (9.7)$$

Визначимо зовнішні сили F, що діють на елемент потоку. Вони складаються з поверхневого тиску P, сили тяжіння G і сили тертя T. З сил тиску на напрям руху проектуватимуться тільки сили тиску на торцеві перерізи виділеного елементу. Сили тиску, що діють з боку навколишньої рідини на бічну поверхню елементу, перпендикулярні до переміщення частинок рідини і в проекції дають нуль. Тому сили тиску будуть

$$-(P + dP)(\omega + d\omega) + P\omega = -P\omega - dP\omega - Pd\omega - dPd\omega + P\omega = -dP\omega,$$

тому що складовими $Pd\omega$ і $dPd\omega$ можна знехтувати, вони є величинами другого порядку малості.

Силу тяжіння G розкладемо на дві складових – активну складову сили тяжіння G_x та силу, що діє на дно потоку G_N, яка компенсується реакцією дна – силою N. Силу G_x виразимо:

$$G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha$$

Використаємо (9.5), $\sin\alpha = -dz/ds$ та одержимо:

$$G_x = \gamma\left(\omega + \frac{1}{2} d\omega\right) ds \sin\alpha = -\gamma\left(\omega + \frac{1}{2} d\omega\right) dz = -\gamma\omega \cdot dz,$$

де dz – падіння рівня води на ділянці ds. Другою складовою у попередньому виразі нехтуємо, тому що вона є величиною другого порядку малості.

Силу тертя об русло ріки можна виразити:

$$T = \tau\left(\chi + \frac{1}{2}d\chi\right)ds \cdot \upsilon^2 = \tau\chi ds \cdot \upsilon^2,$$

де τ – дотична напруга тертя, $\left(\chi + \frac{1}{2}d\chi\right)$ – середній змочений периметр на ділянці, якщо $\chi, \chi + d\chi$ – змочені периметри у 1 та 2 створах відповідно; у попередньому рівнянні другою складовою нехтуємо, тому що вона є величиною другого порядку малості.

Таким чином, сума проекцій зовнішніх сил рівна:

$$F = -dP\omega - \tau\chi ds \cdot \upsilon^2 - \gamma\omega \cdot dz.$$

На основі (9.4) запишемо рівняння для елемента потоку:

$$\frac{\gamma}{g}\alpha Q dt \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = -dP\omega - \tau\chi ds \cdot \upsilon^2 - \gamma\omega \cdot dz + (\Theta - \upsilon)\frac{\gamma}{g}\alpha \cdot dQ \quad . \qquad (9.8)$$

У виразі (9.8) $u = \alpha\upsilon$, де α=1.13 – коефіцієнт швидкості, який виражає нерівномірний розподіл швидкості у поперечному перерізі.

Розділимо (9.8) на $\gamma\omega \cdot ds$ та одержимо:

$$\frac{\alpha}{g}\frac{Q}{\omega}\frac{dt}{ds}\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{dP}{\gamma ds} - \frac{\tau\chi}{\gamma\omega}\upsilon^2 - \frac{dz}{ds} - (\upsilon - \Theta)\frac{\alpha}{g\omega}\frac{dQ}{ds} \quad . \qquad (9.9)$$

Оскільки, $Q/\omega = \upsilon, dt/ds = 1/\upsilon$, то

$$\frac{\alpha}{g}\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{dP}{\gamma ds} - \frac{\tau\chi}{\gamma\omega}\upsilon^2 - \frac{dz}{ds} - \frac{(\upsilon - \Theta)}{g\omega}\frac{\alpha dQ}{ds}. \qquad (9.10)$$

Повну похідну в рівнянні (9.10) виразимо через частинні:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \frac{\partial\upsilon}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial s}, \qquad (9.11)$$

Враховуючи (9.11) вираз (9.10) перепишемо у вигляді:

$$\frac{\alpha}{g}\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{\alpha}{g}\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial s}+\frac{\alpha(\upsilon-\Theta)}{gQ}\frac{\upsilon\cdot dQ}{ds}+\frac{d}{ds}\left(z+\frac{P}{\gamma}\right)+\frac{\tau\chi}{\gamma\omega}\upsilon^2=0. \qquad (9.12)$$

У рівнянні (9.12) перша складова характеризує неусталений рух, друга, третя і четверта – боковий приплив та зміну характеристик по довжині ріки, п'ята – уклон тертя. Кожна із складових має розмірність уклону [м/м].

