

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.І.Герасимов, І.С.Андріанова

## **ФІЗИКА В ЗАДАЧАХ**

(у 5 частинах)

Частина III

## **ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів із природничих  
напрямів підготовки.

**О д е с а**  
**ТЕС**  
**2014**

УДК 531  
ББК 22.2  
Г37

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів  
(лист №1/11-15545 від 15.10. 2013р.).

Рецензенти:

**А.Г.Загородній**, д-р фіз.-мат. наук, проф., академік Національної академії наук України, директор інституту теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України;  
**О.В.Чалий**, д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. каф. медичної та біологічної фізики Національного медичного університету ім. О.О. Богомольця (м. Київ), академік АНВШ України, член-кореспондент АПН України, заслужений діяч науки і техніки України,  
**Курмашев Ш.Д.**, д-р фіз.-мат. наук, проф., проф. Одеської Академії зв'язку.

**Герасимов О.І. , Андріанова І.С.**

Г37 Фізика в задачах. Ч.ІІІ. Електрика і магнетизм: Навчальний посіб. /Герасимов О.І. , Андріанова І.С./ – Одеса: Вид. ПП “ТЕС” 2014. – 153 с.

Навчальний посібник з розділу “ Електрика і магнетизм ” курсу загальної фізики має за мету поліпшення засвоєння змісту фізики студентами вищих навчальних закладів природничих напрямів підготовки за допомогою детального розгляду та розв’язання типових задач з окремих її підрозділів. Акцент посібника спрямовано на роз’яснення, усвідомлення та застосування фізичних законів на шляху розв’язання конкретних задач.

Посібник може також бути корисним для студентів, магістрів, аспірантів, викладачів та наукових співробітників вищих навчальних закладів із природничих та междисциплінарних напрямків підготовки.

ISBN 978–966–2389–83–8 (у 5 ч.)

© Одеський державний  
екологічний університет, 2014

## ЗМІСТ

Передмова .....	4
Вступ .....	5
Розділ 1. Електростатика .....	11
1.1. Електростатичне поле та його характеристики .....	11
1.2. Електричне поле в діелектрику.....	19
1.3. Електростатичне поле зарядженого провідника. Електроємність. ....	23
1.4. Енергія електричного поля .....	25
Розділ 2. Постійний струм	71
Розділ 3. Електромагнетизм	102
3.1. Магнітне поле та його характеристики.	102
3.2. Електромагнітна індукція	108
3.3. Змінний струм.	111
3.4. Магнітне поле у речовині. Енергія магнітного поля.	113
3.5. Рівняння Максвелла	115
Додатки	149
Предметний покажчик	151
Іменний покажчик	152
Література	153

## ПЕРЕДМОВА

Посібник продовжує видання методичних матеріалів з курсу загальної фізики “Фізика у задачах та прикладах”, який спрямовано на засвоєння змісту дисципліни шляхом детального розв’язання типових задач з окремих її розділів. Цей том посібника присвячено викладенню класичних положень електромагнетизму і містить досить велику кількість вправ, яких, на думку авторів, достатньо для якісного практичного засвоєння цього розділу. Як і у попередніх розділах, головна увага приділяється детальній методичній проробці розв’язків типових задач.

Задачі для самостійного розгляду спираються на типові, поширюють коло питань розділу, до якого вони відносяться, та свідомо прокладають стежки безпосередньо до комплексних фахових завдань. Студент може користуватися посібником, перебуваючи на різних рівнях засвоєння матеріалів курсу, і контролювати рівень знань за допомогою тестових вправ (понятійний рівень) чи шляхом розв’язання типових задач. Посібник розраховано на студентів міждисциплінарних напрямків підготовки, тому задачі та вправи підібрані таким чином, щоб задовольнити категорії студентів, які мають різні ступені мотивації до вивчення фізики. Все вищеописане здійснюється із безумовним утриманням концептуального змісту фізики (у даному випадку її розділу «Електромагнетизм») та її спрямованості на розв’язання практичних і актуальних задач вивчення навколишнього середовища та технологічних процесів.

Список літератури відсилає користувача до поглиблення отриманих знань та навичок за допомогою вивчення додаткових джерел інформації та доповнює довідкову базу посібника.

Автори висловлюють щиру подяку рецензентам за важливі дискусії та рекомендації стосовно як змістовних положень посібника, так і категорій завдань, які включено до змісту.

## Вступ. Попередні відомості.

В розділі курсу загальної фізики “Електромагнетизм” найбільшу увагу приділяють основним поняттям і загальним принципам, які пов’язані з електричними та магнітними явищами.

При вивченні розділу “Електрика та електромагнетизм” маємо, перш за все, усвідомити, що посередником електромагнітної взаємодії між зарядженими або намагніченими тілами, або тілами, по яким тече струм, є особливий вид матеріального посередника – електромагнітне поле. До висновку про реальне існування електромагнітного поля призводить увесь розвиток учення про електричні та магнітні явища.

Взаємодію між нерухомими у даній системі відліку зарядами називають електростатичною й описують за допомогою тільки електричного поля.

Додаткову взаємодію, що виникає у системі відліку, відносно якої заряди рухаються, пов’язують із магнітним полем, утворюваним зарядом у разі руху.

Таким чином, розподіл електромагнітного поля на електричне та магнітне є відносним і залежить від вибору системи відліку, але він досить корисний при вивченні основ електромагнетизму.

### Заряди та їх властивості.

Електричний заряд частинки є одною з основних, первинних її характеристик.

Властивості електричних зарядів:  
заряди існують у двох видах: позитивні та негативні;  
заряди взаємодіють між собою. Заряди однакового знаку відштовхуються, протилежних – притягуються (рис.1);

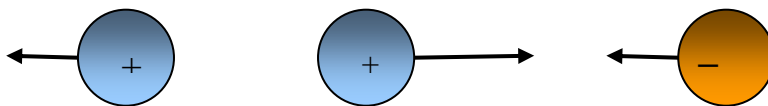


Рис.1.

