

Хоменко Г.В., Хохлов В.М., Бондаренко В.М.

ПРАКТИКУМ

3

гідродинамічних методів прогнозу погоди

навчальний посібник



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Одеський державний екологічний університет

Хоменко Г.В., Хохлов В.М., Бондаренко В.М.

ПРАКТИКУМ З ГІДРОДИНАМІЧНИХ МЕТОДІВ ПРОГНОЗУ ПОГОДИ

Навчальний посібник

Одеса
2012

ББК 26.23
Х 76
УДК 551.509.313

Практикум з гідродинамічних методів прогнозу погоди підготовлений відповідно до навчальної програми з даної дисципліни. Вправи і задачі, які наведені в цьому навчальному посібнику використовуються як основний матеріал для практичних занять і контролюючих заходів. До кожного розділу надано досить детальне пояснення теоретичного матеріалу та формули, які необхідні для розв'язання задач.

Навчальний посібник призначений для студентів, магістрів та аспірантів університетів, які навчаються за напрямом „Гідрометеорологія”.

Рецензенти:

Г.М. Пірнач, д-р фіз.-мат. наук;
О.М. Воскресенська, д. геогр. наук;
В.М. Ситов, канд. геогр. наук

ISBN

©Одеський державний екологічний
університет, 2012
©Г.В.Хоменко, В.М. Хохлов,
В.М.Бондаренко, 2012

Зміст

Передмова.	6
Перелік умовних позначень та сталих.	8
Розділ 1 Перетворення рівнянь гідротермодинаміки для чисельного прогнозу великомасштабних метеорологічних полів.	11
1.1 Рівняння гідротермодинаміки в декартовій системі координат.	11
1.2 Рівняння гідротермодинаміки в ізобаричній системі координат.	21
1.3 Рівняння гідротермодинаміки в σ (сігма) – системі координат.	25
1.4 Картографічні проєкції і урахування їх в рівняннях гідротермодинаміки.	29
Вправи до розділу 1.	35
Відповіді та розв’язання.	41
Розділ 2 Рівняння вихору вектора швидкості вітру та дивергенції.	47
2.1 Фізичне тлумачення вихору та дивергенції.	47
2.1.1 Натуральна система координат.	53
2.1.2 Вихор та дивергенція в натуральній системі координат.	55
2.2 Рівняння вихору та дивергенції.	60
Вправи до розділу 2.	65
Відповіді.	68
Розділ 3 Скінченнорізницеві методи розв’язання рівнянь гідротермодинаміки.	69
3.1 Метод сіток. Скінченнорізницева апроксимація похідних.	69
3.2 Явні, неявні і напівнеявні скінченнорізницеві схеми.	73
3.3 Побудова скінченнорізницевих схем.	76
3.4 Розв’язання скінченнорізницевих рівнянь методом кроків за часом.	80
3.5 Обчислювальна стійкість скінченнорізницевих схем.	83
Вправи до розділу 3.	86
Відповіді та розв’язання.	89
Розділ 4 Інтегування рівнянь гідротермодинаміки.	93
4.1 Схеми чисельного інтегрування за часом.	93
Вправи до розділу 4.	98
Відповіді та розв’язання.	100
Розділ 5 Квазігеострофічне і квазісоленоїдальне наближення і використання їх для побудови прогностичних моделей.	104
5.1 Можливість використання геострофічного наближення в задачах гідродинамічного прогнозу.	104

5.1.1	Аналіз рівнянь динаміки атмосфери за допомогою таблиць порядків.	104
5.1.2	Основні положення методу теорії подібності.	107
5.1.3	Оцінка рівнянь динаміки атмосфери за допомогою методу теорії подібності.	110
5.2	Соленоїдальні рухи.	118
	Вправи до розділу 5.	121
	Відповіді та розв'язання	125
	Розділ 6 Фільтровані моделі прогнозу полів метеорологічних величин та чисельні методи їх реалізації.	128
6.1	Квазігеострофічна баротропна модель для середнього рівня.	128
6.2	Квазігеострофічна бароклінна модель в квазістатичному і адіабатичному наближенні.	134
6.3	Загальні принципи побудови квазісоленідальних моделей.	138
6.4	Ітераційні методи розв'язання баротропного рівняння вихору.	140
	Вправи до розділу 6.	143
	Відповіді та розв'язання.	148
	Розділ 7 Прогностичні моделі, які базуються на повних рівняннях гідротермодинаміки.	152
7.1	Повні рівняння баротропної моделі атмосфери.	152
7.2	Система повних рівнянь для бароклісної атмосфери та її розв'язання.	154
7.2.1	Повні рівняння в ізобаричних координатах. Початкові та межові умови.	154
7.2.2	Інтегрування системи повних рівнянь гідротермодинаміки.	158
7.3	Шахові сітки.	160
	Вправи до розділу 7.	167
	Відповіді та розв'язання.	170
	Розділ 8 Оцінка якості чисельних методів прогнозу погоди.	176
8.1	Візуальний метод верифікації прогнозів.	177
8.2	Методи верифікації прогнозів безперервних величин.	179
8.3	Метод верифікації чисельного прогнозу полів метеорологічних величин та оцінка його успішності.	185
8.4	Методи для верифікації дихотомічних прогнозів.	186
	Вправи до розділу 8.	193
	Додаток А Деякі відомості з векторної алгебри.	195
	Додаток Б Таблиця порядків метеорологічних величин та їх похідних.	199
	Додаток В Рівняння гідротермодинаміки в циліндричній та сферичній системах координат.	200

Додаток Г Застосування Microsoft Excel для складання таблиці справджуваності прогнозів та розрахунку її статистичних характеристик.	204
Література.	206

Передмова

Необхідність видання „Практикума з гідродинамічних методів прогнозу погоди” обґрунтована тим, що до теперешнього часу навчальні посібники такого типу українською мовою не видавались.

В 2002 році вийшов із друку навчальний посібник, а в 2008 році – підручник з гідродинамічних методів прогнозу погоди (ГДМП) українською мовою; в першому з них викладені питання, які необхідні для самостійної роботи студентів з окремих питань чисельних методів прогнозу, а в другому – викладена теорія гідродинамічного прогнозу погоди відповідно до навчального плану з цієї дисципліни. Для закріплення теоретичних знань з аналізу та прогнозу погоди і придбання навичок щодо розв'язання конкретних задач чисельного прогнозу повинен бути відповідний навчальний посібник.

У вправах даного посібника ставляться чотири задачі, які автори вважають головними:

- вивід основних рівнянь в різних системах координат; перетворення цих рівнянь для постановки прогностичних задач;
- розробка математичних алгоритмів для розв'язання поставлених задач;
- побудова скінченнорізницевих аналогів рівнянь з використанням різних схем чисельного інтегрування за часом;
- розрахунки різних параметрів та змінних задачі за вихідними даними і аналіз результатів розрахунків.

Основна трудність, яка виникає при розробці завдань для практичних занять з даної дисципліни, полягає в тому, що задачі чисельного прогнозу (навіть найпростіші) реалізуються за допомогою обчислювальної техніки, якою студенти не можуть користуватися під час практичних занять. Тому в посібник включені ті завдання, які пов'язані з розробкою алгоритмів як для реалізації найбільш простих фільтрованих моделей, так і для реалізації в загальному вигляді моделей за повними рівняннями. Деякі частини цих алгоритмів студенти можуть реалізувати під час самостійної роботи за допомогою комп'ютерів.

В кожному розділі посібника теоретичний матеріал викладається досить детально з виведенням необхідних формул або з поясненням шляху їх отримання для того, щоб студенти могли скористатися цим матеріалом не тільки для розв'язання поставлених в посібнику задач, а і для підготовки до контрольних робіт, колоквіумів, семінарів та екзаменів. Це стосується насамперед тих питань чисельного прогнозу погоди, які недостатньо повно висвітлюються в попередніх виданнях з цієї дисципліни, які вказані в списку літератури цього посібника.

Поряд з завданнями, що потребують розробки алгоритмів чисельної реалізації прогностичних задач, практикум містить велику кількість задач

загального типу, розв'язання яких зводиться до виведення формул або розрахунків за формулами. Ступінь складності таких задач різна – від дуже простих, для розв'язання яких достатньо підставити числа в готову формулу, до порівняно складних, які потребують приведення досить складних формул до „робочого” вигляду, що дозволяє масові розрахунки виконати найбільш економічним шляхом.

Під час самостійної роботи для розв'язання задач, які потребують масових розрахунків (наприклад, у вузлах сітки – методом кроків за часом або ітераційними методами) достатньо використовувати один із розрахунково- графічних пакетів: EXCEL, MATLAB або MATHCAD.

Оскільки продукція гідродинамічного прогнозу широко використовується в синоптичній практиці, в навчальному посібнику розглядаються деякі питання щодо оцінки якості чисельних прогнозів погоди. Розділ, який присвячений цим питанням, може використовуватися студентами при виконанні курсових і дипломних проектів за темами, пов'язаними з верифікацією прогностичних моделей.

В кінці кожного розділу надані вправи і відповіді до більшості з них, а до деяких задач – методика їх розв'язання або саме розв'язання.

Основна робота по складанню практикума була розподілена наступним чином: розділи 1, 3, 5 та 7 підготовлені Г.В. Хоменко, розділи 2, 4, 6 та додатки – В.М. Бондаренко і розділ 8 – В.М. Хохловим.

Перелік символів та сталих

A - амплітуда коливань

C - фазова швидкість хвилі

$c_p = 1,007 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ - питома теплоємність при сталому тиску

$c_v = 0,720 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ - питома теплоємність при сталому об'ємі

\vec{D} - вектор сил в'язкості (дисипативних сил)

\vec{D}_m - вектор сили молекулярної в'язкості

\vec{D}_t - вектор сили турбулентної в'язкості

f - будь-яка метеорологічна величина

\vec{G} - вектор сили тяжіння

G_Ω - функція Гріна для динамічного фактора

G_T - функція Гріна для термічного фактора

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння або сила тяжіння, яка віднесена до одиничної маси

H - висота ізобаричної поверхні

\vec{i} - одиничний вектор, спрямований уздовж осі x

$i = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця; безрозмірна координата точки на вісі x

$J(A, B)$ - яacobіан функцій A, B

\vec{j} - одиничний вектор, спрямований уздовж осі y

j - безрозмірна координата точки на осі y

\vec{k} - одиничний вектор, спрямований по вертикалі (уздовж осі z)

k - безрозмірна координата точки на осі z

L - довжина хвилі; характерний горизонтальний масштаб

$\ell = 2\omega \sin \varphi$ - параметр Коріоліса

λ - довгота місця

M - масштаб карти

m - масштабний множник

O - позначення порядку величини або її похідної

$P_0 = 1000 \text{ гПа}$ – стандартний тиск на рівні моря

P - тиск повітря; незалежна змінна по вертикалі в ізобаричній системі координат

P_s - тиск повітря біля поверхні землі

q - масова частка водяної пари; локальна похідна $\frac{\partial H}{\partial t}$; безрозмірна

узагальнена координата $\left(q = \frac{r}{\delta r} \right)$

$R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ - питома газова стала сухого повітря

$R_n = 462 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ - питома газова стала водяної пари

$R_z = 6371$ км – середній радіус Землі

\vec{r} - радіус-вектор

r - відстань; коефіцієнт кореляції; узагальнена координата

r_A - коефіцієнт кореляції аномальності

S - безрозмірна часова координата

T - температура в абсолютній шкалі (в градусах Кельвіна)

t - час; температура по шкалі Цельсія

u - складова швидкості вітру уздовж осі x

u_g - складова вектора геострофічного вітру по осі x

\vec{V} - тривимірний вектор швидкості

V - абсолютне значення тривимірної швидкості

\vec{V}_s - вектор швидкості вітру (швидкість горизонтального потоку)

V_s - абсолютне значення швидкості вітру

v - складова швидкості вітру уздовж осі y

v_g - складова вектора геострофічного вітру по осі y

w - складова вектору швидкості \vec{V} уздовж осі z (лінійна вертикальна швидкість)

x - декартова горизонтальна координата по осі x

y - декартова горизонтальна координата по осі y

z - декартова вертикальна координата по осі z

$\beta = \frac{\partial \ell}{\partial y}$ - параметр Россбі

γ - вертикальний градієнт температури

$\gamma_a = 0.98 \cdot 10^{-2} \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}}$ - сухоадіабатичний градієнт температури

γ_{va} - вологадіабатичний градієнт температури

ν - коефіцієнт молекулярної в'язкості

$\vec{\Omega}$ - вихор вектора швидкості \vec{V}

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ - складові вихору швидкості по осях координат

$\vec{\omega}$ - вектор кутової швидкості обертання Землі

$\Delta_s = \nabla_s^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - двовимірний оператор Лапласа

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - тривимірний оператор Лапласа

$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}$ - умовний векторний диференціальний оператор (набла) –

двовимірний або плоский

δ - середня абсолютна помилка прогнозу

δt - часовий крок

$\delta x, \delta y, \delta z$ - кроки сітки по горизонталі і вертикалі (просторові кроки)

ε - помилка або точність скінченнорізницевої апроксимації похідних; приплив тепла до одиниці об'єму

$\zeta = \frac{P}{P_0}$ - безрозмірна вертикальна координата

$\theta = T \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{(\chi-1)}{\chi}}$ - потенціальна температура, де $P_0 = 1000$ гПа (рівняння

Пуассона)

$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ - полярний кут – доповнення до широти φ

$\chi = \frac{c_p}{c_v}$ - стала Кармана ($\chi = 1.4$)

ρ - густина повітря

ρ_n - густина водяної пари

σ - циклічна (кругова) частота; середнє квадратичне відхилення

$\sigma = \frac{P}{P_s}$ - безрозмірна вертикальна координата (P_s - приземний тиск)

$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ - аналог вертикальної швидкості в σ - системі координат

$\tau = \frac{dp}{dt}$ - аналог вертикальної швидкості в P - системі координат

φ - широта місця, потенціал швидкості

ψ - функція течії; координата полярної системи

Розділ 1

Перетворення рівнянь гідротермодинаміки для чисельного прогнозу великомасштабних метеорологічних полів

1.1 Рівняння гідротермодинаміки в декартовій системі координат

Фізичне та математичне підґрунтя усіх методів гідродинамічного прогнозу погоди полягає у законах збереження, які математично виражаються у рівняннях Ньютона для суцільного середовища (збереження кількості руху), рівнянні нерозривності (збереження маси) та рівнянні припливу тепла, яке є математичним записом закону збереження енергії. Перелічені рівняння є універсальними у тому сенсі, що їх можна застосовувати до усіх рідин у звичайному діапазоні змін тиску, температури та швидкості незалежно від складу рідини, її стану та зовнішніх меж. Математичний запис законів збереження називають рівняннями гідротермодинаміки (ГТД).

Для інерційної системи відліку другий закон Ньютона можна записати у вигляді

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = -\vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{D}; \quad (1.1)$$

У рівнянні (1.1) \vec{V}_a - швидкість руху повітря відносно інерційної системи координат; \vec{F}_g - гравітаційна сила; $\vec{D} = \vec{D}_m + \vec{D}_t$ - вектор дисипативних сил, які складаються з сил молекулярної \vec{D}_m і турбулентної \vec{D}_t в'язкості; \vec{F}_p - сила баричного градієнта, обумовлена просторовими змінами атмосферного тиску:

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.2)$$

де ρ - густина повітря;

p – атмосферний тиск;

$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ - диференціальний оператор (символічний вектор),

який називається іноді оператором Гамільтона; знак ∇ читається як набла.

Сили \vec{F}_p, \vec{F}_g і \vec{D} є реально діючими силами, під впливом яких утворюються атмосферні рухи. Ці сили віднесені до одиничної маси і тому є прискореннями відповідних сил.

Відомо, що атмосфера здійснює обертання разом з Землею, тому для того, щоб застосувати другий закон Ньютона для вивчення атмосферних рухів, необхідно окрім реальних сил урахувати інерційні сили, які обумовлені добовим обертанням Землі, тобто силу Коріоліса (так звану відхиляючу силу) та відцентрову силу. Таким чином, векторне рівняння (1.1) для опису рухів в обертальній атмосфері приймає вигляд

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{V} - \omega^2 \vec{r} = -\vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{D}, \quad (1.3)$$

де $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ - вектор кутової швидкості обертання Землі;

ω - кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі ($\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$, де T - період обертання, який дорівнює 24 годинам);

\vec{r} - радіус-вектор кола широти, яка визначає положення частинки повітря, що розглядається ($r = a \cos \varphi$, де a - радіус Землі; φ - широта місця).

У рівнянні (1.3) $2\vec{\omega} \times \vec{V}$ та $\omega^2 \vec{r}$ є прискореннями, пов'язаними з добовим обертанням Землі, або відповідно сила Коріоліса та відцентрова сила, віднесені до одиничної маси. Перенесемо зазначені сили до правої частини рівняння (1.3) і одержимо математичний запис другого закону Ньютона у векторній формі відносно системи відліку, яка обертається разом з Землею з кутовою швидкістю ω

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{F}_p - 2\vec{\omega} \times \vec{V} + \vec{F}_g + \omega^2 \vec{r} + \vec{D}. \quad (1.4)$$

Введемо означення для сили тяжіння \vec{G}

$$\vec{G} = \vec{F}_g + \omega^2 \vec{r}. \quad (1.5)$$

Згідно з законом всесвітнього тяжіння $F_g = \gamma \frac{Mm}{a^2}$, де γ - гравітаційна стала; M - маса Землі; m - маса частинки, що розглядається (у рівняннях динаміки атмосфери $m=1$), тобто прискорення цієї сили є майже сталою величиною. З іншого боку, другий доданок у рівнянні (1.5) змінюється залежно від широти місця, При розв'язанні метеорологічних задач прискорення сили тяжіння G вважається сталою величиною, яка дорівнює приблизно $9,8 \text{ мс}^{-2}$ (на рівні моря і на широті $\varphi=45^\circ$).

З урахуванням рівностей (1.2) та (1.5), рівняння (1.4) можна переписати наступним чином:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\vec{\omega} \times \vec{V} + \vec{G} + \vec{D}. \quad (1.6)$$

Для розв'язання задач динаміки атмосфери, векторне рівняння (1.6) повинно бути розкладено на три скалярні рівняння, які відповідають складовим по трьом різним координатним осям.

В локальній декартовій системі координат (в якій вісь x спрямована по дотичній до широтного кола на схід, вісь y – по дотичній до меридіану на північ, вісь z – по радіусу Землі від центру) векторне рівняння (1.6) можна записати у вигляді трьох скалярних рівнянь

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v - \ell_1 w + D_x; \quad (1.7)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u + D_y; \quad (1.8)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \ell_1 u + D_z, \quad (1.9)$$

де u, v, w - компоненти по осям x, y, z вектора \vec{V} – швидкості відносно системи координат, що обертається;

$\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ - компоненти вектора градієнта тиску ∇p ;

$\ell = 2\omega \sin \varphi, \ell_1 = 2\omega \cos \varphi$ - перший і другий параметри Коріоліса;

D_x, D_y, D_z - відповідні компоненти сили в'язкості;

g - проекція вектора \vec{G} на вісь z .

Рівняння (1.7) – (1.9) описують рухи усіх масштабів, які відбуваються в атмосфері Землі: від мікомасштабних рухів, які пов’язані з диханням рослин, до рухів планетарного масштабу.

В гідродинамічних методах прогнозу погоди основна увага приділяється вивченню насамперед атмосферних процесів синоптичного масштабу, тобто таких процесів, які визначають формування погодних умов над великими територіями.

Шляхом оцінок порядків членів рівнянь (1.7-1.9) за допомогою таблиць порядків або методів теорії подібності можна показати, що для *великомасштабних рухів повітря вільної атмосфери* ці рівняння істотно спрощуються і набувають вигляду:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v; \quad (1.10)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u; \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (1.12)$$

З перших двох рівнянь випливає, що основними силами, які діють в атмосфері вище планетарного граничного шару, є сили баричного градієнта і Коріоліса. Третє рівняння (1.12) показує, що для великомасштабних процесів вертикальна складова баричного градієнта майже урівноважується силою тяжіння, тобто атмосфера перебуває у стані гідростатичної рівноваги. Таким чином рівняння (1.10)-(1.12) є математичним записом закону збереження кількості руху для великомасштабних атмосферних процесів.

Другим законом, який відіграє істотну роль у теорії великомасштабних атмосферних рухів, є закон збереження маси

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{V}, \quad (1.13)$$

де $\operatorname{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ - дивергенція вектору швидкості \vec{V} .

Третій з фізичних законів, який описує збереження внутрішньої енергії газу, математично виражається рівнянням припливу тепла:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{\rho c_p} \frac{dp}{dt} + \frac{\varepsilon}{\rho c_p}, \quad (1.14)$$

де T - температура повітря (в абсолютній шкалі);

$R = c_p - c_v$ - питома газова стала для сухого повітря;

c_p, c_v - питомі теплоємкості при сталому тиску та об'єму відповідно;

ε - джерела і стоки тепла до одиничного об'єму повітря за одиницю часу.

Особливий інтерес з теоретичної точки зору викликає випадок адіабатичних процесів, коли приплив тепла є відсутнім (тобто $\varepsilon = 0$). Тоді рівняння (1.14) набуває вигляду

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{pc_p} \frac{dp}{dt}, \quad (1.15)$$

Таке припущення можливе при побудові моделей чисельного прогнозу погоди на короткі строки (до трьох діб).

П'ять рівнянь (1.10)-(1.13) та (1.15) містять шість невідомих: u, v, w, ρ, p і T , тобто кількість невідомих перевищує кількість рівнянь, внаслідок чого ця система є незамкненою. Для її замикання використовується рівняння стану

$$p = \rho RT, \quad (1.16)$$

яке зв'яже характеристики стану повітря (тиск, густину та температуру) і не містить нових змінних.

Таким чином, система рівнянь (1.10) – (1.13), (1.15), (1.16) складає основу гідродинамічного прогнозу великомасштабних процесів вільної атмосфери, які формують погодні умови над великими територіями. В загальному вигляді постановку задачі прогнозу таких процесів можна сформулювати таким чином:

1. Будемо розглядати граничний шар атмосфери (ГША), в якому завжди присутні турбулентні рухи (тому сили турбулентної в'язкості досить великі), як дуже тонкий шар навколо земної поверхні, тобто як тонку плівку, що огортає земну кулю. Це обмеження є цілком припустимим, тому що товщина цього шару ($\sim 1 - 1,5$ км) набагато менша за вертикальну протяжність шару атмосфери, в якому відбуваються великомасштабні погодоутворюючі процеси (тропосфера і, скажемо, нижня половина стратосфери – це 20 – 30 км). При такому припущенні не враховуються атмосферні процеси, які відбуваються в граничному шарі атмосфери.
2. Математичне нехтування ГША виражається у тому, що в рівняннях руху не враховуються сили турбулентної в'язкості і тим більше

молекулярної, яка значно менша за турбулентну. Тобто рівняння руху в цьому разі стають значно простішими, оскільки зменшується кількість членів і порядок рівнянь: із диференціальних рівнянь другого порядку вони стають рівняннями першого порядку. В рівнянні припливу тепла не ураховується турбулентний приплив тепла ($\varepsilon_T=0$).

3. Для цілей короткострокового прогнозу погоди процеси у вільній атмосфері розглядаємо в адіабатичному наближенні, тобто вважаємо, що зовнішній приплив тепла дорівнює нулю ($\varepsilon=0$) і тому скорочується кількість невідомих.
4. Вважаємо, що підстильна поверхня являє собою горизонтальну дзеркально гладку поверхню; завдяки цьому припущенню позбавляємося орографічних вертикальних рухів, які виникають при наявності гір або гірських хребтів, та фрикційних вертикальних рухів, які виникають в ГША під дією турбулентної в'язкості. Виключення цих рухів значно спрощує задачу прогнозу, тому що нижня гранична умова у цьому випадку набуває досить простого вигляду.

Сформульована у загальному вигляді задача чисельного прогнозу погоди полягає у визначенні розв'язку системи (1.10)-(1.13), (1.15), (1.16), яка задовольняє заданим початковим умовам для u, v, ρ і T та відповідним межовим умовам.

Запишемо тепер систему рівнянь (1.10-1.13) і (1.15) у такій формі, яка використовується при моделюванні великомасштабних процесів вільної атмосфери. Для цього, в рівняннях (1.10), (1.11), (1.13), (1.15) диференціальний оператор $\frac{d}{dt}$ замінимо на $\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Тоді рівняння руху (1.10), (1.11) для одиничної маси повітря у проєкціях на осі декартових координат приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v 2\omega \sin \varphi, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - u 2\omega \sin \varphi. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Третє рівняння руху для великомасштабних рухів вироджується у рівняння статички

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{1.18}$$

Рівняння нерозривності для стисливого середовища записується як

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.19)$$

а рівняння припливу тепла для сухого повітря в адіабатичному наближенні ($\varepsilon = 0$) набуває вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{RT}{pc_p} \frac{dp}{dt}. \quad (1.20)$$

Рівняння системи, які містять у собі часові похідні, називаються прогностичними. Ці рівняння зв'язують між собою метеорологічні величини в різні моменти часу і тому можуть бути використані для визначення майбутніх значень цих величин. Наприклад, у рівнянні припливу тепла похідну $\frac{\partial T}{\partial t}$ можна представити приблизно як відношення

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{T(t + \delta t) - T(t)}{\delta t}, \text{ а рівняння (1.20) – у вигляді}$$

$$\frac{T(t + \delta t) - T(t)}{\delta t} = F, \quad (1.21)$$

де F - це сума всіх членів рівняння (1.20) за виключенням $\frac{\partial T}{\partial t}$, тобто

$$F = - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt};$$

$T(t + \delta t)$ - невідоме значення температури, тобто її значення в майбутній момент часу; $T(t)$ - відоме значення температури в поточний момент часу t , наприклад, в якийсь строк спостережень.

Таким чином, ми бачимо, що із рівняння (1.21) можна отримати майбутнє значення температури за формулою

$$T(t + \delta t) = T(t) + \delta t \cdot F,$$

де δt - інтервал часу, на який розраховується прогноз.

Рівняння, в яких відсутні прогностичні члени, тобто часові похідні, називаються діагностичними. Ці рівняння зв'язують різні метеорологічні величини в один якийсь момент часу. До таких рівнянь відносяться рівняння статички (1.18) і стану (1.16), але прогностичні значення метеорологічних величин можна отримати за допомогою прогностичних рівнянь (1.17), (1.19), (1.20).

Система рівнянь гідротермодинаміки (1.17) – (1.20) з урахуванням рівняння стану (1.16) є замкненою, тому що складається із шести рівнянь і має шість невідомих: u, v, w, T, ρ, p . Нагадаємо, що розв'язати можна тільки замкнену систему, в якій кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, та для одержання єдиного розв'язку треба задати початкові та межові умови. Кількість функцій, для яких задаються початкові значення, тобто значення в момент часу $t = t_0$, визначається кількістю похідних за часом. В системі рівнянь (1.16) – (1.20) присутні часові похідні від функцій u, v, ρ і T , тому для них задаються початкові умови, які в загальному вигляді можна представити так

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u(x, y, z, t_0); \\ v(x, y, z, t) &= v(x, y, z, t_0); \\ \rho(x, y, z, t) &= \rho(x, y, z, t_0); \\ T(x, y, z, t) &= T(x, y, z, t_0). \end{aligned}$$

або у вигляді

$$f(x, y, z, t) = f(x, y, z, t_0), \text{ де } f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \rho \\ T \end{Bmatrix}; \quad t_0 - \text{строк спостережень.} \quad (1.22)$$

Оскільки рівняння (1.17) – (1.20) містять у собі просторові похідні, то необхідно ставити межові умови, кількість яких мусить дорівнювати порядку похідних від кожної змінної за кожною координатою.

Найбільш просто записати межові умови для вертикальної швидкості w за координатою z .

Нижня межа умова (НМУ) ставиться на поверхні землі (при $z = 0$), яка являє собою тверду стінку, через яку не може проникати повітря, і тому вертикальна складова швидкості дорівнює нулю ($w = 0$). Але великомасштабні вертикальні рухи біля поверхні землі можуть виникати за рахунок шорсткості (фрікційні рухи) і під дією макромасштабних нерівностей підстильної поверхні (хребтів, гір) – орографічні рухи. Якщо поверхню землі розглядати як гладку, тобто дзеркальну, то фрікційні

вертикальні рухи будуть відсутні ($w_{fr} = 0$). Для того, щоб позбутися орографічних вертикальних рухів, достатньо земну поверхню розглядати як горизонтальну (тобто орографія не ураховується, і в такому разі $w_{or} = 0$). Отже, якщо приймаються умови гладкості і горизонтальності підстильної поверхні, нижня межа умова буде нульова, тобто: при $z = 0$ $w = 0$.

Верхня межа умова (ВМУ) ґрунтується на таких міркуваннях: на досить великій висоті (при $z \rightarrow \infty$), яка може вважатися верхньою межею атмосфери (ВМА) доцільно прийняти, що потік маси повітря через ВМА дорівнює нулю, оскільки маса атмосфери Землі не змінюється, тобто є сталою. Математично ця умова записується як $\rho w = 0$. Оскільки розглядаються тільки ті рівні в атмосфері, де $\rho \neq 0$, то на ВМА виконується умова $w = 0$.

Таким чином, межові умови за вертикальною координатою можуть бути представлені у такому вигляді:

$$\begin{array}{lll} \text{НМУ} - \text{при} & z = 0 & w = 0; \\ \text{ВМУ} - \text{при} & z \rightarrow \infty & w = 0. \end{array} \quad (1.23)$$

Слід відмітити, що через доволі грубі припущення щодо нижньої межової умови її не можна вважати коректною. Верхня межа умова відповідає реальним закономірностям і тому вважається досить точною.

Межові умови за горизонтальними координатами називаються бічними. Вони можуть бути різними в залежності від задачі, яка розв'язується. Тут можливі такі випадки:

1. Якщо задача прогнозу розв'язується для всієї земної кулі, то бічні межові умови не задаються, оскільки куля не має меж.
2. При розв'язанні прогностичної задачі, тобто при інтегруванні системи рівнянь гідротермодинаміки для півкулі, межові умови по горизонтальних координатах задаються на екваторі, тому що він є межею як для північної півкулі, так і для південної. Умови на цій межі можуть задаватися по-різному. Наприклад, так: $v|_e = 0$, де $v|_e$ - меридіональна складова швидкості вітру на екваторі, яка дорівнює нулю. Ця межа умова з фізичної точки зору означає, що немає обміну повітряними масами між північною і південною кулями, тому вона називається умовою „твердої стінки”. На екваторі можна

задавати також такі умови: $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_e = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_e = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_e = \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_e \approx 0$, які

показують, що швидкість вітру, температура і тиск повітря мало змінюються на екваторі з часом. Ці умови близькі до реальних, тому

що в екваторіальній зоні часова мінливість стану атмосфери значно менша в порівнянні з помірними широтами.

3. Якщо задача прогнозу вирішується для обмеженої території, яка суттєво менша за півкулю, бічні умови задаються на межах області прогнозу. В перших квазігеострофічних моделях ці умови мали вигляд: $\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0$, тобто на межі території, для якої розраховується

прогноз, висота ізобаричної поверхні не змінюється з часом. Але це не відповідає дійсності, тому такі умови називаються фіктивними.

4. І нарешті існують так звані локальні межові умови, які задаються окремо для кожної точки прогнозу: $\left. \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0$, де \bar{H} - середнє

значення висоти ізобаричної поверхні на колі, яке окреслює область впливу, тобто коло, в центрі якого знаходиться точка прогнозу M (рис. 1.1). Радіус такого кола дорівнює $3d$ (d - крок сітки). Оскільки при моделюванні великомасштабних процесів крок складає декілька сотен кілометрів, коло впливу займає досить велику територію. Так, при $d=300$ км діаметр кола складає 1800 км; вважається, що процеси, які відбуваються на території кола, впливають на процеси в точці прогнозу, а за її межами не впливають, тому ця територія називається колом впливу.

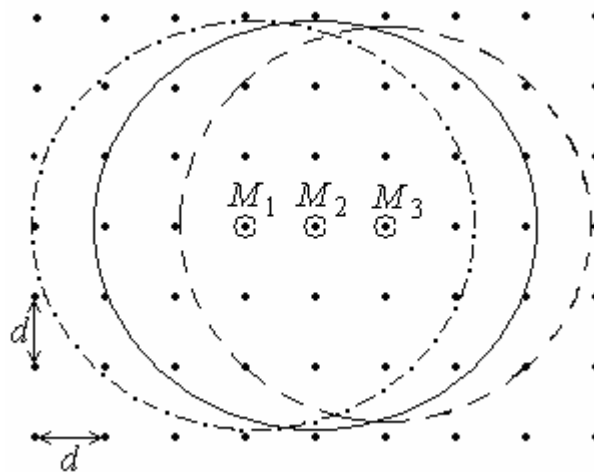


Рисунок 1.1 – Коло впливу для точок прогнозу M_1 (— · — · — · —), M_2 (— — — —), M_3 (— — — —); d - крок квадратної сітки

В кожній конкретній моделі задаються певні початкові та межові умови, тому вони будуть обговорюватися при розгляданні окремих гідродинамічних моделей.

1.2 Рівняння гідротермодинаміки в ізобаричній системі координат

Відомо, що аналіз полів метеорологічних величин синоптики виконують на ізобаричних поверхнях, тобто вони використовують систему координат, в якій осі x, y розташовуються на поверхнях $p = const$, а вертикальною координатою є тиск p . Така система координат називається ізобаричною (рис. 1.2). Вона дуже зручна для моделювання великомасштабних атмосферних процесів, оскільки рівняння гідротермодинаміки в цій системі мають більш простий вигляд і їх можна легко перетворювати.

Формули переходу від декартової системи координат (ДСК) до ізобаричної (ІСК) можна отримати шляхом диференціювання рівності

$$f(x, y, z, t) = f_p[x_p(x), y_p(y), p(x, y, z, t), t_p(t)], \quad (1.24)$$

де f, f_p - види функціональної залежності будь-якої метеорологічної величини від змінних x, y, z, t в ДСК і x_p, y_p, p, t_p - в ІСК, при цьому виконуються такі рівності $x_p \approx x, y_p \approx y, t_p = t$.

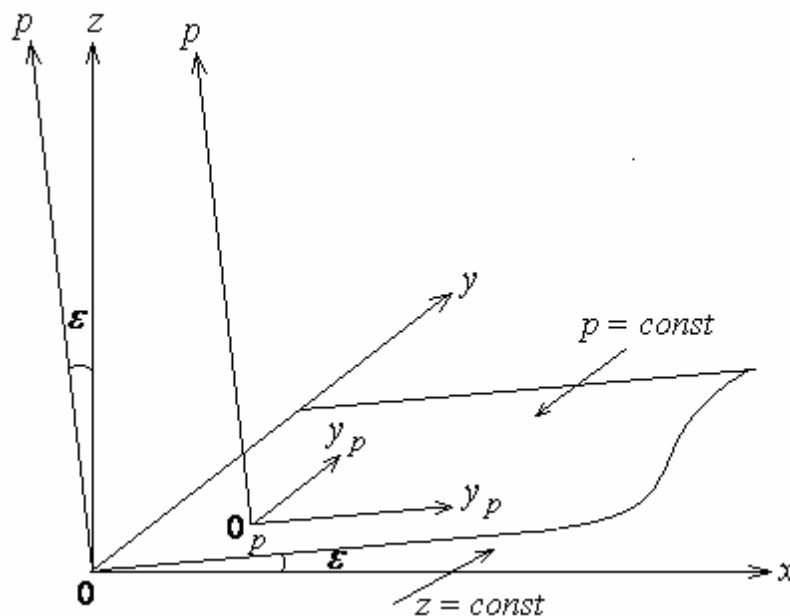


Рисунок 1.2 – Розташування осей декартової системи координат (x, y, z) і ізобаричної (x_p, y_p, p) ; XOY - рівнева поверхня ($z = const$); $x_p 0_p y_p$ - ізобарична поверхня ($p = const$); ϵ - кут нахилу ізобаричної поверхні до горизонтальної площини

Для прикладу отримаємо формулу переходу для похідної $\frac{\partial f}{\partial x}$. Для цього продиференціюємо (1.24) з урахуванням того, що f_p є складна функція $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_p}{\partial x_p} \frac{dx_p}{dx} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$; оскільки $x \approx x_p$, похідна $\frac{dx_p}{dx} \approx 1$ і формула переходу для похідної по x набуває вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_p}{\partial x_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Аналогічно отримуються формули переходу для $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ і $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Запишемо формули переходу для всіх частинних похідних:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f_p}{\partial x_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f_p}{\partial y_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}; \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f_p}{\partial t_p} + \frac{\partial f_p}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

Якщо примінити формули (1.25) до повної (індивідуальної) похідної, то отримаємо похідну $\frac{df}{dt}$ в ізобаричній системі координат

$$\frac{df_p}{dt_p} = \frac{\partial f_p}{\partial t_p} + u \frac{\partial f_p}{\partial x_p} + v \frac{\partial f_p}{\partial y_p} + \tau \frac{\partial f_p}{\partial p}, \tag{1.26}$$

де $\tau = \frac{dp}{dt}$ - ізобарична вертикальна швидкість або аналог вертикальної швидкості.

Із формул (1.25) можна також отримати вираз для складових горизонтального баричного градієнта в ізобаричних координатах. Для цього треба в (1.25) функцію f замінити на незалежну змінну z , а f_p - на функцію H , тобто висоту ізобаричної поверхні $H(x_p, y_p, p, t_p)$.

В результаті отримаємо

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial H}{\partial x_p}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial H}{\partial y_p}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1}; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Зазначимо, що при одержанні формул переходу (1.25) на функції f і f_p не накладались ніякі обмеження, тобто в якості f можна взяти будь-яку функцію. Візьмемо в якості f висоту z (незалежну величину в ДСК), а в якості f_p - H - висоту ізобаричної поверхні, яка в ІСК не є незалежною, тобто змінюється залежно від координат і часу: $H = H(x_p, y_p, p, t_p)$.

Якщо тепер в формули (1.25) підставити z і H , можна отримати вирази для $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ і $\frac{\partial p}{\partial t}$ в ізобаричній системі координат.

З використанням формул переходу (1.25) – (1.27) можна одержати систему рівнянь ГТД в ізобаричних координатах. Вона має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - \ell u; \\ T &= -\frac{Pg}{R} \frac{\partial H}{\partial p}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \tau \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{RT}{c_p p} \tau. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Зауважимо, що індекс p біля аргументів x, y, t в (1.28) та в подальшому буде опущено.

Система рівнянь (1.28) містить п'ять рівнянь, п'ять невідомих (u, v, τ, H, T) , тому є замкненою і може бути розв'язана. Для одержання єдиного розв'язку задаються початкові та межові умови.

Початкові умови мають вигляд

$$f(x, y, p, t) = f(x, y, p, t_0), \quad (1.29)$$

де $f = \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ T \text{ або } H \end{array} \right\}$; t_0 - строк спостережень.

Межові умови за вертикальною координатою можна задати для ізобаричної вертикальної швидкості у вигляді

$$\underline{\text{НМУ}} \text{ (нижня межова умова): при } p = P_0 \quad \tau = \frac{P_0 g}{RT_0} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.30),$$

де $P_0 = 1000$ гПа, T_0 - температура на поверхні $P = 1000$ гПа, H - висота поверхні 1000 гПа.

$$\underline{\text{ВМУ}} \text{ (верхня межова умова): при } p \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow 0. \quad (1.31)$$

Бічні межові умови, тобто умови за координатами x, y задаються в залежності від того, для якої території розв'язується прогностична задача (для земної кулі, для півкулі чи для обмеженої території).

При побудові атмосферних моделей найчастіше використовується ізобарична система координат, в якій вертикальна координата ζ (дзета) записується в безрозмірному вигляді

$$\zeta = \frac{p}{P_0}, \text{ де } P_0 = 1000 \text{ гПа,}$$

p - поточна вертикальна координата, яка для основних ізобаричних поверхонь набуває значень 850, 700, 500, та 300 гПа. Як видно із останньої формули, координата ζ для цих поверхонь дорівнює відповідно: 0,85; 0,7; 0,5; 0,3.

Рівняння в цій системі координат відрізняються тільки членами, які містять в собі похідну за вертикальною координатою. Наприклад, в першому рівнянні руху, це член $\tau \frac{\partial u}{\partial p}$. Щоб записати цей член в ζ системі достатньо помножити та розділити його на P_0 ; в результаті отримаємо

$$\frac{P_0}{P_0} \tau \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\tau}{P_0} \frac{\partial u}{\partial \left(\frac{p}{P_0} \right)} = \hat{\tau} \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \text{ де } \hat{\tau} = \frac{\tau}{P_0} = \frac{\tau}{1000}.$$

Аналогічно отримуються подібні члени в інших рівняннях.

Таким чином, система (1.28) в ζ - координатах набуває вигляду

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \hat{t} \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + \ell v; \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \hat{t} \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - \ell u; \\
 T &= -\frac{\zeta g}{R} \frac{\partial H}{\partial \zeta}; \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \hat{t}}{\partial \zeta} &= 0; \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{t} \frac{\partial T}{\partial \zeta} &= \frac{RT}{c_p \zeta} \hat{t}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Початкові умови для цієї системи рівнянь записуються так

$$f(x, y, \zeta, t) = f(x, y, \zeta, t_0), \quad (1.33)$$

$$\text{де } f = \left\{ \begin{array}{l} u \\ v \\ T \text{ або } H \end{array} \right\}, \quad t_0 - \text{строк спостережень.}$$

Межові умови за вертикальною координатою набувають вигляду

$$\text{НМУ при } \zeta = 1 \quad \hat{t} = \frac{g}{RT_0} \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (1.34)$$

$$\text{ВМУ при } \zeta \rightarrow 0 \quad \hat{t} \rightarrow 0. \quad (1.35)$$

1.3 Рівняння гідротермодинаміки в σ (сигма) – системі координат

Одним із недоліків декартової та ізобаричної систем координат є те, що в рівняннях, які записуються в цих системах, не враховується рельєф підстильної поверхні. Цей недолік усувається при використанні σ - системи координат.

В цій системі роль безрозмірної вертикальної координати σ виконує відношення

$$\sigma = \frac{p}{P_s},$$

де p - тиск на даному рівні, тобто поточна координата, а $P_s = P_s(x, y, t)$ - тиск на земній поверхні, який є змінною величиною.

Аналог вертикальної швидкості в цій системі координат має вигляд

$$\frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{P_s} \right) \quad (1.36)$$

Для горизонтальних координат x_σ, y_σ виконуються такі рівності

$$x_\sigma \approx x_p \approx x \quad y_\sigma \approx y_p \approx y$$

З урахуванням того, що

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = P_s, \quad \frac{\partial p}{\partial x_\sigma} = \sigma \frac{\partial P_s}{\partial x_\sigma}, \quad \frac{\partial p}{\partial y_\sigma} = \sigma \frac{\partial P_s}{\partial y_\sigma}.$$

Із рівнянь (1.28) отримаємо систему рівнянь в σ - системі координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\sigma}{P_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial P_s}{\partial x} + \ell v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} + g \frac{\sigma}{P_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial P_s}{\partial y} - \ell u, \\ T &= -\frac{g}{R} \sigma \frac{\partial H}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial P_s}{\partial t} + u \frac{\partial P_s}{\partial x} + v \frac{\partial P_s}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial P_s}{\partial \sigma} &= -P_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} &= 0, \\ \theta &= T \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^{\frac{R}{C_p}}, \text{ де } \sigma_0 = \frac{P_0}{P_s} = \frac{1000}{P_s} \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

Початкові умови для цієї системи рівнянь мають вигляд

$$f(x, y, \sigma, t) = f(x, y, \sigma, t_0), \quad (1.38)$$

де $f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ P_s \\ \theta \end{Bmatrix}$, t_0 - строк спостережень.

Враховуючи те, що $\sigma = \frac{p}{P_s}$, можна легко отримати вирази для межових умов за вертикальною координатою, тобто на нижній межі при $z = 0$ $p = P_s$ або при $\sigma = \frac{P_s}{P_s} = 1$ $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt}(1) = 0$; на верхній межі при $z \rightarrow \infty$ $p = 0$ і тоді при $\sigma = \frac{0}{P_s} = 0$ $\frac{d\sigma}{dt}$ також дорівнює нулю, тобто $\dot{\sigma} = 0$.

Отже, нижня та верхня межові умови запишуться в такому вигляді

$$\text{НМУ} \quad \text{при } \sigma = 1 \quad \dot{\sigma} = 0, \quad (1.39)$$

$$\text{ВМУ} \quad \text{при } \sigma = 0 \quad \dot{\sigma} = 0 \quad (1.40)$$

Таким чином, в σ - системі координат маємо нульові умови на нижній і верхній межах шару атмосфери, для якого будується гідродинамічна модель. Такі прості, але цілковито коректні умови, істотно спрощують розв'язання прогностичної задачі.

Відмітимо, що в системі (1.37), індекс σ при незалежних змінних x, y, t опущено, як і в системах (1.28), (1.32) опущено індекси p і ζ відповідно.

Оскільки система рівнянь ГТД є нелінійною, її розв'язання в аналітичній формі є неможливим і для інтегрування застосовуються наближені чисельні методи, зокрема метод сіток. Сутність цього методу полягає у тому, що значення метеорологічних величин в області визначення розв'язку задаються у дискретних точках (у так званих вузлах сітки), а похідні замінюються відношенням скінченних різниць. У результаті такої заміни одержуються скінченнорізницеві рівняння.

Система скінченнорізницевих рівнянь гідротермодинаміки разом з межовими умовами, заданими у скінченнорізницевому вигляді на множині вузлів сітки у межах області визначення розв'язку, називається *скінченнорізницевою схемою або чисельною моделлю*. Отже після заміни похідних скінченними різницями замість системи диференціальних рівнянь одержується замкнена система алгебраїчних рівнянь. Таким чином, метод сіток дозволяє розв'язання системи диференціальних рівнянь гідротермодинаміки з межовими і початковими умовами звести до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

У загальних рисах процедура прогнозу на основі рівнянь гідротермодинаміки в ізобаричній системі координат методом сіток може бути представлена таким чином:

- у початковий момент часу t_0 у вузлах просторової сітки точок задаються початкові умови; як відомо, вони задаються для метеорологічних величин, для яких в рівняннях гідротермодинаміки є похідні за часом (у нашому випадку це u, v, T або H);

- у межових вузлах, тобто у точках, розташованих на поверхнях, які обмежують область розв'язання, ставляться межові умови;

- за початковими значеннями метеорологічних величин, що є відомими зі спостережень, з використанням межових умов, розраховуються усі члени прогностичних рівнянь, які містять похідні у просторі, а також залежні змінні в усіх внутрішніх вузлах сітки (наприклад: $u \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y}, \tau \frac{\partial u}{\partial p}, u \frac{\partial v}{\partial x}, \dots$); сума цих членів у кожному

прогностичному рівнянні дорівнює частинній похідній за часом, тобто локальній похідній (нагадаємо, що прогностичним називається рівняння, яке містить часову похідну);

- використовуючи скінченнорізницеві аналоги похідних за часом та початкові умови, розраховуються значення шуканих метеорологічних величин u, v, T для майбутнього моменту часу $t_0 + \delta t$, де δt - часовий крок

$$u_{x,y,p}^{t_0+\delta t} = u_{x,y,p}^{t_0} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x,y,p}^{t_0} \cdot \delta t;$$

$$v_{x,y,p}^{t_0+\delta t} = v_{x,y,p}^{t_0} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{x,y,p}^{t_0} \cdot \delta t;$$

$$T_{x,y,p}^{t_0+\delta t} = T_{x,y,p}^{t_0} + \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{x,y,p}^{t_0} \cdot \delta t,$$

де x, y - координати точки прогнозу на ізобаричній поверхні p ;

- за допомогою діагностичних рівнянь (які не містять часових похідних), обчислюються ті метеорологічні величини, для яких немає прогностичних рівнянь. Наприклад, із рівняння нерозривності можна знайти вертикальну ізобаричну швидкість

$$\tau_{x,y,p}^{t_0+\delta t} = - \int_{P_0}^P D_s^{t_0+\delta t} dP$$

де $D_s^{t_0+\delta t}$ - плоска дивергенція, яка розраховується за даними про вітер $u_{x,y,p}^{t_0+\delta t}$, $v_{x,y,p}^{t_0+\delta t}$. Прогностичні висоти ізобаричних поверхонь можна отримати із рівняння статики з використанням розрахованих прогностичних полів температури $T_{x,y,p}^{t_0+\delta t}$.

Таким чином, в результаті чисельної реалізації моделі розраховуються поля прогностичних значень усіх метеорологічних величин, які фігурують в системі рівнянь гідротермодинаміки, для моменту часу $t_0 + \delta t$. Одержані поля метеорологічних величин використовуються як початкові для прогнозу на наступному кроці за часом. Повторюючи багаторазово цю процедуру, можна одержати прогностичні поля метеорологічних величин для заданого моменту часу $t_0 + N\delta t$, де $N\delta t$ - завчасність прогнозу. Розглянутий метод послідовного розв'язання рівнянь *називається методом кроків за часом*. Цей метод використовується в усіх чисельних моделях.

На закінчення відзначимо, що чисельний прогноз погоди є однією з найскладніших задач у галузі математичної фізики. Це пов'язано з проблемами замикання системи рівнянь, завдання початкових та межових умов, а також з вибором методів чисельного інтегрування.

1.4 Картографічні проекції і урахування їх в рівняннях гідротермодинаміки.

В гідродинамічних методах прогнозу погоди атмосфера розглядається як стисливе суцільне середовище, яке знаходиться під дією сили земного тяжіння і яка обертається разом з Землею навколо її осі. Такий підхід цілком задовільно описує закономірності рухів в двох нижніх основних шарах атмосфери: тропосфері, верхня межа якої в середньому розташована на висоті біля 10 км над поверхнею землі, і нижньої стратосфери, верхня межа якої коливається біля рівня 35 км.

Відомо, що динаміка зазначених шарів атмосфери математично описується системою рівнянь гідротермодинаміки, які можуть бути представлені в різних системах координат. Вибір системи незалежних змінних, в якій рівняння набувають найбільш простий вигляд, являється важливим способом, який широко використовується в гідромеханіці. Однак в області метеорології вибір системи координат історично не був пов'язаний зі спробою розв'язання системи рівнянь динаміки атмосфери, а був обумовлений практичними задачами обробки аерологічних спостережень і побудовою метеорологічних карт.

Починаючи з роботи Еліассена (1949 р.), з'ясувалось, що практичні переваги використання визначеної системи координат тісно пов'язане з видом рівнянь динаміки атмосфери. Найбільш зручною для теоретичних досліджень і практичних схем чисельного прогнозу є так звана квазідекартова система координат, в якій осі x і y - горизонтальні координати точки, а z - висота над рівнем моря. Різні варіанти квазідекартової системи координат (ДСК) широко використовуються в роботах по чисельному прогнозу.

Щодо вибору вертикальної координати, то в сучасних чисельних моделях використовується ізобарична система координат, в якій роль вертикальної координати відіграє тиск повітря p або система з безрозмірною вертикальною координатою $\zeta = \frac{p}{P}$, де $P=1000$ гПа. У більшості сучасних моделей використовується так звана σ - система (сигма – система) координат, в якій вертикальна координата являє собою відношення приземного тиску повітря P_s до координати p , тобто $\sigma = \frac{p}{P_s}$. Остання система координат дозволяє урахувати великомасштабні нерівності підстильної поверхні і більш коректно задавати межові умови по вертикалі.

Оскільки в метеорології аналіз полів метеорологічних величин відбувається за допомогою географічних карт, важливим є питання про картографічні проекції.

Координати точки на географічній карті (а тому і пропорційні їм квазідекартові координати) визначаються способом, який застосовується для проектування певної частини земної поверхні на площині. Ці способи детально вивчаються в спеціальній науковій дисципліні – математичній картографії.