Внесемо зміни до третьої, четвертої і п'ятої складових:

$$\frac{\alpha\upsilon(\upsilon-\Theta)}{gQ}\frac{dQ}{ds}=\frac{\alpha\upsilon q}{g\omega}, \quad \text{тому що} \quad \frac{dQ}{ds}=q,\ \frac{\upsilon}{Q}=\frac{1}{\omega};$$

$$\frac{d}{ds}\left(z+\frac{P}{\gamma}\right)=\frac{dz}{ds},$$ оскільки P – це атмосферний тиск, який не змінюється на протязі ділянки, тому величиною $\frac{P}{\gamma}$ можна знехтувати.

$$\frac{\tau\chi}{\gamma\omega}\upsilon^2=\frac{\upsilon^2}{C^2R}, \quad \text{тому що} \quad \frac{\omega}{\chi}=R, \quad \frac{\gamma}{\tau}=C^2.$$

В результаті внесених змін одержимо рівняння:

$$\frac{\alpha}{g}\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{\alpha}{g}\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial s}+\frac{\alpha\upsilon q}{g\omega}+\frac{dz}{ds}+\frac{\upsilon^2}{C^2R}=0. \qquad (9.13)$$

Для побудови кривої вільної поверхні рівняння (9.13) прийме вигляд:

$$-\frac{dz}{ds}=\frac{\alpha}{g}\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{\alpha}{g}\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial s}+\frac{\alpha\upsilon q}{g\omega}+\frac{\upsilon^2}{C^2R}. \qquad (9.14)$$

Рівняння (9.14) є рівнянням неусталеного руху, яке враховує наявність бокового притоку або відтоку з русла. Воно вперше було одержано французьким вченим Сен-Венаном в 1871 році і носить його ім'я.

9.2 Математичні моделі руху води зі змінною витратою

9.2.1 Система рівнянь Сен-Венана

Основною задачею розрахунку несталого руху води є визначення двох характеристик, які повністю описують стан одновимірного потоку – витрати Q та відміток водної поверхні z для різних моментів часу для t і відстаней s по довжині русла.

Точні методи розрахунку несталого руху води засновані на вирішенні одновимірної системи рівнянь Сен-Венана [4], яка пов'язує гідравлічні характеристики потоку з морфометричними характеристиками русла для різних значень s і t.

Система рівнянь Сен-Венана отримана з урахуванням ряду припущень. Із них найбільш істотні такі:

- враховується тільки подовжнє переміщення води у руслі із середньою швидкістю в перерізі;
- розглядається рух води, що повільно змінюється. Цей факт дозволяє нехтувати місцевими втратами;
- сили опору вводяться по тому ж закону, що і при рівномірному русі.

За наявності бічного припливу диференціальні рівняння несталого руху води у відкритих руслах складаються із рівняння динамічної рівноваги (Сен-Венана) і рівняння нерозривності та мають наступний вигляд:

$$-\frac{dz}{ds}=\frac{\alpha}{g}\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\frac{\alpha}{g}\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial s}+\frac{\alpha \upsilon q}{g\omega}+\frac{\upsilon^2}{C^2R}, \tag{9.15}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial s}=q, \tag{9.16}$$

де z – відмітки водної поверхні, υ – середня швидкість течії, ω – площа поперечного перерізу русла, Q – витрата води, n – коефіцієнт шорсткості, C – швидкісний коефіцієнт формули Шезі, який обчислюється за формулою Маннінга, R – гідравлічний радіус, q – витрата бокового припливу на одиницю довжини русла, α – коректив швидкості, який показує нерівномірність розподілу швидкості по перерізу, g – прискорення сили тяжіння. Приведені характеристики відносяться до створу русла на відстані s від початкового створу та для t-го моменту часу від початку руху.