заряди дискретні, причому існує найменший (елементарний) заряд, величина якого дорівнює  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Всі інші заряди є цілими кратними елементарному. Електрон є носієм елементарного негативного заряду; протон (ядро атома гідрогену  ${}^1_1\text{H}$ ) – носій елементарного позитивного заряду. Якщо заряд тіла дорівнює  $Q$ , то  $Q = \pm N|e|$ , де  $N$  – кількість некомпенсованих електронів, а  $e$  – заряд електрона;  
заряд є релятивістським інваріантом, тобто його величина не залежить від того, рухається він чи покоїться;

виконується закон збереження заряду: алгебраїчна сума електричних зарядів будь-якої замкненої системи (сумарний заряд) не змінюється, які б процеси не відбувалися усередині цієї системи:  $\sum_{i=1}^N q_i = \text{const}.$

Атоми та молекули в цілому нейтральні, але складаються з позитивно та негативно заряджених частинок, які рознесені у просторі: у центрі атому розташовано позитивно заряджене ядро малих розмірів, на великій відстані від нього (у десятки разів більших, ніж розмір ядер) рухаються електрони, кількість яких дорівнює кількості протонів у ядрі, тобто порядковому номеру атома у таблиці Менделєєва. Таким чином, нейтральні атоми та молекули утворюють біля себе електричні та магнітні поля.

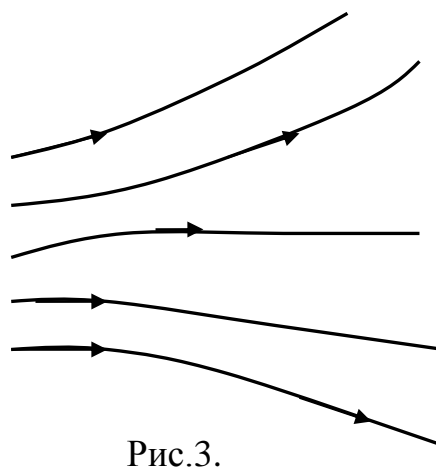
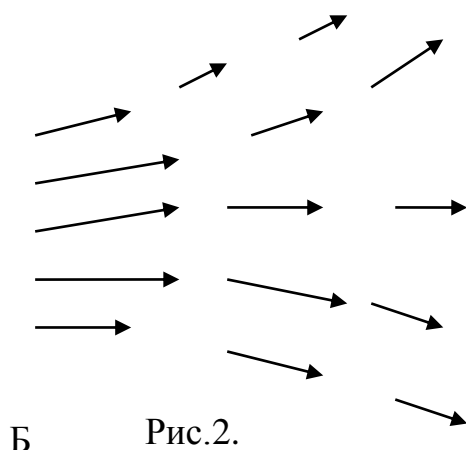
Електрони порівняно легко відділити від атома, тобто його іонізувати, тому якщо тіло заряджене позитивно, то в ньому є нестача електронів, якщо негативно – то їх надлишок. Електризація тіл може здійснюватися різними способами: зіткненням (тертям), електростатичною індукцією (під впливом зовнішнього електричного поля) і т. ін.

### Векторні та скалярні поля. Оператор $\nabla$ .

Взаємодія між тілами здійснюється за допомогою матеріальних носіїв взаємодії – полів (наприклад, гравітаційного поля, електричного поля і т. ін.), причому взаємодія передається від однієї точки поля до іншої з кінцевою швидкістю.

Наявність електричного чи магнітного поля можна встановити завдяки впливу на електричний заряд (нерухомий, або, у випадку магнітного поля, той, що рухається). Це дозволяє ввести силові (векторні) характеристики полів – вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  та вектор магнітної індукції  $\vec{B}$ , і розглядати електричне та магнітне поле як векторні функції координат  $x, y, z$  та часу  $t$ .

• Векторне поле можна зображати сукупністю стрілок, довжина й напрям яких відображують векторне поле в точках, звідки починаються стрілки (рис.2).



і більш наглядною є картина векторного поля, отримана за допомогою векторних ліній, дотичні до яких у кожній точці співпадають за напрямком із вектором, що є характеристикою поля (рис.3). Щоб не втратити інформацію про величини векторів, домовились, що кількість ліній на одиницю площі, поперечній до ліній, тобто їх густина, прямо пропорційна значенню відповідної векторної характеристики поля. Картина векторних ліній поля дозволяє отримати суттєву інформацію про його властивості.

- Якщо поле змінюється з часом, то цю зміну можна описати за допомогою похідної за часом від його характеристики. Аналогічно його зміну у просторі можна охарактеризувати, розглянувши його похідні за координатами.

Основні диференціальні дії, які можна виконувати над скалярним полем  $u$  або векторним полем  $\vec{A}$ , що може бути представлено у вигляді векторної суми із складових у вибраній системі координат ( $\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z$ ), можна записати за допомогою символу  $\vec{\nabla}$  (оператор «набла»):  $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ . (Будь-який оператор визначає дію, яку необхідно виконати над величиною (функцією), на яку він діє.) Множення оператора  $\vec{\nabla}$  на скаляр  $u$  чи вектор  $\vec{A}$  відбувається за загальними правилами.

Дія оператора  $\vec{\nabla}$  на скалярну величину  $u$  носить назву **градієнта скалярної функції**  $u$ :  $\vec{\nabla}u$ . Це вектор, який характеризує швидкість зміни даної скалярної характеристики поля у просторі у напрямі найбільш швидкого її зростання:

$$\vec{\nabla}u = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad } u ; \quad (1)$$

скалярний “добуток” оператора  $\vec{\nabla}$  на вектор  $\vec{A}$  дає результат у вигляді скалярної величини, яка має назву **дивергенції вектора**  $\vec{A}$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \text{div} \vec{A}; \quad (2)$$

векторний “добуток” оператора  $\vec{\nabla}$  на вектор  $\vec{A}$  дає вектор (3), що має назву **ротора**:  $\text{rot} \vec{A} = [\vec{\nabla} \vec{A}] =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \text{rot} \vec{A}. \quad (3)$$

Отже, після застосування диференціальної операції до поля отримуємо поле, до якого знову можна застосовувати ці операції. Результати такої подвійної дії, які можна отримати, якщо замість вектора підставити його розклад по координатним осям та виконати обчислення за формальними правилами векторної алгебри, наведені нижче:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u = \Delta u \text{ – скалярне поле,} \quad (4)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;

$$\left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) \right] = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0; \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} \text{ – векторне поле;} \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right] = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0; \quad (7)$$

$$\left[ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right] \right] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}; \quad (8)$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} = \Delta \vec{A} \text{ – векторне поле.} \quad (9)$$

(Спробуйте отримати ці вирази самостійно.)

З наведених співвідношень витікають практично корисні наслідки.

