**Сєрга Е.М.**

# ГЕОФІЗИЧНА ГІДРОДИНАМИКА

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
**ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Сєрга Е.М.**

# ГЕОФІЗИЧНА ГІДРОДИНАМІКА

Конспект лекцій

**Одеса – 2013**

**ББК 22.253.3**
**С 32**
**УДК 551.511.32**

*Друкується за рішенням Вченої ради Одеського державного екологічного університету ( протокол №________ від ___.___.200__ р.).*

**Сєрга Е.М.**
Геофізична гідродинаміка: Конспект лекцій. –Одеса.

Викладені основні положення гідромеханіки та сучасних уявлень з питань теоретичного опису динаміки природних течій бароклінних систем стратифікованих рідин і газів, що обертаються, фізичних механізмів атмосферних, океанічних, гідрологічних процесів і процесів у верхньому шарі ґрунту на обертовій Землі, принципів і методів моделювання великомасштабних процесів в атмосфері та океані та можливостей в області застосування математичних моделей при вивченні гідрометеорологічних процесів та вирішенні прикладних задач метеорології.

Для студентів та аспірантів напряму підготовки «Гідрометеорологія».

Конспект лекцій використовується для денної форми навчання.

**ЗМІСТ**

## ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Геофізична гідродинаміка» належить до системи природничо–наукових і є складовою частиною державного стандарту освіти на рівні бакалавра. Ця дисципліна є обов'язковою в освітньо–професійній підготовці студентів. Статус дисципліни: нормативна (цикл Б) у напрямі бакалаврської підготовки «Гідрометеорологія».

Розуміння основних положень та задач «Геофізичної гідродинаміки» можливе лише на базі знань, здобутих в дисциплінах: вища математика (змістоні модулі «Диференціальне числення», «Інтегральне числення»), фізика (змістоні модулі «Кінематика», «Газова динаміка»), астрономія (в обсязі загальноосвітньої програми).

Знання, здобуті при вивченні «Геофізичної гідродинаміки», необхідні для опанування багатьох спеціальних дисциплін гідрометеорологічного напрямку навчання: «Динамічна метеорологія», «Фізика океану», «Фізика граничного шару атмосфери», «Динаміка руслових потоків», «Гідрологічні розрахунки та прогнози», вони сприяють формуванню у студентів системи знань, умінь та навичок, що дозволяють фахівцю-гідрометеорологу проводити на сучасному рівні дослідження гідрометеороголічних явищ та атмосферних процесів.

Дисципліна «Геофізична гідродинаміка» спрямована на формування у студентів необхідної бази знань про основні положення гідромеханіки та сучасних уявлень з питань теоретичного опису динаміки природних течій бароклінних систем стратифікованих рідин і газів, що обертаються, фізичних механізмів атмосферних, океанічних, гідрологічних процесів і процесів у верхньому шарі ґрунту на обертовій Землі, принципів і методів моделювання великомасштабних процесів в атмосфері та океані, можливостей та області застосування математичних моделей при вивченні гідрометеорологічних процесів та вирішенні прикладних задач метеорології.

Предметом вивчення дисципліни є: механіка, кінематика, динаміка та термодинаміка природних течій бароклінних систем стратифікованих рідин і газів, що обертаються, та принципи і методи моделювання великомасштабних процесів в атмосфері й океані.

Практична значущість дисципліни полягає у тому, що її засвоєння забезпечує формування у студентів практичних навичок та знань про можливості та області застосування математичних моделей при вивченні гідрометеорологічних процесів та вирішенні прикладних задач метеорології. Формуються ключові уявлення про принципи і методи моделювання великомасштабних процесів в атмосфері та океані як одного з напрямків досліджень, що сьогодні посідає одне з провідних місць у науках про Землю і продовжує інтенсивно розвиватись.

Базові знання та вміння, що безпосередньо входять до ОПП і ОКХ, та якими мають володіти студенти після вивчення дисципліни.

Після вивчення дисципліни студент повинен

**знати:**

– основні принципи та підходи до побудови фізичної теорії циркуляційних систем атмосфери та гідросфери;

– основні фактори динаміки циркуляційних систем різних масштабів;

– рівняння гідротермодинаміки, фізичний зміст рівнянь та їх складових, окремих фізичних параметрів, методи та засоби вирішення рівнянь геофізичної гідродинаміки;

– призначення та характер застосування конкретних висновків з теорії;

– способи опису математичних моделей і чисельні методи їх вирішення;

– призначення та характер застосування висновків з теорії розмінностей та подібності; основні поняття різницевих схем.

**вміти:**

– використовувати здобуті теоретичні знання при аналізі атмосферних та океанічних процесів з єдиних науково-методичних позицій;

– використовувати математичний апарат гідродинаміки обертових бароклінних стратифікованих рідин і газів;

– застосовувати низку практичних навичок при реалізації підходів геофізичної гідродинаміки до вирішення прикладних задач метеорології, океанології та гідрології;

– обробляти результати експериментів з урахуванням основних способів аналізу розмінностей;

– встановлювати структуру функціональних зв’язків між фізичними величинами, які характеризують природу явища або процесу;

– інтерпретувати одержані результати емпіричних досліджень.

В курсі «Геофізична гідродинаміка» викладаються основні положення гідромеханіки та динаміки обертових бароклінних та стратифікованих рідин (атмосфер та океанів). Основна увага приділяється теоретичним основам фізико-математичного опису рідини та закономірностям динаміки планетних атмосфер.

Засвоєння цих питань дозволить студентам краще розуміти спеціальні дисципліни та використовувати ці знання при вирішуванні різних гідрометеорологічних задач.

# 1 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

## 1.1 Специфіка об'єктів ГФГД (геофізичної гідродинаміки). Природні течії рідин і газів – малі відхилення від твердотільного обертання Землі

Газоподібна і рідка оболонки Землі являють собою фізичні середовища і їх вивчення базується на основних фізичних законах. Загальні закономірності руху матеріальних тіл і силових взаємодій між ними складають предмет вивчення теоретичної механіки. Розділом теоретичної механіки є гідродинаміка, що досліджує теорію руху рідини і газів, яка внаслідок своїх специфічних особливостей перетворилася на самостійну науку. Розвиток загальної гідродинаміки і розширення сфери її застосування привів до виділення з неї геофізичної гідродинаміки. Виявилося, що ця важлива область пізнання потребує спеціального вивчення і її результати знаходять широке застосування в метеорології, океанології, кліматології, фізиці Землі, планетології й астрофізиці.

Предметом теоретичної механіки є матеріальні тіла, що розглядаються в зв'язку із зміною їх взаємного розташування в просторі і у часі. Матеріальні тіла представляються у вигляді простих моделей, а їх "зовнішній" рух, який називається механічним рухом, розглядається поза "внутрішніх" рухів матерії (молекулярних, атомних і інших подібних "прихованих" рухів).

У механіці досліджуються такі моделі матеріальних тіл: 1) матеріальна точка і дискретна сукупність (система) матеріальних точок, 2) суцільне середовище (тверді, рідкі і газоподібні тіла), що представляє безперервний розподіл речовини і фізичних характеристик його стану. Основними розділами теоретичної механіки є статика, кінематика і динаміка. Статика являє собою вчення про сукупність сил, прикладених до матеріальних тіл, і, як наслідок дії цієї сукупності виводиться умова рівноваги матеріальних тіл. Кінематика вивчає способи кількісного опису рухів матеріальних тіл без розгляду причин (силових взаємодій) що їх викликають. Основні поняття кінематики (геометрія руху- траєкторія тіла, пройдений ним шлях, швидкість і прискорення руху. Причини, що спричиняють рух, вивчає динаміка - основний розділ теоретичної механіки, присвячений руху матеріальних тіл в тісному зв'язку з силовими взаємодіями їх між собою і з фізичними полями.

Теоретичною основою динаміки є три закони Ньютона: інерції, зв'язку між силою і прискоренням, дії і протидії. Основною кількісною мірою механічної взаємодії тіл, яка характеризує інтенсивність і напрям цієї взаємодії, є сила. Взаємодія, здійснювана шляхом безпосереднього контакту тіл, є близькодія, а результат взаємодії тіл з фізичними полями (гравітація, тяжіння ) - далекодія. Обидва поняття широко використовуються при описі динаміки фізичних об’єктів.

Предметом гідродинаміки є механічний рух рідкого або газоподібного суцільного середовища і його взаємодії з межовими твердими поверхнями. Основними специфічними властивостями рідких і газоподібних середовищ є безперервність (нерозривність) і текучість (легка рухливість). Гідродинаміка не розглядає внутрішні (молекулярні) процеси, наслідком яких є вказані властивості суцільного середовища.

Маючи загальні властивості нерозривності і текучості, рідини і гази відрізняються один від одного мірою їх стисливості. Відстань між молекулами в рідині мала, а сили зчеплення великі, і тому порівняно малі зміни тиску, які виникають при русі рідини, практично не позначаються на зміні її об’єму. У зв’язку з цим при описі багатьох гідродинамічних процесів рідина може розглядатися як нестислива. У протилежність рідині в газах міжмолекулярні відстані великі, а сили взаємодії між молекулами малі. Гази на відміну від рідини стискаються.

На основі властивості стисливості визначимо гази як рідину, що стискається, здатну змінювати свою форму і об’єм, а власне рідину - як нестисливу рідину, здатну змінювати свій об’єм. Надалі, маючи на увазі спільність для рідини і газів властивостей нерозривності і текучості, будемо називати і рідину, і гази одним словом рідина.

Однією з важливих властивостей рідини є опір ковзанню частинок, якиий називається внутрішнім тертям або в’язкістю. Для багатьох практичних задач, однак, можна нехтувати ефектом в’язкості, тобто вважати, що ковзання одного шару рідини по іншому не спричиняє з боку останнього опір. Така рідина на відміну від в’язкої називається ідеальною. Рух як ідеальної, так і в’язкої рідини описується за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Аналітичне розв’язання таких рівнянь можливе лише в порівняно нечастих випадках. Тому великий внесок в розвиток сучасної гідродинаміки внесли чисельні методи розв’язання нелінійних диференціальних рівнянь, що реалізуються на швидкодіючих ЕОМ. Крім того, в сучасній гідродинаміці використовуються результати експериментальних досліджень. Широке застосування також знаходять напівемпіричні теорії для опису гідродинамічних процесів і явищ.

Подальший розвиток гідродинаміки привів до виділення як самостійної наукової дисципліни геофізичної гідродинаміки. Геофізична гідродинаміка вивчає природні течії рідин і газів, для яких істотну роль відіграють ефекти обертання і стратифікації. Під обертанням мається на увазі спільне обертання планети і навколишніх її повітряної і водної оболонок. При цьому в системі відліку, пов’язаній з обертовою Землею, виникає відхильний ефект, який необхідно враховувати при описі гідродинамічних процесів в геофізичних системах. Нарівні з ефектом обертання специфічною особливістю об'єктів геофізичної гідродинаміки є стратифікація середовища, зокрема, зміна густини з висотою в атмосфері і глибиною в океані. Іншими словами геофізичні системи є стратифікованими. Крім того, ці системи є бароклінними, оскільки густина реальних газів і рідини залежить не тільки від тиску, як в баротропних середовищах, але також від температури і концентрації термодинамічно активних домішок.

Геофізичну гідродинаміку можна визначити як гідродинаміку обертових бароклінних стратифікованих рідин, і газів. Геофізична гідродинаміка вивчає фундаментальні динамічні процеси, знання яких необхідне для розуміння явищ в атмосфері й океані. На цей час ця наука, в основному, обмежується вивченням великомасштабних атмосферних і океанічних процесів. На великих масштабах найбільш чітко виявляється спільність характеру рухів в атмосфері і океані.

Метою досліджень геофізичної гідродинаміки є визначення загальних якісних і кількісних закономірностей. У зв'язку з цим геофізична гідродинаміка історично розвивалася шляхом послідовного вивчення моделей, що ускладнюються. На основі суворого аналізу більш простих моделей формувалися постановки складних задач. Таким чином була створена ієрархія моделей широкого спектра геофізичних процесів і явищ.

Атмосфера й океан є основними об'єктами геофізичної гідродинаміки, оскільки атмосферні й океанічні процеси розвиваються у обертових стратифікованих бароклінних середовищах. Укажемо основні напрями метеорології, океанології і гідрології, де знаходять найбільш яскраве втілення результати, отримані в геофізичній гідродинаміці. Передусім, розробка основного питання сучасної метеорології - прогноз погоди різної передчасності і моделювання клімату - тісно пов'язана з висновками геофізичної гідродинаміки щодо динаміки вихорів різних масштабів, енергетики великомасштабних процесів, системи гідродинамічного типу, хвильових рухів, гідродинамічної нестійкості та турбулентності. Геофізична гідродинаміка лежить в основі дослідження глобальних проблем, пов'язаних із загальною циркуляцією атмосфери й океану і теорією клімату. При аналізі динаміки клімату основна увага приділяється з'ясуванню ролі великомасштабних вихорів і хвиль в формуванні загальної циркуляції атмосфери. Ця проблема досліджується на основі діагнозу емпіричних полів і даних, отриманих за допомогою моделей глобальної циркуляції, що витікає з основної концепції геофізичної гідродинаміки.

Сучасний рівень теорії клімату характеризується тим, що модельні розрахунки розглядаються як генератор інформації про можливі зміни клімату. Ці ідеї також проникли в дослідження циркуляції океану. Головними елементами циркуляції Світового океану є гігантські антициклонічні круговороти вод навколо атмосферних субтропічних центрів дії. Їхні західні гілки інтенсифіковані і утворюють такі сильні вузькоструминні примежові течії, як Гольфстрім в Північній Атлантиці та Куросіо в північній половині Тихого океану. Ці особливості циркуляції Світового океану пояснюються дією геофізичного чинника - зміни з широтою параметра Коріоліса. Південне коливання й Ель-Ніньо - найбільш потужні і надійно зареєстровані вияви великомасштабної взаємодії океану й атмосфери - в цей час досліджуються за допомогою підходів, розроблених в геофізичній гідродинаміці.

Основний об'єкт вивчення гідрології - поверхневий водостік, що залежить від фізико-географічних умов, кліматичних і метеорологічних чинників, також досліджується за допомогою методів геофізичної гідродинаміки.

Вище перелічено лише обмежене коло питань, в яких результати геофізичної гідродинаміки знаходять широке застосування. Безсумнівно, що в міру розвитку геофізичної гідродинаміки і гідрометеорологічних наук їх взаємне проникнення буде зростати і сприяти більш глибокому і повному дослідженню природних течій обертових стратифікованих бароклінних рідин і газів.

### 1.2 Застосування основних положень векторного числення в ГФГД (векторна функція, її похідна, скалярне та векторне множення)

**Скалярна та векторна величини.** Скаляр або скалярна величина цілком характеризується своїм чисельним значенням (наприклад, об'єм, маса, температура, робота), а для визначення вектора або векторної величини додатково необхідно зазначити ще і напрямок у просторі (наприклад, швидкість, прискорення, сила). Будемо подавати вектор у вигляді відрізка, що має напрям. Умовимося позначати вектори літерами зі стрілками над ними $\vec{A}, \vec{V}, \vec{r}, \vec{\omega}, \ldots$; ці ж літери без стрілок $A, V, r, \omega \ldots$ будуть позначати довжини векторів, які називаються модулями або абсолютними величинами: $A = |\vec{A}|$, $V = |\vec{V}|$, $r = |\vec{r}|$, $\omega = |\vec{\omega}|$, а літери з позначками $A_x, V_y, r_n, \omega_z, \ldots$ їх проекції відповідно на осі $x, y, n, z$. Два вектори $\vec{A}$ і $\vec{B}$ вважаються рівними між собою, коли рівні їх модулі та збігаються напрямки: $\vec{A} = \vec{B}$. Взаємно протилежні вектори $\vec{A}$ і $\vec{B}$ мають однакову довжину та протилежні за напрямом: $\vec{A} = -\vec{B}$. Якщо модуль вектора дорівнює 1, він називається одиничним. Проекції $A_x, A_y, A_z$ вектора $\vec{A}$ на координатні осі (їх іноді називають складовими або компонентами вектора $\vec{A}$) цілком його визначають за модулем і напрямом: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$, де $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – одиничні вектори (орти), які мають напрям координатних осей $x, y, z$ (у бік зростання координати). Якщо $\vec{n}$ одиничний вектор, який має напрям, що збігається з напрямом вектору $\vec{A}$, то можна записати $\vec{A} = A\vec{n}$.

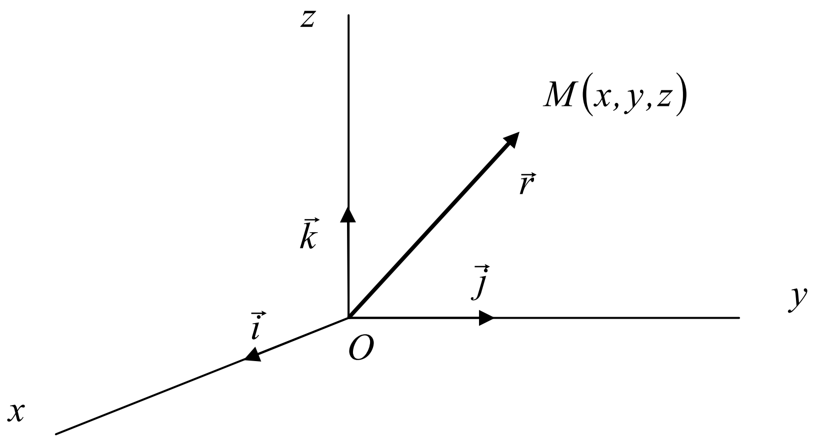


Рисунок 1.1 – Радіус–вектор $\vec{r}$ точки $M$ та орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

Радіусом–вектором точки $M$ (звичайно позначається $\vec{r}$) називається напрямлений відрізок $OM$, початок якого збігається з початком координат, а кінець знаходиться у точці $M$ (рис. 1.1).

Сума декількох векторів $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ є вектор $\vec{E}$, який замикає ломану лінію, що складається з векторів доданків (рис. 1.2). Сумою двох векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ є вектор $\vec{C}$ – діагональ паралелограма (рис.1.3): $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, а різниця двох векторів $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ – це сума векторів $\vec{A}$ і $-\vec{B}$ (друга діагональ паралелограма) (рис. 1.3).

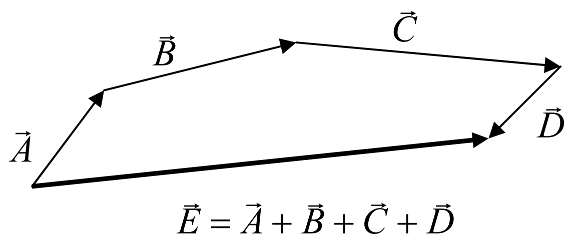


Рисунок 1.2 – Вектор $\vec{E}$, який є сумою векторів $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$

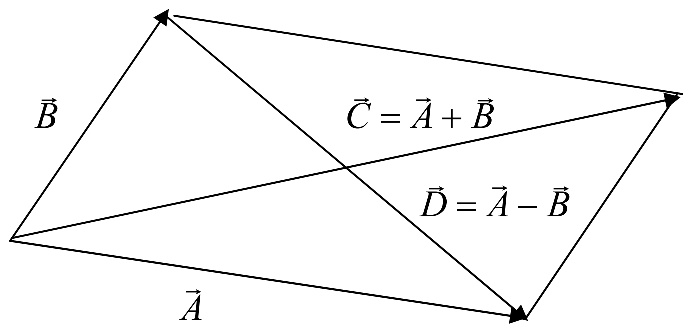


Рисунок 1.3 – Сума $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ і різниця $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ векторів

Добутком скаляра $a$ і вектора $\vec{B}$ називається вектор $\vec{C}$, колінеарний з вектором $\vec{B}$, тобто $\vec{B}$ і $\vec{C}$ паралельні одній прямій:

$\vec{C} = a\vec{B}$; модуль $C = |a|$, а напрям $\vec{C}$ збігається з напрямом $\vec{B}$, коли $a > 0$, і протилежний йому, коли $a < 0$.

**Множення векторів**. Скалярним добутком векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ (позначається $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ) називається скаляр (число), що визначається рівністю $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B\cos\varphi$, де $\varphi$ – кут між векторами $\vec{A}$ і $\vec{B}$, зведеними до загального початку.

Векторним добутком векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ (позначається $\vec{A} \times \vec{B}$) називається вектор $\vec{C}$ довжиною $C = AB\sin\varphi$.

Вектор $\vec{C}$ перпендикулярний до обох співмножників і має напрям у той бік, з якого найкоротший поворот від $\vec{A}$ до $\vec{B}$ здається таким, що відбувається проти годинникової стрілки (рис. 1.4).

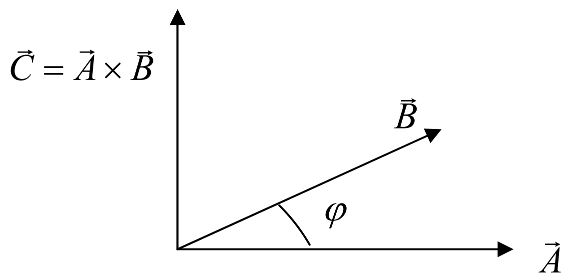


Рисунок 1.4 – Вектор $\vec{C}$, який є векторним добутком векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$

У прямокутних декартових координатах скалярний добуток $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ , тобто дорівнює сумі добутків однойменних проекцій, а векторний добуток двох векторів може бути виражений так:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}A_y A_z\\ B_y B_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}A_x A_z\\ B_x B_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}A_x A_y\\ B_x B_y\end{vmatrix}=$$

$$=\left(A_y B_z - A_z B_y\right)\vec{i}+\left(A_z B_x - A_z B_x\right)\vec{j}+\left(A_x B_y - A_y B_x\right)\vec{k}\,,$$

де $A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x$ – проекції векторного добутку на координатні осі.

Основні властивості добутків векторів:

* $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ (переставна властивість), але $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ (при переставленні множників векторний добуток змінює свій знак на протилежний);

* $\alpha(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\alpha\vec{A})\vec{B}$ і $\alpha(\vec{A}\times\vec{B})=(\alpha\vec{A})\times\vec{B}$ – властивість сполучності відносно скалярного множника $\alpha$ ;

* $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})\neq(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$ і $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ (в цих випадках властивість сполучності не виконується);

* $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$ і $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ (властивість розподільності);

* $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ , якщо $\vec{A}$ і $\vec{B}$ взаємно перпендикулярні (умова перпендикулярності векторів);

* $\vec{A}\times\vec{B}=0$ , якщо $\vec{A}$ і $\vec{B}$ паралельні (умова колінеарності векторів);

* $\vec{A}\cdot\vec{A}=\left(\vec{A}\right)^2=A^2$ , але $\vec{A}\times\vec{A}=0$.

Подвійний векторний добуток обчислюється за формулою

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}. \tag{1.1}$$

**Векторна функція скалярної змінної**. Змінний вектор $\vec{A}$ називається векторною функцією (вектор–функцією) скалярної змінної $t$ , якщо кожному значенню $t$ відповідає визначене значення вектора $\vec{A}$. У цьому випадку прийнято позначення $\vec{A}=\vec{A}(t)$. Координатне завдання вектор–функції $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$ полягає у завданні трьох скалярних функцій від однієї незалежної змінної: $\vec{A}_x=\vec{A}_x(t)$, $\vec{A}_y=\vec{A}_y(t)$, $\vec{A}_z=\vec{A}_z(t)$. Якщо подати змінний вектор у вигляді радіуса–вектора $\vec{r}=\vec{r}(t)$ точки $M$ , то зі змінною $t$ точка $M$ опише криву у просторі (рис. 1.5) – годограф векторної функції; його координатне завдання здійснюється трьома рівностями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ .

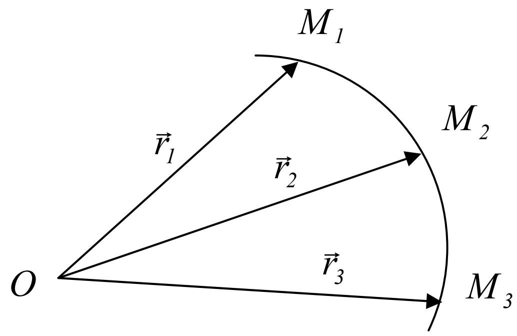


Рисунок 1.5 – Годограф векторної функції

Похідна векторної функції $\vec{A} = \vec{A}(t)$

$\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}$ - є нова векторна функція від $t$. Геометричне значення похідної від радіуса–вектора $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ є вектор, дотичний до годографа у відповідній точці (рис. 1.6); довжина $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ залежить від вибору параметра $t$. Якщо $t$ – час, то функція $\vec{r}(t)$ визначає рух точки $M$ у просторі, а $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ за величиною та за напрямом – швидкість цього руху.

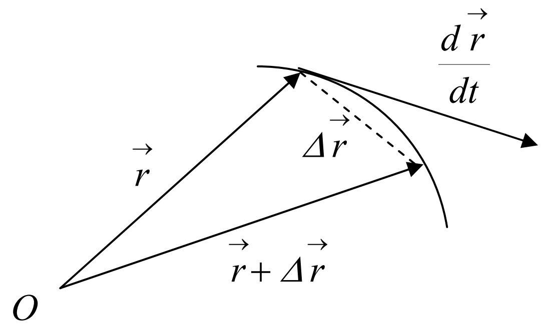


Рисунок 1.6 – Геометрічне значення похідної від радіуса-вектора $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Правила диференціювання векторів:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{C}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\vec{A}\right)=\frac{d\alpha}{dt}\vec{A}+\alpha\frac{d\vec{A}}{dt}$$ ( $\alpha$ – скалярна функція від $t$ );

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$ (множники не можна міняти місцями).

### 1.3 Градієнт скалярної величини. Повна і частинна похідна за часом і її компоненти

Для встановлення фізичного сенса і знаходження виразу похідних за часом від густини, температури, проекцій швидкості і інших скалярних характеристик рідини, вводимо для них уніфіковане позначення $f = f(x,y,z,t)$.

#### 1.3.1 Градієнт скалярної величини

Нагадаємо, що еквіскалярною поверхнею називається поверхня рівних значень скалярної величини, тобто $f(x,y,z)=const$. Якщо були побудовані еквіскалярні поверхні, відповідні значенням функції $f_0, f_0+\Delta f, f_0+2\Delta f$ і т. д., тобто такі, у яких перехід від однієї поверхні до сусідньої супроводжується зміною $f$ на одну і ту ж величину $\Delta f$, то щільність розташування поверхонь характеризує собою швидкість зміни $f$: чим ближче одна до одної лежать поверхні, тим швидше змінюється $f$.

Розташуємо початок системи координат на якій-небудь еквіскалярній поверхні (рис. 1.7), направивши одну вісь $n$ до неї по нормалі. Тоді дві інші $t_1$ і $t_2$ розташуються в дотичній площині, за рахунок чого $\frac{\partial f}{\partial t_1}=\frac{\partial f}{\partial t_2}=0$ (у напрямку цих осей значення $f$ не змінюється).

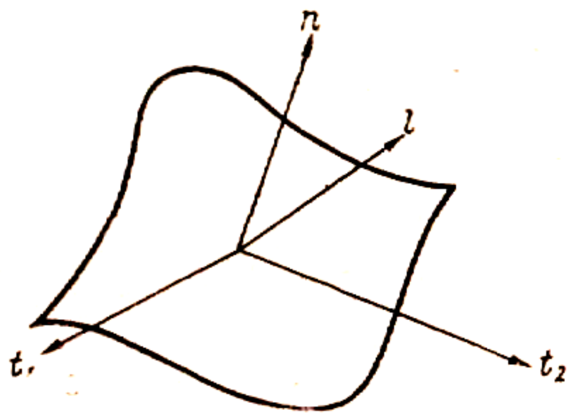


Рисунок 1.7 – Еквіскалярна поверхня

Запишемо похідну від $f$ по будь-якому напрямку $l$ в даній системі координат: $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial t_2}\frac{\partial t_2}{\partial l}$.

У вказаній системі координат це еквівалентно рівності

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n} cos\left(\widehat{n,l}\right), \text{ де } \frac{\partial n}{\partial l} = cos\left(\widehat{n,l}\right). \tag{1.2}$$

Максимальне змінення $f$ матиме місце в тому випадку, якщо $l$ співпадає з $n$ ($(cos\left(\widehat{n,l}\right) = 1$).

Величина $\frac{\partial \vec{f}}{\partial n}$ називається градієнтом скалярної величини $f$. Це вектор, що характеризує змінення $f$ при зсуві на одиницю довжини у напрямі нормалі. Як ми тільки що встановили, модуль градієнта рівний похідній функції по напрямку її якнайшвидшого змінення $n$.

Знайдемо тепер проекції градієнта на осі будь-яким чином заданої прямокутної системи координат $x, y, z$. Для цього вкажемо, що формула (1.2) є записом проекції градієнта на будь-який напрямок $l$. Якщо, зокрема $l$ співпадає з віссю $x(l \equiv x)$, то отримаємо $x$-ю проекцію градієнта: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial n}\cos\left(\widehat{n,x}\right) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_x$.

Аналогічно по осях $y$ і $z$, відповідно $\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_y = \frac{\partial f}{\partial y}$; $\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Таким чином: $\dfrac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial n} = \vec{i}\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Модуль градієнта: $\left|\dfrac{\partial f}{\partial n}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$.

Відзначимо, що градієнт часто ще позначається як $grad\ f$. З використанням оператора Гамільтона його можна записати у вигляді $\nabla f$.

Таким чином: $\dfrac{\overrightarrow{\partial f}}{\partial n} \equiv grad\ f \equiv \nabla f$.

Як приклад, запишемо градієнт для випадку, коли $f \equiv v_x$ або $f \equiv p$.

Ясно, що: $grad\ p = \vec{i}\,\dfrac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial p}{\partial z},\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = \left\{\dfrac{\partial p}{\partial x}, \dfrac{\partial p}{\partial y}, \dfrac{\partial p}{\partial z}\right\}$;

$$grad\ v_x = \vec{i}\,\frac{\partial v_x}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial v_x}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial v_x}{\partial z},\ \frac{\partial v_x}{\partial n} = \left\{\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_x}{\partial z}\right\}.$$

Аналогічно:

$$\frac{\partial v_y}{\partial n} = \left\{\frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_y}{\partial z}\right\},\ \frac{\partial v_y}{\partial n} = \left\{\frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_z}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial z}\right\}.$$

Таким чином, можна констатувати, що градієнт вектора швидкості $grad\,\vec{v}$ виражається через сукупності дев'яти величин, тобто є тензором другого рангу:

$$grad\,\vec{v} = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{matrix}\right\}.$$

Відзначимо, що скалярне поле при переході до градієнта породжує векторне, а векторне – тензорне з рангом два.

### 1.3.2 Повна, частинна похідна за часом і її компоненти

Як відомо, повний диференціал якої-небудь скалярної функції

$f = f(x,y,z,t)$ має вигляд $df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$, а повна похідна за часом $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$, або (оскільки $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dz}{dt} = v_z$)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z. \tag{1.3}$$

Розглянемо значення кожного з доданків у виразі (1.3).

1. **Локальна похідна**. Частинна похідна за часом $\frac{\partial f}{\partial t}$ є зміною величини $f$ за одиницю часу при фіксованих координатах, тобто дає швидкість зміни властивості в нерухомій точці простору. Через це вона називається локальною. Знак похідної характеризує собою зростання $\left(\frac{\partial f}{\partial t} > 0\right)$ або убування $\left(\frac{\partial f}{\partial t} < 0\right)$ $f$ в часі.

Показання приладів на гідрометстанціях відповідають вимірюванням локальної похідної. Так, наприклад, якщо є оброблені спостереження самописів тиску або температури, то для наближеного визначення $\frac{\partial p}{\partial t}$ або $\frac{\partial T}{\partial t}$ достатньо взяти на барограмі або термограмі приріст відповідної величини за малий проміжок часу $\Delta t$ і розділити цей приріст на $\Delta t$.

Очевидно, що барометричну тенденцію, тобто приріст тиску на станції за 3 години ми можемо розглядати як наближене значення локальної похідної тиску, коли за одиницю часу був взятий проміжок часу, рівний 3 годинам.

У разі сталого руху, за визначенням якого характеристики рідини в будь-якій зафіксованій точці простору не зазнають змін: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

2. **Конвективна похідна**. Це найменування зумовлюється фізичним сенсом даної похідної. Дійсно, під нею мається на увазі сума $v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}$.

При цьому $\frac{\partial f}{\partial x}$ є приростом $f$ на одиницю довжини у напрямі осі

$Ox$; $v_x \dfrac{\partial f}{\partial x}$ рівно приросту $f$ на відстані $v_x$ в тому ж напрямку, тобто приросту, зумовленому зсувом частинки за одиницю часу на відстань $v_x$ у напрямі осі $Ox$. Подібно цьому $v_y \dfrac{\partial f}{\partial y}$ - виражає собою приріст $f$, яке зумовлене зсувом частинки в напрямку $Oy$, і аналогічне тлумачення має $v_z \dfrac{\partial f}{\partial z}$. Сума всіх трьох складових дорівнює приросту $f$, зумовленому одночасним зсувом у напрямку кожної координатної осі за одиницю часу.

Легко бачити, що конвективну похідну можна розглядати як скалярний добуток двох векторів: $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, і $grad\ f = \vec{i} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \dfrac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \dfrac{\partial f}{\partial z}$. І записувати її у вигляді: $(\vec{v} \cdot grad\ f)$.

Неважко і цьому виразі дати фізичне тлумачення, бо

$$(\vec{v} \cdot grad\ f) = |\vec{v}|\,|grad\ f|\,cos\left(\vec{v}\,\hat{,}\,gradf\right) = |\vec{v}|\, grad_{\,l} f,$$

де $grad_{\,l} f$ є проекція $grad\ f$ на напрямок лінії течії. Через це $(\vec{v} \cdot grad\ f) = |\vec{v}| \dfrac{\partial f}{\partial l}$, причому – $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ - визначає собою приріст $f$ при зсуві на одиницю довжини по лінії течії. Тому $|\vec{v}| \dfrac{\partial f}{\partial l}$ є приростом $f$ при зсуві по лінії течії на відрізок $|\vec{v}|$, тобто приріст, зумовлений переміщенням частинки по лінії течії за одиницю часу. Висновок тотожний попередньому.

Конвективна похідна обертається в нуль в таких випадках:

1) коли $\vec{v} = 0$, що відповідає відсутності переміщення частинки;

2) коли $grad\ f = 0$, що відповідає умовам, коли у всіх точках, близьких до даної точки, $f$ має одну і ту ж величину (оскільки похідна в даній точці по будь-якому напрямку дорівнює нулю). При цьому зміна положення частинки в просторі сама по собі не спричиняє зміни $f$;

3) коли $\vec{v} \perp grad\ f$. Це має місце у тому випадку, коли частинка зміщується по еквіскалярній поверхні функції $f$, і в цьому випадку зміна положення частинки не супроводжується зміною величини $f$ в цій частинці.

Нарешті, відзначимо, що, якщо кут між $\vec{v}$ і $grad\ f$ гострий

$\left(cos\left(\vec{v},\hat{}\,grad\ f\right) > 0\right)$, то $f$ уздовж лінії течії зростає, у зворотному випадку, навпаки, падає.

3. **Індивідуальна похідна (субстанціональна)**. Для виявлення її фізичного сенсу перепишемо (1.3) у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial z}v_z\right) \tag{1.4}$$

Ясно, що зміна властивості $f$ в точці може спричинятися, по-перше, тим, що в неї безперервно надходить рідина з інших точок. (Це відображає конвективну похідну). Так, наприклад, якщо в неї прийшла частинка, яка знаходилася в момент $t-1$ в іншій точці, то вона принесла в ту, що розглядається, значення $l = f$, яке було у неї в початковому положенні. По-друге, за час руху властивості в самій частинці також змінюються за рахунок взаємодії з навколишнім середовищем. (Так, якщо відбувається поглинання тепла, то температура частинки підвищується). Цей останній чинник, як показує (1.4), і відображає індивідуальну похідну. Інакше кажучи, вона характеризує зміну даної величини у фіксованій частинці, яка відбувається в процесі її руху за одиницю часу. Вказана зміна оцінюється за показаннями приладу, пов'язаного з рухомою масою.

Отже, згідно (1.3) $\frac{df}{dt}$ дорівнює сумі локальної і конвективної похідних. В окремому випадку стаціонарного руху має місце рівність індивідуальної і конвективної похідних, а в тих випадках, коли конвективна обертається в нуль $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}$. При цьому зміна положення частинки в просторі не спричиняє приросту $f$ в точці.

На закінчення відзначимо, що з урахуванням модифікацій запису конвективної похідної величина $\frac{df}{dt}$ може бути представлена або у вигляді (1.3), або як:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot grad\ f\right) \tag{1.5}$$

або

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + |\vec{v}|\,|grad\ f|\,cos\left(\vec{v},\hat{}\,grad\ f\right).$$

# 2 КІНЕМАТИКА

## 2.1 Методи опису руху рідини. Методи Лагранжа та Ейлера

Зупинимося на двох основних методах опису руху рідини, відомих як методи Лагранжа і Ейлера.

Метод Лагранжа заснований на розгляді руху окремих рідких частинок. Якщо в початковий момент часу $t_0$ відомі декартові координати $x_0$, $y_0$, $z_0$, що визначають вибір індивідуальної частинки, то в будь-який інший момент часу $t$ її координати будуть визначатися часом і цими початковими координатами.

Нехай $\vec{R}$ радіус-вектор виділеної рідкої частинки.

Тоді, визначивши залежність радіус-вектора від часу $t$ і початкових координат $x_0$, $y_0$, $z_0$

$$\vec{R} = \vec{R}(t; x_0, y_0, z_0), \tag{2.1}$$

ми простежимо рух виділеної частинки в тривимірному просторі.

Якщо $x_0$, $y_0$, $z_0$ постійні, а $t$ змінне, то ми простежуємо рух фіксованої рідкої частинки.

Якщо зафіксувати значення $t$, а $x_0$, $y_0$, $z_0$ розглядати як змінні, то ми отримаєм просторовий розподіл рідких частинок в визначений момент часу.

Таким чином, в методі Лагранжа виділений об'єм рідини ми представляємо у вигляді сукупності окремих частинок і стежимо за їх переміщенням у часі і просторі.

Якщо спроектувати співвідношення (2.1) на осі координат *0x, 0y, 0z,* то отримаємо

$$x = x(t; x_0, y_0, z_0), \quad y = y(t; x_0, y_0, z_0), \quad z = z(t; x_0, y_0, z_0). \tag{2.2}$$

Ці рівняння при постійних $x_0$, $y_0$, $z_0$ і змінному $t$ описують закон руху рідкої частинки, а при змінних $x_0$, $y_0$, $z_0$ і постійному $t$ - закон просторового розподілу рідких частинок в конкретний довільно вибраний момент часу.

Замість декартових координат $x_0$, $y_0$, $z_0$ можна взяти будь-які три величини *a, b, c,* пов'язані з $x_0$, $y_0$, $z_0$ взаємно однозначними залежностями:

$$x_0 = \psi_1(a,b,c), \; y_0 = \psi_2(a,b,c), \; z_0 = \psi_3(a,b,c). \tag{2.3}$$

Так, наприклад, в якості *a, b, c* можна вибрати криволінійні координати частинки в початковий момент часу. Очевидно, що при описі руху рідини величини *a, b, c* є такими ж аргументами як *t.* Величини *t, a, b, c* носять назву змінних Лагранжа.

Таким чином, закон зміни координат рідкої частинки в змінних Лагранжа на основі (2.2) і (2.3) записується у вигляді

$$x = f_1(t,a,b,c),\; y = f_2(t,a,b,c),\; z = f_3(t,a,b,c). \tag{2.4}$$

Перейдемо до визначення швидкості і прискорення рідкої частинки як основних кінематичних характеристик руху. Продиференціювавши вирази (2.4) по *t*, одержимо компоненти вектора швидкості руху частинка $V_x, V_y, V_z$ :

$$V_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1(t,a,b,c)}{\partial t};\; V_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2(t,a,b,c)}{\partial t};$$
$$V_z = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3(t,a,b,c)}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Диференціювання (2.5) по *t* дає компоненти вектора прискорення $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$:

$$\dot{V}_x = \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2};\; \dot{V}_y = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2};\; \dot{V}_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{2.6}$$

Формули (2.5) і (2.6) дозволяють розрахувати компоненти швидкості і прискорення рухомої частинки в методі Лагранжа.

У методі Ейлера досліджуються зміни різних елементів руху в фіксованій точці простору з плином часу і зміна цих елементів при переході до інших точок простору. Іншими словами, в методі, запропонованому Ейлером, швидкість руху рідини визначається у вигляді функції від часу *t* і координат *x, y, z* точок простору, по відношенню до яких відбувається рух рідини. Величини *t, x, y, z* називаються змінними Ейлера, а рух середовища задається полем швидкості

$$V_x = F_1(t,x,y,z),\; V_y = F_2(t,x,y,z),\; V_y = F_3(t,x,y,z). \tag{2.7}$$

Для отримання формули розрахунку прискорення в методі Ейлера спочатку розглянемо процедуру переходу від змінних Лагранжа до змінних Ейлера.

Нехай деяка величина $A$ задана в змінних Лагранжа

$$A = A\,(\,t,\,a,\,b,\,c\,) \tag{2.8}$$

і в змінних Ейлера

$$A = F\,(\,t,\,x,\,y,\,z\,). \tag{2.9}$$

Потрібно знайти похідні від $A$ по змінних Лагранжа. Оскільки в методі Лагранжа просторові координати суть функції від часу $t$ і аргументів $a, b, c$ (2.4), то за правилами диференціювання складної функції отримуємо вирази для похідних по $t, a, b, c$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t};\\
\frac{\partial A}{\partial a} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a};\\
\frac{\partial A}{\partial b} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b};\\
\frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Формули (2.10) не можна трактувати як формули переходу від змінних Лагранжа до змінних Ейлера, оскільки в правих частинах цих співвідношень фігурують похідні по обох типах змінних. Найбільший інтерес представляє похідна за часом, тобто перша формула (2.2.10), яку з врахуванням (2.5) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + V_x\frac{\partial F}{\partial x} + V_y\frac{\partial F}{\partial y} + V_z\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{dF}{dt}. \tag{2.11}$$

Оскільки в методі Ейлера поле швидкості, тобто $V_x$, $V_y$ , $V_z$ задано, то формула (2.11) є формула переходу від змінних Лагранжа до змінних Ейлера.

Права частина (2.11) є повна ( індивідуальна ) похідна від F *по* t. Послідовно підставляючи замість $F$ складові швидкості $V_x$, $V_y$ , $V_z$, одержуємо відповідні вектори прискорення в змінних Ейлера

$$\frac{d\dot{V}_x}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z};$$
$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}; \qquad (2.12)$$
$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Підкреслимо, що основна відмінність методів Лагранжа і Ейлера полягає в тому, що в методі Лагранжа величини *x, y, z* є змінними координатами рухомої частинки рідини, а в методі Ейлера - це координати фіксованих точок простору, повз які проходять різні частинки рідини.

В геофізичній гідродинаміці поняття повної похідної від векторних і скалярних функцій широко використовується при розв’язанні різних задач.

Як випливає з формули (2.11) вираз для повної похідної має вигляд

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + V_x \frac{\partial F}{\partial x} + V_y \frac{\partial F}{\partial y} + V_z \frac{\partial F}{\partial z}. \qquad (2.13)$$

Величина $\frac{dF}{dt}$ є зміна з часом функції *F* в частинці , що рухається зі швидкістю $\vec{V}$ $(V_x, V_y, V_z)$.

Ця формула застосовна як для векторних, так і для скалярних величин. Так, наприклад, повна похідна від температури *T = T (t, x, y, z,)* за часом *t* може бути представлена у вигляді:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z}. \qquad (2.14)$$

Вираз (2.14) можна переписати у вигляді

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)T\ , \qquad (2.15)$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ - оператор набла, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні орти по осях $O_x$, $O_y$, *Oz*.

В формулі (2.15) перший член $\frac{\partial T}{\partial t}$ звичайно називают локальною похідною по часу, яка описує зміну шуканої функції ( в даному випадку температури) в фіксованій точці тривимірного простору .

Другий член - конвекційна похідна в часі, зумовлена переміщенням рідкої частинки в просторово нерівномірному полі температури або будь-якої іншої величини.

## 2.2 Стаціонарні та нестаціонарні рухи. Траєкторії і лінії течії

В загальному випадку руху його швидкість, густина рідини і інші характеристики є функціями не тільки точки простору, але і часу (наприклад $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, $\rho = \rho(x, y, z, t)$ і т.д.).