9.2.2 Модель динамічної хвилі

У літературі з гідравліки система рівнянь (9.15)–(9.16) отримала назву математична модель динамічної хвилі. Вона останнім часом найбільш часто застосовується, в літературі наводиться наступна форма запису рівнянь динамічної хвилі, які отримані після перетворення системи (9.15)–(9.16):

$$-\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{1}{g\omega}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\alpha}{g\omega}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{Q^2}{\omega^2}\right)-\frac{Q|Q|}{K^2}, \tag{9.17}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial s}=0, \tag{9.18}$$

Тут $K-$ модуль витрати, причому $K=\omega C\sqrt{R}$. Кожен член динамічного рівняння (9.17) має розмірність уклону, причому в лівій частині рівняння $\left(-\frac{\partial z}{\partial s}\right)$ – це уклон водної поверхні. Він визначається складовими правої частини – також уклонами – градієнтами втрат напору потоку за рахунок зміни витрати в часі $\left(\frac{1}{g\omega}\frac{\partial Q}{\partial t}\right)$; по довжині русла $\left(\frac{\alpha}{g\omega}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{Q^2}{\omega^2}\right)\right)$, а також втрат напору на подолання сил тертя $\left(\frac{Q|Q|}{K^2}\right)$. Перші два члени правої частини динамічного рівняння (9.17) називаються інерційними членами. Запис останнього члена через модуль витрати дає можливість ввести знак мінус при зворотному перебігу води при підпорі.

9.2.3 Модель дифузійної хвилі.

В більшості випадків несталого руху на природних водотоках інерційними членами нехтують, вони малі в порівнянні з іншими складовими рівняння руху. В результаті отримують спрощену систему, яку називають математичною моделлю дифузійної хвилі.

$$Q=\omega C\sqrt{R}\frac{\frac{-\partial z}{\partial s}}{\left|-\frac{\partial z}{\partial s}\right|^{1/2}}, \tag{9.19}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial s}=0. \tag{9.20}$$

В цій системі динамічне рівняння зводиться до рівняння Шезі, в якому замість кореня квадратного з уклону записаний дріб, що дозволяє отримати витрату з від'ємним знаком при зворотних течіях (негативних уклонах).

9.2.4 Модель кінематичної хвилі

Якщо нехтувати можливістю негативного уклону і надати йому постійне значення уклону дна русла I_∂, то отримаємо математичну модель кінематичної хвилі:

$$Q = \omega C\sqrt{R}\sqrt{I_\partial}\,, \tag{9.21}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0\,. \tag{9.22}$$

Диференціальні рівняння неусталеного руху води безпосередньо не інтегруються. Тому для їх вирішення застосовують різні чисельні методи з реалізацією їх на ЕОМ. Найбільш ефективний в цьому відношенні метод кінцевих різниць, при якому частинні похідні диференціальних рівнянь замінюються кінцевими приростами функції і аргументу. Чисельними методами розроблені численні способи побудови різницевих схем для представлення початкових диференціальних рівнянь і отримання стійких рішень.

9.3 Кінцево-різницеві аналоги диференціальних рівнянь неусталеного руху води.

Для вирішення диференціальних рівнянь неусталеного руху води застосовують різні чисельні методи з реалізацією їх на ЕОМ. Найбільш ефективний в цьому відношенні метод кінцевих різниць, при якому частинні похідні диференціальних рівнянь замінюються кінцевими приростами функції і аргументу [6]. Так, похідна функції f по аргументах s і t може бути наближено замінена наступними залежностями:

$$\frac{\partial f}{\partial s} \approx \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta s} \quad \text{або} \quad \frac{\partial f}{\partial s} \approx \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2\Delta s}\,, \tag{9.23}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t} \quad \text{або} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1}) - (f_{i+1}^j + f_i^j)}{2\Delta t}. \tag{9.24}$$

В рівняннях (9.23), (9.24) індекси при f означають j - номер інтервалу часу Δt від початку руху води, i - номер ділянки Δs від початкового створу.

Чисельними методами розроблені численні способи побудови різницевих схем для представлення початкових диференціальних рівнянь і отримання стійких рішень. Приведемо способи представлення диференціальних рівнянь математичних моделей, що найбільш часто вживаються в річковій гідравліці, їх кінцево-різницевими аналогами.

Так, кінцево-різницевий аналог рівнянь динамічної хвилі (9.17), (9.18) має наступний вигляд [6]:

$$\frac{z_{i+1}^{j+1} - z_i^j}{\Delta s} + \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta s}\left(\frac{\left(Q_{i+1}^{j+1}\right)^2}{\omega_{i+1}^{j+1}} - \frac{\left(Q_i^{j+1}\right)^2}{\omega_i^{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\left|Q_i^j\right| Q_i^{j+1}}{\left(K_i^{j+1}\right)^2} + \frac{\left|Q_{i+1}^j\right| Q_{i+1}^{j+1}}{\left(K_i^{j+1}\right)^2}\right) = 0, \tag{9.25}$$

$$\frac{\omega_{i+1}^{j+1} - \omega_{i+1}^j}{2\Delta t} + \frac{\omega_i^{j+1} - \omega_i^j}{2\Delta t} + \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta s} = 0. \tag{9.26}$$

Розрахунок елементів z і Q ведеться для $j+1$ кроку в часі та $i+1$ кроку по довжині з врахуванням відомих значень z і Q на попередніх кроках розрахунку j та i.