1. У фізичних задачах часто трапляється, що ротор деякого векторного поля  $\vec{A}$  дорівнює нулю. Тоді на підставі (5) можна зробити висновок про те, що вектор  $\vec{A}$  у цьому випадку можна представити у вигляді градієнту деякого скалярного поля  $u$ . Тобто існує скалярне поле  $u$ , для якого  $\vec{A} = \operatorname{grad} u$ .

$$\text{Інакше кажучи: якщо } \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right] = 0, \text{ то існує } u, \text{ таке, що } \vec{A} = \vec{\nabla} u. \quad (10)$$

2. Аналогічна теорема формулюється для випадку, коли дивергенція деякого векторного поля  $\vec{D}$  дорівнює нулю. З виразу  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$  (7) можна зробити висновок, що вектор  $\vec{D}$  є ротором деякого векторного поля  $\vec{A}$ , причому, векторні лінії поля  $\operatorname{rot} \vec{A}$  (вихрові лінії) не можуть мати ані джерел, ані стоків, тобто не можуть починатися або закінчуватися, а завжди замкнені.

$$\text{Інакше: якщо } \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \text{ то існує } \vec{A}, \text{ таке, що } \vec{D} = \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right]. \quad (11)$$

• З векторними полями зв'язані два важливих математичних поняття, якими користуються при вивченні електричного та магнітного полів. Це поняття про потік вектора через деяку поверхню та циркуляцію вектора вздовж контуру.

Елементарний потік  $d\Phi_A$  векторного поля через елемент поверхні  $d\vec{S}$  визначається як скалярний добуток векторів  $\vec{A}$  та  $d\vec{S}$ :



$$d\Phi_A = \vec{A} \cdot d\vec{S} = AdS \cos \alpha = A_n dS. \quad (12)$$

Вектор  $d\vec{S}$ , який задає не тільки величину, але і орієнтацію площадки у просторі, має напрям позитивної нормалі  $\vec{n}$ . Тому елементарний потік векторного поля через площадку можна визначити як добуток нормальної складової вектора  $\vec{E}$  на її площу (рис.4). Відповідно, повний потік через деяку поверхню дорівнює

$$\Phi_A = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S A_n dS. \quad (13)$$

Густину ліній, за допомогою яких зображують векторне поле, обирають так, що потік вектора  $\vec{A}$  через деяку поверхню дорівнює кількості векторних ліній, що перетинають цю поверхню. Знак внеску від перетину залежить від того, гострий чи тупий кут утворює лінія з обраним напрямом нормалі до поверхні. У випадку замкненої поверхні позитивним вважають напрям зовнішньої нормалі.

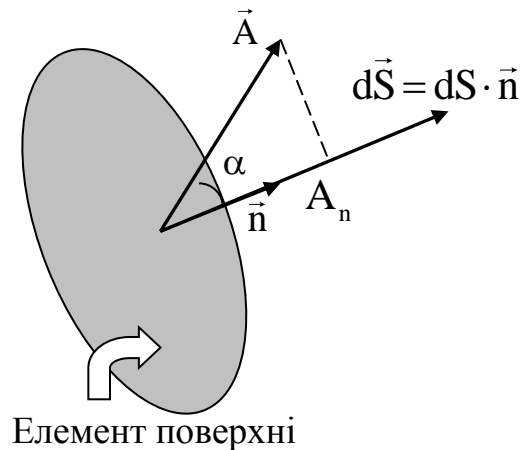


Рис.4.

Циркуляція вектора вздовж довільного замкненого контуру – це інтеграл вздовж замкненого контуру від скалярного добутку вектора на елемент довжини контуру (рис.5):

$$\int_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_L Adl \cos \alpha = \int_L A_1 dl. \quad (14)$$

Знак добутку  $\vec{A} \cdot d\vec{l}$  залежить від орієнтації вектора  $\vec{A}$  та напрямку обходу контуру.

Якщо вектор  $\vec{A}$  є силовою характеристикою векторного поля, то рівність його циркуляції нулю указує на потенціальний (безвихровий) характер поля.

- Існують теореми, які дозволяють зв'язати потік вектора через довільну замкнену поверхню з дивергенцією векторного поля (теорема Остроградського), а циркуляцію по довільному замкненому контуру з ротором векторного поля (теорема Стокса).

За теоремою Остроградського поверхневий інтеграл від нормальної складової довільного вектора по замкненій поверхні дорівнює інтегралу від дивергенції вектора по об'єму, що обмежений цією поверхнею:

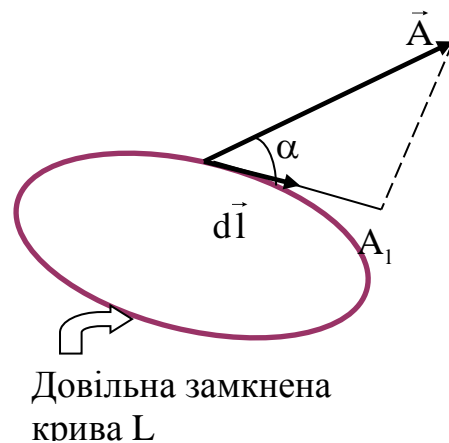


Рис.5.

$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV, \quad (15)$$

тобто 
$$\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV. \quad (15a)$$

За теоремою Стокса криволінійний інтеграл від дотичної складової довільного вектора вздовж замкненого контуру дорівнює поверхневому інтегралу від нормальної складової ротора цього вектора по довільній поверхні, яка обмежена цим контуром:

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] \cdot \vec{n} dS, \quad (16)$$

тобто 
$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS. \quad (16a)$$

• Користуючись поняттями про потік та циркуляцію, дивергенцію та ротор і порівнюючи їх значення, обчислені для векторних характеристик електростатичного, змінного електричного та магнітного полів, можна не тільки отримати основні закони електромагнетизму, але й чіткіше усвідомити властивості кожного поля.

### Завдання.

1. Безпосереднім обчисленням покажіть, що

$$\text{а) } \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] = 0; \quad \text{б) } \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}] = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

2.  $\vec{R}$  – радіус - вектор, проведений із початку координат в точку  $(x, y, z)$ . Покажіть, що

при  $\vec{R} \neq 0$  а)  $\operatorname{div} \vec{R} = 3$ ; б)  $\operatorname{rot} \vec{R} = 0$ ; в)  $\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{R}}{R^3} \right) = 0$ ; г)  $\vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = 0$ ;

д)  $\vec{\nabla} \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}.$

3. Із рівності б) попереднього завдання та формули (10) витікає, що вектор  $\vec{R}$  можна представити у вигляді  $\vec{R} = \vec{\nabla} \phi$ . Знайдіть функцію  $\phi$ .

4. Напруженість електричного поля точкового заряду, поміщеного в начало системи координат, визначається формулою  $\vec{E} = C \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$ , де  $C$  – деяка константа;

$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ;  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . а) Обчисліть потік вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  через поверхню сфери радіуса  $R$ , центр якої співпадає с зарядом.