Це значить, що в зафіксованій точці, простори, тобто при зафіксованих $x, y, z$ швидкість, густина і інші характеристики змінюються у часі. Такий рух називається несталим **або нестаціонарним.**

Проте часто зустрічаються такі рухи, при яких характеристики руху рідини є функціями тільки точки простору, але не залежать від часу: $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$, $\rho = \rho(x, y, z)$. Це значить, що в будь-якій зафіксованій точці простору швидкість, густина і інші величини не змінюються в часі. Такі рухи називаються сталими **або стаціонарними**. Очевидно, що це визначення стаціонарності руху можна записати у вигляді $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ або в координатній формі $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$. Аналогічно $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ і т.п.

Таким чином, сталому руху повітря відповідає постійність в часі напрямку і сили вітру, що відзначаються на кожній метеостанції даного району, хоча показання флюгера на різних станціях, взагалі кажучи, будуть різні.

Рухи повітря в атмосфері, строго міркуючи, завжди є несталими. Проте, якщо оцінювати швидкість вітру за його середнім значенням за достатньо великий проміжок часу (що в суті і дається метеорологічними приладами для вимірювання вітру), то у ряді задач з достатньою для практичних цілей точністю можна вважати швидкість вітру в даній точці протягом відомого періоду незмінною в часі. Якщо нехтувати також і змінами тиску, температури і густини повітря, то рух в цих випадках можна вважати сталим.

Слід зазначити, що поняття сталого руху не можна ототожнювати з поняттям рівномірного руху, якому відповідає постійність швидкості будь-якої частинки рідини при її переміщенні. Дійсно, рух може бути сталим, тобто швидкість в кожній точці буде постійною в часі, але у міру переходу частинки з однієї точки в іншу швидкість її змінюватиметься. Так, якщо вода рухається по трубі змінного перерізу при постійній різниці тиску на кінцях труби, то рух є сталим, хоча частинки рухаються у напрямку звуження труби зі все зростаючою швидкістю.

Один і той же рух може виявитися сталим або несталим залежно від того, в якій системі координат він розглядається.

При русі точки в просторі її координати змінюються з плином часу. Рівняння, які пов'язують координати точки і час, дозволяють визначити ці координати в будь-який момент часу:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t) \tag{2.16}$$

Замість декартових координат можна взяти будь-які інші координати (сферичні, циліндричні і т.д.). Лінія, яку описує рухома точка в просторі, називається траєкторією.

Рівняння (2.16), які визначають координати точки в будь-який момент часу, можуть розглядатися як параметричні рівняння траєкторії. Для переходу від параметричних рівнянь кривої лінії до рівняння, яке пов'язує координати точки, необхідно виключити параметр. Щоб отримати рівняння траєкторії, треба з (2.16) виключити час t.

Траєкторія частинки рідини дозволяє відтворити картину її руху з плином часу. Якщо ж необхідно отримати просторову картину руху набору частинок рідини в фіксований момент часу, то потрібно скористатися поняттям лінії течії.

**Лініями течії називаються лінії,** які характеризуються тим, що для даного моменту часу $t$ дотична до лінії течії в будь-якій її точці співпадає у напрямі з вектором швидкості.

Умовимося, нескінченно малий відрізок в околі даної точки простору в фіксований момент часу позначати $\delta\,\vec{r}$, а шлях, що пройшов елементарний об'єм рідини за нескінченно малий проміжок часу $dt$ - символом $d\vec{r}$.

Проекції векторів $\delta\,\vec{r}$ і $d\vec{r}$ будуть відповідно $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ і $dx, dy, dz$.

Тоді за умовою збігу напряму дотичної до лінії течії і вектора швидкості в цій же точці будемо мати таку систему диференціальних рівнянь ліній течії

$$\frac{\delta x}{V_x(t,x,y,z)} = \frac{\delta y}{V_y(t,x,y,z)} = \frac{\delta z}{V_z(t,x,y,z)}. \tag{2.17}$$

Відповідні рівняння траєкторій мають вигляд

$$\frac{dx}{V_x(t,x,y,z)} = \frac{dy}{V_y(t,x,y,z)} = \frac{dz}{V_z(t,x,y,z)} = dt. \tag{2.18}$$

В системі (2.17) час $t$ відіграє роль параметра, який зберігає незмінне значення при інтегруванні рівнянь, а в системі (2.18) час є аргументом. У випадку стаціонарного поля швидкостей, коли, $V_x$, , $V_y$, , $V_z$ не залежать від часу, системи рівняннь (2.17) і (2.18) будуть однаковими, а, отже, лінії течії і траєкторії співпадуть.

Природно, у разі нестаціонарного поля швидкостей лінії течії і траєкторії будуть представляти різні криві.

З теореми існування розв'язку для системи рівнянь (2.17) в припущенні, що складові вектора швидкості і їх перші похідні однозначні і безперервні функції координат, виходить, що через кожну точку простору проходить тільки одна лінія течії. Виняток становлять особливі точки, через які можуть пройти декілька або незліченна множина ліній течії. Це означає, що якщо швидкість відмінна від нуля, то в особливій точці ми отримаємо різні напрями руху, що неможливо. Отже, в особливій точці швидкість повинна дорівнювати нулю або нескінченності. Якщо швидкість дорівнює нулю, то особлива точка називається критичною, якщо нескінченность - типу джерела або стоку. Як приклад наведемо критичну особливу точку, яка спостерігається при протіканні рідини через вузьку воронку (рис. 2.1).

Поблизу такої особливої точки лінії течії спіралеподібно закручуються у міру наближення до неї. В атмосфері й океані роль таких гігантських воронок відіграють синоптичні вихори (циклони і антициклони).

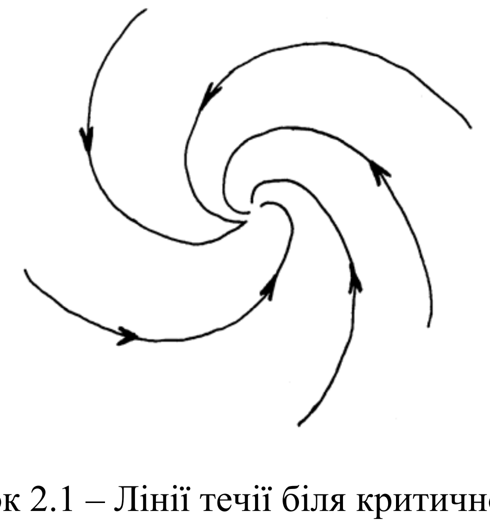

Рисунок 2.1 – Лінії течії біля критичної точки

Наведена на рис. 2.1 картина ліній течії відповідає циклонічному вихору.

## 2.3 Перша теорема Гельмгольця. Вихор вектора швидкості та кутова швидкість обертання. Потік вектора швидкості. Дивергенція вектора швидкості

**Аналіз руху рідкої частинки.** Рух рідкої частинки є складнішим, ніж рух твердого тіла, який, як відомо з механіки, може бути поступальним і обертальним. Особливістю рідини і її частинок є то, що вона легко деформується. Тому крім поступального і обертального, рідка частинка може брати участь і в деформаційному русі. Це положення і становить суть так званої першої теореми Гельмгольця, до розгляду якої ми і приступаємо. Оцінюючи значення роботи Г.Гельмгольця, основоположник вітчизняної аеродинаміки Н.Е.Жуковській писав, що «сучасна гідродинаміка своїм розвитком зобов’язана головним чином Гельмгольцю». Найважливішим достоїнством викладень і міркувань, що наводяться нижче, є те, що вони розкривають фізичне значення і вносять ясність в ряд, здавалося б, абсолютно абстрактних понять.

Розглянемо рідку частинку у формі прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.2). Довжина його ребер *dx, dy, dz*. Деформація такої рідкої частинки може бути як лінійною (ребра подовжуються і коротшають), так і кутовою (грані скошуються). Зручніше розглянути кожен з цих видів роздільно. Почнемо з кутових деформацій.

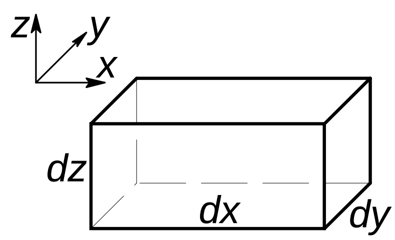


Рисунок 2.2 – Частинка у формі прямокутного паралелепіпеда

**Кутові деформації.** З рис. 2.2 виходить, що кутова деформація (скошування) може виникнути через різницю швидкостей, перпендикулярних до ребер. Для спрощення доцільно обмежитися лише однією гранню, показаною на рис. 2.3.

Хай компоненти швидкості в точці *A* рівні $v_x$, $v_y$, $v_z$. Знайдемо швидкості в точці *B*, вважаючи, що рух сталий і, отже, всі похідні по *t* рівні нулю. Приріст компоненти швидкості при переході з однієї точки простору в іншу можна представити як $v + dv$. Так для проекції $v_x$ можемо записати $v_x + dv_x$, де

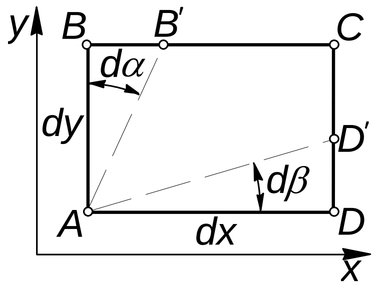


Рисунок 2.3 – Грань прямокутного паралелепіпеда

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz \tag{2.19}$$

Аналогічні вирази можна записати і для інших проекцій.

Розглянемо приріст $v_x$ при переході від точки *A* до точки *B*. В цьому випадку $dx = dz = 0$, тобто

$$v_{x_{(B)}} = v_{x_{(A)}} + dv_x = v_{x_{(A)}} + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy$$

Припустимо, що за час *dt* за рахунок різниці швидкостей в точках *A* і *B* ребро займе положення *AB'*.

Аналогічно міркуючи щодо швидкості $v_y$ в точках *A* і *D* отримаємо:

Точка *A:* $v_y$ (за умовою)

Точка *D:* $v_{y_{(D)}} = v_{y_{(A)}} + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx$

За рахунок різниці цих швидкостей точка *D* займе позицію *D'*. Таким чином

$$v_{x_{(B)}} - v_{x_{(A)}} = \frac{\partial v_x}{\partial y}dy; \qquad v_{y_{(D)}} - v_{y_{(A)}} = \frac{\partial v_y}{\partial x}dx.$$

Шлях, який проходить точка *B* за час $dt$ в положення *B'*, визначає величину скошування, яку можна знайти як

$$BB' = \frac{\partial v_x}{\partial y}dydt$$

Кутова деформація характеризується тангенсом кута $d\alpha$. При цьому

$$tg(d\alpha) = \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial v_x}{\partial y} dt \approx d\alpha$$

(маючи на увазі, що $AB = dy$).

Унаслідок малості кута $d\alpha$ можна вважати, що $tg(d\alpha) \approx d\alpha$. Аналогічно

$$tg(d\beta) = \frac{DD'}{AD} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt \approx d\beta$$

Повне скошування спочатку прямого кута *A* визначається як сума

$$d\alpha + d\beta = \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dt \tag{2.20}$$

Тут слід звернути увагу на одну вельми істотну обставину: це переміщення ребер було спричинено не тільки деформацією, але і обертанням частинки. Дійсно, якби грань тільки деформувалася без обертання, то ребра обернулися б на однаковий кут назустріч один одному. Навпаки, якби відбувалося тільки обертання, то ребра поверталися б на однаковий кут у напрямку обертання. Отже, в загальному випадку рух елемента можна розглядати як суму деформаційного і обертального рухів, і таким чином визначити $d\alpha$ і $d\beta$. Розглянемо деформацію прямого кута *A* (рис.2.4), вважаючи, що обертання відбувається проти годинникової стрілки. Чисто деформаційний рух характеризуватимемо кутами $d\gamma$, а чисто обертальний - $d\varepsilon$.

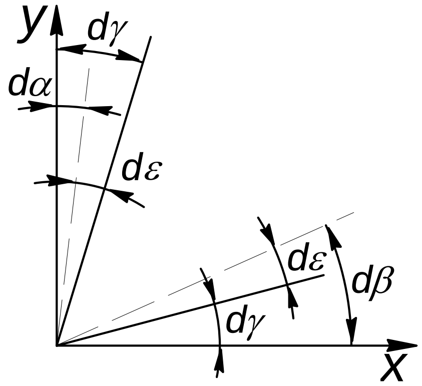


Рисунок 2.4 – Деформація прямого кута *A*

З рис. 2.4 виходить, що

$$d\alpha = d\gamma - d\varepsilon\,; \qquad d\beta = d\gamma + d\varepsilon\,,$$

або

$$d\alpha + d\beta = 2d\gamma\,,$$

звідки

$$d\gamma = \frac{1}{2}\left(d\alpha + d\beta\right). \tag{2.21}$$

Віднімаючи, отримаємо

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\left(d\beta - d\alpha\right). \tag{2.22}$$

Таким чином, деформація характеризується напівсумою кутів, а обертання - напіврізницею. Маючи на увазі (2.20), можемо записати:

$$d\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)dt\,. \tag{2.23}$$

Швидкість кутової деформації, що відбувається навколо осі $z$,

$$\gamma_z = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right). \tag{2.24}$$

І аналогічно

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right); \tag{2.25}$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right). \tag{2.26}$$

Вираз $\dfrac{d\varepsilon}{dt} = \omega$ є кутова швидкість обертання рідкої частинки.

Проекції кутових швидкостей

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \tag{2.27}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \tag{2.28}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{2.29}$$

Співвідношення (2.27-2.29) відіграють виключно важливу роль в механіці рідини. Вони встановлюють зв'язок між кутовою і поступальною швидкостями рідкої частинки. Питання про знаки чисто умовне. В гідромеханіці поворот проти годинникової стрілки вважається додатним, по годинниковій – від'ємним. У векторній формі вираз для кутової швидкості можна бути записати як

$$\vec{\omega} = \vec{i}\,\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z\,. \tag{2.30}$$

Замінюючи $\omega_x$, $\omega_y$ і $\omega_z$ їх виразами з (2.27-2.29), одержуємо:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\vec{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right]. \tag{2.31}$$

Нагадаємо, що в математичному аналізі під ротором $\vec{\Omega}$ якої-небудь векторної величини $\vec{\alpha}$, мається на увазі векторний добуток

$$\vec{\Omega} = \left[\vec{\nabla} \times \vec{a}\right], \tag{2.32}$$

де $\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$ - оператор Гамільтона, символічний вектор з проекціями $\vec{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ (($\vec{i}\,, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні орти відповідно у напрямі осей $x, y, z$).

Вираз (2.32), як і будь-який векторний добуток, можна записати через визначник

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Розкриваючи його, отримаємо вираз для $\vec{\Omega}$ в проекціях на осі координат

$$\vec{\Omega} = \vec{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \tag{2.33}$$

Ротор швидкості $\vec{v}$, згідно вище даному визначенню, повинен записатися у вигляді

$$\vec{\Omega} \equiv rot\vec{v} = \left[\vec{\nabla} \times \vec{v}\right] \tag{2.34}$$

або в проекціях на осі координат

$$rot\vec{v} = \vec{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{2.35}$$

$$rot_x\vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right),\ \ rot_y\vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),\ \ rot_z\vec{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \tag{2.36}$$

У разі плоского руху паралельно осі $Oy$ зберігається лише одна вертикальна компонента ротора

$$rot_z\vec{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right), \quad rot_x\vec{v} = rot_y\vec{v} = 0.$$

Зіставляючи вираз в квадратних дужках (2.31) з формулою (2.35), бачимо їх повну ідентичність, тому можемо записати:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\,\vec{v} \tag{2.37}$$

або

$$rot\,\vec{v} = 2\vec{\omega} \qquad (2.38)$$

**Формула (2.38) розкриває гідромеханічний сенс вихору (ротора) векторного поля. Якщо $\vec{v}$ характеризує поле миттєвих швидкостей, то векторне поле $rot\,\vec{v}$ є полем подвоєних кутових швидкостей частинок рідини цього поля.**

**Лінійні деформації.** Очевидно, що лінійні деформації частинки (рис.2.5) можуть виникнути в результаті відмінності в швидкостях, співпадаючих з напрямом ребер. Як і раніше, компоненти швидкості в точці *A* - $v_x$, $v_y$, $v_z$.

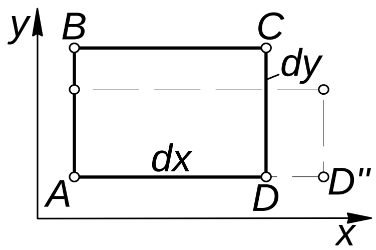


Рисунок 2.5 – Лінійні деформації частинки

Уздовж осі *x*: точка *A*: $v_{x_{(A)}}$, точка *D*: $v_{x_{(D)}} = v_{x_{(A)}} + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx$

Різниця швидкостей, що спричиняє подовження ребра *AD:* $\frac{\partial v_x}{\partial x}dx$.

Подовження частинки $DD''$ за час $dt$

$$DD'' = \frac{\partial v_x}{\partial x}dxdt \qquad (2.39)$$

Відносне подовження

$$\frac{DD''}{AD} = \frac{\partial v_x}{\partial x}dt = d\varepsilon_x \qquad (2.40)$$

Швидкість відносного подовження

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \varepsilon_x \qquad (2.41)$$

Аналогічно для інших осей $\varepsilon_y = \dfrac{\partial v_y}{\partial y}$; $\varepsilon_z = \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$.

Якщо процес відбувається одночасно уздовж всіх осей, то це приводить до об’ємного розширення або стиснення частинки. Таким чином, об’ємна деформація зводиться до зміни первинного об’єму паралелепіпеда $dV = dxdydz$ на величину $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$ за рахунок розтягування або стиснення ребер. При цьому $\delta V_x = DD''dydz$, і з урахуванням (2.39) $\delta V_x = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} dV dt$. Аналогічно $\delta V_y = \dfrac{\partial v_y}{\partial y} dV dt$ і $\delta V_z = \dfrac{\partial v_z}{\partial z} dV dt$. Таким чином $\delta V = \left( \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV dt$.

Швидкістю відносної об’ємної деформації назвемо відношення змінення об’єму до його первинного об’єму і швидкості деформації, тобто

$$\frac{\delta V}{dV dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = div\,\vec{v}.$$

**Якщо $div\,\vec{v} = 0$, то це означає, що $\delta V = 0$, тобто деформація рідкої частинки відбувається без зміни її об’єму. В цьому і полягає гідромеханічний сенс рівності нулю дивергенції.**

Отриманий вище зв’язок між поступальною і обертальною швидкостями рідкої частинки можна визначити і більш коротким шляхом, що представляє певний інтерес.

Хай рідка частинка обертається навколо осі $z$ з кутовою швидкістю $\omega_z$ (рис.2.6). На основі виразу для ротора в проекціях на осі координат (2.31), маємо:

$$rot_x \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}; \quad rot_y \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad rot_z \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

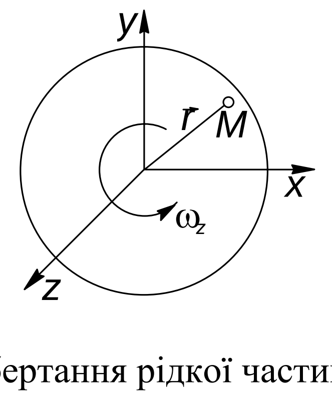


Рисунок 2.6 – Обертання рідкої частинки навколо осі $z$

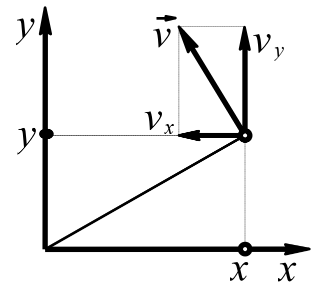


Рисунок 2.7 – Проекції швидкості на осі координат $x, y, z$

Розглянемо точку *M* на рідкій частинці (рис. 2.6, 2.7).

Лінійна швидкість цієї частинки $\vec{v} = \vec{\omega}_z \times \vec{r}$. Запишемо вирази для проекцій швидкості на осі координат: $v_x = -\omega_z y$; $v_y = \omega_z x$; $v_z = 0$.

Звідки знаходимо $\dfrac{\partial v_y}{\partial x} = \omega_z$; $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega_z$.

Таким чином $rot_z \vec{v} = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z$.

Аналогічно для двох інших компонент $rot_x \vec{v} = 2\omega_x$; $rot_y \vec{v} = 2\omega_y$.

Або у векторній $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2} rot\, \vec{v}$, що повністю співпадає з (2.37).

Рух, при якому $rot\, \vec{v} \neq 0$ називають вихровим, при $rot\, \vec{v} = 0$ - безвихоровим або потенційним. З чого виходить, що якщо течія вихрова, то рух рідких частинок відбувається з обертанням.

**На закінчення сформулюємо першу теорему Гельмгольця. Будь-який рух елементарного об'єму рідини можна в даний момент часу розглядати як результат складання двох рухів: а) квазітвердого, що складається з поступального разом з вибраним полюсом і обертального навколо полюса, і б) деформаційного.**

## 2.4 Функція та потенціал течії. Соленоїдальний та потенціальний рухи

Умовою *потенційності руху є рівність нулю вихору швидкості, тобто* $rot\, \vec{v} = 0$. Фізично це означає, що рух рідини відбувається без обертання частинок. Як буде показано, потенційний рух відіграє виключно важливу роль в механіці рідини.

***Потенціал швидкості. Сутність теореми Стокса (буде розглянута нижче), по суті, зводиться до твердження про рівність числових значень інтенсивності вихору і циркуляції, тобто*** $i = \Gamma$***, або***

$$i = \iint_A rot\,\vec{v} \cdot \vec{n} dA = \Gamma .$$

З іншого боку, для потенційного потоку за його визначенням $rot\,\vec{v} = 0$, тобто в потенційному полі циркуляція по замкнутому контуру дорівнює нулю.

Запишемо вирази для проекцій кутових швидкостей.

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right); \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right); \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

З сказаного вище витікає, що для безвихорового (потенційного) руху $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Отже, в цьому випадку

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{2.42}$$

Ці співвідношення дозволяють істотним чином спростити обчислення компонент швидкості $v_x$, $v_y$ і $v_z$.

Розглянемо вираз

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz . \tag{2.42 a}$$

Він був побудований аналогічно відомому з механіки твердого тіла виразу для елементарної роботи. Задамося питанням, в якому випадку (2.42 а) є повним диференціалом. Нагадаємо, що якщо вираз для роботи є повним диференціалом, то сили називаються консервативними або мають потенціал. Відповідь на поставлене питання дав Алесисом Клодом Клеро.

Клеро показав, що вираз типу (а) є повним диференціалом, якщо забезпечується рівність навхрест узятих похідних. Співвідношення (2.42) якраз і задовольняють цю вимогу, тобто узяті навхрест похідні в (а) дають співвідношення (2.42). Таким чином, при потенційному русі вираз (а) є повним диференціалом якоїсь функції $\varphi$, і

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy + v_z dz \tag{2.43}$$

З іншого боку, за загальним правилом повний диференціал можна представити як

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz \qquad (2.44)$$

Зіставляючи (2.43) і (2.44), одержуємо

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad (2.45)$$

За пропозицією Гельмгольця функцію $\varphi$ називають потенціалом швидкості.

Таким чином, всякому руху рідини, що відбувається без обертання частинок, відповідає свій потенціал швидкості. Справедливо і зворотне твердження: якщо існує потенціал швидкості, то рух відбувається без обертання частинок.

Співвідношення (2.45) можна отримати і іншим шляхом. Оскільки різні підходи до одного і того ж питання сприяють поглибленому його розумінню, то визначемо ці ж співвідношення, використовуючи іншу методику.

Як вже наголошувалося, умовою потенційності є $rot\,\vec{v} = 0$. З іншого боку, як показано при розгляді операцій другого порядку, операція ротора над градієнтом деякої скалярної функції тотожно дорівнює нулю, тобто $rot\,grad\,\varphi = 0$.

Зіставляючи ці співвідношення, можемо записати

$$\vec{v} = grad\,\varphi \qquad (2.46)$$

Це означає, що вектор швидкості можна розглядати як градієнт якоїсь скалярної функції $\varphi$. Розкриємо значення $\vec{v}$ і $grad\,\varphi$. Маємо $\vec{v} = \vec{i}\,v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$; $grad\,\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Звідки, враховуючи (2.46), одержуємо $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, тобто знов приходимо до співвідношень (2.45).

Поки що залишається відкритим питання про необхідність і доцільність введення поняття про потенціал швидкості. Щоб розібратися в цьому, слід мати на увазі, що до числа центральних задач гідромеханіки відноситься визначення сил, діючих на тіла, які обтікаються потоками рідини або газу. Рішення цих задач безпосередньо було пов’язано з необхідністю розрахунку поля швидкостей, тобто з визначенням проекцій швидкостей ($v_x$, $v_y$, $v_z$) в кожній його точці. З виразів (2.45) безпосередньо витікає, що все три компоненти швидкості можна визначити, якщо відома лише одна величина - потенціал швидкості. Таким чином, знання потенціалу швидкості істотно спрощує розрахунок поля. Проте негайно виникає наступна проблема - як же знайти потенціал швидкості течії. Щоб вирішити її, необхідно перш за все з'ясувати деякі властивості потенціалу.

***Рівняння Лапласа.*** *Операція дивергенції над градієнтом скалярної функції приводить до оператора Лапласа. Якщо як скалярну функцію використовувати потенціал швидкості, то можна записати*

$$div\; grad\; \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \qquad (2.47)$$

Для нестисливої рідини $div\, \vec{v} = 0$, а $grad\, \varphi = \vec{v}$ (2.46). Таким чином

$$divgrad\, \varphi = 0 \qquad (2.48)$$

або

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (2.49)$$

Вирази (2.48) і (2.49) носять назву рівняння Лапласа. Таким чином, для знаходження потенціалу швидкості необхідно проінтегрувати рівняння Лапласа. Будь-яка функція, що задовольняє це рівняння, носить назву гармонійної. Отже, потенціал швидкості є гармонійною функцією. Як будь-яке диференціальне рівняння, рівняння Лапласа має безліч розв'язків, тому для того, щоб однозначно визначити потенціал швидкості, необхідно задати граничні умови. Для задач, пов'язаних з обтіканням тіл, так званих зовнішніх задач гідромеханіки, такими умовами є $v_n = 0$ і $v = v_\infty$.

Перша умова характеризує безвідривність течії (рівність нулю нормальної компоненти швидкості). Друга - показує, що вдалині від тіла розподіл швидкостей відомий.

Поверхні (або лінії для двовимірних потоків), в кожній точці яких $\varphi = const$, називаються еквіпотенціальними.

***Функція течії плоского потоку.*** *В практичних задачах гідромеханіки двовимірних потоків широке застосування знаходить поняття про функцію течії. Розглянемо двовимірний потік і обмежимося* *нестисливою рідиною.*

Як було показано, диференціальне рівняння лінії течії має вигляд

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

або

$$v_x dy - v_y dx = 0. \tag{2.50}$$

Запишемо рівняння нерозривності для цього випадку, яке матиме вигляд

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{2.51}$$

Аналогічно тому, як це робилося при розгляді потенціалу швидкості, поставимо питання про умови, необхідні і достатні для того, щоб вираз (2.50) був повним диференціалом деякої скалярної функції. Застосуємо до (2.50) умови Клеро (рівність узятих навхрест похідних). Маємо $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$ і $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$.

Але це є не що інше, як рівняння нерозривності (2.51) для плоского потоку, яке задовольняється завжди, якщо тільки рух існує. Отже, можна записати:

$$d\psi = v_x dy - v_y dx, \tag{2.52}$$

де $\psi$ **носить назву функції течії**. З іншого боку, оскільки, як показано вище, $d\psi$ є повним диференціалом, то можна записати:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \tag{2.53}$$

Зіставляючи (2.52) і (2.53), одержуємо

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.54}$$

З чого виходить, що якщо функція течії потоку відома, то можна визначити компоненти швидкості в будь-якій точці простору. Зіставляючи (2.50) і (2.51), приходимо до висновку, що якщо частинка рухається уздовж лінії течії, то функція течії залишається постійною (при $\psi = const$, $d\psi = 0$ і (2.52) перетворюється в (2.50)). Перевіримо тепер, чи є функція течії гармонійною функцією, тобто чи задовольняє вона рівнянню Лапласа.

Для плоскої потенційної течії $\omega_z = 0$, але $\omega_z = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0$, звідки $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$. З (2.54) $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ і $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, отже $\frac{\partial}{\partial x}\left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y}\left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$, звідки $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$.

Таким чином, функція течії, як і потенціал швидкості, є гармонійною функцією. І ще одна важлива обставина. Якщо потенціал швидкості існує тільки в потенційному потоці, то функція течії цією умовою не була обмежена. Це пояснюється тим, що рівняння нерозривності, яке використовується для визначення цього поняття, справедливо як для вихрового, так і для безвихорового рухів.

***Гідромеханічний сенс функції течії.*** *Встановимо гідромеханічне значення функції* ***течії****, для чого проведемо дві достатньо близько розташовані лінії* ***течії*** *(рис. 2.8). Обчислимо об'ємну витрату рідини, що протікає між ними, для чого розкладемо вектор швидкості частинки* $\vec{v}$ *на дві складові* $v_x$ *і* $v_y$*, що дозволить представити витрату як суму* $dQ = dQ_x + dQ_y$*, при цьому* $dQ_x = v_x dy$ *і* $dQ_y = -v_y dx$ ,

$$dQ = v_x dy - v_y dx;$$

$$Q = \int_A^B \left( v_x dy - v_y dx \right) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A, \tag{2.55}$$

тобто різниця значень функцій течії на двох суміжних лініях течії дорівнює об'ємній витраті між ними.

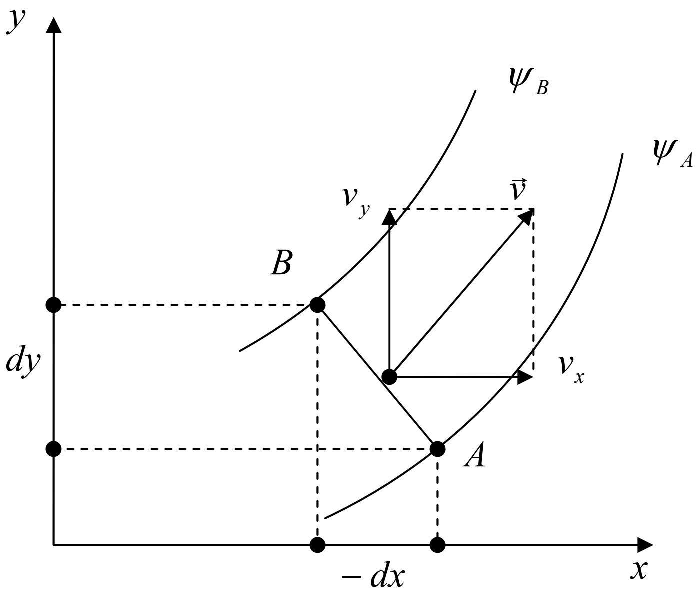


Рисунок 2.8 – Гідромеханічний сенс функції течії

***Зв'язок потенціалу швидкості і функції течії.*** *Зв'язок між цими параметрами можна легко встановити, якщо записати отримані вище вирази для проекцій швидкостей*

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x};\ \ v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y};\ \ v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y};\ \ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

Звідки

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y};\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.56}$$

Ці співвідношення відіграють надзвичайно важливу роль в механіці рідини і носять назву співвідношень Коші-Рімана. Більш детально вони будуть розглянуті нижче. Поки ж обмежимося тим, що перемножимо їх. Це дає

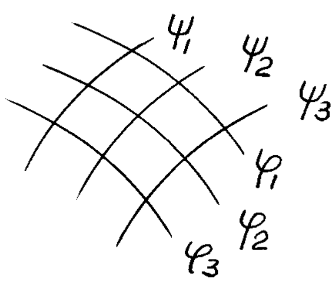


Рисунок 2.9 – Зв'язок потенціалу швидкості і функції течії

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (2.57)$$

З математики відомо, що вирази типу (2.57) свідчать про взаємну ортогональність кривих. Отже, лінії течії і еквіпотенціальні лінії утворюють сітку взаємно ортогональних кривих, яка носить назву гідродинамічної сітки руху. Зразковий її вигляд був показаний на рис. 2.9.

## 2.5 Циркуляція швидкості. Теорема Стокса. Друга теорема Гельмгольця

### 2.5.1 Циркуляція швидкості

Для введення поняття про циркуляцію швидкості використовуємо методику М.Я.Фабриканта. Безперечною перевагою її є те, що на відміну від інших вона дозволяє ввести поняття циркуляції не чисто математично, а виходячи з достатньо простих і ясних фізичних передумов.

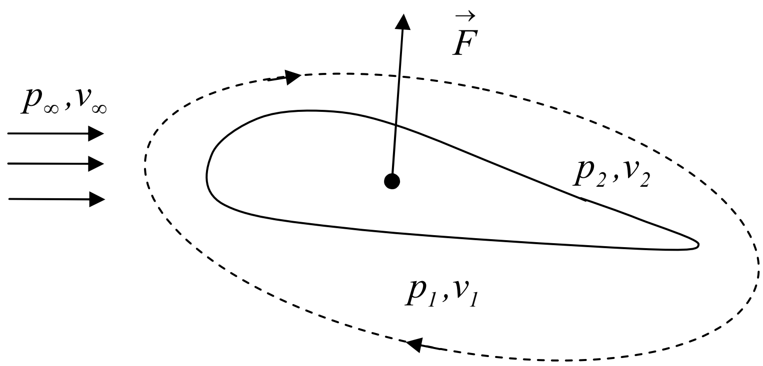


Рисунок 2.10 – Профіль крила в потоці газу (повітря)

Розглянемо профіль крила, що знаходиться в потоці газу (повітря). Як відомо, на профіль в цьому випадку діятиме піднімальна сила (рис. 2.10). Фізично наявність цієї сили можна пояснити лише тим, що тиск під профілем (( $p_1$) більше, а тиск над профілем (( $p_2$) менше ніж тиск на якомусь віддаленні від нього, який ми позначимо $p_\infty$. Це дозволяє стверджувати, що під профілем крила швидкість $v_1 < v_\infty$, а над ним $v_2 > v_\infty$. В даному випадку $v_\infty$ - швидкість необуреного потоку.

Віднімемо тепер зі швидкостей $v_1$ і $v_2$ швидкість $v_\infty$, тобто $v_1 - v_\infty$ і $v_2 - v_\infty$. Ця дія приводить нас до поняття потоку збурення, тобто руху, який виникає в середовищі через те, що в нього було внесено чужорідне тіло, тобто, по суті, це реакція потоку, зумовлена в даному випадку тим, що в ній з’явився профіль крила. Встановимо тепер напрямок потоків збурення. Під профілем $v_1 < v_\infty$, і він направлений проти швидкості $v_\infty$, над профілем - навпаки. В результаті виникає циркуляційний потік, направлений за годинниковою стрілкою, як це було показано на рис. 2.10. Тепер необхідно охарактеризувати цей потік кількісно. Саме з цією метою вводиться поняття циркуляції швидкості по замкнутому контуру.

Розглянемо замкнутий контур $C$, показаний на рис. 2.11. Хай в довільній точці $M$ швидкість дорівнює $\vec{v}$. Складемо скалярний добуток $\vec{v} \cdot d\vec{l}$, де $d\vec{l}$ - направлений елемент дуги.

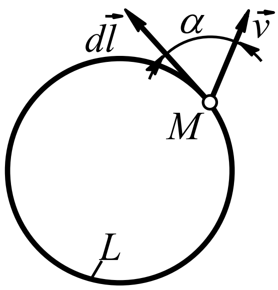


Рисунок 2.11 – Замкнутий контур $C$

Циркуляцією швидкості називають контурний інтеграл вигляду

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \,. \tag{2.58}$$

Звернемо увагу на структуру цього співвідношення. Воно побудовано аналогічно виразу для роботи, тому іноді говорять, що циркуляція - це своєрідна «робота» вектора швидкості. Маючи на увазі, що $\vec{v}\left(v_{x,} v_{y,} v_z\right)$ і $d\vec{l}\left(dx, dy, dz\right)$, за правилом скалярного добутку отримаємо

$$\Gamma = \oint \left(v_x dx + v_y dy + v_z dz\right). \tag{2.59}$$

Для плоскої течії:

$$\Gamma = \oint \left(v_x dx + v_y dy\right). \tag{2.60}$$

В кінці попереднього розділу стверджувалося, що поняття циркуляції є більш зручним, ніж інтенсивність вихору. Дійсно, з (2.60) витікає, що для визначення циркуляції достатньо знати проекції швидкості, знаходження яких не пов’язано з істотними труднощами. Проте залишається поки відкритим питання про те, чи існує зв’язок між циркуляцією і інтенсивністю вихору. Відповідь на нього дає теорема Стокса.

### 2.5.2 Теорема Стокса

В рідині, що рухається, розглядаємо вихрове поле і виділяємо в ньому малий замкнутий контур із сторонами $dx$ і $dy$ (рис. 2.12). Хай на початку координат швидкості будуть $v_x$ і $v_y$. Запишемо вираз для елементарної циркуляції по цьому контуру, маючи на увазі, що потік двовимірний: $d\Gamma = v_x dx + v_y dy$.

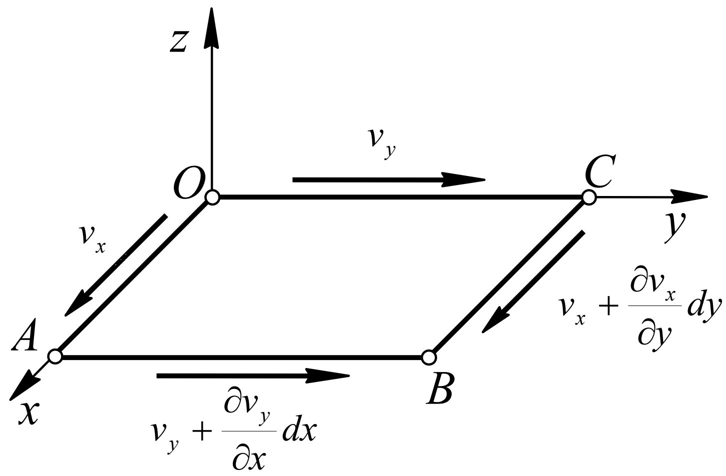


Рисунок 2.12 – Вихрове поле з малим замкнутим контуром $OABC$

Розглянемо контур $OABC$. Якщо уздовж $OA$ швидкість $v_x$, то уздовж $CB$ її приріст складе $\frac{\partial v_x}{\partial y} dy$, і аналогічно уздовж $AB$ - $\frac{\partial v_y}{\partial x} dx$. Це витікає з виразу для повного диференціала швидкості, наприклад, $dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy$.

Запишемо тепер вираз для елементарної циркуляції уздовж контура $OABCO$. Маємо:

$$d\Gamma = v_x dx + \left( v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \right) dy - \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \right) dx - v_y dy .$$

Розкриваючи дужки і виконавши скорочення, одержуємо

$$d\Gamma = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dxdy = 2\omega_z dA .$$

З чого виходить, що циркуляція по нескінченно малому замкнутому контуру дорівнює інтенсивності вихору, який пронизує цей контур.

Цей висновок легко узагальнити і на випадок довільної кривої кінцевих розмірів.

Таким чином, можемо записати:

$$\Gamma = 2\iint_A \omega_n dA = i . \tag{2.61}$$

Це і є формула Стокса, яка показує, що циркуляція по довільному контуру дорівнює сумі інтенсивностей (напружень) вихорів, які пронизують поверхню, натягнуту на контур.

Можна дещо по-іншому інтерпретувати теорему Стокса.

Циркуляція швидкості по замкнутому контуру, який розташований на поверхні вихрової трубки і який один раз її оточує, дорівнює подвоєній інтенсивності вихрової трубки.

Дійсно, на основі теореми Остроградського-Стокса

$$\oint_l (\vec{v} d\vec{l}\,) = \int_A rot\, \vec{v} dA = 2\int_A \vec{\omega} dA = 2i .$$

Теорему Стокса можна узагальнити і сформулювати в такому вигляді:

***Циркуляція швидкості по замкнутому контуру дорівнює подвоєній сумі інтенсивностей вихрових трубок за умови, що контур охоплює трубки 1 раз*** $\Gamma_l = \oint_l (\vec{v} d\vec{l}\,) = 2\sum_{k=1}^{n} i_k$ (для $n$ трубок).

### 2.5.3 Друга теорема Гельмгольця

Відомо, що обертальний рух рідких частинок характеризується вихором швидкості

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\, \vec{v} . \tag{2.62}$$

Це означає, що в кожній точці простору обертання рідких частинок можна охарактеризувати цим вектором. Його модуль

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}\ . \tag{2.63}$$

Рух, при якому величина вихору швидкості не дорівнює нулю, тобто $rot\vec{v} \neq 0$, називають вихровим. При умові $rot\,\vec{v} = 0$ – рух безвихоровий або потенційний.

***Кінематика вихрового руху.*** *Кінематичні поняття для вихрового руху можна визначити за аналогією із загальними поняттями кінематики. В основу кінематики вихрового руху покладено уявлення про вихрову лінію, яке аналогічно поняттю лінії течії. Вихровою називається лінія, в кожній точці якої в даний момент часу вектор вихору швидкості співпадає з дотичною (рис. 2.13).*

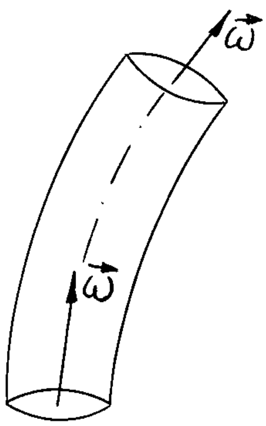


Рисунок 2.13 – Вихорова трубка та вихорова лінія

*Іншими словами, вихрова лінія - це миттєва вісь обертання частинок рідини, які в даний момент часу розташовані на ній. За аналогією з диференціальним рівнянням лінії течії можна записати*

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}\,. \tag{2.64}$$

Вихрова трубка - аналог трубки (поверхні) течії. Це поверхня, утворена вихровими лініями, проведеними через всі точки нескінченно малого замкнутого контура. Вихрова нитка - аналог струминки - це рідина, укладена у вихровій трубці. Якщо вихрова трубка має кінцеві розміри, то частинки, що заповнюють її і знаходяться в обертальному русі, утворюють вихровий шнур.

***Інтенсивність вихору.*** *Поняття інтенсивності вихору достатньо абстрактно і вводиться чисто математично.*

Нагадаємо, що потоком векторного поля називають інтеграл вигляду

$$\iint\limits_A \vec{v} \cdot \vec{n} dA . \tag{2.65}$$

Оскільки вихор швидкості (ротор) є вектор, то замість $\vec{v}$ можна підставити $rot\,\vec{v}$, що і приводить нас до поняття інтенсивності вихору, тобто інтенсивність вихору - це потік вектора вихору

$$i = \iint\limits_A rot\,\vec{v} \cdot \vec{n} dA . \tag{2.66}$$

Можна використовувати і іншу форму запису: $rot\,\vec{v} \cdot \vec{n} = rot_n\,\vec{v}$;

$$i = \iint\limits_A rot_n \vec{v} dA . \tag{2.67}$$

Маючи на увазі, що $rot\,\vec{v} = 2\vec{\omega}$, можемо записати

$$i = 2\iint\limits_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = 2\iint\limits_A \omega_n dA . \tag{2.68}$$

Скористаємося формулою Гаусса-Остроградського і перейдемо від інтеграла по поверхні до інтеграла за об'ємом. Маємо:

$$i = 2\iint\limits_A \omega_n dA = 2\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{\omega} dV = 2\iiint\limits_V \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) dV .$$

Розкриємо вираз, що стоїть під знаком інтеграла, маючи на увазі, що проекції вектора вихору мають вигляд:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Маємо $\frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} \right) = 0$.

Отже, можна записати

$$\iint_A \omega_n dA = 0 \tag{2.69}$$

Віддзначимо, що цей вираз за структурою нагадує рівняння нерозривності.