В картографії вибір типу проекції знаходиться в залежності від цілей, для яких призначається географічна карта. Карти, які використовуються для визначення напрямків, будуються в рівнокутних (конформних) проекціях.

Основні властивості рівнокутної проекції:

а) кут між дуже малими відрізками прямих, які перетинаються в будь-якому пункті, дорівнює куту між зображеннями цих відрізків на карті;

б) масштаб карти у кожному пункті не залежить від напрямку; звідси випливає, що дуже мале коло на місцевості зображається таким же колом на карті.

Для інших цілей можуть бути більш зручними проекції, які зберігають відношення площин на місцевості і на карті або які мають інші властивості. Однак в усіх випадках, коли проекція використовується для

розгляду векторів або виконання векторних операцій, доцільно користуватися рівнокутовою проекцією. Це цілком відноситься до задач чисельного прогнозу погоди.

Розглянемо тепер деяку функцію f , яка задана на місцевості. Висоту над рівнем моря z будемо вважати сталою. Тоді у випадку рівнокутової проекції похідні функції f за напрямками s_1, s_2 на місцевості, яким відповідають напрямки на карті x_c, y_c , визначаються простими формулами:

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = M \frac{\partial f}{\partial x_c}, \quad \frac{\partial f}{\partial s_2} = M \frac{\partial f}{\partial y_c},$$

де M - масштаб карти в даному пункті.

Введемо тепер в розгляд масштаб карти в деякому пункті, який приймається за головний масштаб M_0 і будемо перераховувати відстань на карті $\Delta x_c, \Delta y_c$ в умовні відстані $\Delta x, \Delta y$, користуючись співвідношеннями

$$\begin{aligned} \Delta x &= M_0 \cdot \Delta x_c & \Delta y &= M_0 \cdot \Delta y_c. \\ \text{або} \quad \Delta x_c &= \frac{\Delta x}{M_0}, & \Delta y_c &= \frac{\Delta y}{M_0}. \end{aligned}$$

Таким чином, істинний горизонтальний градієнт функції f виражається через похідні, які визначаються за допомогою географічної карти, наступним чином:

$$\nabla_s f = \text{grad}_s f = \frac{M}{M_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \right). \quad (1.41)$$

Тут \vec{i}, \vec{j} - одиничні вектори в напрямках x, y відповідно, grad_s - горизонтальний градієнт. Величина $\frac{M}{M_0}$ носить назву масштабного множника або параметра збільшення. Ця величина є основною характеристикою рівнокутової картографічної проекції. Коли вона відома, всі векторні операції, які входять в рівняння динаміки атмосфери, можуть бути визначені за звичайними правилами векторного аналізу. Введемо позначення для параметра збільшення m , тобто $\frac{M}{M_0} = m$.

Розглянемо, зокрема, формулу для перебудови двовимірного оператора Лапласа ∇_s^2 , яка знадобиться при розв'язанні задач. Запишемо вираз для цього оператора з урахуванням параметра збільшення, а саме

$$\nabla_s^2 f = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_2 \mu_3}{\mu_1} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_3 \mu_1}{\mu_2} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] \quad (1.42)$$

В (1.42) μ - це коефіцієнт Ламе – величина, обернена до коефіцієнта збільшення.

Підставимо ці значення $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{m}$, $\mu_3 = 1$ в (1.42), отримаємо

$$\nabla_s^2 f = m^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right). \quad (1.43)$$

Відмітимо, що введення координат в площині карти має сенс тоді, коли відносна мінливість параметру збільшення в залежності від широти значно менша ніж мінливість тригонометричних функцій, які входять в рівняння ГТД в сферичних координатах (Додаток В). Дійсно, якщо ця умова виконується, то дії з рівняннями значно спрощуються. Надамо з цієї точки зору відомості про рівнокутові проекції: стереографічну, конічну і меркаторську

Стереографічна полярна проекція. В цій проекції поверхня земної кулі проектується із полюса на площину, яка проходить через широтне коло φ_1 . При цьому для зображення на карті північної півкулі проектування виконується із південного полюса, а коло широти φ_1 береться в північній півкулі (рис. 1.3).

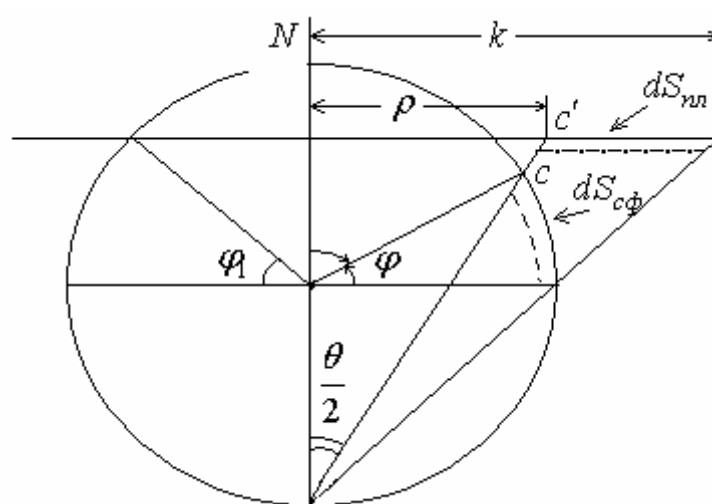


Рисунок 1.3 – Стереографічна проекція; $dS_{c\phi}$ (-----) – відстань на сфері; dS_{nu} (— · — · — · —) – проекція відстані на площину

Рисунок показує, що точка c на поверхні земної кулі має відображення на площині картографічної проекції у вигляді точки c' . В цій проекції кола широт на поверхні Землі $\varphi = const$ перетворюються в концентричні кола на площині, а меридіани $\lambda = const$ - в радіальні прямі, які виходять із точки зображення полюса.

Для карт стереографічної проекції, що використовуються в синоптичній практиці і чисельних методах, в якості φ_1 береться широта 60° , тобто головним масштабом є масштаб саме на цій широті. Для такої проекції масштабний множник описується формулою

$$m = \frac{1 + \sin 60^\circ}{1 + \sin \varphi} \quad \text{або} \quad m = \frac{1.866}{1 + \sin \varphi}. \quad (1.44)$$

Для цієї картографічної проекції формули для розрахунку координат x та y по заданих координатах φ і λ мають вигляд:

$$x = x_{II} + k \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \sin(\lambda - \lambda_1);$$

$$y = y_{II} - k \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \cos(\lambda - \lambda_1),$$
(1.45)

де $k = 1.866 R_z$ (для карт з головним масштабом на широті 60°), R_z - радіус Землі, x_{II}, y_{II} - координати північного полюса, які можна обчислити за допомогою формул (1.9), якщо вважати, що $x = y = 0$.

Широта місця може бути визначена по координатах x та y за формулою

$$\sin \varphi = \frac{1 - \frac{r}{k}}{1 + \frac{r}{k}}, \quad (1.46)$$

$$\text{де} \quad r = \sqrt{(x - x_{II})^2 + (y - y_{II})^2}.$$

Рівнокутова кінчна проекція (проекція Ламберта). Ця проекція отримується шляхом установлення відповідності між точками на земній

кулі і січному конусі, який потім розгортається на площину. Для кіл деяких широт φ_3, φ_4 , на яких відбувається перерізання січного конуса і кулі, масштабний множник $m=1$. Для карт цієї проекції, які використовуються в синоптичній практиці, $\varphi_3=30^\circ$ п.ш., а $\varphi_4=60^\circ$ п.ш.

Для будь-якої широти φ

$$m = \alpha \frac{r}{R_3} \frac{1}{\cos \varphi}, \quad (1.47)$$

де R_3 - радіус Землі; $\alpha=0.7156$.

Формули для розрахунку координат x, y мають вигляд

$$x = x_{II} + k \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right)^\alpha \sin(\lambda - \lambda_1);$$

$$y = y_{II} - k \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right)^\alpha \cos(\lambda - \lambda_1). \quad (1.48)$$

Пряма циліндрична рівнокутова (меркаторська) проекція. Ця проекція отримується шляхом відзеркалення поверхні земної кулі на бічну поверхню циліндра внутрішньою дотичною або січною. При прямій циліндричній проекції вісь циліндра співпадає з полярною віссю Землі. Бічна поверхня циліндра розрізається по одній з твірних і розгортається в площину, що і дає циліндричну проекцію. В цій проекції меридіани зображаються паралельними прямими, які відстоять один від одного на відстані, пропорційній різниці відповідних довгот, а паралелі – у вигляді прямих, перпендикулярних до меридіанів. Ці проекції застосовуються головним чином для карт тропічної зони. Для таких карт масштабний множник визначається за формулою

$$m = \frac{k}{R_3} \frac{\cos \varphi_k}{\cos \varphi}. \quad (1.49)$$

Для обчислень координат x, y використовуються формули

$$x = k(\lambda - \lambda_0);$$

$$y = k \ln \left(\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right) + y_e. \quad (1.50)$$

де $k = R_3 \cos \varphi_k$ (φ_k - широта, для якої прийнятий головний масштаб); λ, λ_0 виражені в радіанах, y_e - декартова координата екватора; у випадку $\varphi_k = 22.5$ (карти тропічної зони) $k = R_3 \cos(22.5^\circ)$.

На закінчення відзначимо, що при розв'язанні деяких задач можна не враховувати помилки у визначенні відстаней порядку 5-10%. Це означає, що для територій, які мають меридіональну протяжність не більшу за $40-45^\circ$, завжди можна вибрати рівнокутну конічну проекцію, котра дає цілком задовільне зображення території. В такому випадку відношення $\frac{M}{M_0}$ достатньо близьке до одиниці, особливо, якщо урахувати, що в якості M_0 замість мінімального масштабу можна взяти, наприклад, середнє геометричне значення з мінімального і максимального масштабів на даній території. Тому при практичних розрахунках в таких випадках можна приймати з достатньою точністю $\frac{M}{M_0} = 1$.

Далі, якщо умови в околиці північного або південного полюсів є суттєвими для даної задачі, то рекомендується користуватися стереографічною проекцією, оскільки всі інші розглянуті проекції дають поблизу полюсів велике перекощення відстаней. Проекцію, яка дає задовільне зображення всієї півкулі, або тим більше всієї земної кулі, підібрати неможливо. В цьому випадку необхідно вводити в усі формули множник $\frac{M}{M_0}$ або використовувати одночасно кілька проекцій.

Вправи до розділу 1

1.1. Показати, що

$$\vec{V} \cdot \nabla p = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z},$$

де $\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$ - вектор швидкості, а $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ - умовний векторний диференціальний оператор.

1.2. Показати, що

$$\vec{k} \times \vec{V} = -\vec{i}v + \vec{j}u,$$

де \vec{k} - одиничний вектор, спрямований по осі z .

1.3. Довести, що

$$\frac{d\vec{V}_s}{dt} = \vec{i} \frac{du}{dt} + \vec{j} \frac{dv}{dt},$$

де $\vec{V}_s = \vec{i}u + \vec{j}v$ - вектор швидкості вітру.

1.4. Довести, що

$$\frac{g}{\ell} \vec{k} \times \nabla H = \frac{g}{\ell} \left(-\vec{i} \frac{\partial H}{\partial y} + \vec{j} \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \vec{i}u_g + \vec{j}v_g.$$

1.5. Довести таке співвідношення

$$\vec{k}(\nabla \times \vec{V}) = \vec{k} \cdot \text{rot} \vec{V}_s = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Omega_z.$$

1.6. Розкрити змішаний добуток

$$\vec{k} \cdot \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \times \nabla w \right) = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

1.7. Довести, що

$$\nabla \cdot \vec{V} = \text{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

1.8. Показати, що

$$\vec{\omega} \times \vec{V} = (\omega_y w - \omega_z v) \vec{i} + (\omega_z u - \omega_x w) \vec{j} + (\omega_x v - \omega_y u) \vec{k},$$

де $\vec{\omega}$ - вектор кутової швидкості ($\vec{\omega} = \vec{i} \omega_x + \vec{j} \omega_y + \vec{k} \omega_z$).

1.9. Показати, що векторному рівнянню горизонтального руху

$$\frac{d\vec{V}_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\ell \vec{\omega} \times \vec{V}_s$$

в декартовій системі координат відповідають рівняння

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \ell v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ell u. \end{aligned}$$

1.10. Показати, що векторному рівнянню балансу

$$\nabla u \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \nabla v \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} - \vec{k} \cdot \nabla \times \ell \vec{V} = -g \Delta H$$

в координатній формі відповідає рівняння

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial \ell}{\partial y} - v \frac{\partial \ell}{\partial x} - \ell \Omega = -g \Delta H.$$

1.11. Довести, що для дослідження великомасштабних атмосферних рухів третє рівняння руху можна використовувати у вигляді рівняння статики

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g.$$

1.12. Довести, що рівняння нерозривності в ізобаричній системі координат має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad \text{де } \tau = \frac{dp}{dt}.$$

1.13. Показати, що в σ - системі координат рівняння руху, яке відповідає осі x , має вигляд

$$\frac{du}{dt_\sigma} = -g \frac{\partial H}{\partial x_\sigma} + g \frac{\sigma}{P_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial P_s}{\partial x_\sigma} + \ell v.$$

1.14. Отримати рівняння нерозривності в σ - системі координат

$$\frac{\partial P_s}{\partial t} + \frac{\partial u P_s}{\partial x} + \frac{\partial v P_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma} P_s}{\partial \sigma} = 0,$$

де $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ - вертикальна швидкість в σ - системі координат.

1.15. Розрахувати координати ζ і σ ізобаричних поверхонь 1000, 850, 700, 500, 300, 200, 100 і 50 гПа, якщо $P_s = 900$ гПа.

1.16. Показати, що плоский оператор Лапласа

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

в полярній системі координат (r, η) має вигляд

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

1.17. Показати, що оператор горизонтальної або плоскої дивергенції

$$\text{div} \vec{V}_s = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

в полярній системі координат має вигляд

$$\text{div} \vec{V}_s = (\cos \eta + \sin \eta) \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} (\sin \eta - \cos \eta) \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta},$$

де v_r, v_η - проекції вектора \vec{V}_s на осі полярної системи координат.

1.18. Показати, що оператор для вертикальної проекції вихору

$$\text{rot} \vec{V}_s = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

в полярній (циліндричній) системі координат має вигляд

$$\text{rot} \vec{V}_s = (\sin \eta - \cos \eta) \frac{\partial v_\eta}{\partial r} + (\sin \eta + \cos \eta) \frac{\partial v_r}{\partial \eta}.$$

1.19. Показати, що при використанні сферичної системи координат (початок координат збігається з центром Землі) можна прийняти, що

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \cdot v_{\theta} \approx \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r v_{\lambda}}{\partial r} \approx \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial z}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} \approx \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

1.20. Довести, що при дослідженні великомасштабних атмосферних рухів рівняння нерозривності в сферичній системі координат можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\rho}{\alpha \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v_{\theta} \sin \theta) + \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \lambda} \right] = 0.$$

1.21. Розрахувати значення масштабу зображення m для різних картографічних проекцій та широт:

Номер завдання	Проекція	φ°
1.21.1	Стереографічна	30
1.21.2	Стереографічна	60
1.21.3	Стереографічна	85
1.21.4	Конічна	30
1.21.5	Конічна	60
1.21.6	Конічна	85
1.21.7	Циліндрична	30
1.21.8	Циліндрична	60
1.21.9	Циліндрична	85

1.22. Розрахувати декартові координати точок

а – $\varphi=45^{\circ}$, $\lambda=60^{\circ}$ сх.д.

б – $\varphi=60^{\circ}$, $\lambda=80^{\circ}$ сх.д.

в – $\varphi=60^{\circ}$, $\lambda=60^{\circ}$ сх.д.

1.22.1 – для стереографічної проекції;

1.22.2 – для конічної проекції;

1.22.3 – для циліндричної проекції.

При цьому $\lambda_1=45^{\circ}$ сх.д., $x_n = y_n=8400$ км, $\lambda_0=0^{\circ}$, $y_e=0$.

Результат виразити в кілометрах з округленням до 10 км.

1.23. Показати, що при врахуванні стереографічної картографічної проєкції між оператором горизонтальної адвекції на площині

$$A = -\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

і оператором на сфері

$$A_s = -\left(\frac{v_\theta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{\alpha \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$$

існує співвідношення

$$A_s = mA.$$

Вказівки: u і v - проєкції вектора вітру на горизонтальну поверхню.

1.24. Показати, що при урахуванні картографічної проєкції між оператором Лапласа на площині

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

і оператором на сфері

$$\Delta_s = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}$$

існує співвідношення

$$\Delta_s = m^2 a^2 \Delta$$

1.25. Показати, при урахуванні картографічної проєкції між оператором Якобі на площині

$$(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$$

і оператором на сфері

$$\frac{1}{\sin \theta} (A, B)_s = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{\partial A}{\partial \lambda} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right)$$

існує співвідношення

$$\frac{1}{\sin \theta} (A, B)_s = m^2 a^2 (A, B).$$

- 1.26.** Отримати основні рівняння динаміки атмосфери в системі координат Філіпса; за вертикальну координату прийняти $\sigma = \frac{P_T}{P_s}$, де $P_s = P_s(x, y, t)$ - фактичний тиск на підстильній поверхні; P_T - сталий тиск, який відповідає верхньому рівню моделі.
- 1.27.** Отримати основні рівняння динаміки атмосфери в ізентропічній системі координат. Ввести функцію Екснера

$$\pi = C_p \left(\frac{p}{P_0} \right)^{\frac{\chi-1}{\chi}}$$

і функцію Монтгомері

$$M = \frac{\chi}{\chi-1} RT + gz,$$

де z - висота ізентропічної поверхні.

- 1.28.** Чому дорівнює ізентропічна вертикальна швидкість, якщо внаслідок радіаційного вихолодження температура повітряної маси за 6 годин знизилась на 8° .
- 1.29.** В повітряній масі, яка рухається, питома вологість за рахунок конденсації зменшилась за 4 години на 3 г/кг. Визначити ізентропічну вертикальну швидкість. Прийняти приблизно $\theta = T$.

Відповіді та розв'язання

1.1 Розв'язання

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \nabla p &= (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) \left(\vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} \cdot \vec{i} + u \frac{\partial p}{\partial y} \vec{i} \cdot \vec{j} + u \frac{\partial p}{\partial z} \vec{i} \cdot \vec{k} + \\ &+ v \frac{\partial p}{\partial x} \vec{j} \cdot \vec{i} + v \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} \cdot \vec{j} + v \frac{\partial p}{\partial z} \vec{j} \cdot \vec{k} + w \frac{\partial p}{\partial x} \vec{k} \cdot \vec{i} + w \frac{\partial p}{\partial y} \vec{k} \cdot \vec{j} + w \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Оскільки скалярні добутки взаємо перпендикулярних орт дорівнюють нулю, то в результаті отримаємо

$$\vec{V} \cdot \nabla p = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}.$$

1.2 Розв'язання

$$\vec{k} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & k \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i}(w \cdot 0 - kv) - \vec{j}(w \cdot 0 - ku) + \vec{k}(u \cdot 0 - v \cdot 0).$$

Оскільки модуль \vec{k} дорівнює одиниці, маємо

$$\vec{k} \times \vec{V} = -\vec{i}v + \vec{j}u.$$

1.3 При розв'язанні цієї задачі, а також задач 1.4 – 1.10 слід використовувати правила скалярного і векторного добутків, які викладені в Додатку А.

1.11 При виконанні цього завдання треба оцінити члени третього рівняння руху за допомогою таблиць порядків метеорологічних величин та їх похідних (Додаток Б), або скористатись теорією подібності.

1.12 Для виконання цього завдання і завдань 1.13, 1.14 необхідно використовувати формули переходу від декартової системи координат до ізобаричної і від ізобаричної – до σ - системи координат.

1.15

P , гПа.....	1000	850	700	500	300	200	100	50
ζ	1.0	0.85	0.7	0.5	0.3	0.2	0.1	0.05
σ	1.111	0.944	0.779	0.556	0.339	0.222	0.111	0.056

1.16 Розв'язання. Координати x і y виражаються через полярні координати r і η співвідношеннями

$$x = r \cos \eta, \quad y = r \sin \eta$$

Якщо примінити правила диференціювання складних функцій, знайдемо

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \eta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \eta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

відкіля

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \eta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \eta}{r} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \eta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \eta}{r} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Якщо останні вирази продиференціювати другий раз, тобто одержати вирази для $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, а потім скласти результати, то знайдемо

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

1.18, 1.19, 1.20 При виконанні цих завдань використати формули в Додатку В.

1.21.1	1.244
1.21.2	1.000
1.21.3	0.935
1.21.4	1.000
1.21.5	1.000
1.21.6	1.567
1.21.7	1.067
1.21.8	1.848
1.21.9	10.595

1.22

	а		б		в	
	х	у	х	у	х	у
1.22.1	9670	3640	11220	4370	9220	5320
1.22.2	9370	2530	11890	3420	9550	4100
1.22.3	6160	5190	8220	5190	6160	7750

1.23 Розв'язання. Відповідно до теорії картографічних проекцій між сферичними координатами (θ і λ) і полярними координатами на площині проекції (r , η) існує наступне співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = m a \frac{\partial}{\partial r}.$$

Ураховуючи це для оператора A_s отримаємо

$$A_s = \frac{v_\theta}{a} \quad \text{та} \quad \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Зробимо перехід до декартових координат. Відповідно до правил диференціювання складних функцій (див. вправу 1.16) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos \eta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \eta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= r \left(-\sin \eta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \eta \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Проекції швидкостей в сферичній і декартовій (локальній) системах координат пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} v_\theta &= u \cos \lambda + v \sin \lambda, \\ v_\lambda &= -u \sin \lambda + v \cos \lambda. \end{aligned}$$

З урахуванням викладеного і того, що $\lambda = \eta$, для A_s отримаємо

$$\begin{aligned} A_s &= m(u \cos \lambda + v \sin \lambda) \left(\cos \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \sin \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) + \\ &+ \frac{r}{a \sin \theta} (-u \sin \lambda + v \cos \lambda) \left(-\sin \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \cos \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Оскільки відповідно до теорії картографічних проєкцій

$$\frac{r}{a \sin \theta} = m,$$

отримаємо такий вираз для A_s

$$\begin{aligned} A_s &= m \left\{ (u \cos \lambda + v \sin \lambda) \left(\cos \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \sin \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) + (-u \sin \lambda + v \cos \lambda) \times \right. \\ &\times \left. \left(-\sin \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \cos \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} = m \left\{ u(\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) \frac{\partial}{\partial x} + v(\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \right\} = \\ &= m \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) = mA. \end{aligned}$$

Тут під u і v розуміють проекції вектора швидкості вітру на площину, перпендикулярну до місцевої вертикалі. Якщо під u і v розуміти проекції вектора вітру на площину картографічної проекції, то вираз для A_s буде мати вигляд

$$A_s = m^2 A.$$

В практиці чисельних прогнозів, як правило, в рівняння вводяться проекції вектора вітру на горизонтальну (відносно даної точки) площину і тоді

$$A_s = mA.$$

1.24, 1.25 При розв'язанні цих задач треба використати формули в Додатку В
1.26 Рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{RT\sigma}{(\sigma P_s + P_T)} \frac{\partial P_s}{\partial x} + \ell v + F_x; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{RT\sigma}{(\sigma P_s + P_T)} \frac{\partial P_s}{\partial y} - \ell v + F_y. \end{aligned}$$

Рівняння статички

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} &= -\frac{RTP_s}{(\sigma P_s + P_T)}; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{RT\sigma}{(\sigma P_s + P_T)} \frac{\partial P_s}{\partial y} - \ell v + F_y. \end{aligned}$$

Рівняння нерозривності

$$\frac{dP_s}{dt} + \frac{\partial(uP_s)}{\partial x} + \frac{\partial(vP_s)}{\partial y} \frac{\partial P_s}{\partial x} + P_s \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma} = 0;$$

Рівняння припливу тепла

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\chi - 1}{\chi} \frac{T}{(\delta P_s + P_*)} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c_p \rho}.$$

1.27 Рівняння руху

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial M}{\partial x} + \ell v + F_x; \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial M}{\partial y} - \ell u + F_v,$$

$$\text{де} \quad \frac{d}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Рівняння статики

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \pi;$$

Рівняння нерозривності

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\dot{\theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0;$$

Рівняння припливу тепла

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \frac{\varepsilon}{c_p}.$$

1.28 – 1.33 град/год.

1.29 1.9 град/год.

Розділ 2

Рівняння вихору вектора швидкості вітру та дивергенції

В сучасних задачах прогнозу погоди широко використовуються диференціальні характеристики двовимірного поля швидкості – вихор або завихреність і дивергенція. Для успішного використання цих величин необхідно детально розглянути їх фізичний зміст та властивості.

Завдяки великій ролі вказаних характеристик необхідно вміти визначити їх чисельні значення. Вся справа в тому, що ці характеристики не піддаються безпосередньому вимірюванню подібно, наприклад, вітру або температурі. Тому доводиться визначати вихор та дивергенцію непрямым шляхом, інакше кажучи, обчислювати їх за допомогою відомих полів інших метеорологічних величин: тиску, вітру тощо.

Існує багато різних способів обчислення цих характеристик. Ці способи необхідно привести до системи, виявити переваги та недоліки різних способів, межі їх застосування та використовувати при розв'язанні задач.

2.1 Фізичне тлумачення вихору та дивергенції

Рух суцільного середовища – рідини або газу, зокрема, повітря – звичайно буває дуже складним. Навіть рух малої (теоретично – нескінченно малої) частинки протягом надто малого часу є звичайно складним, і для успішного вивчення такого руху зручно розглядати його як результат накладених один на одного декількох більш простих рухів.

Можна вивчити кожний з цих простих рухів, а потім, накладаючи їх один на одний, розглядати реальні рухи рідини або газу.

Почнемо з руху абсолютно твердого тіла, тобто такого тіла, яке не піддається змінюванню форми. З курсу механіки відомо, що будь-який рух такого тіла можна розкласти на два простих рухи: паралельне переміщення і обертання навколо осі, яка проходить через будь-яку точку тіла, наприклад, його центр ваги. Паралельне переміщення характеризується лінійною швидкістю \vec{V} тіла, обертання – вектором кутової швидкості $\vec{\sigma}$, який спрямовано уздовж осі обертання і чисельно дорівнює подвійній кутовій швидкості обертання σ .

Обертальна компонента руху частинки рідини або газу описується вектором $\vec{\Omega}$, який називають вихором швидкості або ротором швидкості і позначають так

$$\vec{\Omega} = \text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V}, \quad (2.1)$$

Подаючи векторний доданок у вигляді визначника

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

і розкриваючи його за правилом Крамера, одержимо

$$\vec{\Omega} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

Множники при одиничних ортах є проекціями (складовими) вихору $\vec{\Omega}(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ на осі декартових координат:

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.4)$$

Кожна складова вихору швидкості характеризує обертання частинки у площині, перпендикулярній до осі обертання. Зокрема, вертикальна складова Ω_z означає обертання частинки у горизонтальній площині навколо вертикальної осі, причому для додатних значень це обертання відбувається проти годинникової стрілки при спостереженні зверху.

В ізобаричній системі координат визначник (2.2) замінюється таким:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial p} \\ u & v & \tau \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

і тоді складові вихору $\vec{\Omega}(\Omega_{x_p}, \Omega_{y_p}, \Omega_p)$ визначаються виразами:

$$\Omega_{x_p} = \frac{\partial \tau}{\partial y_p} - \frac{\partial v}{\partial p}; \quad \Omega_{y_p} = \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial x_p}; \quad \Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial y_p}. \quad (2.6)$$

Оскільки для великомасштабних атмосферних рухів горизонтальні складові швидкості вітру u і v принаймні на два порядки більші, ніж вертикальна швидкість w (або τ), то при аналізі ротації рухів в об'єктах такого масштабу найцікавішим є насамперед вертикальна складова Ω_z у декартових або Ω_p в ізобаричних координатах. Внаслідок цього горизонтальними складовими вихору швидкості Ω_x, Ω_y можна знехтувати у порівнянні з вертикальною складовою. Для мезомасштабних вихорів з горизонтальними осями обертання (наприклад, шквали у грозовій хмарі) таке наближення, зрозуміло не є правочинним, тому що порядок усіх трьох складових тривимірного потоку (u, v, w) є приблизно однаковим, і тому $O(\Omega_x, \Omega_y) \approx O(\Omega_z)$.

Чисельно вихор швидкості дорівнює подвійній кутовій швидкості обертання частинки навколо миттєвої осі обертання

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\sigma}, \quad \text{а модуль} \quad |\vec{\Omega}| = 2\sigma. \quad (2.7)$$

Згідно з (2.7) проекції $\vec{\Omega}$ на осі координат мають вигляд

$$\Omega_x = 2\sigma_x; \quad \Omega_y = 2\sigma_y; \quad \Omega_z = 2\sigma_z. \quad (2.8)$$

Важливою характеристикою поля швидкості вітру є також дивергенція

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

яка дорівнює швидкості відносного розширення елементарної частинки. Інакше кажучи, якщо нескінченно малий об'єм $\delta\tau$ частинки за час δt збільшився на $d\delta\tau$, то

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt} \quad (2.9)$$

Формула (2.9) показує, що $\operatorname{div} \vec{V} > 0$ у тому випадку, коли об'єм частинки, яка рухається, збільшується; якщо $\operatorname{div} \vec{V} < 0$, об'єм рухомої частинки зменшується.

Необхідно пам'ятати, що дивергенція і вихор швидкості описують не рух у цілому, а лише одну якусь його компоненту, тобто один з його простих рухів, на які можна розкласти реальний складний рух. Тому, якщо дивергенція швидкості не дорівнює нулю, це не означає, що рух частинки є просто її розширення або стиснення; також, якщо вихор швидкості відрізняється від нуля, то це не означає, що рух частинки є тільки її

обертання. Це означає лише наявність обертальної складової спільного руху.

Отже, для атмосферних вихорів синоптичного масштабу $O(\Omega_x, \Omega_y) \ll O(\Omega_z)$, і тому $O(\Omega) \approx O(\Omega_z)$, тобто циклони і антициклони можна розглядати як великомасштабні вихори з квазівертикальними осями обертання. У північній півкулі повітря у циклонах обертається проти годинникової стрілки і тому $\Omega_z > 0$, а в антициклонах – за годинниковою стрілкою ($\Omega_z < 0$); у південній півкулі обертання повітря у циклонах та антициклонах є зворотним.

Складові вихору швидкості $\vec{\Omega}$ (2.4), (2.6) характеризують обертальний рух повітря відносно земної поверхні і тому сам вихор $\vec{\Omega}$ має назву відносного. Інакше кажучи, обертальний момент створюється самою структурою тривимірного потоку повітряної маси незалежно від того, обертається Земля як планета чи ні. З цього, зокрема, випливає, що відносний вихор швидкості не обов'язково пов'язаний з коловим рухом. Так, наприклад, при прямолінійному русі вздовж осі x ($v = w = 0; u \neq 0$), коли складова швидкості u зменшується в напрямку осі y , тобто $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$,

то згідно з формулою (2.16) виникає додатний вихор Ω_z . На рисунку 2.1 представлено саме такий потік. Видно, що за рахунок зміни швидкості руху в напрямку, перпендикулярному до потоку, частинки середовища, які

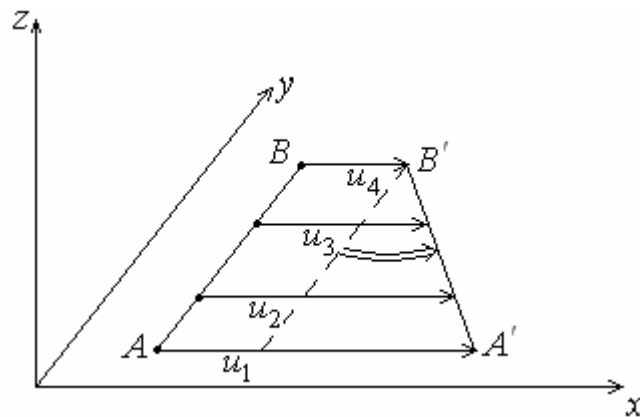


Рисунок 2.1 – Схема прямолінійного потоку, в якому $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$

розташовані на лінії AB , через одиницю часу займуть положення $A'B'$. Видно, що частинки здійснюють поворот в горизонтальній площині проти годинникової стрілки на кут, який на рисунку показано подвійною стрілкою. Оскільки проти годинникової стрілки частинки повітря рухаються в циклонах, додатний вихор називається циклонічним.

Від'ємний вихор, який описує обертальний рух за годинниковою стрілкою, називається антициклонічним.

Окрім відносного обертання, частинка у земній атмосфері бере участь у суто коловому обертанні, що пов'язане з ефектом обертання Землі як планети. За рахунок сили тяжіння повітряна частинка у цьому випадку втягується в обертальний рух Землі. Такий обертальний момент характеризується переносним чи планетарним вихором $\vec{\Omega}_E$, який дорівнює за модулем подвійній кутовій швидкості обертання Землі, тобто:

$$\vec{\Omega}_E = 2\vec{\omega}, \quad \left| \vec{\Omega}_E \right| = 2\omega. \quad (2.10)$$

У системі координат, де осі x і y лежать в горизонтальній площині, а ось z спрямована по вертикалі, проекції вектора $\vec{\omega}$ дорівнюють: $\omega_x = 0$, $\omega_y = \omega \cos \varphi$, $\omega_z = \omega \sin \varphi$, тоді складові переносного вихору $\vec{\Omega}_E$ визначаються співвідношеннями:

$$\Omega_{E,x} = 0; \quad \Omega_{E,y} = 2\omega \cos \varphi; \quad \Omega_{E,z} = 2\omega \sin \varphi. \quad (2.11)$$

Треба звернути увагу, що у формулах (2.7) і (2.10) кутові швидкості обертання повністю розрізняються за своєю природою. У виразі для відносного вихору (2.7) σ - це кутова швидкість обертання частинки, яка зумовлена тільки структурою повітряного потоку і тому не є сталою величиною, відповідно, $\vec{\Omega} \neq const$. На противагу цьому у виразі для переносного вихору (2.10) $\vec{\omega}$ залежить тільки від широти місця і в межах широтного кола ($\varphi = const$) є величиною сталою і пропорційною швидкості обертання Землі $\vec{\omega}$. Звідси, зокрема, впливає, що переносний вихор частинки змінюється тільки при її переміщенні вздовж меридіана.

Для подальшого фізичного аналізу зручно ввести також поняття абсолютного вихору

$$\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega} + \vec{\Omega}_E, \quad (2.12)$$

який є сумою відносного та переносного вихорів і характеризує обертальний рух частинки відносно інерційної системи координат, яка не пов'язана з Землею, тобто осі якої знаходяться за межами Землі.

З рівнянь (2.8), (2.11) і (2.12) випливає, що складові абсолютного вихору визначаються виразами:

$$(\Omega_a)_x = \Omega_x, \quad (\Omega_a)_y = \Omega_y + 2\omega \cos \varphi \quad (\Omega_a)_z = \Omega_z + 2\omega \sin \varphi \quad \text{або}$$

$$(\Omega_a)_x = \Omega_x, \quad (\Omega_a)_y = \Omega_y + l_1, \quad (\Omega_a)_z = \Omega_z + l_2, \quad (2.13)$$

де l_1, l_2 - параметри Коріоліса.

Рух, при якому вихор швидкості відрізняється від нуля, часто називають вихоревим рухом. Із сказаного випливає, що вихоревий рух і обертальний рух не є одне і теж.

В метеорології використовуються головним чином не дивергенція і вихор вектора швидкості (тривимірного вектора), а дивергенція і вихор швидкості вітру, тобто двовимірного вектора, який лежить в горизонтальній площині (або на ізобаричній поверхні). Це пов'язано з тим, що доцільно розглядати не вектор швидкості у цілому, а окремо його горизонтальну складову (вектор швидкості вітру) і окремо вертикальну складову.

Якщо направити ось z по вертикалі, то дивергенція швидкості вітру D_s запишеться у вигляді формули:

$$D_s = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.14)$$

Дивергенція швидкості вітру (або просто дивергенція) D_s описує швидкість відносного збільшення площі проекції даної частинки на горизонтальну площину δs при її русі

$$D_s = \frac{1}{\delta s} \frac{d\delta s}{dt} \quad (2.15)$$

Вихор швидкості вітру (або просто вихор) являє собою скалярну величину, яка дорівнює вертикальній складовій Ω_z

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2.16)$$

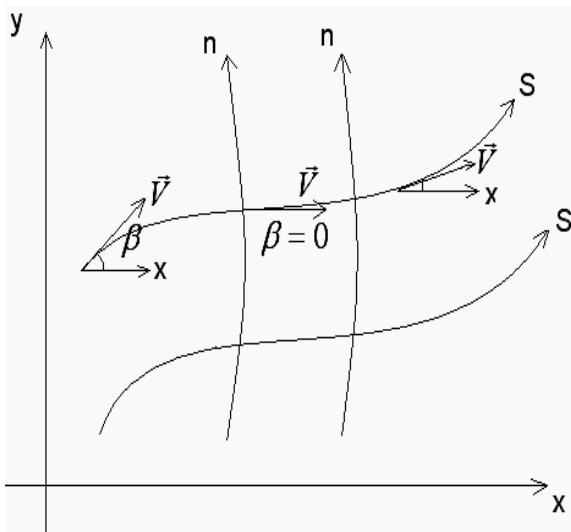
тобто подвійній миттєвій кутовій швидкості (σ_z) обертання частинки навколо вертикальної осі:

$$\Omega_z = 2\sigma_z$$

2.1.1 Натуральна система координат

Для подальшого тлумачення вказаних величин зручно перейти до так званої натуральної системи координат, яка пов'язана з самим полем швидкості.

Введемо криволінійні координати s і n . Координатну лінію s направимо вздовж швидкості вітру \vec{V} в кожному фіксованому мить часу, тоді сімейство координатних ліній $s(n = const)$ буде сімейством ліній току. Координатні лінії $n(s = const)$ в фіксований момент часу спрямуємо так, щоб у кожній точці вони були перпендикулярні до лінії току (рис.2.2)



Система координат s, n носить назву натуральної системи. Треба мати на увазі, що положення координатних ліній s, n з часом змінюється.

Кут між додатними напрямками x і s , який відраховується від x до s (проти годинникової стрілки), позначимо через β . Цей кут змінюється від точки до точки і з часом, тобто він є функцією координат s, n і часу t

$$\beta = \beta(t, s, n) \quad (2.17)$$

Рис. 2.2. Натуральна система координат

Похідна $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ являє собою швидкість повороту вітру в фіксованій точці. Похідна $\frac{\partial \beta}{\partial s}$ визначає поворот лінії току на одиницю довжини її дуги, тобто характеризує кривизну ліній току k_s :

$$k_s = \frac{\partial \beta}{\partial s}. \quad (2.18)$$

Похідна $\frac{\partial \beta}{\partial n}$ визначає поворот нормалі n до лінії току на одиницю довжини дуги цієї нормалі, тобто кривизну нормалі до лінії току k_n

$$k_n = \frac{\partial \beta}{\partial n}. \quad (2.19)$$

Можна ввести також відповідні радіуси кривизни лінії току і нормалі до неї

$$R_s = \frac{1}{k_s}; \quad R_n = \frac{1}{k_n}. \quad (2.20)$$

Похідна $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ додатна, якщо вітер в даній фіксованій точці повертає з часом вліво (проти годинникової стрілки), від'ємна, якщо повертає вправо (тобто за годинниковою стрілкою), і дорівнює нулю, якщо напрямок вітру з часом не змінюється. Кривизна, а з нею і радіус кривизни ліній току, додатна, якщо лінія току s у напрямку руху повертає вліво, тому що кут β у цьому випадку збільшується у додатному напрямку осі s ($\frac{\partial \beta}{\partial s} > 0$). Інакше кажучи, k_s і R_s додатні при циклонічній кривизні ліній току (рис. 2.3 а), від'ємні при її антициклонічній кривизні (рис.2.3 б) коли $\frac{\partial \beta}{\partial s} < 0$ і дорівнюють нулю, якщо кривизна відсутня.

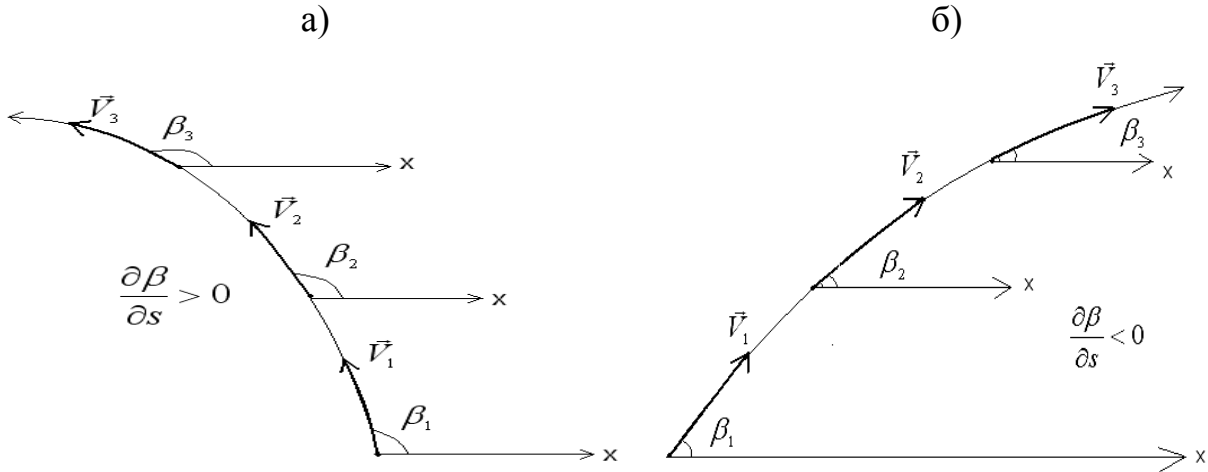


Рисунок 2.3 – Зміни кута β вздовж лінії току s при циклонічній (а) та антициклонічній (б) кривизні.

Щодо кривизни нормалі k_n до лінії току, то її зручно пов'язувати зі збіжністю чи, відповідно, розбіжністю ліній току в напрямку руху. При збіжності ліній току в напрямку руху k_n і R_n від'ємні, оскільки кут β змінюється в напрямку нормалі n від додатних значень до від'ємних і,

таким чином, $\frac{\partial \beta}{\partial n} < 0$ (рис.2.4 а); при розбіжності ліній току вздовж руху k_n і R_n додатні (рис. 2.4 б); якщо кривизна нормалі до лінії току відсутня, то $k_n = 0$, а $R_n = \infty$ (сусідні лінії току паралельні).

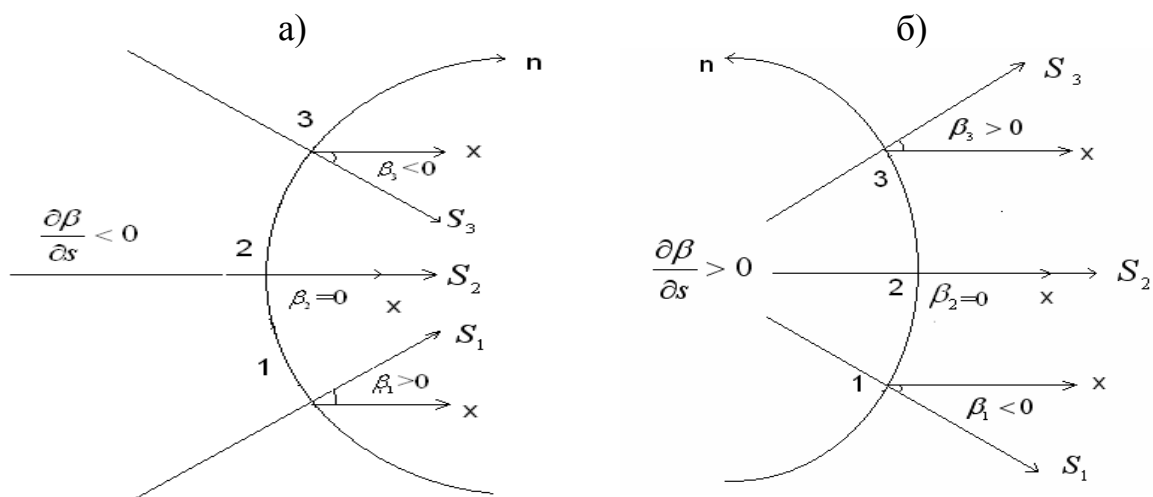


Рисунок 2.4 – Зміни кута β вздовж нормалі n до лінії току s при збіжності та розбіжності ліній току

2.1.2 Вихор та дивергенція в натуральній системі координат

Перейдемо тепер у виразах для Ω_z (2.16) і D_s (2.14) від звичайних декартових координат на площині до натуральних. Для цього звернімося до рисунку 2.5, із якого видно, що

$$u = V \cdot \cos \beta; \quad v = V \cdot \sin \beta. \quad (2.21)$$

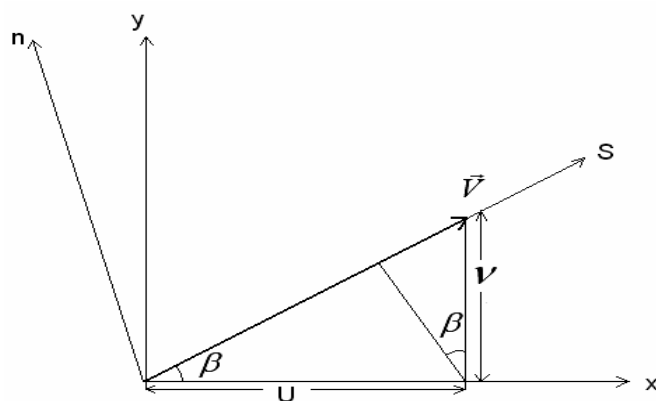


Рисунок 2.5 – Декартова і натуральна системи координат в точці зі швидкістю вітру \vec{V}

Для похідних $\frac{\partial}{\partial x}$ і $\frac{\partial}{\partial y}$ маємо

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} \quad (2.22)$$

або з урахуванням того, що

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial y} = \cos \beta; \quad \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial n}{\partial x} = \sin \beta.$$

Формули для похідних (2.22) будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \beta \frac{\partial}{\partial s} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \beta \frac{\partial}{\partial s} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial n} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Рівності (2.23) – це формули переходу від декартової системи координат до натуральної. Якщо ці формули застосувати до виразів для вихору Ω_z (2.16) і дивергенції D_s (2.14), отримаємо

$$\Omega_z = -\frac{\partial V}{\partial n} + V \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad \text{або} \quad \Omega_z = -\frac{\partial V}{\partial n} + k_s V; \quad (2.24)$$

$$D_s = \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial \beta}{\partial n} \quad \text{або} \quad D_s = \frac{\partial V}{\partial s} + k_n V \quad (2.25)$$

Формула (2.24) показує, що вихор з кінематичної точки зору визначається двома факторами – кривизною ліній току і складовою градієнта модуля швидкості в напрямку, перпендикулярному до руху, тобто зміною швидкості вітру впоперек ліній току. Величину $k_s V$ називають вихором (або завихреністю) ліній току. Вона дає додатний внесок в Ω_z при циклонічній кривизні ліній току, від'ємний – при антициклонічній, дорівнює нулю при прямолінійних лініях току. Величину $\frac{\partial V}{\partial n}$ називають вихором (завихреністю) зсуву. Вона дає додатний внесок в

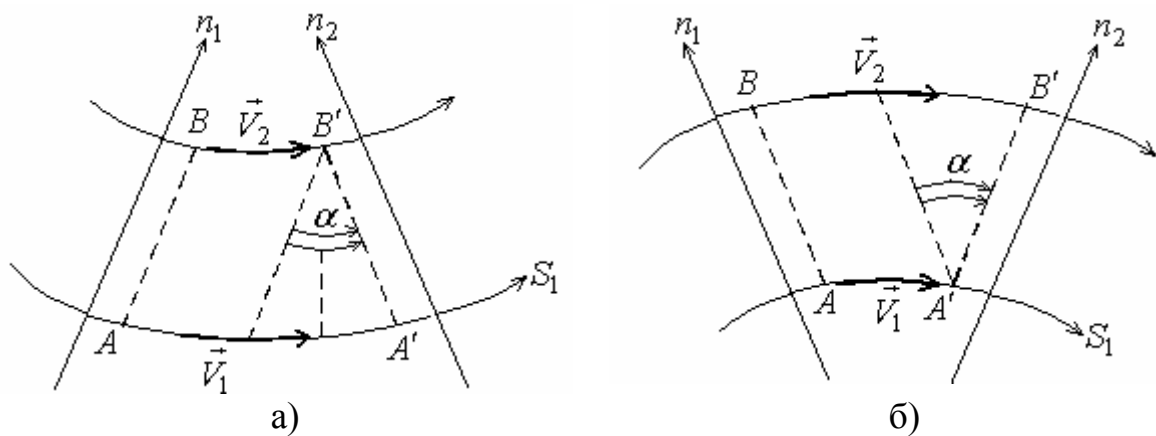
Ω_z , якщо швидкість зменшується в напрямку нормалі $n \left(\frac{\partial V}{\partial n} < 0 \right)$,

від'ємний при зростанні швидкості вздовж нормалі $\left(\frac{\partial V}{\partial n} > 0\right)$ і нульовий, якщо швидкість поперек потоку не змінюється.

Вплив зазначених вкладів на вихор Ω_z , тобто на обертання частинки при її русі ілюструється на рис. 2.6, де наведені приклади полів вітру, в яких діє тільки один із факторів, а другий дорівнює нулю. Члени правої частини формули (2.24) мають однаковий порядок величини, тому ні одним з них не можна знехтувати.

Як показано вище, при русі частинок повітря проти годинникової стрілки $k_s > 0$, а при русі за годинниковою стрілкою $k_s < 0$. Рисунки 2.6 а і 2.6 б демонструють поле ліній току, в яких вихор Ω_z обумовлений тільки їх кривизною $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) = 0$, і оскільки проекція вектора швидкості вітру \vec{V} в натуральних координатах завжди додатна, знак Ω_z визначається тільки знаком k_s . Отже, в циклонічному полі $\Omega_z > 0$ (рис. 2.6 а), а в антициклонічному $\Omega_z < 0$ (рис. 2.6 б).

На рисунках 2.6 в і 2.6 г представлені поля прямолінійних ліній току ($k_s = 0$), де швидкість руху \vec{V} змінюється поперек потоку. В цьому випадку обертальна складова руху виникає тільки за рахунок горизонтальної неоднорідності поля вітру. Якщо $\frac{\partial V}{\partial n} < 0$, то згідно з формулою (2.24) $\Omega_z > 0$, тобто виникає поворот частинок повітря проти годинникової стрілки, як в циклоні (рис. 2.6 в), а при $\frac{\partial V}{\partial n} > 0$ виникає антициклонічний поворот, що демонструє рисунок 2.6 г.



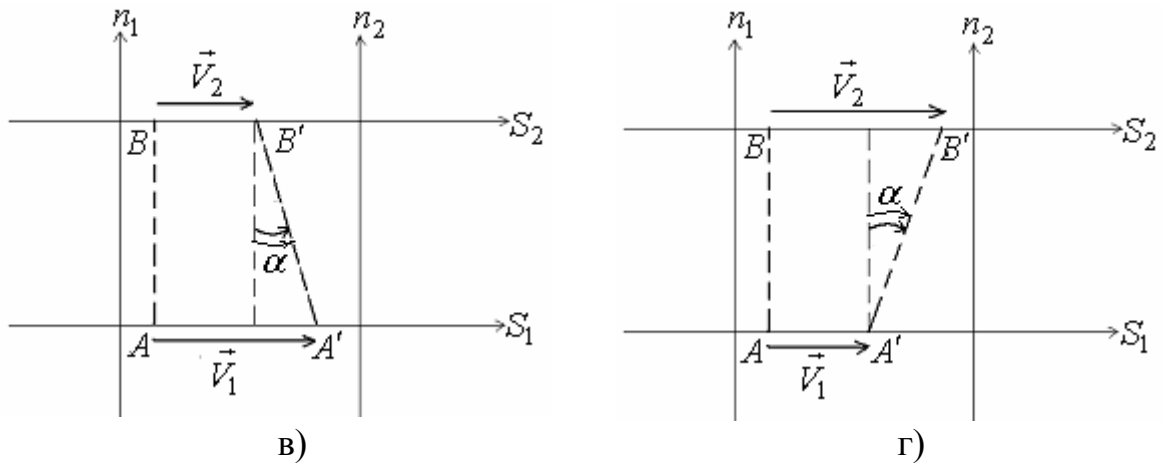


Рисунок 2.6 – Поля ліній течії до аналізу відносного вихору Ω_z .