б) Скориставшись теоремою Остроградського – Гауса, представте потік вектора  $\vec{E}$  через поверхню сфери у вигляді об'ємного інтегралу від  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ . Чи можете ви пояснити отриманий результат?

в) Обчисліть циркуляцію вектора  $\vec{E}$  вздовж кола радіуса  $R$ , центр якого співпадає с зарядом (контур лежить у площині  $ХОУ$ ). Переконайтесь у справедливості отриманого результату, скориставшись теоремою Стокса.

## Розділ 1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

### 1.1. Електростатичне поле та його характеристики.

**Тема:** Основні властивості електричного заряду. Поняття точкового заряду. Закон Кулона. Опис електричного поля. Принцип суперпозиції. Потік вектора напруженості. Теорема Гауса та її застосування до розрахунків симетричних полів. Циркуляція напруженості електричного поля. Робота сили електростатичного поля по переміщенню заряду. Потенціальний характер електростатичного поля. Потенціал. Принцип суперпозиції для потенціалу. Циркуляція вектора напруженості. Зв'язок між напруженістю і потенціалом.

### Основні поняття і формули

- **Електростатика** вивчає взаємодію та поля нерухомих зарядів. Поле, яке утворене нерухомими зарядами, не змінюється з часом та має назву електростатичного.
- Заряд називають **точковим**, якщо розмірами зарядженого тіла можна знехтувати порівняно з відстанню від нього до інших зарядів.
- **Закон Кулона:** сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів  $q_1$  і  $q_2$  прямо пропорційна величині цих зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Сили взаємодії спрямовані вздовж прямої, яка з'єднує точкові заряди, тобто є центральними.  $F < 0$  для різнойменних зарядів (заряди притягаються);  $F > 0$  для однойменних зарядів (заряди відштовхуються). У Міжнародній системі одиниць СІ

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}, \quad (1.1)$$

де  $r$  – відстань між зарядами;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала;  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність середовища.

Діелектрична проникність середовища показує у скільки разів сила взаємодії між двома точковими зарядами у даному середовищі менша за силу взаємодії у вакуумі, якщо відстань між зарядами не змінюється:

$$\epsilon = \frac{F_{\text{вак.}}}{F_{\text{серед.}}} \quad (1.2)$$

Закон Кулона у векторній формі (рис.1.1):  $\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (1.1a)$

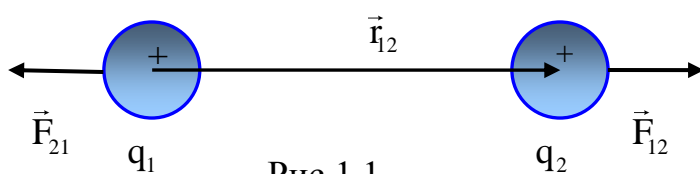


Рис.1.1.

$\vec{F}_{12}$  – сила, що діє з боку першого заряду на другий;  $\vec{r}_{12}$  – радіус-вектор, напрямлений від

заряду  $q_1$  до заряду  $q_2$ .

За III законом Ньютона  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ .

- Силовою характеристикою електричного поля є **вектор напруженості**  $\vec{E}$ , який дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний заряд, поміщений у дану точку поля.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \quad (1.3)$$

де  $\vec{F}$  – сила, що діє на точковий заряд  $q$ , вміщений у дану точку поля.

В СІ напруженість вимірюється у В/м:  $[E] = \frac{\hat{I}}{\hat{E}\hat{e}} = \frac{\hat{A}}{\hat{i}}$ .

Напруженість електричного поля точкового заряду за допомогою закону Кулона можна представити у вигляді

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.4a)$$

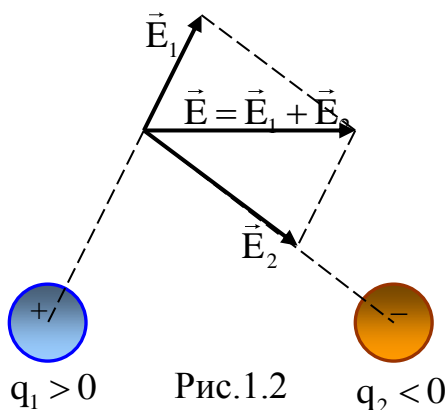
тобто, вектор напруженості поля точкового заряду спрямований уздовж радіальної прямої від заряду, якщо він позитивний, та до заряду, якщо поле утворюється негативним зарядом.

За модулем  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$ . (1.4)

- **Принцип суперпозиції** (накладення) електричних полів: напруженість поля, утвореного системою зарядів дорівнює векторній сумі напруженості полів, створених кожним із зарядів окремо (рис.1.2):

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \quad (1.5)$$

де  $\vec{E}_i$  – вектор напруженості поля точкового заряду за номером  $i$ .



Для спрощення математичних розрахунків у багатьох випадках зручно нехтувати тим, що заряди мають дискретну структуру (електрони, ядра). Тобто існуючий істинний розподіл точкових дискретних зарядів замінюють фіктивним неперервним розподілом, вважаючи, що заряди певним способом «розмазані» у просторі.

У випадках безперервного розподілу зарядів розглядають лінійну, поверхневу та об'ємну густину зарядів, які відповідно дорівнюють (рис.1.3).

$$\tau = \frac{dq}{dl}; \quad \sigma = \frac{dq}{ds}; \quad \rho = \frac{dq}{dV}.$$

При безперервно розподіленому заряді за принципом суперпозиції напруженість поля знаходиться інтегруванням напруженості поля елемента заряду  $dq$ , який можна вважати точковим:

вздовж усієї довжини зарядженої лінії  $L$  для лінійно заряджених тіл

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_L \frac{\tau \vec{r}}{r^2} dl; \quad (1.6,а)$$

по поверхні  $S$  для тіл із зарядженою поверхнею

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_S \frac{\sigma \vec{r}}{r^2} dS; \quad (1.6,б)$$

по об'єму  $V$  для об'ємно заряджених тіл

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho \vec{r}}{r^2} dV; \quad (1.6,в)$$

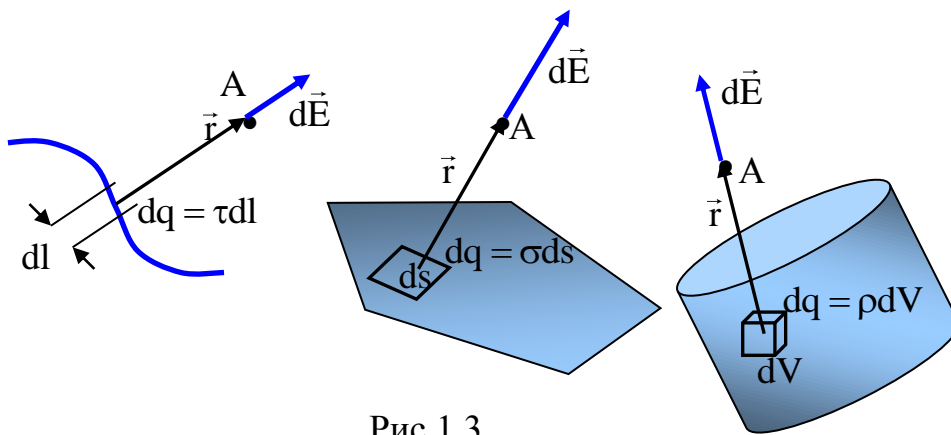


Рис.1.3.