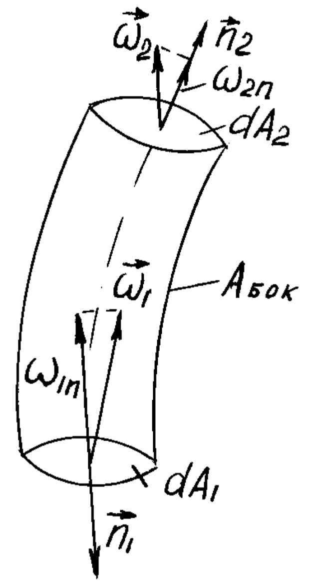


Рисунок 2.14 – Вихоровий шнур

Застосуємо (2.69) до вихрового шнура (рис. 2.14). На бічній поверхні $\omega_n \equiv 0$, оскільки $\vec{\omega}$ направлений по дотичній до поверхні. Тому можемо записати $-\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 + \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2 = 0$; $\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 = \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2$.

Якщо допустити, що в межах перерізу $\omega_n = const$, то

$$\omega_{n1} A_1 = \omega_{n2} A_2 \tag{2.70}$$

Або в загальному випадку

$$\omega A = const, \tag{2.71}$$

тобто **це своєрідне «рівняння нерозривності». Отриманий результат носить назву теореми Гельмгольця про вихори, яку можна сформулювати таким чином: інтенсивність вихрового шнура на всій його протяжності залишається постійною, або ж потік вектора кутової швидкості через довільний поперечний переріз вихрової трубки однаковий в даний момент часу. З виразу (2.71) виходить і інший вельми важливий висновок, зроблений Г.Гельмгольцем** в 1855 р. в роботі «Про інтеграли рівнянь, відповідних вихровим рухам». Оскільки добуток $\omega A$ залишається незмінним, то зменшення площі перерізу шнура повинне приводити до збільшення кутової швидкості обертання частинок. При $A = 0$ $\omega = \infty$, що фізично неможливо. Отже, вихор не може зароджуватися або закінчуватися в товщі рідини. Остаточно розвинувшись, він повинен замкнутися або на тверду поверхню, або сам на себе, тобто утворити вихрове кільце.

Поняття про інтенсивність є важливим, але, на жаль, безпосереднє визначення цієї величини експериментальним шляхом було пов'язано з непереборними труднощами. Крім того, якщо намагатися розповсюдити це поняття на вихори кінцевих розмірів, то за аналогією з середньою швидкістю довелося б вводити поняття про середню кутову швидкість, що пов'язано з певними труднощами чисто математичного характеру. Тому гідромеханіка вибрала інший шлях, замінивши це поняття іншим, більш зручним для цілей практики - поняттям, званим циркуляцією швидкості.

# 3 ДИНАМИКА

## 3.1 Фундаментальні закони зберігання. Інерціальні та неінерціальні системи відліку. Вектор прискорення в обертовій та необертовій системах відліку. Фізичні та фіктивні сили

### 3.1.1 Абсолютний і відносний рухи

Переміщення тіл або мас в просторі фіксується за допомогою певної системи координат. Вони підрозділяються на інерціальні і неінерціальні. Перші були пов'язані з квазінерухомими зірками. Інакше кажучи, **інерціальною системою відліку називають ті системи, по відношенню до яких виконується закон інерції. Геліоцентрична система відліку (**початок координат якої співпадає з центром інерції сонячної системи, а осі були проведені у напрямі віддалених зірок.**) є з великим ступенем точності інерціальною системою відліку. З іншого боку, всяка система, що рухається прискорено щодо інерціальної системи, є неінерціальною**. Система відліку, яка пов'язана жорстко із Землею (геоцентрична система) неінерціальна, головним чином унаслідок добового обертання Землі.

Звідси витікає, що відмінності в закономірностях руху в інерціальних і неінерціальних системах відліку полягають в тому, що тільки в інерціальних системах відліку виконуються закони Ньютона.

Нагадаємо, що абсолютним рухом точки називається її рух по відношенню до якої-небудь інерціальної системи відліку, яка умовно береться за нерухому і називається абсолютною системою відліку. Відносним рухом точки називається її рух по відношенню до рухомої системи відліку, яку називають відносною системою відліку. Переносним рухом називається абсолютний рух тієї точки рухомої системи, через яку точка, що рухається, проходить в даний момент часу.

На Землі атмосфера обертається разом з планетою. Будь-яка повітряна частинка, з одного боку, обертається разом із Землею, а, з іншого, рухається щодо поверхні обертової Землі. Швидкість, яка утворюється твердотільним обертанням Землі, залежить від широти місця і становить декілька сотень м/с, а  швидкості, які спостерігаються в атмосфері, - десятки м/с. Звідси видно, що швидкості рухів в атмосфері є вельми малими величинами в порівнянні з швидкістю твердотільного обертання Землі. Оскільки нас цікавлять тільки рухи атмосфери щодо Землі, то для опису таких рухів корисно перейти до обертової системи координат. Введення такої системи дозволить виключити з розгляду твердотільне обертання і розглядати тільки малі відхилення від нього, звані далі вітрами. Проте, опис рухів відносно обертової системи відліку, не можна одержати за допомогою методів, що використовуються в інерціальної системі відліку. Отже, необхідно отримати новий вираз для прискорення, який включав би додаткові прискорення, зумовлені прискоренням неінерціальної системи відліку відносно інерціальної. При перенесенні цих додаткових прискорень в праву частину вони можуть розглядатися як додаткові сили або сили інерції. Ці сили, очевидно, відрізняються від звичайних сил, оскільки вони зумовлені не дією яких-небудь тіл на дане тіло (частинку), а наявністю прискорення неінерціальної системи відліку щодо інерціальної, в даному випадку геліоцентричної. Тоді з урахуванням всіх сил другий закон Ньютона виконуватиметься і щодо неінерціальної системи відліку.

Нагадаємо, що центром інерції або центром мас системи матеріальних точок називається точка $C$, радіус-вектор $\vec{r}_з$ якої пов'язаний з масами $m_i$ і радіус-векторами $\vec{r}_i$ всіх $n$ точок системи співвідношенням

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} . \tag{3.1}$$

Будь-яка система відліку, що покоїться або рухається рівномірно і прямолінійно щодо якої-небудь інерціальної системи, сама є інерціальної. Навпаки, всяка система, яка рухається прискорено по відношенню до інерціальної системи, є неінерціальною.

Система відліку, яка жорстко пов'язана із Землею (геоцентрична система відліку), є неінерціальною, головним чином внаслідок добового обертання Землі.

Природно, що прискорення частинки в інерціальній і неінерціальній системах відліку відрізнятимуться. Наприклад, для спостерігача в обертовій системі відліку предмети, які є нерухомими в інерціальній системі, здаватимуться обертовими і через кривизну їх видимих траєкторій, що прискорюються.

Для практичних застосувань представляють інтерес кінематичні характеристики природних течій, зокрема, вектори швидкості і прискорення відносно обертової Землі, що обертається . У зв'язку з цим виникає необхідність переходу до неінерціальної геоцентричної системи відліку.

### 3.1.2 Вектор прискорення в обертовій та необертовій системах відліку. Фізичні та фіктивні сили

Розглянемо довільний вектор $\vec{A}$ в двох декартових системах координат. Хай система координат $XYZ$ – нерухома, а система $X'Y'Z'$ – обертається разом із Землею навколо осі $Z$. Визначимо повну похідну від вектора $\vec{A}$. В курсі фізики було показано, що повна похідна від будь-якого змінного вектора $\vec{A}$ в нерухомій системі координат виражається через похідну від цього вектора системи координат, що відносно обертається, і векторний добуток кутової швидкості обертання системи координат на цей вектор:

$$(d\vec{A}/dt)_a=(d\vec{A}/dt)_r+[\vec{\omega}\vec{A}]\ . \tag{3.2}$$

Розглянемо тепер радіус-вектор $\vec{R}$ якої-небудь рухомої точки, що рухається $M$ в рухомій і нерухомій системах координат (рис. 3.1)

$$(\vec{R}=\begin{Bmatrix}\vec{i}\cdot x+\vec{j}\cdot y+\vec{k}\cdot z\\ \vec{i}'\cdot x'+\vec{j}'\cdot y'+\vec{k}'\cdot z'\end{Bmatrix})$$

Підставимо його в отриману повну похідну замість вектора $\vec{A}$.

Тоді матимемо

$$(d\vec{R}/dt)_a=(d\vec{R}/dt)_r+[\vec{\omega}\vec{R}]\ .$$

Але, враховуючи, що $\vec{v}_a=(d\vec{R}/dt)_a$ - абсолютна швидкість точки $M$, а $\vec{v}_r=(d\vec{R}/dt)_r$ - відносна, можна отримати

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+[\vec{\omega}\vec{R}]\ . \tag{3.3}$$

Якщо тепер замінити вектор $\vec{A}$ в (3.2) на вектор швидкості абсолютного руху, то чисто формально матимемо $(d\vec{v}_a/dt)_a=(d\vec{v}_a/dt)_r+[\vec{\omega}\vec{v}_a]$, а далі, якщо підставити замість абсолютної швидкості її вираз (3.2), то отримаємо

$$(d\vec{v}_a/dt)_a=\{d(\vec{v}_r+[\vec{\omega}\vec{R}])/dt\}_r+[\vec{\omega},(\vec{v}_r+[\vec{\omega}\vec{R}])]\ ,$$

де

$$\{d(\vec{v}_r+[\vec{\omega}\vec{R}])/dt\}_r=\{d\vec{v}_r/dt+d[\vec{\omega}\vec{R}]/dt\}_r=$$
$$=(d\vec{v}_r/dt)_r+[\vec{\omega}d\vec{R}/dt]+[\vec{R}d\vec{\omega}/dt]=(d\vec{v}_r/dt)_r+[\vec{\omega}\vec{v}_r],$$

$$[\vec{\omega},(\vec{v}_r+[\vec{\omega}\vec{R}])]=[\vec{\omega}\vec{v}_r]+[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{R}]],$$

$$d\vec{v}_a/dt=(d\vec{v}_r/dt)_r+[\vec{\omega}\vec{v}_r]+$$

$$+[\vec{\omega}\vec{v}_r]+[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{R}]]=(d\vec{v}_r/dt)_r+2[\vec{\omega}\vec{v}_r]+[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{R}]].$$

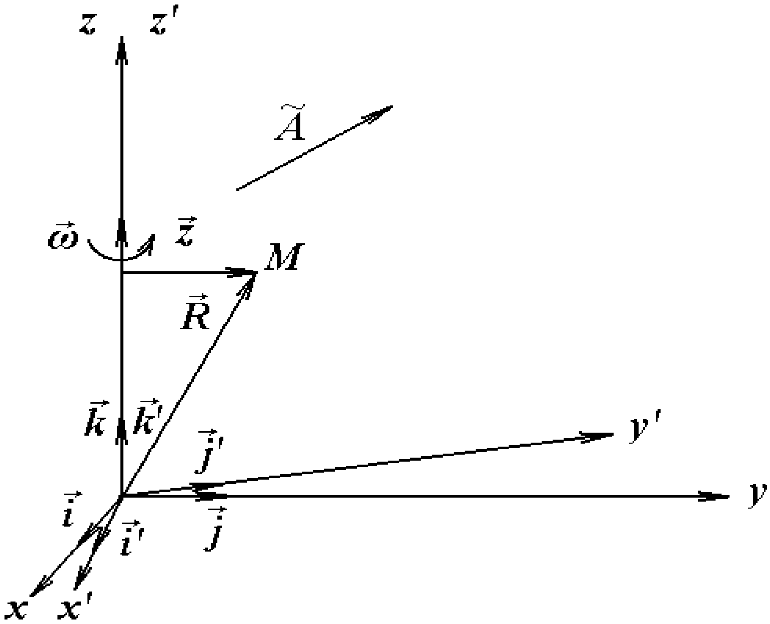


Рисунок 3.1 – Швидкість зміни довільного вектора в інерціальній і неінерціальній системах координат

Враховуючи вираз для подвійного векторного добутку $[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{R}]]=\omega[\vec{R}\vec{\omega}]-\vec{R}(\vec{\omega}\vec{\omega})=-\omega^2\vec{r}$, де $\vec{r}$ - радіус обертання точки М навколо осі z, остаточно маємо:

$$d\vec{v}_a/dt=(d\vec{v}_r/dt)_r+2[\vec{\omega}\vec{v}_r]-\omega^2\vec{r}. \qquad (3.4)$$

Розглянемо вектор прискорення у формі, яка найчастише використовується у геофізичної гідродинамиці.

Нехай $\vec{r}$ -радіс-вектор довільної рідкої частинки.

Згідно з формулою (3.2) маємо

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R + \vec{\varpi}\times\vec{r}\ ,$$

так що швидкість, яка спостерігається в необертовій системі відліку $\vec{V}_I = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_I$, дорівнює сумі швидкості $\vec{V}_R = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R$ відносно обертової системи і додаткової лінійної швидкісті $\vec{\omega}\times\vec{r}$, яка надається рідкій частинці при її обертанні разом з системою відліку.

Це можна записати таким чином:

$$\vec{V}_I = \vec{V}_R + \vec{\varpi}\times\vec{r}\ , \tag{3.5}$$

де $\vec{V}_R$ - відносна швидкість руху.

Застосовуючи (3.2) до $\vec{V}_I$, одержимо

$$\left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_R + \vec{\omega}\times\vec{V}_I\ . \tag{3.6}$$

Наша мета, однак, полягає в тому, щоб описати рух, використовуючи лише величини, що спостерігаються у обертовій системі відліку. Пам'ятаючи про це, перепишемо (3.6), виключивши з нього $\vec{V}_I$ за допомогою (3.5).

Тоді отримаємо

$$\left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I = \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt}\right)_R + \frac{d\vec{\varpi}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\varpi}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R + \vec{\varpi}\times\left(\vec{V}_R + \vec{\varpi}\times\vec{r}\right) =$$
$$= \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt}\right)_R + 2\vec{\varpi}\times\vec{V}_R + \vec{\varpi}\times\left(\vec{\varpi}\times\vec{r}\right) + \frac{d\vec{\varpi}}{dt}\times\vec{r}\ . \tag{3.7}$$

Різниця між прискореннями, що спостерігаються в необертовій і обертовій системах відліку, дорівнює сумі трьох членів в правій частині виразу (3.7):

$$\left(\frac{d\vec{V}_I}{dt}\right)_I - \left(\frac{d\vec{V}_R}{dt}\right)_R = 2\vec{\varpi}\times\vec{V}_R + \vec{\varpi}\times\left(\vec{\varpi}\times\vec{r}\right) + \frac{d\vec{\varpi}}{dt}\times\vec{r}\ , \tag{3.8}$$

де $2\vec{\varpi}\times\vec{V}_R$ – прискорення Коріоліса, $\vec{\varpi}\times\left(\vec{\varpi}\times\vec{r}\right)$ – доцентрове прискорення і $\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$ – прискорення, зумовлене змінами самої швидкості обертання $\vec{\omega}$ .

Останнє з цих доданків для більшості атмосферних, океанічних і гідрологічних задач звичайно не враховується, оскільки воно мале в порівнянні з іншими членами формули (3.8).

Для наших цілей вектор $\vec{\omega}$ можна вважати постійним і взяти:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} = 0 \ .$$

Отже, відповідно до вищевикладеного, для опису руху тіл в неінерціальних системах відліку ніякі нові фізичні закони не потрібні. Перехід до неінерціальної системи по суті справи є простим (кінематичним) перерахунком від однієї системи відліку до іншої. В рівнянні другого закону Ньютона, записаному в інерціальній системі, можна виразити «абсолютне прискорення» (прискорення щодо інерціальної системи відліку) через відносне і переносне (у разі системи, що обертається, — ще і Коріолісове прискорення). Залишаючи в лівій частині рівняння тільки відносне прискорення, додають цьому рівнянню вигляд другого закону Ньютона з додатковими членами в правій частині. Ці додаткові члени можна потрактувати як сили інерції, що складаються з тими «справжніми або «фізичними» силами», які характеризують дію інших тіл на дане тіло. Інтегрування диференціального рівняння руху з включеними в нього силами інерції дозволяє розрахувати рух тіла відносно неінерціальної системи відліку.

Численні дискусії в літературі з приводу сил інерції («фіктивні» це або «реальні сили»), не дивлячись на їх гострий характер, по своїй суті чисто термінологічні. Якщо визначати силу як кількісну міру дії інших тіл на дане тіло, то в цьому значенні сила інерції не є «справжньою силою», оскільки ми не можемо вказати її джерело, тобто тіло, з боку якого вона діє. Тому до сил інерції непридатний третій закон Ньютона. До того ж ця сила зникає при переході до іншої (інерціальної) системи відліку, чого зі «справжніми силами» не буває. В англомовній літературі сили інерції іноді називають псевдосилами.

Але якщо потрактувати силу як причину прискорення тіла, то в цьому відношенні сили інерції «нічим не гірші» за всі інші сили. Непридатність третього закону до сил інерції принципового значення не має, оскільки для будь-якої фізичної системи сили інерції завжди будуть зовнішніми силами (третій закон важливий лише для внутрішніх сил, діючих між тілами, що входять в систему).

Питання про походження (або про джерело) сил інерції також не має самостійного значення, оскільки по суті зводиться до питання про те, чому другий закон Ньютона справедливий тільки в інерціальних системах відліку. Останнє ж питання при вивченні основ динаміки звичайно не підіймається (мов, так влаштований світ, про що свідчать всі відомі експериментальні факти), хоча безумовно дуже важливий в пізнавальному відношенні. Спроби з'ясування фізичної причини, що виділяє інерціальні системи відліку серед інших (зокрема, так званий принцип Маха), послужили для Ейнштейна стимул-реакцією до створення загальної теорії відносності (релятивістської теорії тяжіння).

### 3.2 Масові та поверхневі сили. Тензор напружень

#### 3.2.1 Масові та поверхневі сили

*Масовими (або зовнішніми)* силами називають сили, які діють на всі точки суцільного середовища, або інакше: їх дія не залежить від присутності інших частинок (рідини, газу). Такими силами в атмосфері є сила **земного тяжіння, відцентрова сила і сила Коріоліса.** Розглянемо природу цих сил і виведення математичних формул для їх вираження. Нагадаємо, що тут і далі всі сили розглядатимуться як питомі, тобто на одиницю маси.

В геофізичній гідродинаміці зазвичай вводять *силу тяжінння* як векторну суму двох зовнішніх сил: *сили земного тяжіння* (($\vec{F}_T$), направленої до центру Землі, і *відцентрової* $\vec{F}_{цб}$, виникаючої внаслідок обертання Землі і направленою по радіусу широтного кола (рис.3.2):

$$\vec{g}=\vec{F}_T+\vec{F}_{цб}. \qquad (3.9)$$

Сила тяжіння на частинку одиничної маси дорівнює $\vec{F}_T=\dfrac{-\gamma M\vec{R}}{R^3}$, де $\gamma$ – гравітаційна стала, М - маса Землі, $\vec{R}$ – радіус-вектор, що сполучає центри Землі і частинки; $R$ - відстань між центрами мас Землі і частинки повітря. Величина відцентрової сили (на одиницю маси) залежить від радіуса широтного кола і географічної широти:

$$\vec{F}_{цб}=[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]=-\omega^2\vec{r}; \quad \left|\vec{F}_{цб}\right|=\omega^2 r=\omega^2 R\cos\varphi.$$

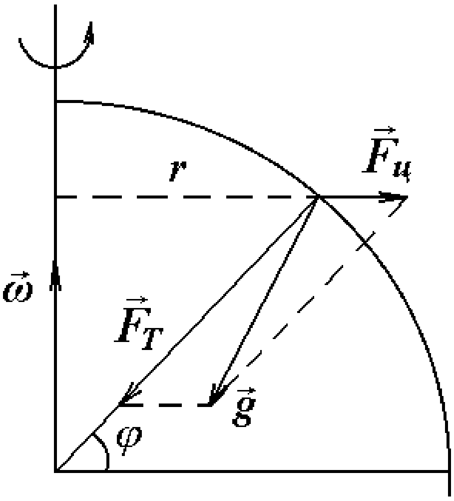


Рисунок 3.2 – Сили, діючі на частинку, що обертається

В порівнянні з силою земного тяжіння відцентрова сила дуже мала і у міру наближення до полюса вона взагалі зменшується до нуля. Відповідно, сила тяжіння також залежить від широти: вона максимальна на полюсі і мінімальна на екваторі. Її оцінка, оскільки питома сила тяжіння виражається через прискорення вільного падіння, має вигляд:

$$g_{z,\varphi}=g_{45^\circ}\cdot(1-a_1\cos2\varphi)(1-a_2 z), \text{ де } \quad a_1=2{,}6\cdot10^{-3},\ a_2=3{,}14\cdot10^{-7}\,м^{-1}.$$

Іншою масовою (зовнішньої) силою є сила Коріоліса, яка діє на частинки повітря, що рухаються відносно Землі. Сила Коріоліса виникає в результаті переносного обертального руху Землі навколо своєї осі і одночасного руху частинок відносно земної поверхні. Як видно з рис.3.3, внаслідок добового обертання Землі напрямок повітряних течій по відношенню до земної поверхні змінюється через додаткове Коріолісове прискорення. Воно визначається різницею абсолютних величин лінійної швидкості обертального руху різних точок земної поверхні, над якими проходять частинки повітря. Лінійна швидкість обертання точок земної поверхні, направлена із заходу на схід, зменшується від екватора до полюса, обертається в нуль. *Частинка повітря, яка зберігає за інерцією первинну складову швидкості руху разом із Землею на схід, при переміщенні з півдня на північ відхиляється на схід від меридіана, на якому вона була в початковий момент часу, а при зсуві з півночі на південь вона відставатиме від більш південних точок даного меридіана і відхилятиметься на захід. За рахунок різниці лінійних швидкостей переносного обертального руху точок земної поверхні, повітряні течії в північній півкулі відхиляються праворуч, а в південній - ліворуч. Таким чином, сила Коріоліса змінює лише напрямок повітряних течій, не* *змінюючи абсолютних значень швидкості і не виконуючи ніякої роботи, оскільки* діє під прямим кутом до вектора швидкості *(($A = (\vec{F}\vec{S}) = FS\cos\alpha$, $\alpha -$ кут між вектором сили і напрямом руху рівний 90°).*

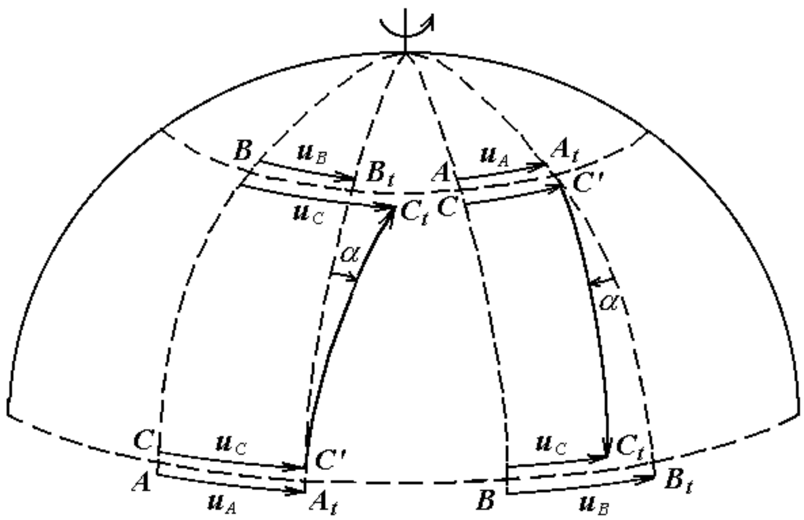


Рисунок 3.3 – Дія сили Коріоліса на повітряні частинки, що рухаються в атмосфері Землі

*Позначення: $A, A_t$ і $B, B_t$ - положення точок земної поверхні А і У в моменти часу $t = 0$ і $t = t_k$; $C, C_t$ - положення частинки, що рухається, в початковий і кінцевий моменти часу; $u_A, u_B$ - швидкості переносного руху точок земної поверхні А і В; $u_C$ - початкова складова абсолютної швидкості частинки, дорівнює швидкості переносного руху початкової точки А.*

Таким чином, величина сили Коріоліса залежить від кутової швидкості обертання Землі і відносної швидкості руху частинок повітря (швидкості вітру):

$$\vec{F}_k = -2[\vec{\omega} \times \vec{v}] = 2[\vec{v} \times \vec{\omega}]. \qquad (3.10)$$

Щоб знайти складові сили Коріоліса на осі координат, для простоти розглядатимемо декартову систему координат, скористаємося матричним представленням векторного добутку:

$$\vec{F}_k = -2[\vec{\omega}\vec{v}] = -2\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{pmatrix} =$$

$$= -2[\vec{i}\,(\omega_y w - \omega_z v) + \vec{j}\,(\omega_z u - \omega_x w) + \vec{k}\,(\omega_x v - \omega_y u)] \quad (3.11)$$

Якщо далі вважати, що рухома система координат розташована на поверхні Землі і що вісі направлені на схід, північ і вертикально вгору, то проекції кутової швидкості обертання Землі будуть відповідно рівні: $\omega_x = 0, \omega_y = \omega\cos\varphi, \omega_z = \omega\sin\varphi$, а складові сили Коріоліса: $F_{kx} = -2\omega(w\cos\varphi - v\sin\varphi), F_{ky} = -2\omega u\sin\varphi, F_{kz} = 2\omega u\cos\varphi$.

*Поверхневими* силами називають сили, прикладені до елемента рідини (газу) з боку прилеглих до нього частинок решти частини рідини. Ці сили отримали таку назву тому, що вони діють на поверхню даного елемента (частинки). Величина поверхневої сили пропорційна площі цієї поверхні; тому вони розраховуються на одиницю площі, на яку впливають, і називаються напруженнями.

Розглянемо стисло фізичну картину дії поверхневих сил на прикладі плоско-паралельного руху. З досвіду відомо, що будь-яке, скільки завгодно мале зусилля, прикладене до частинок рідини або газу, спричиняє зсув частинок одної відносно іншої. Проте, зусилля, що зсувають, супроводжуються виникненням деяких сил, які перешкоджають цьому зсуву. Ці сили додаються до кожного шару і направлені протилежно напрямку зсуву. Властивість рідини або газів надавати опір зсовуючим зусиллям називається внутрішнім тертям або в'язкістю, а відповідні цьому опору сили називають силами в'язкості. Сутність цього процесу полягає в обміні молекулами між шарами. З шару, розташованого нижче, у верхній надходять молекули в середньому з меншою кількістю руху, а на їх місце приходять більш швидкі молекули. Молекулярний обмін кількістю руху зумовлює в'язку взаємодію між шарами. Плавна зміна швидкості є прямим наслідком дії сил в'язкості, як чинника, що згладжує відмінності в швидкостях суміжних шарів. Рідке середовище, в якому сили в'язкості відсутні, називається ідеальною рідиною. І навпаки, рідина, в якій не можна нехтувати силами в'язкості, називається в'язкою рідиною. Прикладами рідин з малою в'язкістю є спирт, вода, повітря, а з великою в'язкістю - смола, нафта і інші. В'язкість, як відомо, залежить від температури.

***Основна відмінність масових сил від поверхневих полягає в тому, що для перших в кожній точці середовища можна однозначно вказати напрямок дії масової сили***. В результаті можна отримати її векторне поле.

Поверхневі сили в одній і тій же точці мають безліч напрямків, оскільки через дану точку можна провести безліч площин (майданчиків). Таким чином, хоча поверхневі сили характеризують силову взаємодію між різними частинками, її неможливо представити за допомогою одного вектора. Звідси слідує очевидна задача: спробувати виразити дію поверхневої сили $\vec{P}_n$, діючої на довільну площинку з нормаллю $\vec{n}$, мінімальним числом незалежних векторів. Щоб вирішити її, розглянемо наступні поняття і міркування.

Хай через довільну точку М проведена довільна площинка $\delta\sigma$ з нормаллю $\vec{n}$, для якої розрізняють *тилову* і *лицьову* частини (рис.3.4). Була прийнята угода, згідно якій лицьовою вважається частина площинки, обернута до кінця вектора нормалі. В думках відкинемо частину рідини з боку нормалі (з лицьової частини) і замінимо її дію поверхневою силою $\vec{P}_n\,\delta\sigma$. Аналогічно, якщо відкинути частину рідини з тилової сторони, тоді дія поверхневої сили з тилової сторони згідно третьому закону Ньютона дорівнює $-\vec{P}_n\,\delta\sigma$. Отже, знак поверхневої сили залежить від того, з якої сторони площинки він діє.

$\delta\sigma$

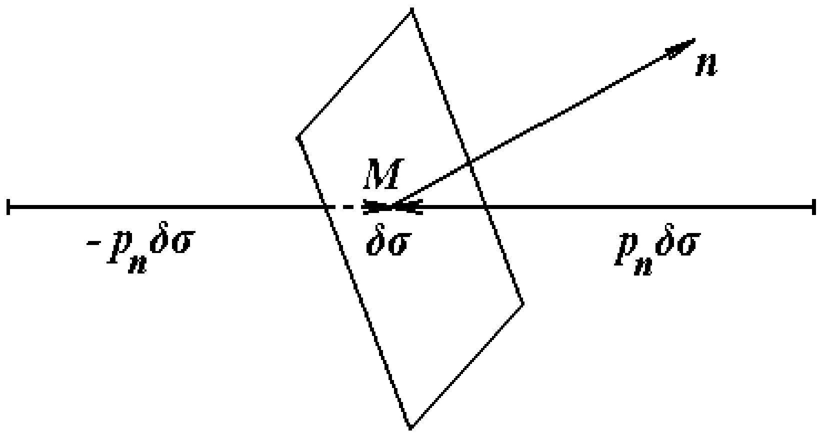


Рисунок 3.4 – Дія поверхневих сил з лицьової і тилової частин

### 3.2.2 Тензор напружень

Розглянемо далі елементарний тетраедр такий, що його вершина співпадає з початком координат, основа у вигляді трикутника площею $\delta\sigma_n$, перерізає координатні площини, і грані співпадають з координатними площинами (рис. 3.5), тобто є проекціями його основи на відповідні координатні площини $\delta\sigma_x = \delta\sigma_n \cos(\vec{n}, x)$, $\delta\sigma_y = \delta\sigma_n \cos(\vec{n}, y)$ і $\delta\sigma_z = \delta\sigma_n \cos(\vec{n}, z)$.

Відповідно поверхневі сили, прикладені до кожної з граней, визначаються як $\vec{P}_n\,\delta\sigma_n$,, $-\vec{P}_x\,\delta\sigma_x$,, $-\vec{P}_y\,\delta\sigma_y$ і $-\vec{P}_z\,\delta\sigma_z$, *де* $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ - *вектори напружень, прикладених до додатних сторін площинок* $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z$. Знак "мінус" указує, що зовнішні сторони площинок при прийнятому напрямку ортів координатних осей виявляються тиловими.

Розглянемо баланс всіх сил, діючих на частинки цього нескінченно малого тетраедра загальною масою $\delta m$. Запишемо рівняння руху тетраедра, який відповідно до загальних законів механіки повинен мати вигляд: маса прискорення = (результуюча масових сил) + (результуюча поверхневих сил).

Маємо: $\rho\vec{a}\,\delta V = \rho\vec{F}\,\delta V + \vec{p}_n\delta\sigma_n - \vec{p}_x\delta\sigma_x - \vec{p}_y\delta\sigma_y - \vec{p}_z\delta\sigma_z$, $\rho\vec{a}\,\delta V$ - масова сила інерції $\vec{a}$ - вектор прискорення рідкого тетраедра $\rho\vec{F}\,\delta V$ - масова сила.

Враховуючи, що даний тетраедр має нескінченно малі лінійні розміри, всі доданки, що містять масу, пропорційну об'єму, можна відкинути як нескінченно малі третього порядку величини в порівнянні з іншими доданками, що містять як співмножники елементарні площинки, і є нескінченно малими другого порядку малості. Тоді матимемо вираз

$$\vec{p}_n\delta\sigma_n = \vec{p}_x\delta\sigma_x + \vec{p}_y\delta\sigma_y + \vec{p}_z\delta\sigma_z\,, \tag{3.12}$$

згідно якого: для того, щоб повністю охарактеризувати поверхневі сили в деякій точці, достатньо визначити сили, діючі на три взаємно перпендикулярні майданчики, що лежать в координатних площинах. Виражаючи далі проекції елементарних площинок через направляючі косинуси і скорочуючи обидві частини рівняння на $\delta\sigma_n$, отримаємо векторну рівність $\vec{p}_n = \vec{p}_x n_x + \vec{p}_y n_y + \vec{p}_z n_z$ . Далі спроектуємо поверхневі сили, прикладені до цих взаємно перпендикулярних площин на координатні осі:

$$\vec{p}_x = \vec{i}\,p_{xx} + \vec{j}\,p_{yx} + \vec{k}\,p_{zx}\,,\quad \vec{p}_y = \vec{i}\,p_{xy} + \vec{j}\,p_{yy} + \vec{k}\,p_{zy}\,,\quad \vec{p}_z = \vec{i}\,p_{xz} + \vec{j}\,p_{yz} + \vec{k}\,p_{zz}\,.$$

Або

$$p_{nx} = p_{xx}n_x + p_{yx}n_y + p_{zx}n_z\,,\qquad p_{ny} = p_{xy}n_x + p_{yy}n_y + p_{zy}n_z\,,$$

$$p_{nz} = p_{xz} n_x + p_{yz} n_y + p_{zz} n_z . \qquad (3.13)$$

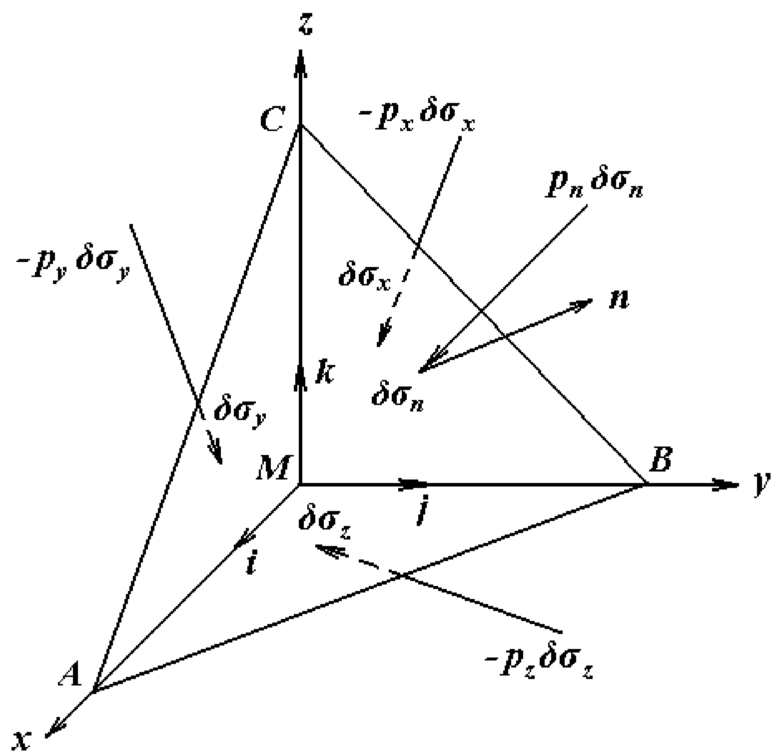


Рисунок 3.5 – Розкладання вектора напружень на складові

Тут $n_x = \cos(\vec{n}, x), n_y = \cos(\vec{n}, y), n_z = \cos(\vec{n}, z)$ - напрямні косинуси. Нагадаємо, що перший підрядковий індекс позначає вісь, перпендикулярно якій орієнтована площинка, а другий - вісь, на яку було спроектовано напруження. *Так, наприклад,* $p_{xz}$ *означає проекцію на вісь z напруження, прикладеного до площинки, перпендикулярної до осі x.* Величини з однаковими індексами, що представляють **проекції** векторів напружень $\vec{p}_{xx}, \vec{p}_{yy}, \vec{p}_{zz}$ **на нормалі** до відповідних площинок, називають *нормальними* напруженнями, а їх **проекції на осі, що лежать в площині площинки** - *дотичними. Система рівностей (3.13) показує,* що проекції на осі координат напруження, прикладеного до будь-якої похилої площинки, виражаються лінійно через проекції напружень, прикладених до трьох взаємно перпендикулярних площинок, що лежать в координатних площинах, тобто через дев'ять величин, утворюючих тензор 2-го рангу.

Позначимо його

$$P=\begin{Bmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{Bmatrix} \qquad (3.14)$$

або

$$P=(\,p_{j,i}\,), \quad i,j=1,2,3 \qquad (3.14a)$$

і називатимемо його *тензором напружень*. Відповідно, діагональні члени цього тензора є *нормальними*, а недіагональні - *дотичними напруженнями*. *Даний тензор є симетричним*

Хоча в кожній точці середовища існує безліч векторів напружень, залежних від вибору площинки в даній точці, (відповідно існує безліч векторів-нормалей), але існує єдиний тензор, який характеризуює напруженість середовища в даній точці. Цей зв'язок виражається

$$\vec{F}_n=\vec{n}P=\vec{n}\begin{Bmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{Bmatrix}. \qquad (3.15)$$

Тензор Р є фізичною величиною, що виражає стан рідини або газу (їх напруженість), не залежить від вибору осей координат і утворює поле.

***Формули зв'язку.*** Розглянемо спочатку два важливі окремі випадки: рідину, що покоїться і ідеальну рідину, що рухається. В обох випадках сили в'язкості відсутні: в першому випадку через відсутність рухів як таких (нульові швидкості), а в другому за визначенням. Це означає, що дотичні напруження відсутні, а нормальні, прикладені до трьох взаємно перпендикулярних площинок, довільно орієнтованим в просторі, рівні між собою

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-p. \qquad (3.16)$$

*де р - гідростатичний тиск, що має розмірність* $\left[p\right]=н/м^2$. *Це закон ізотропії нормальних напружень точок середовища, що знаходяться в рівновазі, відкритий Паскалем в XVII столітті. Оскільки дія тиску завжди направлена по нормалі всередину рідини, тобто протилежно напряму нормалі до даної поверхні, він береться із знаком "-". Величина тиску не залежить від орієнтації площинки і від вибору системи координат і є скалярною величиною. Отже, тензор напружень матиме* *вигляд*

$$P = \begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix} = -p \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} = -pU \tag{3.17}$$

де U - одиничний тензор.

*Для ідеальної рідини вважається, що на площинки дотику об'ємів, що рухаються, діють лише нормальні до них сили тиску. Причому, вони також не залежать від напряму площинки, до якої прикладені. Тиск в ідеальній рухомій рідині називають гідродинамічним.*

В *реальній* атмосфері, за наявності в'язкості повітря, поверхневі сили не співпадають з напрямком нормалі до поверхні і розкладаються на нормальну і дотичну складові, діючі увздовж поверхні і перешкоджаючі ковзанню окремих шарів і частинок відносно один одного. У зв'язку з цим нагадаємо, що рух повітряної частинки залежить не тільки від поступального і обертального руху елементарної частинки, але і від її деформації. Можна також стверджувати, що оскільки сили в'язкості, які зумовлюють напруження, перешкоджають ковзанню частинок і шарів повітря між собою, з ними повинні бути зв'язані деформації об'єму повітря, які зводяться до зміни відстаней між його частинками.

Найпростішим прикладом лінійного зв'язку між дотичним напруженням і деформацією для прямолінійного руху є формула Ньютона

$$p_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{3.18}$$

де μ - *динамічний коефіцієнт в'язкості*, *що* має розмірність $н/(м^2 с)$ *і який чисельно дорівнює дотичному напруженню при одиничній зміні швидкості на одиницю відстані*. **Цей коефіцієнт не залежить від швидкості і будь-якої комбінації диференціальних характеристик поля швидкості**, а **є слабо змінною функцією температури рідини (газу).** Для повітря ця залежність має вигляд: $\mu = 1{,}15\mathrm{T}^{8/9}$.

Для характеристики в'язкості рідини часто використовують *кінематичний коефіцієнт в'язкості* $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$, який має розмірність $м^2/с$. Причому, якщо динамічний коефіцієнт в'язкості характеризує дотичне напруження в'язкості при даному полі швидкості, то *кінематичний коефіцієнт в'язкості характеризує прискорення частинок рідини, що* *спричиняється напруженням сили в'язкості*. Він також залежить від температури. Відмінності між коефіцієнтами в'язкості для води і повітря були зв'язані відмінністю в густині і великим впливом сил зчеплення. Останні залежать від температури і густини: із зростанням температури посилюються коливальні рухи молекул і відповідно убувають сили в'язкості. При цьому цей процес значно швидше відбувається для рідини, ніж для повітря.

Як випливає з порівняння тензорів напружень і деформацій, ***скошування прямих кутів спричиняється дотичними напруженнями поверхневих сил у відповідних площинах, а деформації стиснення або розширення - нормальними напруженнями поверхневих сил***.

В загальному випадку зв'язок між складовими тензорів напружень і деформацій встановлюється *узагальненим законом Ньютона*:

$$P = aД + bU, \tag{3.19}$$

де a і b скаляри, U - одиничний тензор. $a=2\mu = 2\rho\nu$. Перший доданок встановлює лінійний зв'язок між складовими тензорів напружень і деформації, а другий враховує вплив сили тиску і зміну елементарного об'єму при його розтягуванні або стисненні. При цьому вводиться гіпотеза про те, що сума нормальних напружень дорівнює потрійному гідродинамічному тиску: $(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -3p$.

Слід відзначити, проте, що формулювання гіпотези для виразу нормальних напружень може бути і інше. Це позв'язано з тим, що не можна строго довести, що скалярна величина *p* дійсно буде тією величиною, яка зв'язана з температурою і густиною в рівнянні стану Менделєєва-Клапейрона, хоча правильність подібної гіпотези виправдовується практикою майже у всіх областях її застосування.

З урахуванням цієї гіпотези знаходимо, що

$$b = -p - \frac{2}{3}\rho\nu \, div\vec{V}. \tag{3.20}$$

Тоді складові тензора напружень можна представити у вигляді:

$$p_{xz} = p_{zx} = \rho\nu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x});$$
$$p_{xy} = p_{yx} = \rho\nu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}); \qquad (3.21)$$
$$p_{yz} = p_{yz} = \rho\nu(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}).$$

$$p_{xx} = -p + 2\rho\nu(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} div\vec{V});$$
$$p_{yy} = -p + 2\rho\nu(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} div\vec{V}); \qquad (3.22)$$
$$p_{zz} = -p + 2\rho\nu(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} div\vec{V}).$$

## 3.3 Закон збереження імпульсу. Рівняння руху ідеальної рідини. Рівняння руху ідеальної та в'язкої рідини у формах Ейлера, Громеко Лемба

### 3.3.1 Закон збереження імпульсу

Для виведення рівняння збереження кількості руху використовується другий закон Ньютона, який виконується тільки для інерціальних систем відліку і свідчить, що всяка зміна кількості руху тіла за одиницю часу дорівнює рівнодіючій сил, прикладених до даного тіла, і відбувається у напрямку цієї рівнодіючої. Отже, прискорений рух частинок повітря може бути зв'язаний з дією прикладених до них сил.

Нагадаємо, що *кількістю руху (імпульсом)* матеріальної точки називається вектор $\vec{K}_i$, рівний добутку маси точки $m_i$ на її швидкість $\vec{V}_i$: $\vec{K}_i = m_i\vec{V}_i$. Хай нескінченно мала частинка повітря об'ємом $\delta\tau$ має густину $\rho$. Тоді кількість руху нескінченно малої частинки, яка має абсолютну швидкість $\vec{V}_a$ і масу $\delta m = \rho\delta\tau$, буде рівною $\delta K = \rho\,\delta\tau\,\vec{V}_a$, а швидкість зміни кількості руху в часі $\frac{d(\rho\,\delta\tau\,\vec{V}_a)}{dt}$. Враховуючи постійність маси, швидкість зміни кількості руху для елементарного об'єму буде визначатися $\rho\delta\tau\frac{d\vec{V}_a}{dt}$, а для всього об'єму τ: $\iiint\limits_{\tau}\rho\frac{d\vec{V}_a}{dt}d\tau$.

Представимо рівнодіючу силу як суму результуючих масових і поверхневих сил. Зовнішні (або масові) сили на одиницю маси позначимо через $\vec{F}_M$ і визначимо їх дію по всьому об'єму як $\iiint\limits_{\tau} \rho \vec{F}_M d\tau$. Результуючу поверхневих сил, діючих на одиницю поверхні, позначимо через $\vec{p}_n$ і визначимо її дію на зовнішню поверхню, що обмежує даний об'єм τ через інтеграл по замкнутій поверхні $S$ як $\oiint\limits_{S} \vec{p}_n dS$.