а) $k_s > 0$; $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$; $\Omega_z > 0$;

б) $k_s < 0$; $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$; $\Omega_z < 0$;

в) $\frac{\partial V}{\partial n} < 0$; $k_s = 0$; $\Omega_z > 0$;

г) $\frac{\partial V}{\partial n} > 0$; $V k_s = 0$; $\Omega_z < 0$;

Проаналізуємо тепер формулу (2.25). Як видно з цієї формули, дивергенція з кінематичної точки зору визначається двома факторами: розбіжністю або збіжністю ліній току і складовою градієнта швидкості вітру вздовж напрямку руху. Величину $V k_n$ називають дивергенцією ліній току. Вона дає додатний внесок в величину D_s при розбіжності ліній току, від'ємний – при збіжності і нульовий - при паралельності ліній току. Величину $\frac{\partial V}{\partial s}$ називають дивергенцією модуля швидкості вітру. Вона дає додатний внесок в D_s при збільшенні швидкості уздовж потоку, від'ємний – при зменшенні і дорівнює нулю при постійній швидкості вітру уздовж лінії току s .

Вплив цих внесків на дивергенцію D_s , тобто на зміну розмірів проєкцій площин ілюструється на рисунку 2.7.

Як видно із рисунків 2.7 а і 2.7 б, дивергенція зумовлена тільки розбіжністю та збіжністю ліній току, тому що швидкість вітру не змінюється уздовж потоку. Рисунок 2.7 а показує, що площа $ABCD$ без змін ширини буде розтягуватися завдяки розбіжності ліній току і через деякий час перетвориться на площину $A'B'C'D$. Якщо лінії току збігаються, як показано на рисунку 2.7 б, то при незмінності швидкості вітру вздовж потоку площа $ABCD$ буде зменшуватися.

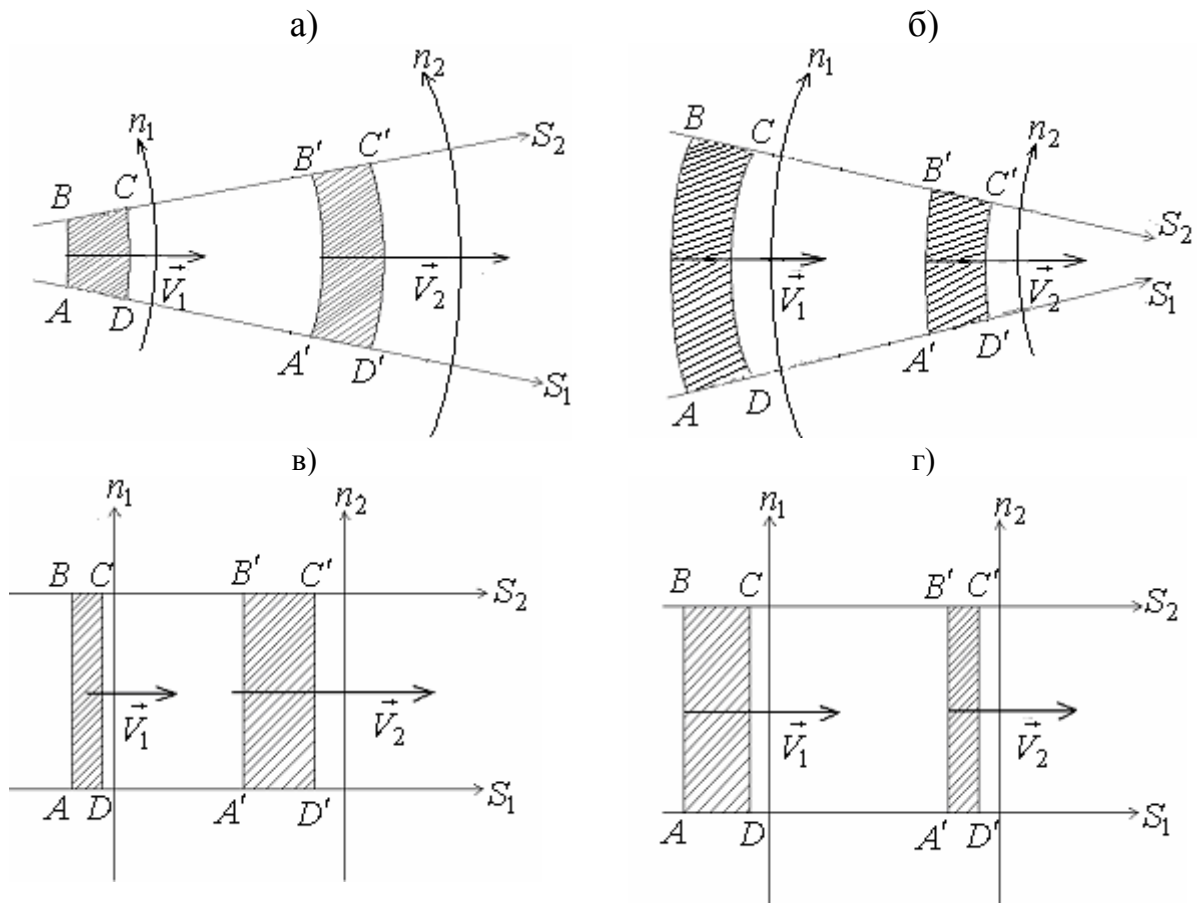
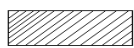


Рисунок 2.7 – Поле ліній течії до аналізу плоскої дивергенції D_s .

а) $k_n > 0$; $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$; $D_s > 0$; б) $k_n < 0$; $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$; $D_s < 0$;

в) $k_n = 0$; $\frac{\partial v}{\partial s} > 0$; $D_s > 0$ г) $k_n = 0$; $\frac{\partial v}{\partial s} < 0$; $D_s < 0$.



- площина проекції об'єму, яка складається з одних і тих же частинок повітря.

Зозглянули внесок збіжності та розбіжності ліній току в величину плоскої дивергенції D_s , проаналізуємо, яким чином на D_s впливає зміна швидкості вітру вздовж потоку, тобто величина $\frac{\partial v}{\partial s}$. Коли потік прямолінійний ($k_n = 0$), єдиний фактор, який змінює D_s , це зростання або зменшення швидкості V в напрямку потоку.

Звернемося до рисунку 2.7 в, на якому зображено поле швидкостей, де $\frac{\partial v}{\partial s} > 0$. В цьому випадку має місце збільшення площини проекції об'єму

$ABCD$, пов'язане з тим, що ліва межа (лінія AB) переміщується з меншою швидкістю, ніж права (лінія CD) і тому остання буде віддалятися з часом від лінії AB і, таким чином, площадка $ABCD$ перетвориться через деякий

час в площадку $A'B'C'D$. У випадку, коли $\frac{\partial v}{\partial s} < 0$ (рис. 2.7 г), з більшою швидкістю переміщується лінія AB , тому відстань між нею і лінією CD буде зменшуватися і з часом площа $ABCD$ стане меншою ($A'B'C'D$).

Отже ми розглянули дію кожного фактору окремо, але в атмосфері вони діють, як правило, одночасно, і тому знак D_s залежить від того, який фактор переважає. На закінчення треба підкреслити, що члени правої частини формули (2.25), практично завжди мають різні знаки і близькі за величиною, отже D_s істотно менше кожного із них. Тому неправильно стверджувати, що дивергенція визначається тільки (або головним чином) розбіжністю чи відповідно збіжністю ліній току.

2.2 Рівняння вихору та дивергенції

Основна вимога, яка ставиться до прогностичних рівнянь, полягає у тому, що похідні за часом від шуканих функцій повинні входити до числа головних за величиною членів. Якщо ця вимога виконується, процес визначення похідних за часом із прогностичних рівнянь не буде пов'язаний з великими помилками.

Розглянемо з цієї точки зору можливість прогностичного застосування рівнянь руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv; \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu. \quad (2.27)$$

Для великомасштабних атмосферних рухів у вільній атмосфері досить добре виконується геострофічне наближення, тому ліві частини рівнянь руху, а значить і прогностичні члени $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial v}{\partial t}$ малі в порівнянні з кожним членом правих частин. Цей висновок підтверджується оцінками за допомогою, наприклад, таблиць порядків метеорологічних величин та їх похідних. Оцінки показують, що $O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = O(lv) = O(lu) \approx 10^{-3}$, а порядки членів лівої частини (в тому числі і прогностичних) не перевищують 10^{-4} , тобто головні члени рівнянь горизонтального руху на порядок більші, ніж прогностичні. Таким чином, члени $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial v}{\partial t}$ можна

визначити із рівнянь (2.26), (2.27) лише як малі різниці великих величин, тобто з порівняно малою точністю. Це означає, що рівняння руху не задовольняють сформульованій вище вимозі. Проте, можна із рівнянь руху вивести нове рівняння, в якому прогностичні члени будуть одними з головних. Таким рівнянням є рівняння вихору вектора швидкості вітру, яке для стислості будемо називати рівнянням вихору. Для отримання рівняння вихору продиференціюємо перше рівняння руху (2.26) по y , а рівняння (2.27) по x і із другого результату віднімемо перший. Нове рівняння буде мати вигляд

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_p}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Omega_p}{\partial p} + D_s \Omega_p + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} \right) = -\ell D_s - \beta v, \quad (2.28)$$

або

$$\frac{d\Omega_p}{dt} = -(\Omega_p + \ell) D_s - \beta v + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} \right) \quad (2.29)$$

В рівнянні (2.28) прогностичний член $\frac{\partial \Omega_p}{\partial t}$ є одним із головних членів.

Проаналізуємо фізичний зміст рівняння вихору (2.29) шляхом розгляду найпростіших окремих випадків.

1. Нехай спочатку права частина рівняння (2.29) дорівнює нулю, тобто

$$\frac{d\Omega_p}{dt} = 0. \quad (2.30)$$

Це припущення означає, що відносний вихор Ω_p не змінюється з часом при перенесенні повітряних частинок у просторі, тобто Ω_p не змінюється уздовж траєкторії і є сталою або інваріантною величиною.

2. Нехай тепер в правій частині рівняння (2.29) відрізняється від нуля тільки член βv . Тоді маємо

$$\frac{d\Omega_p}{dt} + \beta v = 0. \quad (2.31)$$

Для пояснення фізичного змісту виразу (2.31) розглянемо індивідуальні зміни переносного вихору

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{\partial \ell}{\partial t} + u \frac{\partial \ell}{\partial x} + v \frac{\partial \ell}{\partial y} + \tau \frac{\partial \ell}{\partial p}.$$

Враховуючи незалежність ℓ від t , x і p , маємо

$$\frac{d\ell}{dt} = v \frac{\partial \ell}{\partial y} = \beta v,$$

тому можемо записати співвідношення (2.31) у вигляді

$$\frac{d\Omega_p}{dt} + \beta v = \frac{d\Omega_p}{dt} + \frac{d\ell}{dt} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d(\Omega_p + \ell)}{dt} = 0 \quad (2.32)$$

$$\text{або} \quad \frac{d\Omega_a}{dt} = 0 \quad (2.33)$$

Отже, рівняння (2.32) або (2.33) описують збереження абсолютного вихору частинках повітря, які рухаються, тобто в цьому випадку інваріантна величина – це абсолютний вихор Ω_a . На відміну від (2.30) в цьому випадку враховується зміна переносного вихору завдяки меридіональному рухові повітряної маси. При цьому, якщо меридіональна складова швидкості вітру v спрямована на північ, то в процесі руху переносний вихор зростає $\left(\frac{d\ell}{dt} > 0\right)$, а відносний вихор відповідно зменшується $\left(\frac{d\Omega_p}{dt} < 0\right)$ і тому абсолютний вихор $\Omega_a = (\Omega_p + \ell)$ залишається незмінним. І навпаки, рух з меридіональною складовою, спрямованою на південь, супроводжується зменшенням переносного вихору $\left(\frac{d\ell}{dt} < 0\right)$ і збільшенням відносного вихору $\left(\frac{d\Omega_p}{dt} > 0\right)$.

3. Розглянемо більш загальний випадок, коли із трьох членів правої частини рівняння вихору (2.29) від нуля відрізняються тільки перші два члени, а зсувні члени дорівнюють нулю.

В цьому випадку рівняння (2.29) можна записати у вигляді

$$\frac{d\Omega_a}{dt} = -\Omega_a D_s. \quad (2.34)$$

Якщо підставити в це рівняння вираз для плоскої дивергенції

$$D_s = \frac{1}{\delta s} \frac{d(\delta s)}{dt}, \text{ то отримаємо}$$

$$\frac{1}{\Omega_a} \frac{d\Omega_a}{dt} + \frac{1}{\delta s} \frac{d(\delta s)}{dt} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d(\ln \Omega_a)}{dt} + \frac{d(\ln \delta s)}{dt} = 0.$$

Нескладні перетворення дозволяють отримати $\frac{d}{dt}[\ln(\Omega_a) + \ln(\delta s)] = 0$.

Оскільки добуток логарифмів дорівнює сумі логарифмів, останню рівність можна записати так

$$\frac{d}{dt}[\ln(\Omega_a \cdot \delta s)] = 0, \text{ відкіля випливає, що}$$

$$\ln(\Omega_a \cdot \delta s) = \text{const} \quad \text{або} \quad (\Omega_a \cdot \delta s) = \text{const}. \quad (2.35)$$

Таким чином, в розглянутому випадку зберігається добуток абсолютного вихору на площину проекції повітряної частинки на ізобаричну поверхню, який і є в цьому разі інваріантом. Значимо, що цей добуток пропорційний елементарному моменту кількості обертального руху частинки відносно вертикальної осі, яка проходить через центр площини δs . Дійсно, момент кількості обертального руху пропорційний добутку кутової швидкості на квадрат лінійного розміру. Але абсолютний вихор Ω_a пропорційний кутовій швидкості, а δs - квадрату лінійного розміру. Саме тому рівняння (2.35) означає сталість елементарного моменту кількості обертального руху кожної частинки.

Третій член правої частини рівняння (2.29) на порядок менший в порівнянні з членами $\Omega_a D_s$ і βv , тому ми не будемо його розглядати з точки зору інваріантів.

На закінчення наведемо деякі приклади інваріантних величин і надамо їм визначення.

Інваріанти – це такі величини, які не змінюються при русі, тобто зберігаються уздовж траєкторії. В природі не існує цілковито інваріантних величин. Проте знаходження навіть наближених інваріантів руху має велике практичне значення. Прикладом інваріантної величини, яка широко використовується при розв'язанні задач технічної гідромеханіки, є функція

$$B = \frac{V^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho(p)}.$$

Ця функція залишається сталою уздовж лінії течії при русі нестисливої ідеальної рідини або баротропного ідеального газу (рівняння Бернуллі).

Широко використовується також властивість збереження потенціальної температури θ при адіабатичному русі.

При аналізі рівняння вихору (2.29) розглянуті три інваріантні величини: відносного вихору Ω_p , якщо всі члени правої частини (2.29) дорівнюють нулю; абсолютного вихору Ω_a , коли зміни відносного вихору в рухомих повітряних масах зумовлені фактором βv , тобто змінами параметра, Коріоліса з широтою; добуток абсолютного вихору та площини проекції частки ($\Omega_a \cdot \delta s$) отриманий при умові, що зміни абсолютного вихору зумовлені лише дивергентним фактором.

Поряд з рівнянням вихору, яке описує індивідуальні зміни вихору, в чисельних методах використовується рівняння дивергенції, яке описує індивідуальні зміни дивергенції D_s , тобто зміни її в рухомих частинках повітря.

Рівняння дивергенції отримується також із рівнянь горизонтального руху шляхом застосування до них так званої «операції дивергенції». Ця операція полягає в тому, що перше рівняння руху (2.26) диференціюється по x , а по друге (2.27) – по y і результати підсумовуються.

Наведемо це рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_s}{\partial t} + u \frac{\partial D_s}{\partial x} + v \frac{\partial D_s}{\partial y} + \tau \frac{\partial D_s}{\partial p} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p} \right) = -\nabla^2 \Phi + \ell \Omega_p - \beta u. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Оскільки сума перших чотирьох членів лівої частини являє собою індивідуальну похідну від D_s , рівняння (2.36) можна записувати так

$$\frac{dD_s}{dt} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p} \right) = -\nabla^2 \Phi + \ell \Omega_p - \beta u. \quad (2.37)$$

За допомогою теорії подібності можна показати, що головними членами в рівнянні (2.36) або (2.37) є перші два члени правої частини. З урахуванням тільки цих членів рівняння дивергенції набуває вигляду

$$\ell \Omega_p = \nabla^2 \Phi. \quad (2.38)$$

Інакше кажучи, перше наближення рівняння дивергенції дає вираз для геострофічного вихору, тобто

$$\Omega_p = \frac{1}{\ell} \nabla^2 \Phi = \Omega_g. \quad (2.39)$$

Подальші наближення рівняння дивергенції дають можливість оцінити похибки, пов'язані з припущенням геострофічності вихору, і дослідити шляхи зменшення цих похибок.

Вправи до розділу 2

2.1. Визначити дивергенцію та вихор швидкості вітру за даними, які наведені на рис. 2.8

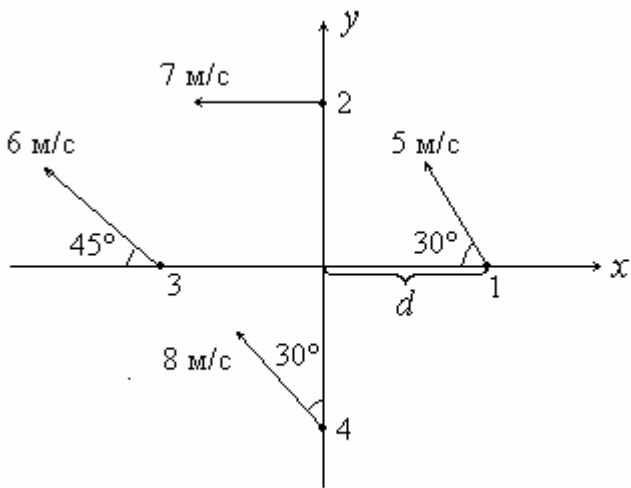


Рис 2.8

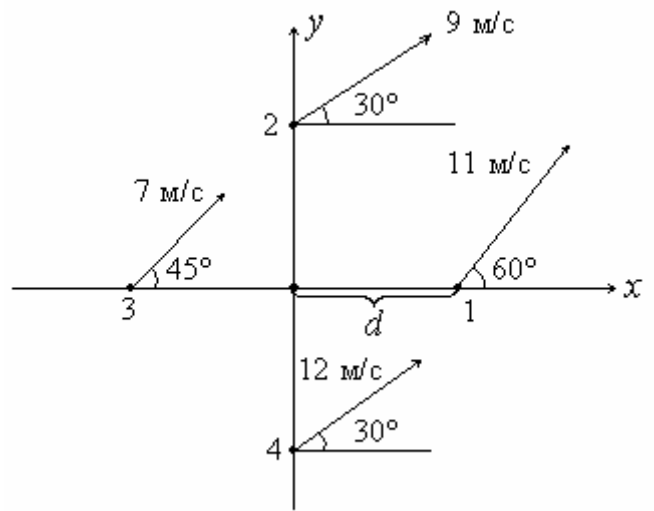


Рис 2.9

- 2.2.** Визначити дивергенцію і вихор швидкості вітру за даними, які наведені на рис.2.9, де крок сітки $d = 300$ км.
- 2.3.** Визначити дивергенцію і абсолютний вихор швидкості вітру за даними, які наведені на рис. 2.10, де $d = 250$ км, $\varphi = 50^\circ$.
- 2.4.** Визначити швидкість і напрямок вітру в точці 3 за даними, які наведені на рис. 2.11, при цьому вважати рух безвихровим і бездивергентним.

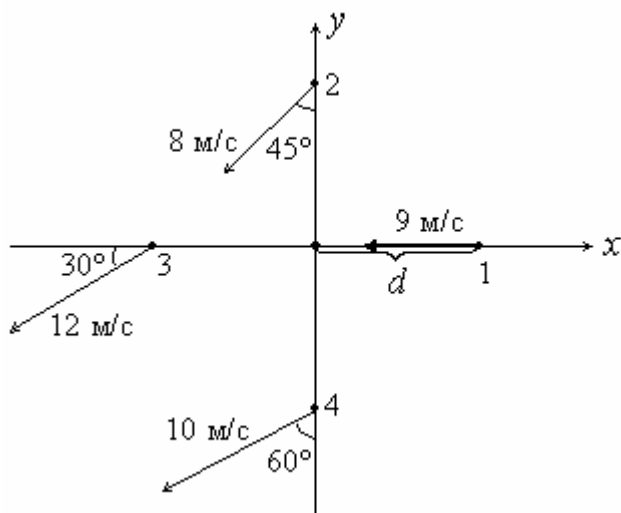


Рис 2.10

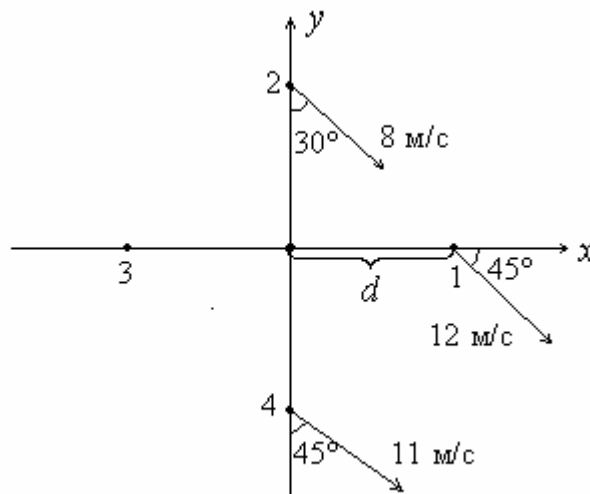


Рис 2.11

- 2.5. Визначити середні значення дивергенції і вихору швидкості вітру для центральної точки 0 області, яка наведена на рис. 2.12.
- 2.6. Визначити середні значення дивергенції і вихору швидкості вітру для центральної точки 0 області, яка наведена на рис. 2.13.

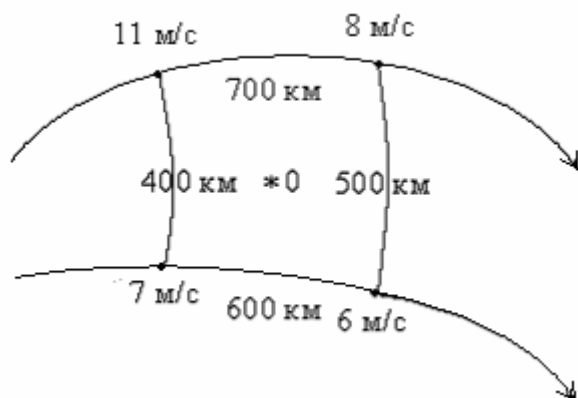


Рис 2.12

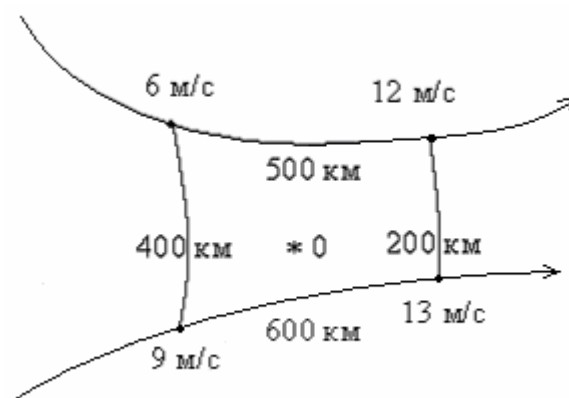


Рис 2.13

- 2.7. Радіус кривизни ліній току в циклоні дорівнює 1000 км. Швидкість вітру 12 м/с. Яким мусить бути градієнт швидкості вітру в циклоні поблизу лінії току, щоб рух був безвихровим?
- 2.8. Як і на скільки відсотків повинна мінятися швидкість вітру в напрямку, перпендикулярному до руху, щоб, незважаючи на антициклональну кривизну $\frac{1}{1000 \text{ км}}$, рух був безвихровим.

- 2.9. На скільки градусів повинні збігатися лінії току, віддалені одна від одної в середньому на 400 км, щоб незважаючи на зростання швидкості вітру, починаючи з 12 м/с, на 2 м/с на кожні 500 км уздовж потоку, рух був бездивергентним?
- 2.10. Визначити вихор швидкості в прямолінійному потоці, якщо швидкість вітру змінюється поперек потоку на 2 м/с на кожні 300 км.
- 2.11. Визначити дивергенцію швидкості вітру в полі паралельних ліній току, якщо швидкість уздовж потоку зростає на 3 м/с на кожні 500 км.
- 2.12. Визначити вихор швидкості вітру в циклоні на коловій лінії току радіусом 800 км, якщо швидкість вітру на ній і на суміжних лініях току дорівнює 9 м/с.
- 2.13. Визначити вихор швидкості вітру в антициклоні на коловій лінії току радіусом 1600 км, якщо швидкість вітру на ній дорівнює 9 м/с і лінійно зменшується до центру антициклону.
- 2.14. Вивести робочу формулу для визначення локальних змін вихору в 10^{-5}с^{-1} за добу внаслідок меридіонального градієнта параметра Коріоліса при відомій широті місця і меридіональній складовій швидкості вітру в м/с.
- 2.15. Вивести робочу формулу для локальних змін відносного вихору в 10^{-5}с^{-1} за добу внаслідок адвекції відносного вихору, якщо відомі швидкість вітру в м/с, горизонтальний градієнт вихору в $10^{-5} \text{с}^{-1} / 200 \text{ км}$ і кут між ними.
- 2.16. Оцінити зміни вихору у даній точці за добу, якщо швидкість західного вітру дорівнює 10 м/с, а відносний вихор збільшується в напрямі до північного сходу на $2 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1}$ на кожні 300 км.
- 2.17. Оцінити адвекцію відносного вихору, якщо відомо, що відстань між одиничними ізолініями вихору дорівнює 2 см, а відстань між сусідніми ізогіпсами на карті АТ₅₀₀ дорівнює 4 см. Напрямок градієнта вихору відхилено від напрямку градієнта геопотенціалу на 60° праворуч. Широта місця 50°. Масштаб карти $1:1.5 \cdot 10^7$.
- 2.18. Як повинні бути спрямовані ізолінії вихору, щоб він збільшився за добу на $6 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1}$ при західному вітрі 12 м/с і градієнті вихору – на $0.5 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1} / 100 \text{ км}$?
- 2.19. При якій швидкості західного вітру значення вихору в фіксованій точці зростає за добу на 2 одиниці, якщо горизонтальний градієнт вихору спрямований на північний захід і дорівнює $1.5 \cdot 10^{-5} \text{с}^{-1} / 100 \text{ км}$?
- 2.20. Оцінити значення вихору швидкості вітру в точці *M* через добу за даними, які наведені на рис. 2.14. Масштаб карти $1:1.5 \cdot 10^7$.

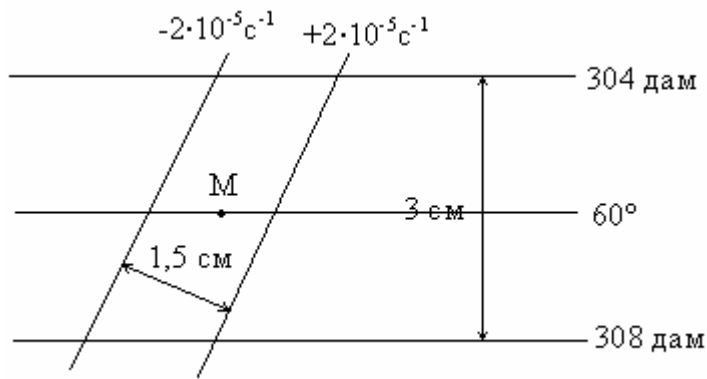


Рис.2.14.

2.21. Як зміниться за добу значення вихору в центрі циклону за рахунок зміщення його на 600 км в напрямі півдня? Широта місця 55°.

Відповіді

- 2.1** $D_s = -1.4 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$; $\Omega_p = 0.26 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.
- 2.2** $D_s = -1.6 \cdot 10^{-6} \text{ c}^{-1}$; $\Omega_p = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.
- 2.3** $D_s = -1.48 \cdot 10^{-6} \text{ c}^{-1}$; $\Omega_a = 12.6 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.
- 2.4** $10.2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$; -32°C .
- 2.5** $D_s = -0.4 \cdot 10^{-6} \text{ c}^{-1}$; $\Omega_p = -0.9 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.
- 2.6** $D_s = -0.54 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$; $\Omega_p = 0.96 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.
- 2.7** $1.2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ на 100 км.
- 2.8** 10%, швидкість зростає до центру антициклону.
- 2.9** На 7.6° .
- 2.10** $0.67 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.
- 2.11** $D_s = 0.6 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.
- 2.12** $\Omega = 1.12 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.
- 2.13** $\Omega = -1.1 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.
- 2.14** $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -0.2v \cdot \cos \varphi$.
- 2.15** $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -0.432V \frac{\partial \Omega}{\partial n} \cdot \cos \alpha$.
- 2.16** $-4.07 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ за добу.
- 2.17** $0.97 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ за добу.
- 2.18** 83° від напрямку на схід.
- 2.19** $2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.
- 2.20** $-3.3 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ за добу.
- 2.21** $0.8 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ за добу.

Розділ 3

Скінченнорізницеві методи розв'язання рівнянь гідротермодинаміки.

3.1 Метод сіток. Скінченнорізницева апроксимація похідних

Рівняння гідротермодинаміки, які використовуються для побудови прогностичних моделей атмосфери, належать до нелінійних диференціальних рівнянь. Методів точного розв'язання таких рівнянь не існує (за винятком окремих випадків), тому для їх розв'язання використовуються наближені чисельні методи, одним із яких є метод сіток.

Суть методу сіток полягає у тому, що замість неперервного простору, яким є атмосфера, вводиться дискретний простір, складений із множини точок; неперервний час також замінюється дискретним, тобто множиною точок на осі часу. Сукупності точок просторових і часових мають назву просторово – часових сіток. Положення цих точок, які називаються вузлами сітки, визначається безрозмірними координатами

$$i = \frac{x}{\delta x}, \quad j = \frac{y}{\delta y}, \quad k = \frac{z}{\delta z} \text{ (або } k = \frac{p}{\delta p}, \text{ або } k = \frac{\zeta}{\delta \zeta}), \quad s = \frac{t}{\delta t},$$

де $\delta x, \delta y, \delta z (\delta p, \delta \zeta)$ - кроки за простором (відстань між сусідніми точками на координатних осях); δt - крок за часом, тобто відстань між сусідніми вузлами на осі часу. В методі сіток поля метеорологічних величин замінюються множиною дискретних сіткових значень функцій $f_{i,j,k}^s$.

Сітки можуть розрізнятися за кількістю вузлів, розміром кроків, структурою чарунок, а також за способом розташування метеовеличин у вузлах сітки. Оскільки, відповідно до методу сіток, значення метеорологічних величин відомі в дискретних точках, похідні в диференціальних рівняннях можна розрахувати тільки за допомогою скінченних різниць.

Похідна, яка представлена як відношення скінченних різниць, називається скінченнорізницевим аналогом цієї похідної, а процедура заміни похідної скінченною різницею – скінченнорізницевою апроксимацією.

Диференціальні рівняння і межові умови, в яких похідні замінено на скінченні різниці, називають скінченнорізницевими схемами. Системи скінченнорізницевих рівнянь називають також чисельними моделями.

Сукупність диференціальних рівнянь гідротермодинаміки і межових умов, які представлені в скінченнорізницевому вигляді на множині вузлів сітки в області визначення розв'язків, являє собою замкнену систему алгебраїчних рівнянь.

Таким чином, метод сіток дозволяє крайову задачу з початковими умовами для диференціальних рівнянь звести до системи алгебраїчних рівнянь, методи розв'язання яких добре розроблені.

Для подальшого викладення питань з методу сіток зручно ввести замість *неперервних* просторових координат x, y, z (або p) загальну розмірну координату r , якій відповідає безрозмірна координата

$$q = \frac{r}{\delta r},$$

де δr – це просторовий крок сітки ($\delta x, \delta y, \delta z$ або δp) по відповідних координатах;

q – дискретні безрозмірні координати (i, j, k) по осях x, y, z (або p) відповідно.

Загальні координати r або q в принципі можна використовувати для скінченнорізницевого представлення і часових похідних, але ми будемо їх застосовувати в основному для апроксимації просторових похідних.

Відзначимо, що безрозмірні координати сусідніх вузлів сітки, які знаходяться на відстані одного кроку, відрізняються на одиницю, тому що

$$\frac{r + \delta r}{\delta r} = \frac{r}{\delta r} + \frac{\delta r}{\delta r} = q + 1 \quad \text{або}$$

$$\frac{r - \delta r}{\delta r} = \frac{r}{\delta r} - \frac{\delta r}{\delta r} = q - 1.$$

В чисельних методах найбільш часто використовуються такі формули для заміни похідних:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\delta r}(f_q - f_{q-1}), \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\delta r}(f_{q+1} - f_q), \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{2\delta r}(f_{q+1} - f_{q-1}), \quad (3.3)$$

де f - будь-яка метеорологічна величина.

В формулі (3.1), (3.2) використано однобічні різниці, а в (3.3) – центральні. Похідні, отримані за формулами (3.1) - (3.3), можна віднести до будь-якої точки на інтервалах $(q-1) \div q$, $q \div (q+1)$ і $(q-1) \div (q+1)$ відповідно, але найбільш точним буде представлення похідної методом центральних різниць для точки q (рис. 3.1).

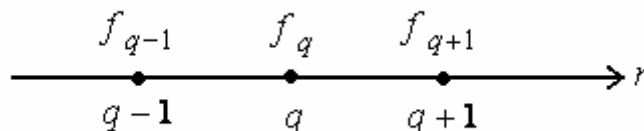


Рисунок 3.1 – Розташування вузлів сітки на осі r

Оцінка точності заміни похідних скінченними різницями виконується за допомогою розкладення функції f в ряд Тейлора навколо точки q , тобто функція f розкладається в ряд Тейлора в точці $r \pm \delta r$ для однобічної різниці і в точках $r + \delta r$, $r - \delta r$ - для центральної різниці.

Продемонструємо процедуру оцінювання точності скінченнорізницевої апроксимації (3.1). Для цього представимо функцію f у вигляді ряду Тейлора в точці $r - \delta r$ або $q-1$

$$f_{q-1} = f_q - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \delta r + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right)_q \frac{(\delta r)^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right)_q \frac{(\delta r)^3}{3!} + \dots$$

Точність або похибка скінченнорізницевої апроксимації ε являє собою різницю між похідною, яка представлена в скінченних різницях $\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^a$, і

точним її значенням $\frac{\partial f}{\partial r}$, тобто

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q^a - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q \quad \text{або} \quad \varepsilon = \frac{f_q - f_{q-1}}{\delta r} - \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q$$

Підставимо ряд для f в точці $q-1$ в вираз для ε

$$\varepsilon = \frac{1}{\delta r} [f_q - f_q + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \delta r - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \frac{(\delta r)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \frac{(\delta r)^3}{3!} - \dots] - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \quad \text{або,}$$

якщо розкрити квадратні дужки і скоротити подібні члени, отримаємо

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \frac{(\delta r)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \frac{(\delta r)^3}{6} - \dots - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q.$$

В цьому виразі похідні $\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q$ скорочуються і залишаються члени, які

містять другу, третю і так далі похідні. Оскільки порядок кожного наступного члена зменшується, найбільшим членом є перший, тобто

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \cdot \frac{\delta r}{2}$. Саме цей член і визначає точність або похибку апроксимації

однобічної (спрямованої назад) різниці (3.1). Таким же членом визначається точність і спрямованої вперед однобічної різниці (3.2).

Оцінку точності прийнято давати у вигляді порядку (степеня) просторового кроку для просторових похідних або часового кроку – для похідних за часом. Так, для однобічних різниць (3.1), (3.2) точність або похибка апроксимації $\varepsilon = O(\delta r)$ або $\varepsilon = O(\delta t)$, тобто точність дорівнює першому порядку по δr і δt . Апроксимація центральними різницями (3.3) має другий порядок точності $\varepsilon = O((\delta r)^2)$, $\varepsilon = O((\delta t)^2)$.

При обчисленні похідних за допомогою скінченнорізницевого виразу за будь-якими даними може виникати ще одна помилка, яка обумовлена похибками вимірювань метеорологічних величин або помилками розрахунків, за допомогою яких отримані вихідні дані.

Якщо похибки в значеннях функції f в точках, які використовуються при обчисленні похідних, відомі, тоді можна оцінити похибку в визначенні похідної. Так, якщо $(\delta f)_{q+1}$ і $(\delta f)_{q-1}$ - абсолютні величини похибок в значеннях f в точках $q+1$ і $q-1$, і якщо ці величини незалежні і дорівнюють δf , то для похибки у визначенні різниці отримаємо

$$\delta(f_{q+1} - f_{q-1}) = \sqrt{(\delta f)_{q+1}^2 + (\delta f)_{q-1}^2} = \delta f \sqrt{2}.$$

Тоді для помилки обчислення похідної за допомогою центральної різниці отримаємо

$$\delta\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\delta r} \delta f,$$

де δf - похибка в даних.

Таким чином, похідні, які одержані за допомогою наближених виразів і обчислені за конкретними даними, містять похибки двох типів: апроксимації і неточності самих даних.

3.2 Явні, неявні і напівнеявні скінченнорізницеві схеми

При заміні диференціальних рівнянь, в яких є похідні за часом, скінченнорізницевими аналогами розрізняють явні, неявні і напівнеявні схеми.

Явні – це такі схеми, в яких невідома (шукана) метеорологічна величина (функція) виражається через відомі величини в явному вигляді. Розглянемо цю схему на прикладі лінійного однорідного рівняння адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (3.4)$$

де f - будь-яка метеорологічна величина; c - швидкість (стала додатна величина). Віднесемо це рівняння до точки q, s , тобто до точки з координатою q за простором і до моменту часу s :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_q^s + c \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^s = 0 \quad (3.5)$$

Якщо до просторової похідної застосовувати центральну різницю, а до похідної за часом – однобічну різницю або центральну, то отримаємо такі скінченнорізницеві рівняння:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r} = 0; \quad \frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r} = 0$$

або

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \delta t \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2 \delta r};$$

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - c \delta t \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{\delta r};$$
(3.6)

Оскільки значення функції f в даний момент часу s і минулий $s-1$ відомі, то за допомогою формул (3.5), (3.6) можна обчислити функцію f в майбутній момент часу $s+1$:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\alpha}{2} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s);$$
(3.7)

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - \alpha (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s), \quad \text{де} \quad \alpha = \frac{c \delta t}{\delta r}$$
(3.8)

Неявні – це такі схеми, в яких шукана функція не може бути виражена через відомі величини явно. В таких схемах похідні за часом і решта членів диференціального рівняння відносяться до різних моментів часу. При цьому можливі різні варіанти апроксимації:

1. Похідна за часом відноситься до моменту s , а решта членів рівняння – до моменту $s+1$, тобто

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_q^s + c \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q^{s+1} = 0$$
(3.9)

Якщо застосувати для апроксимації (3.9) формулу (3.7), то отримаємо таке скінченнорізницеве рівняння:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{\alpha}{2} (f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1});$$
(3.10)

Із (3.10) видно, що невідомі величини f_q^{s+1} , f_{q+1}^{s+1} , f_{q-1}^{s+1} мають місце і в правій, і в лівій частинах рівняння, тобто шукана функція f_q^{s+1} не визначається тільки через відомі величини, як в формулах (3.7), (3.8), тому схема носить назву неявної.

2. Другий варіант апроксимації отримаємо у випадку, коли похідну за часом віднести до моменту часу s , а решту членів рівняння виразити через значення функцій в різні моменти часу, включаючи момент $s+1$. Тоді рівняння (3.4) можна записати так

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_q^s = \frac{c}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^{s+1} + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^{s-1} \right], \quad (3.11)$$

Якщо тепер в рівнянні (3.11) до похідних застосувати спосіб апроксимації (3.8), отримаємо таку скінченнорізницеву схему

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - \frac{\alpha}{2} (f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1} + f_{q+1}^{s-1} - f_{q-1}^{s-1}). \quad (3.12)$$

Явні схеми (3.7), (3.8) дозволяють сіткову функцію f_q^{s+1} визначити в один захід, тобто шляхом одноразового використання скінченнорізницевого рівняння.

За допомогою неявних схем (3.10), (3.12) не можна обчислити невідому функцію f^{s+1} в одній точці q , тому що невідомими в цих схемах є також функції f_{q+1}^{s+1} , f_{q-1}^{s+1} . Однак, якщо застосувати ці схеми для усіх внутрішніх вузлів сітки з індексами $q=1,2,\dots,n-1$ і скористатися межовими умовами у вузлах $q=0$ і $q=n$ (наприклад, у вигляді $f_0^s = f_0^0$; $f_n^s = f_n^0$), то отримаємо замкнену систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими сітковими функціями f_q^{s+1} в усіх внутрішніх вузлах $q=1,2,\dots,n-1$ (n - число вузлів сітки на осі r). Розв'язання цієї системи дозволяє обчислити шукані значення сіткової функції f^{s+1} в усіх внутрішніх вузлах сітки.

Напівнеявні – це такі схеми, в яких частина членів рівняння апроксимується явно, а інша частина членів – неявно. Як правило, неявно представляються лінійні члени рівнянь. Наприклад, рівняння

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F \quad (3.13)$$

можна представити так: $\frac{\partial f}{\partial t} = F_l + F_{нл}$, де F_l - лінійні члени, а $F_{нл}$ - нелінійні члени рівняння (3.13). За допомогою напівнеявної схеми інтегрування за часом рівняння (3.13) запишемо у загальному вигляді

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \frac{\delta t}{2} [(F_q^s)_l + (F_q^{s+1})_l] + (F_q^s)_{нл} \delta t;$$

Тобто в останньому рівнянні лінійні члени відносяться до двох моментів часу: s - теперішнього часу і $s + 1$ - майбутнього.

Наведемо приклад напівнеявної схеми для першого рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v. \quad (3.14)$$

Представимо (3.14) у вигляді (3.13), при цьому лінійний член ℓv перенесемо в ліву частину:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \ell v = F, \quad (3.15)$$

де $F = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$.

Напівнеявна схема для рівняння (3.15) буде мати вигляд

$$\frac{u_{i,j,k}^{s+1} - u_{i,j,k}^s}{\delta t} + \frac{\ell_j}{2} (v_{i,j,k}^s + v_{i,j,k}^{s+1}) = F_{i,j,k}^s. \quad (3.16)$$

Із рівняння (3.16) видно, що до двох моментів часу s та $s + 1$ віднесено тільки один лінійний член, який описує силу Коріоліса; решта членів віднесена до даного моменту s . Якщо в правій частині (3.15) для скінченнорізницевого представлення похідних використати центральні різниці, то функція F набуває вигляду:

$$F_{i,j,k}^s = -\left[u_{i,j,k}^s \frac{(u_{i+1,j,k}^s - u_{i-1,j,k}^s)}{2\delta x} + v_{i,j,k}^s \frac{(u_{i,j+1,k}^s - u_{i,j-1,k}^s)}{2\delta y} + \tau_{i,j,k}^s \frac{(u_{i,j,k+1}^s - u_{i,j,k-1}^s)}{(p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k-1})} + \frac{\Phi_{i+1,j,k}^s - \Phi_{i-1,j,k}^s}{2\delta x} \right].$$

3.3 Побудова скінченнорізницевих схем

Будь-яке неоднорідне диференціальне рівняння можна представити таким чином

$$Lf = \varphi, \quad (3.17)$$

де L - диференціальний оператор (наприклад, такий $\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$); f - невідома функція (розв'язок); φ - задана

(відома) функція, або функція, яка можна обчислити за відомими даними. Так, в першому рівнянні руху, яке відповідно до (3.17) можна записати як

$$Lu = F_u, \quad (3.18)$$

оператору L в ізобаричній системі координат відповідає оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \tau \frac{\partial}{\partial p}$; функції f відповідає зональна складова (u) швидкості вітру, а правій частині – решта членів першого рівняння руху, тобто

$$\varphi \equiv F_u = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \ell v \right). \quad (3.19)$$

Функцію F_u можна обчислити за початковими даними, тому її можна вважати відомою величиною. В формі (3.17) можна записати не тільки диференціальні рівняння в частинних похідних, але й звичайні диференціальні рівняння як лінійні, так і нелінійні. В рівняннях гідротермодинаміки незалежні величини – це часова і просторова координати. Розглянемо основні питання щодо побудови скінченнорізницевих схем на прикладі рівняння (3.17).

Будемо вважати, що оператор L включає в себе похідні за простором і часом. Просторові незалежні змінні, як і раніше, визначимо через r . З урахуванням цього функції f і φ запишуться у вигляді

$$f = f(r, t); \quad \varphi = \varphi \left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t \right].$$

Розв'язок рівняння (3.17) будемо вивчати в області змін просторових незалежних змінних D , яка окреслена межею Γ і часом D_t . Область D може бути об'ємом (тобто тривимірною областю), поверхнею (у випадку двовимірної задачі) або лінією, якщо задача одновимірна. Відповідно межі Γ для обмежених областей D (тривимірних, двовимірних, одновимірних) являють собою поверхні, лінії, точки. Розв'язок рівняння (3.17) в області D буде однозначним, якщо підпорядкувати його початковим умовам (при $t = t_0$) і умовам на межі Γ , тобто межовим умовам.

В загальному вигляді початкові та межові умови для рівняння (3.17) можна записати так:

$$\text{- початкові умови: } f(r, t) = f(r, t_0) \text{ в області } D, \quad (3.20)$$

де t_0 - початковий момент часу, $0 < r < R$;

- межові умови: $f(r,t) = F(r,t)$ на $\Gamma_r \times D_t$, (3.21)

де $F(r,t)$ - значення функції $f(r,t)$ на межах, тобто при $r=0$ та $r=R$ і $0 < t \leq T$ (рис.3.2).

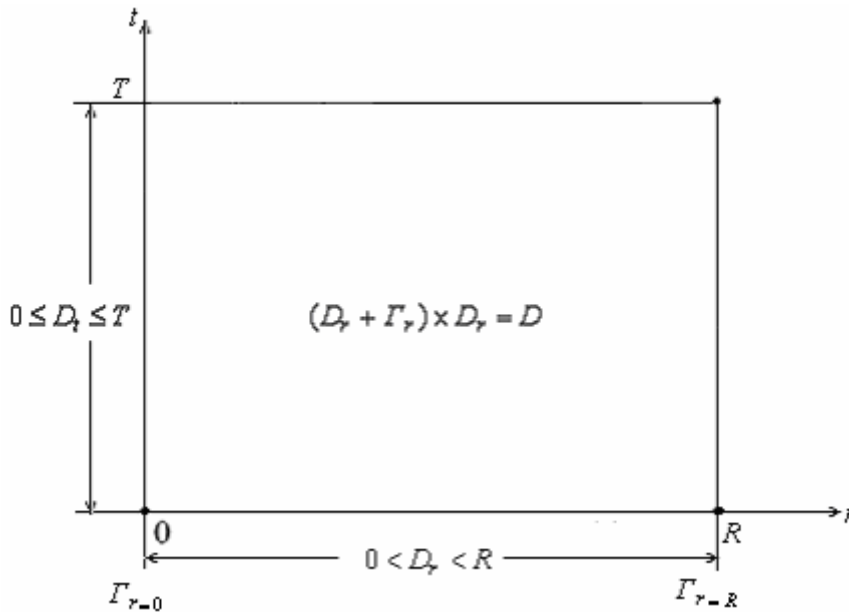


Рисунок 3.2 – Неперервна область визначення функції f в площині r, t

Важливо підкреслити, що область визначення шуканої функції $f(r,t)$ є неперервною, тобто координати r, t неперервні і можуть набирати будь-яких значень в області визначення функції $f(r,t)$, яка також є неперервною.

Задачу отримання розв'язку диференціального рівняння, яке підпорядковується початковим і межовим умовам, називають змішаною крайовою задачею або нестационарною крайовою задачею.

Наближений розв'язок диференціального рівняння, який визначається за допомогою скінченнорізницевого методу, називається чисельним, а різниця між чисельним f_q^S і точним $f(r,t)$ рішеннями – похибкою чисельного розв'язання ε

$$\varepsilon = f_q^S - f(r,t). \quad (3.22)$$

Оскільки точний розв'язок в загальному випадку невідомий, то невідома і похибка чисельного розв'язання. Однак можна оцінити точність скінченнорізницевої схеми, за допомогою якої одержаний чисельний розв'язок. Ця точність характеризується похибкою скінченнорізницевої апроксимації диференціального рівняння.

Пояснимо поняття похибки апроксимації диференціального рівняння скінченнорізницевою схемою на прикладі задачі (3.17), (3.20), (3.21). Для

того, щоб скінченнорізницевий метод застосувати до цієї задачі, необхідно неперервні координати r, t замінити дискретними, тобто ввести координати

$$q = \frac{r}{\delta r}, \quad s = \frac{t}{\delta t}.$$

Крім цього, неперервну область $(D_r + \Gamma_r) \times D_t$ зміни аргументів r і t слід замінити дискретною (сітковою) областю, тобто просторово-часовою сіткою $(D_q + \Gamma_q) \times D_s$, вузли якої є точками з координатами q і s .

На цій сітці визначаються сіткові функції f_q^s і сітковий оператор L_q .

Таким чином, після скінченнорізницевої апроксимації похідних, диференціальній задачі (3.17), (3.20), (3.21) буде відповідати скінченнорізницева задача

$$L_q f_q^s = \varphi_q^s, \quad \text{де } q = 0, 1, 2, \dots, Q; \quad (3.23)$$

$$\text{початкові умови: } f_q^s = f_q^0 \text{ в області } D_q \text{ при } s = 0, \quad q = 1, 2, \dots, Q-1; \quad (3.24)$$

межові умови: $f_q^s = f_{\Gamma_q}^s$ на межі $\Gamma_q \times D_s$, де q приймає значення 0 і Q , а $s = 1, 2, \dots, S$.

$$(3.25)$$

На рисунку 3.3 зображена сіткова область $S \times Q$, яка відповідає неперервній області на рисунку 3.2.