• Електричне поле можна представити за допомогою ліній напруженості. **Лінії напруженості** (силові лінії вектора  $\vec{E}$ ) – лінії, дотична до яких в кожній точці збігається з напрямком вектора  $\vec{E}$ .

Принцип побудови ліній напруженості:

- лінії напруженості ніколи не перетинаються (оскільки в кожній точці простору поле визначено однозначно);
- ніколи не розриваються;
- у випадку електростатичного поля лінії напруженості ніколи не замикаються; вони починаються на позитивних зарядах, закінчуються на негативних; або приходять з нескінченності та уходять у нескінченність;
- густота ліній напруженості відображує величину вектора  $\vec{E}$  поля в даній точці простору. Число ліній напруженості, що пронизують одиницю площі поверхні, перпендикулярної лініям напруженості, повинно бути рівним модулю  $\vec{E}$ .

Силкові лінії електричного поля нерухомого точкового заряду – це радіальні лінії з центром у заряді (рис.1.4).

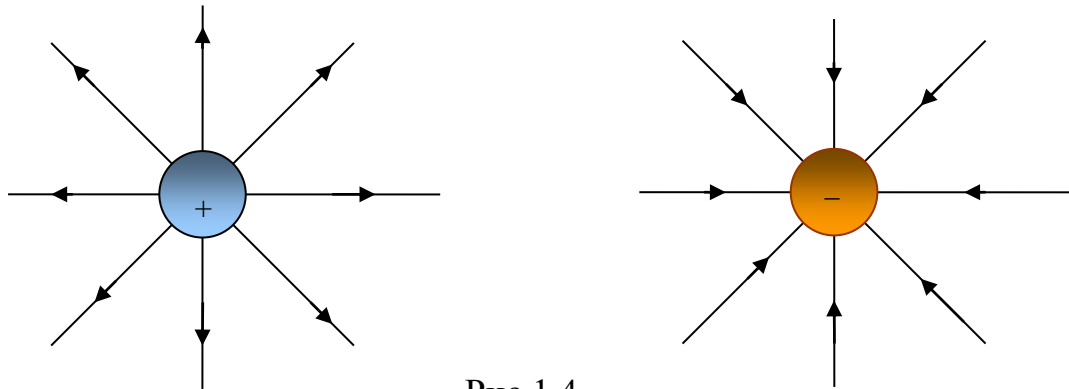


Рис.1.4

- **Однорідним** називається поле, вектор напруженості якого в будь-якій точці простору є постійним за величиною та напрямком  $\vec{E} = \text{const}$ . Силкові лінії однорідного поля паралельні й мають однакову густоту.
- Потік вектора напруженості через поверхню  $S$  (див. формулу (1.3)) дорівнює:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E_n dS. \quad (1.7)$$

Вимірюється у Міжнародній системі одиниць СІ у  $\hat{A} \cdot \hat{i}$ :  $[\Phi_E] = \hat{A} \cdot \hat{i}$ .

**Теорема Гауса** для електричного поля: потік вектора напруженості електричного поля крізь довільну (уявну) замкнену поверхню  $S$  дорівнює алгебраїчній сумі електричних зарядів, що оточуються цією поверхнею, поділений на  $\epsilon_0$ :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.8)$$

При неперервному розподілі зарядів сума зарядів у правій частині рівняння замінюється на інтеграл від густини електричного заряду  $\rho$  по об'єму  $V$ , який охоплює замкнена поверхня  $S$ :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.9)$$

Теорема Гауса може вважатися основним законом електростатичної взаємодії. Її еквівалентність закону Кулона основана на оберненій пропорційності сили взаємодії двох точкових зарядів квадрату відстані  $r$  на принципі суперпозиції.

Використання теореми Гауса суттєво спрощує розрахунки полів симетрично розподілених зарядів (див. формули (1.10) – (1.14)).

- Напруженість електричного поля (за модулем):

а) рівномірно зарядженої нескінченної нитки на відстані  $r$  від її осі (або зовні циліндра радіуса  $R$ ,  $r \geq R$ )

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r}; \quad (1.10)$$

$\tau$  – лінійна густина заряду.

(Картина ліній напруженості представлена на рис. 1.5.)

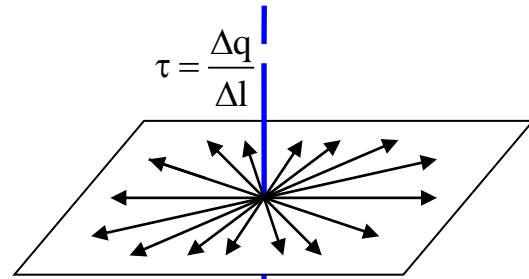


Рис. 1.5

б) рівномірно зарядженої нескінченної площини з лінійною густиною заряду  $\sigma$  (рис.1.6)

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}; \quad (1.11)$$

в) двох паралельних нескінченних площин, заряджених різнойменними зарядами однакової поверхневої густини  $\sigma$  (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon}; \quad (1.12)$$

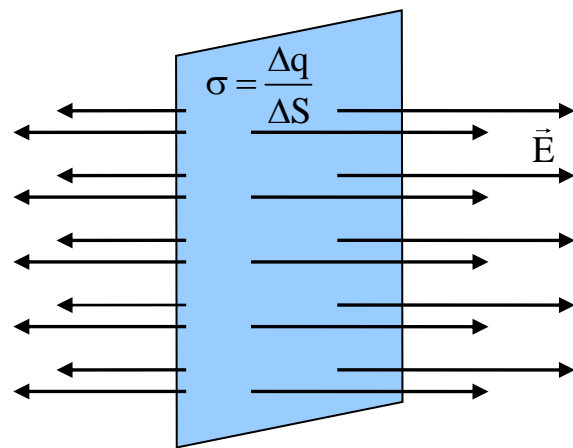


рис.1.6.