Прирівнюючи зміну кількості руху рівнодіючої масових і поверхневих сил, отримаємо векторне рівняння, що виражає закон зміни кількості руху повітря в атмосфері:

$$\iiint\limits_{\tau} \rho \frac{d\vec{V}_a}{dt} d\tau = \iiint\limits_{\tau} \rho \vec{F}_M d\tau + \oiint\limits_{S} \vec{p}_n dS .$$

Відповідно до теореми Гаусса-Остроградського виразимо поверхневий інтеграл через об'ємний, при цьому скористаємося розкладанням результуючої поверхневих сил на її складові до трьох взаємно перпендикулярних площин, утворюючих грані елементарного тетраедра:

$$\iiint\limits_{\tau} \rho \frac{d\vec{V}_a}{dt} d\tau = \iiint\limits_{\tau} \rho \vec{F}_M d\tau + \oiint\limits_{S} \vec{p}_n dS = \iiint\limits_{\tau} \rho \vec{F}_M d\tau + \iiint\limits_{\tau} div \vec{p}_n d\tau =$$
$$= \iiint\limits_{\tau} \rho \vec{F}_M d\tau + \iiint\limits_{\tau} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) d\tau .$$

Підставляючи зліва в підінтегральний вираз співвідношення для абсолютного прискорення і представляючи явно результуючу масову силу, знаходимо зміну відносного прискорення в результаті дії масових і поверхневих результуючих сил (індекс «r» далі опускаємо, маючи на увазі всюди далі, що розглядається швидкість вітру):

$$\iiint\limits_{\tau} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\tau = \iiint\limits_{\tau} \left\{ -\rho \vec{g} - \rho(2[\vec{\omega} \times \vec{V}] + \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right\} d\tau . \qquad (3.23)$$

Це і є закон збереження кількості руху в інтегральній формі. Враховуючи довільність об'єму і, віднісши всі сили до одиниці маси, одержуємо векторну форму диференціального рівняння закону збереження кількості руху.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{g} - 2[\vec{\omega} \times \vec{V}] + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}\right). \qquad (3.24)$$

Ця форма рівнянь руху отримала назву *рівняння руху* атмосфери *в напруженнях Нав'е*. Проектуючи його на осі координат, можна отримати скалярні рівняння руху.

Нагадаємо, що масовими називають сили, величина яких пропорційна масі даного об'єму. Найважливішою особливістю є те, що вони діють на всі частинки рідини. В загальному випадку це сили, що підкоряються другому закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$. В проекціях на декартові осі координат можна записати: $F_x = ma_x$; $F_y = ma_y$; $F_z = ma_z$. В гідромеханіці замість $a_x$, $a_y$, $a_z$ прийнято писати *X*, *У*, *Z*. Поділивши обидві частини записаних виразів на масу, отримаємо $\frac{F_x}{m} = X$; $\frac{F_y}{m} = Y$; $\frac{F_z}{m} = Z$.

Таким чином $X$, $Y$, і $Z$ є проекції одиничних масових сил на відповідні координатні осі, іноді їх називають напруженнями масових сил. Якщо в рідині виділити елементарний об'єм $\delta V$, то його маса - $\rho \delta V$. В загальному випадку масова сила, діюча на цей об'єм $\rho \vec{F} \delta V$, а головний вектор масових сил, діючих на весь об'єм, представляється як $\iiint\limits_V \rho \vec{F} dV$.

Теоретичне вивчення руху рідини було зв'язано з так званою моделлю ідеальної рідини. В цій моделі рідина розглядається як абсолютно нестисливе середовище, яке нездатне чинити опір розриваючим зусиллям і має абсолютну рухливість, тобто позбавлене в'язкості. Останнє виключає виникнення в ній дотичних напружень.

**Рівняння руху в напруженнях.** Отримаємо найбільш загальне рівняння, що зв'язує поверхневі і масові сили - так зване рівняння руху в напруженнях. Для вивелення рівняння проаналізуємо рух рідкої частинки, маса якої $\rho dV$ і поверхня $dS$. Аналогічно тому, як це було зроблено для тетраедра, можемо записати рівняння руху у вигляді

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \rho \vec{F} dV + \vec{p}_n dS. \qquad (3.25)$$

Для всього рухомого об'єму ($V$) поверхня якого $S$, маємо

$$\iiint\limits_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \iiint\limits_V \rho \vec{F} dV + \iint\limits_S \vec{p}_n dS \tag{3.26}$$

Перетворимо поверхневий інтеграл в правій частині в об'ємний з урахуванням того, що, як було показано, тензор напружень має вигляд $\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z$, де $n_x$, $n_y$, $n_z$ - напрямні косинуси.

Скористаємося відомими з векторного аналізу і справедливими для будь-яких векторів формулами:

$$\iint\limits_S n_x \vec{R} dS = \iiint\limits_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} dV ; \qquad \iint\limits_S n_y \vec{R} dS = \iiint\limits_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial y} dV ;$$

$$\iint\limits_S n_z \vec{R} dS = \iiint\limits_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} dV . \tag{3.27}$$

Застосовуючи ці формули до тензора $\vec{p}_n$, маємо:

$$\iint\limits_S \vec{p}_n dS = \iiint\limits_V \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV . \tag{3.28}$$

Підставляючи цей вираз в початкове рівняння, маємо:

$$\iiint\limits_V \left[ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] dV = 0 .$$

Але оскільки $dV \neq 0$, а об'єм $V$ вибраний довільно, то

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right). \tag{3.29}$$

Це і є рівняння руху в напруженнях.

В проекціях на декартові осі координат можемо записати:

$$\frac{dv_x}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right); \quad \frac{dv_y}{dt} = Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right);$$

$$\frac{dv_z}{dt} = Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right). \tag{3.30}$$

Ця система включає як невідомі дев'ять величин: три проекції швидкості і шість проекцій напружень. Проекції одиничних масових сил, як правило, відомі з постановки задачі.

### 3.3.2 Рівняння руху ідеальної рідини

Рівняння руху ідеальної рідини можна визначити з рівнянь руху в напруженнях, вважаючи, що в них всі похідні від $\tau$ дорівнюють нулю і замінивши нормальні напруження тисками, маючи на увазі, що $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$. Таким чином, рівняння гідродинаміки набувають вигляду

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt}; \quad Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{dt}; \quad Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{dt}, \tag{3.31}$$

або у векторній формі

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\ p = \vec{a}. \tag{3.32}$$

Система (3.31) називається системою диференціальних рівнянь Ейлера для гідродинаміки, вона зв'язує тиск і швидкості в рухомій рідині. Слід пям'ятати, що вирази в правій частині рівнянь системи є повними або субстанційними похідними. Наявність конвективних членів прискорення приводить до того, що система є нелінійною з чотирма невідомими: три проекції швидкості і тиск. Проекції одиничних масових сил звичайно відомі з постановки задачі.

Три рівняння (3.31) плюс рівняння нерозривності утворюють замкнуту систему.

### 3.3.3 Рівняння руху ідеальної та в'язкої рідини у формах Ейлера, Громека-Лемба

**Перетворення Громеки-Лемба.** Розгляд теореми Гельмгольця про рух рідкої частинки показує, що рідина як будь-яке матеріальне тіло може брати участь в поступальному і обертальному рухах.

Система рівнянь Ейлера (3.31) не враховує факт існування поступального і обертального (вихрового) рухів, що певною мірою обідняє її. Тому доцільно використовувати перетворення, що дозволяє врахувати цю особливість руху рідких частинок, так зване перетворення Громеки-

Лемба. Формально воно зводиться до того, що у вираз для прискорення вводяться члени, які характеризують обертання рідких частинок.

Розглянемо лише одну компоненту:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}. \tag{3.33}$$

Додамо і віднімемо в конвективній частині прискорення вираз

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Скомпонуемо члени з урахуванням знаків:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left( v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x};$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} - \left( v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) =$$

$$= -v_y \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + v_z \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).$$

Вирази в дужках є не що інше, як подвоєні компоненти вихору $\omega_z$ і $\omega_y$, тобто можемо записати

$$-2 v_y \omega_z + 2 v_z \omega_y = 2 \left( v_z \omega_y - v_y \omega_z \right).$$

Підставляючи отримані значення в (3.33), маємо

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + 2 \left( v_z \omega_y - v_y \omega_z \right) \tag{3.34}$$

і аналогічно

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial y} + 2 \left( v_x \omega_z - v_z \omega_x \right). \tag{3.35}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial z} + 2\left(v_y \omega_x - v_x \omega_y\right). \qquad (3.36)$$

У векторній формі вираз для прискорення матиме вигляд:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad\,\frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,. \qquad (3.37)$$

Якщо рух був сталий, то

$$\vec{a} = grad\,\frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,. \qquad (3.38)$$

**Рівняння руху у формі Громеки-Лемба**. Якщо в (3.32) в праву частину підставити прискорення у вигляді (3.37) або (3.38), то це приводить до рівняння руху у формі Громеки-Лемба. Для сталого руху маємо

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} grad\, p = grad\,\frac{V^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}\,. \qquad (3.39)$$

Виконаємо деякі перетворення (3.39).

В гідростатиці вводиться поняття про скалярну функцію Ф, яка має назву силової. Показано, що

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi\,. \qquad (3.40)$$

Оскільки ця функція є повним диференціалом, то можна записати

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz\,. \qquad (3.41)$$

Зіставляючи (3.40) і (3.41), маємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = X;\; \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y;\; \frac{\partial \Phi}{\partial z} = Z\,. \qquad (3.42)$$

З іншого боку вектор $\vec{F}$, проекціями якого є $X, Y$ і $Z$,

$$\vec{F} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z\,. \qquad (3.43)$$

З (3.42) і (3.43) витікає, що

$$\vec{F} = \vec{i}\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} = grad\,\Phi\ . \qquad (3.44)$$

З урахуванням (3.44) вираз (3.39) набере вигляду

$$grad\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = -2\vec{\omega} \times \vec{V}\,. \qquad (3.45)$$

Слід мати на увазі, що ця форма запису справедлива лише для нестисливої рідини, тобто при умові $\rho = const$. І, нарешті, рівнянню руху (3.45) можна надати більш зручну для аналізу форму, помноживши скалярно його ліву і праву частини на довільний направлений відрізок

$$d\vec{l} = \vec{i}\,dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz\,. \qquad (3.46)$$

Опускаючи цю операцію, наведемо лише кінцевий результат

$$d\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = -2\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} \qquad (3.47)$$

**Інтегрування рівняння руху для сталої течії**. Інтегрування рівняння руху (3.47) можливо лише у разі, коли його права частина дорівнює нулю. З теорії визначників відомо, що ознаками рівності нулю є: рівність нулю якого-небудь рядка або пропорційність елементів одного рядка елементам іншого.

Виходячи з фізичного значення, маємо чотири можливі випадки:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0; \qquad (3.48)$$

$$\frac{u_x}{\omega_x} = \frac{u_y}{\omega_y} = \frac{u_z}{\omega_z}; \qquad (3.49)$$

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}; \tag{3.50}$$

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \tag{3.51}$$

Для будь-якого з них можемо записати

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = 0.$$

І після інтегрування

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi = C. \tag{3.52}$$

Якщо з масових сил діє тільки сила тяжіння, то $\Phi = -gz$ і (3.52) набуває вигляд

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C \tag{3.53}$$

Ще раз звернемо увагу на те, що вигляд рівняння (3.53) однаковий незалежно від того, який з чотирьох випадків рівності нулю визначника розглядається. Проте значення інтеграла і область його використання різні. Саме тому слід розібратися в цьому питанні докладніше.

Перший випадок, як відомо, є ознакою потенційності руху. Інтеграл (3.53) в цьому випадку називають інтегралом Коші-Лагранжа. Він справедливий для будь-яких точок рідини, яка рухається без обертання частинок, тобто потенційно.

Другий випадок є ознакою колленіарності вектора вихору і вектора швидкості. Це виключно окремий випадок так званого гвинтового руху.

Третій випадок характеризує рух рідкої частинки уздовж вихрової лінії, а четвертий - рух уздовж лінії течії. Інтеграл (3.53) при цьому носить назву інтеграла Бернуллі. Він справедливий як для потенційного, так і для вихрового рухів. Саме цей випадок і цікавитиме нас надалі.

**Модель в'язкої рідини**. Приступаючи до розгляду руху в'язкої рідини, необхідно перш за все з'ясувати термінологію, тобто сенс, що вкладається в поняття «в'язка рідина». З математичних позицій необхідно встановити вид функціональної залежності для напружень, або, іншими словами, сформувати модель в'язкої рідини. Надалі під в'язкою ми розумітимемо рідину, що задовольняє трьом гіпотезам: лінійності, однорідності й ізотропії.

**Гіпотеза лінійності.** Застосовний закон Ньютона до рідини, що рухається паралельно площині XOY (рис. 3.6), дає

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Скористаємося результатом, отриманим при розгляді теореми Гельмгольця про рух рідкої частинки. За теоремою, швидкість кутової деформації відносно осі Y

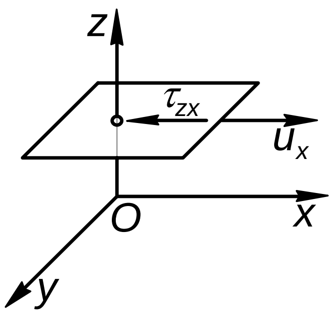


Рисунок. 3.6 – Рідина, що рухається паралельно площині XOY

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right).$$

Оскільки рух відбувається в площині XOY, то $v_z = 0$ і

$$\gamma_y = \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

і, отже, дотичне напруженння

$$\tau_{zx} = 2\mu\gamma_y. \tag{3.54}$$

Отриманий результат ілюструє закон тертя Стокса. Згідно цьому закону, напруження, що виникають в рідині, на відміну від твердого тіла, пропорційні не величинам, а швидкостям деформацій, і пов'язані з ними лінійною залежністю. При цьому коефіцієнт пропорційності залишається незмінним і рівним 2μ.

Крім того, згідно закону Стокса дотичні напруження, як показано вище, пропорційні швидкостям кутової деформації, а нормальні - швидкості лінійної деформації, тобто $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$, $\frac{\partial v_z}{\partial z}$.

Таким чином, можемо записати

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\gamma_z = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{3.55}$$

і т.д.

Розглянемо тепер нормальні напруження, що виникають від сил в'язкості. Згідно закону Стокса, їх можна записати у вигляді так званих девіаторів напружень, які мають вигляд:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}; \quad \sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}; \quad \sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{3.56}$$

Повні нормальні напруження відрізняються тим, що крім записаних вище в будь-якої рідині, як у в'язкій, так і в нев'язкій, діють і статичні тиски. Іншими словами

$$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}; \; p_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}; \; p_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}. \tag{3.57}$$

Виконаємо наступну операцію: з потрійної величини $p_{xx}$ віднімемо суму (( $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$). Маємо:

$$3p_{xx} - \left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right) = -3p + 6\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} -$$

$$-\left[-3p + 2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] = 6\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - 2\mu\, div\,\vec{v}$$

звідки знайдемо

$$p_{xx} = 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu div\vec{V} + \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}.$$

За тиск у в’язкій рідині беруть середнє арифметичне, тобто $p=-\frac{p_{xx}+p_{yy}+p_{zz}}{3}$. І, отже

$$p_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\, div\,\vec{v};\quad p_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\, div\,\vec{v};$$

$$p_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\, div\,\vec{v}. \qquad (3.58)$$

Для нестисливої рідини $div\,\vec{v}=0$ вирази спрощуються.

**Гіпотеза однорідності.** Передбачається, що вигляд лінійної залежності між напруженнями і швидкостями деформацій однаковий для всіх точок простору.

**Гіпотеза ізотропності.** В’язка рідина передбачається ізотропною, тобто її властивості в будь-якому напрямку однакові.

**Рівняння руху в’язкої рідини (рівняння Нав’е-Стокса).** 18 березня 1822 року в докладі, представленому Французькій академії наук, Клод Луї Нав’е писав про отримані ним рівняння: «хоча рівняння були засновані на гіпотезі Ньютона про те, що дотичні напруження пропорційні швидкості деформації, ніяк не можна сказати, що вони не виражають нічого нового».

Рівняння руху в’язкої рідини можна визначити з рівнянь руху в напруженнях (3.30), виконавши деякі перетворення. Розглянемо лише одну проекцію цих рівнянь:

$$\frac{dv_x}{dt}=X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right).$$

Як було показано при розгляді моделі в’язкої рідини, нормальні напруження

$$p_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\, div\,\vec{v}.$$

Для спрощення задачі будемо вважати рідину нестисливою (($div\,\vec{v}=0$), тоді

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}. \qquad (3.59)$$

Дотичне напруження $\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \mu\frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial x} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad (3.60)$$

аналогічно

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial x}. \qquad (3.61)$$

Підсумовуючи (3.59), (3.60) і (3.61) і групуючи члени, маємо:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z\partial x}\right).$$

Третій член можна записати у вигляді:

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x}div\,\vec{v},$$

але рідина нестислива, і $div\,\vec{v} = 0$. Таким чином маємо:

$$\frac{dv_x}{d\quad t} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right). \qquad (3.62)$$

Вираз в дужках є ні що інше, як оператор Лапласа - $\nabla^2\vec{v}$, а $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ .
Остаточно одержуємо:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right). \tag{3.63}$$

Аналогічно можна розписати і дві інші проекції. Отримана система рівнянь руху в’язкої рідини і носить назву системи рівнянь Нав’є-Стокса.

У векторній формі можна записати

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}grad\ p+\nu\nabla^2\vec{v}. \tag{3.64}$$

Як випливає з (3.64), це рівняння відрізняється від рівняння руху ідеальної рідини додатковим членом (($\nu\nabla^2\vec{v}$), який враховує дію сил в’язкого тертя.

Метою гідродинамічного розрахунку є знаходження полів швидкостей і тиску, тобто в результаті розрахунку повинні бути знайдені чотири величини: $v_x$, $v_y$, $v_z$ і $p$. Принципово це виявляється можливим, оскільки три рівняння Нав’є-Стокса (в проекціях) плюс рівняння нерозривності утворюють замкнуту систему. Густина і в’язкість, що входять в них, вважаються відомими, а проекції масових сил (X, У, Z) задаються умовами конкретної задачі.

З чисто математичних позицій рівняння Нав’є-Стокса відноситься до класу нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку. Одна з найнеприємніших їх властивостей - нелінійність, зумовлена наявністю конвективних членів прискорення. Слід зазначити, що до теперішнього часу внаслідок практично непереборних математичних труднощів не визначено жодного загального розв’язання рівнянь Нав’є-Стокса в їх повному вигляді, тобто при збереженні всіх конвективних членів і всіх членів, що враховують в’язкість. Відомі лише окремі частинні розв’язки.

Однією з основних граничних умов при інтегруванні є умова «прилипання», тобто рівність нулю швидкості рідини на стінці.

Перепишемо рівняння (3.64) з урахуванням виразів для $\vec{F}$ ($\vec{F}=\left(-2\vec{\omega}\times\vec{V}-\nabla\Phi\right)\rho$):

$$\rho\left(\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\omega}\times\vec{V}\right)=-\nabla P-\rho\nabla\Phi+\mu\nabla^2\vec{V}\ , \tag{3.64а}$$

де $\Phi$ - потенціал сили тяжіння.

Врахуємо, що

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} \text{ і } \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} = \left(\nabla\times\vec{V}\right)\times\vec{V} + \nabla\frac{V^2}{2} = \vec{\Omega}\times\vec{V} + \nabla\frac{V^2}{2} .$$

Тоді

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(2\vec{\omega} + \vec{\Omega}\right)\times\vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla\left(\Phi + \frac{V^2}{2}\right) + \nu\nabla^2\vec{V} , \tag{3.65}$$

де

$$\nabla^2\vec{V} = \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial z^2} .$$

Представимо рівняння руху для в’язкої нестисливої рідини в формі Громеко - Лемба. З цією метою скористаємося співвідношеннями векторного аналізу

$$\nabla^2\vec{V} = grad\ div\vec{V} - rot\ \ rot\vec{V} ,\quad \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} = rot\vec{V}\times\vec{V} + grad\left(\frac{V^2}{2}\right). \tag{3.66}$$

Для нестисливої рідини ($div\ \ \vec{V}\ = 0$)

$$\nabla^2\vec{V} = -rot\, rot\ \ \vec{V} . \tag{3.67}$$

Якщо врахувати, що масова сила $F$ є сума сил тяжіння і Коріоліса, а сила тяжіння має потенціал $\Phi$, $rot\ \vec{V}\ = \vec{\Omega}$, то рівняння (3.65) в системі координат, пов’язаній з обертовою Землею, набуде такого вигляду:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}\right)\times\vec{V} = -grad\left(\frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{P}{\rho}\right) - \frac{\mu}{\rho} rot\vec{\Omega} . \tag{3.68}$$

Таким чином отримано рівняння руху для в’язкої нестисливої рідини в формі Громеко - Лемба, що використовується в задачах геофізичної гідродинаміки.

## 3.4 Закон збереження маси. Рівняння нерозривності

Як вказувалося раніше, величини, що характеризують стан рухомої рідини, є функціями координат *x, y, z* і часу *t.* При цьому вектор швидкості елементарного об'єму рідини $\vec{V}(x,y,z,t)$ відноситься до даної точки простору і моменту часу t (ейлеровий опис), а не до певних частинок рідини, що пересуваються з часом в просторі (лагранжовий опис). Те ж відноситься і до величин густини $\rho$ і тиску $p$.

Виведення основних гідродинамічних рівнянь почнемо з рівняння нерозривності, яке виражає закон збереження маси. Розглянемо деякий об'єм простору $\tau_0$.

Маса рідини в цьому об'ємі є $\int\limits_{\tau_0} \rho d\tau$.

Через елемент *ds* поверхні, яка обмежує розглянутий об'єм, в одиницю часу протікає кількість рідини, що дорівнює $\rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор, направлений по зовнішній нормалі до елемента поверхні.Тоді $\rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds$ додатне, якщо рідина витікає із об'єму, і від'ємне, якщо рідина втікає в нього.

Повна кількість рідини, що протікає за одиницю часу через поверхню $S_0$, яка обмежує об'єм $\tau_0$, дорівнює

$$\int\limits_{S_0} \rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds \quad . \tag{3.69}$$

З іншого боку, зміна маси рідини в об'ємі $\tau_0$ в одиницю часу є

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau_0} \rho d\tau . \tag{3.70}$$

Оскільки ця зміна маси рідини однозначно визначається припливом або стоком її через поверхню, то величини (3.69) і (3.70) рівні між собою і протилежні за знаком:

$$\int\limits_{S_0} \rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau_0} \rho d\tau \tag{3.71}$$

Замінюючи в (3.71) інтеграл по поверхні інтегралом по об'єму, згідно з формулою Остроградського – Гаусса

$$\int_{\tau_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\vec{V}\right)d\tau=0. \tag{3.72}$$

Оскільки рівність (3.72) виконується для будь-якого об'єму, то підінтегральний вираз дорівнює нулю. Таким чином отримуємо рівняння нерозривності

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\vec{V}=0. \tag{3.73}$$

Вектор $\vec{\Pi}_\rho=\rho\vec{V}$ називают щільністю потоку рідини.

Його напрям співпадає з напрямом руху рідини, а абсолютна величина визначає кількість рідини, що протікає в одиницю часу через одиничну площинку, перпендикулярну до вектора швидкості. Зміна щільності з часом в фіксованій точці простору однозначно визначається дивергенцією щільності потоку рідини.

Рівняння нерозривності (3.73) можна переписати в іншому вигляді, якщо розкрити $div\rho\vec{V}$.

Дійсно,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\cdot grad\rho+\rho div\vec{V}=0.$$

Сума перших двох доданків дає повну похідну $\frac{d\rho}{dt}$.

Тому

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho div\vec{V}=0. \tag{3.74}$$

Звідси виходить ще одне визначення тривимірної дивергенції

$$div\vec{V}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \tag{3.75}$$

як відносна зміна щільності за одиницю часу в рухомому об'ємі.

Для нестисливої рідини ($\rho$ = $const$) отримаєм $div\vec{V}=0$, Для стаціонарного поля густини $div\rho\vec{V}=0$.

Відзначимо, що згідно з (3.71) для нестисливої рідини потік швидкості

$$\int_{S_0} \vec{V} \cdot \vec{n} ds = 0, \tag{3.76}$$

а для стаціонарної щільності потік кількості руху

$$\int_{S_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = 0 \tag{3.77}$$

через будь-яку нерухому замкнену поверхню дорівнює нулю.

# 4 ТЕРМОДИНАМІКА

## 4.1 Термодинаміка об'єктів геофізичної гідродинаміки

Об'єкти геофізичної гідродинаміки зазнають впливу сили ваги і є стисливими. Коли ці чинники є визначальними, то спостерігається квазігідростатична зміна тиску по вертикалі. Дійсно, з рівняння Громеко-Лемба (3.68) в наближенні гідростатики, коли члени, що описують рух рідини малі, отримаємо

$$grad\left(\Phi+\frac{P_0}{\rho_0}\right)=0,\qquad \Phi+\frac{P_0}{\rho_0}=const, \tag{4.1}$$

де $P_0, \rho_0$ - гідростатичний тиск і густина.

Тогді тиск $P$ і густину $\rho$ об'єктів геофізичної гідродинаміки можна представити як суму їх гідростатичних значень і відхилень від них:

$$P=P_0+P',\quad \rho=\rho_0+\rho'. \tag{4.2}$$

Флуктуації густини, що виникають, спричиняють виникнення сили плавучості.

Таким чином, для опису об'єктів геофізичної гідродинаміки необхідно враховувати зміну густини по вертикалі і ефекти сили плавучості розглядуваного середовища, вплив яких ускладнюється через те, що реальні рідини і гази бароклінні, їх густина залежить не тільки від тиску (як в баротропних середовищах), але також від температури і концентрації термодинамічно активних домішок. З цією метою розглянемо термодинамічні характеристики і рівняння стану середовища.

## 4.2 Основні термодинамічні характеристики. Закони термодинаміки

Будемо вважати, що розглядуване середовище (атмосферне повітря, океанська вода і т.д.) характеризується трьома незалежними термодинамічними змінними, за які визьмемо температуру $T$, тиск $P$ і масову концентрацію s термодинамічно активної домішки. Як $s$ може бути використана масова частка водяної пари в атмосфері або солоність океанської води.

Термодинамічний метод опису об'єктів геофізичної гідродинаміки полягає у вивченні властивостей системи взаємодіючих тіл шляхом аналізу умов і кількісних співвідношень перетворень енергії, які виникають в ній.

В основі термодинамічного методу лежать перший і другий закони термодинаміки для макроскопічних нерухомих і рухомих систем.

Перший закон термодинаміки по суті виражає закон збереження і перетворення енергії і для нерухомої системи свідчить, що кількість теплоти $Q$, передана системі, витрачається на зміну її внутрішньої енергії $E$ і на повну роботу $A$, здійснену системою проти зовнішніх сил. Для елементарного об'єму рідини перший закон термодинаміки можна записати у вигляді

$$\delta Q = \delta E + \delta A \ . \tag{4.3}$$

Під внутрішньою енергією будемо розуміти енергію системи, що залежить тільки від її термодинамічного стану і включає енергію хаотичного (теплового) руху всіх мікрочастинок системи (молекул, атомів, іонів і т.д.), енергію взаємодії цих частинок і т.д.

Перший закон термодинаміки, що виражає загальний закон збереження і перетворення енергії, не дозволяє визначити напрям протікання термодинамічних процесів. З цією метою використовується другий закон термодинаміки, який свідчить, що неможливий процес, єдиним результатом якого є передача енергії в формі теплоти від менш до більш нагрітого тіла. Для математичного формулювання другого закону термодинаміки вводиться поняття ентропії. Ентропією $\eta$ називаєтся функція стану системи, диференціал якої в елементарному оборотному процесі дорівнює відношенню нескінченно малої кількості теплоти, наданої системі, до абсолютної температури останньої:

$$d\eta = \frac{\delta Q}{T} \ . \tag{4.4}$$

Під елементарним будемо розуміти процес, що приводить до зміни характеристик системи на нескінченно малі величини.

Для довільного елементарного процесу

$$d\eta \geq \frac{\delta Q}{T} \ , \tag{4.5}$$

де знак рівності відноситься до оборотних процесів, а знак нерівності - до необоротних. Співвідношення (4.5) є математичним записом другого закону термодинаміки, який стверджує, що ентропія ізольованої системи при будь-яких процесах, що відбуваються в ній, не може убувати.

Об'єднуючи перший (4.3) і другий (4.5) закони, отримуємо основне співвідношення термодинаміки

$$Td\eta \geq dE + \delta A\ . \tag{4.6}$$

У багатьох застосуваннях геофізичної гідродинаміки використовується основне співвідношення термодинаміки для оборотних процесів

$$Td\eta = dE + \delta A\,. \tag{4.7}$$

Тут $\delta A = Pd(1/\rho) + \delta A_*$, тобто сума робіт, які здійснюються системою проти сил зовнішнього тиску $\left(Pd(1/\rho)\right)$ та інших зовнішніх сил $\left(\delta A_*\right)$.

Характеристика термодинамічного стану середовища здійснюється за допомогою характеристичних функцій і термодинамічних потенціалів. Характеристичною функцією називається функція стану системи, за допомогою якої і її похідних можуть бути явно виражені термодинамічні властивості системи. Термодинамічний потенціал $\varphi$ є характеристична функція, спад якої в оборотному процессі, що протікає при незмінних значеннях певної пари термодинамічних параметрів ($T$ і $1/\rho$, $T$ і $P$, $\eta$ і $P$, $\eta$ і $1/\rho$ і т.п.), дорівнює різниці повної роботи, виконаної системою, і роботи проти зовнішнього тиску.

На основі (4.7) як термодинамічний потенціал введемо функцію $\varphi = \varphi(T,P,s)$ (термодинамічний потенціал Гіббса), диференціал якої визначається формулою

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial T}dT + \frac{\partial\varphi}{\partial P}dP + \frac{\partial\varphi}{\partial s}ds\,. \tag{4.8}$$

Для з’ясування фізичного значення коефіцієнтів (4.8) скористаємося відомим з фізики зв’язком між термодинамічним потенціалом Гіббса і внутрішньою енергією

$$E = \varphi - P/\rho + T\eta\,. \tag{4.9}$$

Продиференціювавши (4.9) і підставивши замість $d\varphi$ вираз (4.8), дістанемо

$$dE = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial T} + \eta\right)dT + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial P} - \frac{1}{\rho}\right)dP + \frac{\partial\varphi}{\partial s}ds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + Td\eta\,. \tag{4.10}$$

З урахуванням (4.7) знайдемо вирази для коефіцієнтів в формулі (4.8):

$\frac{\partial \varphi}{\partial T} = -\eta$ - ентропія,

$\frac{\partial \varphi}{\partial P} = \frac{1}{\rho}$ - питомий об'єм,

$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \mu$ - хімічний потенціал термодинамічно активної домішки.

Запишемо диференціали від ентропії і густини

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial T} dT + \frac{\partial \eta}{\partial P} dP - \frac{\partial \eta}{\partial s} ds\,,$$
$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial T} dT + \frac{\partial \rho}{\partial P} dP + \frac{\partial \rho}{\partial s} ds. \qquad (4.11)$$

Оскільки $Td\eta$ є збільшення тепловмісту одиниці маси $\delta Q$, а співвідношення $\delta Q$ до зміни температури є теплоємність, то питома теплоємність при постійному тиску дорівнює

$$c_P = T\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_{P,s}, \qquad (4.12)$$

де значки $P$ і $s$ означають, що похідна $\frac{\partial \eta}{\partial T}$ береться при постійних $P$ і $s$.

Тоді $\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_{P,s} = \frac{c_P}{T}$.

Можна показати, що $\left(\frac{\partial \eta}{\partial P}\right)_{T,s} = -\frac{\alpha}{\rho}$, де $\alpha = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}$ - коефіцієнт термічного розширення, а $\delta = \frac{\partial \eta}{\partial s} = -\frac{\partial \mu}{\partial T}$. Введемо $\beta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}$ і $\gamma = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s}$ - коефіцієнти стисливості за рахунок $P$ і $s$.

Підставивши отримані співвідношення в (4.11), отримаємо

$$d\eta = \frac{c_P}{T}dT - \frac{\alpha}{\rho}dP + \delta ds\,,$$
$$d\rho = -\alpha\rho dT + \beta\rho dP + \gamma\rho ds. \qquad (4.13)$$

Рівняння (4.13) представляє собою диференціальну форму рівняння стану середовища $\rho = \rho(T,P,s)$. Якщо воно має спрощений вигляд $\rho = \rho(P)$, тобто густина середовища залежить тільки від тиску, то средовище називається баротропним; в протилежному випадку воно називається бароклінним.

Важливою термодинамічною характеристикою середовища є також швидкість звуку

$$c(T,P,s) = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\eta,s}\right]^{1/2}, \qquad (4.14)$$

де значки $\eta,s$ вказують, що похідна $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ береться при постійних $\eta$ і $s$.

Ввівши аналогічно (4.12) питому теплоємність при постійному об'ємі (густині)

$$c_v = T\left(\frac{\partial \eta}{\partial T}\right)_{\rho,s}, \qquad (4.15)$$

і комбінуючи формули (4.13), знайдемо

$$c_v = \frac{1}{\kappa - 1}\frac{\alpha^2 T}{\beta\rho}\,, \quad \kappa = \frac{c_P}{c_v} = \beta\rho c^2. \qquad (4.16)$$

Як один з прикладів розглянемо вологе (ненасичене) атмосферне повітря. З достатньою для геофізичної гідродинаміки точністю його можна вважати сумішшю ідеальних газів. Ідеальним називається газ, в якому відсутні сили міжмолекулярної взаємодії (не змішувати з ідеальною рідиною, де відсутні сили молекулярної в'язкості). З достатньою мірою точності реальні гази можна вважати ідеальними в тих випадках, коли розглядаються їх стани, далекі від областей фазових перетворень.

Найбільш мінливою складовою частиною атмосферного повітря є водяна пара, яка розглядається як термодинамічно активна домішка, так що $s$ - масова частка водяної пари. Рівняння стану вологого повітря має вигляд

$$P = \rho RT, \qquad R = (1-s)R_B + sR_П, \tag{4.17}$$

де $R_B = R_0 / \mu_B \cong 287$ Дж/(кг· К), $R_П = R_0 / \mu_П \cong 462$ Дж/(кг· К) - газові сталі сухого повітря і водяної пари, $R_0 = 8{,}31$ Дж/(моль· К) - універсальна газова стала, $\mu_B \approx 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль і $\mu_П \approx 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль - маси одного моля сухого повітря і водяної пари.

Із (4.17) видно, що коефіцієнт $\beta$ дорівнює $1/P$, отже, із другої формули (4.16) дістанемо

$$c^2 = \frac{\kappa P}{\rho} = \kappa RT. \tag{4.18}$$

За законом Дальтона тиск суміші дорівнює сумі парціальних тисків її складових - сухого повітря $P_B$ і водяної пари $P_П$.

Тоді парціальний тиск водяної пари з урахуванням (3.1.15) дорівнює

$$P_П = P - P_B = P\left(1 - \frac{P_B}{P}\right) = s\left[s + \alpha_П (1-s)\right]^{-1} P,$$
$$\alpha_П = \mu_П / \mu_B \cong 0{,}622. \tag{4.19}$$

Ентропія вологого повітря визначається за формулами

$$\eta = (1-s)\eta_B + s\eta_П, \; \eta_B = (c_P)_B \ln T - R_B \ln P_B + const,$$
$$\eta_П = (c_P)_П \ln T - R_П \ln P_П + const, \tag{4.20}$$

де $(c_P)_B \cong$ 1003 (Дж/ кг К) і $(c_P)_П =$ 1810 ( Дж/ кг К) - питомі теплоємності сухого повітря і водяної пари при постійних $P$ і $s$.

Як другий приклад розглянемо океанську воду, в якій роль термодинамічно активної домішки відіграє солоність $s$. Аналітичний розрахунок термодинамічних характеристик крапельних рідин значно складніший в порвнянні з газами, оскільки при цьому розрахунку необхідно враховувати дальні взємодії між молекулами, кулоновські сили, діючі між іонами, аномальну поведінку густини при зміні температури в діапазоні температур від максимальної густини ($\approx 4^0 C$) до замерзання ($\approx 0^0 C$).

Внаслідок всіх цих ускладнень рівняння стану океанської води вдалося отримати лише емпіричним шляхом. Його прийнято записувати у вигляді

$$\rho(T,P,s)=\rho_0\left(1+10^{-3}\sigma_t\right)\left[1-\mu(P-P_a)\right]^{-1}, \qquad (4.21)$$

де $P_a$ = 1013,25 гПа - стандартний атмосферний тиск,

$\rho_0=\rho\left(4^0C,P_a,0\right)$ ; $\sigma_t=10^3\left[\rho(T,P_a,s)/\rho_0-1\right]$- так звана умовна густина, $\mu=\left[K_0+A(P-P_a)+B(P-P_a)^2\right]^{-1}$- коефіцієнт ізотермічної стисливості води, причому функції $\sigma_t, K_0$, $A$ і $B$ описуються багаточленами третього ступеня від $T$ і ($s$ - 35) $^0/_{00}$.

Швидкість звуку (4.14) в океанській воді зростає із збільшенням температури, тиску і солоності і описується емпіричною формулою, згідно з якою до стандартного значення *з* = 1449,30 м/з додаються поправки у вигляді кубічних багаточленів від *T, P,* і *s*.

В цьому розділі розглядалися термодинамічні процеси, що описують зміну термодинамічних характеристик в нерухомому елементарному об'ємі рідини. У геофізичній гідродинаміці також необхідно вивчати термодинамічні процеси в рухомій рідині.

### 4.3 Рівняння переносу тепла для ідеальної і в'язкої рідини

Рівняння переносу тепла є математичним вираженням закону збереження енергії. Виведення цього рівняння здійснимо в два етапи - спочатку для ідеальної, потім для в'язкої рідини.

Зафіксуємо в просторі елемент об'єму і розглянемо як змінюється з часом сума кінетичної і внутрішньої енергії рідини, що протікає через цей об'єм.

Сумарна енергія одиниці об'єму рідини дорівнює $\rho\frac{V^2}{2}+\rho E$, де перший член є кінетична енергія, а другий - внутрішня енергія ($E$ - внутрішня енергія одиниці маси рідини). Змінення з часом цієї сумарної енергії визначається рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho E\right). \qquad (4.22)$$

Визначимо окремо локальну похідну кінетичної і внутрішньої енергії. Спочатку знайдемо цю похідну для кінетичної енергії

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}\right)=\frac{V^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho\frac{\partial V^2}{\partial t}=-\frac{V^2}{2}div\rho\vec{V}+\rho\vec{V}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}. \qquad (4.23)$$

Замінивши $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}$ із рівняння руху в формі Ейлера

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=\vec{F}_m-\frac{1}{\rho}gradP,$$

отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho V^2}{2}=-\frac{V^2}{2}div\rho\vec{V}-\rho\vec{V}\cdot\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}-\vec{V}\cdot gradP+\rho\vec{V}\cdot\vec{F}\ . \qquad (4.24)$$

Введемо теплову функцію

$$W\equiv E+P/\rho, \qquad (4.25)$$

яка пов'язана з термодинамічним потенціалом і ентропією згідно з (4.9) співвідношенням

$$W=\varphi+T\eta\ . \qquad (4.26)$$

Далі замінимо $\vec{V}\cdot\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}=\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\nabla V^2$, а градієнт тиску виразимо через термодинамічні змінні $\nabla P=\rho\nabla W-\rho T\nabla\eta-\rho\mu\nabla s$, використовуючи термодинамічні співвідношення

$$dW=dE+Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}dP \quad \text{і} \quad dW=Td\eta+\frac{1}{\rho}dP+\mu ds.$$

У результаті дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho V^2}{2}=-\frac{V^2}{2}div\rho\vec{V}-\rho\vec{V}\cdot\nabla\left(W+\frac{V^2}{2}\right)+\rho T\vec{V}\cdot\nabla\eta+\rho\vec{V}\cdot\mu\nabla s+\rho\vec{F}\cdot\vec{V}. \qquad (4.27)$$

Тепер знайдемо локальну похідну від внутрішньої енергії. Для цього знову скористаємось термодинамічними співвідношеннями (4.9) - (4.10)

$$d(\rho E) = Ed\rho + \rho dE = Wd\rho + \rho Td\eta + \rho\mu ds\,. \qquad (4.28)$$

Розділимо останнє співвідношення на $dt$ і перейдемо від повних до частиних похідних за часом:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{V} \cdot grad(\rho E) = W\frac{\partial \rho}{\partial t} + W\vec{V} \cdot grad\rho + \rho T\frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho T\vec{V} \cdot grad\eta +$$
$$+ \rho\mu\frac{\partial s}{\partial t} + \rho\mu\vec{V} \cdot grads\,. \qquad (4.29)$$

Оскільки

$$\vec{V} \cdot grad(\rho E) = W\vec{V} \cdot grad\rho + \rho T\vec{V} \cdot grad\eta + \rho\mu\vec{V} \cdot grads\,,$$

тоді

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} = W\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho\mu\frac{\partial s}{\partial t}\,. \qquad (4.30)$$

За визначенням повна похідна від ентропії у часі є відношення притпливу тепла до одиниці маси рідини за одиницю часу ($\varepsilon'$) до температури ($T$).

Аналогічно $\varepsilon''$ є приплив термодинамічно активної домішки до одиниці маси за одиницю часу.

Тоді

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{T}\varepsilon' - \vec{V} \cdot grad\eta\,,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \varepsilon'' - \vec{V} \cdot grads\,. \qquad (4.31)$$

Підставивши (4.31) в (4.30), дістанемо

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} = -Wdiv\rho\vec{V} - \rho T\vec{V} \cdot grad\eta - \rho\mu\vec{V} \cdot grads + \rho\varepsilon' + \rho\mu\varepsilon''\,. \qquad (4.32)$$

Складаючи (4.27) з (4.32), отримаємо вираз для зміни сумарної енергії одиниці об’єму з часом в фіксованій точці простору

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho E\right)=-\left(W+\frac{V^2}{2}\right)div\rho\vec{V}-\rho\vec{V}\cdot\nabla\left(W+\frac{V^2}{2}\right)+\rho\vec{V}\cdot\vec{F}+\rho\varepsilon'+$$
$$+\rho\mu\varepsilon''. \tag{4.33}$$

Це співвідношення можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho E\right)=-div\left[\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+W\right)\right]+\rho\vec{V}\cdot\vec{F}+\rho\varepsilon'+\rho\mu\varepsilon''. \tag{4.34}$$

Таким чином, отримано математичний вираз закону збереження енергії для ідеальної рідини з урахуванням роботи масових сил ($\rho\vec{V}\cdot\vec{F}$), зовнішнього припливу тепла ($\rho\varepsilon'$) і зміни вмісту термодинамично активної домішки ($\rho\mu\varepsilon''$).

Для з’ясування фізичного значення отриманої рівності розглянемо найпростіший випадок горизонтального руху при відсутності зовнішнього припливу тепла і зміни вмісту термодинамічно активної домішки. Тоді останніми трьома членами правої частини можна знехтувати. Проінтегруємо (4.34) по довільному об’єму і інтеграл, що стоїть праворуч, перетворимо в інтеграл по поверхні

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho E\right)d\tau=-\int_{S}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}\left(\frac{V^2}{2}+W\right)dS. \tag{4.35}$$

Зліва стоїть зміна в одиницю часу енергії рідини в деякому заданому об’ємі простору, праворуч - кількість енергії, яка витікає в одиницю часу з об’єму, що розглядається. Тоді

$$\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+W\right) \tag{4.36}$$

представляє собою вектор густини потоку енергії. Його абсолютна величина є кількість енергії, що протікає в одиницю часу через одиницю поверхні, розташовану перпендикулярно до напряму швидкості. Вираз (4.36) показує, що кожна одиниця маси рідини ніби переносить при своєму русі енергію $W+V^2/2$.

Підставивши $W=E+P/\rho,$ перепишемо повний потік енергії через замкнуту поверхню у вигляді

$$-\int_S \rho\vec{V}\cdot\vec{n}\left(\frac{V^2}{2}+E\right)ds-\int_S P\vec{V}\cdot\vec{n}ds \qquad (4.37)$$

Перший член є сума кінетичної і внутрішньої енергії, яка переноситься за одиницю часу через поверхню розглядуваного об'єму, другий член представляє собою роботу, яка виконується силами тиску над рідиною, що міститься всередині об'єму.