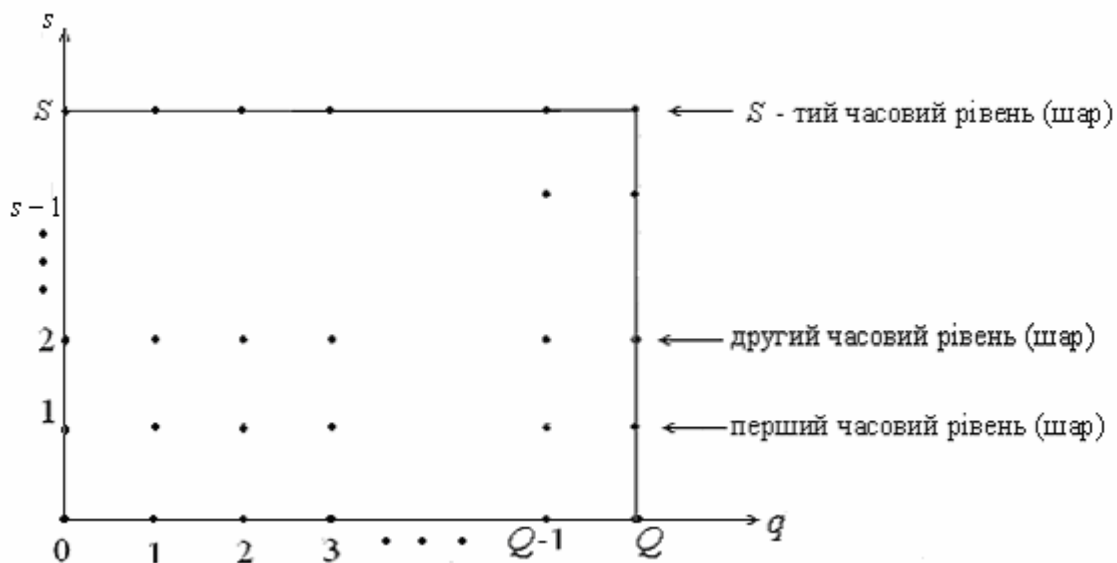


Рисунок 3.3 – Дискретна (сіткова) область визначення сіткової функції f_q^s

Розв'язок задачі (3.23) – (3.25) буде близький до точного, якщо схема (3.23) задовольняє умовам обчислювальної стійкості і збіжності.

Апроксимація диференціального рівняння скінченними різницями оцінюється так само, як і апроксимація скінченними різницями похідних, тобто за допомогою розкладання в ряд Тейлора функції $f(q\delta r, s\delta t)$ біля точки з координатами $(q+1)\delta r$ і $(s+1)\delta t$. Потім із результатів підстановки віднімається диференціальне рівняння. Отримана таким способом різниця і є помилкою апроксимації ε диференціального рівняння (3.17) скінченнорізницеvim рівнянням (3.23).

Нагадаємо, що помилка апроксимації оцінюється степенем кроків δr і δt в головних із відкинутих членів ряду Тейлора; її називають також порядком точності апроксимації або просто порядком апроксимації. Якщо, наприклад, в головних із відкинутих членів ряду Тейлора δr і δt мають перший степінь, то порядок апроксимації буде першим по δr і δt , тобто $\varepsilon = O(\delta r, \delta t)$.

Якщо скінченнорізницева схема диференціального рівняння має по крайній мірі перший порядок точності апроксимації, то така схема називається узгодженою.

3.4 Розв'язання скінченнорізницевих рівнянь методом кроків за часом

Перед тим, як пояснити суть методу кроків за часом, надамо деякі визначення, необхідні для подальшого викладення матеріалу.

Сукупність вузлів просторово-часової сітки, які лежать на площині або на прямій і відповідають фіксованому моменту часу, називаються часовим шаром або рівнем.

За кількістю часових рівнів (шарів) і точок у просторі, які використовуються в скінченнорізницевих схемах, схеми можуть бути двошаровими, тришаровими і т.ін., двоточковими, триточковими тощо.

Для області визначення розв'язку задачі (3.23)...(3.25) часові рівні являють собою сукупність точок на осі r з індексами $q=0,1,2,\dots,Q$ при фіксованому часі t , тобто індексі s . Розташування часових рівнів в двовимірній сітковій області представлено на рисунку 3.3. Видно, що нульовому часовому рівню ($s=0$) відповідають початкові умови (у вузлах $q=1,2,3,\dots,Q-1$), а вузлам $q=0$ і $q=Q$ - межові умови; часовому рівню S відповідає момент часу, на який розраховується прогноз.

Розглянемо реалізацію методу кроків за часом на прикладі лінійного неоднорідного диференціального рівняння адвекції.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = F \quad (c > 0), \quad (3.26)$$

де $f = f(r, t)$ - шукана функція (розв'язок); $F = F(r, t)$ - відома функція; c - швидкість вітру (стала додатна величина).

Початкові і межові умови запишемо у вигляді

$$f(r, t) = f(r, 0) \text{ при } t = 0, \quad 0 < r < R; \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = 0 \text{ при } r = 0 \text{ і } r = R, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.28)$$

Скінченнорізницева схема задачі (3.26) – (3.28) має вигляд

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\delta r} = F_q^s, \quad (3.29)$$

де $q = 0, 1, 2, \dots, Q$; $s = 0, 1, 2, \dots, S$;

$$f_q^s = f_q^0 \text{ при } s = 0; \quad q = 1, 2, \dots, Q-1. \quad (3.30)$$

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} = 0 \text{ при } q = 0 \text{ і } q = Q; \quad s = 0, 1, 2, \dots, S \quad (3.31)$$

За допомогою рівняння (3.29), початкових (3.30) і межових (3.31) умов можна послідовно визначити розв'язок на часових рівнях (шарах) $s = 1, 2, \dots, S$ (рис. 3.3).

$$f_q^1 = f_q^0 - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^0 - f_{q-1}^0) + \delta t F_q^0,$$

$$f_q^2 = f_q^1 - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^1 - f_{q-1}^1) + \delta t F_q^1,$$

на деякому часовому рівні (3.32)

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) + \delta t F_q^s, \text{ і т.д.}$$

.....

і, нарешті, на рівні S $f_q^S = f_q^{S-1} - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^{S-1} - f_{q-1}^{S-1}) + \delta t F_q^{S-1}$

де $q = 1, 2, \dots, Q-1$, S - час, на який розраховується прогноз.

Із виразів (3.32) видно, що чисельний розв'язок f_q^s задачі (3.29) – (3.31), який визначається на двовимірній сітці, надається набором розв'язків на одновимірних сітках з індексами точок $q = 1, 2, \dots, Q - 1$, одержаних при фіксованих індексах s . Тобто чисельний розв'язок, визначений на двовимірній сітці в площині rot , розшарувався і замінився послідовністю розв'язань f^1, f^2, \dots, f^S , які визначаються на одновимірних сітках.

В розглянутій задачі шукана сіткова функція на наступному часовому рівні $s + 1$ в точці q , тобто f_q^{s+1} , однозначно виражається через значення цієї функції на попередньому часовому рівні s у двох точках $q - 1$ і q і відому сіткову функцію F_q .

Зазначимо, що при заміні в рівнянні (3.29) просторової похідної $\frac{\partial f}{\partial r}$ однобічною різницею, спрямованою назад, в розв'язанні (3.32) використовується права межа умова (при $q = 0$), а ліва взагалі не використовується. А якщо скінченнорізницеве представлення похідної виражається через різницю, спрямовану вперед, то в (3.32), використовується лише ліва межа умова (при $q = Q$). Обидві межові умови в розв'язанні задачі (3.29) – (3.31) будуть задіяні в тому разі, коли похідна $\frac{\partial f}{\partial r}$ виражається через центральні різниці.

Процедури послідовного одержання розв'язків від попереднього часового рівня до наступного називають кроковим методом або методом кроків за часом.

Усі гідродинамічні моделі реалізуються методом кроків за часом. При цьому часові кроки не можна задавати довільно, тому що вони пов'язані з просторовими кроками співвідношенням, яке має назву критерію Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ)

$$K\Phi L = \frac{c_{\max} \delta t}{\delta r} \leq 1, \quad (3.33)$$

δt - часовий крок; δr - просторовий крок; c_{\max} - максимальна швидкість розповсюдження хвиль, які ураховуються моделлю.

Критерій (3.33) можна записати інакше

$$\delta t \leq \frac{\delta r}{c_{\max}}. \quad (3.34)$$

Наприклад, якщо $\delta r = 300 \text{ км}$, а $c_{\max} \approx 150 \frac{\text{км}}{\text{год}}$ (з такою швидкістю можуть розповсюджуватися хвилі Россбі), то відповідний цим умовам часовий крок буде дорівнювати

$$\delta t \leq \frac{300 \text{ км}}{150 \text{ км} \cdot \text{год}^{-1}} = 2 \text{ год.}$$

З фізичної точки зору часовий крок, який входить до КФЛ, мусить бути таким, щоб хвилі, які ураховані моделлю, не встигали впродовж цього кроку виходити за межі області АВ навколо точки прогнозу (рис.3.4)

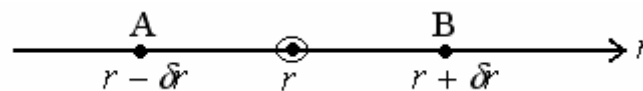


Рисунок 3.4 – Околиця АВ точки прогнозу

r - точка прогнозу; $r + \delta r$, $r - \delta r$ - сусідні вузли сітки.

Якщо за час δt (тобто за досить великий час) хвиля виходить із області АВ, то її вплив на точку прогнозу модель не ураховує. Отже, якщо модель враховує тільки повільні хвилі, наприклад, Россбі (в геострофічних моделях), то часовий крок може бути досить великим (порядку години або двох). Якщо ж модель ураховує швидкі хвилі (наприклад, гравітаційні), то крок може складати всього декілька хвилин.

3.5 Обчислювальна стійкість скінченнорізницевих схем

Скінченнорізницева схема називається стійкою, якщо її чисельний розв'язок з кожним часовим кроком наближається до точного, тобто чисельний розв'язок обмежений.

Треба відзначити, що розробка стійких скінченнорізницевих схем для нелінійних рівнянь пов'язана зі значними труднощами. Аналіз стійкості можна виконати лише для лінійних або лінеаризованих нелінійних рівнянь, або для деяких простих нелінійних рівнянь. При цьому стійкість скінченнорізницевої схеми для лінеаризованого рівняння не означає, що ця схема буде стійкою для відповідного нелінійного рівняння.

Існує декілька методів дослідження обчислювальної стійкості скінченнорізницевих схем. Наприклад, використовується прямий метод, в якому умова стійкості збігається з критерієм стійкості КФЛ. При аналізі стійкості деяких нелінійних скінченнорізницевих схем використовується енергетичний метод.

В даному розділі ми розглянемо метод Неймана, який використовується при аналізі обчислювальної стійкості скінченнорізницевих схем для лінійних диференціальних рівнянь, точні розв'язки яких відомі (наприклад, для лінійних рівнянь адвекції).

Метод Неймана передбачає підстановку точних розв'язків в скінченнорізницеву схему, а аналіз стійкості зводиться до оцінки множника переходу, який зв'язує амплітуди збурень на сусідніх часових рівнях.

Точні розв'язки лінійних рівнянь виражаються сумою частинних розв'язків, які представлені хвильовими гармоніками. Це дозволяє аналізувати стійкість для кожної гармоніки. Стійкість скінченнорізницевої схеми для кожної гармоніки означає стійкість скінченнорізницевої схеми в цілому.

Застосуємо метод Неймана для оцінки обчислювальної стійкості явної схеми лінійного рівняння адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (c = \text{const}). \quad (3.35)$$

Явну схему інтегрування представимо у вигляді

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\delta r} = 0 \quad (c > 0) \quad \text{або}$$

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s). \quad (3.36)$$

Введемо позначення $\mu = c \frac{\delta t}{\delta r}$ і перепишемо рівняння (3.36)

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \mu f_q^s + \mu f_{q-1}^s. \quad (3.37)$$

Точний розв'язок рівняння (3.35) представимо у вигляді хвильової гармоніки, тобто

$$f(r, t) = A(t) e^{ikr}. \quad (3.38)$$

Для дискретних аргументів розв'язок (3.38) має вигляд

$$f_q^s = A^s e^{ikq\delta r} \quad (3.39)$$

Підставимо (3.39) в схему (3.37), скоротимо одержаний результат на множник $e^{ikq\delta r}$, отримаємо

$$A^{s+1} = (1 - \mu + \mu e^{-ik\delta r}) A^s \quad (3.40)$$

Відповідно до формули Ейлера

$$e^{-ik\delta r} = \cos(k\delta r) - i \sin(k\delta r).$$

З урахуванням цього виразу співвідношення (3.40) набере вигляду

$$A^{s+1} = (1 - \mu + \mu \cos k\delta r - i \mu \sin k\delta r) \cdot A^s. \quad (3.41)$$

Введемо позначення: $(1 - \mu + \mu \cos k\delta r - i \mu \sin k\delta r) = \lambda$, тоді вираз (3.41) можна записати так

$$A^{s+1} = \lambda A^s \quad \text{або} \quad |A^{s+1}| = |\lambda| \cdot |A^s|, \quad (3.42)$$

λ - множник переходу (являє собою комплексне число), $|\lambda|$ - модуль λ .

Відомо, що модуль комплексного числа $a = a_r + ia_i$ дорівнює

$$|a| = \sqrt{a_r^2 + a_i^2},$$

де a_r - дійсна частина, а a_i - уявна частина величини a .

В нашому випадку $\lambda_r = (1 - \mu + \mu \cos k\delta r)$, а $\lambda_i = \mu \sin k\delta r$, тому

$$|\lambda| = \sqrt{(1 - \mu + \mu \cos k\delta r)^2 + \mu^2 \sin^2 k\delta r} = \sqrt{1 - 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos k\delta r)} \quad (3.43)$$

Аналіз (3.43) показує, що

$$\text{при } \mu \rightarrow 0 \quad (\delta t \rightarrow 0) \quad |\lambda| \rightarrow 1,$$

$$\text{при } \mu > 1 \quad |\lambda| > 1, \quad \text{а} \quad (3.44)$$

$$\text{при } 0 < \mu \leq 1 \quad |\lambda| \leq 1 \quad (3.45)$$

Із (3.42) видно, що чисельний розв'язок буде обмеженим або стійким, якщо амплітуда з часом не буде зростати, тобто множник переходу буде задовольняти умову

$$|\lambda| \leq 1$$

В точному розв'язку (3.38) амплітуда не змінюється, тому що

$$A(t) = A(0)e^{ikct}, \quad \lambda = e^{ikct} \equiv \cos(kct) + i \sin(kct), \text{ а модуль}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\cos^2(kct) + \sin^2(kct)} = 1 \quad (3.46)$$

Якщо $|\lambda| > 1$, то амплітуда чисельного розв'язку необмежено зростає в процесі інтегрування методом кроків за часом.

Таким чином, умова (3.44) означає нестійкість чисельного розв'язання. При виконанні умови (3.45) амплітуда обмежена або не змінюється; ця умова забезпечує обмеженість, тобто стійкість чисельного розв'язання.

В залежності від значення модуля множника переходу $|\lambda|$ схеми поділяються на нестійкі ($|\lambda| > 1$), нейтральні ($|\lambda| = 1$), дисипативні ($|\lambda| < 1$). Умови (3.44), (3.45) збігаються з критерієм лінійної стійкості Куранта-Фрідрікса-Леві, тому що

$$\mu = c \frac{\delta t}{\delta r}.$$

Схеми, стійкість яких залежить від величини μ (співвідношення $c \frac{\delta t}{\delta r}$), називають умовно стійкими. Схеми, стійкість яких не пов'язана з виконанням яких-небудь умов, називаються абсолютно стійкими.

Оскільки дисипативні і нейтральні схеми забезпечують обмежені розв'язання, то відповідно до визначення обчислювальної стійкості ці схеми слід віднести до стійких.

Вправи до розділу 3

3.1 Оцінити точність скінченнорізницевої апроксимації другої похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ з використанням центральної різниці для першої похідної, тобто формули (3.3)

3.2 З використанням центральних різниць записати в скінченнорізницевому вигляді рівняння вихору

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial(\Omega + \ell)}{\partial x} + v \frac{\partial(\Omega + \ell)}{\partial y} = -\ell \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

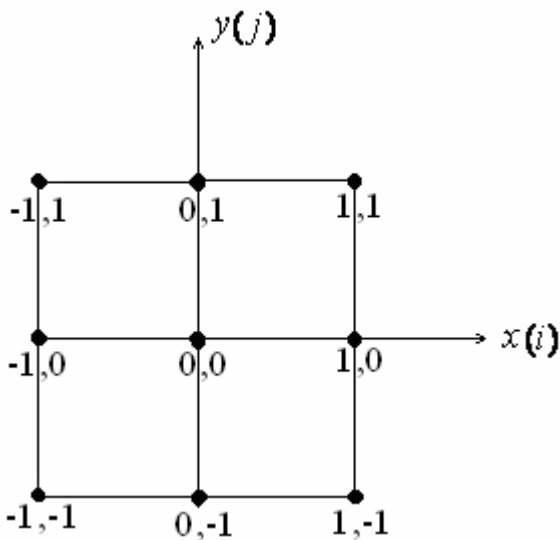
Вказівки: позначити крок за просторовими координатами через d , а часовий крок через δt . Просторові похідні представити у вигляді центральних різниць, часову похідну – через однобічну. Вважати, що ось x спрямована уздовж широтного кола.

3.3 Висота ізобаричної поверхні H виражається у вигляді такої функції горизонтальних координат і часу:

$$H(x, y, t) = a_0 - a_1 \cos(kx - \sigma t) + a_2 \cos m(y + y_0).$$

Отримати робочу формулу для розрахунку значень H (м) у вузлах просторово-часової сітки i, j, s при $d=300$ км, $\delta t=1$ год., $a_0=5300$ м, $a_1=60$ м, $a_2=60$ м, $y_0=1200$ км, $L_x=3600$ км, $L_y=4800$ км, $T=5$ діб $\left(L_x = \frac{2\pi}{k}, L_y = \frac{2\pi}{m} \right)$.

3.4 За даними вправі 3.3 розрахувати значення швидкості переміщення великомасштабної хвилі уздовж осі x .



3.5 За допомогою робочої формули, яка одержана при розв'язанні задачі 3.3, розрахувати значення H (м) у вузлах сітки, координати i, j яких вказані на рисунку.

Розрахунки в цих вузлах виконати для трьох моментів часу $s = 0, 1, 24$. Результати розрахунків нанести у вузли трьох квадратних сіток з масштабом в 1 см 200 км.

Провести ізолінії через 4 дам. Прстежити характер зміни поля H з часом.

3.6 За даними задачі 3.3 отримати вираз для похідних $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2},$

$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}, \Delta H, \frac{\partial H}{\partial t}, \Delta \frac{\partial H}{\partial t}$. Розрахувати значення цих похідних за вихідними

параметрами задачі 3.3 для точки з координатами $x = y = t = 0$.

3.7 За результатами задачі 3.5 розрахувати для вузла просторово-часової

сітки $i = j = s = 0$ приблизні значення похідних $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}, \Delta H,$

$\frac{\partial H}{\partial t}$, $\Delta \frac{\partial H}{\partial t}$ (похідні за просторовими координатами розраховувати з використанням центральних різниць, а за часом – одновимірних). Результати розрахунків наближених значень похідних порівняти з їх точними значеннями, які одержані в задачі 3.6.

3.8 Оцінити величини абсолютної (δ) і відносної (ε) похибок обчислення першої і другої похідних температури по горизонталі, які зумовлені похибками вимірювань біля земної поверхні при $d=300$ км (3.8а) і $d=600$ км (3.8б) і на висоті 5 км при $d=300$ км (3.8в) і $d=600$ км (3.8г). Похибки вимірювань температури складають: біля земної поверхні $0,4$ °С, на висоті 5 км $0,7$ °С. Під відносною похибкою ε слід розуміти відношення отриманої величини δ до характерних значень величини горизонтальних похідних, які складають

$$O\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = O\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 7 \cdot 10^{-6} \text{°С} \cdot \text{м}^{-1} \text{ и}$$

$$O\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = O\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 2 \cdot 10^{-11} \text{°С} \cdot \text{м}^{-2}$$

3.9 Записати явну схему для рівнянь горизонтального руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u.$$

Вказівки: у кожному рівнянні суму всіх членів, окрім часових похідних, позначити через F_u і F_v і одержані вирази записати в явному вигляді.

3.10 Записати неявну схему для рівнянь з вправи 3.9; використати тіж вказівки.

3.11 Записати напівнеявну схему для рівнянь з вправи 3.9.

Вказівки: лінійні члени $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ включити до функцій F_u , F_v , а лінійні члени ℓ_v і ℓ_u розглядати окремо; одержаний вираз записати в скінченнорізницевому вигляді. Тобто напівнеявну схему треба записати для рівнянь $\frac{\partial u}{\partial t} - \ell v = F_u$ і $\frac{\partial v}{\partial t} + \ell u = F_v$. Записати вирази для функцій F_u і F_v .

3.12 Рівняння, які одержані у вправі 3.9, розв'язати відносно u^{s+1} і v^{s+1} .

Вказівки: із системи двох рівнянь спочатку виключити v^{s+1} і отримати вираз для u^{s+1} , а потім виключити із системи невідому u^{s+1} і отримати вираз для v^{s+1} , тобто процедури використовуються так, як і для звичайних алгебраїчних рівнянь.

Відповіді та розв'язання

3.1 $\varepsilon = O(\delta x^2)$.

Вказівки: використати для другої похідної такий вираз

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{(\delta x)^2}(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i),$$

де d - крок сітки; f_{i+1} , f_{i-1} - значення функції f в точках $i+1, i-1$.

Точність апроксимації другої похідної ε можна обчислити як різницю між скінченнорізницевим і точним значенням $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$:

$$\varepsilon = \frac{1}{(\delta x)^2}(f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Тепер в вираз для ε треба підставити розвинення функції f в ряд Тейлора в околиці точок $i+1$ та $i-1$.

$$f_{i+1} = f_i + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i \delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i \frac{(\delta x)^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_i \frac{(\delta x)^3}{3!} + \dots$$

$$f_{i-1} = f_i - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i \delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i \frac{(\delta x)^2}{2!} - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_i \frac{(\delta x)^3}{3!} + \dots$$

потім скоротити подібні члени і записати в якості ε порядок величини δx в старшому з решти членів ряду.

3.2

$$\frac{\Omega_{i,j}^{s+1} - \Omega_{i,j}^s}{\delta t} + u_{i,j}^s \frac{(\Omega_{i+1,j}^s - \Omega_{i-1,j}^s)}{2d} + v_{i,j}^s \frac{(\Omega_{i,j+1}^s - \Omega_{i,j-1}^s)}{2d} + v_{i,j}^s \frac{(\ell_{j+1} - \ell_{j-1})}{2d} =$$

$$= -\ell_j \left[\frac{u_{i+1,j}^s - u_{i-1,j}^s}{2d} + \frac{v_{i+1,j}^s - v_{i-1,j}^s}{2d} \right].$$

3.3

$$H(i, j, s) = \{5300 - 60 \cos[0,1667\pi(i - 0,1s)] + \text{або} \\ + 60 \cos[0,125\pi(j + 4)]\};$$

$$H(i, j, s) = \{5300 - 60 \cos[30^\circ(i - 0,1s)] + \\ + 60 \cos[22,5^\circ(j + 4)]\}.$$

Розв'язання. З урахуванням того, що

$$k = \frac{2\pi}{L_x}, \quad m = \frac{2\pi}{L_y}, \quad \sigma = \frac{2\pi}{T},$$

а також виразів для безрозмірних координат

$$i = \frac{x}{\delta x}, \quad j = \frac{y}{\delta y}, \quad s = \frac{t}{\delta t},$$

вихідне рівняння вправи 3.3 набуває вигляду

$$H_{i,j,s} = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha_x} i \delta s - \frac{2\pi}{T} s \delta t\right) + a_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\alpha_y} \delta s (j + j_0)\right]$$

де $\delta s = \delta x = \delta y = 300$ км

3.4

Розв'язання. $c_x = \frac{\sigma}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{L_x}} = \frac{L_x}{T} = \frac{3,6 \cdot 10^6}{5 \cdot 0,864 \cdot 10^5} = 8,33 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$

3.5 Результати розрахунку $H_{i,j,s}$ у вузлах i, j, s розташовані на рисунку (див. нижче)

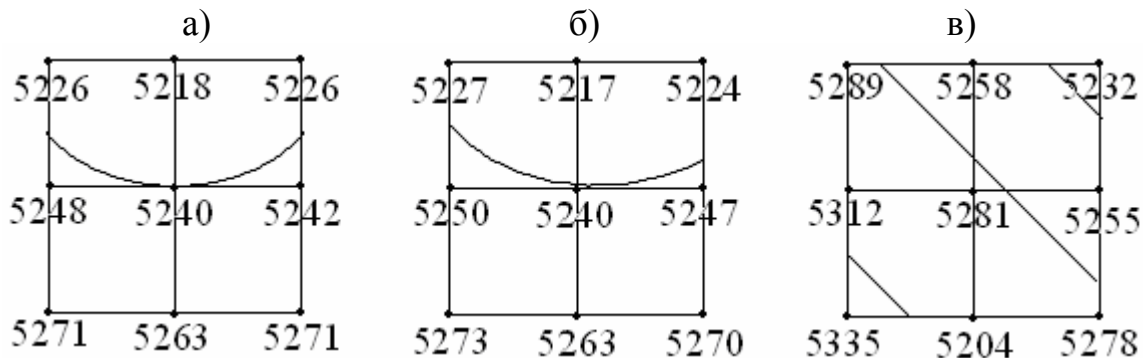


Рисунок 3.6 – Розраховані поля $H_{i,j,s}^s$ для $s = 0$ (а), $s = 1$ (б), і $s = 24$ (в)

$$\begin{aligned}
3.6 \quad \frac{\partial H}{\partial x} &= a_1 k \sin(kx - \sigma), & \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{000} &= 0, \\
\frac{\partial H}{\partial y} &= -a_2 m \sin m(y - y_0), & \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{000} &= -0.6785 \cdot 10^{-4}, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= a_1 k^2 \cos(kx - \sigma), & \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{000} &= 1.82 \cdot 10^{-10}, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= -a_2 m^2 \cos m(y - y_0), & \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)_{000} &= 0, \\
\Delta H &= a_1 k^2 \cos(kx - \sigma) - a_2 m^2 \cos m(y - y_0), \\
(\Delta H)_{000} &= 1.82 \cdot 10^{-10} \text{ М}^{-1}, \\
\frac{\partial H}{\partial t} &= -a_1 \sigma \sin(kx - \sigma), & \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{000} &= 0, \\
\Delta \frac{\partial H}{\partial t} &= a_1 k^2 \sigma \sin(kx - \sigma), & \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{000} &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.7 \quad \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial H}{\partial y} &= -0.75 \cdot 10^{-4}, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= 1.78 \cdot 10^{-10} \text{ М}^{-1}, & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= 0.111 \cdot 10^{-10} \text{ М}^{-1}, \\
\Delta H &= 1.89 \cdot 10^{-10} \text{ М}^{-1}, & \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, & \Delta \frac{\partial H}{\partial t} &= 0.
\end{aligned}$$

3.8

Варіант	$\delta \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right) \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}}$	$\varepsilon \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)$	$\delta \left(\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} \right) \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}}$	$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 T}{\partial s^2} \right)$
3.8 а	$0.187 \cdot 10^{-5}$	0.269	$0.889 \cdot 10^{-11}$	0.444
3.8 б	$0.943 \cdot 10^{-6}$	0.135	$0.222 \cdot 10^{-11}$	0.111
3.8 в	$0.330 \cdot 10^{-5}$	0.471	$0.156 \cdot 10^{-11}$	0.778
3.8 г	$0.165 \cdot 10^{-5}$	0.236	$0.339 \cdot 10^{-11}$	0.194

Примітка. Абсолютна похибка $\delta(T_1 - T_2)$ різниці двох величин T_1 і T_2 обчислюється за співвідношенням

$$\delta(T_1 - T_2) = \sqrt{\delta T_1^2 + \delta T_2^2},$$

де δT_1 і δT_2 - похибки T_1 і T_2 .

3.9, 3.10, 3.11. Ці вправи треба виконати з використанням вказівок до цих завдань.

3.12

$$u^{s+1} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\ell \delta t}{2}\right)^2\right]} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\ell \delta t}{2}\right)^2\right] u^s + \ell \delta t v^s - F_u^s \delta t - \frac{\ell (\delta t)^2}{2} F_v^s \right\};$$

$$v^{s+1} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\ell \delta t}{2}\right)^2\right]} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\ell \delta t}{2}\right)^2\right] v^s + \ell \delta t u^s - F_v^s \delta t - \frac{\ell (\delta t)^2}{2} F_u^s \right\}.$$

Розділ 4

Інтегрування рівнянь гідротермодинаміки

4.1 Схеми чисельного інтегрування за часом

Для інтегрування рівнянь прогностичних моделей атмосфери застосовуються різні схеми. Розглянемо найбільш розповсюджені з цих схем на прикладі рівняння, яке представимо в такому вигляді

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial t} = F\left[f(r,t), \frac{\partial f(r,t)}{\partial r}, r\right]$$

і яке для скорочення запису у подальшому будемо використовувати у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F. \quad (4.1)$$

1. Явна схема Ейлера.

Якщо похідну за часом $\frac{\partial f}{\partial t}$ замінити спрямованою вперед різницею, а функцію F замінити сітковою функцією F_q і віднести її до часового рівня s , тобто до поточного моменту часу, а не до минулого $s-1$, то отримаємо дворівневу схему інтегрування за часом

$$\begin{aligned} \frac{f_q^{S+1} - f_q^S}{\delta t} &= F_q^S && \text{або} \\ f_q^{S+1} &= f_q^S + \delta t F_q^S. \end{aligned} \quad (4.2)$$

2. Неявна схема Ейлера.

Якщо похідну в (4.1) апроксимувати спрямованою вперед, а функцію F замінити сітковою функцією і віднести її до майбутнього моменту часу, то одержимо неявну схему

$$f_q^{S+1} = f_q^S + \delta t F_q^{S+1} \quad (4.3)$$

Наприклад, неявна схема для лінійного одновимірного рівняння адвекції

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \text{ де } c = \text{const} > 0,$$

буде мати вигляд

$$f_q^{S+1} = f_q^S - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^{S+1} - f_{q-1}^{S+1}).$$

Оскільки в правій частині цієї схеми є невідомі сіткові функції f_q^{S+1} і f_{q-1}^{S+1} , то безпосередньо обчислити шукану функцію f^{S+1} в одній точці неможливо. Тому схему треба розписати для усіх внутрішніх вузлів сітки і межових точок, що дозволяє одержати замкнену систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими сітковими функціями f_q^{S+1} . Розв'язання цієї системи дозволяє отримати шукані значення сіткової функції f^{S+1} в усіх внутрішніх вузлах сітки.

3. Схема трапецій.

Ця схема отримується, коли в рівнянні (4.1) часову похідну замінити спрямованою вперед різницею, а функцію F замінити півсумою сіткових її значень, які відносяться до моменту часу s і $s+1$. В такому разі отримаємо неявну дворівневу схему

$$f_q^{S+1} = f_q^S + \frac{1}{2} (F_q^S + F_q^{S+1}) \delta t. \quad (4.4)$$

4. Двокрокова схема Мацуно (або схема Ейлера з перерахунком)

Ця схема складається з двох тактів

$$\begin{aligned} f_q^{(S+1)*} &= f_q^S + F_q^S \delta t, \\ f_q^{S+1} &= f_q^S + F_q^{(S+1)*} \delta t, \end{aligned} \quad (4.5)$$

де $F_q^{(S+1)*}$ розраховується з використанням прогностичної функції $f_q^{(S+1)*}$.

Двотактні або двокрокові схеми складаються із схеми „предиктора” (перша формула) і схеми „коректора” (друга формула). За допомогою схеми „предиктора” розраховуються попередні значення $f_q^{(S+1)*}$, які потім уточнюються за допомогою схеми „коректора”.

5. Двокрокова схема Хойна.

Як і схема (4.5), вона складається з двох тактів „предиктора” і „коректора”

$$\begin{aligned}
 f_q^{(S+1)*} &= f_q^S + F_q^S \delta t, \\
 f_q^{S+1} &= f_q^S + \frac{1}{2}(F_q^S + F_q^{(S+1)*})\delta t,
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

де $f_q^{(S+1)*}$ - попередній прогноз, а f_q^{S+1} - остаточний прогноз.

Рівняння (4.6) показують, що в схемі „предиктор” використовується явна схема Ейлера, а в схемі „коректор” – явна схема трапецій (явна, тому що $F_q^{(S+1)*}$ обчислюється на першому такті).

Схеми (4.5), (4.6) називаються схемами „предиктор” – „коректор”.

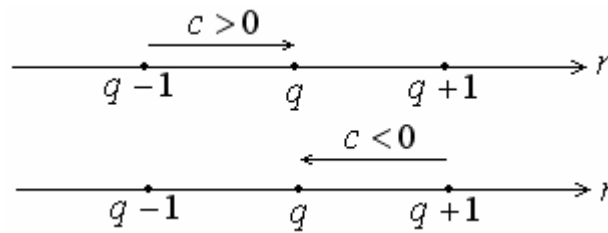
6. Явна трирівнева схема центральних різниць.

Ця схема отримується, якщо в формулі (4.1) похідну за часом замінити центральною різницею, функцію F замінити сітковою функцією F_q і віднести її до поточного моменту часу, тобто

$$f_q^{S+1} = f_q^{S-1} + 2F_q^S \delta t. \tag{4.7}$$

В чисельних методах достатньо часто використовуються схеми, які мають назву „за потоком” і „проти потоку”. Це такі схеми, в яких похідні за простором апроксимуються з урахуванням напрямку перенесення. Представимо такі схеми на прикладі одновимірного лінійного рівняння адвекції.

7. Схеми „проти потоку”.

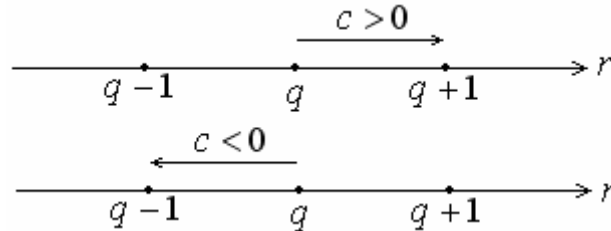


В залежності від напрямку потоку \vec{c} схеми будуть мати різний вигляд:

$$\begin{aligned}
 \text{при } c > 0 \quad f_q^{S+1} &= f_q^S - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_q^S - f_{q-1}^S); \\
 \text{при } c < 0 \quad f_q^{S+1} &= f_q^S - c \frac{\delta t}{\delta r} (f_{q+1}^S - f_q^S).
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Як видно із рисунку, в цих схемах різниці по осі r спрямовані у той бік, звідки відбувається перенос, тому такі схеми для рівнянь адвекції носять назву схем „проти потоку”.

8. Схеми за потоком.



Схеми, в яких просторова похідна береться на тій ділянці, куди спрямована швидкість вітру \vec{c} , мають вигляд

$$\text{при } c > 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_{q+1}^S - f_q^S); \quad (4.9)$$

$$\text{при } c < 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_q^S - f_{q-1}^S).$$

Зауважимо, що відповідно до фізичної суті процесів, які відбуваються при горизонтальному перенесенні повітряних мас, слід віддати перевагу схемам „проти потоку”, тому що саме значення метеорологічних величин в тому напрямку, відкілья відбувається перенос, визначають адвективні зміни.

Як видно із формул (4.8), (4.9) розглянуті схеми відносяться до явних схем.

9. Неявні схеми „проти потоку”.

Якщо в схемах (4.8) функції f в дужках віднести до майбутнього часу $S + 1$, отримаємо неявні схеми, які мають такий вигляд

$$\text{при } c > 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_q^{S+1} - f_{q-1}^{S+1}); \quad (4.10)$$

$$\text{при } c < 0 \quad f_q^{S+1} = f_q^S - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_{q+1}^{S+1} - f_q^{S+1}).$$

Як показав аналіз розглянутих схем інтегрування за часом, ці схеми відрізняються одна від одної кількістю часових рівнів (шарів), кількістю точок, які використовуються для скінченнорізницевого представлення просторових похідних, а також кількістю кроків (або тактів), які треба виконати для отримання значень шуканої функції. Наприклад, схеми „за

потокотом” (4.9) і „проти пототку” (4.8) є дворівневими (або двошаровими) двоточковими схемами. Прикладом трирівневої триточкової схеми є скінченнорізницева схема для одновимірного рівняння адвекції, яка представлена у вигляді

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\delta r} = 0 \quad \text{або}$$

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - \frac{c\delta t}{\delta r} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s). \quad (4.11)$$

Як видно із (4.11) в цьому рівнянні присутні значення f в три моменти часу: $(s-1)$ - минулий, s - поточний і $(s+1)$ – майбутній і в трьох точках (вузлах сітки): $q, q+1, q-1$. Схема (4.11) є явною, оскільки шукана функція (майбутнє її значення f_q^{s+1}) визначається через відомі величини в минулий і поточний моменти часу, тобто через функції f^s і f^{s-1} , тому f_q^{s+1} можна обчислити із (4.11) разом однією дією.

Схеми, які складаються із схем „предиктора” – „коректора” є явними, але шукана функція (f^{s+1}) обчислюється у два такти: на першому такті обчислюється попереднє значення шуканої функції $f^{(s+1)*}$, яке потім уточнюється за допомогою схеми „коректора” (другий такт). Ці схеми називаються двотактними або двошаговими. До таких схем належать схеми Мацуно, Хойна тощо. Існують також схеми з декількома коректорами; наприклад, тритактна схема має два коректора, а чотиритактна (або чотиришагова) має один предиктор і три коректори і т.д.

На закінчення наведемо точність перелічених вище схем:

- схеми Ейлера (4.2), (4.3) мають перший порядок точності по δt , тобто $\varepsilon = O(\delta t)$;
- схема трапецій (4.4) – другий порядок точності по δt ($\varepsilon = O(\delta t^2)$);
- для схеми Мацуно (4.5) $\varepsilon = O(\delta t)$;
- для схеми Хойна (4.6) $\varepsilon = O(\delta t^2)$;
- схема центральних різниць (4.7) має другий порядок точності по δt ;
- схеми (4.8), (4.9), (4.10) мають перший порядок точності по δt і δr , тобто $\varepsilon = O(\delta t, \delta r)$.

Точність схем (4.2) – (4.7) по кроку δr залежить від того, якими різницями апроксимуються просторові похідні: якщо центральними

різницями, то $\varepsilon = O(\delta r^2)$, а якщо однобічними, то точність схем дорівнює першому порядку по δr , тобто $\varepsilon = O(\delta r)$.

Вправи до розділу 4

4.1 Застосувати явну схему «за потоком» для двовимірного рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \ell v = 0.$$

Вважати, що $u > 0$, $v < 0$; похідну $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ виразити через центральну різницю.

4.2 Для рівняння з вправи 4.1 записати напівнеявну схему «за потоком».

Вказівки: вважати u і v додатними величинами; безрозмірні координати по осях x, y, t позначити через i, j і s ; для скінченнорізницевої апроксимації похідних $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ використати однобічну різницю, яка спрямована вперед.

4.3 Записати фільтроване рівняння вихору $\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \beta v = 0$

за допомогою неявної схеми «проти потоку», якщо $u > 0, v < 0$.

Використати вказівки до попередньої вправи за винятком вказівки щодо $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$.

4.4 Для одновимірного рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \text{ де } u = \text{const} > 0$$

записати явну схему Ейлера.

Вказівки: похідну за часом представити через однобічну різницю; похідні за координатою x - через спрямовані назад однобічні різниці.

4.5 Рівняння з вправи 4.4 записати за допомогою неявної схеми трапецій.

Використати вказівки з попередньої вправи.

4.6 Застосувати до одновимірного рівняння руху

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

двотактну схему Мацуно.

4.7 Записати одновимірне рівняння адиабатичності

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

за допомогою двотактної схеми Хойна.

Використати вказівки до вправи 4.4.

4.8 Записати неявну схему Ейлера для одновимірного рівняння адвекції з вправи 4.7.

Вказівки: похідну за координатою x представити через центральну різницю.

4.9 Оцінити обчислювальну стійкість явної схеми «проти потоку» для лінійного одновимірного рівняння адвекції

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

за методом Неймана.

q - масова частка водяної пари; швидкість $u = const < 0$.

4.10 Зробити теж саме для явної схеми «за потоком» для лінійного одновимірного рівняння адвекції температури

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \text{ де } u = const > 0.$$

4.11 Зробити теж саме для явної схеми Ейлера для рівняння $\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0$.

Вказівки: використати спрямовану різницю за часом і центральну різницю за простором.

4.12 Оцінити обчислювальну стійкість неявної дворівневої схеми трапецій для рівняння з вправи 4.9.

Вказівки: використати центральну різницю для похідної за простором.

4.13 Побудувати скінченнорізницеву схему для рівняння з вправи 4.10 і розрахувати майбутні значення температури на 6 годин вперед в шести вузлах на осі x , які відстоять один від одного на 200 км.

Початкові дані: При $s = 0$ значення температури у вузлах сітки такі:

Номери вузлів	0	1	2	3	4	5	6	7
Значення $T, ^\circ\text{C}$	9,3	10,7	12,8	14,0	15,1	16,3	17,5	19,0

Межові умови (МУ):

ліва МУ: при $i = 0$ $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, тобто $T = \text{const} = 9,3^\circ\text{C}$;

права МУ: при $i = 7$ $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, тобто $T = \text{const} = 19,7^\circ\text{C}$ на всіх

часових рівнях.

Вважати, що швидкість вітру $u = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Вказівки: для розрахунку часового кроку прийняти, що максимальна швидкість хвиль $C_{\text{max}} = 100 \text{ км} \cdot \text{год}^{-1}$; в скінченнорізницевій явній схемі рівняння часову і просторову похідні представити у вигляді спрямованих вперед однобічних різниць.

4.14 Виконати вправу 4.13 при умові, що в рівнянні адвекції температури часова похідна представлена однобічною різницею, спрямованою вперед, а похідна за координатою x - різницею, яка спрямована назад.

4.15 Виконати вправу 4.13 при умові, що в рівнянні адвекції температури похідна за часом представлена однобічною різницею, спрямованою вперед, а похідну за координатою x - центральною різницею.

4.16 Побудувати в загальному вигляді скінченнорізницеву схему для двовимірного рівняння адвекції температури

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Вказівки: вважати, що $u = \text{const} > 0$; $v = \text{const} > 0$. Просторові похідні представити у вигляді центральних різниць, а часову похідну – однобічною різницею; вважати, що на межах області визначення розв'язку рівняння температура повітря T не змінюється з часом.

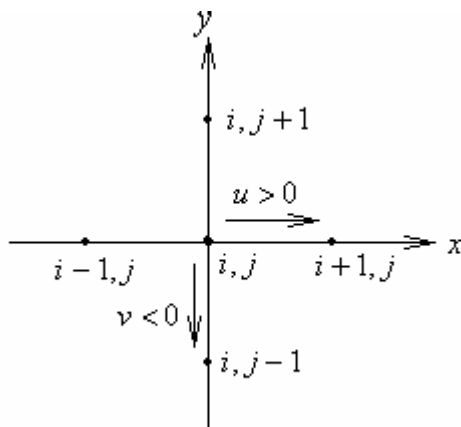
Відповіді та розв'язання

4.1 Розв'язання.

Явна схема „за потоком” стосовно до рівняння одновимірної адвекції в загальному вигляді запишеться так

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s) \text{ при } c > 0;$$

$$f_q^{s+1} = f_q^s - \frac{c \delta t}{\delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \text{ при } c < 0.$$



У двовимірному рівнянні руху спрямованими різницями представляються похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$. Для наочності наведемо рисунок, на якому зображені вузли сітки і напрямки складових вектора вітру відповідно до умови задачі.

За аналогією зі схемами для одновимірного рівняння явна схема „за потоком” у нашому випадку буде мати вигляд

$$u_{i,j}^{s+1} = u_{i,j}^s - \frac{u_{i,j}^s \cdot \delta t}{\delta x} (u_{i+1,j}^s - u_{i,j}^s) - \frac{v_{i,j}^s \delta t}{\delta y} (u_{i,j-1}^s - u_{i,j}^s) - \frac{\Phi_{i+1,j}^s - \Phi_{i-1,j}^s}{2\delta x} + \ell_{i,j} v_{i,j}^s.$$

В цій схемі роль f_q^{s+1} відіграє $u_{i,j}^{s+1}$; похідна $\frac{\partial u}{\partial x}$ в скінченнорізницевому вигляді записана відповідно до схеми $c > 0$ (в нашому випадку $u > 0$), а похідна $\frac{\partial v}{\partial y}$ - відповідно до схеми при $c < 0$ (за умовами нашої вправи $v < 0$). На відміну від швидкості c складові u і v не константи і тому вони відносяться до вузла, для якого розв'язується рівняння руху, і до поточного моменту часу, тому що схема явна.

4.2 Розв'язання

Рівняння руху представимо таким чином, щоб часова похідна і лінійний член, який описує силу Коріоліса залишились в лівій частині, а решта членів – в правій, тобто

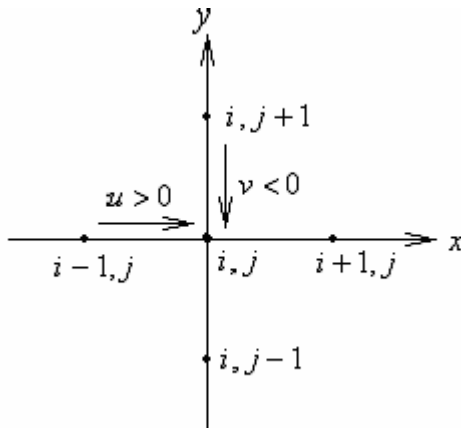
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \ell v = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right).$$

При запису напівявної схеми член ℓv треба віднести до двох моментів часу s і $s+1$, тобто рівняння руху буде мати такий вигляд

$$\frac{u_{i,j}^{s+1} - u_{i,j}^s}{\delta t} - \frac{\ell_{i,j}}{2} (v_{i,j}^s + v_{i,j}^{s+1}) = - \left[u_{i,j}^s \frac{(u_{i+1,j}^s - u_{i,j}^s)}{d} + v_{i,j}^s \frac{(u_{i,j+1}^s - u_{i,j}^s)}{d} + \frac{\Phi_{i+1,j}^s - \Phi_{i,j}^s}{2\delta x} + \ell_{i,j} v_{i,j}^s \right],$$

де d - крок сітки.

4.3 При розв'язанні цієї задачі зручно скористатися такою схемою для наочності.



Розв'язання:

$$\frac{\Omega_{i,j}^{s+1} - \Omega_{i,j}^s}{\delta t} = -u_{i,j}^s \frac{(\Omega_{i,j}^{s+1} - \Omega_{i-1,j}^{s+1})}{d} + v_{i,j}^s \frac{(\Omega_{i,j+1}^{s+1} - \Omega_{i,j}^{s+1})}{d} - \frac{\Phi_{i+1,j}^{s+1} - \Phi_{i-1,j}^{s+1}}{2d}.$$

4.4 Розв'язання.

Для запису одновимірного рівняння руху треба скористатися формулою (4.2), відповідно до якої скінченнорізницьва схема набуває вигляду

$$u_i^{s+1} = u_i^s - \frac{u \delta t}{\delta x} (u_i^s - u_{i-1}^s) - \frac{\partial t}{\partial x} (\Phi_i^s - \Phi_{i-1}^s).$$

4.5 Розв'язання.

Відповідно до рівняння (4.4), одновимірне лінійне рівняння руху запишеться за схемою трапеції таким чином

$$u_i^{s+1} = u_i^s - \frac{u \delta t}{2\delta x} [(u_i^{s+1} - u_{i-1}^{s+1}) + (u_i^s - u_{i-1}^s)] - \frac{\partial t}{\partial x} (\Phi_i - \Phi_{i-1}).$$

4.6 Розв'язання.

Двотактна схема складається з двох схем: предиктора і коректора. За допомогою першої схеми розраховуються попередні прогностичні значення метеорологічних величин, а друга схема (коректора) призначена для уточнення величин, одержаних при реалізації першої схеми. Отже, для одновимірного рівняння руху маємо

I такт $u_i^{(s+)*} = u_i^s - \frac{u_i^s \delta t}{\delta x} (u_i^s - u_{i-1}^s)$ - предиктор

де $u_i^{(s+)*}$ - попереднє прогностичне значення зональної складової вітру.

II такт $u_i^{s+1} = u_i^s - \frac{u_i^{(s+)*} \delta t}{\delta x} (u_i^{(s+)*} - u_{i-1}^{(s+)*})$ - коректор

u_i^{s+1} - уточнене (остаточне) прогностичне значення швидкості u . Ця схема явна, тому що $u_i^{(s+)*}$, $u_{i-1}^{(s+)*}$ - відомі величини, які розраховуються на

першому такті. Похідна $\frac{\partial u}{\partial x}$ тут представлена однобічною спрямованою назад різницею.

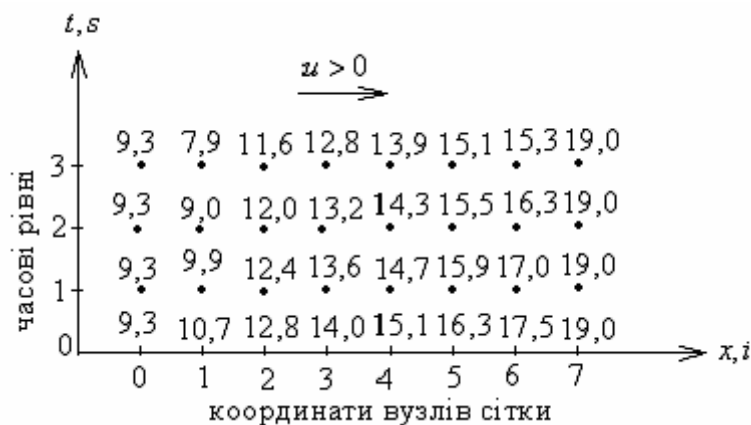
4.9 $|\lambda| = \sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos k\delta x)}$ - схема з різницями „проти потоку” при $\mu < 0$ і при $\mu > 0$ стійка, якщо виконується критерій Куранта-Фрідрікса-Леві $|c| \frac{\delta t}{\delta x} \leq 1$, тому схема називається умовно стійкою.

4.11 $|\lambda| = \sqrt{1 + \mu^2 \sin^2 k\delta x} > 1$ - схема нестійка при будь-яких значеннях μ , тому схема є абсолютно нестійкою.

$$\mathbf{4.12} \quad |\lambda| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c\delta t}{2\delta x}\right)^2 \sin^2 k\delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c\delta t}{2\delta x}\right)^2 \sin^2 k\delta x}} = 1 \text{ - схема нейтральна}$$

і абсолютно стійка при будь-яких δt і δx .

4.13



Видно, що від одного часового кроку до наступного температура знижується, що відповідає адвекції холоду. Дійсно, початкові значення температури (на нульовому часовому рівні) зростають в напрямку осі x і складова швидкості в рівнянні адвекції температури (вправа 4.10) додатна, спрямована уздовж осі x , тобто тепле повітря відступає, а холодне приходить на його місце i , таким чином, з часом температура знижується в усій внутрішній області, де координата i набуває значення 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Розділ 5

Квазігеострофічне і квазісоленоїдальне наближення і використання їх для побудови прогностичних моделей

5.1 Можливість використання геострофічного наближення в задачах гідродинамічного прогнозу

Рівняння динаміки атмосфери, в яких враховуються сили молекулярного та турбулентного тертя, описують широкий клас атмосферних рухів: від рухів синоптичного масштабу, які пов'язані з переміщенням циклонів, антициклонів, фронтів, баричних гребенів та улоговин, до рухів, які виникають за рахунок дихання рослин. Тобто ці рівняння описують атмосферні рухи просторових масштабів як більших, так і значно менших від синоптичного. Тому можна очікувати, що стосовно до рухів синоптичного масштабу деякі члени рівнянь динаміки атмосфери будуть меншими в порівнянні з головними членами цих рівнянь.