Рівняння дифузійної хвилі (9.19), (9.20) можуть бути представлені у формі таких кінцево-різницевих рівнянь [6]:

$$\frac{\frac{\omega_{i+1}^{j+1} + \omega_{i+1}^j}{2} - \frac{\omega_i^{j+1} + \omega_i^j}{2}}{\Delta t} + \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta s} = 0, \tag{9.27}$$

$$Q_{i+1}^{j+1} = \frac{\omega_{i+1}^{j+1}}{n_{i+1}^{j+1}}\left(R_{i+1}^{j+1}\right)^{2/3} \frac{\frac{z_i^{j+1} - z_{i+1}^{j+1}}{\Delta s}}{\left(\frac{z_{i+1}^{j+1} - z_i^{j+1}}{\Delta s}\right)^{1/2}}. \tag{9.28}$$

Кінцево-різницевий аналог рівнянь кінематичної хвилі (9.21), (9.22) можна представити у формі [6]:

$$\frac{\frac{\omega_{i+1}^{j+1}+\omega_{i+1}^{j}}{2}-\frac{\omega_{i}^{j+1}+\omega_{i}^{j}}{2}}{\Delta t}+\frac{Q_{i+1}^{j+1}-Q_{i}^{j+1}}{\Delta s}=0, \tag{9.29}$$

$$Q_{i+1}^{j+1}=\frac{\omega_{i+1}^{j+1}}{n_{i+1}^{j+1}}\left(R_{i+1}^{j+1}\right)^{2/3}\left(I_{i+1}\right)^{1/2}. \tag{9.30}$$

Основним завданням розрахунку неусталеного руху води є визначення значень z і Q для всіх інтервалів часу Δt та всіх створів, що обмежують розрахункові ділянки завдовжки Δs. Його можна виконати за допомогою методу ітерацій (послідовних наближень). Приклад такого розрахунку можна знайти в [7].

Контрольні питання:

1. Рівняння Мещерського про зміну кількості руху точки із перемінною масою.
2. Рівняння Мещерського для гідрологічних задач.
3. Рівняння Мещерського для безкінечно малої струминки.
4. Назвати всі сили F, які діють на елемент потоку.
5. Сила тиску на елемент потоку.
6. Активна складова сили тяжіння, яка діє на елемент потоку.
7. Сила тертя, яка діє на елемент потоку.
8. Диференціальне рівняння неусталеного руху потоку зі змінним боковим припливом.
9. Система рівнянь Сен-Венана.
10. Модель дифузійної хвилі.
11. Модель кінематичної хвилі.
12. Модель динамічної хвилі.

ЛИТЕРАТУРА

1. Железняков Г.В., Данилевич Б.Б. Точность гидрологических измерений и расчетов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1966. – 240 с.

2. Константинов Ю.М. Гидравлика. – К.: Вища школа, 1988. – 398 с.

3. Справочник по гидравлическим расчетам. Под ред. П.Г. Киселева. Изд. 4-е, пер. и доп. – М.: Энергия. 1977. – 312 с.

4. Спицын И.П., Соколова В.А. Общая и речная гидравлика. – Л.: Гидрометеоиздат, 1990. – 360 с.

5. Чугаев Р.Р. Гидравлика. Изд. 4-е , доп. и пер. – Л.: Энергия, 1982. – 672 с.

6. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987, 320 с.

7. Іваненко О.Г. Автоматизовані методи обчислення добового стоку в гідро створах річок. Навчальний посібник. – Вид. ”ТЕС”, ОГМІ, 1998, 60 с.

Навчальне видання

Даус М.Є.

ЗАГАЛЬНА ТА РІЧКОВА ГІДРАВЛІКА

Конспект лекцій

Підп. до друку | Формат | Папір
Умовн. друк. арк. | Тираж | Зам. №

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул. Львівська, 15