Переходимо до розгляду в'язкої рідини. У в'язкій рідині також виконується закон збереження енергії, згідно з яким зміна сумарної енергії рідини (кінетична + теплова) в деякому об'ємі за одиницю часу дорівнює повному потоку енергії через межі цього об'єму. Однак у разі в'язкої рідини крім потоку $\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+W\right)$, пов'язаного з переносом маси рідини при її русі, є ще потік, пов'язаний з процесами внутрішнього тертя, який виражається вектором $-\vec{V}\cdot\tau$ з компонентами $v_\beta\tau_{\beta j}$ , де $\tau$ - тензор в'язких напружень.

Нарівні з цим додатковим потоком енергії буде відбуватись також перенос тепла, зумовлений процесом теплопровідності, якщо температура рідини не постійна всередині об'єму. За рахунок теплопровідності здійснюється молекулярний перенос енергії з місць з більш високою в місця з більш низькою температурою. Підкреслимо, що молекулярний перенос енергії не пов'язаний з макроскопічним рухом і відбувається також в нерухомій рідині. Якщо через $\vec{q}$ позначити щільність потоку тепла, який переноситься за допомогою теплопровідності, і врахувати, що в явищах теплопровідності, як правило, спостерігаються не дуже великі просторові градієнти температури в рідині, то температурну неоднорідність з достатнім ступенем точності можна охарактеризувати першими похідними.

Тоді отримаємо

$$\vec{q}=-\kappa\nabla T \ , \qquad (4.38)$$

де $\kappa$ - коефіцієнт теплопровідності, який, взагалі кажучи, є функцією температури і тиску. Вектори $\vec{q}$ і $\nabla T$ мають протилежні напрямки.

Тоді щільність потоку енергії при наявності в'язкості і теплопровідності дорівнює

$$\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+W\right)-\vec{V}\cdot\tau-\kappa\nabla T \quad . \tag{4.39}$$

Закон збереження енергії в цьому випадку виражається рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho E\right)=-div\left[\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+W\right)-\vec{V}\cdot\tau-\kappa\nabla T\right]+\rho\vec{V}\cdot\vec{F}+\rho\varepsilon'+$$
$$+\rho\mu\varepsilon'' . \tag{4.40}$$

Ліва частина (4.40) з урахуванням рівнянь нерозривності і Нав'е - Стокса перетворюється на вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho E\right)=-\frac{V^2}{2}div\rho\vec{V}-\rho\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\frac{V^2}{2}-\vec{V}\cdot\nabla P+\rho\vec{V}\cdot\vec{F}+$$
$$v_\beta\frac{\partial\tau_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}+\rho\frac{\partial E}{\partial t}-Ediv\rho\vec{V} . \tag{4.41}$$

Далі, скориставшись термодинамічними співвідношеннями (як у випадку ідеальної рідини), дістанемо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho E\right)=-div\left[\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+W\right)-\vec{V}\tau-\kappa\nabla T\right]+\rho T\frac{d\eta}{dt}+\rho\mu\frac{ds}{dt}+$$
$$+\rho\vec{V}\cdot\vec{F}-div\left(\kappa\nabla T\right)-\tau_{\beta\alpha}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \quad . \tag{4.42}$$

Порівнявши (4.42) з (4.40), отримаємо загальне рівняння переносу тепла для в'язкої рідини

$$\rho T\frac{d\eta}{dt}=\tau_{\beta\alpha}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}+div\left(\kappa\nabla T\right)+\rho\varepsilon' \ . \tag{4.43}$$

Із (4.43) виходить, що зміна ентропії в рухомому об'ємі зумовлена дисипацією, теплопровідністю і зовнішніми припливами тепла.

Покажемо, що внаслідок необоротних процесів теплопровідності і внутрішнього тертя ентропія рідини тільки зростає. Дійсно, за допомогою рівняння нерозривності, загального рівняння переносу тепла (4.43) і виразу для в'язких напружень отримаємо

$$\frac{\partial\rho\eta}{\partial t} = -div\left(\rho\eta\vec{V}\right) + div\left(\frac{\kappa\nabla T}{T}\right) + \frac{\kappa\left(\nabla T\right)^2}{T^2} +$$

$$+ \frac{\mu}{2T}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)^2 + \frac{\mu'}{T}\left(div\vec{V}\right)^2 . \qquad (4.44)$$

Проінтегрувавши отриманий вираз по необмеженому об'єму рідини і спрямувавши граничну поверхню на нескінченність, де рідина покоїться і $\nabla T = 0$, отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\eta d\tau = \int \frac{\kappa\left(\nabla T\right)^2}{T^2} d\tau +$$

$$+ \int \frac{\mu}{2T}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)^2 + \int \frac{\mu'}{T}\left(div\vec{V}\right)^2 d\tau . \qquad (4.45)$$

Перший член описує збільшення ентропії за рахунок теплопровідності, другий і третій - за рахунок внутрішнього тертя, що доводить факт зростання ентропії.

Рівняння (4.43) з урахуванням виразу для в'язких напружень переписується у вигляді

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\rho T}\left[\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial v_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)^2 + \mu'\left(div\vec{V}\right)^2 + div\left(\kappa\nabla T\right)\right] + \varepsilon' / T .$$

(4.46)

Якщо скористатись введеним поняттям про термодинамічні процеси і визначити їх як зміну з часом будь-яких термодинамічних характеристик рідких частинок, що спричиняється процесами теплопровідності, і внутрішнього тертя, радіаційним теплообміном, фазовими перетвореннями речовин, то рівняння для швидкостей зміни ентропії і концентрації термодинамічно активної домішки можна записати

$$\frac{d\eta}{dt} = \varepsilon_\eta , \quad \frac{ds}{dt} = \varepsilon_s . \qquad (4.47)$$

Тут $\varepsilon_\eta$ - швидкість припливу тепла, поділена на температуру, а $\varepsilon_s$ - швидкість припливу домішки до одиниці маси рідини.

Процеси, при яких $\varepsilon_\eta = 0$ (ентропія виявляється лагранжевим інваріантом) називаються ізентропічними. Якщо до того ж і $\varepsilon_s = 0$ (концентрація домішки також лагранжевий інваріант), то процеси називаються адіабатичними.

З (4.14) видно, що при адіабатичних процессах

$$\frac{dP}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} . \tag{4.48}$$

Запишемо рівняння перенесення тепла (4.46), виразивши ентропію через незалежні термодинамічні змінні. Оскільки $\eta = \eta(T, P, s),$ то

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial P}\frac{dP}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial s}\frac{ds}{dt} . \tag{4.49}$$

Оскільки $\frac{\partial\eta}{\partial T} = \frac{c_p}{T}$, $\frac{\partial\eta}{\partial p} = -\frac{\alpha}{\rho}$, $\frac{\partial\eta}{\partial s} = \delta$, то із (4.49) виходить, що

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{\alpha T}{\rho} \cdot \frac{dP}{dt} = T(\varepsilon_\eta - \delta\varepsilon_s) = \varepsilon_T , \tag{4.50}$$

де $\varepsilon_T$ - повний приплив тепла до одиниці маси рідини за рахунок внутрішніх і зовнішніх джерел.

Це рівняння є рівнянням перенесення тепла, яке в геофізичній гідродинаміці називається рівнянням припливу тепла.

Для досконалого газу $(\alpha = 1/T, \rho = P/(RT))$ рівняння (4.50) переписується у вигляді

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = \varepsilon_T . \tag{4.51}$$

Таким чином, отримані рівняння перенесення тепла для ідеальної і в’язкої рідини.

### 4.4 Умови рівноваги стратифікованої рідини

Під стратифікованою рідиною будемо розуміти рідину, в якій густина $\rho$ змінюється по вертикалі, тобто у напрямі сили тяжіння. Можна розглядати стратифікацію й інших термодинамічних характеристик (температури *T*, концентрації термодинамично активних домішок *s*, швидкості звуку $c$, ентропії $\eta$ та інших), але найбільше динамічне значення в геофізичній гідродинаміці має стратифікація густини, яка безпосередньо визначає характер дій специфічних для природних течій архімедових сил. Щоб оцінити дію цих сил на рідкі частинки, адіабатично переміщувані по вертикалі, будемо використовувати як незалежні термодинамічні змінні $\eta$, $p$ і $s$. Введемо вертикальну координату $z$, що відлічується від поверхні моря вгору.

Для опису умов рівноваги стратифікованої рідини зручно користуватися поняттям потенціальної густини $\rho_*$, яка визначається як густина рідини адіабатично приведеної до стандартного тиску $p_0$, т. т. $\rho_*(\eta,s)=\rho(\eta,s,p_0)$.

Для визначення потенціальної густини скористаємось рівняннями (4.13). Вважаючи в них $dp = 0$ і виключаючи $dT,$ диференціал потенціальної густини $d\rho_*$ можна привести до вигляду

$$d\rho_* = \frac{\rho_*\alpha_*T_*}{c_{p*}}\left[-d\eta+\left(\delta_*+\frac{\gamma_*c_{p*}}{\alpha_*T_*}\right)ds\right], \tag{4.52}$$

де зірочками знизу позначені значення функцій від $\eta$, $p$ і $s$ при $p = p_0$.

Формулу (4.52) можна істотно спростити, якщо ентропію виразити у вигляді функції від густини, тиску і концентрації домішки. Після заміни $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz$ $\left(f=\rho_*,\eta,s\right)$ при $z = z_0$ отримаємо з урахуванням співвідношень (4.16)

$$\frac{\partial\rho_*}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{4.53}$$

В стратифікованому середовищі параметри $\eta$, $p$ і $s$, взагалі кажучи, змінюються із зміною вертикальної координати $z$, так що стратифікація густини описується функцією $\rho(z)=\rho[\eta(z),s(z),p(z)]$.

При адіабатичному зміщенні рідкої частинки з рівня $z_0$, де $p = p_0$, на рівень $z$, де її густина буде дорівнювати $\rho_0(z)=\rho[\eta(z_0),s(z_0),p(z)]$ і при малому зміщенні $\delta z = z - z_0$ буде відрізнятися від густини навколишнього середовища на величину $\rho_0(z)-\rho(z)$. Густина частинки на рівні $z$ визначається початковим значенням на рівні $z_0$ і зміною тиску $\delta p = p(z)-p(z_0)$, оскільки η і $s$ при адіабатичних переміщеннях не змінюються. Тоді з урахуванням (4.14) густина частинки $\rho_0(z) = \rho(z_0) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial z}\delta z$ .

В навколишньому середовищі $\rho(z) = \rho(z_0) + \frac{\partial \rho}{\partial z}\delta z$ .

Звідки дістанемо

$$\rho_0(z) - \rho(z) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\delta z$$

і на основі (4.53) знаходимо

$$\rho_0(z) - \rho(z) = -\frac{\partial \rho_*}{\partial z}\delta z \; . \tag{4.53 a}$$

Тоді сила плавучості, діюча на одиницю об'єму, дорівнює

$$g(\rho - \rho_0) = g\frac{\partial \rho_*}{\partial z}\delta z \; . \tag{4.54}$$

При $\frac{\partial \rho_*}{\partial z} = 0$ частинка, виведена із стану рівноваги, буде залишатись на тому рівні, куди вона буде переміщена.

Така стратифікація називається нейтральною. Укажемо, що в нейтральному стратифікованому середовищі, як випливає з (4.52), повинно виконуватися співвідношення

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \left(\delta_* + \frac{\gamma_* c_{p*}}{\alpha_* T_*}\right)\frac{\partial s}{\partial z} \; . \tag{4.55}$$

При $\frac{\partial \rho_*}{\partial z} > 0$ напрямок сили плавучості співпадає з напрямком руху частинки (незалежно від того, вгору чи вниз рухається частинка) і вона діє на рідку частинку,яка зміщюється прискорюючим чином.

В результаті частинка віддаляється від початкового рівня. Така стратифікація є нестійкою. При слабкій дії дисипативних чинників в середовищі розвинеться конвекція, яка за допомогою роботи сил плавучості буде здобувати кінетичну енергію за рахунок потенціальної енергії нестійкої стратифікації.

При $\frac{\partial \rho_*}{\partial z} < 0$ сила плавучості напрямлена проти руху частинки, яка адіабатично переміщується, діє на неї повертаючим чином і прагнє повернути частинку на вихідний рівень. Така стратифікація є стійкою.

Вертикальне зміщення рідкої частинки потребує при стійкій стратифікації витрати енергії на роботу проти сили плавучості. Якщо таке зміщення $\zeta = z - z_0$ зроблено, то, поки не виявляться дисипативні фактори, частинка буде коливатися по вертикалі відносно свого рівноважного рівня $z_0$ з деякою частотою $N$. Це пов'язано з тим, що при досягненні початкового рівня $z_0$ частинка за рахунок сили плавучості набула деякої швидкості і по інерції продовжує рух до рівня, на якому швидкість обертається на нуль. Потім рух повторюється в зворотному напрямі. Величину $N$ можна визначити з рівняння, яке виходить прирівнюванням прискорення частинки силі плавучості, діючій на одиницю маси рідини:

$$\ddot{\zeta} - \frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho_*}{\partial z}\zeta = 0 . \tag{4.56}$$

Це диференціальне рівняння гармонічних коливань з частотою $N$, квадрат якої рівний

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho_*}{\partial z} . \tag{4.57}$$

Величина $N$ називається частотою Вяйсяля - Брента.

В більшості випадків зміни тиску з висотою досить точно описуються рівнянням гідростатики $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, і тоді із (4.57) і (4.53) отримується широко використовувана формула

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{g\rho}{c^2}\right) . \tag{4.58}$$

Із (4.58) виходить, що для виконання умови гідростатичної стійкості ($N^2 > 0$) необхідно, щоб $\frac{\partial \rho}{\partial z} < -\frac{g\rho}{c^2}$ , тобто необхідно, щоб густина середовища досить швидко убувала із зростанням $z$.

Далі, якщо в (4.58) підставити $\frac{\partial \rho}{\partial z}$, отримане із (4.13) з урахуванням залежності всіх термодинамічних змінних від $z$, дістанемо

$$N^2 = \alpha g\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a - \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\partial s}{\partial z}\right), \quad \gamma_a = \frac{\kappa - 1}{\alpha}\frac{g}{c^2}, \tag{4.59}$$

де $\gamma_a$ - адіабатичний градієнт температури.

Під адіабатичним середовищем будемо вважати середовище, в якому ентропія $\eta$ і вміст домішки $s$ незмінні.

Покажемо, що мінус $\gamma_a$ є вертикальний градієнт температури в такому середовищі. Дійсно, якщо скористатися диференціальним рівнянням стану (4.13) і залежністю між термодинамічними змінними, то для зміни температури в адіабатичному середовищі

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_a = -\frac{gT\alpha}{c_p} = -\gamma_a \ . \tag{4.60}$$

Продиференціювавши (4.60) від рівня моря до вертикальної координати $z$, отримаємо

$$ln\frac{T}{T_0} = -\int_0^z \frac{\alpha g}{c_p} dz' \ . \tag{4.61}$$

Якщо на рівні моря тиск дорівнює стандартному, то температура рідини, приведена до нього, зветься потенціальною температурою $\theta$:

$$\theta = T\, exp\left(\int_0^z \frac{\alpha g}{c_p} dz'\right). \tag{4.62}$$

Продиференціювавши цей вираз по $z$, отримаємо

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\alpha g}{c_p} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a\right) \ . \tag{4.63}$$

Скориставшись виразами (4.59) і (4.63), отримаємо в першому наближенні для частоти Вяйсяля - Брента

$$N^2 = \alpha g\left(\frac{T}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\partial s}{\partial z}\right). \tag{4.64}$$

Для ідеального газу $\alpha = \frac{1}{T}$ и $\gamma_a = \frac{g}{c_p}$.

При $c_p \cong 1003$ Дж/(кг К) и $g = 9{,}81\ м/с^2$, $\gamma_a = 0{,}98 \cdot 10^{-2}$ К/м.

Оскільки атмосферне повітря близьке до ідеального газу, то в метеорології широко використовуєтся поняття потенціальної температури, отримане із рівняння припливу тепла (4.51) при $\varepsilon_T = 0$

$$c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p} \quad . \tag{4.65}$$

Тоді після інтегрування останнього співвідношения від рівня ($p_0, T_0$) до рівня ($p,T$) дістанемо

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} . \tag{4.66}$$

Якщо тепер припустити, що $p_0 = 1000$ *гПа*, то для потенціальної температури $\theta$ отримаємо

$$\theta = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} . \tag{4.67}$$

Підкреслимо, що (4.67) є окремий випадок (4.62) стосовно до атмосферних умов.

# 5 ЕЛЕМЕНТИ ДИНАМИКИ ОБЕРТОВИХ СИСТЕМ

## 5.1 Великомасштабні рухи. Число Россбі. Прискореня Коріоліса

Явища, що вивчаються в гідродинаміці, мають макроскопічний характер, тому в гідродинаміці рідина і газ(надалі замість словосполучення "рідина і гази" будемо користуватися, як правило, терміном "рідина") розглядаються як суцільні середовища. Це означає, що всякий малий елемент об’єму рідини вважається настільки великим, що містить ще дуже велику кількість молекул. Відповідно до цього, коли ми будемо говорити про нескінченно малі елементи об’єму, то завжди при цьому буде матися на увазі "фізично" нескінченно малий об’єм, тобто об’єм, досить малий в порівнянні з об’ємом тіла, але великий в порівнянні з міжмолекулярними відстанями. У такому ж значенні треба розуміти вирази, що зустрічаються в гідродинаміці "рідка частинка", "точка рідини". Якщо, наприклад, кажуть про зміщення деякої частинки рідини, то при цьому йде мова не про зміщення окремої молекули, а про зміщення цілого елемента об’єму, який містить багато молекул, але розглядається в гідродинаміці як точка.

Додержуючись класичних курсів теоретичної механіки, викладемо основні положення кінематики і динаміки об’єктів геофізичної гідродинаміки. Під об’єктами геофізичної гідродинаміки будемо розуміти природні течії обертових стратифікованих бароклінних рідин і газів. До них насамперед відносяться рухи в атмосфері і гідросфері (океанах, морях та ріках).

Математичний опис стану рухомої рідини здійснюється за допомогою функцій, які визначають розподіл швидкості рідини $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ і яких-небудь її двох термодинамічних величин, наприклад, тиску $P(x, y, z, t)$ і густини $\rho(x, y, z, t)$.

Як відомо, всі термодинамічні величини визначаються за значеннями яких-небудь двох із них за допомогою рівняння стану речовини; тому завдання п’яти величин (трьох компонент швидкості $\vec{V}$, тиску $P$ і густини $\rho$) повністю визначає стан рухомої рідини.

Ми будемо використовувати просторові координати $x, y, z$ і відносну швидкість руху $\vec{V}$ в системі відліку, яка обертається з постійною у часі $t$ кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (звичайно з середньою кутовою швидкістю обертання Землі).

Всі кінематичні диференціальні характеристики руху (вихор $\vec{\Omega}$, дивергенція $D$ і швидкість деформації $\vec{V}_{\mathrm{d}}$) визначаються з просторового розподілу вектора відносної швидкості.

Як вказувалося раніше, геофізична гідродинаміка, в основному, вивчає великомасштабний атмосферні і океанічні рухи. Виникає необхідність в формулюванні кількісного критерію відношення того або іншого руху до великомасштабного. Очевидно, що відповідь на питання, чи буде даний рух відноситись до великомасштабного, залежить не тільки від його просторового масштабу, але і від механізму формування його динаміки.

Відповідно до визначення геофізичної гідродинаміки природно до великомасштабних віднести рухи, на які істотно впливає обертання Землі. Як міру впливу обертання Землі використовуємо число Россбі, яке вводиться таким чином. Як характерний просторовий масштаб руху $L$ виберемо середню відстань в горизонтальній площині, на якій потік змінює свій напрямок на протилежний.

За експериментальними даними відомо, що в атмосфері і океані рух в горизонтальній площині часто має хвильовий характер. Тому, у якості масштабу $L$ можна вибрати половину довжини плоскої хвилі.

Характерний масштаб горизонтальної швидкості $U$ є середня швидкість руху.

Час, який потрібен для переміщення на відстань $L$ частинки рідини, яка рухається зі швидкістю $U$, дорівнює $L/U$.

Якщо цей проміжок часу істотно більше від періоду обертання Землі, то обертання вносить істотний внесок в динаміку геофізичних об'єктів.

Таким чином, для великомасштабних рухів здійснима умова

$$\frac{L}{U} >> \omega^{-1},$$

або, що еквівалентно,

$$\varepsilon = \frac{U}{2\omega L} << 1 \ .$$

Тут $\omega = 2\pi / T$ - кутова швидкість обертання Землі, $T$ - період.

Безрозмірний параметр $\varepsilon$ називається **числом Россбі**.

При виконанні умови його несуттєвості рухи відносяться до великомасштабних.

**Прискорення Коріоліса.** Тепер покажемо, в якому співвідношенні знаходяться відносне прискорення $\frac{d\vec{V}}{dt}$ і прискорення Коріоліса $2\vec{\omega}\times\vec{V}$ для великомасштабних природних рухів.

Прискорення Коріоліса і відносне прискорення можна оцінити як

$$O(2\vec{\omega}\times\vec{V}) = 2\vec{\omega}U\ ,\ \ O(\frac{d\vec{V}}{dt}) = \frac{U^2}{L}, \tag{5.1}$$

де $O(f)$ - є порядок величини $f$ (векторної або скалярної).

Прискорення Коріоліса не залежить від горизонтального масштабу $L$ і лінійно залежить від масштабу швидкості $U$. Величина відносного прискорення зменшується із збільшенням масштабу довжини і квадратично залежить від $U$. Відношення порядків відносного прискорення і прискорення Коріоліса дорівнює числу Росбі $\varepsilon$. Звідси виходить, що для великомасштабних рухів через малість числа $\varepsilon$ діючі сили створюють в основному прискорення Коріоліса. Цей висновок справедливий лише для нетропічних широт. Оскільки великомасштабні атмосферні і океанічні рухи квазігоризонтальні, то їх динаміка, в основному, визначається вертикальною складовою вектора кутової швидкості обертання Землі, яка дорівнює $\omega sin\varphi$. У зв'язку з цим оцінка (5.1) справедлива лише для нетропічних широт. Нагадаємо, що прискорення Коріоліса відхиляєтся від відносної швидкості вліво на $90^0$. Прискорення, природно, повинно співпадати за напрямком з підсумковою силою $\vec{F}$. Таким чином, для цих широт відносна швидкість, необхідна для створення прискорення Коріоліса, повинна бути направлена праворуч від прикладеної сили (рис. 5.1).

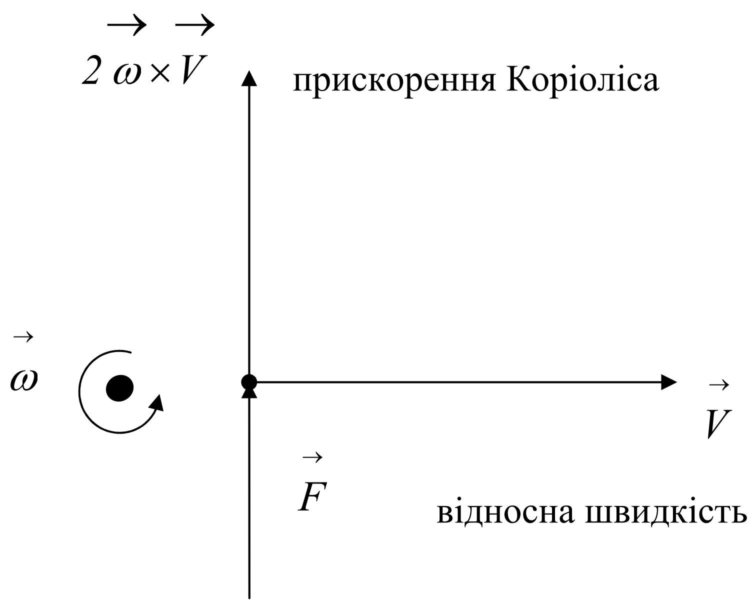


Рисунок 5.1 – Співвідношення між силою і швидкістю, коли переважає прискорення Коріоліса

Підкреслимо, що прискорення Коріоліса переважає над відносним прискоренням для великомасштабний рухів внаслідок малості відносних прискорень. Одночасно укажемо, що для таких рухів часовий масштаб перевищує період обертання Землі. Рідкі частинки мають гіроскопічну тенденцію рухатися під прямим кутом по відношенню до прикладеної сили. Перелічені закономірності представляють собою по суті основні особливості геофізичної гідродинаміки.

Ці особливості природних течій у повітряної та рідкой оболонках Землі, які обертаються разом з нею, широко використовуються при вивченні великомасштабних атмосферних та океанічних рухів. У відповідних курсах динамічної метеорології і фізики океану буде показано, як реалізується гігроскопічна тенденція рухів під прямим кутом до прикладеної сили, що дозволяє отримати важливі у практиці методи кількісного опису швидкостей вітру та течій.

## 5.2 Прискорення циркуляції. Три механіхзми зміни циркуляції швидкості

Як вже вказувалося, інтенсивність вихрової трубки дорівнює циркуляції швидкості по замкненому контуру, який розташований на поверхні трубки і один раз її оперізує. Тому для вивчення зміни інтенсивності вихрової трубки у часі потрібно скористатися рівнянням для швидкості зміни циркуляції. Розглянемо швидкість зміни циркуляції в тому випадку, коли рідкий контур складається з одних і тих же частинок і рухається разом з рідиною. У цьому випадку прискорення циркуляції визначається

$$\delta \Gamma_c = \delta \oint \vec{V} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{r} + \oint \vec{V} \cdot \delta\left(d\vec{r}\right) = \oint \delta\vec{V} d\vec{r} + \oint \vec{V} d\left(\delta\vec{r}\right). \qquad (5.2)$$

Величина $d\left(\delta\vec{r}\right)$ визначаєтся зміною довжини і орієнтації вектора $\delta\vec{r}$ за рахунок разниці швидкостей на кінцях цього вектора (рис.5.2). Оскільки

$$d\left(\delta\vec{r}\right) = \delta\vec{r}\left(t + \delta t\right) - \delta\vec{r}\left(t\right) = d\vec{V} \cdot \delta t\,, \qquad (5.3)$$

або в межі при $\delta t \to 0$

$$\frac{\delta \Gamma_c}{\delta t} \to \frac{d\Gamma_c}{dt}, \frac{\delta\vec{V}}{\delta t} \to \frac{d\vec{V}}{dt}. \qquad (5.4)$$

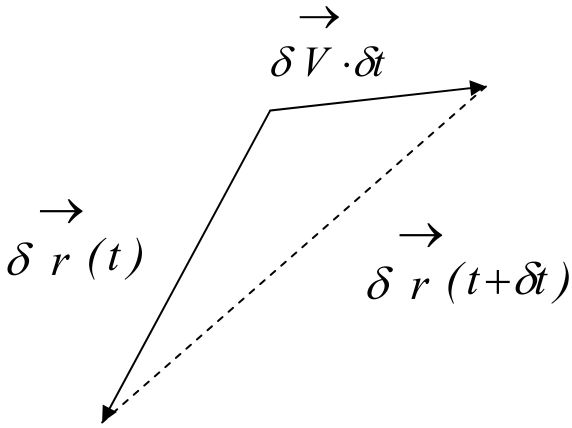


Рисунок 5.2 – Зміна нескінчено малого відрізка за рахунок швидкостей на його кінцях

З урахуванням (5.4) перепишемо (5.2) у вигляді

$$\frac{d\Gamma_c}{dt} = \oint_c \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_c \vec{V} \cdot \vec{d}V = \oint_c \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} + \frac{1}{2}\oint_c d\left|\vec{V}\right|^2. \tag{5.5}$$

Оскільки $\oint_c d\left|\vec{V}\right|^2 = 0,$ як інтеграл по замкненому контуру від повного диференціала, то

$$\frac{d\Gamma_c}{dt} = \oint_c \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} \tag{5.6}$$

Таким чином, швидкість зміни відносної циркуляції дорівнює контурному інтегралу від відносного прискорення. Підставивши в (5.6) замість $\frac{d\vec{V}}{dt}$ його вираз із рівняння Нав'є - Стокса

$$\rho\left(\frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}\right) = -\nabla P - \rho\nabla\Phi + \mu\nabla^2\vec{V},$$

отримаємо

$$\frac{d\Gamma_c}{dt} = -\oint_c (2\vec{\omega} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} - \oint_c \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_c \nu\nabla^2\vec{V} \cdot d\vec{r}, \tag{5.7}$$

оскільки $\oint\limits_{c} \nabla \Phi \cdot d\vec{r} = 0.$

У відповідності з (5.7) існують **три механізми** зміни циркуляції швидкості або інтенсивності рухомої трубки відносного вихору. Вказаними трьома ефектами, віднесеними до одиниці маси, є циркуляції таких трьох сил: сили Коріоліса, тиску і молекулярної в'язкості.

Розглянемо кожен з вказаних механізмів.

1) Вплив сили Коріоліса можна показати на простому прикладі (рис. 5.3), для якого вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярний до площини креслення і напрямлений до читача. Припустимо, що вектор $\vec{V}$ направлений із області, обмеженої контуром $C$, перпендикулярно до нього. Вектор сили Коріоліса $-2\vec{\omega}\times\vec{V}$ направлений по дотичній до контура за годинниковою стрілкою.

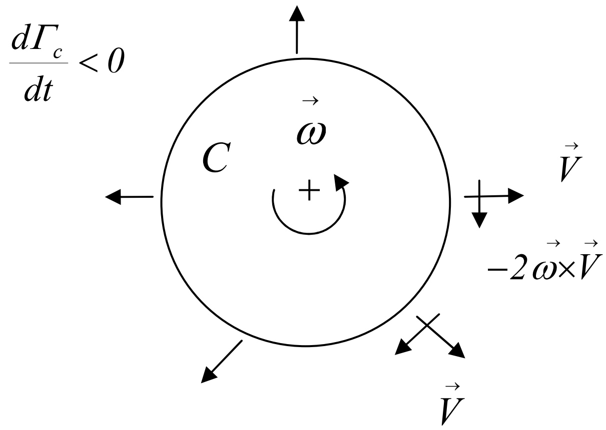


Рисунок 5.3 – Радіальна течія $\vec{V}$ та сила Коріоліса при від'ємної циркуляції

Отже, якщо виключити всі інші фактори, то сила Коріоліса створює відносну циркуляцію по контуру $C$ за годинниковою стрілкою і тому $\frac{d\Gamma_c}{dt}$ буде відємним.

З іншого боку, змішаний добуток векторів $2\vec{\omega}$, $\vec{V}$ і $d\vec{r}$ дорівнює об'єму параллелепіпеда, побудованого на цих векторах, тобто

$$-\left(2\vec{\omega}\times\vec{V}\right)\cdot d\vec{r} = -2\vec{\omega}\cdot\left(\vec{V}\times d\vec{r}\right) = -2\vec{\omega}\cdot\vec{n}_A V_A dr\,, \tag{5.8}$$

де $\vec{n}_A$ - одиничний вектор, параллельний $\vec{V}\times d\vec{r}$, напрямлений по нормалі до елементарної площинки $\delta s = V_A dt dr$, а $V_A$ - проекція швидкості на нормаль до $d\vec{r}$. Тоді швидкість збільшення обмеженої контуром $C$ площі для кожного елемента дуги $C$ (рис.5.4) дорівнює

$$\frac{d}{dt}\delta s_n = V_A dr. \qquad (5.9)$$

Підставивши (5.9) в (5.8), маємо

$$-\left(2\vec{\omega}\times\vec{V}\right)\cdot d\vec{r} = -2\omega\frac{d}{dt}\delta s_n,, \qquad (5.10)$$

де $\delta s_n$ - збільшення обмеженої контуром $C$ площі, перпендикулярної до вектора $\vec{\omega}$, для кожного елемента дуги контура $C$.

Проінтегрувавши (5.10.) по $d\vec{r}$ вздовж $C$, дістанемо

$$-\oint_c\left(2\vec{\omega}\times\vec{V}\right)\cdot d\vec{r} = -2\omega\frac{ds_n}{dt}, \qquad (5.10a)$$

де $s_n$ - проекція площі, обмежена контуром $C$, на площину, перпендикулярну $\vec{\omega}$.

У прикладі, показаному на рис. 5.4, збільшується площа, обмежена контуром $C$, захоплюється більше ниток планетарного вихору і виникає від'ємна (за годинниковою стрілкою) циркуляція по контуру $C$. Аналогічний ефект досягається, якщо поверхня не збільшується, а повертається у напрямку до площини, перпендикулярної $\vec{\omega}$ так, що більша кількість ниток планетарного вихору захоплюється контуром $C$.

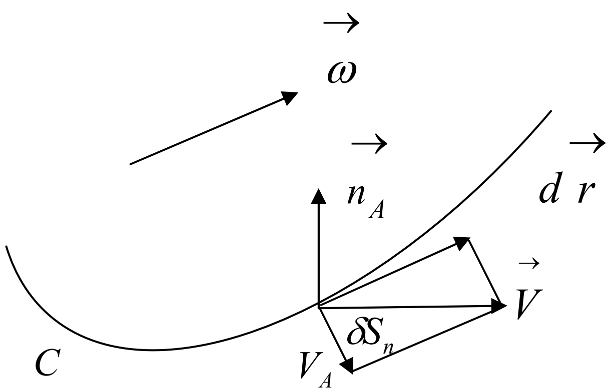


Рисунок 5.4 – Збільщення площі за рахунок компонента $\vec{V}_n$

Таким чином, ми визначили, що за рахунок ефекту сили Коріоліса змінюється з часом циркуляція швидкості і змінюється інтенсивність вихрової трубки. Отже, вплив ефекту обертання Землі приводить до зміни завихреності відносного руху, що особливо важливо для великомасштабних рухів об'єктів геофізичної гідродинаміки.

2) Роль внеску циркуляції сили тиску можна визначити, якщо відповідно до теореми Стокса другий член в правій частині формули (5.7) переписати у вигляді

$$-\oint_c \frac{\nabla p}{\rho}\cdot d\vec{r} = -\int_S \nabla\times\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right)\cdot \vec{n}ds = \int_S \frac{\nabla p\times\nabla p}{\rho^2}\cdot \vec{n}ds\,. \qquad (5.11)$$

Таким чином внесок другого члена правої частини (5.6) визначається векторним добутком градієнтів густини і тиску, поділеним на квадрат густини.

Коли ізобарічні та ізостеричні поверхні не співпадають, рідина є бароклінною і для неї бароклінний вектор $\left(\nabla\rho\times\nabla p\right)/\rho^2 \neq 0$. Відносна циркуляція змінюється з часом за умови, що середня по вибраній поверхні $S$ нормальна компонента бароклінного вектора відмінна від нуля. Для ілюстрації цього механізму розглянемо рис. 5.5. Вектори $\nabla p$ і $\nabla\rho$ лежать в площині $A$. В розглянутому випадку на більш легку рідину справа діє та ж сила тиску (-$\nabla\rho$), що і на важку рідину - зліва. Внаслідок цього більш легка рідина буде рухатися швидше, ніж більш важка (при відсутності інших ефектів).

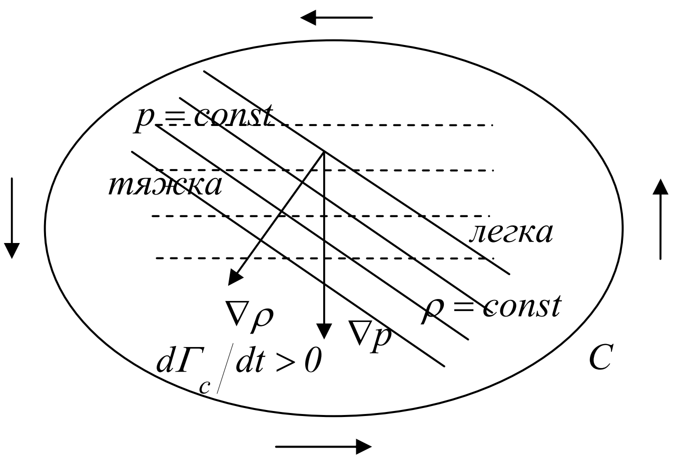


Рисунок 5.5 – Генерація циркуляції швидкості за рахунок бароклінного ефекту

Отже, швидкість руху частинок буде змінюватися в просторі. Такий рух згідно з першою теоремою Гельмгольця можна представити у вигляді суми поступального і обертального переміщення частинок. У результаті навколо контура $C$ буде виникати циркуляція проти годинникової стрілки.

В баротропній рідині ($\rho = \rho(p)$) поверхні рівних значень тиску і густини співпадають, тому (5.11) можна переписати в вигляді

$$\oint_c \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} = \oint_c \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p(A)}^{p(A)} \frac{dp}{\rho(p)} = 0, \tag{5.12}$$

оскільки інтеграл в (5.12) береться по замкненій кривій.

Якщо контур $C$ складається із двох ділянок ізобар і двох ділянок ізостер (рис. 5.6), то можна показати, що

$$-\oint_c \frac{dp}{\rho} = -\oint \alpha dp = -\left( \int_{AD} \alpha dp + \int_{DC} \alpha dp + \int_{CB} \alpha dp + \int_{BA} \alpha dp \right) =$$
$$= -\left[0 + (\alpha + \delta\alpha)(-\delta p) + 0 + \alpha\delta p\right] = \delta\alpha\delta p, \tag{5.13}$$

оскільки вздовж відрізків *AD* і *CB* $p = const$, то відповідні інтеграли рівні нулю. Тоді прискорення циркуляції по вибраному контуру дорівнює добутку різниць питомих об'ємів і тисків на частинах контура. Неважко показати, що якщо найкоротший поворот від градієнта тиску $\nabla p$ до градієнта питомого об'єму $\nabla\alpha$ відбувається проти годинникової стрілки, то приріст циркуляції є дотатним і навпаки.

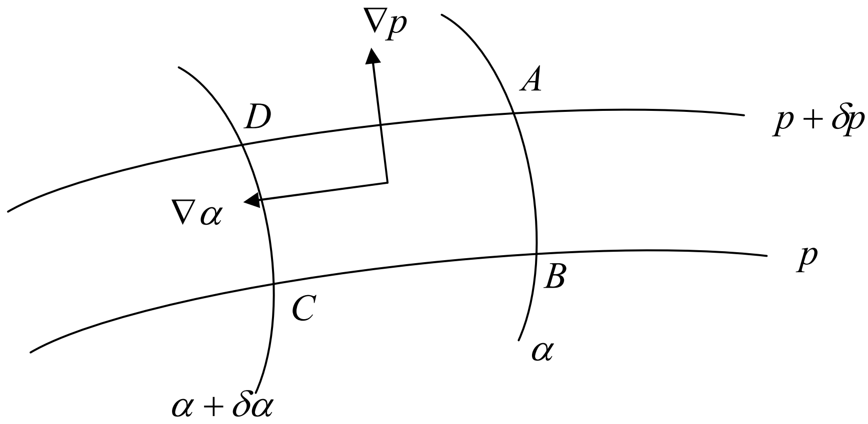


Рисунок 5.6 – Контур з двох ізобар та двох ізостер

3) Останній член в виразі (5.6) за умови, що кінематичний коефіцієнт в'язкості $\nu$ вздовж контура не змінюється, представимо у вигляді

$$\nu\oint_c \nabla^2\vec{V}\cdot d\vec{r} = -\nu\oint_c (\nabla\times\vec{\Omega})\cdot d\vec{r}, \tag{5.14}$$

оскільки

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{V}\right) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) - \nabla^2\vec{V} \quad \text{і} \quad \oint_c \nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)\cdot d\vec{r} = 0. \tag{5.15}$$

Розглянемо випадок, зображений на рис. 5.7, коли вихор в околі точки $P$ на контурі $C$ має тільки вертикальну складову $\Omega_z$, а вісь $x$ в цій точці напрямлена по дотичній до контура.

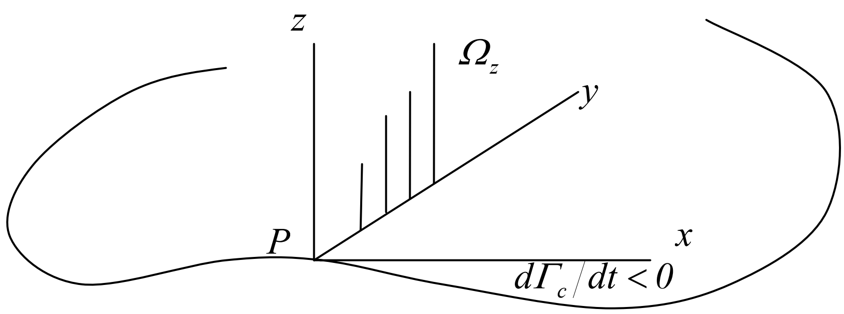


Рисунок 5.7 – Дифузія вихору в точці $P$

Тоді

$$-\nu\left(\nabla\times\vec{\Omega}\right)\cdot d\vec{r} = -\nu\frac{\partial\Omega_z}{\partial y}dx. \tag{5.15а}$$

Отже, в розглянутому випадку вплив в’язкості повинен зменшувати інтенсивність вихрової трубки, обмеженої контуром $C$, на величину пропорціонального градієнта завихреності на цьому контурі, оскільки $\frac{\partial\Omega}{\partial y} > 0$. Це можна пояснити тим, що завихреність всередині контура через дію в’язкості буде прагнути дифундувати в напрямку, протилежному градієнту вихору швидкості.

Таким чином дана фізична інтерпретація основних чинників, що визначають прискорення циркуляції.

### 5.3 Абсолютні та відностні циркуляція та вихор швидкості

У попередніх темах були визначені основні характеристики руху в неінерційній системі відліку, пов’язаній з обертовою Землею. Представляють інтерес вказані характеристики в інерційній системі відліку. Насамперед це відноситься до вектора вихору швидкості і циркуляції швидкості.

Вихор, спостережуваний в інерційній системі відліку, називається абсолютним вихорем $\vec{\Omega}_a$, а циркуляція швидкості - абсолютною циркуляцією $\Gamma_a$.

Абсолютний вихор визначається за абсолютною швидкістю таким чином

$$\vec{\Omega}_a = \nabla \times \vec{V}_a = \nabla \times \left( \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) = \vec{\Omega} + 2\vec{\omega} \quad , \tag{5.16}$$

де $\nabla \times \vec{V} = \Omega$- відносний вихор швидкості, а величина $\nabla \times \left( \vec{\omega} \times \vec{r} \right)$ знаходиться за правилами подвійного векторного добутку і дорівнює планетарному вихору $2\vec{\omega}$, який представляє подвоєну кутову швидкість обертання Землі $\vec{\omega}$.

Таким чином, абсолютний вихор будь-якої рідкої частинки представляє собою суму планетарного вихору $2\vec{\omega}$ і відносного вихору швидкості $\vec{\Omega}$.

Підкреслимо, що абсолютний вихор відображає той факт, що частинка бере участь у обертальному русі разом з Землею, він завжди вімінний від нуля. Навіть в тому випадку, коли відносно Землі рух є безвихоровим ($\vec{\Omega} = 0$), $\vec{\Omega}_a \neq 0$.

Оцінимо внесок планетарного вихору і відносного вихору швидкості у величину абсолютного вихору. Покажемо це на прикладі вертикальних складових вказаних векторів, які відображають інтенсивність обертального руху в горизонтальній площині (дотичній до земної поверхні). Складова планетарного вихору, перпендикулярна до поверхні Землі, дорівнює

$$f = 2\omega \sin\varphi , \tag{5.17}$$

де $\varphi$ - географічна широта, на якій знаходиться елементарний об’єм рідини, який розглядається.

Величина $f$ називається параметром Коріоліса.

Оцінка вертикальної складової відносного вихору $\Omega_z$ (завихреності) є відношення характерної горизонтальної швидкості $U$ до характерного горизонтального масштабу $L$

$$0(\Omega_z) = \frac{U}{L}. \tag{5.18}$$

Тоді порядок відношення завихреності до параметра Коріоліса рівний

$$0\left(\frac{\Omega_z}{f}\right) = \frac{U}{fL} = \frac{U}{2\omega L \sin\varphi} = \varepsilon / \sin\varphi = \varepsilon_0. \tag{5.19}$$

Число $\varepsilon_0$ будемо називати числом Кібеля. Відомо, що для великомасштабних рухів $\varepsilon << 1$. Тоді для нетропічних широт, де $0(\sin\varphi) \cong 1, \varepsilon_0 << 1$. Отже, для великомасштабних рухів основний внесок в формування абсолютного вихору вносить планетарний вихор. Безпосередій висновок з цього факту полягає в тому, що великомасштабні рухи практично завжди є вихровими і їх завихреність в інерційній системі відліку в основному визначається планетарним вихором. Підкреслимо, що введені поняття вихрової лінії, вихрової трубки, інтенсивність вихрової трубки зберігаються стосовно до абсолютного вихору. Покажемо зв'зок між потоком відносного вихору швидкості $\Gamma$ і потоком абсолютного вихору $\Gamma_a$:

$$\Gamma_a = \int_S (\vec{\Omega}_a \cdot \vec{n}) ds = \int_S (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) ds + \int_S (2\vec{\omega} \cdot \vec{n}) ds = \Gamma + \int_S (2\vec{\omega} \cdot \vec{n}) ds. \tag{5.20}$$

Оскільки вектор $\vec{\omega}$ незмінний в просторі, то

$$\Gamma_a = \Gamma + 2\omega S_n, \tag{5.21}$$

де $S_n$ - площа проекції $S$ на площину, перпендикулярну $\vec{\omega}$.