Строго кажучи, малість того чи іншого члену диференціального рівняння ще не означає, що цей член можна не враховувати. Незважаючи на малість, такі члени можуть суттєво впливати на процес розв'язання диференціального рівняння. Тому найбільш обґрунтовано виключати, тобто відфільтровувати процеси, які не мають великого значення для поставленої задачі, не з рівнянь, а з їх розв'язків. Однак такий шлях пов'язаний зі значними труднощами, тому природно, що розвиток чисельних методів прогнозу почався з побудови спрощених, так званих квазігеострофічних прогностичних схем, і перші успіхи гідродинамічних прогнозів пов'язані саме з цими схемами. І хоча в теперішній час в оперативній практиці ці моделі не використовуються, їх розглядання дуже корисне з точки зору методології побудови гідродинамічних моделей прогнозу погоди.

5.1.1 Аналіз рівнянь динаміки атмосфери за допомогою таблиць порядків

Для того, щоб з'ясувати співвідношення членів рівнянь стосовно до рухів того чи іншого масштабу, використовують результати обробки даних спостережень. Такий підхід вперше (у 1913 році) був застосований

Гессельбергом Т. і Фрідманом А., які на основі експериментальних даних склали таблиці характерних значень («порядків») основних метеорологічних величин та їх похідних (Додаток Б). В цих таблицях під порядком метеорологічної величини (чи похідної) розуміють її значення в інтервалі, який включає до себе 99% усіх можливих значень. Один відсоток відноситься до значень, які спостерігаються дуже рідко. Порядки величин записуються в одиницях системи МТС (метр, тонна, секунда) або СІ (метр, кілограм, секунда) і округляються до найближчого степеня основи 10. Якщо верхня і нижня межі інтервалу мають однаковий порядок, то записується одне значення. Наприклад, для того щоб записати порядок тиску на рівні моря P_0 в системі МТС, треба вказати інтервал зміни його на основі даних спостережень. Відомо, що найбільш низький тиск повітря пов'язаний з циклонами, де він може складати 950 гПа, а високий тиск спостерігається в антициклонах і може досягати 1050 гПа. Більш низькі та більш високі значення тиску на рівні моря спостерігаються вкрай рідко і тому не враховуються. Таким чином, інтервал змін тиску P_0 приблизно 950 – 1050 гПа. В системі МТС одиницею тиску є сантібар (сб) – величина, яка у 10 разів більша за мілібар (або гектопаскаль), тобто інтервал змін тиску в сантібарах має вигляд: 95 – 105 сб. Після округлення маємо 10^2 – 10^2 сб. Таким чином, і нижня, і верхня межа інтервалу має однаковий порядок, тому в якості порядку P_0 використовується одне значення.

$$O(P_0) \approx 10^2 \quad (5.1)$$

Буква O в цьому запису означає «порядок» (від латинського слова *order* – порядок).

В міжнародній системі СІ одиницею тиску є паскаль (Па), тому порядок тиску на рівні моря в цій системі дорівнює:

$$O(P_0) \approx 10^5 \quad (5.2)$$

Для швидкості вітру V біля поверхні землі можна взяти такий інтервал її значень $1 - 40 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Якщо записати межі інтервалу як основу 10 у відповідному степені, будемо мати:

$$10^0 - 4 \cdot 10^1;$$

у даному випадку слід вказати порядки обох меж

$$O(V) \approx 10^0 - 10^1,$$

або для більшої точності

$$O(V) \approx 10^0 - 4 \cdot 10^1.$$

У вільній атмосфері в якості порядку швидкості вітру набувають значення $10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, тобто

$$O(V) \approx 10^1. \quad (5.3)$$

Більш зручний засіб оцінки порядків метеорологічних величин та їх похідних запропонував М.І. Юдін (1950 рік). Цей засіб базується на відомостях про статистичну структуру полів метеорологічних величин. Використовуючи цей засіб, М.І. Юдін склав таблиці середніх квадратичних значень метеорологічних величин та їх похідних для рухів синоптичного масштабу (Додаток Б). Перевага цих таблиць в порівнянні з таблицями Фрідмана А. і Гессельберга Т. полягає у тому, що в них порядки вказуються не в межах інтервалу значень, а одним числом.

Наведемо приклад оцінки деяких членів першого рівняння руху за допомогою вказаних таблиць. Оцінимо адвективні члени $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $v \frac{\partial u}{\partial y}$ і

конвективний $w \frac{\partial u}{\partial z}$. Порядки перших двох членів будуть однакові, тому що порядки складових швидкості вітру однакові, тобто $O(u) = O(v)$; також дорівнюють один одному і порядки похідних за горизонтальними координатами: $O\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = O\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Використаємо для оцінок більш зручну таблицю Юдіна (Додаток Б). В таблиці знаходимо, що $O(u) = O(v) = 10^1$, а $O\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = O\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 1,2 \cdot 10^{-5}$. Таким чином, порядок адвективних членів дорівнює:

$$O\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) = O\left(v \frac{\partial u}{\partial y}\right) \approx 10 \cdot (1,2 \cdot 10^{-5}) = 1,2 \cdot 10^{-4}. \quad (5.4)$$

Аналогічно оцінюється порядок конвективного члену. З таблиці маємо, що для великомасштабних рухів $O(w) = 10^{-2}$, $O\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 10^{-3}$ або $O\left(w \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 10^{-5}$. Оцінки показують, що конвективний член на порядок (тобто в 10 разів) менший за адвективні члени. Якщо знайти в

таблиці порядки густини повітря ρ і похідної $\frac{\partial p}{\partial x}$, то можна оцінити порядок складової горизонтального градієнта тиску $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$.

$$O\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{1}{O(\rho)} \cdot O\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{1}{10^{-3}} 10^{-6} = 10^{-3}. \quad (5.5)$$

Бачимо, що сила баричного градієнта на порядок більша за адвективні члени і на два порядки перевищує конвективний член. Зазначимо, що малі члени (які на два порядки і більше, ніж на два порядки, менші в порівнянні з іншими членами) можна з достатнім ступенем точності відкидати, тобто не враховувати їх при використанні рівнянь. Члени, які на порядок менші, також можна відкидати, але це буде грубе наближення.

Оцінки, які базуються на використанні даних спостережень, дозволяють найбільш надійно виявляти співвідношення різних членів рівнянь стосовно до рухів того чи іншого масштабу. Однак при цьому не завжди вдається виявити фізичний зміст результатів оцінок і впливаючих з них можливостей відкидання малих членів. З цієї точки зору заслуговує на перевагу аналіз рівнянь за допомогою так званого методу теорії подібності.

5.1.2. Основні положення методу теорії подібності

Відповідно до цього методу вводяться характерні сталі величини – масштаби змін вихідних функцій і незалежних змінних. Наприклад, L_f - масштаб зміни метеорологічної величини f ; L_η - масштаб зміни будь-якого аргументу η (тобто x, y, z, t). При введенні масштабів повинна виконуватись така вимога: порядок величини першої похідної будь-якої функції f за будь-яким аргументом η (ета) дорівнює відношенню відповідних масштабів L_f і L_η , тобто

$$O\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \frac{L_f}{L_\eta}; \quad (5.6)$$

така ж вимога виконується і для похідних інших порядків. Наприклад,

$$O\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) = \frac{L_f}{L_\eta^2}. \quad (5.7)$$

Такий вибір масштабів можливий, строго кажучи, лише в тому випадку, коли середнє (з урахуванням знаку) значення похідної дорівнює нулю, але в дійсності це не завжди виконується. Наприклад, для похідної $\frac{\partial T}{\partial z}$, тобто для вертикального градієнта температури середнє значення температури не дорівнює нулю, а становить $6 \cdot 10^{-3} \text{ К} \cdot \text{м}^{-1}$, оскільки в тропосфері температура повітря систематично знижується з висотою. У тих випадках, коли середнє значення відповідної похідної відрізняється від нуля, питання про можливість використання оцінок типу (5.6), (5.7) розглядається окремо.

При використанні теорії подібності співвідношення різних членів рівнянь виражається безрозмірними комбінаціями масштабів, так званими критеріями подібності. На основі гіпотез, які відносяться до вибору масштабів, можна отримати значення критеріїв подібності і зробити висновки щодо співвідношення членів рівнянь стосовно до тих чи інших масштабів атмосферних рухів.

Сформулюємо деякі гіпотези відносно атмосферних рухів синоптичного масштабу, які в першу чергу цікавлять нас з точки зору гідродинамічного прогнозу погоди.

1. Зміни складових швидкості вітру на таких відстанях і за такий час, які характерні для процесів синоптичного масштабу, мають такий порядок, що і самі складові швидкості, тобто

$$O(U) = O(V) = L_v, \quad (5.8)$$

$$O(W) = L_w, \quad (5.9)$$

де L_v - масштаб швидкості вітру, а L_w - масштаб вертикальної швидкості. Дійсно, відомо, що за добу (це характерний час для рухів синоптичного масштабу) або на відстані декількох сотен кілометрів (характерний горизонтальний масштаб) швидкість вітру у вільній атмосфері цілком може змінюватися на $10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ і таким же є характерне значення або порядок цієї швидкості.

2. Атмосферні збурення синоптичного масштабу переміщуються приблизно зі швидкістю вітру. З цього випливає, що величини $\frac{\partial f}{\partial t}$ і $u \frac{\partial f}{\partial x}$

або $v \frac{\partial f}{\partial y}$ мають однаковий порядок, тобто

$$\frac{L_f}{L_t} = L_v \frac{L_f}{L_s} \quad \text{або} \quad \frac{L_v L_t}{L_s} = 1 \quad (5.10)$$

В (5.10) L_t - масштаб часу, L_s - масштаб горизонтальної відстані або горизонтальний масштаб. Співвідношення (5.10) називається числом Струхалія (Sh). Для рухів синоптичного масштабу число Sh дорівнює одиниці.

$$\frac{L_v L_t}{L_s} = Sh = 1 \quad (5.11)$$

3. Часовий масштаб L_t розглядуваних рухів суттєво більший в порівнянні з величиною $\frac{1}{\ell}$, яка для помірних широт дорівнює приблизно трьом годинам.

$$L_t \gg \frac{1}{\ell} \quad \text{або} \quad \frac{1}{\ell L_t} = Ki \ll 1, \quad (5.12)$$

де $\ell = 2\omega \sin \varphi$ - параметр Кориоліса. Критерій (5.12) вперше був введений І.А. Кібелем і називається числом Кібеля. Для макромасштабних рухів позаекваторіальних широт число Кібеля коливається коло значення 0.1. Число $Ki \approx 0.1$ обмежує інтервал часових і просторових масштабів знизу і, таким чином, відділяє рухи синоптичного масштабу від мезомасштабних рухів.

4. Просторовий (горизонтальний) масштаб L_s великомасштабних рухів суттєво менший за планетарний масштаб, тобто менший від радіуса Землі ($R_3 \approx 6380$ км). Тому критерій B , який являє собою співвідношення величин L_s і R_3 , є малим. Для помірних широт

$$B = \frac{\beta L_s}{\ell} = \frac{L_s}{R_3} \text{ctg} \varphi \approx 0.1 \quad (5.13)$$

Значення числа B близько 0.1 обмежує просторовий і часовий масштаби рухів зверху, відділяючи тим самим макромасштабні рухи від рухів планетарного масштабу.

Зауважимо, що припущення про малість чисел Ki і B не відноситься до екваторіальних широт.

При аналізі співвідношення різних членів рівнянь необхідно мати на увазі таке:

- сума двох членів, порядки яких різні, має порядок більшого члена;
- порядок двох (або декількох) членів, порядки яких однакові, необов'язково співпадає з порядком величини складових, а може бути і менше. Це відбувається у тому випадку, якщо при складанні скорочуються головні члени складових. Наприклад, при оцінці порядку дивергенції;
- в будь-якому рівнянні не мусить бути менше двох головних членів, тому що рівняння з одним головним членом не може виконуватися;
- якщо в рівнянні лише два члени, то їх порядки, очевидно, однакові, що впливає із самого рівняння; у такому разі питання про можливість відкидання одного із членів є абсурдним. Це, зокрема, відноситься до рівняння стану

$$\rho = \frac{P_0 \zeta}{R T}$$

і рівняння статки

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}.$$

5.1.3 Оцінка рівнянь динаміки атмосфери за допомогою методу теорії подібності

Розглянемо рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Оскільки повні похідні $\frac{du}{dt}$ і $\frac{dv}{dt}$ складаються з декількох членів і включають до себе похідні $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial v}{\partial t}$, то відповідно до сказаного вище, порядок лівих частин рівнянь (5.14) не перевищує порядок локальних похідних, тобто

$$\begin{aligned}
O\left(\frac{du}{dt}\right) &\leq O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{L_v}{L_t}, \text{ аналогічно} \\
O\left(\frac{dv}{dt}\right) &\leq O\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{L_v}{L_t} \text{ або} \\
O\left(\frac{du}{dt}\right) &= O\left(\frac{dv}{dt}\right) \leq \frac{L_v}{L_t}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Порядок останніх членів рівнянь (5.14) відповідно до (5.2) дорівнює

$$O(\ell v) = O(\ell u) = \ell L_v, \tag{5.16}$$

де порядок параметра Коріоліса дорівнює ℓ , тобто $O(\ell) = \ell$.

Знайдемо тепер порядок співвідношення лівих частин рівнянь (5.14) до одного із членів правих

$$O\left(\frac{\frac{du}{dt}}{\ell v}\right) = O\left(\frac{\frac{dv}{dt}}{\ell u}\right) = \frac{O\left(\frac{du}{dt}\right)}{O(\ell v)} = \frac{O\left(\frac{dv}{dt}\right)}{O(\ell u)} \leq \frac{1}{\ell L_t}. \tag{5.17}$$

Але $\frac{1}{\ell L_t} = Ki$ - число Кібеля, яке для рухів синоптичного масштабу

дорівнює приблизно $\frac{1}{10}$. Можна зробити висновок: ліві частини рівнянь (5.14) для розглядуваних рухів в 10 разів (тобто на порядок) менші членів, які описують проекції сили Коріоліса. Оскільки будь-яке рівняння мусить містити не менше двох головних членів (інакше рівняння не буде виконуватись), то члени, які описують в рівняннях (5.14) проекції сили баричного градієнта і Коріоліса мають однаковий порядок:

$$\begin{aligned}
O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) &= O(\ell v) = \ell L_v, \\
O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) &= O(\ell u) = \ell L_v \text{ або} \\
O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) &= O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \ell L_v
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Якщо похідні $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ і $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ виразити через масштаби, то вираз (5.18)

можна записати у вигляді

$$\frac{L_{\delta\Phi}}{L_s} = \ell L_v \quad (5.19)$$

В (5.19) масштаб змін геопотенціалу позначений не L_Φ , а $L_{\delta\Phi}$, щоб підкреслити, що мова йде не про абсолютні значення геопотенціалу, а про його характерні зміни, які значно менші. Наприклад, геопотенціал поверхні 500 гПа становить в середньому близько $5.5 \cdot 10^3$ гп.м, а його характерні зміни складають лише десятки геопотенціальних метрів. Винятком може бути лише поверхня 1000 гПа, геопотенціал якої і його зміни можуть мати однаковий порядок.

Малість відношень (5.17) означає близькість реального вітру до геострофічного для крупномасштабних рухів, тому що прискорення мале в порівнянні з діючими силами (сили баричного градієнта і Коріоліса знаходяться приблизно в стані рівноваги).

Якщо записати

$$U = U_g + U'; \quad V = V_g + V', \quad (5.20)$$

де U', V' - складові агеострофічних відхилень, то із (5.14) і (5.20) отримаємо з урахованням геострофічних співвідношень

$$U' = -\frac{1}{\ell} \frac{dv}{dt}; \quad V' = \frac{1}{\ell} \frac{du}{dt}, \quad (5.21)$$

відкіля

$L_{v'} = \frac{1}{\ell} \frac{L_v}{L_t}$ або, якщо розділити обидві частини цієї рівності на L_v , отримаємо

$$\frac{L_{v'}}{L_v} = \frac{1}{\ell L_t}, \text{ або } \frac{L_{v'}}{L_v} = Ki = \frac{1}{10}, \quad (5.22)$$

тобто агеострофічні відхилення на порядок менші за реальний вітер, а отже, і за геострофічний.

Оцінімо тепер за допомогою теорії подібності такі важливі кінематичні характеристики, як відносний вихор вектора швидкості вітру і двовимірна дивергенція.

Оскільки вітер у вільній атмосфері близький до геострофічного вітру, при математичному описі великомасштабних процесів, які відбуваються в шарах вище граничного шару атмосфери, реальний (фактичний) вітер можна замінити геострофічним. Заміна реального вітру геострофічним в рівняннях гідротермодинаміки називається геострофічним наближенням.

Розглянемо питання про можливість використання геострофічного наближення стосовно до плоскої (двовимірної) дивергенції.

$$D_s = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.23)$$

Підставимо вираз (5.20) в (5.23) і отримаємо

$$D_s = \frac{\partial(U_g + U')}{\partial x} + \frac{\partial(V_g + V')}{\partial y} = \left(\frac{\partial U_g}{\partial x} + \frac{\partial V_g}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} \right).$$

Якщо підставити в цей вираз геострофічні співвідношення

$$U_g = -\frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad V_g = \frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (5.24)$$

то він набуває вигляду

$$D_s = \left(\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} \right) + \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial \ell}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial \ell}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (5.25)$$

В системі координат, де вісь x спрямована вздовж кола широти, а вісь y - по меридіану, похідна $\frac{\partial \ell}{\partial x}$ буде дорівнювати нулю, а похідна $\frac{\partial \ell}{\partial y}$ описує зміни параметра Коріоліса з широтою і являє собою так званий параметр Россбі β . З урахуванням сказаного формула (5.25) буде мати вигляд

$$D_s = D'_s - \frac{\beta}{\ell^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2.26)$$

де D'_s - дивергенція агеострофічних відхилень.

Відповідно до (5.22) похідні $\frac{\partial U'}{\partial x}$ і $\frac{\partial V'}{\partial y}$ на порядок менші ніж $\frac{\partial U}{\partial x}$ і $\frac{\partial V}{\partial y}$, так що D'_s також на порядок (тобто в 10 разів) менша від кожного із членів $\frac{\partial U}{\partial x}$ і $\frac{\partial V}{\partial y}$. Оцінимо тепер порядок відношення останнього члена в формулі (5.26) до члена $\frac{\partial U}{\partial x}$ (або $\frac{\partial V}{\partial y}$)

$$\frac{O\left(\frac{\beta}{\ell^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}{O\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \frac{O\left(\frac{\beta}{\ell^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}{O\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} = \frac{\beta \ell L_v}{\ell^2 \frac{L_v}{L_s}}$$

Після скорочення отримаємо

$$\frac{O\left(\frac{\beta}{\ell^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}{O\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)} = \frac{\beta L_s}{\ell} = B \approx \frac{1}{10} \quad (5.27)$$

Оцінки показують, що дивергенція D_s на порядок менша від кожного із членів $\frac{\partial U}{\partial x}$ і $\frac{\partial V}{\partial y}$, при цьому агеострофічна дивергенція D'_s і геострофічна дивергенція $\frac{\beta}{\ell^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ дають внесок однакового порядку в величину D_s , тобто порядку числа Кібеля.

Таким чином, дивергенція D_s є мала різниця великих величин $\left(\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ і тому геострофічне наближення неможливо використовувати для її визначення.

Зробимо аналогічні оцінки для вертикальної складової вектора вихору, тобто для відносного вихору швидкості вітру.

$$\Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.28)$$

В результаті заміни складових реального вітру на співвідношення (5.20) і (5.24) формула (5.28) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \frac{\partial}{\partial x}(V_g + V') - \frac{\partial}{\partial y}(U_g + U') = \frac{1}{\ell}\Delta\Phi - \frac{\beta}{\ell^2}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) \text{ або} \\ \Omega_p &= \frac{1}{\ell}\Delta\Phi - \frac{\beta}{\ell^2}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \Omega' \end{aligned} \quad (5.29)$$

В формулі (5.28) враховано, що вісь x спрямована по дотичній до широтного кола, тому $\frac{\partial\ell}{\partial x} = 0$; Ω' - агеострофічний вихор, який має порядок числа Кібеля ($\Omega' = O(Ki)$), що впливає із (5.22). Знайдемо порядок відношення двох інших членів правої частини формули (5.29)

$$O\left(\frac{\frac{\beta}{\ell^2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\frac{1}{\ell}\Delta\Phi}\right) = \frac{O\left(\frac{\beta}{\ell^2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{O\left(\frac{1}{\ell}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)\right)} = \frac{\frac{\beta}{\ell^2}\ell L_v}{\frac{1}{\ell}L_s},$$

після скорочення отримаємо

$$O\left(\frac{\frac{\beta}{\ell^2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\frac{1}{\ell}\Delta\Phi}\right) = \frac{\beta L_s}{\ell} = B = \frac{1}{10}. \quad (5.30)$$

Оцінки (5.30) отримані з урахуванням співвідношень (5.7), (5.18), (5.19)

$$\begin{aligned} O\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) &= \ell L_v, \text{ а } O(\Delta\Phi) = O\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) = O\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right), \text{ тобто} \\ O(\Delta\Phi) &= \frac{L_{\delta\Phi}}{L_s^2} = \frac{1}{L_s} \frac{L_{\delta\Phi}}{L_s} \text{ або з урахуванням (5.19) } O(\Delta\Phi) = \frac{1}{L_s} \ell L_v. \end{aligned}$$

Таким чином, аналіз формули (5.29) за допомогою теорії подібності показує, що другий і третій члени в десять разів менші від першого члена,

тобто малі і ними можна знехтувати. В такому разі вихор швидкості Ω_p в геострофічному наближенні має вигляд

$$\Omega_{pg} \approx \frac{1}{\ell} \Delta\Phi. \quad (5.31)$$

Можна показати, що члени $\frac{1}{\ell} \Delta\Phi$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ і $\frac{\partial u}{\partial y}$ мають однаковий порядок. Для цього треба знайти порядок їх відношень

$$O\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{1}{\ell} \Delta\Phi}\right) = O\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{1}{\ell} \Delta\Phi}\right) = \frac{L_v}{\frac{L_s}{\ell L_v}} = 1.$$

Отже, виходячи із останньої рівності, маємо, що за порядком реальний вихор дорівнює геострофічному

$$O(\Omega_{pg}) = O\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = O\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{L_v}{L_s}. \quad (5.32)$$

Розглянемо тепер формулу для абсолютного вихору

$$\Omega_a = \Omega_p + \ell \quad (5.33)$$

Відношення членів правої частини (5.32) відповідно до (5.32) має порядок $O\left(\frac{\Omega_p}{\ell}\right) = \frac{L_v}{L_s L_t}$, але із (5.10) випливає, що $L_s = L_v L_t$, тому

$$O\left(\frac{\Omega_p}{\ell}\right) = \frac{L_v}{L_v L_t \ell} = \frac{1}{L_t \ell} = Ki \quad (5.34)$$

Інакше кажучи, відносний вихор Ω_p на порядок менший від параметра Коріоліса, а також і абсолютного вихору Ω_a . Оскільки параметр ℓ в північній півкулі додатний, то із сказаного випливає, що в північній півкулі (в позаекваторіальних широтах) абсолютний вихор для рухів синоптичного масштабу, за деяким винятком, додатний, тобто циклонічний.

Відзначимо також наступне: незважаючи на те, що планетарний вихор ℓ на порядок більший за Ω_p , меридіональні градієнти цих величин мають однаковий порядок. Це можна довести так: продиференціюємо (5.33) по y

$$\frac{\partial \Omega_a}{\partial y} = \beta + \frac{\partial \Omega_p}{\partial y}$$

і знайдемо порядок відношення членів правої частини

$$O\left(\frac{\frac{\beta}{\frac{\partial \Omega_p}{\partial y}}}{\frac{\beta}{L_s}}\right) = \frac{\beta}{L_v} = \frac{\beta L_s \cdot L_v L_t}{L_v} \cdot \frac{\ell}{\ell} \text{ або після скорочення } L_v \text{ маємо.}$$

$$O\left(\frac{\frac{\beta}{\frac{\partial \Omega_p}{\partial y}}}{\frac{\beta}{L_s}}\right) = \frac{\beta L_s}{\ell} \cdot \ell L_t = \frac{B}{Ki} = 1.$$

Оцінки показують, що $O\left(\frac{\partial \ell}{\partial y}\right) = O\left(\frac{\partial \Omega_p}{\partial y}\right)$

Розглянемо тепер рівняння нерозривності і отримаємо за допомогою методу подібності оцінки, необхідні для аналізу рівнянь вихору та дивергенції.

Запишемо рівняння нерозривності у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0 \text{ або } D_s = -\frac{\partial \tau}{\partial p} \quad (5.35)$$

Із (5.35) відповідно до (5.26) випливає, що

$$\frac{L_\tau}{L_{\partial p}} = \frac{L_{v'}}{L_s} \quad (5.36)$$

Раніше показано (формула (5.22)), що $\frac{L_{v'}}{L_v} = Ki$, відкіля $L_{v'} = Ki L_v$. З урахуванням цього (5.36) можна записати так

$$\frac{L\tau}{L\delta p} = Ki \frac{L_v}{L_s} \quad (5.37)$$

5.2 Соленоїдальні рухи

Із геофізичної гідродинаміки відомо, що складові швидкості вітру можна виразити через похідні від скалярних функцій ψ і φ , де ψ - це функція течії, а φ - потенціал швидкості. Тобто складові u і v можна записати таким чином

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (5.38)$$

Похідні $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ і $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ являють собою соленоїдальну частину руху, а $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ - його потенціальну частину.

Як було сказано вище, у вільній атмосфері реальна дивергенція швидкості, яка обумовлена агеострофічними відхиленнями та змінами параметра Коріоліса з широтою, виявляється досить малою. Тому випадок бездивергентного або соленоїдального руху визначає для метеорології істотний інтерес, оскільки він близький до реальних атмосферних рухів великого масштабу.

Припущення про бездивергентність горизонтального руху

$$D_s = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.39)$$

дозволяє виразити складові швидкості вітру u і v через одну тільки скалярну функцію, а саме через ψ .

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.40)$$

Із рівностей (5.40) випливає, що у випадку бездивергентного руху вихор дорівнює плоскому (двовимірному) лапласіану функції течії

$$\Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \text{ або з урахуванням (5.40)}$$

$$\Omega_p = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \text{ тобто}$$

$$\Omega_p = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi, \quad (5.41)$$

а рівняння ліній течій

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

набуває вигляду

$$d\psi = 0, \text{ тобто}$$

$$\psi = \text{const}.$$

Остання рівність показує, що у випадку бездивергентного руху функція течії є сталою уздовж кожної лінії течії.

Розглянемо ще один окремий випадок руху, а саме безвихоревий або потенціальний рух, який визначається умовою

$$\Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (5.42)$$

В цьому випадку складову швидкості u і v можна виразити через потенціал швидкості за допомогою співвідношень

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (5.43)$$

При цьому дивергенція визначається через потенціал швидкості рівністю, яка випливає із виразу для дивергенції і формул (5.43), тобто

$$D_s = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \text{ або}$$

$$D_s = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi. \quad (5.44)$$

Відзначимо, що реальні великомасштабні рухи в атмосфері не є потенціальними. Тому розглянутий тут випадок потенціального руху не має практичного значення в протилежність випадку соленоїдального руху.

Реальні рухи не є ні соленоїдальними, ні потенціальними. Для таких дивергентних вихорових рухів складові швидкості u і v не вдається виразити через одну скалярну функцію, тому вони виражаються через обидві функції φ і ψ , як в формулах (5.38). Зручність цих формул визначається тим, що вони дозволяють виразити дивергенцію і вихор лише через одну із функцій ψ і φ :

$$D = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \nabla^2 \varphi; \quad (5.45)$$

$$D_p = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi.$$

З цієї причини вирази (5.38) часто використовують в теорії атмосферних рухів.

Відзначимо, що при дивергентному русі функція ψ не є сталою уздовж лінії течії і її в цьому загальному випадку неможна, строго кажучи, називати функцією течії, також, як і функцію φ - потенціалом швидкостей. Але ці терміни використовуються і стосовно до загального випадку руху.

Якщо знехтувати зміною параметра Коріоліса з широтою, то геострофічний вітер можна вважати бездивергентним. При цьому геострофічна функція течії ψ_g , яка визначається співвідношенням

$$u_g = -\frac{\partial \psi_g}{\partial y}; \quad v_g = \frac{\partial \psi_g}{\partial x}, \quad (5.46)$$

пов'язана з геопотенціалом ізобаричної поверхні. А саме, порівнюючи (5.46) з виразами для складових геострофічного вітру через геопотенціал

$$u_g = -\frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v_g = \frac{1}{\ell} \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

знаходимо з точністю до сталого доданку

$$\psi_g = \frac{\Phi}{\ell}; \quad \text{або} \quad \psi_g = g \frac{H}{\ell}, \quad (5.47)$$

На закінчення випишемо основні співвідношення, які будуть використовуватись при виконанні завдань до цього розділу.

$$O\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = O\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{L_f}{L_s}; \quad (5.48)$$

$$O\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \frac{L_f}{L_{\delta p}}; \quad (5.49)$$

$$Ki = \frac{1}{\ell L_t} \quad (5.50)$$

$$Sh = \frac{L_v L_t}{L_s} \quad (5.51)$$

$$B \frac{\beta L_s}{\ell} \quad (5.52);$$

$$O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = O\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = \ell L_v \quad (5.53)$$

$$O(\Omega)_p = \frac{L_v}{L_s} \quad (5.54);$$

$$O(D_s) = Ki \frac{L_v}{L_s} \quad (5.55)$$

$$O\left(\frac{\partial \tau}{\partial p}\right) = \frac{L_\tau}{L_{\delta p}} = Ki \frac{L_v}{L_s}. \quad (5.56)$$

Нагадаємо також наступне:

- якщо порядок відношення двох членів якого-небудь рівняння дорівнює числу Ki або B , то це означає, що член у знаменнику в 10 разів (тобто на порядок) більший за чисельник;
- якщо в результаті порівняння двох членів рівняння порядок дорівнює числу Sh - яке для великомасштабних процесів дорівнює одиниці, то ці члени мають однаковий порядок. Відзначимо також, що порядок відношення членів, який дорівнює Ki^2 або B^2 свідчить про те, що один з розглядуваних членів на два порядки (тобто в 100 разів) менший. Таким членом можна знехтувати.

При грубому наближенні можна нехтувати і членами, які менші всього на порядок. Завдяки такому наближенню одержуються геострофічні співвідношення із рівнянь горизонтального руху.

Вправи до розділу 5

5.1 Отримати формулу для розрахунку дивергенції за даними про геострофічний вітер. Використовувати при цьому поле геопотенціалу. Вісь x спрямувати по дотичній до кола широти, вісь y - по дотичній до меридіонального колу.

5.2 Отримати формули, які пов'язують дивергенцію з функцією току ψ і потенціалом швидкості φ .

5.3 Одержати робочу формулу для розрахунку геострофічної дивергенції, використовуючи при цьому точне значення параметра Россбі β . Взяти крок сітки $d = 5^\circ$ широти.

5.4 Отримати приблизну формулу для розрахунку геострофічної адвекції геострофічного вихору за даними про геопотенціал у вузлах квадратної сітки.

5.5 За допомогою геострофічних співвідношень плоску дивергенцію

$D_s = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ можна записати у вигляді суми геострофічної і агеострофічної дивергенції $D = D_g + D_{ag}$,

$$D_g = \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \ell}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \quad D_{ag} = \frac{\partial u_{ag}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ag}}{\partial y}.$$

Оцінити відношення порядків величини цих доданків і доданків вихідного виразу для D стосовно до рухів синоптичного масштабу, а також співвідношення між порядками величин D_g і D_{ag} . Як залежить це співвідношення від масштабу осереднення і від широти місця?

5.6 Індивідуальну похідну за часом від деякої метеорологічної величини f можна записати в ізобаричній системі координат:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \tau \frac{\partial f}{\partial p}.$$

З використанням теорії подібності оцінити для процесів синоптичного масштабу співвідношення порядку величин доданків правих частин формул для індивідуальних похідних:

- від геопотенціалу Φ ;
- від складової швидкості вітру U ;
- від потенціальної температури θ .

5.7 Із геострофічних співвідношень випливає така формула для

геострофічного вихору $\Omega_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y}$:

$$\Omega_g = \frac{1}{\ell} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{\partial \ell}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \ell}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right).$$

Показати, що для рухів синоптичного масштабу другим доданком в правій частині останньої формули можна знехтувати.

5.8 На основі теорії подібності оцінити співвідношення доданків в формулі для абсолютного вихору $\Omega_a = \Omega_p + \ell$ в залежності від масштабу руху.

Як буде змінюватися це співвідношення, якщо формулу продиференціювати по координаті, яка спрямована уздовж меридіану.

5.9 Використовуючи міркування теорії подібності, оцінити співвідношення членів рівняння вихору стосовно до рухів синоптичного масштабу.

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_p}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Omega_p}{\partial p} + (\Omega_p + \ell) D_s = - \left(u \frac{\partial \ell}{\partial x} + v \frac{\partial \ell}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right)$$

5.10 Оцінити для рухів синоптичного масштабу співвідношення порядків членів рівняння

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + c_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

яке використовується в баротропних негеострофічних моделях чисельного прогнозу ($c_0 - const$).

5.11 З використанням основних положень теорії подібності оцінити співвідношення членів рівняння дивергенції

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_s}{\partial t} + u \frac{\partial D_s}{\partial x} + v \frac{\partial D_s}{\partial y} + \tau \frac{\partial D_s}{\partial p} = & -\nabla^2 \Phi + \ell \Omega_p + \left(v \frac{\partial \ell}{\partial x} - u \frac{\partial \ell}{\partial y} \right) - \\ & - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

для рухів синоптичного масштабу.

5.12 Проекція сили Коріоліса уздовж кола широт описується різницею $2\omega v \sin \varphi - 2\omega w \cos \varphi$, де v - меридіональна складова швидкості вітру. Оцінити порядок величини відношення другого члена до першого у вказаному виразі для рухів синоптичного масштабу в різних широтних зонах.

5.13 В межах синоптичного методу зміни температури протягом часу в тому чи іншому пункті пояснюються переносом в цей пункт повітряних мас з іншою температурою. Яким повинно бути співвідношення між порядками величин індивідуальних та локальних змін температури, щоб таке пояснення було обґрунтованим? Який є в цьому випадку зв'язок порядку величини швидкості вітру з горизонтальним і часовим масштабами процесу.

5.14 Використовуючи міркування теорії подібності і вважаючи, що порядки величин адвективних і індивідуальних змін швидкості вітру співпадають, треба показати, що відношення порядків величини агеострофічного вітру (відхилення реального вітру від геострофічного) у вільній атмосфері і реального вітру можна описати формулою

$$\frac{O(v')}{O(v)} = \frac{O(v)}{L_s \ell},$$

де L_s - горизонтальний масштаб, v' - агеострофічне відхилення.

5.15 Вивести рівняння вихору швидкості і записати його для локальних змін відносного вихору.

5.16. Показати, що рівняння вихору з урахуванням головних членів має вигляд

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_p}{\partial y} + \beta v + \ell D_s = 0.$$

5.17. Оцінити прогностичні можливості рівнянь горизонтального руху і показати необхідність переходу до рівняння вихору швидкості.

5.18. Вивести рівняння дивергенції і записати його для локальних та індивідуальних змін D_s .

5.19. Показати, що рівняння дивергенції без урахування членів порядку Ki^2 , має такий вигляд

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] = -\nabla^2 \Phi + \ell \Omega_p.$$

5.20. Проекція сили Коріоліса уздовж кола широти описується виразом $(2\omega \sin \varphi)v - (2\omega \cos \varphi) \cdot w$, де v і w - меридіональна і вертикальна складові вектора швидкості, ω - кутова швидкість обертання Землі. Треба оцінити в цьому виразі порядок відношення другого члена до першого для рухів синоптичного масштабу в різних широтних зонах.

5.21. Використовуючи основні положення теорії подібності, показати, що порядок геострофічного відносного вихору швидкості дорівнює порядку реального вихору. Тобто показати, що геострофічне наближення можна застосовувати до відносного вихору.

5.22. Користуючись міркуваннями теорії подібності, показати, що геострофічне наближення не можна застосовувати до дивергенції, тобто показати, що геострофічна дивергенція має порядок числа Ki .

Відповіді та розв'язання

5.1. $D_g = -\frac{g}{\ell^2} \frac{\partial \ell}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x}$.

5.2. $D_s = \nabla^2 \varphi$; $\Omega = \nabla^2 \psi$.

5.3. $D_g = -(H_1 - H_3) \cdot 10^{-7} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$.

5.4.
$$A_\Omega = \frac{g}{4\ell r^2} \left\{ (H_1 - H_3) \left[\left(\frac{1}{\ell} \nabla^2 H \right)_2 - \left(\frac{1}{\ell} \nabla^2 H \right)_4 \right] - \right.$$

$$\left. - (H_2 - H_4) \left[\left(\frac{1}{\ell} \nabla^2 H \right)_1 - \left(\frac{1}{\ell} \nabla^2 H \right)_3 \right] \right\}$$

5.5. Для рухів синоптичного масштабу у позатропічних широтах $0(D_g) = 0(D_{ag}) \ll 0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$. Відношення порядків величини

геострофічної і агеострофічної дивергенції зростає зі збільшенням масштабу осереднення і зі зменшенням широти місця.

5.6. а) $0\left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \ll 0\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \ll 0\left(\tau \frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) = 0\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$;

б) $0\left(\tau \frac{\partial u}{\partial p}\right) \ll 0\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$;

в) $0\left(\tau \frac{\partial \theta}{\partial p}\right) = 0\left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = 0\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)$.

5.8. $0(\Omega) \ll 0(\ell)$; $0\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) = 0\left(\frac{\partial \ell}{\partial y}\right)$.

5.9.

$$0\left(\tau \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right) = 0(\Omega D) = 0\left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial x}\right) \ll 0\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right) = 0\left(u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) =$$

$$= 0(\ell D) = 0\left(u \frac{\partial \ell}{\partial x} + v \frac{\partial \ell}{\partial y}\right).$$

5.10. $0\left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \ll 0\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \ll c_0^2 0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$;

5.11.

$$\begin{aligned}
0\left(\tau \frac{\partial D}{\partial p}\right) \ll 0\left(\frac{\partial D}{\partial t}\right) &= 0\left(u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y}\right) = 0\left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial y}\right) \ll 0\left(v \frac{\partial \ell}{\partial x} + u \frac{\partial \ell}{\partial y}\right) = \\
&= 0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right] \ll 0(\ell \Omega) = 0(\nabla^2 \Phi).
\end{aligned}$$

5.12. У позатропічних широтах другий член менший у порівнянні з першим в 10^3 разів, а в тропічних широтах, за винятком вузької приекваторіальної зони в 10^2 разів. На широті близько 0.5° обидва члени мають однаковий порядок

$$\mathbf{5.13} \quad O\left(\frac{dT}{dt}\right) \ll O\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right); \quad O(V) = \frac{L}{\tau}.$$

5.14. $\varphi \approx \arcsin 0.1 \approx 6^\circ$.

5.15. Вказівки: застосувати до рівнянь горизонтального руху (2.26), (2.27) «операцію вихору», тобто продиференціювати перше рівняння руху по y , а друге – по x і із другого відняти перше. Потім згрупувати члени таким чином, щоб в складі членів нового рівняння з'явилася комбінація похідних $\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, тобто вертикальна складова Ω_p вектора вихору швидкості $\vec{\Omega}$.

5.16. Вказівки: оцінити порядки членів рівняння вихору (2.28) відносно до часової похідної $\frac{\partial \Omega_p}{\partial t}$ за допомогою теорії подібності, використовуючи співвідношення (5.48) – (5.56).

5.17. Вказівки: 1) записати рівняння горизонтального руху в декартовій системі координат і оцінити їх члени за допомогою таблиці порядків (Додаток Б); 2) використовуючи основні положення теорії подібності, оцінити порядки членів рівнянь руху (2.26), (2.27) у відношенні до складових сили Коріоліса lv і lu і зробити висновки щодо прогностичних можливостей цих рівнянь.

5.18. Вказівки: застосувати до рівнянь горизонтального руху (2.26), (2.27) «операцію дивергенції», тобто перше рівняння продиференціювати по x , друге – по y і результати скласти. Потім треба згрупувати члени таким чином, щоб в членах нового рівняння з'явилась комбінація похідних $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$, тобто величина плоскої дивергенції D_s .

5.19. Вказівки: використовуючи основні положення теорії подібності і співвідношення (5.48) – (5.56), які із неї випливають, оцінити порядки

членів рівняння дивергенції (2.36) у відношенні до члену $\ell\Omega_p$; для одержання результату виключити члени $O(Ki^2)$.

5.20. В позатропічних широтах від'ємник приблизно в 10^3 разів менший, а в тропічних широтах за винятком вузької екваторіальної зони – в 10^2 разів. На широті близько 0.5° від'ємник має такий же порядок, що й зменшуване.

5.21., 5.22. Вказівки: треба розписати вирази для відносного вихору і плоскої дивергенції в геострофічному наближенні, тобто складові реального вітру замінити їх геострофічними аналогами, і оцінити порядок відношення агеострофічної частини та геострофічної до реального вихору (у вправі 5.21) і до реальної дивергенції (у вправі 5.22).

Розділ 6

Фільтровані моделі прогнозу полів метеорологічних величин та чисельні методи їх реалізації

До фільтрованих відносяться ті моделі, які ґрунтуються на тих чи інших обмеженнях, головними з яких є припущення про близькість вітру у вільній атмосфері до геострофічного і про квазісоленоїдальність великомасштабних рухів. В результаті використання вказаних наближень (квазігеострофічного і квазісоленоїдального) в моделях не враховуються деякі типи атмосферних хвиль, тобто останні відфільтровуються і тому моделі називаються фільтрованими. Так, в квазігеострофічних моделях враховуються лише великомасштабні хвилі Россбі, пов'язані з добовим обертанням Землі, а гравітаційні хвилі повністю виключаються. В квазісоленоїдальних моделях поряд з хвилями Россбі частково враховуються гравітаційні хвилі. Зазначимо, що акустичні коливання відфільтровуються в усіх моделях, де використовується квазістатичне наближення, тобто третє рівняння руху записується в формі рівняння статички.

Фільтровані моделі фізично бідніші в порівнянні з моделями за повними рівняннями гідротермодинаміки, але вони допускають досить ясну інтерпретацію і якісний аналіз факторів, які визначають еволюцію метеорологічних полів. Тому доцільно вивчати квазігеострофічні і квазісоленоїдальні моделі і методи їх чисельної реалізації. Тим більше, що саме на основі таких моделей були отримані перші гідродинамічні прогнози, на прикладі яких зручно вивчати методологію їх побудови та реалізації.

В даному розділі будуть розглянуті найбільш прості баротропні моделі в квазігеострофічному і квазісоленоїдальному наближеннях, а також бароклінна квазігеострофічна модель.

6.1. Квазігеострофічна баротропна модель для середнього рівня.

Найбільш простий варіант такої моделі ґрунтується на використанні одного тільки фільтрованого рівняння вихору швидкості

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_p}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_p}{\partial y} + u \frac{\partial \ell}{\partial x} + v \frac{\partial \ell}{\partial y} = -\ell D_s \quad (6.1)$$

Зауважимо, що вигляд (6.1) рівняння вихору має для баротропної атмосфери. Це можна показати, якщо рівняння вихору вивести із рівнянь руху для баротропної атмосфери, тобто при умові, що густина повітря залежить тільки від тиску $\rho = f(p)$.

Якщо рівняння (6.1) записати для абсолютного вихору ($\Omega_a = \Omega_p + \ell$), то воно набере вигляду

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial(\Omega_p + \ell)}{\partial x} + v \frac{\partial(\Omega_p + \ell)}{\partial y} = -\ell D_s. \quad (6.2)$$

Оскільки ми будемо квазігеострофічну модель, в рівнянні (6.2) треба відносний вихор Ω_p записати в геострофічному наближенні, тобто

$$\Omega_p = \Omega_g = \frac{\partial V_g}{\partial x} - \frac{\partial U_g}{\partial y}, \quad (6.3)$$

де U_g, V_g - складові геострофічного вітру

$$U_g = -\frac{g}{\ell} \frac{\partial H}{\partial y}; \quad V_g = \frac{g}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (6.4)$$

Підставимо (6.4) в (6.3), отримаємо

$$\Omega_g = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{g}{\ell} \frac{\partial H}{\partial y} \right). \quad (6.5)$$

Якщо знехтувати залежністю параметра Коріоліса ℓ від широти φ , то (6.5) можна записати у вигляді

$$\Omega_g = \frac{g}{\ell} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = \frac{g}{\ell} \Delta H. \quad (6.6)$$

Таким чином, геострофічний вихор можна розрахувати за даними про висоту ізобаричної поверхні на відміну від реального (фактичного) вихору, який визначається за даними про складові фактичного вітру u і v .

Оскільки дивергенцію не можна записати в геострофічному наближенні (див. розділ 5), її треба позбутися. Для цього використаємо вертикальні межові умови, відповідно до яких ізобарична вертикальна

швидкість τ набуває нульових значень на нижній і верхній межах атмосфери, тобто

$$\tau = 0 \quad \begin{cases} \text{при } p = p_0, \\ \text{при } p = 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

З математики відомо, що якщо яка-небудь функція набуває нульових значень на кінцях будь-якого інтервалу, то в цьому інтервалі є хоча б один екстремум цієї функції (рис. 6.1), де перша похідна дорівнює нулю, тоді із рівняння нерозривності $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0$ (або $D_s = -\frac{\partial \tau}{\partial p}$) випливає, що $D_s = 0$. Нагадаємо, що необхідною умовою екстремума неперервної функції є рівність нулю її першої похідної (в нашому випадку – це рівність $\frac{\partial \tau}{\partial p} = 0$).

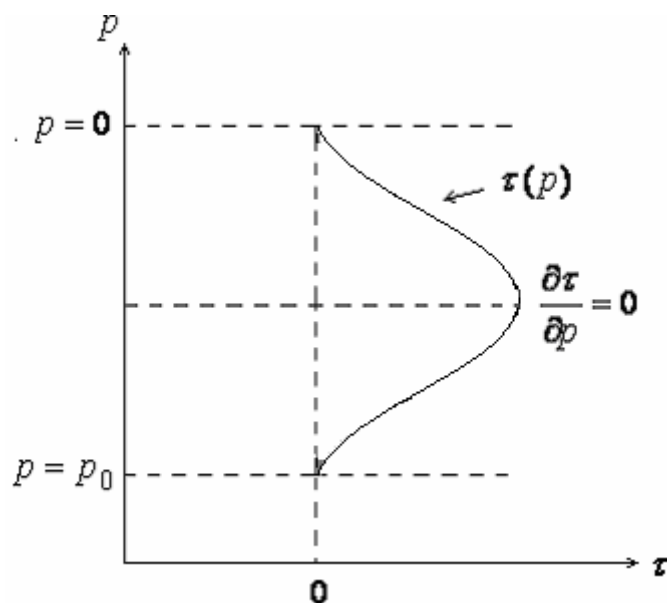


Рисунок 6.1 – Зміна вертикальної швидкості τ з висотою

Результати обробки даних спостережень за вітром показали, що дійсно в шарі атмосфери між ізобаричними поверхнями 400 і 600 гПа дивергенція D_s близька до нуля. Зазначені закономірності дозволяють ввести так названий середній рівень, на якому плоска дивергенція $D_s = 0$. В якості такого рівня беруть ізобаричну поверхню $p = 500$ гПа, яка розташовується між поверхнями 400 і 600 гПа і знаходиться приблизно в середній тропосфері (тому цей рівень називається середнім). Отже, середній – це такий рівень, на якому двовимірна дивергенція D_s дорівнює нулю.

Таким чином, для середнього рівня атмосфери рівняння (6.1) спрощується і має вигляд

$$\frac{\partial \Omega_p}{\partial t} + u \frac{\partial(\Omega_p + \ell)}{\partial x} + v \frac{\partial(\Omega_p + \ell)}{\partial y} = 0. \quad (6.8)$$

Це рівняння і використовується для побудови квазігеострофічної моделі для середнього рівня баротропної атмосфери.

Для отримання прогностичного рівняння цієї моделі виконаємо такі етапи:

1. Запишемо рівняння (6.8) в геострофічному наближенні

$$\frac{\partial \Omega_g}{\partial t} + U_g \frac{\partial(\Omega_g + \ell)}{\partial x} + V_g \frac{\partial(\Omega_g + \ell)}{\partial y} = 0. \quad (6.9)$$

2. Введемо позначення для геострофічної адвекції абсолютного вихору

$$A_{\Omega_g} = - \left[U_g \frac{\partial(\Omega_g + \ell)}{\partial x} + V_g \frac{\partial(\Omega_g + \ell)}{\partial y} \right]. \quad (6.10)$$

3. Підставимо в (6.9) рівності (6.6) і (6.10), отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta H = \frac{\ell}{g} A_{\Omega_g} \quad \text{або} \quad \Delta \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\ell}{g} A_{\Omega_g}. \quad (6.11)$$

Останнє рівняння (6.11) – це прогностичне рівняння для середнього рівня баротропної атмосфери. З математичної точки зору це є диференціальне рівняння в частинних похідних третього порядку відносно невідомої H . Таке рівняння досить складне і воно розв'язується тільки наближеними чисельними методами. Але порядок рівняння (6.11) можна знизити, якщо невідомою функцією вважати не H , а $\frac{\partial H}{\partial t}$ - тенденцію H .

Введемо позначення

$$\frac{\partial H}{\partial t} \equiv q. \quad (6.12)$$

З урахуванням (6.12) прогностичне рівняння (6.11) набере вигляду

$$\Delta q = \frac{\ell}{g} A_{\Omega_g} \quad (6.13)$$

Це рівняння є диференціальним рівнянням в частинних похідних другого порядку відносно невідомої q . Права частина (6.13) вважається відомою, тому що її можна розрахувати за початковими даними, які мають вигляд

$$H(x, y, t) = H(x, y, t_0), \quad (6.14)$$

де t_0 - строк спостережень (радіозондування);

H - висота ізобаричної поверхні 500 гПа.

Рівняння (6.13) являє собою рівняння Пуасона з відомою правою частиною. Це рівняння допускає аналітичний (точний) розв'язок, тобто розв'язок у вигляді формули, але можна розв'язувати його і за допомогою наближених чисельних методів, які досить добре розроблені.

Запишемо формулу для геострофічної адвекції, абсолютного вихору (6.10) з урахуванням виразів для складових геострофічного вітру (6.4), геострофічного вихору (6.6), отримаємо.

$$A_{\Omega g} = \left[-\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \left(\frac{g}{l} \Delta H + l \right)}{\partial x} + \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{g}{l} \Delta H + l \right)}{\partial y} \right] \quad \text{або}$$

$$A_{\Omega g} = \frac{g}{l} \left[\frac{\partial \left(\frac{g}{l} \Delta H + l \right)}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{g}{l} \Delta H + l \right)}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right], \quad \text{або}$$

якщо взяти похідні від суми $\left(\frac{g}{l} \Delta H + l \right)$, останній вираз можна представити у вигляді

$$A_{\Omega g} = \frac{g}{l} \left[\left(\frac{g}{l} \frac{\partial \Delta H}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial x} \right) \frac{\partial H}{\partial y} - \left(\frac{g}{l} \frac{\partial \Delta H}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial y} \right) \frac{\partial H}{\partial x} \right] \quad (6.15)$$

Якщо вісь x спрямована уздовж широтного кола ($\varphi = const$), то $\frac{\partial l}{\partial x}$ буде дорівнювати нулю. В цьому випадку вираз для $A_{\Omega g}$ буде таким

$$A_{\Omega g} = \frac{g^2}{\ell^2} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \Delta H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{g\beta}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (6.16)$$

де $\beta = \frac{\partial \ell}{\partial y}$ - параметр Россбі.

Перший доданок в формулі (6.16) являє собою геострофічну адвекцію відносного вихору $A_{\Omega pg}$, тобто

$$A_{\Omega pg} = \frac{g^2}{\ell^2} \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \Delta H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \right). \quad (6.17)$$

Порівняння (6.16) і (6.17) показує, що геострофічна адвекція абсолютного вихору від адвекції відносного вихору відрізняється лише доданком $\frac{g\beta}{\ell} \frac{\partial H}{\partial x}$.