У двох останніх випадках електростатичне поле, утворюване зарядами, є однорідним (див. рис.1.6).

г) сфери радіуса  $R$ , заряд  $q$  якої рівномірно розподілений по її поверхні, на відстані  $r$  від центра сфери

$$E = \begin{cases} 0; & (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}; & (r \geq R) \end{cases} \quad (1.13)$$

д) сфери радіуса  $R$ , заряд  $q$  якої рівномірно розподілений по її об'єму, на відстані  $r$  від центра сфери

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^3} r = \frac{r\rho}{3\epsilon_0\epsilon}; & (r \leq R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0\epsilon r^2}; & (r \geq R) \end{cases} \quad (1.14)$$

Тут  $\rho = \frac{dq}{dV}$  – об'ємна густина заряду.

• **Електростатичне поле є потенціальним:** робота сил поля по переміщенню заряду не залежить від траєкторії руху, а тільки від його початкового і кінцевого положення в полі. Відповідно, циркуляція вектора напруженості вздовж довільного замкненого контуру дорівнює нулю:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.15)$$

• **Потенціал** електростатичного поля

$$\varphi = \frac{W_p}{q}, \quad (1.16)$$

де  $W_p$  – потенціальна енергія точкового заряду  $q$ , який знаходиться у даній точці поля.

Вимірюється в системі СІ у вольтах (В):  $[\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \hat{A}$

$$\text{Потенціал поля точкового заряду } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}, \quad (1.17)$$

де  $r$  – відстань від заряду до точки поля.

За принципом суперпозиції потенціал поля, яке утворюється системою зарядів

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (1.18)$$

У випадку безперервно розподіленого заряду:

$$\text{а) для лінійно заряджених тіл} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_L \frac{\tau}{r} dl; \quad (1.19a)$$

$$\text{б) при поверхневому розподілу зарядів} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_S \frac{\sigma}{r} dS; \quad (1.19б)$$

$$\text{в) для об'ємно заряджених тіл} \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dV. \quad (1.19в)$$

• **Різниця потенціалів** між двома точками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}, \quad (1.20)$$

де  $A$  – робота сил поля при переміщенні заряду з однієї точки поля в другу.

Тоді робота сил поля по переміщенню заряду

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU. \quad (1.21)$$

• Напруженість і потенціал електричного поля зв'язані співвідношенням:

$$\text{а) у загальному випадку } \vec{E} = -\text{grad}\varphi, \text{ або } \vec{E} = -\left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right); \quad (1.22)$$

Звідки різниця потенціалів двох точок поля

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 E_1 \cdot dl. \quad (1.23)$$



б) у випадку однорідного поля  $E = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{d}$ , (1.24)

де  $d$  – відстань між екіпотенціальними поверхнями, до яких належать точки 1 і 2.

**Екіпотенціальними поверхнями** називають поверхні рівного потенціалу ( $\varphi(x,y,z) = \text{const}$ ). Робота по переміщенню заряду вздовж екіпотенціальної поверхні дорівнює нулю (див. формулу 1.21).

в) у випадку поля, симетричного відносно центру або осі:  $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ . (1.25)

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E(r) \cdot dr. \quad (1.26)$$

Співвідношення (1.23) та (1.26) дозволяють визначити потенціал  $\Phi_1$  будь-якої точки поля, якщо в якості точки 2 обрати початок відліку, тобто точку поля, в якій потенціал  $\Phi_2 = 0$ . Для точкових і сферично симетричних зарядів таку точку зазвичай обирають на нескінченності.

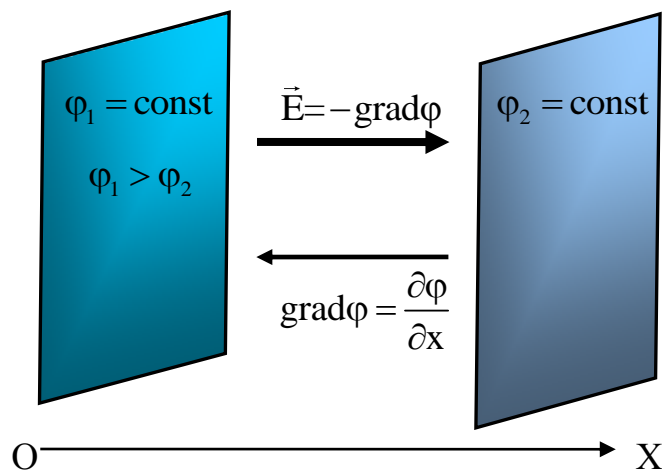


Рис.1.7.

За формулою (1.22) напруженість поля дорівнює градієнту потенціалу, взятому зі знаком мінус. Градієнт потенціалу показує, як змінюється потенціал на одиницю довжини в напрямку найбільш швидкого його зростання у просторі, тобто по нормалі до екіпотенціальної поверхні. Отже, вектор напруженості (лінії напруженості) завжди **перпендикулярний до екіпотенціальної поверхні і направлений у бік зменшення потенціалу** (рис. 1.7).

• Обчислення різниці потенціалів між довільними точками поля на основі зв'язку між  $\varphi$  і  $\vec{E}$  дає:

а) для поля рівномірно зарядженої нескінченної площини з поверхневою густиною заряду  $\sigma$  (рис.1.8а)

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} (x_2 - x_1); \quad (1.27)$$

б) для поля двох нескінченних паралельних різнойменно заряджених площин з поверхневою густиною заряду  $\sigma$  (рис.1.8б)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} (x_2 - x_1); \quad (1.28)$$

Якщо  $x_1=0$ ;  $x_2=d$ , то  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} d$ , або  $U = Ed$ . (1.28a)