За теоремою Стокса потік абсолютного вихору через незамкнену поверхню *S,* обмежену замкненою кривою *З,* дорівнює

$$\Gamma_a = \int_S (\vec{\Omega}_a \cdot \vec{n}) ds = \oint_C \vec{V}_I \cdot d\vec{r}. \tag{5.22}$$

Контурний інтеграл від $\vec{V}_I$ по кривій $C$ називається абсолютною циркуляцією швидкості $\Gamma_C(\vec{V}_I)$.

Таким чином, $\Gamma_a = \Gamma_C(\vec{V}_I)$, тобто зберігається висновок про те, що інтенсивність вихрової трубки в полі абсолютного вихору дорівнює циркуляції абсолютної швидкості по замкнутому контуру, розташованому на поверхні трубки і один раз її оперезуючому.

Перейдемо до розгляду абсолютної циркуляції. Оскільки згідно з (5.21) абсолютна циркуляція швидкості ($\Gamma_a$) є сума відносної ($\Gamma_c$) і планетарної ($2\omega s_n$) циркуляції, то

$$\Gamma_a = \Gamma_c + 2\omega s_n \ . \tag{5.23}$$

Представляє інтерес оцінити зміни $\Gamma_a$ з часом.

Продиференціювавши (5.23) по часу $t$ і підставивши $\frac{d\Gamma_c}{dt}$ із (5.7), отримаємо

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -\oint_c (2\vec{\omega} \times \vec{V}) \cdot d\vec{r} - \oint_c \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_c \nu \nabla^2 \vec{V} \cdot d\vec{r} + 2\omega \frac{ds_n}{dt} . \tag{5.24}$$

Але врахувавши (5.10 а), знайдемо

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -\oint_c \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_c \nu \nabla^2 \vec{V} \cdot d\vec{r} \tag{5.25}$$

Таким чином, зміна абсолютної циркуляції з часом в рухомому елементарному об'ємі рідини визначається циркуляцією сил тиску і в'язкості. Якщо рідина баротропна і тертя на контурі відсутнє, то виконується теорема Кельвіна згідно з якою

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = 0 , \tag{5.26}$$

тобто абсолютна циркуляція при русі зберігається.

Оскільки $\Gamma_a$ представляє собою суму відносної і планетарної циркуляції (5.16), то збереження абсолютної циркуляції означає взаємний перехід одного виду циркуляції в інший, при якому їх сума залишается постійною.

Висновки цієї теореми будуть широко використовуватись надалі при фізичній інтерпретації рівняння вихору швидкості, до виведення якого ми переходимо.

## 5.4 Рівняння вихору швидкості. Теорема Тейлора-Праудмена. Потенціальний вихор

### 5.4.1 Рівнння вихору швидкості

У геофізичній гідродинаміці вирішення багатьох прикладних задач пов'язане з оцінкою інтенсивності вихрових рухів. Розглянута раніше зміна циркуляції з часом є скалярна міра зміни завихреності. Оскільки вихор являє собою вектор, обговорення властивостей циркуляції дає неповну картину динаміки вихору. Для дослідження векторної природи вихору виведемо рівняння для вектора вихору. Оскільки розглядається рух на обертовій Землі, то потрібно дослідити динаміку абсолютного і відносного вихору. З цією метою скористаємось рівнянням руху в'язкої рідини в формі

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\Omega}_a \times \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\left(\Phi + \frac{V^2}{2}\right) + \nu \nabla^2 \vec{V}, \tag{5.27}$$

де $\vec{\Omega}_a = 2\vec{\varpi} + \vec{\Omega}$ - абсолютний вихор, $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$ - відносний вихор, $2\vec{\varpi}$ - планетарний вихор.

Застосуємо до обох частин (5.1) операцію $rot$:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times \left(\vec{\Omega}_a \times \vec{V}\right) = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu \nabla \times \left(\nabla^2 \vec{V}\right). \tag{5.28}$$

Для будь-яких двох векторів $\vec{A}$ і $\vec{B}$ справедливе співвідношення

$$\nabla \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{A}\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) + \left(\vec{B} \cdot \nabla\right)\vec{A} - \vec{B}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{A} \cdot \nabla\right)\vec{B} \tag{5.29}$$

Тому

$$\nabla \times \left(\vec{\Omega}_a \times \vec{V}\right) = \vec{\Omega}_a\left(\nabla \cdot \vec{V}\right) + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{\Omega}_a - \left(\vec{\Omega}_a \cdot \nabla\right)\vec{V}, \tag{5.30}$$

оскільки $\nabla \cdot \vec{\Omega}_a = 0$.

З урахуванням співвідношення $\nabla^2 \vec{V} = grad div \vec{V} - rot rot \vec{V}$, застосованого до вектора $\vec{\Omega}$, дістанемо

$\nabla^2 \vec{\Omega} = -rot rot \vec{\Omega}$ і

$$rot\left(\nabla^2\vec{V}\right)=rot\left(graddiv\vec{V}-rotrot\vec{V}\right)=0-rotrot\vec{\Omega}=\nabla^2\vec{\Omega}. \qquad (5.31)$$

Підставляючи (5.30) і (5.31) в (5.28), дістанемо

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{\Omega}_a-\left(\vec{\Omega}_a\cdot\nabla\right)\vec{V}+\vec{\Omega}_a\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)=\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}+\nu\nabla^2\vec{\Omega}. \qquad (5.32)$$

З (5.32) знайдемо вирази для повної похідної від абсолютного і відносного вихору

$$\frac{d\vec{\Omega}_a}{dt}=\frac{d\vec{\Omega}}{dt}=\left(\vec{\Omega}_a\nabla\right)\vec{V}-\vec{\Omega}_a\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)+\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}+\nu\nabla^2\vec{\Omega}. \;, \qquad (5.33)$$

оскільки $\frac{d}{dt}(2\vec{\omega})=0$.

Розглянемо фізичне визначення отриманого рівняння вихору (5.7). Швидкість зміни абсолютного вихору рухомої рідкої частинки визначається чотирма членами в правій частині цього рівняння. Дамо фізичну інтерпретацію першим двом членам правої частини. З цією метою розглянемо довільну точку $P$ в рідині і виберемо локальну декартову систему координат так, щоб в точці $P$ вісь $z$ була дотичною до нитки абсолютного вихору, яка проходить через точку $P$ (рис. 5.8). В цій системі координат $\vec{\Omega}_a=\Omega_a\vec{k}$, $\Omega_a=\left|\vec{\Omega}_a\right|$.

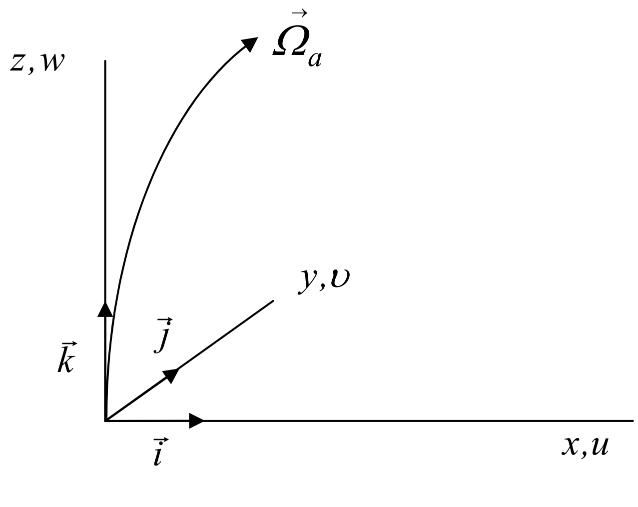


Рисунок 5.8 – Локальна ситема координат, яка вибирається
до інтерпретації рівняння вихору

Тоді в точці $P$ перші два члени (5.7) можна представити у вигляді

$$\left(\vec{\Omega}_a\cdot\nabla\right)\vec{V}-\vec{\Omega}_a\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)=\left(\Omega_a\vec{k}\cdot\nabla\right)\vec{V}-\Omega_a\vec{k}\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)=$$
$$=\Omega_a\frac{\partial}{\partial z}\left(u\vec{i}+v\vec{j}+w\vec{k}\right)-\Omega_a\vec{k}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=$$
$$=\vec{i}\,\Omega_a\frac{\partial u}{\partial z}+\vec{j}\,\Omega_a\frac{\partial v}{\partial z}-\vec{k}\,\Omega_a\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad (5.33а)$$

де $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ - одиничні вектори вздовж осей $x$, $y$ і $z$.

Розглянемо швидкість зміни компоненти абсолютного вихору вздовж осі $z$. Нагадаємо, що вектор вихідного вихору був напрямлений вздовж $z$ і його $z$ - компонента дорівнює $\Omega_a$. Тоді зміна цієї компоненти з часом в рухомій рідкій частинці при відсутності ефектів бароклінности і тертя виражається співвідношенням

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}_a\right)_z=-\left(\vec{\Omega}_a\right)_z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad (5.34)$$

тобто дорівнює добутку модуля вихідного абсолютного вихору на дивергенцію швидкості в площині, перпендикулярній $\vec{\Omega}_a$.

Якщо дивергенція відуємна, то $\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}_a\right)_z>0$ і нитки абсолютного вихору будуть збиратися, стаючи ближче одна до одної.

При цьому величина вектора вихору збільшується, а площа поперечного перерізу локальної вихрової трубки меншає.

Скористуємося виразом для дивергенції

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{s}\frac{ds}{dt},$$

де s- площа поперечного перерізу вихрової трубки в площині $XOY$. Тоді, підставивши його в (5.34), знайдемо

$$\frac{d\left(\vec{\Omega}_a\right)_z}{dt}=\frac{d\left(\vec{\Omega}_a\right)_z}{s}\frac{ds}{dt}, \text{ або } \frac{d\left[\left(\vec{\Omega}_a\right)_z s\right]}{dt}=0,\ \left(\vec{\Omega}_a\right)_z s=const. \qquad (5.35)$$

Отже, добуток площі поперечного перерізу вихрової трубки на компоненту вектора абсолютного вихору в напрямі, перпендикулярному до вказаного перерізу, є постійна величина, що еквівалентно теоремі Кельвіна. За рахунок впливу дивергентного чинника інтенсивність вихрової трубки зберігається при русі. Описаний механізм збільшення компоненти абсолютного вихору в напрямі нитки можна трактувати як механізм розтягнення вихрової трубки, оскільки зменшення площі поперечного перерізу трубки в квазінестисливій рідині досягається за рахунок витягнення рідкої трубки вздовж її довжини так, щоб об'єм її зберігався.

Розглянемо тепер швидкість збільшення компоненти абсолютного вихору в $x$-напрямі, тобто в напрямі, перпендикулярному до вихрової нитки. У відповідності з (5.33а) швидкість збільшення цієї компоненти дорівнює

$$\Omega_a \frac{\partial u}{\partial z}.$$

За проміжок часу $\delta t$ приріст $x$-компоненти абсолютного вихору буде складати

$$\delta\left(\vec{\Omega}_a\right)_x = \Omega_a \frac{\partial u}{\partial z}\delta t = \Omega_a \frac{\delta x}{\delta z}. \tag{5.35а}$$

Тоді (рис. 5.9)

$$\frac{\delta\left(\vec{\Omega}_a\right)x}{\Omega_a} = tg\gamma \quad \text{і} \quad \frac{\delta x}{\delta z} = tg\gamma. \tag{5.36}$$

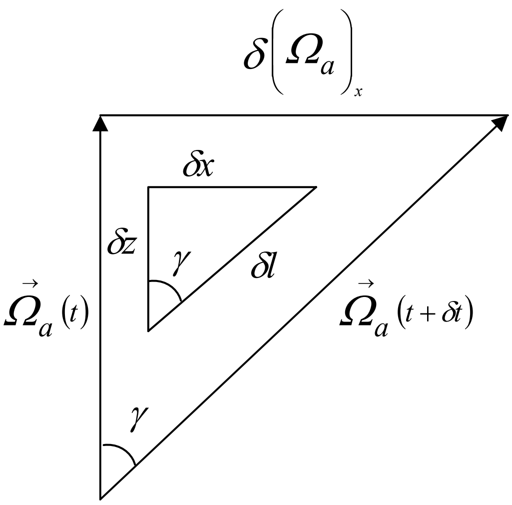


Рисунок 5.9 – Вектор абсолютного вихору в момент часу $t$ і $t+\delta t$

Перша рівність (5.36) дає кут нахилу вихрової нитки, а друге - кут нахилу елемента рідкої лінії. Згідно з (5.36) ці кути співпадають. Таким чином, через зсув поля швидкості елемент рідкої лінії нахиляється на кут $\gamma$ і згідно з (5.35а) внаслідок цього виникає паралельна осі $x$ компонента вектора вихору. Ця компонента дорівнює $x$- компоненті вектора абсолютного вихору в момент часу $t + \delta t$, який сам нахиляється на той же кут, що і рідка лінія. Це є вияв того факту, що нитки абсолютного вихору за відсутності інших ефектів рухаються разом з рідиною. Аналогічні міркування застосовні і до $y$-напряму.

Перші два члени правої частини (5.33) не є вихретвірними для абсолютного вихору. В той же час важливо відмітити, що якщо $\Omega$ спочатку дорівнював нулю, то вигин і дивергенція ниток абсолютного вихору через відносний рух рідини в полі планетарного вихору будуть за відсутністі інших ефектів створювати відносний вихор.

Отримані результати витікають із досліджень А.А.Фрідмана, який показав, що для збереження векторних ліній вектора $\vec{A}$ і інтенсивності векторних трубок необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{d\vec{A}}{dt} - \left(\vec{A} \cdot \nabla\right)\vec{V} + \vec{A}\left(\nabla \cdot \vec{V}\right) = 0 . \qquad (5.37)$$

Якщо $\vec{A} \equiv \Omega_a$, то рівняння (5.37) точно співпадє з (5.33) при відсутньості ефектів бароклінності і в'язкості.

Третій член в рівнянні (5.33) описує внесок ефекту бароклінности на зміну з часом абсолютного і відносного вихору в рухомій рідині. Дійсно, як вже було показано, векторний добуток $\nabla\rho \times \nabla p$ відмінний від нуля лише для бароклінної рідини, в якій ізобаро- ізостеричні поверхні перерізаються. Тому, якщо в початковий момент $t$ абсолютний або відносний вихори були відсутні, то за рахунок бароклінного механізму в момент $t + \delta t$ ці вихори появляються.

Четвертий член в рівнянні (5.33) відображає зміни абсолютного і відносного вихорів за рахунок ефектів в'язкості, які породжують дифузію відносного вихору.

Як виходить із векторного аналізу, якщо $\nabla^2\Omega > 0$, то среднє значення $\Omega$ на нескінченно малому колі з центром в досліджуваній точці більше за його значення в цій точці. Якщо $\nabla^2\Omega < 0$, то середнє значення менше значення в самій точці.

Із рівняння вихору (5.33) витікає, що при додатному $\nabla^2\Omega$ за рахунок внеску члена $\nu\nabla^2\Omega$ вихор буде зростати з часом, а при від'ємному $\nabla^2\Omega$ - зменшуватися з часом.

Таким чином, в'язкість прагне зрівняти значення $\Omega$ в просторі.

Процес вирівнювання величин вихорів є дифузія вихорів. Отже, в'язкісний член в рівнянні вихору визначає його зміну за рахунок дифузії відносного вихору.

### 5.4.2 Використання рівняння вихору у геофізичній гідродинаміці. Теорема Тейлора -Праудмена

У геофізичній гідродинаміці велика увага приділяється вивченню течій, для яких число Росбі мале, тобто відносний вихор малий в порівнянні з планетарним. Природно, що для існування таких рухів повинен виконуватись ряд умов. З'ясуємо, яке обмеження необхідно накласти на характер руху, в якому тимчасові масштаби великі в порівнянні з періодом обертання Землі. З цією метою скористаємось рівнянням вихору швидкості (5.33) в припущенні відсутності тертя і виконання умови $\vec{\Omega} << 2\vec{\omega}$

$$\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{\Omega} = \left(2\vec{\omega}\cdot\nabla\right)\vec{V} - 2\vec{\omega}\left(\nabla\cdot\vec{V}\right) + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}. \qquad (5.38)$$

Оцінимо порядок кожного члена рівняння (5.38). Порядок величини першого члена (5.38) є $\Omega / \tau$ , де $\tau$ - характерний часовий масштаб руху.

Якщо врахувати, що для геофізичних застосувань в першому наближенні можна прйняти, що відношення вертикальної швидкості до горизонтальної близьке до відношення вертикального масштабу до горизонтального, то порядок другого члена є $\Omega U / L$ .

Якщо прийняти, що вихрові трубки переміщаються зі швидкістю потоку, то порядки першого та другого членів лівої частини рівняння (5.38) близькі і $O\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right) = \frac{\Omega U}{L} = \frac{U^2}{L^2}$, оскільки $O(\Omega) = U / L.$ В правій частині (5.38) перший і другий доданок мають однаковий порядок величин, рівний $\frac{2\omega U}{L}$. Тоді порядок відношення

$$O\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} : \left(2\vec{\omega}\cdot\nabla\right)\vec{V}\right) = \frac{U^2}{L^2} : \frac{2\omega U}{L} = \frac{U}{2\omega L} = \varepsilon. \qquad (5.39)$$

Оскільки для великомасштабних процесів число Росбі $\varepsilon << 1$, то для таких рухів рівняння вихору (5.38) можна переписати у вигляді

$$\left(2\vec{\omega}\cdot\nabla\right)\vec{V}-2\vec{\omega}\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)=-\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^{2}}. \tag{5.40}$$

Таким чином, співвідношення (5.40) є умовою існування рухів з часовим масштабом, більшим за період обертання Землі. Воно означає, що вихор, який виникає через бароклінність, повинен компенсуватися зміною вихору, що створюється розтягненням і вигином вихрових трубок.

З рівняння (5.40) можна визначити кількісні оцінки мінливості складових швидкості великомасштабних рухів в горизонтальній і вертикальній площинах. Якщо записати рівняння (5.40) в покомпонентній формі в системі координат, де вісь $z$ параллельна вектору $\vec{\omega}$, то з урахуванням порядків членів можна дістати такі співвідношення:

$$2\omega_z\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right), \tag{5.41}$$

$$2\omega_z\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial z}\right), \tag{5.42}$$

$$2\omega_z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right). \tag{5.43}$$

Рівняння (5.41) і (5.42) пов’язують зміну швидкості по вертикалі із зміною тиску і густини вздовж вертикальної і горизонтальної осей координат. Рівняння (5.43) пов’язує горизонтальну дивергенцію швидкості із зміною тиску і густини в горизонтальній площині. Відмітимо, що порядок відношення $\frac{\delta\rho}{\rho}$, де $\delta\rho$ - зміна густини на горизонтальному масштабі $L$, близький до порядку $\rho'/\rho$, де $\rho'$ - відхилення густини від його гідростатичного значення. Далі буде показано, що $O\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=O\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=2\omega U$ і $O\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)\le\varepsilon$.

Тому права частина співвідношення (5.43) порівнянна по порядку з членом $\frac{d\vec{\Omega}}{dt}$, який ми вже відкинули.

Отже, для великомасштабний рухів з часовим масштабом, більшим за період обертання Землі, плоска дивергенція близька до нуля:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 . \qquad (5.44)$$

Для великомасштабних рухів, коли бароклінний вектор дорівнює нулю, з (5.41) - (5.46) отримуємо

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=0 \ . \qquad (5.45)$$

З рівняння нерозривності для нестисливої рідини з урахуванням (5.44) знаходимо

$$\frac{\partial w}{\partial z}=0 . \qquad (5.45а)$$

Звідси з урахуванням (5.40) для баротропних течій маємо

$$\left(2\vec{\varpi}\cdot\nabla\right)\vec{V}-2\vec{\varpi}\left(\nabla\cdot\vec{V}\right)=0 . \qquad (5.46)$$

Таким чином, для рухів з часовими масштабами, більшими за періоди обертання Землі, може бути застосовна **теорема Тейлора - Праудмена,** згідно з якою компоненти відносної швидкості не залежать від вертикальної координати, а дивергенція дорівнює нулю. Із цієї теореми витікає, що якщо вертикальна швидкість дорівнює нулю на деякому рівні, наприклад, на твердій горизонтальній поверхні, то вона буде дорівнювати нулю на всіх рівнях (для всіх $z$).

Отже, тоді рух буде цілком двовимірним і може бути представлений як рух стовпчиків, що не змінюють свою орієнтацію в процесі руху. Ці стовпчики частіше за все називають стовпчиками Тейлора і рідше стовпчиками Праудмена.

Якщо вважати, що співвідношення (5.45) і (5.45а) є наближеними, то з урахуванням близькості тривимірної дивергенції до нуля з (5.46) дістанемо

$$\begin{aligned}
&2\omega_x\frac{\partial u}{\partial x}+2\omega_y\frac{\partial u}{\partial y}+2\omega_z\frac{\partial u}{\partial z}=2\vec{\varpi}\cdot\nabla u=0 ,\\
&2\omega_x\frac{\partial v}{\partial x}+2\omega_y\frac{\partial v}{\partial y}+2\omega_z\frac{\partial v}{\partial z}=2\vec{\varpi}\cdot\nabla v=0 ,\\
&2\omega_x\frac{\partial w}{\partial x}+2\omega_y\frac{\partial w}{\partial y}+2\omega_z\frac{\partial w}{\partial z}=2\vec{\varpi}\cdot\nabla w=0 .
\end{aligned} \qquad (5.47)$$

Таким чином приходимо до висновку щодо суттєвої взаємозалежності компонент швидкості течії в різних перерізах, перпендикулярних до осі обертання.

Важливо зазначити, що теорема Тейлора - Праудмена заснована на ряді припущень відносно повного рівняння вихору. Відкинуті члени ніколи точно не рівні нулю, тому в реальних умовах природно чекати відхилень від руху у вигляді стовпчиків, які не змінюють орієнтацію.

### 5.4.3 Потенційний вихор

У попередній темі було виведене рівняння вихору і виписані основні фізичні механізми, що визначають зміну вихору з урахуванням його векторного характеру. Нарівні з цим в геофізичній гідродинаміці значне поширення дістав метод аналізу, заснований на інваріантних величинах, тобто таких, що не змінюються у часі в рухомому елементарному об'ємі. До них відносяться так звані адіабатичні інваріанти, наприклад, ентропія, потенціальна температура, потенціальна густина. Широке застосування в геофізичній гідродинаміці дістав потенціальний вихор, який представляє собою комбінацію абсолютного вихору і градієнта будь-якої скалярної величини $\lambda$, що задовольняє рівняння вигляду

$$\frac{d\lambda}{dt} = \psi , \tag{5.48}$$

де $\psi$ - деяке джерело характеристики $\lambda$.

Якщо $\lambda$ є термодинамічна функція і тому $\lambda = \lambda(p, \rho)$, то в рівнянні (5.48) $\psi$ є, наприклад, зовнішній приплив тепла.

У цьому випадку

$$\nabla\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial p}\nabla p + \frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\nabla\rho \tag{5.49}$$

і скалярний добуток $\nabla\lambda$ на бароклінний вектор $\nabla\rho \times \nabla p$ обертається в нуль, тобто цей бароклінний вектор лежить на поверхні сталої $\lambda$ (рис.5.10).

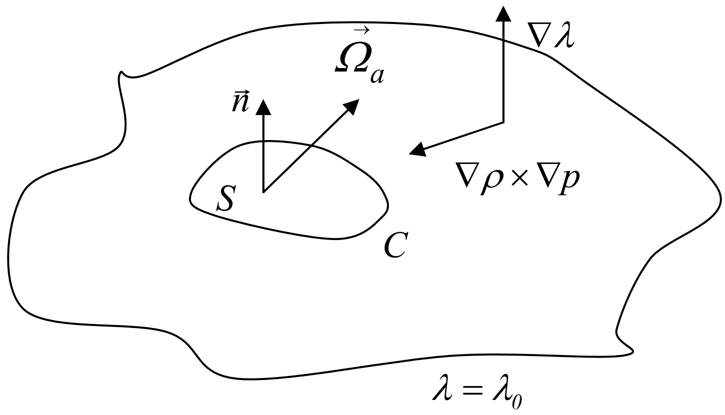


Рисунок 5.10 – Вибір контуру на поверхні постійної $\lambda$

Обмежимось розглядом процесів поза в'язкісними шарами, що звичайно розташовані поблизу підстильних поверхонь.

Тоді згідно з (5.25) при відсутності тертя

$$\frac{d}{dt}\int_s \left(\vec{\Omega}_a\cdot\vec{n}\right)ds=\int_s \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}\cdot\vec{n}ds\,, \tag{5.50}$$

де $s$ - площа довільної рідкої поверхні, а $\vec{n}$ - вектор одиничної нормалі до цієї поверхні. Допустимо, що контур $C$, обмежуючий $s$, вибраний спочатку лежачим на поверхні $\lambda$= const (рис.5.10). Тогді в силу збереженості $\lambda$ при $\psi=0$, поверхня $\lambda=\lambda_0$ складається весь час з одних і тих же частинок, тобто $\lambda=\lambda_0$ представляє собою рідку поверхну, а контур $C$ - рідку лінію і весь час лежить на цій поверхні. Як було уже показано, якщо $\lambda$ термодинамічна функція, то бароклінний вектор лежить на цій поверхні і, отже, права частина рівняння (5.50) дорівнює нулю. Отже виконується співвідношення

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}_a\cdot\vec{n}\delta s\right)=0\,, \tag{5.51}$$

де $\delta s$ - малий елемент площини, охопленої контуром $C$, а $\vec{\Omega}_a$ - середня величина вихору по площі $\delta s$, близька до значення $\vec{\Omega}_a$ в центрі $\delta s$.

Перепишемо (5.51), замінивши скалярний добуток через модулі відповідних векторів і кут $\alpha$ між ними,

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{\Omega}_a\right|\delta s \cos\alpha\right) = 0 . \qquad (5.52)$$

Підкреслимо, що кут $\alpha$ - також кут між $\vec{\Omega}_a$ і $\nabla\lambda$.

Позначимо через $\delta\lambda$ різницю значень $\lambda$ на двох дуже близьких поверхнях постійних $\lambda$, а $\delta n$ - відстань між ними. Величина $\delta\lambda$ і маса рідини $\rho\delta s\delta n$, яка міститься в об'ємі $\delta s\delta n$, зберігаються при русі, тобто

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\delta s\delta n\right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\delta\lambda\right) = 0 . \qquad (5.53)$$

Звідси виходить інваріантність величини

$$\frac{d}{dt}\frac{\left|\Omega_a\right| \cos\alpha\delta\lambda}{\rho\delta n} = 0 . \qquad (5.54)$$

Переходячи до границі при $\delta n \to 0$ і до скалярного добутку, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}_a \frac{\nabla\lambda}{\rho}\right) = 0 . \qquad (5.55)$$

Звідси виходить, що

$$\Pi = \vec{\Omega}_a \cdot \frac{\nabla\lambda}{\rho} \qquad (5.56)$$

зберігається в кожній рідкій частинці. Скалярна величина $\Pi$ називається потенціальним вихором.

Оскільки $\Pi$ зберігається при русі рідкої частинки, то коли відстань між двома $\lambda$ - поверхнями збільшується, то $\nabla\lambda$ повинен зменшуватися, а проекція вектора $\vec{\Omega}_a / \rho$ на напрямок $\nabla\lambda$ повинна пропорціонально збільшуватись. Якщо густина змінюється не дуже сильно, то збільшення $\vec{\Omega}_a / \rho$ зводиться до збільшення $\vec{\Omega}_a$. Таким чином, можна представити собі, що існує деякий запас завихреності, пов'язаний з наявністю градієнта $\lambda$, який може витрачатись при віддаленні $\lambda$ - поверхонь одна від одної через дію механізму розтягнення вихорових трубок.

Таким чином, механізм розтягнення або стиснення вихорових трубок приводить до зміни проекції абсолютного вихору на напрямок градієнта $\lambda$.

Зміна проекції абсолютного вихору складається із змін сум проекцій відносного і планетарного вихорів. Оскільки напрямки $\vec{\omega}$ і $\nabla\lambda$ не змінюються з часом, тобто кут між ними залишается постійним, то зміна величини $|\nabla\lambda|$ приводить до зміни модуля і напрямку відносного вихору.

Іншими словами механізм розтягнення вихрових трубок може індукувати відносну завихреність при русі рідких частинок в полі планетарного вихору.

Розглянемо геофізичне застосування поняття потенційного вихору. Як було показано раніше, вертикальна стійкість середовища визначається стратифікацією потенціальної густини, яка є функцією від ентропії і термодинамічно активної домішки. В зв'язку з цим при використанні поняття потенціального вихору як функції $\lambda$ можна використовувати ентропію і потенціальний вихор запишеться у вигляді

$$\tilde{\Omega} = \rho^{-1}\vec{\Omega}_a \cdot \nabla\eta . \qquad (5.57)$$

Величина $\tilde{\Omega}$ об'єднує в собі ефекти обертання ($\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}$) і стратифікації ($\nabla\eta$). Можна показати, що проекція рівняння вихору (5.33) на термодинамічну вертикаль являє собою рівняння зміни потенціального вихору $\tilde{\Omega}$ вздовж траєкторії руху. Під термодинамичною вертикаллю ми розуміємо напрямок $\vec{e} = \nabla\eta|\nabla\eta|^{-1}$ найбільшої зміни ентропії в даній точці.

Оскільки для атмосферних процессів глобальних масштабів ізентропічні поверхні приблизно горизонтальні, то напрямок $\vec{e}$ близький до вертикального.

У зв'язку з цим при дослідженні атмосферних адіабатичних процесів (у разі відсутності фазових переходів) як потенціального вихору використовується величина адіабатичного лагранжевого інваріанту

$$\frac{\Omega_z + 2\omega_z}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial z} . \qquad (5.58)$$

Слід відзначити, що для океанічних процесів роль солоності в функції $\eta(\rho, p, s)$ істотна і потенціальний вихор (5.57) перестає бути лагранжевим інваріантом навіть при адіабатичних процессах. В цьому випадку замість звичайної ентропії вводять псевдоентропію ($\eta_0$) - ентропію, ізопікнічно і ізобарично приведену до деякої стандартної величини солоності ($s_0$). Використовуючи (4.13) і (4.14), отримуємо співвідношення

$$d\eta_0 = \frac{c_{p0}}{\alpha_0 T_0 \rho}\left[-d\rho + \frac{1}{c_0^2}\right]dp, \qquad (5.59)$$

де індексом “0” відмічені величини функцій від $\rho$, $p$ і $s$ при $s = s_0$.

Розділивши обидві частини (5.59) на $dt$, використовуючи рівняння нерозривності і співвідношення (4.14) для адіабатичних процесів

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt},$$

отримаємо

$$\frac{d\eta_0}{dt} = \frac{c_{p0}\left(1 - c^2 / c_0{}^2\right)}{\alpha_0 T_0} div\vec{V} \ . \qquad (5.60)$$

Повторюючи виведення потенційного вихору, з урахуванням (5.60) маємо

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\Omega}_a \cdot \nabla \eta_0}{\rho}\right) = \vec{\Omega}_a \cdot \nabla\left[\frac{c_{po}}{\alpha_0 T_0}\left(1 - c^2 / c_0^2\right) div\vec{V}\right]. \qquad (5.61)$$

Це рівняння для псевдопотенціального вихору $\dfrac{\vec{\Omega}_a \cdot \nabla \eta_0}{\rho}$, яке в найбільшій мірі застосовно для океанічних процесів. Оскільки зміна швидкості звуку в океані складає всього декілька процентів і морська вода практично нестислива, то для океану права частина (5.61) обертається в нуль. Отже, псевдопотенціальний вихор є приблизно адіабатичним лагранжевим інваріантом.

# 6 МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Що таке модель? І які бувають моделі? Відповіді на ці питання ми зробимо конспективно, тобто представляючи відповідні положення у вигляді тез. Отже:

1. Для розуміння і прогнозування природних процесів необхідно побудувати модель цих процесів. Взагалі розвиток природознавства можна представити як розвиток моделей навколишнього світу. Дійсно, пояснення розвитку якого-небудь природного процесу або явища по суті є побудова моделі, тобто опис основних діючих об’єктів і причинно-наслідкових зв’язків. Наприклад, в стародавньому світі уявляли модель Всесвіту досить просто: плоска Земля стоїть на трьох слонах або китах. Потім з’явилася модель Птолемея, згідно з якою Земля знаходилася в центрі Всесвіту, і навкруги неї оберталися всі зірки. А потім з’явилася модель Коперника, яка вже «розставила все по місцях» і подальше вдосконалення моделі відбуваєтьється вже навколо проблеми виникнення Всесвіту. Таким чином, ми бачимо, що відсутні факти замінюються відповідними гіпотезами, що пояснюють відомі факти, а далі вже шикується весь причинно-наслідковий ланцюг подій і результатів, які отримані за даними спостережень.

2. Модель (від лат. *modulus* – міра, мірило, зразок, норма) – у широкому розумінні – образ (зокрема умовний або уявний – зображення, опис, схема, креслення, графік, план, мапа т. ін.) або прообраз (взірець) якого–небудь об’єкту або системи об’єктів («оригіналу» даної моделі), що використовується за певних умов як їх «заступник» або «представник». Так за модель Землі править глобус, а за модель різних частин Всесвіту (точніше – зоряного неба) – екран планетарію. В математиці і логіці моделлю якої–небудь системи аксіом звичайно називають сукупність об’єктів, властивості яких і відносини між якими задовольняють цим аксіомам, в термінах яких ці об’єкти були описані.

Усі ці приклади поділяють на дві основні групи:

Приклади першої групи відбивають ідею імітації (опису) чогось сущого (якоїсь дійсності, «натури», первинної по відношенню до моделі); в решті прикладів, навпаки, виявляється принцип «реального втілення», реалізації деякої умоглядної концепції (і тут первинним поняттям виступає вже сама модель). Іншими словами, модель може бути системою і більш високого рівня абстракції, ніж її «оригінал» (як в першому випадку), і більш низького (як в другому).

У природничих науках (наприклад, у фізиці, хімії) використовують зазвичай перший з вищезазначених розумінь термін, тобто моделлю якоїсь системи звуть її опис на мові певної наукової теорії (наприклад, хімічну чи математичну формулу чи систему рівнянь, фрагмент теорії або навіть усю теорію в цілому).

3. Моделі бувають простими і складними, моделями майже копіюючими природний процес або вельми спрощеними.

4. Моделі підрозділяють також на фізичні, аналогові і математичні:

a. **Фізичні моделі** відтворюють явище, що вивчається, із збереженням його фізичної природи і геометричної подібності. Відмінності від оригіналу полягають в розмірах, швидкості протікання процесів і матеріалах, з яких були створені елементи конструкції моделі. Прикладами таких явищ і моделей можуть служити штормовий басейн Морського гідрофізичного інституту, в якому імітуються умови зародження і розвитку вітрових хвиль, зокрема умови виникнення «хвиль-вбивць», які розвиваються внаслідок взаємодії хвиль різного походження. Можна також пригадати гідротехнічну модель Фінської затоки, в якій у зменшеному масштабі були відтворені морфологічні особливості місцевості, і, яка була потрібна для оцінки гідрологічного режиму водних мас затоки. Фізична (лабораторна) модель ультрадовгих хвиль в атмосфері, що виникають на обертовій Землі, з нагрітою тропічною зоною і охолоджуваною полярною областю, може допомогти в дослідженні основних властивостей цих хвиль. При цьому зрозуміло, розміри моделі і матеріал, з якого побудована модель Землі і атмосфери, а також час протікання процесу відрізняються від фактичних. Академік Г.Голіцин вивчав процес розвитку конвекції, який має місце як в атмосфері, океані так і в земній мантії, за допомогою простого посуду, води і газового пальника. Проте, отримані ним висновки не суперечили багатьом особливостям конвективних процесів, що протікають в природі.

b. **Математична модель** - це абстракція реального світу, в якому відносини між фізичними об’єктами замінені відповідними відносинами між математичними об’єктами. Все різноманіття, різномасштабність і драматизм реальних природних процесів описується за допомогою деякої математичної моделі, що є, наприклад, системою диференціальних рівнянь в частинних похідних з відповідними крайовими і початковими умовами. Це дійсно важко собі уявити: яким чином група формул «описує» атмосферні і взагалі природні процеси і реальний мир. Але можна пригадати, що в нотній грамоті існує вісім значків, званих нотами, і доповнених іншими значками, дієзами і бімолями, і з цього більш ніж скромного набору вдається створити видатні музичні твори.

Перевагою математичного моделювання є відтворення (імітація) процесів, точний опис їх структури і властивостей, які неможливо спостерігати. В даний час загальновизнаним є факт достатньо низьких економічних затрат на дослідження за допомогою математичного моделювання. Якщо пригадати розвиток астрономії, то модель Сонячної системи і закони Кеплера, що були отримані за допомогою теоретичних міркувань, допомогли відкрити невідомі планети.

Математичні моделі у свою чергу можуть бути також поділені на три типи:

- стохастичні (в метеорології їх часто називають фізико-статистичні), які використовують статистичну залежність між параметрами явищ, що вивчаються. Це так звані регресійні моделі. Їх достоїнство: простота, невелика кількість вихідної інформації та оперативність її отримання. Їх недоліки: вони не дають інформації про процес, його фізичне єство;
- концептуальні грунтуються на деяких модифікаціях рівнянні нерозривності (балансу) і інших співвідношеннях. Має місце схематизація процесу. В основному це моделі гідрологічного циклу. Їх достойність: простота, мала кількість необхідної інформації та обчислень. Їх недоліки: необхідність ретельного обгрунтовування припущень, що беруться для кожного конкретного випадку;
- гідродинамічні використовують диференціальні рівняння, побудовані на відомих законах фізики: законах збереження маси, кількості руху і енергії. Ці моделі бувають одновимірні, двовимірні і тривимірні. Їх достоїнства: використання малого числа загальноприйнятих і апробованих положень, ясне і суворе математичне і фізичне формулювання задачі. Недоліки – складність реалізації і необхідність точного відтворення початкових і граничних умов.

с. **Аналогове моделювання** – це один з найважливіших видів моделювання, що ґрунтується на аналогії (у більш точних термінах – ізоморфізмі) явищ, які мають різну фізичну природу, але описуються однаковими математичними (диференціальними, алгебраїчними або іншими) рівняннями.

Простий приклад – дві системи, перша з яких має механічну природу і складається з вісі, яка передає обертання через пружину та маховик, що частково занурений у в'язку гальмуючу рідину, та валу, що жорстко пов'язан з маховиком. Друга система – електрична – складається з джерела електрорушійної сили, яке сполучено з лічильником електричної енергії через котушку індуктивності, конденсатор та активний опір. Якщо підібрати значення індуктивності, ємності та опору таким чином, щоб вони відповідали пружності пружини, інерції маховика та в'язкості рідини, то ці системи виявляють структурну та функціональну схожість (навіть тотожність), що визначається частково тим, що вони описуються одним і тим же диференціальним рівнянням.

**Основні принципи математичного моделювання.**

1. Найпершим і важливим етапом математичного моделювання є обрання типу математичної моделі. Зазвичай послідовно будується декілька моделей. Порівняння результатів їх дослідження більш–менш дійсно дозволяє встановити найбільшу з них. На етапі обрання типу математичної моделі за допомогою аналізу даних встановлюються:

лінійність або не лінійність, динамічність або статичність, сталість або несталість, а також міра детермінованості досліджуємого об’єкту чи процесу.

Головними особливостями рівнянь геофізичної гідродинаміки є нелінійність вихідних рівнянь і дисипація процесів. Під дисипативною системою розуміють таку систему, для якої механічна енергія (кінетична плюс потенціальна) убуває при русі, тобто частково переходить в теплову в результаті дії в’язких сил. Нелінійність і дисипативність системи забезпечують самоорганізацію полів з формуванням стійких і нестійких структур в різних просторово–часових масштабах. Очевидно, що всі ці особливості процесів геофізичної гідродинаміки потрібно враховувати під час побудови математичних моделей цих процесів.

Моделі різних типів розрізняються вихідними передумовами, кількістю первинної інформації і ступенем деталізації результатів розрахунків. Не дивлячись на відмінності, області використання цих моделей частково перетинаються. Тому вибір типу моделі визначається наявними даними, необхідною деталізацією картини явища, наявністю програмних продуктів і, звичайно, суб’єктивними чинниками.

2. Вибір структури моделі може бути пов’язаний з трьома намірами:

a. зробити якомога загальну модель, щоб вона відтворювала всі спостережувані явища і всі поєднання чинників, проводячи їх опис з максимальною точністю і детальністю. Так, наприклад, сучасні моделі загальної циркуляції атмосфери, що використовуються для короткострокового та середньострокового прогнозу погоди здатні відтворювати достатньо велику кількість різномасштабних атмосферних процесів (явищ). До них відносяться як явища глобальної атмосферної циркуляції (ВЗК, ЦДА, синоптичні вихори помірних і тропічних широт, планетарні струменеві течії і фронтальні зони) так і різні мезомасштабні явища, пов’язані з горизонтальною неоднорідністю підстильної поверхні, процесами взаємодії атмосфери з нею, а також хмарні скупчення. Причому, частина з перерахованих великомасштабних процесів може розглядатися і як мезомасштабні: вертикальна структура фронтів і висотної фронтальної зони, струменевих течій і т.п. Очевидно, що чим менше розмір сітки, тим більша кількість такого роду явищ може бути відтворена в чисельній моделі;

b. найкращим чином прагнути описати окреме явище або об’єкт. При цьому повинні враховуватися всі наявні експериментальні дані, що відносяться до даного явища, і властиві йому фізичні закономірності;

c. адаптація моделі, чиї властивості і поведінка достатньо добре були вивчені і відтворені. Прикладом може служити мезометеорологічна модель MM5, розроблена в Пенсільванському Університеті (США). Ця модель мала достатньо повну математичну і фізичну постановку задачі, і була здатна відтворювати багато явищ мезомасштабу, які розвиваються в різних частинах тропосфери. Такого роду моделі можуть бути використані для регіонального прогнозу погоди і в інших цілях, наприклад для визначення розповсюдження забруднюючих речовин як в окремій місцевості так і при транскордонному перенесенні.

3. Обрання моделі повинно здійснюватися з урахуванням всієї наявної інформації про це явище і точності визначальних параметрів. Але тут можливий парадокс: збільшення числа параметрів може призвести до погіршення якості моделі. Частково, це може бути пов'язано з різною або невисокою точністю визначення значень параметрів моделі. Якщо при створенні моделі використовувався модульний принцип, то заміна одного з «старих модулів», що описував який-небудь фізичний процес з явним розділенням або параметризацією, на новий, більш досконаліший, може призвести до погіршення якості очікуваних прогнозів. Такий результат може бути слідством також не стикування більш точної схеми розрахунків з основною точністю решти блоків. Спеціалісти дуже часто згадують період в розвитку чисельних схем короткострокових прогнозів, коли включення рельєфу в моделі, звичайно призводило до явного погіршення результатів чисельних експериментів. Математики тоді жартували: для того, щоб поліпшити чисельний прогноз необхідно так згладити гори, щоб вони не «висовувалися». Проте згодом з'ясувалось, що тоді порушувались правила сполучення масштабів розділення гір та різницевої моделі. І тому зараз усі чисельні прогностичні моделі працюють з рельєфом краще.

4. Загальні рекомендації у виборі структури моделі встановити важко. Зрозуміло, що при вивченні природних процесів необхідно врахувати найбільше число чинників. Та все ж треба обирати деяку оптимальну структуру моделі, яка б в умовах наявної інформації добре описувала основні процеси.

5. Встановлення загальних характеристик об'єкта дозволяє обрати математичний апарат, на основі якого будується математична модель.