Точний розв'язок прогностичного рівняння (6.13) представимо в полярній системі координат (див. Додаток В) при локальних межових умовах

$$\begin{aligned} q(0,0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \ell A_{\Omega g}(r, \psi) \ln \frac{R}{r} r dr d\psi \quad \text{або} \\ q(0,0) &= -\int_0^{2\pi} \int_0^R \ell A_{\Omega g}(r, \psi) G(r) r dr d\psi, \end{aligned} \quad (6.18)$$

де $q(0,0) = \frac{\partial H}{\partial t}$ - це зміна висоти ізобаричної поверхні (середнього рівня) в точці прогнозу за одиницю часу; $G(r)$ - функція впливу (функція Гріна)

$$G(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}, \quad (6.19)$$

яка є додатною у всій області інтегрування. $G(r)$ зменшується зі збільшенням відстані від вузла сітки, де обчислюється q (цей вузол будемо називати точкою прогнозу), до інших вузлів у середині кола впливу. В фільтрованих моделях завжди використовуються сітки з досить великими кроками (близько 300 км), тому область інтегрування займала велику територію, яка обмежувалася колом з радіусом $R \approx 900$ км.

Із формули (6.18) випливає, що величина q , тобто зміна висоти ізобаричної поверхні в точці прогнозу, залежить тільки від геострофічної адвекції абсолютного вихору. При цьому додатним значенням $A_{\Omega g}$ в північній півкулі (де $\ell > 0$) відповідають від'ємні значення q , тобто додатна адвекція приводить до зменшення висоти ізобаричної поверхні або до зниження тиску поблизу цієї поверхні; з від'ємною адвекцією пов'язане збільшення висоти ізобаричної поверхні або підвищення тиску.

При обчисленні q за допомогою розв'язку (6.18) функція впливу розраховується завчасно і використовується у вигляді таблиці вагових коефіцієнтів, які найбільших значень досягають в точці прогнозу, а з віддаленням від точки прогнозу зменшуються, і на відстані R дорівнює нулю, що випливає із (6.19).

6.2 Квазігеострофічна бароклінна модель в квазістатичному і адіабатичному наближеннях.

Квазігеострофічні моделі для бароклівної атмосфери базуються на використанні таких рівнянь

- фільтрованого рівняння вихору в геострофічному наближенні

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\ell}{g} A_{\Omega g} - \frac{\ell^2}{g} D_s; \quad (6.20)$$

- рівняння статички

$$T = -\frac{pg}{R} \frac{\partial H}{\partial p}; \quad (6.21)$$

- рівняння нерозривності

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0; \quad (6.22)$$

- рівняння припливу тепла в геострофічному та адіабатичному наближеннях

$$\frac{\partial T}{\partial t} - A_{Tg} - \frac{c^2}{Rp} \tau = 0. \quad (6.23)$$

В системі рівнянь (6.20) – (6.23) прийняті позначення: $A_{\Omega g}$ - геострофічна адвекція абсолютного вихору (див. розділ 6.2); $A_{Tg} = -\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right)$ - адвекція температури в геострофічному наближенні. Цю систему легко перебудувати і отримати одне прогностичне рівняння відносно невідомої величини H - висоти ізобаричної поверхні. Для цього із рівняння (6.20) виключається дивергенція D_s за допомогою рівняння (6.22), в результаті (6.20) набуває вигляду

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\ell}{g} A_{\Omega g} + \frac{\ell^2}{g} \frac{\partial \tau}{\partial p}, \quad (6.24)$$

де H і τ - невідомі величини.

Якщо із рівняння (6.24) виключити невідому τ , то отримаємо прогностичне рівняння відносно величини H . Для виключення τ виконуються такі дії: в рівняння припливу тепла (6.23) підставляється рівняння статики (6.21) і, таким чином, із (6.23) виключається температура; далі із виразу, який отримано, знаходиться τ , а потім – похідна $\frac{\partial \tau}{\partial p}$, з урахуванням якої рівняння (6.24) набуває вигляду

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\ell}{g} A_{\Omega g} - \ell^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{R\ell^2}{g} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{c^2} A_{Tg}. \quad (6.25)$$

Це диференціальне рівняння в частинних похідних має третій порядок відносно невідомої H . Воно досить складне і його можна розв'язати лише наближеними чисельними методами. Проте порядок рівняння (6.25) можна знизити, якщо в якості невідомої розглядати не функцію H , а її часову похідну $\frac{\partial H}{\partial t}$. Як і в баротропній моделі, введемо позначення

$$q = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (6.26)$$

Підставимо (6.26) в (6.25) і перенесемо другий член правої частини рівняння (6.25) в ліву, тоді отримаємо

$$\Delta q + \ell^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{p^2}{c^2} \frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\ell}{g} A_{\Omega g} - \frac{R\ell^2}{g} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p}{c^2} A_{Tg}. \quad (6.27)$$

Це диференціальне рівняння в частинних похідних, яке має другий порядок відносно невідомої величини q , можна розв'язати аналітично, тобто для цього рівняння можна отримати точний розв'язок. Слід відмітити, що права частина рівняння (6.27) вважається відомою, тому що функції $A_{\Omega g}$ і A_{Tg} можна розрахувати з використанням початкових даних

$$H(x, y, p, t) = H(x, y, p, t_0), \quad (6.28)$$

де t_0 - строк спостережень.

Межові умови за вертикальною координатою p можна записати у такому вигляді:

$$\text{НМУ} \quad \text{при } p = p_0 \quad \frac{\partial q}{\partial p} + \alpha q + \frac{R}{p_0 g} A_{Tg} = 0 \quad (6.29)$$

де $\alpha = \frac{c^2}{RT_0 p_0}$, $p_0 = 1000$ гПа, T_0 - температура на ізобаричній поверхні

1000 гПа. Отже, для отримання значень q на нижній межі, тобто на ізобаричній поверхні 1000 гПа, треба розв'язати звичайне диференціальне рівняння (6.29), коефіцієнт якого α і вільний член розраховуються за даними на поверхні 1000 гПа.

Верхня межа умова має вигляд

$$\text{ВМУ} \quad \text{при } p = 0 \quad \frac{\partial q}{\partial p} - \text{обмежена величина} \quad (6.30)$$

Запишемо аналітичний розв'язок рівняння (6.27) при локальних межових умовах в циліндричній системі координат

$$\begin{aligned} q(0,0, p^*) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{p_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \ell A_{\Omega g}(r, \psi, p, p^*) G_{\Omega}(r, p, p^*) r dr d\psi dp + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{p_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R A_{Tg}(r, \psi, p, p^*) G_T(r, p, p^*) r dr d\psi dp, \end{aligned} \quad (6.31)$$

де p^* - тиск на ізобаричній поверхні, для якої розраховується прогностичне поле H , тобто p^* - це прогностичний рівень; p - поточна координата, яка набуває значення для основних ізобаричних поверхонь: 850, 700, 500 і 300 гПа.

Координата r змінюється від 0 до R , а кут ψ набуває значення від 0 до 2π . Таким чином, область інтегрування являє собою циліндр з радіусом R (який дорівнює потрійному кроку сітки, тобто $R \approx 3d$); нижня основа цього циліндра розташована на ізобаричній поверхні, яка є нижньою межею ($p = p_0 = 1000$ гПа); верхня основа знаходиться на гіпотетичній поверхні, де $p = 0$.

Функція впливу G_Ω (для динамічного фактора) в усій області інтегрування додатна, максимальних значень досягає в точці прогнозу і на рівні прогнозу; з віддаленням від точки прогнозу у горизонтальному і вертикальному напрямках функція G_Ω зменшується і у вузлах, які знаходяться на бічній поверхні циліндра, вона наближається до нуля (див. Додаток Г.1).

Функція впливу G_T для термічного фактора в області інтегрування змінює свій знак: вище рівня прогнозу вона від'ємна, а нижче – додатна. Максимальних значень ця функція досягає в середині шарів, які оточують рівень прогнозу, і з віддаленням від точки прогнозу в горизонтальному напрямку G_T зменшується і на відстані R вона, як і G_Ω , наближається до нуля (див. Додаток Г.2).

Закономірність змін функцій впливу свідчить про те, що на зміни висоти ізобаричної поверхні в точці прогнозу, тобто на величину q , впливає геострофічна адвекція вихору і температури лише в тих вузлах просторової сітки, які знаходяться всередині циліндра. Адвекція цих величин поза циліндром не впливає на q в точці прогнозу.

Шляхом аналізу розв'язку (6.31) можна показати, що висота ізобаричної поверхні буде зменшуватися, тобто тиск поблизу неї буде падати, якщо за потоком циклонічна кривизна змінюється антициклонічною або якщо циклонічна кривизна зменшується за потоком, а антициклонічна збільшується (це так звані правила падіння тиску в бароклінній атмосфері).

Якщо за потоком антициклонічна кривизна змінюється циклонічною або якщо антициклонічна кривизна зменшується, а циклонічна збільшується за потоком, то H в точці прогнозу зростатиме (правила зростання тиску).

Аналіз другого потрійного інтеграла в розв'язку (6.31) показує, що при адвекції температури одного знака в усій тропосфері внесок термічного фактора в зміни висоти ізобаричної поверхні 500 гПа (або тиску в середній тропосфері) буде малий, оскільки, наприклад, адвекція

тепла вище рівня $p=500$ гПа приведе до зниження тиску і адвекція цього ж знака ($A_{Tg} > 0$) нижче рівня $p=500$ гПа приведе до зростання тиску. Тобто в таких випадках зміни тиску в середній атмосфері зумовлені тільки динамічним фактором, а саме геострофічною адвекцією абсолютного вихору, як і в баротропній атмосфері.

6.3 Загальні принципи побудови квазісоленоїдальних моделей

Основний недолік квазігеострофічних моделей полягає у тому, що вони ураховують вплив на погодоутворювальні процеси тільки довгих хвиль Россбі. Квазігеострофічне наближення відфільтровує гравітаційні хвилі, які суттєво впливають на еволюцію баричних утворень, і тому повинні ураховуватися в прогностичних моделях.

Уточненням квазігеострофічного наближення є умова квазісоленоїдальності, яка дозволяє частково урахувати агеострофічні відхилення, а значить і гравітаційні хвилі.

Розглянемо найбільш просту квазісоленоїдальну модель для середнього рівня баротропної атмосфери.

Як відомо, соленоїдальним називається вектор, дивергенція якого дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.32)$$

Умова (6.32) дозволяє виразити складові швидкості вітру u і v через скалярну функцію течії ψ , так що виконується співвідношення

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6.33)$$

Вертикальна складова вихору швидкості вітру в соленоїдальному наближенні має вигляд

$$\Omega_p = \Delta \psi, \quad (6.34)$$

$$\text{де } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Для побудови квазісоленоїдальної моделі використовуються фільтроване рівняння вихору і рівняння вітрового балансу, тобто рівняння дивергенції, в якому ураховуються лише члени порядку одиниці і порядку числа Кібеля.

В соленоїдальному наближенні рівняння вихору для баротропної атмосфери має вигляд

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\Delta \psi + \ell, \psi) = A_{\Omega \psi}, \quad (6.35)$$

де $A_{\Omega g} = (\Delta \psi + \ell, \psi)$ - якобіан, який описує адвекцію абсолютного вихору в соленоїдальному наближенні. Рівняння (6.35) – це рівняння Пуассона відносно невідомої $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, яке належить до нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Рівняння вітрового балансу в квазісоленоїдальному наближенні запишеться так

$$\Delta \psi = \frac{1}{\ell} \Delta \Phi - \frac{2}{\ell} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{\beta}{\ell} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (6.36)$$

де $\Phi = gH$ - геопотенціал, $\beta = \frac{\partial \ell}{\partial y}$ параметр Россбі. Відносно невідомої Φ

рівняння (6.36) є рівнянням Пуассона, а відносно функції течії ψ це рівняння являє собою нелінійне диференціальне рівняння Монжа-Ампера. Отже, прогностична соленоїдальна модель для бездивергентної баротропної атмосфери базується на прогностичному рівнянні вихору (6.35) і діагностичному рівнянні балансу (6.36).

Процедуру чисельної реалізації цієї моделі на першому часовому кроці в загальних рисах можна описати таким чином.

1. За початковими даними $\Phi(x, y, t) = \Phi(x, y, t_0)$ розраховується поле функції $\psi(x, y, t_0)$ шляхом розв'язання рівняння Монжа – Ампера (6.36).
2. З використанням отриманого поля $\psi(x, y, t_0)$ розраховується права частина прогностичного рівняння Пуассона (6.35), шляхом розв'язання якого отримується майбутнє поле $\psi(x, y, t_0 + \delta t)$.
3. Поле $\psi(x, y, t_0 + \delta t)$ використовується для розрахунку правої частини рівняння (6.36), яке має вигляд рівняння Пуассона відносно невідомої Φ , а саме

$$\Delta\Phi = \ell\Delta\psi + 2\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right] + \beta\frac{\partial\psi}{\partial y}. \quad (6.37)$$

В результаті розв'язання рівняння (6.37) визначається майбутнє поле $\Phi(x, y, t_0 + \delta t)$, яке використовується в якості початкових умов для прогнозу на наступному часовому кроці. Повторюючи багаторазово описану процедуру, можна отримати прогноз поля Φ для заданого моменту часу $t_0 + N\delta t$ (N - кількість кроків за часом, $N\delta t$ - інтервал часу, на який розраховується прогноз, тобто завчасність прогнозу).

6.4 Ітераційні методи розв'язання баротропного рівняння вихору.

Суть ітераційних методів полягає у багаторазовому повторюванні одного і того ж алгоритму, що дає результат, який послідовно наближається до точного розв'язку. Обчислювальний процес починається з задання вихідного приблизного розв'язку, який потім поступово уточнюється, доки не буде досягнена задана точність.

Розглянемо деякі ітераційні методи, які використовуються при розв'язанні прогностичного рівняння, тобто рівняння Пуассона з відомою правою частиною.

1. Метод Річардсона.

Отже, запишемо це рівняння в скінченнорізницевому вигляді

$$\frac{1}{d^2}(q_{i+1,j} + q_{i,j+1} + q_{i-1,j} + q_{i,j-1} - 4q_{i,j}) = \frac{\ell_{i,j}}{g}(A_{\Omega g})_{i,j} \quad (6.38)$$

і знайдемо із цього рівняння шукану величину $q_{i,j}$

$$q_{i,j} = \frac{1}{4}(q_{i+1,j} + q_{i,j+1} + q_{i-1,j} + q_{i,j-1} - F_{i,j}), \quad (6.39)$$

де $F_{i,j} = \frac{\ell_{i,j} \cdot d^2}{g}(A_{\Omega g})_{i,j}$ - права частина рівняння (6.38) помножена на d^2

- квадрат кроку сітки.

Із математики відомо, що метод Річардсона для рівнянь вигляду (6.39), тобто типу рівняння Пуассона, описує обчислювальний процес,

який завжди збігається, тому можна задавати будь-які початкові значення q . Найпростіше задати їх рівними нулю.

$$q_{i,j}^{(0)} = 0. \quad (6.40)$$

Тоді на першій ітерації отримаємо

$$q_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{4}(q_{i+1,j}^{(0)} + q_{i,j+1}^{(0)} + q_{i-1,j}^{(0)} + q_{i,j-1}^{(0)} - F_{i,j}), \quad (6.41)$$

де $F_{i,j}$ - функція, яка розраховується по полю геопотенціалу і від ітерації не залежить.

В загальному вигляді розв'язок методом Річардсона можна записати так

$$q_{i,j}^{(v+1)} = \frac{1}{4}(q_{i+1,j}^{(v)} + q_{i,j+1}^{(v)} + q_{i-1,j}^{(v)} + q_{i,j-1}^{(v)} - F_{i,j}), \quad (6.42)$$

де $i=3,4,\dots,m-2; j=3,4,\dots,n-2; v=0,1,2,\dots$

Оскільки на кожній наступній ітерації $q_{i,j}$ у вузлах сітки розраховується тільки за результатами, які отримані на попередній ітерації, результати розрахунків за цим методом не залежать від того, в якому напрямку використовуються розрахунки: зліва направо і зверху вниз чи зліва направо і знизу вверх.

Ітераційний процес продовжується до тих пір, доки у всіх вузлах сітки не буде виконуватися умова

$$\left| q_{i,j}^{(v+1)} - q_{i,j}^{(v)} \right|_{\max} \leq \varepsilon, \quad (6.43)$$

тобто коли максимальна різниця між значеннями $q_{i,j}$ на наступному і поточному наближеннях (ітераціях) не буде перевищувати задану точність розв'язку ε .

2. Метод Лібмана.

На відміну від методу Річардсона цей метод враховує послідовність і напрямок обчислення у вузлах сітки. Якщо процедура обчислення починається з верхнього лівого узла і виконується зліва направо і зверху вниз, як показано на рисунку 6.2, то для вузлів з координатами $i, j+1$ та

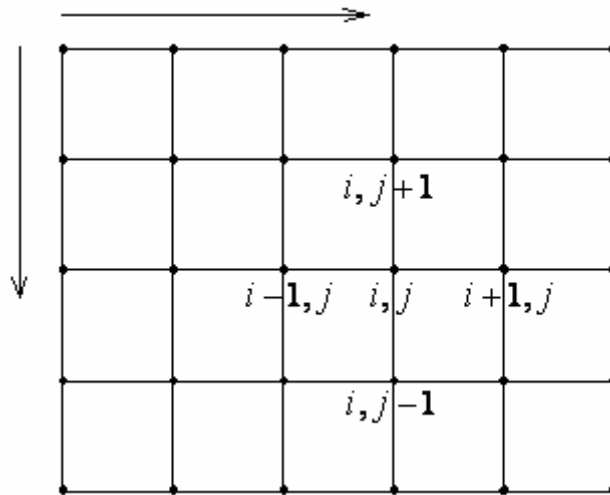


Рисунок 6.2 - Квадратна сітка точок (стрілками показано напрямок обходу)

$i-1, j$ величина q буде відома на поточній ітерації $v+1$. Тоді формула для обчислення q за методом Лібмана буде мати вигляд

$$q_{i,j}^{(v+1)} = \frac{1}{4}(q_{i+1,j}^{(v)} + q_{i,j+1}^{(v+1)} + q_{i-1,j}^{(v+1)} + q_{i,j-1}^{(v)} - F_{i,j}). \quad (6.44)$$

Використання в формулі (6.41) значень q на поточній ітерації ($v+1$) сприяє тому, що процес збіжності прискорюється.

Алгоритм цього методу описується формулами (6.44) і (6.43).

3. Релаксаційний метод Саутвелла.

Суть цього методу полягає в тому, що помилка, тобто різниця між розрахованим і фактичним значеннями функції q послідовно зменшується. Похибка визначається як різниця між лівою і правою частинами рівнянь системи, тобто

$$R_{i,j}^{(v)} = (q_{i+1,j}^{(v)} + q_{i,j+1}^{(v)} + q_{i-1,j}^{(v)} + q_{i,j-1}^{(v)} - F_{i,j}). \quad (6.45)$$

Поле q на наступних ітераціях знаходиться як сума $q_{i,j}$ на попередній ітерації і помилки $R_{i,j}$:

$$q_{i,j}^{(v+1)} = q_{i,j}^{(v)} + \alpha R_{i,j}^{(v)}, \quad (6.46)$$

де α - коефіцієнт релаксації, який описує відносну різницю між фактичним і розрахованим значеннями q на конкретній ітерації. Цей коефіцієнт залежить від розмірів сіткової області.

Оптимальне значення α пов'язане з числом вузлів сітки таким співвідношенням

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \left[\cos \frac{\pi}{(m-1)} + \cos \frac{\pi}{(n-1)} \right]^2}}. \quad (6.47)$$

4. Екстраполяційний метод Лібмана.

Згідно з цим методом значення q на поточних ітераціях визначаються із системи рівнянь

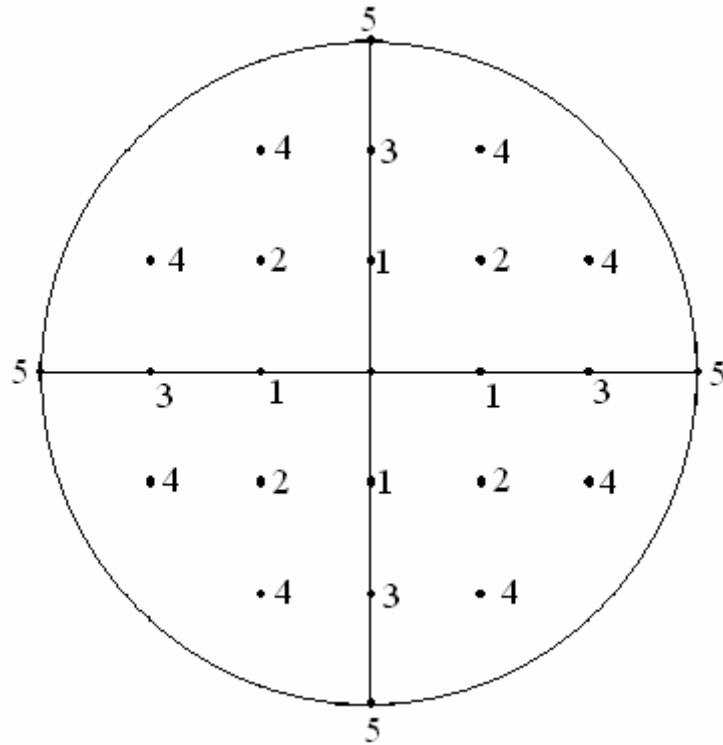
$$q_{i,j}^{(v+1)} = q_{i,j}^{(v)} + \alpha R_{i,j}^{(v,v+1)}, \quad (6.48)$$

$$\text{де } R_{i,j}^{(v,v+1)} = (q_{i+1,j}^{(v)} + q_{i,j+1}^{(v+1)} + q_{i-1,j}^{(v+1)} - 4q_{i,j}^{(v)} - F_{i,j}). \quad (6.49)$$

Алгоритм розрахунків за цим методом описується формулами (6.49), (6.48), (6.43)

Вправи до розділу 6

6.1 Розрахувати значення функції впливу $G(r) = \ln \frac{R}{r}$ при локальних межових умовах для вузлів з номерами 1, 2, 3, 4, 5 квадратної сітки з кроком 300 км (див. рисунок). Побудувати графік функції $G(r)$.



6.2 Показати, що у випадку геострофічної баротропної моделі атмосфери при додатній адвекції вихору швидкості ($A_{\Omega g} > 0$) тенденція висоти ізобаричної поверхні, тобто $\frac{\partial H}{\partial t} < 0$, а при від'ємному значенні адвекції ($A_{\Omega g} < 0$) похідна $\frac{\partial H}{\partial t} > 0$.

6.3 Записати прогностичне рівняння квазігеострофічної моделі для баротропної атмосфери

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\ell}{g} A_{\Omega g}$$

в скінченнорізницевій формі для сітки точок i, j з кроками по горизонтальних координатах (δs), а за часом (δt).

6.4 Розрахувати значення максимального кроку за часом при чисельному інтегруванні прогностичного рівняння баротропної моделі атмосфери при $V_{\max} = 50$ м/с, $\delta s = 300$ км і $\delta s = 150$ км.

6.5 Отримати із системи повних рівнянь гідротермодинаміки для барокліної атмосфери прогностичне рівняння при умові адіабатичності атмосферних процесів

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} = \ell^2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\tilde{n}^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial H}{\partial t} = A_{\Omega g} - \ell^2 \frac{R}{g} \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\tilde{n}^2} A_{Tg},$$

де $A_{Tg} = \frac{g}{\ell} I(T, H) = \frac{g^2}{R\ell} \zeta \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right)$.

6.6 Отримати діагностичне рівняння для аналога вертикальної швидкості τ квазігеострофічної бароклінної моделі атмосфери

$$\Delta \tau + \ell^2 \frac{\zeta^2}{\tilde{n}^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} = -Pg \frac{\zeta^2}{\tilde{n}^2} \frac{\partial A_{\Omega g}}{\partial \zeta} - \frac{RP\zeta}{c^2} \Delta A_T.$$

6.7 Розрахувати значення коефіцієнта $a_p = \frac{Pg}{RT}$ для $P=1000, 850, 700, 500$ і 300 гПа для випадку стандартної атмосфери, якщо τ виражене в $\frac{\text{гПа}}{12\Gamma 2\Gamma}$, а w в $\frac{\text{см}}{\text{с}}$. Використати приблизну рівність

$$\tau_p = -a_p w_p.$$

6.8 Шляхом аналізу точного розв'язку прогностичного рівняння квазігеострофічної бароклінної моделі атмосфери (розв'язку Булеєва-Марчука) визначити знаки $\frac{\partial H}{\partial t}$ ізобаричної поверхні 1000 гПа для випадків, коли у всій атмосфері

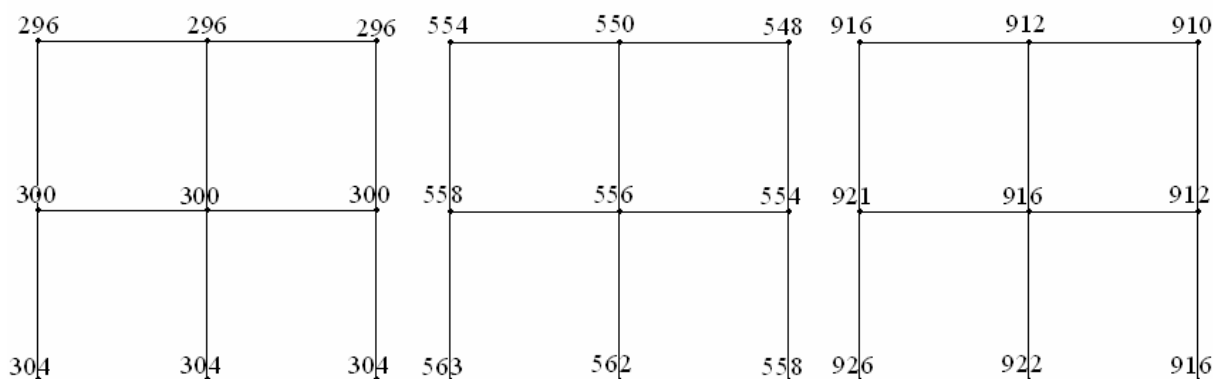
- а) $A_{\Omega g} > 0, A_{Tg} > 0;$
- б) $A_{\Omega g} > 0, A_{Tg} < 0;$
- в) $A_{\Omega g} < 0, A_{Tg} > 0;$
- г) $A_{\Omega g} < 0, A_{Tg} < 0.$

6.9 Виходячи із умов задачі 6.8, визначити знаки $\frac{\partial H}{\partial t}$ для ізобаричної поверхні 500 гПа, коли у всій атмосфері

- а) $A_{\Omega g} > 0, A_{Tg} > 0;$
- б) $A_{\Omega g} > 0, A_{Tg} < 0;$
- в) $A_{\Omega g} < 0, A_{Tg} > 0;$

г) $A_{\Omega g} < 0, \quad A_{Tg} < 0.$

6.10 Використовуючи висоти H ізобаричних поверхонь 700, 500 і 300 гПа, які наведені на рисунку, розрахувати значення A_{Tg} для шарів 700-500 і 500-300 гПа для центральної точки сітки (при $\ell = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{с}^{-1}$).



6.11 Розробити робочу формулу для розрахунку геострофічної адвекції відносного вихору $A_{\Omega g}$ в прямокутній сітковій області розміром 7×7 вузлів. Взяти крок квадратної сітки рівним 300 км. Вважати, що вихідна інформація (поле H , дам) задана у вузлах сітки розміром 7×7 .

6.12 Поле тенденцій $q \frac{\text{гП} \cdot \text{дам}}{\text{год}}$ задана таблицею 6.1 для області 6×6 вузлів. Розрахувати значення правої частини вихору $\left(\frac{\text{гП} \cdot \text{дам}}{\text{год}} \right)$ у внутрішніх вузлах сітки за даними в найближчих чотирьох вузлах, тобто за чотири точковим шаблоном.

Таблиця 6.1

j	i					
	1	2	3	4	5	6
1	-	-0,225	-0,302	-0,210	-0,012	-
2	-0,304	-0,284	-0,370	-0,269	-0,014	-0,017
3	-0,203	-0,273	-0,424	-0,383	-0,113	-0,092
4	-0,142	-0,181	-0,261	-0,241	0,098	0,113
5	-0,031	-0,046	-0,015	0,026	0,358	0,422
6	-	-0,051	-0,012	-0,020	0,290	-

Вважати межовими умовами значення $q_{i,j}$ при $i=1,6$; $j=2,3,4,5$ та при $j=1,6$; $i=2,3,4,5$.

6.13 Використовуючи межові значення q із таблиці 6.1, розрахувати для внутрішніх вузлів поле $q \frac{\text{гп} \cdot \text{дам}}{\text{год}}$ за методом Річардсона. Виконати чотири ітерації і порівняти результат з точними значеннями q , наведеними в таблиці 6.1. Використати значення правої частини F , які розраховані в задачі 6.12.

6.14 Розрахувати поле тенденцій q за методом Лібмана для області 4×4 вузлів. Виконати чотири ітерації. Оцінити швидкість збіжності, порівнюючи значення q на відповідних ітераціях, які отримані за методами Річардсона і Лібмана. Використати значення правої частини, які отримані в задачі 6.12. Задати межові умови відповідно до задачі 6.1.

6.15 Розрахувати поле тенденцій q , використовуючи експериментальний метод Лібмана, для області 4×4 вузлів. Виконати чотири ітерації і оцінити швидкість збіжності ітераційного процесу порівнюючи результати, одержані в задачах 6.13, 6.14, 6.15. Взяти $\alpha=0,3$. Використати значення правої частини, отримані в задачі 6.12. Межові умови задати відповідно до таблиці 6.1.

6.16 Розрахувати поле тенденцій, використовуючи екстрапольований метод Лібмана, для області 4×4 вузлів при нольових межових умовах. Оцінити швидкість збіжності. В якості правих частини використати значення F , розраховані в задачі 6.12.

6.17 Привести формули для обчислення середньої кінетичної енергії і середньої ентропії

$$k = \frac{1}{2} \overline{(u_g^2 + v_g^2)}^s ; \quad \varepsilon = \overline{(\Omega_g + \ell)^2}^s ,$$

де s означає осереднення в горизонтальній площині по всіх внутрішніх точках сітки.

В якості вихідної інформації використати значення геопотенціала у вузлах сітки.

6.18 Отримати рівняння дивергенції з урахуванням членів порядку одиниці і $O(Ki)$ в квазісоленоїдальному наближенні.

6.19 Представити рівняння вітрового балансу в соленоїдальному наближенні в скінченнорізницевому вигляді.

6.20 Записати скінченнорізницеву схему рівняння вихору для баротропної атмосфери в соленоїдальному наближенні.

6.21 Скласти процедуру чисельної реалізації квазісоленоїдальної моделі для середнього рівня баротропної атмосфери.

Відповіді та розв'язання.

6.1 $G_1(r) = 1.1$; $G_2(r) = 0.7$; $G_3(r) = 0.3$; $G_4(r) = 0.2$; $G_5(r) = 0$;

6.2 Розв'язання: виходимо із розв'язку прогностичного рівняння у вигляді

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \ell A_{\Omega g}(r, \psi) \ln \frac{R}{r} r dr d\psi.$$

При додатній адвекції геострофічного вихору швидкості, тобто при $A_{\Omega g} > 0$, $\frac{\partial H}{\partial t} < 0$ (висота ізобаричної поверхні H зменшується з часом),

оскільки $\ell > 0$ (в північній півкулі) і функція впливу $\ln \frac{R}{r}$ додатна; додатні також прирости змінних інтегрування dr і $d\psi$, оскільки нижні границі інтегрування менші за верхні. При відємному значенні адвекції ($A_{\Omega g} < 0$)

величина $\frac{\partial H}{\partial t} > 0$, тобто висота ізобаричної поверхні зростає або збільшується атмосферний тиск біля цієї поверхні.

6.3 Вказівки: використати центральні різниці. Вважати, що $\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{i,j} \delta t = q_{i,j}$.

$$q_{i-1,j} + q_{i+1,j} + q_{i,j-1} + q_{i,j+1} - 4q_{i,j} - F_{i,j}, \text{ де}$$

$$F_{i,j} = \frac{\ell_{i,j} (\delta s)^2}{g} (A_{\Omega g})_{i,j}.$$

6.4 70,7 і 35,4 хв. Відповідно до кроків 300 і 500 км.

6.7 Значення коефіцієнтів $\frac{\text{гПа}}{\text{см}}$

P гПа	TK	a_p
1000	287,4	51,3
850	287,7	45,0
700	268,5	38,5
500	251,9	29,3
300	228,5	19,4

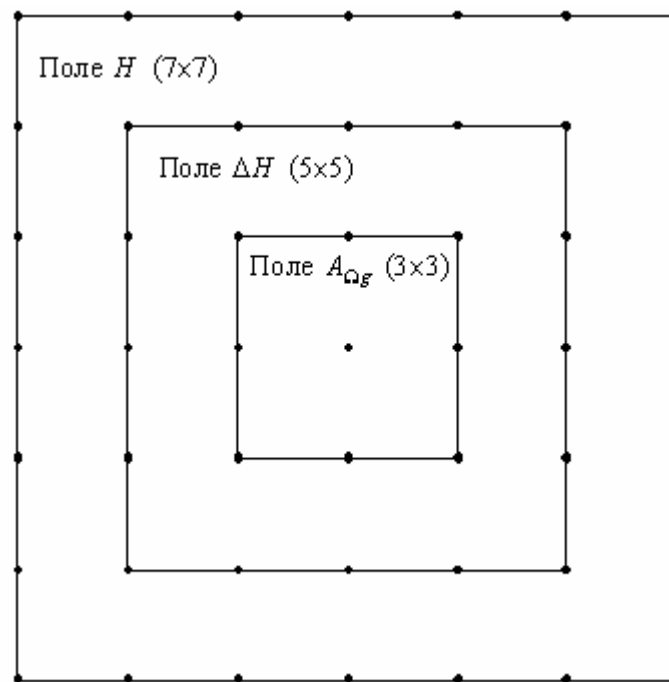
6.8 Вказівки: для визначення знака $\frac{\partial H}{\partial t}$, який залежить від динамічного чинника $A_{\Omega g}$, треба аналізувати перший потрійний інтеграл в розв'язку Булєєва-Марчука, урахувавши, що знаки $A_{\Omega g}$ і $\frac{\partial H}{\partial t}$ протилежні.

Для визначення знака $\frac{\partial H}{\partial t}$, який залежить від термічного чинника A_{Tg} , треба проаналізувати другий потрійний інтеграл. Врахувати, що функція впливу для термічного чинника має різні знаки вище і нижче рівня прогнозу і що для ізобаричної поверхні 1000 гПа вся область інтегрування знаходиться вище рівня прогнозу.

6.9 Використати вказівки до вправи 6.8.

$$\mathbf{6.10} \quad (A_T)_{700-500} = 0.7436 \cdot 10^{-4} \frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}; \quad (A_T)_{500-300} = 1.053 \cdot 10^{-3} \frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}.$$

6.11 Вказівки: обчислення поля $A_{\Omega g}$ потребує розрахунків лапласіанів H (поле ΔH складається із 5×5 вузлів) і похідних $\frac{\partial \Delta H}{\partial x}$, $\frac{\partial \Delta H}{\partial y}$, тому адвекцію можна розрахувати лише в дев'яти внутрішніх вузлах (див. рисунок).



Робоча формула відповідно до умов вправи має вигляд

$$(A_{\Omega g})_{i,j} \approx \frac{K}{\sin^2 \varphi_{i,j}} \left\{ [(\Delta H)_{i+1,j} - (\Delta H)_{i-1,j}] (H_{i,j+1} - H_{i,j-1}) - [(\Delta H)_{i,j+1} - (\Delta H)_{i,j-1}] (H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) \right\}$$

де ΔH - це величина, що не містить множника $\frac{1}{d^2}$ (тобто $\frac{1}{9 \cdot 10^{10} \text{ м}^2}$), який ввійшов в коефіцієнт $k = 0.139 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-2}$

6.12 Значення правої частини прогностичного рівняння $F \frac{\text{дам}}{\text{год}}$.

-0,036	0,201	0,099	-0,355
-0,001	0,409	0,485	0,061
0,002	0,183	0,444	-0,275
-0,094	-0,233	-0,022	-0,596

Вказівки: виконати розрахунки з використанням розрахунково-графічного пакета MATLAB

6.13 Значення $q_{i,j}^{(4)}$ на четвертій ітерації

-0,223	-0,278	-0,181	0,034
-0,183	-0,284	-0,240	-0,040
-0,102	-0,122	-0,055	0,203
-0,002	0,049	0,129	0,390

Вказівки: виконати розрахунки з використанням розрахунково-графічного пакета MATLAB. Вважати, що на нульовій ітерації $q_{i,j}^{(0)} = 0$ у всіх внутрішніх вузлах; межові умови взяти із таблиці 6.1.

6.14 Значення $q_{i,j}$ на четвертій ітерації

-0,246	-0,328	-0,245	-0,105
-0,225	-0,384	-0,359	-0,102
-0,157	-0,238	-0,226	0,105
-0,037	-0,005	0,033	0,362

Використати вказівки до вправи 6.13.

6.15 Значення $q_{i,j}^{(4)}$ на четвертій ітерації

-0,270	-0,367	-0,275	-0,015
-0,242	-0,433	-0,384	-0,113
-0,188	-0,262	-0,242	0,097
-0,047	-0,016	0,025	0,357

Використати вказівки до вправи 6.13.

6.16 Вказівки: вважати, що на нульові ітерації значення $q_{i,j}^{(0)}$ дорівнюють нулю у всіх внутрішніх вузлах сітки. Розрахунки виконати з використанням розрахунково-графічного пакета MATLAB.

6.17 Вказівки: 1) використати такі одиниці вимірювання: геопотенціал – в геопотенціальних декаметрах, крок сітки – в сотнях кілометрів; енергія одиничної маси в $\text{м}^2\text{с}^{-2}$, енстрофія – в 10^{-10}с^{-2} .

2) Для апроксимації лапласіана використати різницевий аналог

$$(\Delta\Phi)_{i,j} = \frac{1}{2d^2}(\Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i-1,j-1} + \Phi_{i+1,j-1} + \Phi_{i+1,j+1} + 4\Phi_{i,j});$$

перші похідні по координатах представити через центральні різниці.

3) При обчисленні енстрофії переносний вихор ℓ відрахувати від його значення $12,6 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-1}$, яке відповідає широті $\varphi=60^\circ$. Вважати, що поле $\sin \varphi$ задане у вузлах сітки. Робочі формули мають вигляд

$$k = \frac{5.65}{d^2} \bar{K}_{i,j}^{(s)},$$

де
$$K_{i,j} = \frac{1}{\sin^2 \varphi_{i,j}} \left[(H_{i+1,j} - H_{i-1,j})^2 (H_{i,j+1} - H_{i,j-1})^2 \right];$$

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{i,j}^{(s)},$$

де
$$\bar{\varepsilon}_{i,j}^{(s)} = \left[\frac{3.36}{d^2 \sin \varphi_{i,j}} (H_{i+1,j+1} + H_{i-1,j+1} + H_{i-1,j-1} + H_{i+1,j-1} - 4H_{i,j}) + 14.58 \sin \varphi_{i,j} - 12.6 \right]^2.$$

Розділ 7

Прогностичні моделі, які базуються на повних рівняннях гідротермодинаміки

Неперетворені рівняння гідротермодинаміки в метеорології називають повними (в науковій літературі їх також називають примітивними), а прогностичні моделі, які побудовані на основі цих рівнянь – негеострофічними або моделями за повними рівняннями, хоча в більшості негеострофічних моделей третє рівняння руху використовується у вигляді рівняння статички, тобто у спрощеному вигляді.

7.1 Повні рівняння баротропної моделі атмосфери

На перших етапах розвитку чисельних методів прогнозу як найбільш прості (фільтровані), так і значно складніші моделі (за повними рівняннями) будувалися для баротропної атмосфери.

Повні рівняння баротропної атмосфери і в теперешній час досить широко використовуються при моделюванні атмосферних процесів. Один із варіантів цих рівнянь називають рівняннями „мілкої води”. Отримаємо ці рівняння шляхом таких міркувань.

Розглянемо тонкий шар однорідної ідеальної рідини ($\rho = const$), яка обмежена знизу горизонтальною поверхнею $z = 0$, а зверху – вільною поверхнею висотою $h(x, y, t)$, вище якої розташоване середовище з дуже малою густиною. Тоді на вільній поверхні $p = p_0 = const$. Оскільки $\rho = const$, із рівняння статички $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (\rho g) = 0, \quad (7.1)$$

де s - горизонтальні координати x та y .

Із рівності (7.1) випливає, що горизонтальний градієнт тиску $\frac{\partial p}{\partial s}$ не змінюється з висотою в розглядаваному шарі атмосфери, тому складові геострофічного вітру u_g і v_g також не змінюються з висотою

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial v_g}{\partial z} = 0.$$

Відомо, що в вільній атмосфері реальний (фактичний) вітер близький до геострофічного, тому можна вважати, що і реальний вітер не залежить від висоти, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{\partial v}{\partial z} \approx 0 \quad (7.2)$$

Відповідно до формул переходу від декартової системи координат до ізобаричної похідна

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho g \frac{\partial h}{\partial s} \quad \text{або} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = g \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (7.3)$$

де $\Phi = gh$ - геопотенціал поверхні $h(x, y, t)$; $s = x, y$.

З урахуванням (7.2) і (7.3) для розглядуваного середовища (мілкої води) рівняння руху набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \ell u, \end{aligned} \quad (7.4)$$

де $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ і $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ відповідно до (7.1) не залежать від висоти.

Для середовища, де $\rho = const$ рівняння нерозривності має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (7.5)$$

Після інтегрування (7.5) по z від 0 до h отримаємо

$$w_{z=h} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (7.6)$$

Зауважимо, що при одержанні рівняння (7.6) була врахована рівність (7.2), тобто незалежність u і v від висоти, а також нижня межа умова: при $z = 0$ вертикальна швидкість $w = 0$. На висоті h вважається, що частинки повітря, які знаходяться на вільній поверхні, не залишають цю поверхню, а коливаються разом з нею, тому вертикальну швидкість частинок можна

виразити через висоту h , тобто через висоту шару атмосфери, який розглядається. Оскільки h є функцією горизонтальних координат і часу, тобто $h = h(x, y, t)$, маємо

$$w_{z=h} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (7.7)$$

Підставимо (7.7) в (7.6) і введемо геопотенціал вільної поверхні $\Phi = gh$, в результаті отримаємо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (7.8)$$

або в дивергентній формі

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} = 0 \quad (7.9)$$

Рівняння (7.4) і (7.8) являють собою замкнену систему рівнянь мілкої води, яка використовується при моделюванні атмосферних процесів, зокрема при побудові прогностичних моделей. Наприклад, на основі вказаних рівнянь можна за допомогою сіткових методів прогнозувати швидкість вітру і геопотенціал кроками за часом. При цьому необхідно задавати початкові умови

$$f(x, y, t) = f(x, y, t_0),$$

де $f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \Phi \end{Bmatrix}$, t_0 - строк спостережень, і ставити межові умови. Наприклад, у

вигляді: $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0$.

7.2 Система повних рівнянь для бароклінної атмосфери та її розв'язання

7.2.1 Повні рівняння в ізобаричних координатах. Початкові та межові умови

Сучасні оперативні моделі чисельного прогнозу полів метеорологічних величин ґрунтуються на використанні повної системи рівнянь гідротермодинаміки. Це стало можливим завдяки досягненням в області динамічної метеорології і обчислювальної математики, які

дозволили зняти обмеження фільтрованих моделей щодо зв'язків полів вітру і тиску і перейти до побудови моделей за повними рівняннями.

Розглянемо в загальних рисах процедуру прогнозу полів метеорологічних величин в рамках різних моделей. Для цього запишемо систему рівнянь гідротермодинаміки в ізобаричних координатах для великомасштабних рухів вільної атмосфери, тобто без урахування сил в'язкості; не будемо також урахувати і неадіабатичний приплив тепла ε . При таких припущеннях система рівнянь гідротермодинаміки суттєво спрощується і набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + \ell v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - \ell u; \\ T &= -\frac{pg}{R} \frac{\partial H}{\partial p}; \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{c^2}{Rp} \tau &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

В системі (7.10) $c^2 = \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma)$ - параметр статичної стійкості; решта умовних позначень – загальноприйняті. Система (7.10) з п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими (u, v, τ, H, T) є замкненою і дозволяє розрахувати значення перелічених невідомих в будь-який момент часу у межах області інтегрування.

Ця система включає три прогностичних рівняння, які містять в собі похідні за часом, і два діагностичних. За допомогою прогностичних рівнянь можна розрахувати майбутні значення складових швидкості вітру u, v і температури T . Діагностичні рівняння дозволяють за прогностичним значеннями функцій u, v, T визначити решту функції: τ і H .

Для розв'язання системи (7.10) необхідно задати початкові умови. Вони задаються для тих метеорологічних величин, від яких в системі рівнянь є похідні за часом, тобто для функцій u, v, T .

$$\begin{aligned}
u(x, y, p, t) &= u(x, y, p, t_0); \\
v(x, y, p, t) &= v(x, y, p, t_0); \\
T(x, y, p, t) &= T(x, y, p, t_0) \\
\text{або } H(x, y, p, t) &= H(x, y, p, t_0),
\end{aligned}
\tag{7.11}$$

де t_0 - строк спостережень. Початкові значення $H(x, y, p, t_0)$ визначаються за допомогою рівняння статички; для цього треба задавати тиск на рівні моря. Значення τ розраховується за допомогою рівняння нерозривності.

Початкові умови, які задаються для розв'язання системи (7.10), представляють собою тривимірні поля трьох метеорологічних величин (u, v, T) або (u, v, H) , які можна одержати за даними вимірювань на мережі метеорологічних станцій.

Межові умови повинні віддзеркалювати вплив навколишнього середовища на процеси в області інтегрування, які описуються рівняннями системи (7.10). Розглянемо спочатку умови за вертикальною координатою.

1. На верхній межі атмосфери доцільно поставити умову відсутності потоку маси, тобто

$$\rho w|_{z \rightarrow \infty} = 0 \text{ або, оскільки } \rho \neq 0, w|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

де $w = \frac{dz}{dt}$ - лінійна вертикальна швидкість. Відомо, що при $z \rightarrow \infty$ тиск дорівнює нулю, тому на верхній межі атмосфери виконується умова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{7.12}$$

Ця рівність означає, що тиск на досить великих висотах змінюється тільки по вертикалі.

Ізобарична вертикальна швидкість

$$\tau = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \text{ або}$$

з урахуванням (7.12) і рівняння статички

$$\tau|_{p \rightarrow 0} = w \frac{\partial p}{\partial z} = -w \rho g.$$

Оскільки $\rho w = 0$ при $z \rightarrow \infty$, то на верхній межі атмосфери, тобто при $p = 0$ виконується умова: $\tau = 0$. Отже верхню межу умову можна записати у такому вигляді

$$\text{при } p = 0 \quad \tau = 0. \quad (7.13)$$

2. На нижній межі атмосфери, яка при відсутності нерівностей поверхні Землі ототожнюється з рівнем $z = 0$, також береться умова $\rho w = 0$ або $w = 0$. Це означає, що вираз для лінійної вертикальної швидкості

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{g}{g} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d(gz)}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} = 0$$

дозволяє записати нижню межу умову у вигляді:

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{d\Phi}{dt} = 0. \quad (7.14)$$

Але в ізобаричній системі координат за нижню межу приймається не рівень $z = 0$, а ізобарична поверхня $p = P_0 = 1000$ гПа. Для того, щоб умову (7.14) можна було б використовувати в ізобаричній системі координат, вважається, що поверхня 1000 гПа збігається з рівнем $z = 0$, і тоді умова (7.14) записується таким чином

$$\begin{aligned} \text{при } P = P_0 \quad \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u \frac{\partial\Phi}{\partial x} + v \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \tau \frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0 \quad \text{або} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} + \tau \frac{\partial H}{\partial p} &= 0, \end{aligned} \quad (7.15)$$

де $H \equiv z$ - лінійна висота ізобаричної поверхні $p = P_0 = 1000$ гПа. З урахуванням рівняння статки, відповідно до якого $\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{RT}{pg}$, нижня межа умова (7.15) в ізобаричних координатах остаточно записується так

$$\text{при } p = P_0 \quad \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{RT_0}{P_0 g} \tau_0 = 0, \quad (7.16)$$

де T_0, τ_0 - температура повітря і ізобарична вертикальна швидкість на поверхні $p = P_0 = 1000$ гПа.

Бічні межові умови задаються в залежності від того, для якої території реалізується модель. Так, для глобальних моделей бічні межові умови не потрібні. В моделях для обмежених територій бічні умови

отримуються різними способами. Один з них ґрунтується на використанні так званих вкладених сіток. При використанні цього способу для усієї області, яка охоплює обмежену територію (прогностичну область) і сусідні райони (наприклад, для півкулі), будується прогностична фонові скінченнорізницева модель, яка реалізується на сітці з великими кроками. В межах області прогнозу будується сітка з меншими кроками (вкладена сітка), на якій за методом скінченних різниць розв'язуються рівняння тієї ж моделі, що і на грубій сітці (груба – це сітка з відносно великими кроками). Необхідні для дрібної сітки бічні межові умови визначаються за допомогою фонові моделі з грубим розподілом.

Зауважимо, що схеми інтегрування рівнянь моделей на декількох вкладених одна в одну сітках з усе меншими кроками дістали назву телескопічних.

Найбільш прості умови на бічних межах Γ мають вигляд

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (7.17)$$

Ці умови означають сталість шуканих функцій (u, v, T) на бічних межах, що в помірних широтах не відповідає реальним процесам. Тому такі умови називають фіктивними. Умови (7.17) більш придатні для екваторіальних широт, де часова мінливість метеорологічних величин значно менша в порівнянні з помірними широтами.

7.2.2 Інтегрування системи повних рівнянь гідротермодинаміки.

Запишемо систему (7.10) так, що локальні похідні і сила Коріоліса залишаться в лівих частинах рівнянь, а суми решти членів запишуться у вигляді F_u, F_v, F_T .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \ell v &= F_u; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \ell u &= F_v; \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= F_T; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0; \\ T &= -\frac{pg}{R} \frac{\partial H}{\partial p}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

де

$$F_u = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right); \quad (7.19)$$

$$F_v = - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right); \quad (7.20)$$

$$F_T = - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{c^2}{Rp} \tau \right). \quad (7.21)$$

Із системи (7.18) видно, що для її розв'язання необхідно визначити функції F_u, F_v, F_T . Формули (7.19) – (7.21) показують, що для визначення вказаних функцій, треба мати значення ізобаричної вертикальної швидкості τ , якої немає в даних спостережень. Тільки після того, як буде знайдено τ , можна проінтегрувати прогностичні рівняння системи (7.18), тобто рівняння руху і припливу тепла.

Для розв'язання системи (7.18) методом сіток в області прогнозу будується просторово-часова сітка, вузли якої розташовуються на ізобаричних поверхнях. Положення цих вузлів у просторі і в часі визначається безрозмірними координатами: $i = \frac{x}{\delta x}$; $j = \frac{y}{\delta y}$; $k = \frac{p}{\delta p}$ і $s = \frac{t}{\delta t}$, де $\delta x, \delta y, \delta p$ - просторові кроки по координатах x, y, z відповідно, а δt - часовий крок.

Алгоритм розв'язання системи (7.18) з заданими початковими і межовими умовами можна представити таким чином.

1. Диференціальні рівняння системи (7.18) замінюються їх скінченнорізницевиими аналогами, при цьому використовуються певні схеми інтегрування за часом (явні, неявні, напівнеявні).