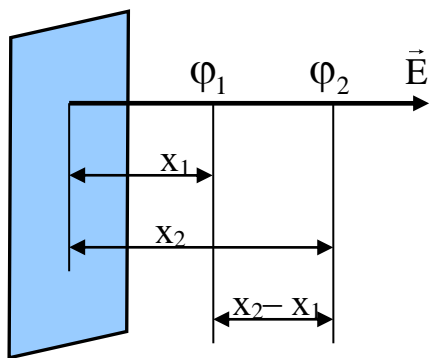


Рис.1.8а

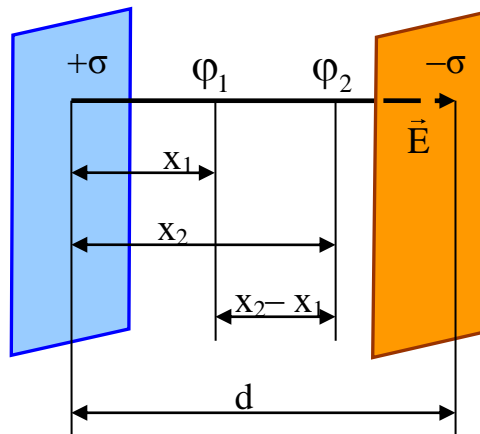


Рис.1.8б

в) для поля рівномірно зарядженої сферичної поверхні радіуса R (рис.1.9)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.29)$$

Якщо прийняти  $r_1 = r$ ,  $r_2 \rightarrow \infty$ , то потенціал поля, яке створюється провідною зарядженою сферичною поверхнею радіуса R на відстані r від центра сфери дорівнює

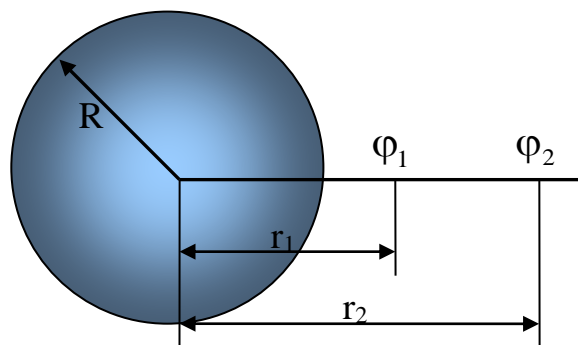


Рис.1.9.

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} = \text{const}; & (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}; & (r \geq R) \end{cases} \quad (1.30)$$

г) у випадку поля рівномірно зарядженої кулі

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^3} (r_2^2 - r_1^2); & r_1, r_2 < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); & r_1, r_2 > R \end{cases} \quad (1.31)$$

д) для поля рівномірно зарядженого нескінченного циліндра (при  $r_1, r_2 > R$ ) або нескінченно довгої нитки (дроту) (рис.1.10)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

(1.32)

де  $\tau$  – лінійна густина заряду, тобто заряд, розподілений на одиниці довжини нитки або циліндру.

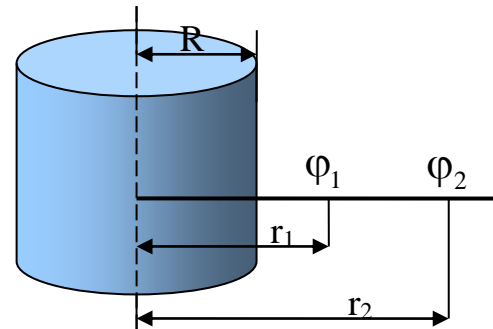


Рис.1.10.

## 1.2. Електричне поле в діелектрику.

**Тема:** Різновиди діелектриків. Полярізованість. Поле у речовині. Зв'язані заряди. Вектори полярізованості та електростатитчної індукції. Крайові умови для цих векторів.

### Основні поняття і формули

Напруженість електричного поля в діелектриках змінюється внаслідок його поляризації.

**Поляризація** діелектрика – процес виникнення дипольного моменту в діелектрику.

● **Електричний диполь** – система двох точкових різнойменних зарядів, відстань  $l$  між якими набагато менша за відстань  $r$  до точок, в яких розглядається поле ( $l \ll r$ ).

**Плече диполя**  $\vec{l}$  – вектор, проведений від негативного заряду до позитивного і чисельно рівний відстані між ними (рис.1.11).

**Дипольний момент** (електричний момент диполя)  $\vec{p}$  – вектор, який співпадає по напрямку з плечем диполя і дорівнює добутку заряду  $q$  на плече  $\vec{l}$ :

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (1.33)$$

Напруженість поля на продовженні осі диполя (точка А, рис.1.11):

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3}; \quad (1.34)$$

напруженість поля на перпендикулярі, встановленому до осі з центру О

диполя (точка В, рис.1.11):  $E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}; \quad (1.35)$

напруженість та потенціал поля диполя в довільній точці на відстані  $r$  від центра О диполя (точка С, рис.1.11):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}, \quad (1.36)$$

де  $\theta$  – кут між радіусом-вектором  $\vec{r}$  і вектором  $\vec{p}$ ;

$$\text{відповідний потенціал дорівнює: } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^2} \cos\theta. \quad (1.37)$$

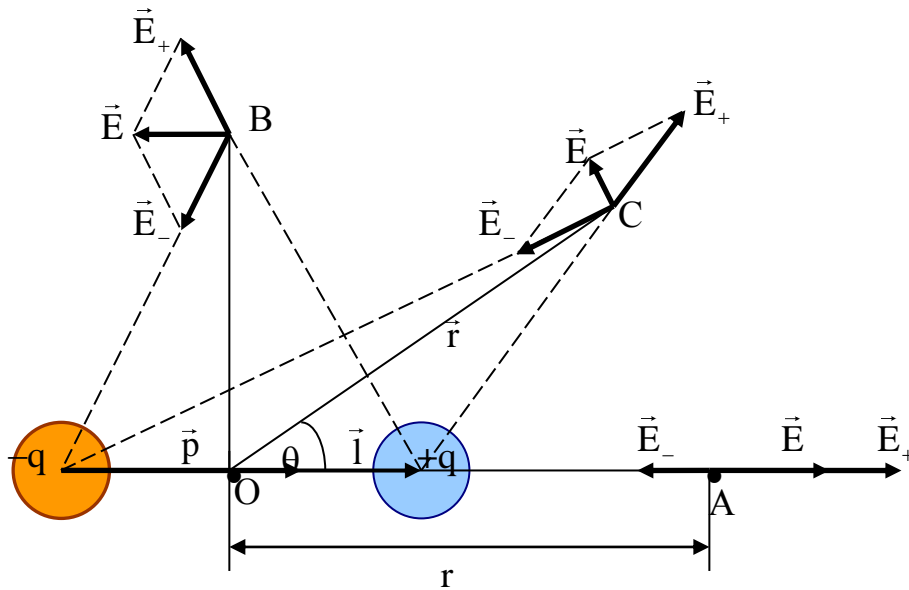


Рис.1.11

На диполь, поміщений в однорідне електричне поле, діє механічний момент сил

$$\vec{M} = [\vec{p} \cdot \vec{E}], \text{ або } M = pE \sin \alpha, \quad (1.38)$$

де  $\alpha$  – кут між напрямками векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{E}$ .