6. Після обрання типу моделі процес побудови моделі зазвичай містить такі етапи:

a. <u>Формулювання моделі.</u> Побудова математичної моделі починається з виділення тих чинників, які належить брати до уваги. В багатьох фізичних задачах ці фактори пов'язані з умовою рівноваги сил або виконанням певних законів збереження. Наприклад, у моделі для задачі про траєкторію ракети основним фізичним законом, на який спирається побудова моделі, є другий закон Ньютона, який стверджує, що сума діючих на тіло сил повинна дорівнювати похідній від імпульсу тіла. Щоб застосувати цей загальний закон до даної конкретної задачі, необхідно відділити та виразити кількісно ті сили, які в даному випадку є істотними. Наприклад, на ракету, що рухається в атмосфері Землі, діють сили гравітаційного тяжіння з боку Юпітера, але її вплив настільки незначний у порівнянні з тяжінням Землі, що їм цілком можна знехтувати. Може статися, що і деякі інші сили малі у порівнянні з домінуючими, але питання про їх вилучення не таке просте. Таким чином, *побудова моделі є неминучим компромісом між врахуванням усіх вірогідних чинників, що є визначальними в даній задачі, та збереженням математичної моделі досить простою, щоб її можна було б вирішити засобами, які є в нашому розпорядженні.*

Математичну модель явища (процесу) можна вважати такою, що оформилася, якщо були описані хоча б словесно зв'язки між різними процесами, які спостерігались в лабораторному експерименті або в природі.

b. Розв'язок моделі. Наступний крок побудови моделі полягає в знаходженні розв'язання моделі. Для проблем, які становлять великий інтерес за теперішнього часу обрідно удається отримати розв'язок у аналітичному вигляді; зазвичай задачі розв'язують наближеними чисельними методами шляхом апроксимації (наприклад, скінченнорізницевої) вихідної системи рівнянь. Ці чисельні методи зручні в реалізації на ЕОМ.

Рівняння геофізичної гідродинаміки допускають точні (аналітичні) і наближені (чисельні) рішення. Перші можливі тільки для спрощених лінійних (або лінеаризованих) рівнянь, а другі – для нелінійних.

c. Якщо ми в змозі знайти розв'язання моделі, то наступним кроком зазвичай є обґрунтування моделі. Це означає, що отриманий розв'язок є досить точним задля тих цілей заради яких ця модель розроблялася. Є два головних джерела вірогідних помилок. По–перше. Це неминучі похибки, що виникають під час реалізації чисельного рішення на ЕОМ. Це похибка закруглення, похибки дискретизації або зрізання та похибки збіжності. Загальна природа цих похибок більш докладно буде розглянута далі. З іншого боку, також є неминучими похибки самої моделі. *Точність моделі залежить від точності з якою вона імітує те чи інше явище.* Дослідник намагається врахувати всі відомі йому в реальній задачі чинники, але для того, щоб з моделлю можна було працювати, часто–густо він вилучає або апроксимує деякі з них, які на його думку впливають на розв'язання задачі. Але невідомо, чи дійсно виправдано знехтування цима факторами і чи не залишились деякі фактори, що йому невідомі, але які істотно впливають на процес.

Перша перевірка обґрунтування моделі – це чи є знайдений розв'язок прийнятний хоча б у загальних рисах. Якщо, наприклад, проблема полягає в розрахуванні траєкторії ракети і якщо очікувана максимальна висота її підйому складає 100 км, а обчислене рішення дає висоти порядку 200 км, то очевидно, що десь припустились грубої помилки. *Тобто, якщо порядок* *похибки дорівнює порядку визначаємої величини, то такий результат, є неприйнятним.* Після того, як такі великі помилки вилучені, що зазвичай є нескладною задачею, починається наступний етап перевірки, який полягає у порівнянні результатів розрахунку з наявними експериментальними даними або результатами спостережень. Цей етап в літературі дістав назву «верифікація» моделі. Часто саме це являє собою дуже складний захід, тому що, хоча експериментальні дані можуть бути одержані в контрольованих умовах, фізика експерименту може відрізнятися від математичної моделі. Наприклад, в математичній моделі розрахунку потоку повітря навколо крила літака зазвичай припускається, що ідеалізований літак рухається у безконечній атмосфері, у той же час як експериментальні дані одержують в аеродинамічній трубі, де є вплив стінок труби. Ні експеримент (тут фізична модель), ні математична модель не віддзеркалюють дійсної ситуації, де літак летить в атмосфері, що має конечні розміри. Потрібні весь досвід та інтуїція дослідника, щоб зробити правильний висновок, чи досить добре узгоджуються розрахунки математичної моделі з результатами спостережень.

d. Модифікування моделі. У початковій стадії дослідження часто отримані результати не узгоджуються і модель доводиться модифікувати. Але іноді потрібен повний перегляд моделі і підхід до вивчення фізичної ситуації з зовсім інших позиції. В будь–якому випадку, якщо модель модифікована увесь цикл починається спочатку: нове чисельне розв'язання, нове обґрунтування, додаткові модифікації тощо.

e. Циклічний характер математичного моделювання, тобто модифікування моделі, може бути пов'язане не тільки з помилками, яких дослідники припускаються під час будування моделі, але і з виявленням нових фактів та появою нових експериментальних даних, що можуть підвищити пояснювальну та прогностичну здатність моделі.

7. *Жодна модель не здатна на абсолютно точне відтворення натурного явища.* Будь–яка модель може лише приблизно описувати його, тому що при її побудові виділяються лише значущі характеристики або риси явища. Математична модель дозволяє пояснити або передбачити якесь явище з тією точністю, з якою вона імітує явище і з якою визначають спостережувані величини. Але, з іншого боку, моделі постійно удосконалюються. Так, на сьогодні в багатьох регіональних прогностичних центрах був досягнутий помітний прогрес справджуваності чисельних прогнозів погоди. При цьому, якщо раніше, всього декілька десятиріч тому, основними прогностичними моделями були так звані геострофічні або квазігеострофічні моделі, в основу яких була покладена дія двох основних сил: сили баричного градієнта і Коріоліса, то неможливо було чекати від таких моделей передбачення щодо виникнення нового баричного утворення. Інший приклад, внаслідок низької точності

вимірювань характеристик вітру в тропосфері і нижній стратосфері також не можна чекати високої справджуваності прогнозу вітру. Значний резерв точності чисельних прогностичних схем визначався технічними можливостями обчислювальної техніки, рівнем швидкодії і оперативної пам'яті сучасних ЕОМ. Так, в середині 60-х років, для чисельних прогнозів погоди використовувалася ЕОМ «Урал-1», швидкодія якої складала всього 100 операцій за секунду. Це здається неймовірним в порівнянні з сучасними персональними комп'ютерами. Ті обчислювальні потужності не дозволяли достатньо точно врахувати фізичні процеси, які реально впливають на розвиток того або іншого атмосферного процесу, а розділення в моделі було вельми грубим, що не дозволяло також отримати прийнятну точність обчислень. На даний час в багатьох прогностичних центрах світу використовують супер– і гіперЕОМ, швидкодія яких перевищує сотні мільярдів операцій за секунду, а горизонтальне розділення вже може досягати порядку 10 км по всій Земній кулі. Природно, що розвиток обчислювальної техніки сприяв значному підвищенню точності моделювання природних процесів, будь то чи в атмосфері, чи в океані.

При вирішенні багатьох важливих задач в області геофізичної гідродинаміки головну роль відіграють експериментальні методи досліджень. Взагалі вивчення геофізичних процесів починається з встановлення найпростіших дослідних факторів, на основі яких можна формулювати закони, що управляють досліджуваними явищами і записати їх у вигляді деяких математичних співвідношень. При цьому виникає запитання, як розуміти складні фізичні процеси і як інтерпретувати отримані результати.

Аналіз розмірності і теорія подібності дозволяють виконати попередній якісно-теоретичний аналіз геофізичних процесів та значно полегшати обробку експериментів. На цей час грамотна постановка і обробка експериментів неможлива без врахування питань розмірності і подібності. В окремих випадках аналіз розмірності і теорія подібності є єдино можливим теоретичним методом вивчення геофізичних процесів на початкових стадіях. Звичайно аналіз розмірності і теорія подібності є дуже корисними і в теорії і на практиці. При цьому результати можна отримати дуже просто. Особливо цінні висновки, які можна отримати за допомогою аналізу розмірності при розгляданні процесів, що залежать від великої кількості параметрів, при цьому деякі з цих параметрів можуть бути неістотними. Методи теорії розмірності і подібності відіграють особливо велику роль при моделюванні різних явищ.

Нагадаємо, що математичне моделювання об'єднує комплекс дисциплін, а саме: вищу математику, гідродинаміку, динамічну метеорологію, динаміку океану та обчислювальну математику.

# 7 АНАЛІЗ РОЗМІРНОСТІ

## 7.1 Основні поняття

В основі теорії розмірності лежить поняття про розмірність фізичних величин, які характеризують явище, що досліджується. Термін “фізична величина” виражає будь-яку властивість тіла: довжину, вагу, в’язкість, масу, температуру, об’єм тощо Кожна з названих величин характеризується якістю та кількістю. “Виміряти яку-небудь величину” означає знайти відношення даної величини до відповідної одиниці вимірювання. Це відношення є мірою даної величини. Так як поняття “більше – менше” застосовується тільки до однорідних величин, очевидно, що і порівнювати можна тільки однорідні величини. Можна порівнювати силу натягу пружини з вагою гирі, але не можна зіставляти об’єм склянки та вагу чорнильниці. Не можна виміряти швидкість одиницею маси або площу – одиницею ваги.

Формули розмірності відіграють дуже важливу роль при перевірці математичних виразів фізичних законів. Усі члени в обох частинах кожного фізичного рівняння повинні мати однакові розмірності, через те що в протилежному випадку рівність порушується при переході від одних одиниць вимірювання до інших. Тому перевірка розмірності в отриманих рівняннях є дуже корисною для того, щоб з’ясувати, чи є яка-небудь завідома помилка у результаті. Якщо розмірності правої та лівої частини не збігаються одна з одною, можна одразу стверджувати, що рівність невірна.

Застосування формул розмірності, однак, не обмежуються тільки перетворенням одиниць та перевіркою вірності фізичних рівнянь. Аналіз розмірності дозволяє у ряді випадків дуже просто визначити характер закону, якому підпорядковується те або інше фізичне явище. Застосування аналізу розмірності засновано на незалежності математичного виразу шуканого фізичного закону від одиниць, які вимірюють величини, що входять до нього.

Розглянемо далі деякі поняття та їх визначення, що існують в аналізі розмірності.

**Фізичні величини і їх вимірювання.** Вивчення фізичних явищ та їх закономірностей, а також використання цих закономірностей на практиці було пов’язано з вимірюванням фізичних величин.

*Фізична величина або просто величина – це кількісна характеристика властивостей фізичного тіла або системи тіл, процесів і явищ.* Довжина, маса, час, швидкість, сила, температура, напруженість електричного поля, період коливань, – все це фізичні величини.

Фізичні величини виявляються у вигляді їх конкретних реалізацій.

Наприклад, відстань між зіницями наших очей і висота Ейфелевої башти є конкретними реалізаціями фізичної величини – довжини. Маса даної книги і маса штучного супутника Землі – суть часткові реалізації фізичної величини – маси. Часткові реалізації однієї і тієї ж величини називаються *однорідними величинами*. Однорідні величини відрізняються одна від одної розміром, тобто кількісно. Порівняння розмірів двох однорідних величин провадиться в процесі вимірювання.

*Вимірюванням фізичної величини називається експериментальне порівняння даної величини з іншою, однорідною з нею величиною, прийнятою за одиницю вимірювань. Одиниця вимірювання – це конкретне значення фізичної величини, прийняте за міру її кількісної оцінки.*

Мірою (або еталоном) називається тіло або пристрій, призначений для матеріального відтворення одиниці вимірювання. Наприклад, міліметрова лінійка – міра довжини, гиря – міра маси і т.д.

Залежно від прийомів отримання результатів, вимірювання діляться на прямі і непрямі.

*Вимірювання називається прямим, якщо величина, яка вимірюється, порівнюється з мірою безпосередньо або за допомогою вимірювальних приладів*, градуйованих в тих одиницях, в яких вимірюється дана величина. Вимірювання довжини столу за допомогою масштабної лінійки або вимірювання сили струму амперметром є прямими.

*Вимірювання називається непрямим, якщо безпосередньо вимірюється не сама величина, а інші величини, пов'язані з нею функціонально.* Числове значення величини, що підлягає вимірюванню, при непрямому вимірюванні знаходять шляхом відповідних розрахунків на підставі залежності, існуючої між величинами і виражених в математичній формі. Непрямі вимірювання застосовуються у тому випадку, коли прямі вимірювання скрутні або неможливі. Наприклад, для визначення густини речовини виконують прямі вимірювання маси і об'єму тіла. Результати цих прямих вимірювань використовують для обчислення густини за допомогою відомого співвідношення між масою тіла, його об'ємом і густиною речовини, з якої складається тіло. Виконане у такий спосіб вимірювання густини є непряме вимірювання.

Результат вимірювання деякої часткової реалізації фізичної величини X може бути представлений у вигляді добутку двох множників

$$X = \{X\}[X],$$

де $[X]$– одиниця вимірювання величини $X$, $\{X\}$ – числове значення вимірюваної величини, якщо вона була виражена в одиницях $[X]$.

*Числове значення – це абстрактне число, яке дорівнює відношенню вимірюваної величини до одиниці її вимірювання.*

Одиниця вимірювання $[X]$, як окрема реалізація величини $X$, також може бути виражена у вигляді добутку множників $\{X\}$ і $[X]$. При цьому числове значення $\{X\}$ одиниці вимірювання дорівнює одиниці.

Одиниці вимірювань $[X_1]$, $[X_2]$,..., $[X_n]$ однієї і тієї ж величини $X$, тобто однорідні одиниці, відрізняються одна від одної розміром. Так, розмір кілограма в тисячу раз більший за розмір грама, розмір хвилини в шістдесят разів більший за розмір секунди.

*Розміром одиниці вимірювання називається кількість фізичної величини, що міститься в одиниці вимірювання.*

При вимірюванні однієї і тієї ж величини одиницями різних розмірів числові значення величини виходять різні. Наприклад, якщо довжина тіла при вимірюванні в метрах виражається числом 3 м, то при вимірюванні в сантиметрах вона оцінюється числом 300 см. Розмір метра в 100 разів більше розміру сантиметра, а чисельне значення результату вимірювання в метрах виходить в 100 разів менше, ніж при вимірюванні сантиметром.

Взагалі, якщо при вимірюванні величини $X$ одиницею $[X_1]$ було отримано числове значення $\{X_1\}$, а при вимірюванні одиницею $[X_2]$ було отримано числове значення $\{X_2\}$, то завжди

$$\frac{\{X_1\}}{\{X_2\}} = \frac{[X_2]}{[X_1]},$$

тобто числові значення величини обернено пропорційні розмірам одиниць вимірювань. З останньої рівності виходить, що

$$\{X_1\}[X_1] = \{X_2\}[X_2] = X,$$

тобто при вимірюванні конкретної реалізації величини (наприклад, довжини даного предмета, а не довжини взагалі, маси даного тіла, а не маси взагалі) добуток $\{X\}[X]$ сталий і не залежатиме від вибору одиниці вимірювання. Тобто відношення чисельних значень будь–якої величини, яка вимірюється в різних системах вимірювання, залежить тільки від відношення масштабів одиниць вимірювання цієї величини.

Одиницю вимірювання фізичної величини можна отримати трьома різними способами.

По-перше, одиницю можна вибрати довільно, незалежно як від інших одиниць, однорідних з нею, так і від одиниць вимірювань інших фізичних величин. Обрані таким чином одиниці називаються незалежними. Незалежними одиницями є, наприклад, метр, який при введенні метричної системи мір був обраний як одна десятимільйонна частина четверті довжини Паризького меридіана, градус Цельсія – одна сота частина температурного інтервалу між температурою танення льоду і температурою кипіння води при нормальному атмосферному тиску. До незалежних одиниць можна віднести також одиницю лінійного кута – радіан, одиницю тиску – міліметр ртутного стовпа і багато інших.

По-друге, одиницю вимірювання можна отримати за допомогою формул, що виражають кількісну залежність між фізичними величинами. В цьому випадку одиниця вимірювання виражатиметься через інші одиниці вимірювань. *Одиниці вимірювань, утворені за допомогою фізичних формул, називаються похідними.* До числа похідних одиниць відносяться, наприклад, одиниця швидкості – метр за секунду, одиниця тиску – ньютон на квадратний метр, одиниця напруженості магнітного поля – ампер на метр і ін.

По-третє, одиницю вимірювання можна отримати шляхом множення і розподілу незалежної або похідної одиниці на ціле число, звичайно на 10, або на число, що є степенем при основі 10. За таким принципом утворені, наприклад

кілометр = $10^3$ метри
мегом = $10^6$ ома
міліметр = $10^3$ метри
мікрофарада = $10^6$ фаради і т.ін.

Одиниці, утворені шляхом множення незалежної або похідної одиниці на абстраговане ціле число, називаються кратними, наприклад, кілометр і мегом; одиниці, отримані шляхом ділення на ціле абстраговане число, – частковими, наприклад, міліметр і мікрофарада.

Отже, всі одиниці вимірювання за способом їх походження поділяють на чотири групи: незалежні, похідні, кратні і часткові.

Способи вибору незалежних одиниць і утворення кратних і часткових одиниць не потребують особливих пояснень. Питання про утворення похідних одиниць складніше. Для його розгляду необхідно вивчити кількісні і якісні зв'язки між величинами.

Одиниці, які утворюють яку-небудь систему, називають *системними одиницями*, а які не входять ні в одну з систем, – *позасистемними*. Позасистемними одиницями є, наприклад; одиниці довжини – кілометр і ангстрем, одиниці потужності – кіловат і кінська сила, одиниці тиску – технічна атмосфера і міліметр ртутного стовпа і ін.

Слід відзначити, як в межах окремої держави, так і в міжнародному масштабі, організовується зберігання основних одиниць вимірювання. Особлива турбота виявляється при цьому про незалежні одиниці, оскільки відтворення їх вимагає великих зусиль. Для їх зберігання виготовляються спеціальні еталони. *Еталони* – це міри і вимірювальні прилади, призначені для зберігання і відтворення одиниць вимірювання з щонайвищої досяжної при даному стані науки і техніки точністю і прийняті в загальнодержавному або міжнародному масштабі. Наприклад, для зберігання одиниці маси виготовлений платиново–іридієвий еталон кілограма, для одиниці довжини – еталон метра із іридістої платини, для відтворення одиниці сили струму – ампера існує еталонний прилад – струмові терези тощо. За одну секунду приймається $\frac{1}{24 \cdot 3600}$ частина середньої сонячної доби.

**Рівняння зв'язку між фізичними величинами.** Між фізичними величинами існують якісна і кількісна залежність, закономірні зв'язки, які можуть бути мати вигляд математичних формул. Утворення формул очевидно пов'язано з математичними діями над фізичними величинами.

Однорідні величини допускають над собою всі види дій алгебри. Наприклад, можна складати довжини двох тіл, віднімати довжину одного тіла з довжини іншого, ділити довжину одного тіла на довжину іншого; можна підносити довжину до степеня. Результат кожної з цих дій має певний фізичний сенс. Наприклад, різниця довжин двох тіл показує, на скільки одне тіло довше іншого; добуток довжини основи прямокутника на висоту визначає площу прямокутника; третій степінь довжини ребра куба виражає його об'єм тощо. Проте не завжди можна складати дві однорідні величини. Наприклад, поняття: сума густини двох тіл, сума температур двох тіл позбавлені фізичного сенсу.

Різнорідні величини можна помножити і ділити одне на друге. Результати цих дій над різнорідними величинами також мають фізичний сенс. Наприклад, добуток маси тіла $m$ на його прискорення $a$ має своїм результатом силу $F$, під дією якої було отримано це прискорення, тобто

$$F = ma;$$

результат ділення сили $F$ на площу $S$, на яку рівномірно діє ця сила, виражає тиск, тобто

$$p = \frac{F}{S}.$$

В загальному випадку фізична величина $X$ за допомогою математичних дій може виразити через інші фізичні величини $A$, $B$, $C$... рівнянням вигляду

$$X = kA^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}, \tag{7.1}$$

де $k$ – коефіцієнт пропорційності.

Показники степеня $\alpha$, $\beta$, $\gamma$... можуть бути як цілими, так і дробовими, а також можуть набирати нульових значеннь.

Формули вигляду (7.1), які дають вираз однієї фізичні величини через інші, називаються *рівняннями між фізичними величинами*.

Коефіцієнт пропорційності $k$ в рівняннях між фізичними величинами, за рідкісним виключенням, дорівнює одиниці. Але можна навести приклад рівняння, в якому коефіцієнт $k$ відрізняється від одиниці, це звісна формула кінетичної енергії тіла при поступальному русі:

$$T = \frac{1}{2} m\upsilon^2 .$$

Значення коефіцієнта пропорційності як в наведеній формулі (($k = \frac{1}{2}$), так і взагалі в рівняннях між величинами не залежить від вибору одиниць вимірювання, а визначається виключно характером зв’язку величин, що входять в дане рівняння. Отже, *незалежність коефіцієнта пропорційності від вибору одиниць вимірювання є характерною особливістю рівнянь між величинами.*

Слід підкреслити, що в рівняннях між величинами під символами величин, наприклад, під символами $A$, $B$, $C$... в рівнянні (7.1), не можна розуміти числові значення величин, виражені в наперед вибраних одиницях. Кожний з символів $A$, $B$, $C$... в цьому рівнянні є однією з конкретних реалізацій відповідної величини, яка не залежить від вибору одиниць вимірювань.

Якщо ж всі величини, що входять в рівняння (7.1), розділити на відповідні одиниці вимірювань, то отримаємо рівняння іншого типу. Для простоти розгляду зробимо це для рівняння

$$X = AB .$$

Розділивши величини $X$, $A$ і $B$ на їх одиниці вимірювання, отримаємо

$$\frac{X}{[X]} = k \frac{A}{[A]} \cdot \frac{B}{[B]} , \tag{7.2}$$

або

$$\{X\} = k\{A\} \cdot \{B\}, \tag{7.2a}$$

Рівняння вигляду (7.2) або (7.2а) зв'язує між собою вже не величини, як збірні поняття, а їх числові значення, які отримані в результаті представлення величин в певних одиницях вимірювання. Рівняння, що зв'язує числові значення величин, називається *рівнянням між числовими значеннями*.

Наприклад, добре відома з курсу фізики формула

$$Q = 0,24I^2rt$$

є рівнянням між числовими значеннями. В цій формулі $Q$ – числове значення теплоти, що виділяється в провіднику, яка дана в калоріях, $l$, $r$ і $t$ – числові значення сили струму в амперах, опори в омах і часу в секундах. Тільки при цій умові числовий коефіцієнт $k$ набуває значення 0,24.

Взагалі коефіцієнт пропорційності $k$ в рівняннях між числовими значеннями залежить тільки від одиниць вимірювання. Заміна одиниці вимірювання однієї або декількох величин, що входять в рівняння (2), спричиняє за собою зміну числового значення коефіцієнта $k$. Отже, *залежність коефіцієнта пропорційності від вибору одиниць вимірювання є відмітною особливістю рівнянь між числовими значеннями.*

Ця характерна особливість рівнянь між числовими значеннями використовується для визначення похідних одиниць вимірювання і для побудови систем одиниць.

## 7.2 Розмірні та безрозмірні величини. Основні та похідіні величини. Формула розмірності

Німецький математик К.Гаусс в 1832 р. показав, що якщо вибрати незалежно одна від одної одиниці вимірювання декількох величин, то на основі цих одиниць за допомогою фізичних законів можна встановити одиниці вимірювання всіх величин, що входять в певний розділ фізики. При цьому залежність між одиницями вимірювання фізичних величин витікає з того, що самі фізичні величини не є незалежними одна від одної. Вони зв'язані між собою через фізичні закони.

Одиниці вимірювання, які обрані довільно і послужили основою для виразу решти одиниць, називаються *основними одиницями системи*. Одиниці, які отримані на основі основних за допомогою фізичних формул, називаються *похідними одиницями системи.*

Для одного з розділів фізики, механіки, виберемо за основні величини довжину, масу і час і позначимо їх відповідно *L*, *M*, *T*. Ці символи - узагальнюючі. Символ *L*, наприклад, означає довжину взагалі, довжину як величину, яка характеризує протяжність матерії. Під L можна розуміти і довжину пройденого шляху $l$, і відстань $d$ між точками, і довжину радіусу-вектора $r$, тощо.

*Символічні вирази, що показують як була зв'язана дана похідна фізична величина з основними величинами системи, називають розмірністю величини.*

Символи *L*, *M* і *T* входять в розмірності різних величин з різними показниками степеня. Тому розмірність будь-якої довільно узятої механічної величини $f$ у загальному випадку може бути представлена у вигляді (*формула розмірності*)

$$\left[f\right] = L^p M^q T^r,$$

де $p$, $q$, $r$ – цілі додатні або від'ємні числа.

В розмірності деяких величин один, два або всі три показники степеня можуть дорівнювати нулю. Наприклад, розмірність густини

$$\left[\rho\right] = L^{-3} M$$

не має символу $T$, отже маємо $r = 0$.

В розмірності площі

$$\left[S\right] = L^2$$

відсутні символи $M$ і $T$, отже $q = 0$ і $r = 0$.

*Величина, для якої всі три числа $p$, $q$, $r$ дорівнюють нулю, називається безрозмірною.* Наприклад, коефіцієнт тертя $f$ у формулі

$$F_{TP} = fP_n,$$

де $F_{TP}$ – сила тертя $P_n$ – сила нормального тиску, є безрозмірним.

Дійсно:

$$\left[f\right] = \frac{\left[F_{TP}\right]}{\left[P_n\right]} = \frac{LMT^{-2}}{LMT^{-2}} = L^0 M^0 T^0.$$

**Розмірні і безрозмірні величини.** Як було вже сказано вище, безрозмірною величиною вважається величина, в формулі розмірності якої всі показники степені дорівнюють нулю, тобто символічно її розмірність дорівнює одиниці, величина, для якої це твердження не виконується, є розмірною. Але можна ще в інший спосіб визначити розмірні та безрозмірні величини, а саме:

*Величини, числове значення яких залежить від прийнятих масштабів, тобто від системи одиниць вимірювання, називаються розмірними або іменованими величинами.*

*Величини, чисельне значення яких не залежить від вживаної системи одиниць вимірювання, називаються безрозмірними або абстрактними величинами.*

Довжина, час, сила, енергія, момент сили і т.п. можуть правити за приклади розмірних величин. Кути, відношення двох довжин, відношення квадрата довжини до площі, відношення енергії до моменту сили тощо – приклади безрозмірних величин.

Проте підрозділ величин на розмірні і безрозмірні є до деякої міри умовним. Так, наприклад, кут ми тільки що назвали безрозмірною величиною. Але відомо, що кути можна вимірювати в радіанах, в градусах, в частках прямого кута, тобто в різних одиницях. Отже, число, що визначає кут, залежить від обрання одиниці вимірювання. Тому кут можна розглядати і як величину розмірну. З іншого боку, визначимо кут як відношення стягуючої його дуги кола до радіусу; тим самим буде визначена однозначно одиниця вимірювання кута – радіан. Якщо тепер у всіх системах одиниць вимірювання вимірювати кути тільки в радіанах, то кут можна розглядати як безрозмірну величину. Так само, якщо для довжини ввести єдину фіксовану одиницю вимірювання у всіх системах одиниць вимірювання, то після цього довжину можна буде вважати безрозмірною величиною. Але введення фіксованої одиниці вимірювання для кутів зручно, а для довжин незручно. Це пояснюється тим, що для геометрично подібних фігур відповідні кути однакові, а відповідні довжини неоднакові, і тому в різних задачах вигідно вибирати за основну довжину різні відстані.

Таким чином, поняття розмірних і безрозмірних величин є відносними поняттями. Якщо вводиться деякий запас одиниць вимірювання, то величини, для яких одиниці вимірювання однакові у всіх прийнятих системах одиниць вимірювання, будемо називати безрозмірними. Величини, для яких в дослідах, або в теоретичних дослідженнях, фактично або потенційно (явно або неявно) допускаються різні одиниці вимірювання, будемо називати розмірними.

З цих міркувань витікає, що деякі величини можна розглядати в одних випадках як розмірні, а в інших – як безрозмірні.

**Розмірність похідної величини.** З попередньо визначеної теорії випливає, що розмірність похідних фізичних величин визначається з розмірності первинних (основних), тому що самі похідні величини одержуються з первинних.

Правило утворення формул розмірності похідних величин за допомогою розмірності первинних зумовлює загальний вигляд цих формул. Всі вони являють собою прості степеневіі комплекси – одночлени такого вигляду:

$$\left[f\right] = L^p M^q T^r \ldots,$$

де $f$ – деяка фізична величина, три крапки в кінці виразу означають, що кількість основних (первинних) величин не обов'язково повинна дорівнювати трьом.

При утворенні розмірності складних величин, ми будемо користуватися такими теоремами:

<u>Теорема 1.</u> Якщо чисельне значення величини $C$ дорівнює добутку чисельних значень величин $A$ та $B$ , то розмірність $C$ дорівнює добутку розмірності $A$ та $B$:

$$C = A \cdot B \to \left[C\right] = \left[A\right] \cdot \left[B\right],$$

де $A$, $B$ та $C$ – деякі фізичні величини.

<u>Теорема 7.</u> Якщо чисельне значення величини $C$ дорівнює відношенню чисельних значень величин $A$ та $B$, то розмірність $C$ дорівнює відношенню розмірності $A$ і $B$,

$$C = \frac{A}{B} \to \left[C\right] = \frac{\left[A\right]}{\left[B\right]},$$

де $A$, $B$ та $C$ – деякі фізичні величини.

<u>Теорема 3.</u> Якщо чисельне значення величини $C$ дорівнює степені $n$ чисельного значення величини $A$, то розмірність $C$ дорівнює степені $n$ розмірності $A$:

$$C = A^n \to \left[C\right] = \left[A\right]^n,$$

де $A$ та $C$ – деякі фізичні величини.

### 7.3 Структура функціональних зв'язків між фізичними величинами. $\pi$ - теорема

Фізичні закономірності, які встановлюються теоретично або безпосередньо з експерименту, є функціональною залежністю між величинами, що характеризують досліджуване явище.

Числові значення цих розмірних фізичних величин залежать від вибору системи одиниць вимірювання, не пов'язаної з суттю явища. Тому функціональна залежність, що виражає фізичні факти, які не залежать від системи одиниць вимірювання, повинна володіти деякою спеціальною структурою. Закономірності, які визначаються фізичною теорією або в експерименті, завжди можна представити у вигляді

$$a = f(a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n), \tag{7.3}$$

де величини $a_1, \dots, a_n$ носять назву визначальних параметрів. Деякі з цих параметрів в даному процесі можуть бути змінними, інші – сталими.

З'ясуємо структуру функції $f(a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n)$ в припущенні, що ця функція виражає деякий фізичний закон, незалежний від вибору системи одиниць вимірювання.

Хай серед розмірних величин $a_1, a_2, ..., a_n$ перші $k$ величин $(k \le n)$ мають незалежні розмірності (число основних одиниць вимірювання повинне бути більше або дорівнюватиме *k)*.

Незалежність розмірності означає, що формула, що виражає розмірність однієї з величин, не може бути представлена як комбінація у вигляді степеневого одночлена з формул розмірності для інших величин.

Серед механічних величин звичайно є не більше трьох з незалежними розмірностями. Тому що в задачах з механіки зазвичай використовується не більше трьох первинних величин. Ми припускаємо, що $k$ дорівнює найбільшому числу параметрів з незалежними розмірностями, тому розмірності величин $a, a_{k+1}, ..., a_n$ можна виразити через розмірності первинних величин.

Візьмемо $k$ незалежних величин $a_1, a_2, ..., a_k$ за основні величини і введемо позначення для їх розмірності

$$[a_1], ..., [a_k]. \tag{7.4}$$

а розмірності величин $a$, $a_{k+1}, \dots, a_n$ повинні виражатися через розмірності незалежних параметрів $a_1, \dots, a_k$ таким чином:

$$\left[a_{k+1}\right]=\left[a_1\right]^{p_{k+1}}\dots\left[a_k\right]^{r_{k+1}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left[a_n\right]=\left[a_1\right]^{p_n}\dots\left[a_k\right]^{r_n}. \tag{7.5}$$
$$\left[a\right]=\left[a_1\right]^{p}\dots\left[a_k\right]^{r}$$

Насправді, якби це було не так, то розмірності величин $a$, $a_{k+1},\dots,a_n$ були б незалежними і згідно попередньому можна було б, змінюючи систему одиниць вимірювання всередині даного класу, довільно змінювати величину $a$, залишаючи незмінними величини (а, отже, і всі визначальні параметри $a_1,\dots,a_k$). Це означало б, що величина $a$ залежить не тільки від параметрів $a_1,\dots,a_n$, тобто що список визначальних параметрів в залежності (7.3) явно неповний. Таким чином, існують такі числа $p,\dots,r$, що мають місце формули (7.5). Покладемо тому

$$\Pi_1=\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}}\dots a_k^{r_{k+1}}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Pi_{n-k}=\frac{a_n}{a_1^{p_n}\dots a_k^{r_n}},, \tag{7.6}$$
$$\Pi=\frac{a}{a_1^{p}\dots a_k^{r}}.$$

Залежність (7.3), з умовою використання (7.6), можна переписати у вигляді

$$\Pi=\frac{f\left(a_1,\dots,a_n\right)}{a_1^{p}\dots a_k^{r}}=$$
$$-\frac{1}{a_1^{p}\dots a_k^{r}}f\left(a_1,\dots,a_k,\Pi_1 a_1^{p_{k+1}}\dots a_k^{r_{k+1}},\dots,\Pi_{n-k}a_1^{p_n}\dots a_k^{r_n}\right)=, \tag{7.7}$$
$$=F\left(a_1,\dots,a_k,\Pi_1,\dots,\Pi_{n-k}\right).$$

Величини $\Pi,\Pi_1,\dots,\Pi_{n-k}$, очевидно, безрозмірні. Тому при переході від однієї системи одиниць до іншої всередині даного класу їх чисельні значення залишаються незмінними. В той же час, як було показано, можна перейти до такої системи одиниць вимірювання, що будь-який з параметрів $a_1,\ldots,a_k$, наприклад, $a_1$ зміниться в довільне число раз, а інші залишаться незмінними. При такому переході в залежності (7.7) змінюється, і притому довільно, перший аргумент , а вся решта аргументів функції $F$ залишається незмінною, так само як її значення $\Pi$. Звідси витікає, що $\frac{\partial F}{\partial a_1}=0$ і аналогічно $\frac{\partial F}{\partial a_2}=0$, $\frac{\partial F}{\partial a_k}=0$. Тому залежність (7.7) представляється насправді через функцію $n-k$ аргументів:

$$\begin{gathered}\Pi=\Phi\left(\Pi_1,\ldots,\Pi_{n-k}\right);\\ f\left(a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_n\right)=\\ =a_1^p\ldots a_k^r\Phi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}}\ldots a_k^{r_{k+1}}},\ldots,\frac{a_n}{a_1^{p_n}\ldots a_k^{r_n}}\right)\end{gathered},\tag{7.8}$$

Цей факт складає зміст центрального (і, по суті, єдиного змістовного) ствердження аналізу розмірності, П - теореми, явно сформульованої і доведеної Е. Бакингамом:

**Хай існує фізична закономірність, яка виражена в формі залежності деякої, взагалі кажучи, розмірної величини від розмірних визначальних параметрів. Ця залежність може бути представлена у вигляді залежності безрозмірної величини від безрозмірних комбінацій визначальних параметрів. Кількість цих безрозмірних комбінацій менше загального числа розмірних визначальних параметрів на число визначальних параметрів з незалежними розмірностями.**

Слід зазначити, що П–теорема інтуїтивно цілком очевидна і її неявне використання почалося задовго до того, як вона була явно сформульована і формально доведена. В зв’язку з цим слід перш за все назвати імена Фур’є, Максвела, Рейнольдса і Релея. Помітимо, що ця теорема з великою користю плідно застосовується при попередньому аналізі фізичних явищ і при обробці даних експериментів. Насправді, прийнято вважати, що для з’ясування залежності тієї або іншої величини від деякого визначального параметра треба вимірювати цю величину як мінімум при десяти значеннях даного аргументу (зрозуміло, число десять цілком умовно). Таким чином, для експериментального визначення величини $a$ у функції з $n$ визначальних параметрів необхідно було б провести $10^n$ експериментів. Згідно $\Pi$ - теореми, справа зводиться до визначення функції $n-k$ безрозмірних аргументів $\Pi_1\ldots\Pi_{n-k}$ для знаходження якої достатньо $10^{n-k}$ дослідів, в $10^k$ разів менше. Отже, трудомісткість визначення шуканої функції скорочується на стільки порядків, скільки величин з незалежними розмірностями існує серед визначальних параметрів.

Показовий приклад 1. В 1909—1911 рр. фізикохіміки Е. Бозе, Д. Рауерт і М. Бозе опублікували серію експериментальних досліджень (рис. 7.1). Ними вимірювався час $\tau$ заповнення судини даного об'єму $Q$ і перепад тиску $\Delta p$ на кінцях трубки при стаціонарному протіканні через трубку різних рідин: води, хлороформу, бромоформу, ртуті, етилового спирту та ін. Результати дослідів були наведені у вигляді серії залежностей перепаду тиску від часу заповнення посудини для різних рідин, представлених на рис. 7.2. Ці роботи були помічені Карманом, який піддав обробці ці результати з точки зору, якщо користуватися сучасною термінологією, аналізу розмірності.

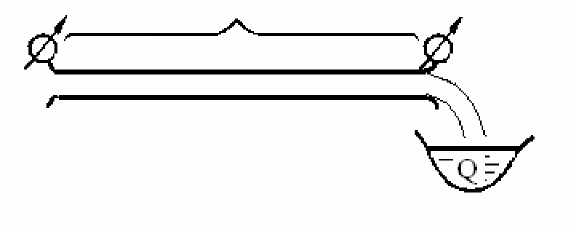


Рисунок 7.1 – Схема експерименту Е. Бозе, Д. Рауерта та М. Бозе

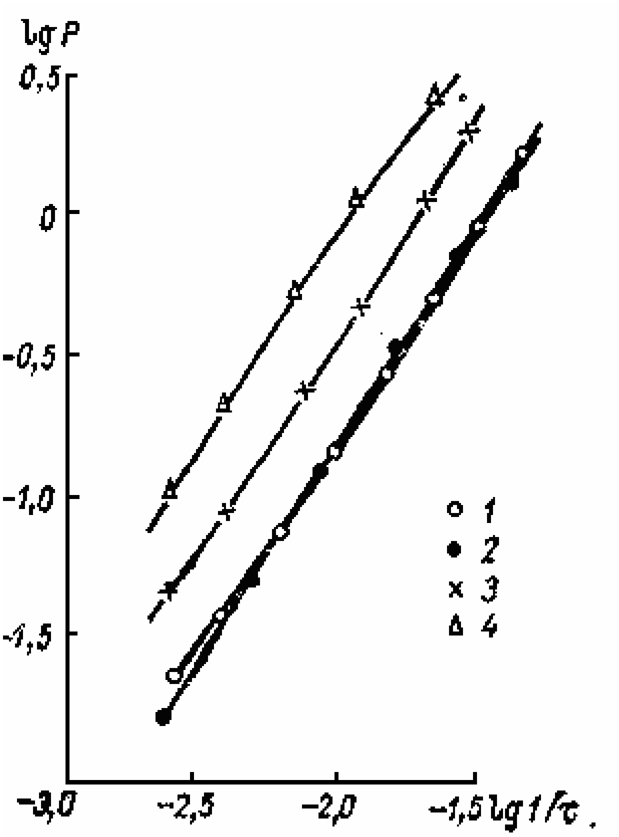


Рисунок 7.2 – Результати експери-менту Е. Бозе, Д. Рауерта та М. Бозе. 1 - вода, 2 – хлороформ, 3 - бромоформ, 4 - ртуть

Міркування Кармана будувались таким чином. Перепад тиску на кінцях трубки $\Delta p$ повинен залежати від часу заповнення посудини $\tau$, об'єму посудини $Q$, коефіцієнта в'язкості рідини $\mu$, її густини $\rho$:

$$\Delta p = f\left(\tau, Q, \mu, \rho\right). \tag{7.9}$$

В даному випадку $n=4$. Розмірності параметрів в класі MLT визначаються такими співвідношеннями:

$$\left[\Delta p\right] = ML^{-1}T^{-2},\ \left[\tau\right] = T,\ \left[Q\right] = L^3,\ \left[\mu\right] = ML^{-1}T^{-1},\ \left[\rho\right] = ML^{-3}. \tag{7.10}$$

Легко бачити, що перші три визначальні параметри $\tau$, $Q$, $\mu$ мають незалежні розмірності, розмірність же четвертого визначального параметра — густина $\rho$ — виражається через розмірності перших трьох: $\left[\rho\right] = \left[\mu\right]\left[\tau\right]\left[Q\right]^{-2/3}$.

Таким чином, $k=3$, так що $n-k=1$ і П–теорема дає

$$\Pi = \Phi\left(\Pi_1\right),\ \Pi = \frac{\Delta p}{\mu\tau^{-1}},\ \Pi = \frac{\rho}{\mu\tau Q^{-2/3}}. \tag{7.11}$$

Отже, згідно (7.11), в координатах $\Pi_1$, $\Pi$ всі експериментальні точки повинні лягти на єдину криву. Як показує рис. 7.3, це чудово підтвердилося. Ясно, що проведений наперед аналіз розмірності міг би скоротити об'єм експериментальної роботи физико–хіміків у багато разів.

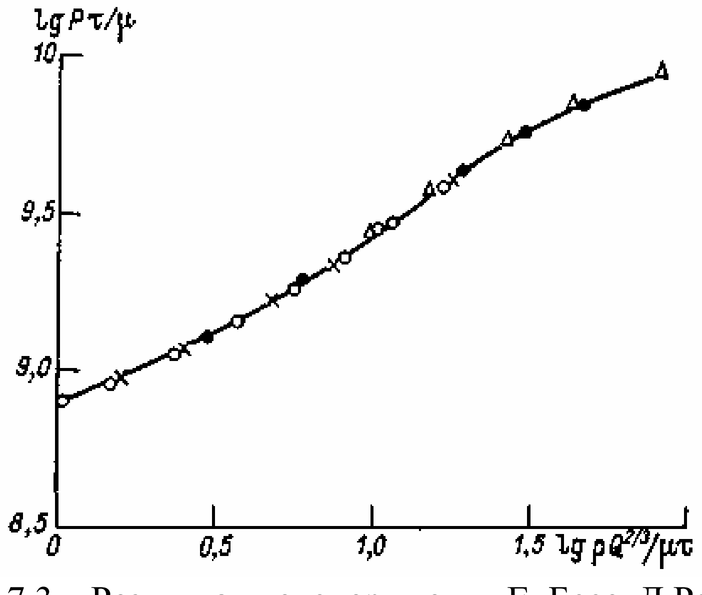


Рисунок 7.3 – Результати експерименту Е. Бозе, Д.Рауерта і М. Бозе в інтерпретації Кармана

Показовий приклад 7. Наведемо ще один, більш забавний, ніж навчальний приклад використання П –теореми: доведемо з її допомогою теорему Піфагора (див. книгу А. Баренблатта).

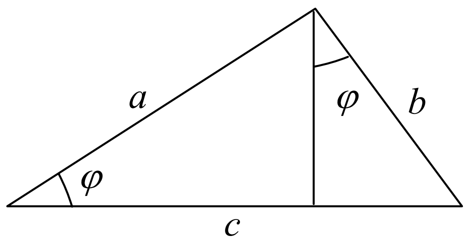


Рисунок 7.5 – Доведення теореми Піфагора за домогою аналізу розмірностей

Площа прямокутного трикутника $S$ визначається величиною його гіпотенузи $c$ і, для визначеності, меншим з гострих кутів $S = f\left(c,\varphi\right)$. Очевидно, П–теорема дає: $S = c^2\Phi\left(\varphi\right)$. Висота, перпендикулярна гіпотенузі (рис. 7.5), розбиває основний трикутник на два подібних йому прямокутних трикутника, гіпотенузами яких є вже відповідно катети $a$ і $b$ основного трикутника. Отже, їх площі дорівнюють $S_1 = a^2\Phi\left(\varphi\right)$, $S_1 = b^2\Phi\left(\varphi\right)$, де $\Phi\left(\varphi\right)$ – те ж, що і у разі основного трикутника. Сума площ, $S_1$, $S_2$ дорівнює площі основного трикутника$S$: $S = S_1 + S_2$, звідки $c^2\Phi\left(\varphi\right) = a^2\Phi\left(\varphi\right) + b^2\Phi\left(\varphi\right)$, так що $c^2 = a^2 + b^2$, що і вимагалося довести. Видно, що теорема істотно спирається на евклідовість геометрії.