2. Шляхом інтегрування рівняння нерозривності з використанням початкових даних (полів вітру $u_{i,j,k}^{t_0}, v_{i,j,k}^{t_0}$) у вузлах сітки визначаються значення ізобаричної вертикальної швидкості $\tau_{i,j,k}^{t_0}$.

3. З використанням отриманих полів $\tau_{i,j,k}^{t_0}$ і початкових даних для температури і геопотенціалу ($T_{i,j,k}^{t_0}, \Phi_{i,j,k}^{t_0}$) обчислюються праві частини прогностичних рівнянь $(F_u)_{i,j,k}^{t_0}, (F_v)_{i,j,k}^{t_0}, (F_T)_{i,j,k}^{t_0}$.

4 Далі, використовуючи скінченнорізницеву апроксимацію похідних за часом і сіткові значення правих частин F_u, F_v, F_T , за допомогою прогностичних рівнянь обчислюються майбутні значення складових швидкості вітру і температури $u_{i,j,k}^{t_0+\delta t}, v_{i,j,k}^{t_0+\delta t}, T_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, тобто прогностичні

значення метеовеличин на кінець кроку за часом. При цьому при обчисленні цих величин у вузлах, найближчих до бічних меж, використовуються задані бічні умови.

5 Потім, використовуючи отримані значення $u_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $v_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, за допомогою рівняння нерозривності і верхньої межевої умови (7.13) розраховуються сіткові значення ізобаричної вертикальної швидкості на кінець першого часового кроку $\tau_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$.

Для визначення висоти H ізобаричної поверхні $P_0=1000$ гПа в момент часу $t_0 + \delta t$ використовується нижня межева умова (7.16). Значення $H_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$ усіх ізобаричних поверхонь, розташованих вище, визначаються за допомогою отриманих значень $T_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$ із рівняння статки

$$H(p) = \frac{R}{g} \int_p^{P_0} \frac{T}{p} dp = \frac{R\bar{T}}{g} \ln \frac{P_0}{p}. \quad (7.22)$$

Таким чином, визначаються сіткові значення всіх п'яти метеорологічних величин в момент часу $t_0 + \delta t$: $u_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $v_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $T_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$, $H_{i,j,k}^{t_0+\delta t}$.

Процедура чисельного інтегрування повторюється кроками за часом, доки не будуть одержані значення вказаних метеорологічних величин у вузлах сітки на заданий момент часу прогнозу.

Зауважимо, що сітки, які використовуються при побудові скінченнорізницевих схем, повинні задовольняти багат вимог, таких як узгодженість, точність, економічність обчислень, збіжність і стійкість розв'язань скінченнорізницевих рівнянь. Тому для побудови гідродинамічних моделей використовуються просторово-часові сітки спеціальної структури, на яких різні метеорологічні величини можуть розташовуватись в різних вузлах сітки. Такі сітки вперше були запропоновані Еліасеном і дістали назву розхитаних (шахових) сіток. Розглянемо структуру одного із видів таких сіток.

7.3 Шахові сітки

Існує декілька варіантів сіток, розхитаних за простором і за часом. На сітках, які розхитані тільки за простором, різні метеорологічні величини (залежні змінні) розташовуються в різних точках, але в кожний наступний момент часу обчислюються у тих же точках, де вони

розташовуються у попередній момент часу. Сітки, які розхитані тільки за часом передбачають обчислення усіх залежних величин в одних точках в один момент часу, але в інших точках в різні моменти часу. На сітках, які розхитані за простором і за часом, залежні змінні розташовуються в різних точках сітки в один момент часу і в незбіжних точках в різні моменти часу.

Для прикладу розглянемо сітку, яка розхитана за часом. Такою може бути сітка, яка складається з двох квадратних сіток з кроком $\delta x = \delta y = \delta r$, які в свою чергу зсунуті одна відносно другої на крок (δr) . У вузлах однієї з цих сіток розташовуються усі залежні змінні (в одних і тих самих збіжних точках), а у вузлах другої сітки обчислюються центральні скінченні різниці, тобто похідні. На звичайних сітках (нерозхитаних) усі залежні змінні, тобто метеорологічні величини та їх похідні обчислюються і розташовуються в усіх точках (вузлах) сітки.

На рисунку (7.1) зображена частина шахової сітки, яка складається з двох звичайних сіток з подвійним кроком по x і y , тобто вони зсунуті на один крок по x і y .

Вузли однієї сітки позначені „ноликами”, а другої – „хрестиками”

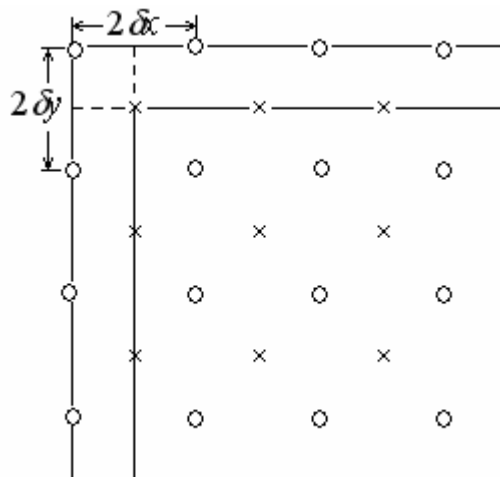


Рисунок 7.1 – Схема шахової сітки з подвійним кроком

Вихідна інформація розташовується у вузлах однієї сітки, а величини, які обчислюються, розташовуються у вузлах другої сітки. За рахунок цього досягається зменшення кількості залежних змінних і обсягу обчислень.

Для отримання вихідних даних в тих вузлах, де вони потрібні для обчислення похідних центральними різницями, використовуються оператори осереднення \bar{f}^r , які в загальному вигляді можна представити так:

$$\bar{f}^r = \frac{1}{2}(f_{q+1} + f_{q-1}), \quad (7.23)$$

$$f_r = \frac{1}{2\delta r}(f_{q+1} - f_{q-1}), \quad (7.24)$$

де r - розмірна координата (x, y, p, t) ; q - відповідна безрозмірна координата (i, j, k, s) ; f - значення залежних змінних (метеорологічних величин): u, v, τ, T, H ; індекс r в (7.23) означає координату, за якою здійснюється осереднення, а індекс r унизу в (7.24) означає координату, за якою визначається похідна; δr - крок сітки.

Представимо формули для розрахунку метеовеличин та їх похідних у вузлі „хрестик” за вихідними даними у вузлах – „ноликах”. Отже, значення деякої метеорологічної величини f відомі у чотирьох вузлах – „ноликах”, які оточують точку розрахунку – „хрестик” (рис. 7.2).

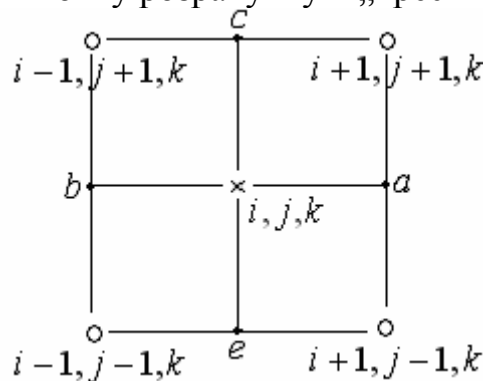


Рисунок 7.2 – Шаблон для розрахунку метеорологічних величин та їх похідних у вузлі шахової сітки з кроком d

Для представлення скінченною різницею першої похідної $\frac{\partial f}{\partial x}$ у вузлі з координатами i, j, k треба мати значення функції f у точках a і b , а для похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ необхідні дані в точках c і e , тоді

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_a - f_b}{2d}; \quad (7.25)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j,k} \approx \frac{f_c - f_e}{2d}. \quad (7.26)$$

Але функція f відома лише у вузлах „ноликах”. Якщо використати формулу (7.23), можна розрахувати значення f в точках a і b , тобто в цих точках можна отримати середні значення функції f , при цьому осереднення здійснюється по координаті y

$$\bar{f}_a^y = \frac{1}{2}(f_{i+1,j+1,k} + f_{i+1,j-1,k}). \quad (7.27)$$

$$\bar{f}_b^y = \frac{1}{2}(f_{i-1,j+1,k} + f_{i-1,j-1,k}). \quad (7.28)$$

Підставимо (7.27), (7.28) в вираз (7.25), отримаємо

$$\left(\frac{\bar{\partial f}^y}{\partial x}\right)_{i,j,k} \equiv (\bar{f}_x^y)_{i,j,k} \approx \frac{1}{4d}(f_{i+1,j+1,k} + f_{i+1,j-1,k} - f_{i-1,j+1,k} - f_{i-1,j-1,k}) \quad (7.29)$$

Для першої похідної $\frac{\partial f}{\partial y}$ у вузлі i, j, k треба отримати f_c і f_e шляхом осереднення по координаті x , тобто

$$\bar{f}_c^x = \frac{1}{2}(f_{i-1,j+1,k} + f_{i+1,j+1,k}); \quad (7.30)$$

$$\bar{f}_e^x = \frac{1}{2}(f_{i-1,j-1,k} + f_{i+1,j-1,k}). \quad (7.31)$$

Після підстановки (7.30), (7.31) в формулу (7.26) отримаємо

$$\left(\frac{\bar{\partial f}^x}{\partial y}\right)_{i,j,k} \equiv (\bar{f}_x^y)_{i,j,k} \approx \frac{1}{4d}(f_{i-1,j+1,k} + f_{i+1,j+1,k} - f_{i-1,j-1,k} - f_{i+1,j-1,k}). \quad (7.32)$$

Похідну за вертикальною координатою (наприклад, p) через скінченні різниці можна представити у вигляді

$$\left(\frac{\bar{\partial f}}{\partial p}\right)_{i,j,k}^{xy} \equiv (\bar{f}_p^{xy})_{i,j,k} \approx \frac{\bar{f}_{i,j,k+1}^{xy} - \bar{f}_{i,j,k-1}^{xy}}{p_{k+1} - p_{k-1}}, \quad (7.33)$$

де $\bar{f}_{i,j,k+1}^{xy}$, і $\bar{f}_{i,j,k-1}^{xy}$ - значення функції на рівнях $k+1$, $k-1$, які визначаються як середні із значень величини f в чотирьох вузлах – „ноликах”, оточуючих вузол – „хрестик” на відповідних рівнях (рис. 7.3).

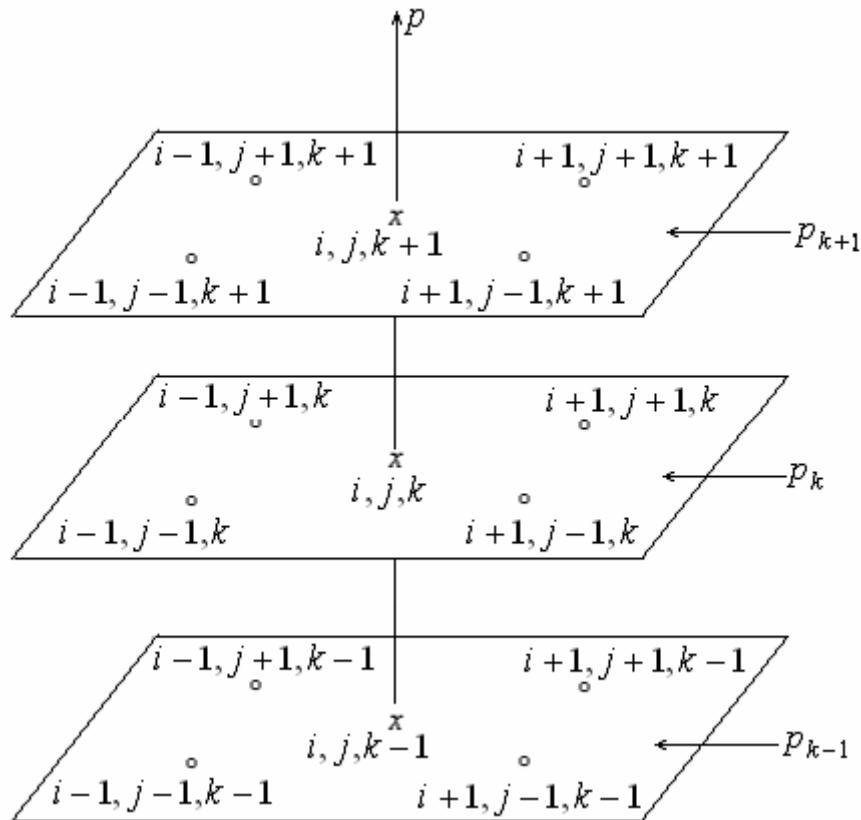


Рисунок 7.3 – Розташування вузлів сітки на різних ізобаричних поверхнях (i, j, k - координати вузла, для якого розраховується похідна $\frac{\partial f}{\partial p}$)

Для кращого розуміння процедури обчислення за формулою (7.33) розглянемо рисунок, на якому зображені шаблони для розрахунку похідних і осереднених величин в точці – хрестик. Цей вузол, як і оточуючі вузли – нолики на усіх рівнях k , $k+1$ і $k-1$ мають одні й ті ж координати. Для того щоб обчислити центральну похідну за вертикальною координатою p , треба мати інформацію на трьох ізобаричних поверхнях (p_{k-1} , p_k , p_{k+1}), тоді розрахована похідна буде віднесена до поверхні p_k . Для отримання однобічної похідної достатньо мати інформацію на двох рівнях p_k і p_{k+1} або p_k і p_{k-1} . Таку похідну можна відносити до будь-якого з перелічених рівнів.

Повернемося до центральної різниці для похідної $\frac{\partial f}{\partial p}$ (7.33). Для її отримання в точці з координатами i, j на рівні k треба мати значення функції f у вузлах – хрестиках на рівнях $k+1$ і $k-1$, тобто в точках з координатами $i, j, k+1$ та $i, j, k-1$. Але інформація є тільки у вузлах – ноликах, тому для отримання значень f в точках $i, j, k+1$ та $i, j, k-1$ треба застосувати операцію осереднення, тобто

$$\bar{f}_{i,j,k+1}^{xy} = \frac{1}{4} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i-1,j+1,k+1} + f_{i-1,j-1,k+1} + f_{i+1,j-1,k+1}).$$

Аналогічно на рівні $k-1$ отримаємо

$$\bar{f}_{i,j,k-1}^{xy} = \frac{1}{4} (f_{i+1,j+1,k-1} + f_{i-1,j+1,k-1} + f_{i-1,j-1,k-1} + f_{i+1,j-1,k-1}).$$

Підставляючи ці вирази в формулу (7.33), отримаємо значення похідної по вертикальній координаті p з осередненням по координатах x та y .

Якщо похідна замінюється не центральними різницями, а однобічними, то достатньо інформацію мати на двох рівнях k і $k+1$, або k і $k-1$. Тоді формула для похідної за вертикальною координатою буде мати такий вигляд

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{i,j,k+1}^{xy} = (\bar{f}_p^{xy})_{i,j,k+1} \approx \frac{1}{4(p_{k+1} - p_k)} [(f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i-1,j+1,k+1} + f_{i-1,j-1,k+1} + f_{i+1,j-1,k+1}) - (f_{i+1,j+1,k} + f_{i-1,j+1,k} + f_{i-1,j-1,k} + f_{i+1,j-1,k})]$$

Цю похідну можна відносити до рівня $k+1$ або k , тоді це буде однобічна різниця.

Відзначимо, що в сучасних моделях шахові сітки можуть складатися також із двох сіток, зсунутих відносно одна одної на півкроку $\left(\frac{d}{2}\right)$. Тоді індекси, які вказують координати вузлів сітки, будуть половинними.

Наприклад, формула осереднення буде мати вигляд

$$\bar{f}_q^r = \frac{1}{2} (f_{q+\frac{1}{2}} + f_{q-\frac{1}{2}}). \quad (7.34)$$

Вираз для першої похідної запишеться як

$$(f_r)_q \approx \frac{1}{\delta r} (f_{q+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}}). \quad (7.35)$$

На закінчення нагадаємо скінченнорізницеві аналоги для першої похідної у вузлі звичайної сітки, які найчастіше використовуються при розв'язанні системи рівнянь гідротермодинаміки

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\delta r}(f_{q+1} - f_q); \quad (7.36)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\delta r}(f_q - f_{q-1}); \quad (7.37)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{2\delta r}(f_{q+1} - f_{q-1}); \quad (7.38)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \approx \frac{1}{\delta r}(f_{q+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}}). \quad (7.39)$$

При запису диференціальних рівнянь в скінченнорізницевому вигляді виникає необхідність в осередненні функцій по деякій координаті або по декількох з них. В найбільш простому варіанті при осередненні по двох точках на одній координатній осі використовується така формула

$$\bar{f}_q^r = \frac{1}{2}(f_{q+\frac{1}{2}} + f_{q-\frac{1}{2}}). \quad (7.40)$$

Для подвійного осереднення будемо мати

$$\bar{\bar{f}}_q^{rr} = \frac{1}{4}(f_{q+1} + 2f_q + f_{q-1}) \quad (7.41)$$

і для похідної з осередненням

$$(\bar{f}_r^r)_q = \frac{1}{2\delta r}(f_{q+1} - f_{q-1}) \quad (7.42)$$

Скінченнорізницеві вирази (7.40) – (7.42) використовуються для апроксимації і згладжування на звичайних сітках.

Формули (7.29), (7.32) використовуються для скінченнорізницевого представлення похідних у вузлах шахової сітки, яка складається з двох звичайних сіток, зсунутих одна відносно другої на один крок. Для осереднення по координатах x та y на такій сітці використовується така формула

$$\bar{\bar{f}}_{i,j,k}^{xy} = \frac{1}{4}(f_{i+1,j+1,k} + f_{i-1,j+1,k} + f_{i-1,j-1,k} + f_{i+1,j-1,k}) \quad (7.43)$$

Якщо шахова сітка складається з двох сіток, зсунутих на пів кроку, то в формулах для розрахунку перших похідних будуть присутні половинні індекси

$$\bar{f}_{i,j,k}^{xy} = \frac{1}{4} \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right) \quad (7.44)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{f}^y}{\partial x} \right)_{i,j,k} \equiv \left(\bar{f}_x^y \right)_{i,j,k} \approx \frac{1}{\delta x} \left(\bar{f}_{i+\frac{1}{2},j,k}^y - \bar{f}_{i-\frac{1}{2},j,k}^y \right) = \quad (7.45)$$

$$= \frac{1}{2\delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right);$$

$$\left(\frac{\partial \bar{f}^x}{\partial y} \right)_{i,j,k} \equiv \left(\bar{f}_y^x \right)_{i,j,k} \approx \frac{1}{\delta y} \left(\bar{f}_{i,j+\frac{1}{2},k}^x - \bar{f}_{i,j-\frac{1}{2},k}^x \right) = \quad (7.46)$$

$$= \frac{1}{2\delta y} \left(f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right).$$

Відзначимо, що на точність чисельного інтегрування рівнянь гідротермодинаміки за методом сіток впливають похибки скінченнорізницевої апроксимації похідних і за простором і за часом. Але вплив похибок скінченнорізницевої апроксимації похідних за простором значно більший, ніж вплив апроксимації похідних за часом. Тому при побудові скінченнорізницевих схем для рівнянь гідротермодинаміки слід перш за все приділяти увагу точності похідних за просторовими координатами.

Вправи до розділу 7

7.1 Записати систему рівнянь для баротропної одновимірної моделі атмосфери

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + gH_x &= 0; \\ H_t + uH_x + Hu_x &= 0. \end{aligned}$$

в скінченнорізницевій формі, використовуючи однобічні різниці для похідних за часом і центральні для просторових похідних. Використати явну схему інтегрування за часом.

7.2 Зробити те саме для системи рівнянь, яка має вигляд

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + u\bar{u}_x^x + g\bar{H}_x^x &= 0; \\ \bar{H}_t^t + u\bar{H}_x^x + H\bar{u}_x^x &= 0.\end{aligned}$$

7.3. Зробити те саме для системи рівнянь, яка має вигляд

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + \bar{u}^{xx}\bar{u}_x^x + g\bar{H}^x &= 0; \\ \bar{H}_t^t + \bar{u}^{xx}\bar{H}_x^x + \bar{H}^{xx}\bar{u}_x^x &= 0.\end{aligned}$$

7.4 Зробити те саме для системи рівнянь, яка має вигляд

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + \frac{1}{2}(\bar{u}^x\bar{u}^x)_x + g\bar{H}_x^x &= 0; \\ \bar{H}_t^t + (\bar{H}^x\bar{u}^x)_x &= 0.\end{aligned}$$

7.5 Зробити те саме для системи рівнянь, яка має вигляд

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + \frac{1}{2}(\overline{uu})_x^x + g\bar{H}_x^x &= 0; \\ \bar{H}_t^t + (\overline{Hu})_x^x &= 0.\end{aligned}$$

7.6 Зробити те саме для системи рівнянь, яка має вигляд

$$\begin{aligned}(\overline{uH})_t^t + (\overline{Huu})_x^x + g\overline{HH}_x^x &= 0; \\ \bar{H}_t^t + (\overline{Hu})_x^x &= 0.\end{aligned}$$

7.7 Застосувати формули (7.29), (7.32), (7.43) для випадку двох змінних x та y для апроксимації виразів: $\overline{f_x^y}$, $\overline{f_y^x}$, $\overline{f^{xy}}$.

7.8 Записати в скінченнорізницевій формі систему рівнянь для баротропної атмосфери

$$\begin{aligned}u_t + \bar{u}^{xy}\bar{u}_x^y + \bar{v}^{xy}u_y^x + g\bar{H}_x^y - \bar{\ell}^{xy}\bar{v}^{xy} &= 0; \\ v_t + \bar{u}^{xy}\bar{v}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{v}_y^x + g\bar{H}_x^y + \bar{\ell}^{xy}\bar{v}^{xy} &= 0; \\ H_t + \bar{u}^{xy}\bar{H}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{H}_y^x + \bar{H}^{xy}(\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x) &= 0.\end{aligned}$$

Віднести всі члени до центрального моменту часу

7.9 Зробити те саме для системи рівнянь

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + \overline{(\bar{u}^{xy}\bar{u}_x^y + \bar{v}^{xy}u_y^x + g\bar{H}_x^y - \bar{\ell}^{xy}\bar{v}^{xy})}^{xy} &= 0; \\ \bar{v}_t^t + \overline{(\bar{u}^{xy}\bar{v}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{v}_y^x + g\bar{H}_y^x + \bar{\ell}^{xy}\bar{u}^{xy})}^{xy} &= 0; \\ \bar{H}_t^t + \overline{[\bar{u}^{xy}\bar{H}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{H}_y^x + \bar{H}^{xy}(\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x)]}^{xy} &= 0.\end{aligned}$$

7.10 Систему рівнянь для бароклінної атмосфери записати в скінченнорізницевому вигляді

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t - \ell v &= -(\bar{u}\bar{u}_x^x + \bar{v}u_y^y + \bar{\tau}\bar{p}^p + g\bar{H}_x^x) = 0; \\ \bar{v}_t^t + \ell u &= -(\bar{u}\bar{v}_x^x + \bar{v}\bar{v}_y^y + \bar{\tau}\bar{v}_p^p + g\bar{H}_y^y) = 0; \\ \bar{u}_x^x + \bar{v}_y^y + \bar{\tau}_p^p &= 0; \\ \bar{\theta}_t^t + u\bar{\theta}_x^x + v\bar{\theta}_y^y + \bar{\tau}\bar{\theta}_p^p &= 0; \\ \bar{H}_p^p + \frac{R}{pg}\left(\frac{p}{P}\right)^\lambda \theta &= 0.\end{aligned}$$

7.11 Записати в скінченнорізницевій формі систему рівнянь для баротропної атмосфери, яка представлена в дивергентному вигляді

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t - \ell v &= -[(\bar{u}\bar{u})_x^x + (\bar{v}\bar{u})_y^y + (\bar{\tau}\bar{u})_p^p + g\bar{H}_x^x] = 0; \\ \bar{v}_t^t + \ell u &= -[(\bar{u}\bar{v})_x^x + (\bar{v}\bar{v})_y^y + (\bar{\tau}\bar{v})_p^p + g\bar{H}_y^y] = 0; \\ \bar{u}_x^x + \bar{v}_y^y + \bar{\tau}_p^p &= 0; \\ \bar{\theta}_t^t + (\bar{u}\bar{\theta})_x^x + (\bar{v}\bar{\theta})_y^y + (\bar{\tau}\bar{\theta})_p^p &= 0; \\ \bar{H}_p^p + \frac{R}{pg}\left(\frac{p}{P}\right)^\lambda \theta &= 0.\end{aligned}$$

7.12 Записати в скінченнорізницевій формі системи рівнянь

$$\begin{aligned}u_t - \ell\bar{v}^t + g\bar{H}_x^t &= f_1; \\ v_t + \ell\bar{u}^t + g\bar{H}_y^t &= f_2,\end{aligned}$$

де f_1, f_2 - відомі функції

7.13 Отримати вирази для u^{S+1} і v^{S+1} в явному вигляді шляхом розв'язання скінченнорізницевих рівнянь, отриманих в задачі 7.12

7.14 Записати в скінченнорізницевій формі систему рівнянь для бароклінної атмосфери, яка представлена у вигляді

$$\begin{aligned} u_t - \ell \bar{v}^t &= -[(\overline{uu})_x^y + (\overline{vu})_y^x + (\overline{\tau u})_p^p + g\overline{H}_x^y] = 0; \\ v_t + \ell \bar{u}^t &= -[(\overline{uv})_x^y + (\overline{v\tau})_y^x + (\overline{\tau v})_p^p + g\overline{H}_y^x] = 0; \\ \bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x + \bar{\tau}_p^p &= 0; \\ \theta_t &= -[(\overline{u\theta})_x^y + (\overline{v\theta})_y^x + (\overline{\tau\theta})_p^p]; \\ \bar{H}_p^p + \frac{R}{pg} \left(\frac{p}{P}\right)^\lambda \theta &= 0. \end{aligned}$$

7.15 Записати в скінченнорізницевій формі рівняння руху

$$\begin{aligned} u_t - \ell \bar{v}^t &= -F_u; \\ v_t + \ell \bar{u}^t &= -F_v, \end{aligned}$$

де F_u, F_v - решта членів рівняння руху, і розв'язати їх відносно майбутніх значень u і v .

7.16 Визначити p, H, T, θ на поверхні $\sigma = \frac{1}{2}$, якщо $p_s = 1020$ гПа. На ізобаричній поверхні 700 гПа $H_{700} = 3020$ м, $T_{700} = 272$ К, а на поверхні 500 гПа $H_{500} = 5580$ м і $T_{500} = 252$ К. Вважати, що температура змінюється лінійно (по координаті p) між вказаними ізобаричними поверхнями, тобто $\frac{\partial T}{\partial p} = \text{const}$.

Відповіді та розв'язання

7.1 Для запису рівнянь в скінченнорізницевому вигляді слід скористатися формулою (7.35).

$$\begin{aligned} \frac{2}{\delta t} \left(u_i^{s+\frac{1}{2}} - u_i^s \right) + u_i^s \frac{\left(u_{i+\frac{1}{2}}^s - u_{i-\frac{1}{2}}^s \right)}{\delta x} + g \frac{\left(H_{i+\frac{1}{2}}^s - H_{i-\frac{1}{2}}^s \right)}{\delta x} &= 0; \\ \frac{2}{\delta t} \left(H_i^{s+\frac{1}{2}} - H_i^s \right) + u_i^s \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^s - H_{i-\frac{1}{2}}^s}{\delta x} + H_i^s \frac{\left(u_{i+\frac{1}{2}}^s - u_{i-\frac{1}{2}}^s \right)}{\delta x} &= 0. \end{aligned}$$

7.2 Для запису рівнянь в скінченнорізницевому вигляді з осередненням слід скористатися формулою (7.42) для просторових і часових похідних.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t} (u_i^{s+1} - u_i^{s-1}) + u_i^s \frac{(u_{i+1}^s - u_{i-1}^s)}{2\delta x} + g \frac{(H_{i+1}^s - H_{i-1}^s)}{2\delta x} &= 0; \\ \frac{1}{2\delta t} (H_i^{s+1} - H_i^{s-1}) + u_i^s \frac{(H_{i+1}^s - H_{i-1}^s)}{2\delta x} + H_i^s \frac{(u_{i+1}^s - u_{i-1}^s)}{2\delta x} &= 0. \end{aligned}$$

7.3 Для відповіді на це питання слід скористатися тією ж формулою, що і в попередній задачі, а для подвійного осереднення – формулою (7.41).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t} (u_i^{s+1} - u_i^{s-1}) + \frac{1}{4} (u_{i+1}^s + 2u_i^s + u_{i-1,s}^s) \frac{(u_{i+1}^s - u_{i-1}^s)}{2\delta x} + g \frac{(H_{i+1}^s - H_{i-1}^s)}{2\delta x} &= 0; \\ \frac{1}{2\delta t} (H_i^{s+1} - H_i^{s-1}) + \frac{1}{4} (u_{i+1}^s + 2u_i^s + u_{i-1}^s) \frac{(H_{i+1}^s - H_{i-1}^s)}{2\delta x} + \\ + \frac{1}{4} (H_{i+1}^s + 2H_i^s + H_{i-1}^s) \frac{(u_{i+1}^s - u_{i-1}^s)}{2\delta x} &= 0. \end{aligned}$$

7.4

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t} (u_i^{s+1} - u_i^{s-1}) + \frac{1}{8\delta x} [(u_{i+1}^s + u_i^s)^2 - (u_i^s + u_{i-1}^s)^2] + g \frac{H_{i+1}^s - H_{i-1}^s}{2\delta x} &= 0; \\ \frac{1}{2\delta t} (H_i^{s+1} - H_i^{s-1}) + \frac{1}{4\delta x} (H_{i+1}^s + H_i^s)(u_{i+1}^s + u_i^s) - (H_{i+1}^s + H_{i-1}^s)(u_i^s + u_{i-1}^s) &= 0. \end{aligned}$$

7.5

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t} (u_i^{s+1} - u_i^{s-1}) + \frac{1}{4\delta x} [(u_{i+1}^s)^2 - (u_{i-1}^s)^2] + g \frac{(H_{i+1}^s - H_{i-1}^s)}{2\delta x} &= 0; \\ \frac{1}{2\delta t} (H_i^{s+1} - H_i^{s-1}) + \frac{1}{2\delta x} (u_{i+1}^s H_{i+1}^s - u_{i-1}^s H_{i-1}^s) &= 0. \end{aligned}$$

7.6

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta t} \left(u_i^{s+1} H_i^{s+1} - u_i^{s-1} H_i^{s-1} \right) + \frac{1}{2\delta x} \left[(u_{i+1}^s)^2 H_i^{s+1} - (u_{i-1}^s)^2 H_i^{s-1} \right] + \\ & + g H_i^s \frac{(H_{i+1}^s - H_{i-1}^s)}{2\delta x} = 0; \\ & \frac{1}{2\delta t} \left(H_i^{s+1} - H_i^{s-1} \right) + \frac{1}{2\delta x} \left(u_{i+1}^s H_{i+1}^s - u_{i-1}^s H_{i-1}^s \right) = 0. \end{aligned}$$

7.7

$$\begin{aligned} \overline{f_y^x} &= \frac{1}{2\delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right); \\ \overline{f_y^y} &= \frac{1}{2\delta y} \left(f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right); \\ \overline{f^{xy}} &= \frac{1}{4} \left(f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Ці формули отримуються для вузла шахової сітки, що складається із двох сток, зсунутих на півкроку.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \left(u_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{8\delta x} \left(u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s + u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s + u_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s + u_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s \right) \times \\ & \times \left(u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s - u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s + u_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s - u_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s \right) + \frac{1}{8\delta y} \left(v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s + v_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s + \right. \\ & \left. + v_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s + v_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s \right) \left(u_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s - u_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s + u_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s - u_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s \right) + \\ & + \frac{g}{2\delta x} \left(H_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + H_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{16} \left(\ell_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \ell_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \ell_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + \ell_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right) \times \left(v_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s + v_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^s + v_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s + v_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^s \right). \end{aligned}$$

7.9 Вирази для перших двох членів третього рівняння задачі 7.9 мають вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta t} (H_{i,j}^{s+1} - H_{i,j}^{s-1}) + \frac{1}{32} \left\{ (u_{i+1,j}^s + u_{i+1,j+1}^s + u_{i,j+1}^s + u_{i,j}^s) \times \right. \\ & \times (H_{i+1,j+1}^s - H_{i,j+1}^s + H_{i+1,j}^s - H_{i,j}^s) + \dots \left. \right\} + (u_{i,j+1}^s + u_{i-1,j+1}^s + \\ & + u_{i-1,j}^s + u_{i,j}^s) (H_{i,j+1}^s - H_{i-1,j+1}^s + H_{i,j}^s - H_{i-1,j}^s) + \dots \left. \right\} + \\ & + (u_{i,j}^s + u_{i-1,j}^s + u_{i-1,j-1}^s + u_{i,j-1}^s) (H_{i,j}^s - H_{i-1,j}^s + H_{i,j-1}^s - H_{i-1,j-1}^s) + \dots \left. \right\} + \\ & + (u_{i+1,j}^s + u_{i,j}^s + u_{i,j-1}^s + u_{i+1,j-1}^s) (H_{i+1,j}^s - H_{i,j}^s + H_{i+1,j-1}^s - H_{i,j-1}^s) + \dots \left. \right\} = 0 \end{aligned}$$

Вказівки: для виконання цього завдання треба скористатися таким шаблоном

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\bullet}{i-1, j+1} & & \overset{\bullet}{i, j+1} & & \overset{\bullet}{i+1, j+1} & & \\ & & & & \overset{\bullet}{b} & & \overset{\bullet}{a} & & \\ & & & & & & & & \\ & & \overset{\bullet}{i-1, j} & & \overset{\bullet}{i, j} & & \overset{\bullet}{i+1, j} & & \\ & & & & \overset{\bullet}{c} & & \overset{\bullet}{d} & & \\ & & & & & & & & \\ & & \overset{\bullet}{i-1, j-1} & & \overset{\bullet}{i, j-1} & & \overset{\bullet}{i+1, j-1} & & \end{array}$$

На рисунку точки з безрозмірними координатами – це вузли звичайної (не шахової) сітки, в якій задані значення метеорологічних величин, а точки a, b, c, d - додаткові точки, в яких метеорологічні величини не відомі і використовуються вони лише для процедури осереднення. Отже, для запису рівнянь задачі 7.9 в скінченнорізницевому вигляді за допомогою формул (7.40), (7.41), (7.42) необхідно кожне рівняння записати і для додаткових точок a, b, c, d , а потім осереднити його по цих чотирьох точках. Таким чином, при запису, наприклад, адвективних членів проводиться осереднення складових швидкості вітру по чотирьох вузлах, які оточують додаткову точку, завдяки чому в знаменнику з'являється число чотири; при запису похідних з осередненням в знаменнику з'являється ще й двійка, а після осереднення всього рівняння з'являється ще одна четвірка і тому в знаменнику скінченнорізницевого рівняння присутнє число 32 ($4 \times 2 \times 4$). Примітка: крапки в квадратних дужках означають решту членів рівняння, які не представлені у відповіді в скінченнорізницевої формі – це члени

$$v^{xy} \overline{H}_y^x + \overline{H}^{xy} (u_x^y + v_y^x).$$

7.10 Перше рівняння системи в явному вигляді

$$\frac{1}{2\delta t} (u_{i,j}^{s+1} - u_{i,j}^{s-1}) - \ell_{i,j} v_{i,j}^s = -\frac{1}{2\delta r} [u_{i,j}^s (u_{i+1,j}^s - u_{i-1,j}^s) + \dots].$$

Вказівки: для представлення системи рівнянь в скінченнорізницевому вигляді слід використати формули (7.40), (7.42) для запису осереднених величин і похідних з осередненням.

7.11 Перше рівняння системи в явному вигляді

$$\frac{1}{2\delta t} (u_{i,j}^{s+1} - u_{i,j}^{s-1}) - \ell_{i,j} v_{i,j}^s = -\frac{1}{2\delta r} \left\{ [(uu)_{i+1,j}^s - (uu)_{i-1,j}^s] - [(vu)_{i,j+1}^s - (vu)_{i,j-1}^s] + \dots \right\}$$

Використати вказівки до задачі 7.10 з урахуванням того, що похідні з осередненням записуються не для самих функцій, а для їх добутків: uu , vu і т.і.

7.12

$$\frac{1}{\delta t} \left(u_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \ell_{i,j} \left(v_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} + v_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} \right) + \frac{g}{\delta r} \left[\left(H_{i+\frac{1}{2},j}^{s+\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2},j}^{s+\frac{1}{2}} \right) + \left(H_{i+\frac{1}{2},j}^{s-\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2},j}^{s-\frac{1}{2}} \right) \right] = -f_1;$$

7.14 Перше рівняння

$$\frac{1}{\delta t} \left(u_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \ell_{i,j} \left(v_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} + v_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2d} \left\{ [(u \cdot u)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^s - (u \cdot u)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^s + (u \cdot u)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^s - (u \cdot u)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^s] + \dots \right\}.$$

7.15

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \left(u_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \ell_{i,j} \left(v_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} + v_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} \right) &= -(F_u)_{i,j}^s; \\ \frac{1}{\delta t} \left(v_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} - v_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{2} \ell_{i,j} \left(u_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} + u_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} \right) &= -(F_v)_{i,j}^s; \\ u_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \frac{\ell_{i,j}^2 (\delta t)^2}{4} \right) u_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} + \ell_{i,j} \delta \cdot v_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} - \frac{\ell_{i,j} (\delta t)^2}{2} (F_v)_{i,j}^s - \right. \\ \left. - \delta t (F_u)_{i,j}^s \right] &: \left[1 + \frac{\ell_{i,j}^2 (\delta t)^2}{4} \right]; \end{aligned}$$

$$v_{i,j}^{s+\frac{1}{2}} = \left[\left(1 - \frac{\ell_{i,j}^2 (\delta t)^2}{4} \right) \cdot v_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} - \ell_{i,j} \delta t \cdot u_{i,j}^{s-\frac{1}{2}} + \frac{\ell_{i,j} (\delta t)^2}{2} (F_u)_{i,j}^s - \delta t (F_v)_{i,j}^s \right] \cdot \left(1 + \frac{\ell_{i,j}^2 (\delta t)^2}{4} \right)$$

7.16 $P=510$ гПа, $H_{510}=543.4$ дам, $T=253$ К, $\theta=307$ К.

Розв'язання. За визначенням $\sigma = \frac{P}{P_s}$, відкля при $P_s=1020$ гПа

$p = \sigma P_s = 510$ гПа, тобто поверхня $\sigma = \frac{1}{2}$ знаходиться між ізобаричними

поверхнями 700 і 500 гПа. Оскільки температура по вертикалі змінюється за лінійним законом, знайдемо величину

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{T_{700} - T_{500}}{P_{700} - P_{500}} = 0.1 \frac{K}{гПа}$$

Тоді T на $\sigma = \frac{1}{2}$ дорівнює 253 К. Використовуючи рівняння статки

$$\frac{\partial H}{\partial p} = - \frac{R T}{g p}$$

та інтегруючи його від $p=500$ гПа до $p=510$ гПа, вважаючи, що T і p в цьому шарі дорівнюють півсумі їх значень на межі шару, отримаємо $T_{сер} = \frac{1}{2}(T_{500} + T_{510})$ і $p_{сер} = \frac{1}{2}(500 + 510)$.

А тепер визначаємо

$$\frac{H_{510} - H_{500}}{510 - 500} = - \frac{R T_{сер}}{g (500 + 510)}$$

Із цього виразу отримаємо $H_{510}=5434$ м. Виходячи із співвідношення

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{0.288},$$

при $p=510$, $T=253$ К знаходимо

$$\lg \theta = \lg 253 + 0.288(3 - \lg 510),$$

відкля $\theta = 307$ К.

Розділ 8

Оцінка якості чисельних методів прогнозу погоди

Відомо, що прогностичні поля метеорологічних величин або явищ погоди чисельними методами отримуються в результаті реалізації гідродинамічних моделей, тому дуже важливою є задача оцінювання якості таких моделей. Результати оцінок дозволяють виявити, наскільки точно математична модель описує реальні атмосферні процеси.

Процедуру оцінки якості прогнозів, які складається за допомогою моделей, прийнято називати верифікацією.

Верифікація прогнозів погоди є важливою частиною будь-якої наукової системи прогнозування, в якій визначається якість цих прогнозів. За своєю суттю, верифікація прогнозів має на меті оцінювання існуючого рівня прогнозування і останніх тенденцій якості прогнозів, покращення методик прогнозування і, врешті решт, самих прогнозів, та забезпечення користувачів інформацією, потрібною для ефективного використання прогнозів. Отже, прогноз порівнюється, або верифікується, з відповідними спостереженнями того, що мало місце насправді. При цьому верифікація може бути якісною чи кількісною, але, в будь-якому разі, вона має надавати інформацію про природу помилок прогнозів.

Традиційно верифікація прогнозів зосереджується на точності та успішності, але інші атрибути, від яких залежить якість прогнозу (наприклад, надійність, гострість, невизначеність і т.ін.), мають великий вплив на цінність прогнозу.

Нагадаємо, що точність – це рівень узгодженості між прогнозом та спостереженням. Різниця між прогнозом і спостереженням є помилкою. Чим менша помилка, тим більша точність.

Успішність – це точність прогнозу відносно деякого базисного прогнозу. Як правило, базисним прогнозом є безуспішний прогноз (випадковий) або інерційний (який визначається за останніми даними спостережень і передбачає незмінність умов), або кліматичний, який базується на кліматичних даних.

Якість – це ступінь, до якого прогноз збігається з тим, що реально відбувається і, нарешті, цінність визначається ступенем, до якого прогноз допомагає відповідальній особі реалізувати деякі економічні або інші переваги.

Взагалі, якість прогнозу відрізняється від його цінності і прогноз має високу якість, якщо він добре передбачає спостережені умови відповідно до якихось об'єктивних чи суб'єктивних критеріїв, а велику цінність він має тоді, коли допомагає споживачеві прийняти краще рішення.

Прикладом прогнозу низької якості, але великої цінності є такий. Якщо модель чисельного прогнозу погоди прогнозує розвиток ізольованої грози у деякому регіоні і ця гроза дійсно була, але її розташування трохи відрізнялось від запропонованого моделлю, відповідно до більшості стандартних верифікаційних заходів цей прогноз має низьку якість. Проте він є дуже цінним для синоптика, який давав прогноз погоди загального використання. Зворотним прикладом є прогноз ясного неба над пустелею протягом сухого періоду, коли якість прогнозу буде безперечно високою, а цінність, навпаки, низькою.

Наприкінці, розглянемо питання про вірогідність результатів верифікації. Природно, що вони є більш достовірними, коли величина та якість верифікаційних даних є високими. Проте, завжди корисно помістити самі результати верифікації у границі похибки. Особливо це є важливим (а) для рідкісних подій, де розмір вибірки є малим, (б) коли дані виказують велику мінливість і (в) коли є потреба знати, наскільки один прогностичний продукт є кращим (у статистичному сенсі) за інший.

8.1 Візуальний метод верифікації прогнозів

Одним з найстаріших та найкращих методів верифікації є візуальний метод: подивіться на прогноз та спостереження разом та використайте людське судження для розпізнавання помилок прогнозу. Загальноприйнятим є представлення даних у вигляді графіків часових рядів та карт (дивись приклади на рис. 8.1 та 8.2).

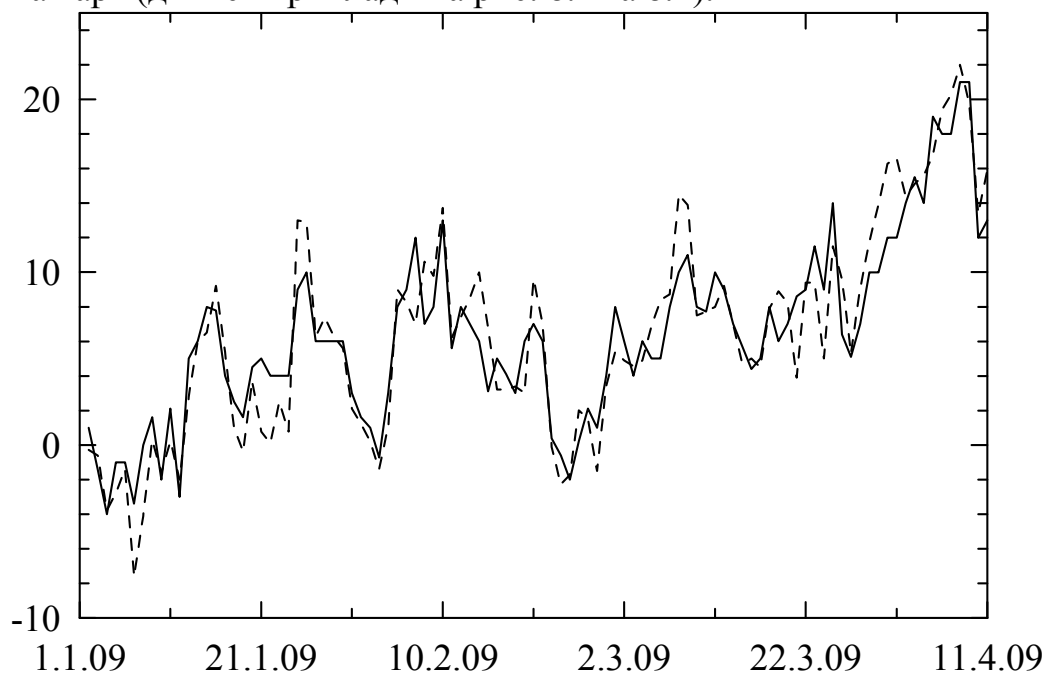


Рисунок 8.1 – Фактична (суцільна лінія) та прогностична (пунктир)

температура в Одесі

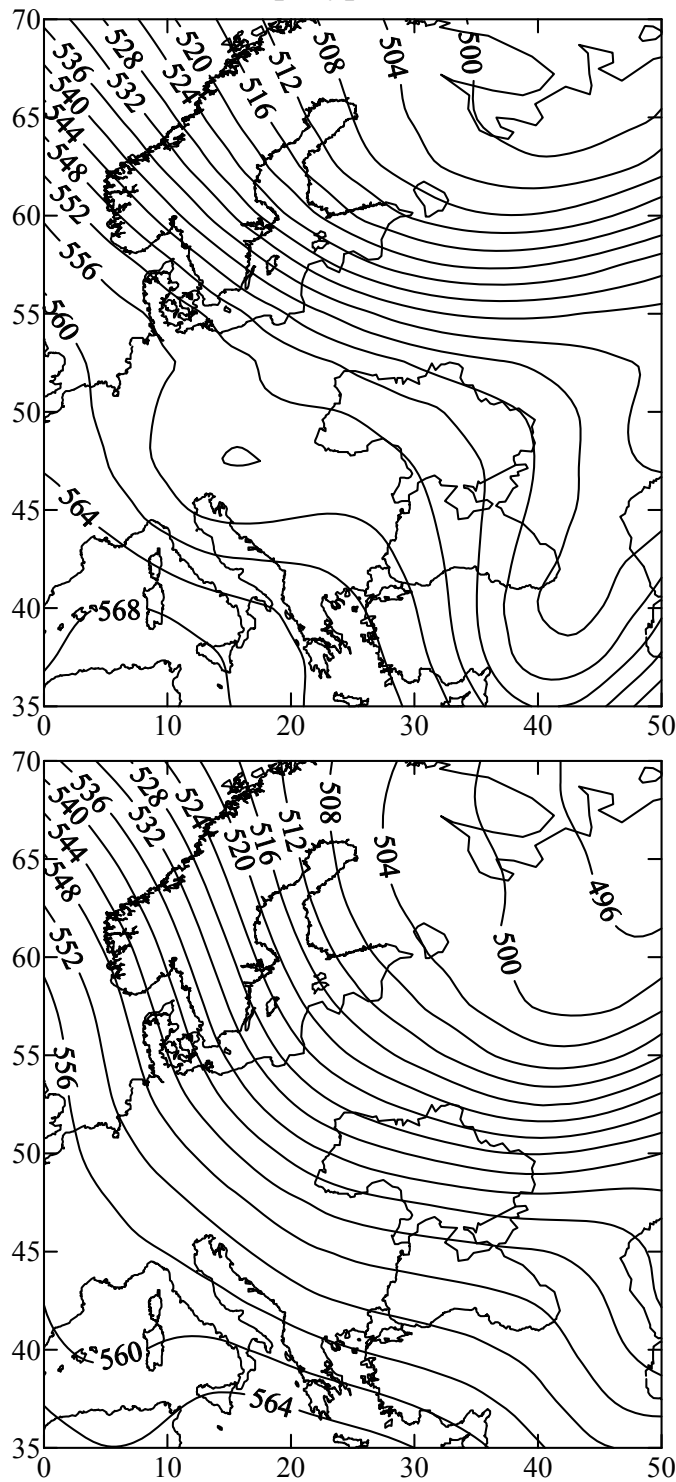


Рисунок 8.2 – Фактична (уверху) та прогностична (унизу) карта АТ-500 гПа на 01.01.2009 р

Візуальний метод дає задовільні результати, якщо є тільки декілька прогностичних величин або немає потреби в кількісних показниках верифікації. Але навіть якщо є потреба у кількісних величинах, доцільно час від часу розглядати графіки або карти, що дозволить визначити

узгодженість прогнозу.

Проте, візуальний метод не є кількісним і має схильність до суб'єктивних зміщень під час інтерпретації результатів. Тому він має застосовуватися з обережністю у формальних процедурах верифікації.

8.2 Методи верифікації прогнозів безперервних величин

Відомо, що поля всіх метеорологічних величин є безперервними. Порушення неперервності може відбуватися в якихось екстремальних умовах, наприклад, при грозах, шквалах, смерчах.

Верифікація прогнозів безперервних величин визначає наскільки величини прогнозів відрізняються від спостережених величин і передбачає використання діаграм, наприклад, графіків розсіяння та графіків розподілу ймовірностей, а також різноманітних сумарних оцінок. Продемонструємо їх використання за допомогою даних про спрогнозовану та спостережену температуру (табл. 8.1).

Таблиця 8.1. Спрогнозована (T_n) та фактична (T_ϕ) температура в Одесі

Дата	Факт (T_ϕ) _i	Прогноз (T_n) _i	Дата	Факт (T_ϕ) _i	Прогноз (T_n) _i
01.01.2009	1,0	-0,3	11.01.2009	-3,0	-2,0
02.01.2009	-1,4	-0,6	12.01.2009	5,0	2,8
03.01.2009	-4,0	-3,8	13.01.2009	6,0	6,0
04.01.2009	-1,0	-2,8	14.01.2009	8,0	6,5
05.01.2009	-1,0	-1,4	15.01.2009	7,8	9,2
06.01.2009	-3,4	-7,6	16.01.2009	4,0	5,4
07.01.2009	0,0	-4,1	17.01.2009	2,5	1,0
08.01.2009	1,6	0,3	18.01.2009	1,6	-0,4
09.01.2009	-2,0	-1,6	19.01.2009	4,5	3,7
10.01.2009	2,1	0,2	20.01.2009	5,0	0,8

Графік розсіяння показує прогностичні величини у порівнянні з фактично спостереженими і відповідає на запитання: наскільки добре прогностичні дані відповідають спостереженим? У випадку точного прогнозу усі точки будуть зосереджені на або поблизу діагоналі. Як можна

бачити з рис. 8.3, який побудований за даними таблиці 8.1, прогностичні значення температури у середньому були нижчими за спостережені. Якби прогностичні значення T дорівнювали фактичним, всі точки розташовувались би на діагоналі (неперервна лінія), але більшість точок знаходиться нижче діагоналі і пунктирна лінія показує середнє заниження температури за прогнозом.