Розглянуті приклади показують, що тривіальні, здавалося б, міркування аналізу розмірності можуть дати цілком змістовні результати. Найважливішим елементом при цьому є правильне визначення сукупності визначальних параметрів. Сукупність визначальних параметрів знаходиться просто, якщо є математичне формулювання задачі, ця безліч незалежних змінних і параметрів задачі, що входять в граничні рівняння, початкові і т.п. умови, що визначають, і притому єдиним чином, рішення задачі. Правильний вибір визначальних параметрів в задачі, яка не має явного математичного формулювання, пов’язаний, перш за все, з інтуїцією дослідника — успіх тут залежить від правильного розуміння того, які параметри насправді важливі, а якими можна нехтувати.

Проте, чим менше число параметрів, що визначають величину, яка вивчається, тим більш обмежена форма функціональної залежності, і тим простіше вести дослідження. Зокрема, якщо всі визначальні параметри мають незалежні розмірності, то за допомогою аналізу розмірності ця залежність визначається з точністю до постійного множника. Його можна визначити або за допомогою експерименту, або теоретично, вирішуючи відповідну математичну задачу.

**Автомодельність і аналіз розмірності.** Явища називаються автомодельними, якщо розподіл його характеристик в різні моменти часу виходить одне з іншого перетворенням подібності (те, що одну з незалежних змінних ми ототожнюємо з часом, не має значення).

Автомодельність спрощує обчислення характеристик явища. При обробці даних спостережень (вимірювань) безладна хмара емпіричних даних (точок) лягає на єдину криву або поверхню, побудовану в спеціально вибраних автомодельних координатах.

За допомогою автомодельних рішень можна побачити характерні властивості нових явищ. Вони використовуються як еталони при оцінці наближених методів рішення складніших задач. Перехід від рівнянь з частинними похідними до звичайних диференціальних рівнянь здавалося спрощує справу, бо зараз за допомогою ЕОМ вдається вирішувати систему рівнянь в частинних похідних методом встановлення або яким-небудь іншим кінцево-різницевим або спектральним методами. Але отримання автомодельності все одно привертає увагу дослідників, як глибокий фізичний факт, який свідчить про наявність певного типу стабілізації в досліджуваних процесах. Крім того, автомодельне рішення використовують як перше наближення на початку рахунку. Розглянемо деякі приклади, що пояснюють значення і вживання міркувань розмірності до отримання автомодельних рішень. Розглянемо, наприклад, задачу теплопровідності.

Хай в початковий момент $t=0$ в деякій точці нескінченного простору була виділена миттєво кінцева порція тепла $E$. В момент $t$ приріст температури $\theta$ в довільній точці визначається співвідношенням:

$$\theta = \frac{E}{c\left(2\sqrt{\pi\chi t}\right)^3}\exp\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right),$$

де $c$ – теплоємність, $\chi$– коефіцієнт температуропровідності $r$ – відстань від довільної точки до місця, де виділилося тепло.

Якщо масштаб температури $u_0(t)$ і лінійний масштаб $r_0(t)$, залежні від довжини $u_0(t) = \frac{E}{c(\chi t)^{3/2}}$, $r_0(t) = \sqrt{\chi t}$, то розподіл температури в просторі перестає залежати від часу:

$$\frac{u}{u_0} = f\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

де

$$f(\zeta) = \frac{1}{8\pi^3 / r} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right), \ \zeta = \frac{r}{r_0}.$$

Останнє рівняння в частинних похідних з двома незалежними змінними $r$ і $t$ вимагається вирішити. Тут автомодельність означає, що можна так вибрати змінні масштаби $u_0(t)$ і $r_0(t)$, що представлені в нових масштабах характеристики явища будуть виступати як функції однієї змінної.

$$\frac{u}{u_0(t)} = \upsilon(\zeta), \ \ \zeta = \frac{r}{r_0(t)}.$$

При пошуку автомодельних рішень привертають аналіз розмірності.

Хай є якась залежність вигляду:

$$a = f(a_1, a_2, a_3 ... a_n)$$

де $a$ – величина як функція $n$ параметрів $a_1, a_2, a_3 ... a_n$. Якщо ця залежність має фізичний сенс, то це співвідношення виражає фізичну закономірність, яка не повинна залежати від свавілля вибору одиниць вимірювання.

Розіб’ємо величини $a_1, a_2, a_3 ... a_n$ на дві групи. Першу $a_1 ... a_k$ – складемо з визначальних величин з незалежними розмірностями (наприклад, довжина, швидкість). В другу $a_1, a_{k+1}, a_n$ – величини, розмірність яких можна виразити через розмірності першої групи.

Тоді розмірність величини $[a] = a_1{}^p, a_2{}^q ... a_k{}^r$ матиме розмірність добутку розмірності визначальних величин з незалежними розмірностями, а величина $a_{k+1}$ – розмірність добутку $a_1{}^{p_{k+1}}, a_2{}^{q_{k+1}} ... a_n{}^{r_{k+1}}$. Степені $p, q$ отримують простим підрахунком.

Величини $\left.\begin{array}{l} \Pi = \dfrac{a}{a_1^{\,p}, a_2^{\,q} \ldots a_n^{\,r}} \\ \Pi_1 = \dfrac{a_{k+1}}{a_1^{\,p_{k+1}}, a_2^{\,q_{k+1}} \ldots a_k^{\,r_{k+1}}} \end{array}\right\}$ будуть суть безрозмірні величини. Незалежність фізичної закономірності від вибору масштабу довжини вимірювання означає, що $a(x)$ можна представити у вигляді формули

$$\Pi = \varphi(\Pi_1 \ldots \Pi_{n-k}),$$

яка зв'язує безрозмірну величину $\Pi$ з безрозмірними величинами $\Pi_1 \ldots \Pi_{n-k}$, причому число $k$ менше $n$. Тоді, якщо перейти до розмірних величин $a_1 \ldots a_n$, то виходить, що функція $f(a_1 \ldots a_n)$ від $n$ аргументів, насправді представляється функцією меншого числа аргументів (параметрів). Менше на стільки, наскільки серед величин $a_1 \ldots a_n$ міститься величин з незалежними розмірностями.

$$Q = \frac{E}{c},$$

де $\upsilon$ – залежить від моменту часу $t$, коефіцієнта температуропровідності χ, потоку $Q = E/c$, а також відстані $r$. Всі величини розмірні і їх чисельні значення залежать від вибору масштабу вимірювання довжини, часу і температури.

$$[\chi] = L^2T^{-1},\ [Q] = KL^3;\ \sqrt{\chi \mathrm{t}} = м,\ \frac{Q}{(\chi \mathrm{t})^{3/2}} = K;\ \Pi = \frac{\upsilon}{Q(\chi \mathrm{t})^{3/2}},$$

$$\Pi_1 = \frac{r}{\sqrt{\chi \mathrm{t}}}.$$

Тут $\Pi_1$ – незалежний безрозмірний коефіцієнт, який можна скласти з величин $t, \chi, \mathrm{Q}, \mathrm{r}$, причому $t, \chi, \mathrm{Q}$ – незалежні розмірності.

Залежна величина $\upsilon = f(t, \chi, \mathrm{Q}, \mathrm{r})$ визначає шукане рішення $\Pi = \Phi(\Pi_1)$ або $\upsilon = \dfrac{Q}{(\chi \mathrm{t})^{3/2}} f(\zeta)$, $\zeta = \Pi_1 = \dfrac{r}{\sqrt{\chi \mathrm{t}}}$.

Таким чином в даному випадку вдалося встановити автомодельність рішення і визначити масштаби $u_0(t)$ і $r_0(t)$, використовуючи аналіз розмірності.

# 8 ТЕОРІЯ ПОДІБНОСТІ

## 8.1 Основні поняття механічної подібності

При встановленні кількісних закономірностей, що характеризують який-небудь фізичний процес, може бути використано два методи. Перший (теорія розмірності) зводиться до експериментального дослідження, другий (теорія подібності) заснований на розв'язанні диференціальних рівнянь, що описують дане явище. Гідність першого в його конкретності, безпосередньої реалізації результатів. Проте, з іншого боку, це ж є його слабким місцем, бо отримані висновки застосовні тільки до даного одиничного факту і безпосередньо не можуть бути узагальнені і поширені на інші скільки-небудь відмінні, хай навіть споріднені по своєму фізичному змісту, явища. Окрім того, за допомогою однієї тільки теорії розмірності ми не можемо визначити функціональних співвідношень між безрозмірними величинами. На відміну від цього методи математичної фізики характеризуються надзвичайною спільністю підходу, бо виведені рівняння, базуючись на фундаментальних законах природи, охоплюють всю сукупність явищ даного класу, тим самим знеособлюють конкретне явище. Наприклад, рівняння гідромеханіки описують клас явищ, пов'язаних з будь-яким рухом рідкого середовища. Для того, щоб виділити той процес, що цікавить нас зі всієї сукупності (класу), яка охоплюється відповідною системою рівнянь, необхідно однозначно задати умови, що визначають його специфіку. Сюди, як вже вказувалося, відносяться:

1. геометричні характеристики системи (розміри, конфігурація) ;
2. параметри, що характеризують її фізичні властивості (наприклад, в'язкість рідини, її теплопровідність тощо);
3. розподіл шуканих величин, відомих для якого-небудь моменту часу (початкова умова);
4. значення шуканих змінних на межі системи, що відображають її взаємодію з навколишнім середовищем.

Ці умови, укупі з коректно записаними рівняннями, цілком достатні для математичного формулювання будь-якої задачі. Цей метод універсальний. Але, на жаль, його практична реалізація натрапляє, в більшості випадків, на непереборні на даний час математичні труднощі. Це буває пов'язано зі складністю рівнянь, а також необхідністю здобування граничних і початкових умов, які звичайно включають велику кількість взаємозалежних величин.

Природно поставити питання, по-перше, про можливість узагальнення результатів експерименту, а, по-друге, про зменшення кількості величин, що фігурують у теоретичних рівняннях. Відповідь на нього може дати теорія подібності, яка певною мірою синтезує обидва методи дослідження.

Крім того, і це дуже важливо, вона дозволяє виявити ряд закономірностей фізичних явищ на підставі системи диференціальних рівнянь (з відповідними умовами однозначності), без їх інтегрування. Спочатку стисло зупинимося на її передумовах.

В основі тут, по суті лежить розширення найпростішого поняття геометричної подібності. Нагадаємо, що дві фігури геометрично подібні, якщо одна з іншої може бути отримана множенням на деякий постійний масштабний множник, наприклад,

$$k_l = \frac{l_2}{l_1} \quad \Rightarrow \quad l_2 = k_l l_1,$$

де $l_2$ і $l_1$ які-небудь розміри даних фігур, а $k_l$ – масштабний множник геометричної подібності. При цьому, природно, деформації початкового геометричного образу не відбувається. Дві точки, які переводяться при цьому одна в іншу, називаються *подібними.* Аналогічно вводиться часова подібність: $k_t = \frac{t_2}{t_1}$ ($k_t$ – масштабний множник часової подібності). При $k_t = 1$ обидва процеси, що досліджуються, протікають синхронно. За наявності подібності систем такі ж вимоги пред'являються по відношенню до їх фізичних параметрів, в подібні моменти часу в подібних точках повинно виконуватись $k_f = \frac{f_2}{f_1}$ ($f$ – фізична величина, що визначає даний процес, а $k_f$ – це масштабний множник подібності величини $f$). При цьому між масштабними множниками може мати місце цілком певний зв'язок, тобто не всі вони є взаємно незалежними. Наприклад, можна ввести $k_\upsilon = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$ і $k_a = \frac{a_2}{a_1}$ ($\upsilon$, $a$ – відповідно швидкість і прискорення). З іншого боку, оскільки $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$ і $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$, то можна записати, що $k_\upsilon = \frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \lim\limits_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \left( \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right)$, $k_a = \frac{a_2}{a_1} = \lim\limits_{\substack{\Delta t_1 \to 0 \\ \Delta t_2 \to 0}} \left( \frac{\Delta \upsilon_2}{\Delta \upsilon_1} \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right)$.

Оскільки, згідно визначенню, відношення всіх довжин і часів при подібних процесах незмінно, то записані співвідношення еквівалентні виразам:

$$k_\upsilon = k_l \cdot k_t^{-1}, \;\; k_a = k_\upsilon \cdot k_t^{-1} = k_l \cdot k_t^{-2}.$$

Аналогічно, користуючись відповідними визначеннями, можна отримати $k_\rho = k_m \cdot k_l^{-3}$ ($\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V}$, $m$ – маса, $V$ – об'єм, $k_m = \dfrac{m_2}{m_1}$);

$k_F = k_m \cdot k_a = k_m \cdot k_l \cdot k_t^{-2}$, $F = m \cdot a$ тощо.

Можна сказати, що **дві системи будуть подібні**:

1. геометрично, якщо $k_l = const$;
2. кінематично, якщо $k_l = const$, $k_t = const$ (всі коефіцієнти перерахунку для кінематичних елементів визначаються при цьому через $k_l$ і $k_t$ на основі відповідних значень величин);
3. динамічно, якщо $k_l = const$, $k_t = const$, $k_m = const$ (відносини сил $k_F$ також виражаються через $k_l$, $k_t$ і $k_m$ за допомогою відомих визначальних рівнянь).

Якщо в наявності геометрична, кінематична і динамічна подібність двох систем, то вони називаються *механічно подібними.* Підкреслимо, що подібні явища можуть бути отримані один з одного шляхом множення всіх величин на відповідні їм масштабні множники. Причому безлічі значень $k$ відповідає і безліч рішень. В цьому значенні подібні явища утворюють групу – поняття більш вузьке, ніж клас, але більш широке, ніж одиничне явище.

Між поняттями подібності і розмірності існує тісний зв'язок, бо перерахунок всіх величин подібних явищ за допомогою постійних множників по суті еквівалентний зміні відповідних одиниць вимірювання в $k$ раз. До того ж і відповідні формули для коефіцієнтів абсолютно тотожні співвідношенням, що зв'язують вторинні і первинні розмірності Так, $k_\upsilon = k_l \cdot k_t^{-1} \to [\upsilon] = LT^{-1}$, $k_F = k_m \cdot k_l \cdot k_t^{-2} \to [F] = MLT^{-2}$ тощо.

**Необхідні і достатні умови подібності.** Подібність зумовлена, в першу чергу, фізичною однотипністю даних процесів. Тому вони відносяться до одного класу і описуються одними і тими ж рівняннями. Останнє означає, що рівняння повинні бути інваріантні по відношенню до перетворень подібності, тобто не можуть міняти свого вигляду при множенні всіх величин, що в них входять, на постійні множники. Подивимося, що це означає на практиці.

Запишемо рівняння, що відповідають двом подібним процесам у вигляді суми операторів $\Phi_i$(($i = 1, 2, \ldots, n$; $n$ — число доданків в рівнянні), тобто

$$\Phi_1^{(1)} + \Phi_2^{(1)} + \ldots + \Phi_n^{(1)} = 0; \qquad (8.1)$$

$$\Phi_1^{(2)} + \Phi_2^{(2)} + \ldots + \Phi_n^{(2)} = 0. \tag{8.2}$$

В другому рівнянні на підставі властивості подібності виконуємо перерахунок всіх величин і перепишемо його у вигляді

$$C_1\Phi_1^{(1)} + C_2\Phi_2^{(1)} + \ldots + C_n\Phi_n^{(1)} = 0, \tag{8.3}$$

де $C_i$ є комбінації з масштабних коефіцієнтів, які побудовані по типу формул розмірності у вигляді степеневих одночленів. Помітимо, що якби всі коефіцієнти $C_i = 1$, то умова інваріантності рівнянь виконувалася б тривіальним чином.

Тепер поділимо в (8.3) всі доданки з $C_i$ на $C_1$ (це не поменшує спільності міркувань). Тоді матимемо

$$\Phi_1^{(1)} + K_2\Phi_2^{(1)} + K_3\Phi_3^{(1)} + \ldots + K_n\Phi_n^{(1)} = 0. \tag{8.4}$$

Тут $K_i = \dfrac{C_i}{C_1}$ – приведені множники, або індикатори подібності. Порівнюючи (8.3) і (8.4), бачимо, що перші члени рівнянь співпадають, а для рівності інших достатньо покласти $K_i = 1$. За цих умов сформульовані вище вимоги задовольняються.

З погляду загальної подібності систем інваріантність рівнянь дає необхідні, але не достатні умови, бо без урахування початкових і граничних умов, однакові системи дадуть однакові рішення для різних за своїм фізичним змістом процесів. Тому аналогічні вимоги слід накласти також на початкові і граничні умови. Їх виконання дасть достатні умови подібності.

Таким чином, можна констатувати, що *для подібності двох систем необхідно і достатньо, щоб всі наведені множники* $K_i$, *складені на підставі відомих рівнянь і заданих початкових і граничних умов, тотожно дорівнювали одиниці.* Це так звана перша теорема подібності.

Перш ніж ми розглянемо приклад, сформулюємо <u>другу теорему подібності</u>. Згідно цієї теореми *всі рівняння зв'язку приводяться до критеріального вигляду, або, інакше кажучи, можуть бути перетворені в рівняння, які визначають однозначний зв'язок між критеріями подібності.*

<u>Приклад.</u> Для з'ясування деталей звернемося до конкретного прикладу. Розглянемо подібні перетворення рівнянь Нав'є — Стокса для нестискуваної рідини, узявши лише одну проекцію на вісь $z$ (($z$ – направлено по лінії дії сили тяжіння у зворотну сторону). Як відомо, в

цьому випадку

$$\frac{\partial w_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+\upsilon_1\frac{\partial w_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1}=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_1}{\partial z_1}-g_1-\nu_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2}\right). \tag{8.5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial w_2}{\partial t}+u_2\frac{\partial w_2}{\partial x_2}+\upsilon_2\frac{\partial w_2}{\partial y_2}+w_2\frac{\partial w_2}{\partial z_2}=\\ =-\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P_2}{\partial z_2}-g_2-\nu_2\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 w_2}{\partial z_2^2}\right)^{,}\end{gathered} \tag{8.6}$$

Тут індекси 1 і 2 позначають різні подібні процеси.

Вводячи масштабні множники, рівняння (8.6) можна переписати у вигляді

$$\frac{k_\upsilon}{k_t}\frac{\partial w_1}{\partial t}+\frac{k_\upsilon^2}{k_L}\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+\upsilon_1\frac{\partial w_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)=-\frac{k_p}{k_L k_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial z_1}-$$

$$-k_g g_1-\frac{k_\nu k_\upsilon}{k_L^2}\nu_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2}\right). \tag{8.7}$$

Тут взято для простоти, що $k_x=k_y=k_z=k_L$ і $k_u=k_\upsilon=k_w=k_\upsilon$.

Поділивши всі члени рівняння на загальний множник, що стоїть перед яким-небудь оператором (наприклад, на $\frac{k_\upsilon^2}{k_L}$), отримаємо в (8.7) деякі зведені комплексні множники $K_i$, тобто

$$\frac{k_L}{k_t k_\upsilon}\frac{\partial w_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+\upsilon_1\frac{\partial w_1}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial w_1}{\partial z_1}=-\frac{k_p}{k_\upsilon^2 k_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_1}{\partial z_1}-$$

$$-\frac{k_g k_L}{k_\upsilon^2}g_1-\frac{k_\nu}{k_\upsilon k_L}\nu_1\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 w_1}{\partial z_1^2}\right). \tag{8.8}$$

Тут $K_1=\frac{k_L}{k_t k_\upsilon}$; $K_2=\frac{k_p}{k_\rho k_\upsilon^2}$; $K_3=\frac{k_L k_g}{k_\upsilon^2}$; $K_3=\frac{k_\nu}{k_\upsilon k_L}$.

З вищенаведеної умови $K_i=1$ повинно бути: $K_1=K_2=K_3=K_4=1$, тобто

$$\frac{k_L}{k_t k_\upsilon}=1;\quad \frac{k_p}{k_\rho k_\upsilon^2}=1;\quad \frac{k_L k_g}{k_\upsilon^2}=1;\quad \frac{k_\nu}{k_\upsilon k_L}=1. \tag{8.9}$$

По значенню: $k_L=\frac{l_2}{l_1}$, $k_t=\frac{t_2}{t_1}$, $k_\upsilon=\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$, $k_p=\frac{p_2}{p_1}$, $k_\rho=\frac{\rho_2}{\rho_1}$, $k_g=\frac{g_2}{g_1}$, $k_\nu=\frac{\nu_2}{\nu_1}$.

Тому рівність (8.9) можна представити у вигляді:

$$\frac{l_2}{t_2\upsilon_2}=\frac{l_1}{t_1\upsilon_1}=idem,\quad \frac{p_2}{\rho_2\upsilon_2^2}=\frac{p_1}{\rho_1\upsilon_1^2}=idem,$$

$$\frac{g_2 l_2}{\upsilon_2^2}=\frac{g_1 l_1}{\upsilon_1^2}=idem,\qquad \frac{\nu_2}{l_2\upsilon_2}=\frac{\nu_1}{l_1\upsilon_1}=idem, \tag{8.10}$$

Записані рівності повинні виконуватися у разі подібності явищ в обох даних процесах, тобто вказані комплекси (їх ще називають критеріями подібності), складені з деяких характеристик величин явища 1 та 2 повинні бути однаковими (термін idem — однаковий).

І тоді першу теорему подібності можна переформулювати наступним чином: *В подібних явищах критерії подібності мають однакові числові значення, або в подібних явищах індикатори подібності повинні дорівнювати одиниці.*

До більш докладної розшифровки поняття характерних величин і фізичного значення отриманих комплексів ми звернемося дещо нижче, після введення деяких додаткових визначень.

**Зведення рівнянь до безрозмірного вигляду.** Всі досліджувані величини, так само як і їх похідні всіх порядків, безперервно зміняються в часі і просторі. Якщо при цьому вони залишаються обмеженими, то представляється можливим ввести поняття характерних масштабів, які обираються таким чином. Якщо в математичному формулюванні задачі фігурують шукані величини, то в якості їх характерних величин доцільно використовувати їх середні значення. Позначивши $\langle\ \rangle$ знак усереднювання по ансамблю (безлічі реалізацій) можливо для будь-якої з них записати $\langle f\rangle=f_0$ ( масштаб). Для випадку похідної масштаб функції обираємо на основі різниці її максимальних ($f_2$) і мінімальних

($f_1$) значень

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\langle f_2-f_2\rangle}{\langle x_{i2}-x_{i1}\rangle}\frac{\partial f_б}{\partial x_{iб}}=\frac{\Delta f_0}{\Delta x_{i0}}\frac{\partial f_б}{\partial x_{iб}},$$

де $i=1,2,3,4$; $x_1\equiv x$; $x_2\equiv y$; $x_3\equiv z$; $x_4\equiv t$. Індекс «б» відповідає тому, що позначені їм функції і аргументи є безрозмірними. При цьому масштаб координат і часу ($\Delta x_{i0}$) визначається так, щоб $\left\langle\frac{\partial f_б}{\partial x_{iб}}\right\rangle\cong 1$.

Аналогічно для другої похідної

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{\Delta f_0}{\Delta x_{i0}}\frac{\partial^2 f_б}{\partial x_{iб}^2},\text{ тобто }\left\langle\frac{\partial^2 f_б}{\partial x_{iб}^2}\right\rangle\cong 1.$$

Слід підкреслити, що розмірність відповідних величин переходить до масштабів. Найважливішим висновком з наведених співвідношень є те, що при вказаному виборі масштабів середні значення безрозмірних функцій і їх похідних дорівнюють одиниці.

Необхідно відзначити, що масштаб для будь-якої з величин не завжди можливо визначити в умовах конкретної задачі. Так, наприклад, якщо розглядається процес розповсюдження тепла в необмеженому просторі, то задати лінійний розмір не вдається. Те ж саме відбувається по відношенню до масштабу часу у разі аперіодичного процесу.

Звернемося до вищенаведеному прикладу. Хай для простоти:

$$\langle\Delta\upsilon_i\rangle=\langle\upsilon_i\rangle\equiv\upsilon_0,$$

$$\langle\Delta p\rangle\equiv p_c,\ \langle\rho\rangle\equiv\rho_0,\ \langle\nu\rangle\equiv\nu_0,\ \langle g\rangle g_0\equiv g,$$

$$\langle\Delta x\rangle=\langle\Delta y\rangle=\langle\Delta z\rangle\equiv L,\ \langle\Delta t\rangle\equiv t_0.$$

Введення масштабів дозволяє представити всі величини, включаючи незалежні змінні, як добуток характерних масштабів на безрозмірні, тобто, наприклад:

$$\upsilon_x=\langle\Delta\upsilon\rangle\upsilon_{xб}=\upsilon_0\upsilon_{xб},\ \ g=\langle g\rangle g_б=g_0g_б=g,\ \ x=\langle\Delta x\rangle x_б=Lx_б.$$

Тут індекс «0» використається з метою позначення характеристичного масштабу фізичної величини.

Тоді рівняння $(8.5)$ можна переписати у вигляді

$$\frac{\upsilon_{01}}{t_{01}}\frac{\partial w_{1б}}{\partial t_{1б}}+\frac{\upsilon_{01}^2}{L_1}\left(u_{1б}\frac{\partial w_{1б}}{\partial x_{1б}}+\upsilon_{1б}\frac{\partial w_{1б}}{\partial y_{1б}}+w_{1б}\frac{\partial w_{1б}}{\partial z_{1б}}\right)=-\frac{p_{01}}{\rho_{01}L_1}\frac{\partial P_{1б}}{\partial z_{1б}}-$$

$$-g_1-\frac{\nu_{01}\upsilon_{01}}{L_1^2}\nu_{1б}\left(\frac{\partial^2 w_{1б}}{\partial x_{1б}^2}+\frac{\partial^2 w_{1б}}{\partial y_{1б}^2}+\frac{\partial^2 w_{1б}}{\partial z_{1б}^2}\right) \quad (8.11)$$

Аналогічного вигляду набуває і рівняння $(8.6)$, де замість індексу 1 слід використовувати 2.

Індивідуальність якого-небудь явища відображається в його масштабах, які до певної міри характеризують кількісну сторону процесу. В той же час кожний член рівняння відображає внесок тих або інших фізичних ефектів в даний процес. Тому комбінація характерних величин, що стоїть у вигляді множника перед кожним з доданків, дає їх деяку середню величину, відображає інтенсивність впливу того або іншого чинника на всю картину в цілому. Слід зауважити, що деякі висновки щодо впливу існуючих чинників на зміни геофізичних величин можна вже зробити на цьому етапі.

Далі, поділивши всі інші доданки на один з комплексів, ми отримаємо набір деяких безрозмірних множників, бо розмірності всіх членів рівняння однакові. Тим самим ми як би виявляємо відносну міру впливу різних фізичних чинників, порівнюючи їх з одиницею. (Останнє виходить з того, що безрозмірний член, з характерним значенням якого ми ведемо порівняння, має порядок одиниці).

Конкретно розділимо ліву і праву частини нашого рівняння на множник $\frac{\upsilon_{01}^2}{L_1}$. Оскільки він дає характерну величину сил інерції, то тим самим ми порівнюємо з нею всі інші сили. Тоді матимемо

$$\frac{L_1}{t_{01}\upsilon_{01}}\frac{\partial w_{1б}}{\partial t_{1б}}+u_{1б}\frac{\partial w_{1б}}{\partial x_{1б}}+\upsilon_{1б}\frac{\partial w_{1б}}{\partial y_{1б}}+w_{1б}\frac{\partial w_{1б}}{\partial z_{1б}}=-\frac{p_{01}}{\rho_{01}\upsilon_{01}}\frac{\partial P_{1б}}{\partial z_{1б}}-$$

$$-g_1\frac{L_1}{\upsilon_{01}^2}-\frac{\nu_{01}}{\upsilon_{01}L_1}\nu_{1б}\left(\frac{\partial^2 w_{1б}}{\partial x_{1б}^2}+\frac{\partial^2 w_{1б}}{\partial y_{1б}^2}+\frac{\partial^2 w_{1б}}{\partial z_{1б}^2}\right) \quad (8.12)$$

Вимога ідентичності рівнянь при подібності явищ повинна вести до виконання рівності типу:

$$\frac{L_1}{t_{01}\upsilon_{01}} = \frac{L_2}{t_{02}\upsilon_{02}} = idem, \quad \frac{p_{01}}{\rho_{01}\upsilon_{01}^2} = \frac{p_{02}}{\rho_{02}\upsilon_{02}^2} = idem,$$

$$\frac{gL_1}{\upsilon_{01}^2} = \frac{gL_2}{\upsilon_{02}^2} = idem, \qquad \frac{\nu_{01}}{L_1\upsilon_{01}} = \frac{\nu_{02}}{L_2\upsilon_{02}} = idem. \tag{8.13}$$

Порівнюючи (8.13) з (8.10), бачимо, що вирази тотожні, причому (8.13) еквівалентно (8.10). В цьому значенні масштабні множники можна трактувати як відношення характерних значень величин (середніх у вказаному вище сенсі). Таким чином, наприклад

$$k_1 = \frac{L_2}{L_1}, \quad k_\nu = \frac{\nu_{02}}{\nu_{01}}, \quad k_\upsilon = \frac{\upsilon_{02}}{\upsilon_{01}} \quad \text{тощо.}$$

Зі всього вищевикладеного ми маємо висновок, що рівняння, приведені до безрозмірного вигляду, при подібності явищ повинні бути тотожні. Те ж відноситься до початкових і граничних умов.

## 8.2 Критерії подібності та їх фізичне значення

Отримані безрозмірні комплекси типу (8.13), що складаються з характерних масштабів для випадку подібних явищ повинні бути рівні. Це вимога подібності і, згідно з нею, комплекси (8.13) можуть бути названі *критеріями подібності.* Одиничному чисельному значенню критерію відповідає незліченна безліч значень, що визначають величини, масштаби явища, тобто подібні явища утворюють групу.

У кожному частинному випадку серед знайдених критеріїв подібності відрізняють визначальні критерії. Рівність цих критеріїв у зіставлюваних системах є передумовою існування подібності. Рівність решти критеріїв випливає з факту існування подібності. Відповідно до цього кожний з другорядних критеріїв являє собою однозначну функцію визначальних критеріїв.

Поділення критеріїв подібності на визначальні і не визначальні випливає з третьої або зворотної теореми подібності, яка формулює необхідні та достатні умови існування подібності. Раніше, ніж ми перейдемо до викладення третьої теореми, підкреслимо, які відбуваються в тих чи інших системах, можуть бути поділені на класи. До одного класу відносять явища, які описуються однією і тією ж системою рівнянь. Такі рівняння визначають механізм явища в цілому, незалежно від розмірів тіл та числових значень сталих, що характеризують властивості середовища, в якому відбувається процес. Вони можуть бути віднесені до тих чи інших областей простору і до тих чи інших моментів руху.

Загальні рівняння, які описують цілий клас явищ, можуть бути конкретизовані стосовно одиничного явища. Для цього необхідно приєднати до вихідної системи рівнянь додаткові умови, що обмежують відповідним чином систему. Такі умови, що не залежать від механізму явища, звуться умовами однозначності.

Умови однозначності лише тоді можуть бути фіксовані в строгій математичній формі, коли розв'язана задача про існування та єдиність розв'язання використовуваної системи рівнянь. Це зроблено лише для окремих частинних випадків, внаслідок чого при відділенні визначальних критеріїв доводиться базуватися на непрямому аналізі задачі. Умови однозначності повинні фіксувати геометричні характеристики явища, числові значення фізичних сталих, граничні та початкові умови. Відповідно до цього поміж величин, що входять до умов однозначності, зустрічаються в динамічних явищах $L$, $\upsilon$, $t$. До умов однозначності також можуть увійти характеристики середовища $\rho$ – густина, $\mu$ – динамічна в'язкість, так і характеристики пружніх властивостей матеріалу $\mu_0$, $E$.

Для сталих процесів початкові умови втрачають своє значення. А вплив граничних умов зменшується у міру віддалення від меж системи. В деяких задачах, наприклад, при розгляданні вимушених коливань системи, до умов однозначності повинні увійти величина і частота збурювальної сили. В числі величин, що визначають умови однозначності динамічних явищ, які відбуваються під впливом сили тяжіння, ми знаходимо прискорення сили тяжіння.

Оскільки рівняння зв'язку є виразом для загального механізму явища, вони повинні залишатися тотожними при зміні числового значення величин, що увійшли в умови однозначності. Тобто, подібність явищ є наслідком подібності умов однозначності і, отже визначальні критерії повинні складатися з величин, які віддзеркалюють ці умови.

Відповідно до цього третя теорема подібності може бути сформульована наступним чином: *необхідні і достатні умови подібності явищ полягають в рівності числових значень визначальних критеріїв подібності, тобто критеріїв, що складені з величин, які входять до умов однозначності. Рівність числових значень решти критеріїв є наслідком існування подібності, що дозволяє розглядати останні як функції визначальних критеріїв.*

Все сказане може бути узагальнено по відношенню до рівнянь будь-якого типу.

Відзначимо, що розв'язання безрозмірного рівняння з приєднанням безрозмірних початкових і граничних умов універсальне. Воно відноситься до всієї групи подібних явищ, а кожен конкретний випадок можна отримати з нього шляхом найпростішого перерахунку, тобто *множенням* на відповідні характерні масштаби. Метод надзвичайно ефективний, бо, дозволяючи отримати універсальні рішення, економить масу сил і часу.

Отримані в нашому прикладі критерії подібності відомі як:

$\dfrac{L\upsilon_0}{\nu_0} = \mathrm{Re}$ – критерій Рейнольда,

$\dfrac{\upsilon_0^2}{gL} = Fr$ – критерій Фруда,

$\dfrac{p}{\rho_0\upsilon_0^2} = Eu$ – критерій Ейлера,

$\dfrac{t_0\upsilon_0}{L} = Sh$ – критерій Струхаля.

(Індекси скрізь були опущені).

Тоді (8.12) може бути переписано у вигляді

$$\frac{1}{Sh}\frac{\partial w_б}{\partial t_б} + u_б\frac{\partial w_б}{\partial x_б} + \upsilon_б\frac{\partial w_б}{\partial y_б} + w_б\frac{\partial w_б}{\partial z_б} = -Eu\frac{\partial P_б}{\partial z_б} -$$

$$-\frac{1}{Fr} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w_б}{\partial x_б^2} + \frac{\partial^2 w_б}{\partial y_б^2} + \frac{\partial^2 w_б}{\partial z_б^2}\right) \qquad (8.14)$$

Легко бачити, що критерій Рейнольда, $\mathrm{Re} = \dfrac{\upsilon_0^2/L}{\nu\upsilon_0/L^2}$, за фізичним змістом дає відношення сил інерції до сил в'язкості, число Фруда, $\dfrac{\upsilon_0^2}{gL} = Fr$, – відношення сил інерції до сили тяжіння; число Ейлера, $\dfrac{p}{\rho_0\upsilon_0^2} = Eu$, – відношення статичного тиску до динамічного.

Оскільки задання відповідних характерних значень не завжди можливо за умов задачі, то критерії подібності можуть бути відношенням поточних величин до еквівалентної ним за розміром комбінації із заданих зовнішніх параметрів. Прикладом служить виписаний вище критерій Струхаля, де замість масштабу часу стоїть величина $\frac{\upsilon_0}{L}$. Проте у разі періодичного процесу характерним значенням $t_0$ може служити період, і в цьому випадку він має вигляд $Sh = \frac{t}{t_o}$.

Окрім критеріїв подібності в задачі можуть з'явитися критерії іншого типу, які ми називатимемо *параметричними.* Вони виникають, якщо для якої-небудь величини може бути задано два або більш характерних значення, і є відношенням таких однойменних характеристик. Наприклад, якщо: по умові маємо справу з двома рідинами, які мають в'язкості $\nu_1$ та $\nu_2$, то з'явиться безрозмірна величина $\nu_1/\nu_2$. Така безрозмірна величина зветься симплексом.. Позначається зазвичай літерою «S».

Помітимо, що рівність критеріїв подібності і параметричних критеріїв забезпечує подібність двох систем, бо в них знаходять віддзеркалення всі зовнішні параметри задачі. Подібність самих явищ обумовлюється ще рівністю безрозмірних змінних. Останнє означає, що при $t_{б_2} = t_{б_1}$ в точках $x_{б_2} = x_{б_1}$, $y_{б_2} = y_{б_1}$, $z_{б_2} = z_{б_1}$ має місце просторово-часова відповідність. А еквівалентні масштаби дають конкретні умови для перерахунку координат і часу.

## 8.3 Застосування теорії подібності при математичному моделюванні

Поява критеріїв подібності в рівнянні служить зручним апаратом оцінки впливу тих або інших членів на весь процес в цілому. Якщо безрозмірний множник перед яким-небудь оператором значно менше одиниці, то внесок відповідних членів малий, і вони можуть бути опущені. Це дає можливість спростити рівняння, усуваючи неістотні ефекти і наближаючи математичну модель до реального стану речей. Природно, що аналітичне або чисельне рішення спрощених таким чином рівнянь значно менш трудомістко. Часто тільки на цій основі можливо отримання позитивних результатів при розгляді якого-небудь процесу, загальне математичне формулювання якого не дозволяє, зважаючи на складність, отримати ні чисельного, ні тим більше аналітичного рішення.

Розглянемо деякі варіанти спрощень системи рівнянь гідромеханіки. Для цілей більшої наочності вважатимемо процеси адіабатичними. Втім, сама по собі ця модель є однією з найважливіших через наявність широкого класу задач, які розв'язуються в адіабатичному наближенні.

Випишемо вихідну систему:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\nabla)\vec{V}\right)=-\frac{1}{\rho}grad\,p+g\vec{k}+\upsilon grad\,div\vec{V}+\upsilon\Delta\vec{V}\,,$$
$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,div\vec{V}=0\,, \qquad (8.15)$$
$$p=k\rho^{\kappa}\,.$$

З масових сил в (8.15) ми врахували тільки силу тяжіння, напрям якої визначаємо ортом $\vec{k}$. Далі діємо аналогічно тому, як і в розглянутому вище прикладі, тобто вводимо характерні масштаби і призведемо систему до безвимірного вигляду. В результаті отримаємо

$$\frac{1}{Sh}\frac{\partial \vec{V}_б}{\partial t_б}+\left(\vec{V}_б\nabla_б)\vec{V}_б\right)=$$
$$-Eu\frac{1}{\rho_б}grad_б\,p_б+\frac{\vec{k}}{Fr}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\upsilon_б grad_б\,div\vec{V}_б+\upsilon_б\Delta\vec{V}_б\right). \qquad (8.16)$$

Тепер легко перейти до тієї або іншої моделі. Так, процес можна вважати стаціонарним, якщо, $Sh>>1$ $\left(\frac{1}{Sh}<<1\right)$. Останнє не просто означає $t_o\to\infty$, а відповідає нерівності $t_0>>\frac{L}{V_0}$, що може здійснитися також при вельми малих $L$ або великих $V_0$. Питання про те, що вважати малим або великим розв'язується стосовно кожного даного процесу і конкретні цифри визначаються з урахуванням того ступеня точності, який задається постановкою задачі.

Аналогічно, силою тяжіння можна нехтувати, якщо $\frac{1}{Fr}<<1$, що означає $\frac{V_0^2}{L}>>g$, тобто знову ж таки це результат зіставлення трьох величин $V_o, L, g$. Ми бачимо, що вплив сили тяжіння падає із зростанням швидкості і зменшенням характерного масштабу.

Внесок в'язких членів визначається чисельним значенням множника $\frac{1}{\text{Re}}$. Вплив в’язкості убуває при збільшенні швидкості та масштабу, бо $\frac{1}{Re} << 1$ еквівалентно нерівності $\upsilon << V_0 L$.

Критерій Ейлера завжди $O(1)$, бо сила градієнта тиску завжди врівноважує всі інші силові чинники, тобто це по своїй суті реакція середовища на прикладені до нього зусилля. Вона природно, існує завжди. Таким чином $\frac{p_o}{\rho_o V_o^2} = O(1)$, або

$$p_0 \sim \rho_0 V_0^2 . \tag{8.17}$$

Для оцінки ефекту стисливості звернемося до рівняння нерозривності (8.5), яке спочатку представимо в декілька іншому вигляді, використовуючи рівняння стану. Прологарифмувавши та продиференціювавши це рівняння за часом, отримаємо

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\kappa p} \frac{dp}{dt} .$$

Величина $\frac{\kappa p}{\rho} = a^2$ є квадрат швидкості звуку *a.* Тепер рівняння нерозривності можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt} + \rho \, div \vec{V} = 0 .$$

Зведемо його до безвимірного вигляду

$$\frac{p_o L}{a^2 t_o \rho_o V_o} \frac{d p_б}{d t_б} + \rho_б \, div_б V_б = 0 .$$

Для більшості аперіодичних задач для масштабу часу можна вважати справедливою оцінку $t_0 \sim L/V_0$. Підставляючи цю рівність в останнє рівняння і замінюючи $p_o$ згідно (8.17), остаточно отримаємо

$$M^2 \frac{d p_б}{d t_б} + \rho_б \, div_б V_б = 0 .$$

Тут було введено позначення $M = \dfrac{V}{a}$. Величина $M$ носить назву *критерій Маху* і представляє собою відношення характерної швидкості до швидкості звуку. Рідину можна вважати нестисливою, якщо $M << 1$, тобто $V << a$.

Оцінюючи чисельні значення критеріїв, ми з урахуванням заданої точності, можемо прийти до тієї або іншої математичної моделі. При цьому малі члени можна виключити, що завжди веде до істотних спрощень задачі. Проте, слід мати на увазі, що іноді просте відкидання доданків може привести до не цілком коректних результатів. Річ у тому, що, проводячи оцінки членів диференціальних рівнянь, ми повинні бути впевнені в тому, що їх порядок у всій досліджуваній області зберігається однаковим $\left(\langle f \rangle = 1\right)$, тобто тим самим ми вважаємо, що рішення є гладким у всіх точках. Неприємностей слід чекати за наявності в рівнянні сингулярності, або, якщо є значні градієнти величин у будь-який локалізованій зоні: тоді $\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \neq 1$. Зокрема, це має місце за наявності різко пульсуючого характеру величини *f*.

Іноді, навіть в середньому малий член, діючий протягом тривалого проміжку часу зробить вельми істотний вплив на протікання процесу в цілому. Тому нерідко виникає необхідність додаткового обліку дії випущених членів. В цих випадках доцільно використовувати метод розкладання по малому параметру. Суть останнього зводиться до представлення рішень у вигляді ряду по ступенях малого параметра $\alpha$ у вигляді

$$f = f^{(0)} + \alpha f^{(1)} + \alpha f^{(2)} + \ldots \qquad (8.18)$$

Підставляючи (8.18) у вихідні рівняння, початкові та граничні умови, ми отримуємо відповідні математичні формулювання задачі, відбираючи послідовно члени при $\alpha^0$, $\alpha^1, \alpha^2$ і т.п. Це дає нам нульове, перше, друге, і таке інше наближення. Теорія подібності дає нам можливість виявити і сформулювати фізично обгрунтований малий параметр. Це одне з найважливіших її достоїнств, оскільки процедура відшукання малого параметра цілком уніфікується.

## ЛІТЕРАТУРА


1. Шнайдман В.А., Тарнопольський А.Г., Степаненко С.М. Геофізична гідродинаміка. – Одеса: Вид. «ТЕС», 1998. – 301с.
2. Палагин Э.Г., Славин И.А. Основы гидромеханики. / Учебное пособие для гидрометерологов. – Л., ЛГМИ, 1974. – 244с.
3. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Л., Гидрометеоиздат, 1988. – 424с.
4. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика, т.1. – М.: Мир, 1984. – 398с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736с.
6. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977. -438с.
7. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 206с.
8. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем.- М.:Наука, 1971. – 550с.

Навчальне видання

**Сєрга Е.М.**

# ГЕОФІЗИЧНА ГІДРОДИНАМІКА

Конспект лекцій


| | | |
|---|---|---|
| Підп. до друку | Формат | Папір |
| Умовн. друк. арк. | Тираж | Зам. № |

Надруковано з готового оригінал-макета

Одеський державний екологічний університет
65016, Одеса, вул.Львівська, 15