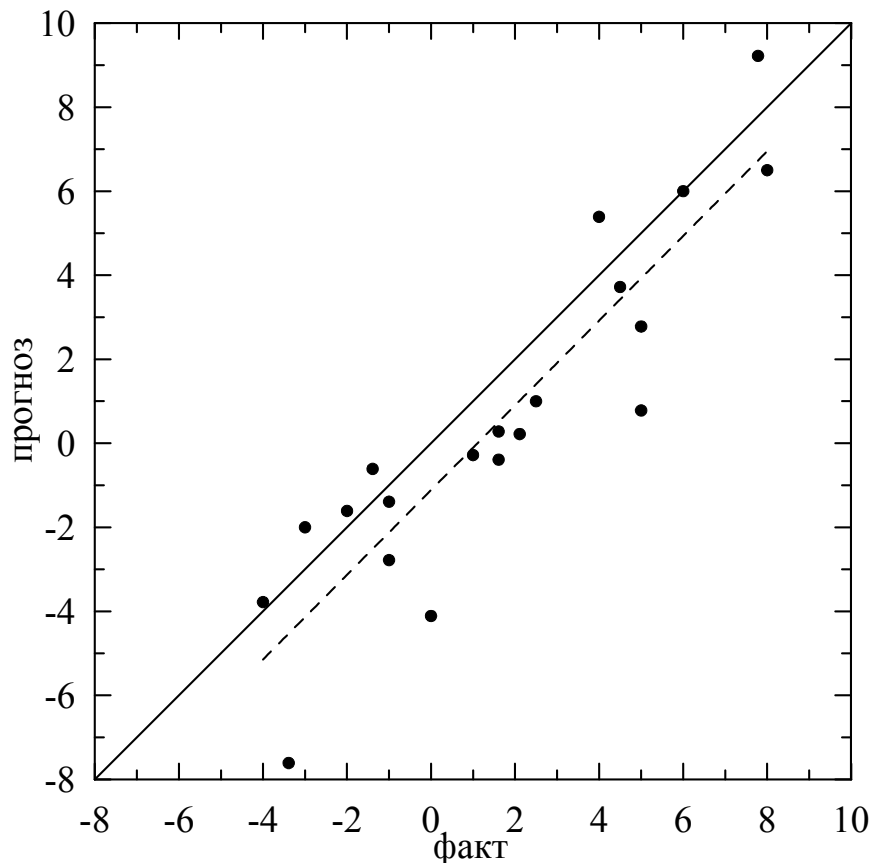


Рисунок 8.3 – Графік розсіювання для температури в Одесі

На рисунку 8.4 представлено графік розподілу ймовірностей, який побудовано також за даними таблиці 8.1.

Цей графік (який називають ще коробчастою діаграмою або скринькою з вусами) показує діапазон даних, які лежать між 25 та 75 перцентилями; горизонтальна лінія всередині коробки є медіаною, а вуси – повний діапазон даних. Діаграма визначає подібності між розташуванням, розкидом та асиметрією прогностичного та спостереженого розподілу, але не надає інформацію про відповідність між прогнозами та спостереженнями, що робить її подібною до гістограми. За даними таблиці 8.1, прогностичні температури мають більший діапазон (від -7.6 до $+9.2^{\circ}\text{C}$), ніж фактично спостережені ($-4.0 \div +8.0$), але менше значення медіани та діапазон між 25 та 75 перцентилями.

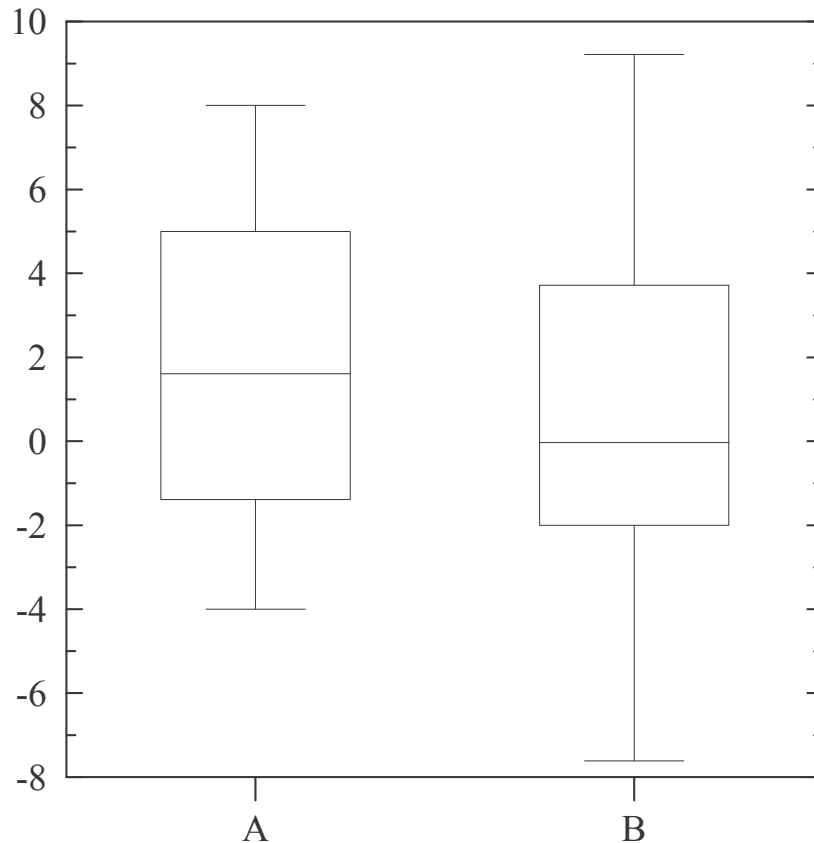


Рисунок 8.4 – Графік розподілу ймовірностей для температури в Одесі; (А – факт, В – прогноз)

Окрім розглянутих вище характеристик якості прогнозів в задачах верифікації моделей використовуються також загальноприйняті характеристики помилок прогнозу, до яких належать: середня помилка прогнозу, середньоквадратична помилка прогнозу, середньоквадратична фактична мінливість, середньоквадратична прогностична мінливість, середньоквадратична відносна помилка прогнозу, відношення середньої квадратичної мінливості до середньої квадратичної фактичної мінливості і коефіцієнти кореляції між фактичними та прогностичними змінами.

Розглянемо кожну з перелічених характеристик. Для цього будемо вважати, що прогноз деякої метеорологічної величини f являє собою сукупність скалярних величин, тобто чисел, кожне з яких відноситься до однієї точки i у просторі або часі ($i=1,2,3,\dots,N$); N - загальна кількість точок у просторі або часі.

Введемо позначення f_v, f_n, f_ϕ відповідно для вихідних, прогностичних і фактичних точкових значень величини f і позначення

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i, \quad (8.1)$$

для операції осереднення у статистичному сенсі.

Отже формули для статистичних оцінок якості прогнозу при введених позначеннях будуть мати вигляд:

1) середня помилка прогнозу

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(f_{\phi})_i - (f_n)_i], \quad (8.2)$$

де N - кількість точок у просторі або у часі.

Формула (8.2) показує, що у випадку точного прогнозу помилка δ дорівнює нулю. Якщо помилка розраховується за даними прогностичних і фактичних значень f у вузлах просторової сітки, то δ являє собою середню помилку для території, яку покриває ця сітка точок, а якщо ми маємо значення f_n і f_{ϕ} у вигляді часових рядів, δ характеризує середню помилку прогнозу за обраний період часу. Таким чином, у залежності від того, які ряди фактичних і прогностичних величин використовуються для обчислення помилки, одержуються різні оцінки: у першому випадку δ дозволяє оцінити точність чисельного прогнозу в різних частинах баричного поля при фіксованих синоптичних ситуаціях, а в другому випадку δ показує точність прогнозу еволюції метеорологічних полів.

Слід відзначити, що середня помилка є простою та відомою характеристикою; її ще називають адитивним зміщенням. Проте вона не визначає величини помилок, а також відповідність між прогностичними та фактичними величинами, тому можна одержати найкращу оцінку (близьку до нуля), і для поганих прогнозів, коли великі помилки мають протилежні знаки і компенсують одна одну.

2) середня абсолютна помилка визначає, якою є середня величина помилок прогнозу незалежно від знаку відхилень. Формула для середньої абсолютної помилки (δ_a) має вигляд

$$\delta_a = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N (f_{\phi})_i - (f_n)_i \right|. \quad (8.3)$$

Як видно із формули (8.3), у випадку точного прогнозу δ_a дорівнює нулю. Недоліком цієї характеристики є те, що вона не вказує на спрямованість відхилень, тобто не можна зрозуміти, модель занижує чи підвищує прогностичні значення.

3) середньоквадратична помилка

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_n - f_{\phi})_i^2}. \quad (8.4)$$

Із формули (8.4) випливає, що чим більша величина δ , тим гірше прогноз, а у разі точного прогнозу δ дорівнює нулю.

Середньоквадратична помилка, як і середня абсолютна, не вказує на спрямованість відхилень прогностичних значень від фактичних, але на відміну від абсолютної помилки ця характеристика в більшій мірі враховує внесок від великих помилок, тому δ завжди більша за δ_a і, якщо перевищення велике, то це свідчить про те, що модель допускає великі або дуже великі помилки в деяких точках за простором чи за часом.

4) середньоквадратична фактична мінливість

$$\sigma_{\phi} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_{\phi} - f_{\varepsilon})_i^2}. \quad (8.5)$$

5) середньоквадратична прогностична мінливість

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (f_n - f_{\varepsilon})_i^2}. \quad (8.6)$$

Характеристики (8.4), (8.5) розраховуються для обчислення таких оцінок, як середня квадратична відносна помилка прогнозу ε , відношення η та коефіцієнта кореляції.

6) середньоквадратична відносна помилка прогнозу

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sigma_{\phi}}. \quad (8.7)$$

У випадку точного прогнозу ε дорівнює нулю.

7) відношення середньоквадратичної прогностичної мінливості до середньоквадратичної фактичної мінливості

$$\eta = \frac{\sigma_n}{\sigma_{\phi}}. \quad (8.8)$$

Формула показує, що у разі точного прогнозу $\eta=1$. Чим більше η відрізняється від одиниці, тим гірше прогноз. При цьому, якщо $\eta < 1$, то чисельна модель занижує значення метеорологічних величин в порівнянні з фактичними, а якщо $\eta > 1$, то прогностичні значення завищені.

8) коефіцієнт кореляції між прогностичними і фактичними величинами

$$r = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(f_{\phi})_i - \bar{f}_{\phi}] \cdot [(f_n)_i - \bar{f}_n]}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(f_{\phi})_i - \bar{f}_{\phi}]^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(f_n)_i - \bar{f}_n]^2}}, \quad (8.9)$$

де $\bar{f}_{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_{\phi})_i$; $\bar{f}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_n)_i$.

Ця характеристика визначає, наскільки добре прогностичні значення відповідають фактичним, тобто спостереженням. Величини r лежать у діапазоні від 1 до -1, причому у випадку досить точного прогнозу r наближається до плюс одиниці. Візуально коефіцієнт кореляції показує, наскільки близько лежать точки на графіку розсіяння до діагональної прямої лінії. Зауважимо, що ця характеристика є достатньою мірою лише лінійного зв'язку між прогностичними та фактичними величинами.

9) Коефіцієнт кореляції аномальності

$$r_a = \frac{\sum_{i=1}^N [(f_{\phi})_i - f_k] \cdot [(f_n)_i - f_k]}{\sqrt{\sum_{i=1}^N [(f_{\phi})_i - f_k]^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N [(f_n)_i - f_k]^2}}, \quad (8.10)$$

або
$$r_a = \frac{\sum_{i=1}^N \left\{ [(f_{\phi})_i - f_k] - \frac{[(f_{\phi})_i - f_k] \cdot [(f_n)_i - f_k]}{\sum_{i=1}^N [(f_n)_i - f_k]} \right\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N [(f_{\phi})_i - f_k]^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N [(f_n)_i - f_k]^2}}, \quad (8.11)$$

де f_k - кліматична середня величина.

Формула (8.10) записана для нецентрованого коефіцієнта кореляції, а друга – для центрованого.

Ця характеристика визначає відповідність або фазову різницю між прогностичними величинами та спостереженнями. Як відомо із (8.10) і (8.11), від фактичних та прогностичних значень метеорологічної величини у кожній точці віднімається середньокліматичне її значення, а не середнє по використаному часовому ряду. Коефіцієнт кореляції аномальності часто використовується для верифікації чисельних прогнозів полів метеорологічних величин. Коефіцієнт r_a не чутливий до зміщення прогнозу і тому великі його значення не гарантують точного прогнозу.

8.3 Метод верифікації чисельного прогнозу полів метеорологічних величин та оцінка його успішності

Сучасні прогностичні моделі мають настільки малий крок сітки (декілька кілометрів або, принаймні, декілька десятків кілометрів), що на перший погляд, дозволяє вибрати такий вузол прогностичної сітки, який би був найближчим до пункту спостережень, і для нього застосовувати процедуру верифікації. Проте, не для усіх метеорологічних величин та явищ можна використати такий підхід.

Як відомо з теорії гідродинамічних методів прогнозів, обмеження на масштаби, які можуть бути представлені чисельною моделлю, дорівнює $2\delta r$ (δr – крок сітки). На практиці, «фактичне розділення» моделі принаймні вдвічі більше і залежить від змісту моделі (особливо, параметризацій), орографії, синоптичних умов тощо. Отже, прогностичні результати моделі мають розглядатися як середні на якійсь площі, а не як величини у конкретному вузлі сітки.

Граденти полів є малими на масштабах порядку (δr) для більшості змінних та синоптичних умов, і тому спостереження у пункті можуть бути репрезентативними для комірки сітки з розмірами $\delta r \times \delta r$. Але є два винятки: 1) спостереження для комірки, в якій має місце велика мінливість географічних факторів, таких як орографія, зміни суходолу, моря або льоду тощо 2) та такі метеорологічні величини, як опади, хмарність, горизонтальна видимість тощо. В останньому випадку треба використовувати спостереження, які б були підігнані до розділення моделі або вже були виміряні, як величини для площі.

Строго кажучи, більшість з методів, які були розглянуті у попередніх підрозділах, можна з успіхом використовувати й для верифікації прогнозу полів різних метеорологічних величин.

Але розглянемо дві оцінки, які визначають якість прогнозу метеорологічних полів.

Оцінка $S1$ визначає, наскільки добре градієнти у прогностичному полі відповідають спостереженим градієнтам. Величини цієї характеристики лежать у діапазоні від 0 до ∞ , причому у випадку точного прогнозу $S1 = 0$. Формула для $S1$ має вигляд

$$S1 = \frac{\sum_{\text{суміжні пари}} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\phi} - \left(\frac{\partial a}{\partial r} \right)_n \right|}{\sum_{\text{суміжні пари}} \max \left(\left| \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\phi} \right|, \left| \left(\frac{\partial a}{\partial r} \right)_n \right| \right)} \times 100, \quad (8.12)$$

де $\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_n$ і $\left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\phi}$ – горизонтальні градієнти в прогностичному і фактичному полі відповідно суміжних пар

Ця характеристика застосовується до полів геопотенціальних висот або приземного тиску. Через те, що $S1$ залежить виключно від градієнтів, гарні оцінки досягаються, навіть коли прогностичні величини зміщені. Величина $S1$ залежить від просторового розділу прогностичних полів.

Нарешті, розглянемо характеристику, яка є дуже зручною при порівнянні одного методу прогнозу з іншим, а саме, оцінку успішності. Найменше можливе значення цієї характеристики залежить від того, яка оцінка з розглянутих вище використовувалась, але найбільше значення завжди дорівнює 1, яка й є найкращою величиною, тоді як 0 свідчить про відсутність покращення відносно іншого прогнозу. Формула для оцінки успішності (SS) записується, як

$$SS = \frac{S_f - S_r}{S_{pf} - S_r}, \quad (8.13)$$

де S_f – оцінка прогнозу, який порівнюється;

S_r – оцінка іншого прогнозу;

S_{pf} – оцінка найпростішого прогнозу, за який у метеорології зазвичай береться інерційний прогноз або кліматичні умови.

8.4 Методи для верифікації дихотомічних прогнозів.

Дихотомічний (або альтернативний) прогноз у результаті дає «так, подія відбудеться» або «ні, подія не відбудеться». Передбачення туману або дощу є загальновідомими прикладами такого прогнозу. У деяких випадках може бути визначена порогова величина для розділення наявності та відсутності явища, наприклад, швидкості вітру, більшої за 15 м/с.

Для верифікації таких прогнозів треба скласти таблицю справджуваності дихотомічного прогнозу (табл. 8.2), яка показує частоту прогнозів та спостережень наявності та відсутності явища. Існує чотири комбінації

прогнозів (наявність та відсутність явища) та випадків (наявність та відсутність явища), що мають назву спільного розподілу:

а) кількість випадків (n_{11}) прогнозів наявності явищ, що справилися (влучання) – явище прогнозувалось і спостерігалось;

б) кількість випадків (n_{22}) прогнозів відсутності явищ, що справилися (точні заперечення) – явище не прогнозувалось і не спостерігалось;

в) кількість випадків (n_{12}) прогнозів відсутності явищ, що не справилися (промахи) – явище не прогнозувалось, але спостерігалось;

г) кількість випадків (n_{21}) прогнозів наявності явищ, що не справилися (хибні тривоги) – явище прогнозувалось, але не спостерігалось.

Кількість випадків наявності явища (n_{10}) та його відсутності (n_{20}) і кількість випадків прогнозу наявності явища (n_{01}) та прогнозу його відсутності (n_{02}) подається у нижньому рядку та правій графі таблиці і мають назву граничного розподілу. Останнім значенням у цій таблиці є загальна кількість випадків N .

Таблиця справджуваності прогнозу є зручним засобом визначення того, які типи помилок були зроблені. Досконала прогностична система буде видавати лише влучання та точні заперечення без промахів та хибних тривог.

Таблиця 8.2. Таблиця справджуваності дихотомічних прогнозів (матриця спряженості)

Прогноз	Спостереження		
	наявне	відсутнє	разом
наявне	n_{11}	n_{21}	n_{01}
відсутнє	n_{12}	n_{22}	n_{02}
разом	n_{10}	n_{20}	N

З елементів таблиці справджуваності прогнозу можна розрахувати велику кількість різноманітних категорійних статистичних характеристик для опису окремих аспектів виконання прогнозу. Проілюструємо ці характеристики за допомогою вигаданого прикладу. Припустимо, що спостереження та прогнози на добу опадів протягом одного року формують таку таблицю справджуваності прогнозу.

Таблиця 8.3. Таблиця справджуваності прогнозу опадів

Прогноз	Спостережені		
	наявні	відсутні	разом
наявні	82	38	120
відсутні	23	222	245
разом	105	260	365

Грунтуючись на табл. 8.3 можна розрахувати такі категорійні статистичні характеристики.

Точність (частка точних або загальна справджуваність прогнозів) відповідає на запитання: яка частка прогнозів була точними? Формула для розрахунку точності (P) має вигляд

$$P = \frac{n_{11} + n_{22}}{N}. \quad (8.14)$$

Розраховані величини точності лежать у діапазоні від 0 до 1, причому 1 – найкраща величина. Ця характеристика є простою та наочною, але може ввести в оману, тому що на неї дуже сильно впливає більш часта категорія, зазвичай «відсутність явища» у випадку рідкісних погодних умов.

Для прикладу з табл. 8.3, $P = (82 + 222)/365 = 0,83$, вказуючи на те, що 83% усіх прогнозів були точними.

Оцінка зміщення (частотне зміщення) відповідає на запитання: як порівнюються частота прогнозів наявності явища з повторюваністю спостережених наявних явищ? Формула для розрахунку оцінки зміщення (BS) є такою

$$BS = \frac{n_{01}}{n_{10}}. \quad (8.15)$$

Розраховані величини оцінки зміщення лежать у діапазоні від 0 до ∞ , причому 1 – найкраща величина. По суті, ця характеристика є мірилом повторюваності спрогнозованих явищ до повторюваності спостережених явищ і визначає, чи має прогностична система тенденцію до заниження ($BS < 1$) або завищення ($BS > 1$) повторюваності явищ. Проте, вона не

визначає, наскільки добре прогноз відповідає спостереженням, і є мірою відносної повторюваності.

Для прикладу з табл. 8.3, $BS = 120/105 = 1,14$, тобто прогностична повторюваність опадів була трохи завищена.

Ймовірність виявлення (частка влучань) відповідає на запитання: яка частка спостережених наявних явищ була точно спрогнозована? Формула для розрахунку ймовірності виявлення (POD) є такою

$$POD = \frac{n_{11}}{n_{10}}. \quad (8.16)$$

Розраховані величини ймовірності виявлення лежать у діапазоні від 0 до 1, причому 1 – найкраща величина. Ця характеристика чутлива до прогнозів наявності явищ, що справдилися, але ігнорує прогнози наявності явищ, що не справдилися. Також вона є дуже чутливою до кліматичної повторюваності події, але дає добрі результати для рідкісних явищ. Ймовірність виявлення має використовуватися спільно з відношенням хибних тривог і є важливим компонентом відносної експлуатаційної характеристики, яка широко використовується у ймовірнісних прогнозах.

Для прикладу з табл. 8.3, $POD = 82/105 = 0,78$, вказуючи на те, що приблизно три чверті спостережених випадків опадів були спрогнозовані точно.

Відношення хибних тривог відповідає на запитання: яка частка спрогнозованих явищ насправді не мала місце (тобто були хибні тривоги)? Формула для розрахунку відношення хибних тривог (FAR) має вигляд

$$FAR = \frac{n_{21}}{n_{01}}. \quad (8.17)$$

Розраховані величини відношення хибних тривог лежать у діапазоні від 0 до 1, причому 0 – найкраща величина. Ця характеристика чутлива до хибних тривог, але ігнорує влучання. Також вона є дуже чутливою до кліматичної повторюваності події. Відношення хибних тривог має використовуватися спільно з ймовірністю виявлення.

Для прикладу з табл. 8.3, $FAR = 38/120 = 0,32$, вказуючи на те, що приблизно для третьої частини спрогнозованих випадків опади насправді не спостерігалися.

Ймовірність хибного виявлення (частка хибних тривог) відповідає на запитання: яка частка спостережених відсутніх явищ була неправильно спрогнозована як наявні? Формула для розрахунку оцінки зміщення (*POFD*) є такою

$$POFD = \frac{n_{21}}{n_{20}}. \quad (8.18)$$

Розраховані величини ймовірності хибного виявлення лежать у діапазоні від 0 до 1, причому 0 – найкраща величина. Ця характеристика чутлива до хибних тривог, але ігнорує влучання. Вона не часто розраховується для детерміністичних прогнозів, але є важливим компонентом відносної експлуатаційної характеристики, яка широко використовується у ймовірнісних прогнозах.

Для прикладу з табл. 8.3, $POFD = 38/260 = 0,15$, тобто 15% спостережених подій «без опадів» були неправильно спрогнозовані.

Оцінка загрози (критичний показник успіху) відповідає на запитання: наскільки добре відповідають прогнози наявності явища спостереженим наявним явищам? Формула для розрахунку оцінки загрози (*TS*) є такою

$$TS = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{21}}. \quad (8.19)$$

Розраховані величини оцінки загрози лежать у діапазоні від 0 до 1, причому 0 – відсутність успішності, а 1 – найкраща величина. Ця характеристика оцінює частку спостережених та/або спрогнозованих явищ, які були правильно передбачені. Можна згадати про точність *P*, якщо не розглядаються прогнози відсутності явищ, що справдилися. *TS* є чутливою до прогнозів наявності явищ, що справдилися, не розрізняє джерела помилок прогнозу і залежить від кліматичної повторюваності подій (більш погані оцінки для більш рідкісних подій), тому що деякі прогнози наявності явищ, що справдилися, можуть мати місце випадково.

Для прикладу з табл. 8.3, $TS = 82/(105 + 38) = 0,57$, вказуючи на те, що трохи більше половини подій опадів (спостережених та/або передбачених) були правильно спрогнозовані.

Об'єктивна оцінка загрози (оцінка успішності Гілберта) відповідає на запитання: наскільки добре відповідають прогнози наявності явища спостереженим наявним явищам (з урахуванням впливу випадкових прогнозів наявності явищ, що справдилися)? Формула для розрахунку об'єктивної оцінки загрози (ETS) є такою

$$ETS = \frac{n_{11} - H_{rnd}}{n_{10} + n_{21} - H_{rnd}}, \quad (8.20)$$

де

$$H_{rnd} = \frac{n_{10}n_{01}}{N}.$$

Розраховані величини оцінки загрози лежать у діапазоні від $-1/3$ до 1 , причому 0 – відсутність успішності, а 1 – найкраща величина. Ця характеристика оцінює частку спостережених та/або спрогнозованих явищ, які були правильно передбачені, відрегульовану на випадкові прогнози наявності явищ, що справдилися (наприклад, опади легше спрогнозувати правильно у вологому кліматі, ніж у сухому). ETS часто використовується для верифікації прогнозів опадів, зроблених чисельними методами, оскільки її «неупередженість» дозволяє об'єктивніше порівнювати оцінки, зроблені для різних територій та умов. Вона також чутлива до прогнозів наявності явищ, що справдилися, і не розрізняє джерела помилок прогнозу.

Для прикладу з табл. 8.3, $H_{rnd} = (105 \cdot 120/365) \approx 34$ і відповідно $ETS = (82 - 34)/(105 + 38 - 34) = 0,44$, тобто ETS дає менші оцінки за TS .

Критерій успішності Пірсі-Обухова (дискримінант Хенссена і Кіперса, реальна характеристика оцінки) відповідає на запитання: наскільки добре прогноз розрізняє наявність явищ від їх відсутності? Формула для розрахунку критерію Пірсі-Обухова (Q) є такою

$$Q = 1 - \left(\frac{n_{12}}{n_{10}} + \frac{n_{21}}{n_{20}} \right) = \frac{n_{11}}{n_{10}} - \frac{n_{21}}{n_{20}}. \quad (8.21)$$

Розраховані величини критерію Пірсі-Обухова лежать у діапазоні від 0 до 1 , причому 0 – відсутність успішності, а 1 – найкраща величина. Він не залежить від кліматичної повторюваності явища. Сам вираз (8.21) є різницею $POD - POFD$; дивись рівняння (8.16) і (8.18). Для рідкісних подій HK надмірно надає перевагу першому члену (такому ж, як POD), тому ця оцінка може бути кориснішою для більш частих подій.

Для прикладу з табл. 8.3, $HK = 82 / 105 - 38 / 260 = 0,63$.

Критерій надійності прогнозів Багрова (оцінка успішності Гейдке) відповідає на запитання: якою була точність прогнозу відносно точності для випадкового прогнозу? Формула для розрахунку критерію надійності прогнозів Багрова (H) має вигляд

$$H = \frac{(n_{11} + n_{22}) - EC_{rnd}}{N - EC_{rnd}}, \quad (8.22)$$

де

$$EC_{rnd} = \frac{n_{10}n_{01} + n_{02}n_{20}}{N},$$

Розраховані величини H лежать у діапазоні від $-\infty$ до 1, причому 0 – відсутність успішності, а 1 – найкраща величина. Ця характеристика визначає частку точних прогнозів після вилучення тих прогнозів, які були точними винятково внаслідок випадковості. Вона є окремою формою узагальненої оцінки успішності, в якій, у цьому випадку, як базисний прогноз використовується випадковий. В метеорології випадковість зазвичай не є правильним вибором базисного прогнозу; може бути кращим використання кліматичного чи інерційного прогнозу або, навіть, якихось інших.

Для прикладу з табл. 8.3, $EC_{rnd} = (105 \cdot 120 + 245 \cdot 260) / 365 = 209$ і, відповідно, $H = (82 + 222 - 209) / (365 - 209) = 0,61$.

Відношення ймовірностей відповідає на запитання: яким є відношення ймовірностей, що прогнози наявності явища є точними, до ймовірностей, що прогнози наявності явища є помилковими? Формула для розрахунку відношення ймовірностей (OR) має вигляд

$$OR = \frac{n_{11} \cdot n_{22}}{n_{12} \cdot n_{21}} = \frac{\frac{POD}{1 - POD}}{\frac{POFD}{1 - POFD}}. \quad (8.23)$$

Розраховані величини OR лежать у діапазоні від 0 до ∞ , причому 1 – відсутність успішності, а ∞ – найкраща величина. Ця характеристика визначає у скільки разів ймовірність зроблених прогнозів наявності явищ, що справилися, більша (або менша) за ймовірність зроблених прогнозів

наявності явищ, що не справдилися. Замість цієї величини часто використовується її логарифм. Бере до уваги апіорну ймовірність. Забезпечує кращі результати для рідкісних подій, але не може використовуватися, якщо якийсь елемент таблиці справджуваності дихотомічного прогнозу дорівнює 0. Проте, дуже рідко застосовується в метеорології.

Для прикладу з табл. 8.3, $OR = (82 \cdot 222)/(23 \cdot 38) = 20,8$, тобто ймовірність, що прогнози наявності явища зроблені правильно більше ніж у 20 разів вище за ймовірність, що ці прогнози зроблені помилково.

Оцінка успішності відношення ймовірностей відповідає на запитання: яким є покращення прогнозу у порівнянні з випадковим прогнозом? Формула для розрахунку оцінки успішності відношення ймовірностей ($ORSS$) є такою

$$ORSS = \frac{n_{11} \cdot n_{22} - n_{12} \cdot n_{21}}{n_{11} \cdot n_{22} + n_{12} \cdot n_{21}} \quad (8.24)$$

Розраховані величини $ORSS$ лежать у діапазоні від -1 до 1 , причому 0 – відсутність успішності, а 1 – найкраща величина. Ця характеристика не залежить від граничних сум (тобто від порогової величини, вибраної для поділу наявності та відсутності явищ).

Якщо використати приклад, наведений в табл. 8.3, то $ORSS = [(82 \cdot 222) - (23 \cdot 38)] / [(82 \cdot 222) + (23 \cdot 38)] = 0,91$.

Обчислення елементів таблиці справджуваності прогнозів та характеристик справджуваності за формулами (8.14)-(8.24) можна істотно спростити, якщо використати можливості Microsoft Excel.

Вправи до розділу 8

8.1 Зміст завдання

1) За вказівкою викладача, використовуючи Microsoft Excel, побудувати графіки фактичних та прогностичних значень певної метеорологічної величини за певний період часу.

2) Зробити письмовий аналіз атрибутів якості прогнозу зазначеної у п. 1 метеорологічної величини.

3) За вказівкою викладача, зробити письмовий аналіз атрибутів якості прогнозу поля геопотенціальної висоти чи атмосферного тиску, використовуючи фактичні та прогностичні карти погоди.

Вихідні матеріали

1. Часові ряди фактичних та прогностичних значень метеорологічних величин.

2. Фактичні та прогностичні карти погоди

Звітні матеріали

1) Графіки фактичних та прогностичних значень метеорологічної величини.

2) Письмові аналізи якості прогнозу візуальним методом.

8.2 За даними таблиці 8.1 розрахувати середню помилку прогнозу. Відповідь: $\delta = -1,1$ °C.

8.3 Розрахувати середню абсолютну помилку прогнозу за тими ж вихідними даними. Відповідь: $\delta_a = 1,62$ °C

8.4 Розрахувати середньоквадратичну помилку прогнозу за даними таблиці 8.1. Відповідь: $\sigma = 2,03$ °C.

8.5 За даними таблиці 8.1 розрахувати коефіцієнт кореляції між прогностичними і фактичними величинами і надати фізичне тлумачення отриманому результату. Відповідь: $r = 0.9$

8.6 За тими ж вихідними даними розрахувати нормований коефіцієнт кореляції між фактичними та прогностичними величинами. Порівняти коефіцієнти даної задачі та попередньої і зробити висновки щодо результатів порівняння.

8.7 За вихідними полями H_p , які надані викладачем, розрахувати середньоквадратичну, фактичну та прогностичну мінливості і оцінити їх відношення.

8.8 За результатами задачі 8.6 розрахувати коефіцієнт кореляції між фактичною і прогностичною мінливостями та зробити висновок щодо характеру зв'язку між вказаними мінливостями

8.9 За даними таблиці 8.1 розрахувати коефіцієнт кореляції аномальності за формулами (8.10), (8.11). Відповідь: $r_a = 0,86$; $0,88$ відповідно до формул (8.10), (8.11).

8.10 1) Занести дані про наявність явищ та їх прогноз для певного періоду часу, за вказівкою викладача, у таблицю Microsoft Excel

2) Використовуючи можливості Microsoft Excel, скласти таблицю справджуваності прогнозу певного явища.

3) Використовуючи можливості Microsoft Excel та формули (8.14)-(8.22), розрахувати статистичні характеристики справджуваності прогнозу.

Вихідні матеріали

1. Часові ряди спостережених явищ погоди та їх прогнозів за певний період часу.

Звітні матеріали

1. Таблиця справджуваності прогнозу.

2. Статистичні характеристики справджуваності прогнозу.

Додаток А

Деякі відомості з векторної алгебри

Рівняння гідротермодинаміки (ГТД) часто записуються в векторній формі. Так, рівняння руху і нерозривності записуються у вигляді

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - 2\vec{\omega} \times \vec{V} + \vec{g},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0,$$

де \vec{V} - вектор швидкості, $\vec{\omega}$ - вектор кутової швидкості обертання Землі, \vec{g} - вектор прискорення сили тяжіння.

Інколи зручно відмітити векторне рівняння горизонтального руху. Нехай \vec{V}_s - вектор швидкості по горизонталі. Тоді, з урахуванням того, що горизонтальні складові вектора \vec{g} дорівнюють нулю, рівняння руху набере вигляду

$$\frac{d\vec{V}_s}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}_s p - 2\vec{\omega} \times \vec{V}_s$$

Перехід від векторних рівнянь до координатних виконується за правилами векторної алгебри. Розглянемо деякі правила стосовно до системи координат з одиничними ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. У випадку декартової системи координат вважаємо, що вказані орти відповідають осям x, y і z . В цьому випадку $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$, $\vec{V}_s = u\vec{i} + v\vec{j}$, де u, v, w - проекції швидкості на відповідні осі; $\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$, $\vec{g} = g_x\vec{i} + g_y\vec{j} + g_z\vec{k}$, де $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - проекції вектора $\vec{\omega}$, g_x, g_y, g_z - проекції вектора \vec{g} на осі x, y, z .

Наведемо деякі правила операцій з векторами. Будь-які два вектори \vec{A} і \vec{B} можна представити у вигляді

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}, \quad \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

де A_x, A_y, A_z і B_x, B_y, B_z проекції векторів \vec{A} і \vec{B} на осі x, y, z відповідно.

Модулі векторів є скаляри і виражаються у вигляді

$$|A| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2},$$

$$|B| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}.$$

Сума (різниця) векторів є новий вектор

$$\vec{c} = \vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\vec{i} + (A_y \pm B_y)\vec{j} + (A_z \pm B_z)\vec{k}.$$

Скалярний добуток векторів є скаляр

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \theta = A \cdot B \cdot \cos \theta,$$

де θ - кут між векторами \vec{A} і \vec{B} .

Для одиничних векторів

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0.$$

Тому

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Векторний добуток двох векторів $\vec{A} \times \vec{B}$ є новий вектор, довжина якого дорівнює виразу $A \cdot B \cdot \sin(\hat{A, B})$, а напрямок співпадає з напрямком руху правого гвинта в напрямку від \vec{A} до \vec{B} . Для одиничних векторів

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -(\vec{j} \times \vec{i}) = \vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = -(\vec{i} \times \vec{k}) = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = -(\vec{k} \times \vec{j}) = \vec{i}.$$

Якщо використаємо ці результати, отримаємо

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \times (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} -$$

$$-(A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k},$$

або у вигляді визначника третього порядку

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Отже, векторний добуток зручно знаходити за допомогою такого визначника.

Оператор набла – це є умовний диференціальний векторний оператор

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Якщо застосувати набла до скаляра, наприклад, до тиску, отримаємо градієнт цієї величини, тобто

$$\nabla p = \text{grad}p = \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Якщо оператор набла застосувати до температури (також скалярної метеорологічної величини), то отримаємо градієнт температури, тобто векторну величину

$$\nabla T = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) T = \vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} = \text{grad}T.$$

Скалярний добуток набла на будь-яку векторну величину (наприклад, на швидкість руху \vec{V}) дає скалярну величину, яка називається дивергенцією (в даному випадку – дивергенцією вектора швидкості \vec{V}).

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w) = \vec{i} \cdot \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{i} \cdot \vec{j} \frac{\partial v}{\partial x} + \vec{i} \cdot \vec{k} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ &+ \vec{j} \cdot \vec{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{j} \cdot \vec{j} \frac{\partial v}{\partial y} + \vec{j} \cdot \vec{k} \frac{\partial w}{\partial y} + \vec{k} \cdot \vec{i} \frac{\partial u}{\partial z} + \vec{k} \cdot \vec{j} \frac{\partial v}{\partial z} + \vec{k} \cdot \vec{k} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

З урахуванням того, що добутки $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$, а $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$, останній вираз набуває вигляду

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = \text{div} \vec{V}.$$

Якщо знайти скалярний добуток оператора набла на швидкість вітру \vec{V}_s , то отримаємо вираз для двовимірної дивергенції

$$\nabla \cdot \vec{V}_s = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (\vec{i}u + \vec{j}v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \text{div} \vec{V}_s.$$

Векторний добуток $\nabla \times \vec{V}$ дорівнює вектору, який має назву вихору вектора швидкості

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$$

Проекції цього вектора на осі декартової системи координат x, y, z отримуємо за допомогою визначника

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \vec{k} (\);$$

$$\text{тобто } \Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \Omega_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

На закінчення представимо в векторній формі повну або індивідуальну похідну для будь-якої метеорологічної величини f . Відомо, що

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{або}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla f.$$

Наприклад, прискорення $\frac{du}{dt}$ (ліва частина першого рівняння руху має

$$\text{вигляд: } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u.)$$

Додаток Б

Таблиця порядків метеорологічних величин та їх похідних

Таблиця Б.1 – Характерні значення метеорологічних величин та їх похідних (за даними Юдіна М.І. для великомасштабних рухів нижньої половини тропосфери позатропічних широт. Кроки $\delta x = \delta y = 500 \text{ км} = 5 \cdot 10^5 \text{ м}$, $\delta z = 2.5 \text{ км} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ м}$, $\delta t = 12 \text{ год} = 4,32 \cdot 10^4 \text{ с}$).

Похідна	Метеорологічні величини					
	$u, v (\text{мс}^{-1})$, $7 \cdot 10^0$	$p (\text{кг м}^{-1} \text{с}^{-2})$ 10^5	$T (\text{К})$, $3 \cdot 10^{-2}$	$\rho (\text{кг м}^{-3})$, 10^0	$w (\text{м с}^{-1})$, 10^{-2}	$\Omega (\text{с}^{-1})$, $2 \cdot 10^{-5}$
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-11}$
$\frac{\partial}{\partial t}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-10}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	10^1	$6 \cdot 10^{-3}$	10^{-4}	$3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-9}$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	10^{-3}	$7 \cdot 10^{-7}$	10^{-8}		
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$1,5 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$8 \cdot 10^{-14}$		
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial t}$	$3 \cdot 10^{-10}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-13}$		
$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-12}$		
$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-11}$		

Примітка: порядки всіх метеорологічних величин та їх похідних указані в одиницях Міжнародної системи (кілограм, метр, секунда).

Додаток В

Рівняння гідротермодинаміки в циліндричній та сферичній системах координат

В.1 Циліндрична система координат.

В цій системі положення деякої точки M визначається горизонтальними координатами r, ψ і вертикальною координатою z (рис. В.1)

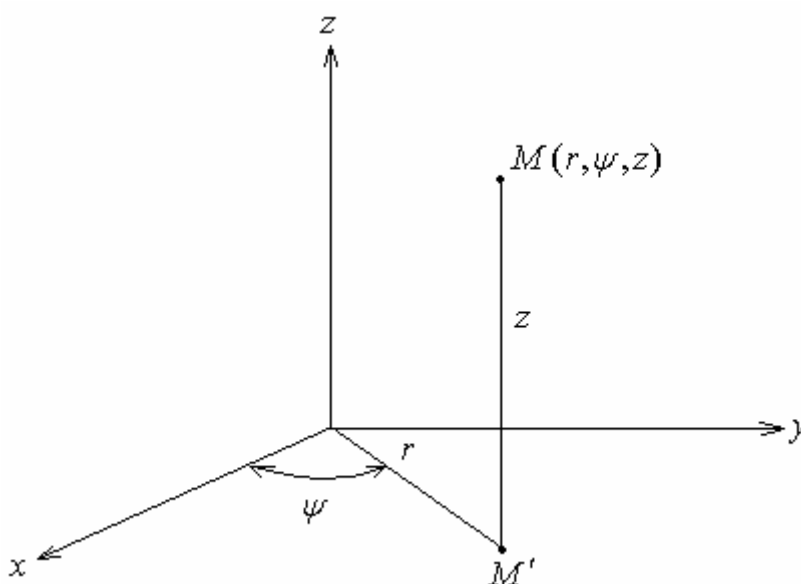


Рисунок В.1 – Координати циліндричної системи

Як видно із рисунка, ця система координат в горизонтальній площині не відрізняється від полярної системи, де ψ - це кут між віссю x і радіусом-вектором, спрямованим на точку M' , яка є проекцією точки M на горизонтальну площину; z - це та ж координата, що і в локальній декартовій системі координат (в ізобаричній системі роль z відіграє тиск P або безрозмірна координата $\zeta = \frac{P}{P_0}$).

Запишемо в циліндричній системі координат рівняння руху, для вільної атмосфери нерозривності і деякі вирази.

Рівняння руху:

$$1. \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + 2w_z \cdot v_\psi;$$

$$2. \frac{\partial v_\psi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\psi}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + v_z \frac{\partial v_\psi}{\partial z} + \frac{v_r v_\psi}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \psi} - 2w_z \cdot v_r;$$

$$3. \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\psi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \psi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g.$$

Рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0.$$

Вирази для градієнта скалярної функції f , вихора, дивергенції і лапласіана:

$$\text{grad}_r f = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \text{grad}_\psi f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \psi}, \quad \text{grad}_z f = \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \psi} - \frac{\partial v_\psi}{\partial z}, \quad \Omega_\psi = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad \Omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\psi) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \psi};$$

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

В.2 Сферична система координат.

В цій системі положення деякої точки M визначається координатами λ, θ, r , або λ, φ, r , де λ - довгота, тобто кут між площинами Грінвіцького меридіану і меридіану, на якому знаходиться точка M , φ - широта розташування точки M , тобто кут між площиною екватора і радіусом – вектором \vec{r} , спрямованим від центру Землі на точку M ; модуль \vec{r} дорівнює відстані від центру Землі до точки M (рис. В.2). Оскільки характерна товщина, тобто вертикальний масштаб L_z атмосферних процесів значно менший ніж радіус Землі a ($a \approx 6370$ км), то у всіх рівняннях відстань r можна замінити на a .

Замість r можна ввести z - відстань точки по вертикалі від поверхні сфери з радіусом a $z = r - a$, при цьому $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}$.

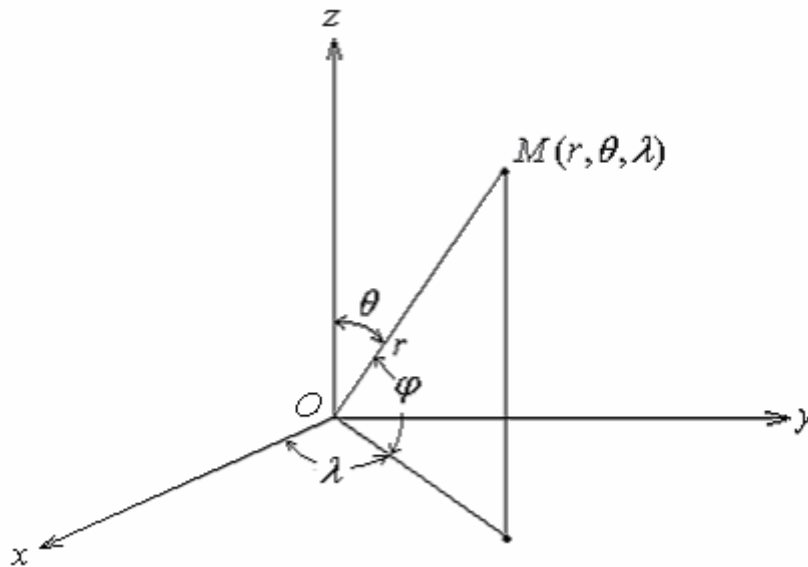


Рисунок В.2 – Сферична система координат (площина XOY лежить в площині екватора)

Запишемо в цій системі ті ж рівняння і вирази, що і в циліндричній системі координат.

Рівняння руху:

$$1. \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g - 2w_\theta \cdot v_\lambda;$$

2.

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\lambda^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 2w_z \cdot v_\lambda;$$

3.

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_r v_\lambda}{r} + \frac{v_\theta v_\lambda \operatorname{ctg} \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - 2w_z v_\theta.$$

Рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{2\rho v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\rho v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0.$$

Вирази для градієнта скалярної функції f

$$\text{grad}_r f = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \text{grad}_\theta f = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \text{grad}_\lambda f = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda};$$

Вирази для проєкцій вихору вектора швидкості $\vec{\Omega}$

$$\Omega_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\lambda) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} \right],$$

$$\Omega_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\lambda) \right],$$

$$\Omega_\lambda = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right];$$

Вираз для дивергенції

$$\text{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda};$$

Вираз для лапласіана функції f

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}.$$

Додаток Г

Застосування Microsoft Excel для складання таблиці справджуваності прогнозів та розрахунку її статистичних характеристик.

Для обчислення характеристик справджуваності за формулами (8.14) – (8.24) треба, по-перше, занести в таблицю дані про наявність явищ та їх прогноз для певного періоду часу. Для прикладу розглянемо прогноз опадів протягом січня 2009 року (табл. Г.1, стовпці А, В і С, в яких символом «+» позначено наявність явища і «-» – його відсутність). Як можна бачити, вказана таблиця збігається з табл. 8.3, тобто усі розрахунки, наведені вище, виконані саме для цього випадку. Далі, потрібно завести такі вирази для формул у комірки аркушу Microsoft Excel (стосовно табл Г.1):

L39		fx						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Дата	Прогноз	Факт		Таблиця справджуваності прогнозу опадів			
2	01.01.2009	+	-		Прогноз	Спостережені		
3	02.01.2009	+	+			наявні	відсутні	разом
4	03.01.2009	+	+		наявний	82	38	120
5	04.01.2009	+	+		відсутній	23	222	245
6	05.01.2009	-	-		разом	105	260	365
7	06.01.2009	+	+					
8	07.01.2009	+	+		Точність			0.833
9	08.01.2009	-	+		Оцінка зміщення			1.143
10	09.01.2009	-	-		Ймовірність виявлення			0.781
11	10.01.2009	-	+		Відношення хибних тривог			0.317
12	11.01.2009	+	-		Ймовірність хибного виявлення			0.146
13	12.01.2009	-	-		Оцінка загрози			0.573
14	13.01.2009	-	-		Оцінка успішності Гілберта			0.438
15	14.01.2009	-	-		Критерій успішності Пірсі-Обухова			0.635
16	15.01.2009	-	-		Критерій надійності прогнозу Багрова			0.609
17	16.01.2009	+	+		Відношення ймовірностей			20.828
18	17.01.2009	+	+		Оцінка успішності відношення ймовірностей			0.908
19	18.01.2009	-	-					
20	19.01.2009	+	+					
21	20.01.2009	-	-					
22	21.01.2009	+	+					
23	22.01.2009	+	+					
24	23.01.2009	+	+					
25	24.01.2009	+	+					
26	25.01.2009	+	+					
27	26.01.2009	+	+					
28	27.01.2009	+	+					
29	28.01.2009	-	+					
30	29.01.2009	+	+					
31	30.01.2009	-	-					
32	31.01.2009	+	+					

Таблиця Г.1 – Фрагмент вікна Microsoft Excel з розрахованими

статистичними характеристики справджуваності прогнозу

- F4 =СУММ((B2:B366="+")*(C2:C366="+"))
- F5 =СУММ((B2:B366="-")*(C2:C366="+"))
- G4 =СУММ((B2:B366="+")*(C2:C366="-"))
- G5 =СУММ((B2:B366="-")*(C2:C366="-"))
- F6 =СУММ(F4:F5)
- G6 =СУММ(G4:G5)
- H4 =СУММ(F4:G4)
- H5 =СУММ(F5:G5)
- H6 =СУММ(H4:H5)
- H8 =(F4+G5)/H6
- H9 =H4/F6
- H10 =F4/F6
- H11 =G4/H4
- H12 =G4/G6
- H13 =F4/(F6+G4)
- H14 =(F4-F6*H4/H6)/(F6+G4-F6*H4/H6)
- H15 =F4/F6-G4/G6
- H16 =(F4+G5-(F6*H4+H5*G6)/H6)/(H6-(F6*H4+H5*G6)/H6)
- H17 =F4*G5/(F5*G4)
- H18 =(F4*G5-F5*G4)/(F4*G5+F5*G4)

Зауважимо, що після того, як вирази заведені до комірок F4, F5, G4 і G5, треба натиснути одночасно Ctrl, Shift і Enter, тому що зазначені вирази є формулами масиву. Також у цих комірках кількість даних, які підсумовуються (B2:B366 і C2:C366), залежить від довжини використаного часового ряду; у нашому випадку вона становила 365.

Література

1. Хоменко Г.В., Хохлов В.М. Гідродинамічні методи прогнозу погоди. – Одеса: „Екологія”, 2008. – 338 с.
2. Ківганов А.Ф. та ін. Гідродинамічні моделі прогнозу погоди і сіткові методи їх реалізації. – Одеса: „ТЄС” 2002. – 180 с.
3. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 376 с.
4. Белов П.Н. Сборник упражнений по численным методам прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 136 с.

Додаткова література

5. Матвеев Л.Т. Теория общей циркуляции атмосферы и климата Земли. - Л.: Гидрометеоиздат, 1991. – 295 с.
6. Репинская Р.П. Фильтрованные прогностические модели и способы исследования вычислительной устойчивости разностных схем. – Л.: Изд. ВАС, (ЛГМИ), 1991. – 105с.
7. Репинская Р.П. Квазисоленоидальные прогностические модели. – Л.: Изд. ЛПЧ, (ЛГМИ), 1985. – 38 с.
8. Репинская Р.П. Уравнение динамики атмосферы в координатной системе. – Л.: Изд. ЛПЧ, (ЛГМИ), 1982. – 49 с.
9. Мезингер Ф., Аракава А., Численные методы, используемые в атмосферных моделях: Пер. с англ. - Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 134 с.
10. Гандин Л.С., Дубов А.С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1968. – 427 с.

X 76

Г.В.Хоменко, В.М. Хохлов, В.М.Бондаренко
Гідродинамічні методи прогнозу погоди. Практикум: навчальний посібник. – Одеса: 2012. – 208 с.

Практикум з гідродинамічних методів прогнозу погоди підготовлений відповідно до навчальної програми з даної дисципліни. Вправи і задачі, які наведені в цьому навчальному посібнику використовуються як основний матеріал для практичних занять і контролюючих заходів. До кожного розділу надано досить детальне пояснення теоретичного матеріалу та формули, які необхідні для розв'язання задач.

Навчальний посібник призначений для студентів, магістрів та аспірантів університетів, які навчаються за напрямом „Гідрометеорологія”.

ББК 26.23
УДК 551.509.313

Навчальне видання

Хоменко Г.В.
Хохлов В.М.
Бондаренко В.М.

Практикум з гідродинамічних методів прогнозу погоди

Навчальний посібник

Надруковано в авторській редакції з готового оригінал-макета

Підписано до друку Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Ум. друк. арк.
Тираж прим. Зам №

Одеський державний екологічний університет
65016, м. Одеса, вул. Львівська, 15