Завдяки моменту сил диполь прагне обернутися таким чином, щоб його електричний момент  $\vec{p}$  був спрямований вздовж напрямку поля. При цьому виконується робота, яка відповідно дорівнює зміні потенціальної енергії диполя в електричному полі.

Якщо зовнішнє поле неоднорідне, то, окрім механічного моменту на диполь діє сила

$$\vec{F} = \text{grad} [\vec{p} \cdot \vec{E}] = p \frac{d\vec{E}}{dx}, \quad (1.39)$$

де  $\frac{d\vec{E}}{dx}$  характеризує неоднорідність поля і дорівнює зміні напруженості  $\vec{E}$  на одиниці довжини вздовж осі диполя. Напрямок сили збігається з напрямком вектора  $\frac{d\vec{E}}{dx}$  (сила втягує диполь в область більших значень напруженості).

Потенціальна енергія диполя в електричному полі може бути знайдена за формулою

$$W_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \alpha. \quad (1.40)$$

У загальному випадку нейтральної системи електричних зарядів  $\{q_i\}, i=1, \dots, N$ , для якої  $\sum_i q_i = 0$ , (наприклад, нейтральної молекули)

електричне поле на великих відстанях від неї визначається дипольним моментом системи (який іноді дорівнює нулю):

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i, \quad (1.41)$$

де  $\vec{r}_i$  – радіус-вектор заряду  $q_i$ ,  $N$  – кількість зарядів у системі. При цьому значення дипольного електричного моменту системи не залежить від вибору початку координат.

• Для характеристики ступені поляризації діелектриків в електричному полі вводять **поляризованість** (вектор поляризації)  $\vec{P}$ , який дорівнює дипольному моменту одиниці об'єму :

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad [P] = \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{1}^2}. \quad (1.42)$$

де  $\vec{p}_i$  – дипольний момент  $i$ -ої молекули, яких  $N$  у об'ємі  $\Delta V$ .

Поляризованість діелектриків у слабкому електричному полі лінійно залежить від його напруженості:

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1.43)$$

де  $\chi$  – **діелектрична сприйнятливість** речовини, показує, як діелектрик реагує на зовнішнє електричне поле.  $[\chi] = 1$  (безрозмірна величина).

З макроскопічної точки зору поляризація приводить до виникнення некомпенсованих зв'язаних зарядів різних знаків, які зосереджуються на протилежних поверхнях діелектрика.

**Зв'язаними** називають заряди, що входять до складу молекули, які перерозподіляються під дією електричного поля, лише незначно зміщуючись від своїх положень рівноваги, і не покидають межі молекули.

Можна показати, що поверхнева густина зв'язаних зарядів  $\sigma'$  дорівнює нормальній складовій вектора поляризованості:

$$\sigma' = P_n. \quad (1.44)$$

Поле зв'язаних зарядів  $\vec{E}'$  завжди протилежно зовнішньому полю  $\vec{E}_0$ . Тому напруженість  $\vec{E}$  сумарного поля у діелектрику завжди менша напруженості зовнішнього поля (рис.1.12).

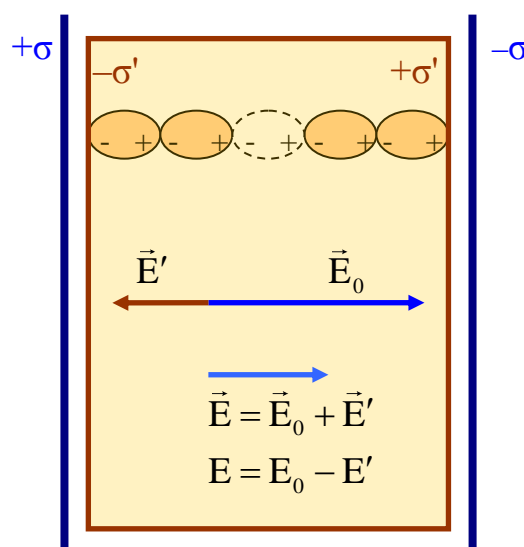


Рис.1.12

Ступень ослаблення поля у діелектрику характеризує його **відносна проникність**  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}; \quad \varepsilon = 1 + \chi. \quad (1.45)$$

( $\varepsilon$  дорівнює 1 для вакууму. Для всіх речовин  $\varepsilon > 1$ ; для повітря значення  $\varepsilon$  приймають приблизно рівним 1 ).

• Для опису електричного поля у речовині вводять допоміжну векторну величину  $\vec{D}$  – **вектор електричного зміщення**.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}; \quad (1.46)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (1.47)$$

Вектор електричного зміщення (електростатичної індукції)  $\vec{D}$  описує електростатичне поле, яке створюється вільними зарядами. Зв'язані заряди, що виникають у діелектрику можуть викликати перерозподіл вільних зарядів, які утворюють поле. Тому вектор  $\vec{D}$  характеризує електростатичне поле, яке утворюється вільними зарядами (тобто у вакуумі), але при такому їхньому розподілі в просторі, який виникає при наявності діелектрика.

Силкові лінії вектора  $\vec{E}$  починаються і закінчуються як на вільних, так і на зв'язаних зарядах. Силкові лінії вектора  $\vec{D}$  – тільки на вільних зарядах. При проходженні через області поля, де існують вільні заряди, густина ліній вектора  $\vec{D}$  не змінюється..

Теорема Гауса для вектора  $\vec{D}$ : потік вектора електричного зміщення крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних електричних зарядів, оточених цією поверхнею:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.48)$$

В той же час при розрахунку за теоремою Гауса потоку вектора напруженості (див. формулу (1.8)) слід урахувувати оточені поверхнею як вільні, так і зв'язані заряди.

Введення відносної діелектричної проникності  $\varepsilon$  для урахування впливу зв'язаних зарядів на напруженість електричного поля дозволяє надати формулі (1.8) вигляду

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.8a)$$

В останню формулу входить сума тільки вільних зарядів, оточених замкненою поверхнею.

### 1.3. Електростатичне поле зарядженого провідника. Електроємність.

**Тема:** Поле в середині та на поверхні провідника. Електроємність. Електроємність вилученого провідника. Конденсатори. Електроємність та енергія конденсаторів.

#### Основні поняття і формули

- Умови рівноваги зарядів у зарядженому провіднику:

1. напруженість поля усередині провідника має дорівнювати нулю ( $\vec{E}_{\text{вн.}} = 0$ );
2. напруженість поля поблизу поверхні провідника повинна бути перпендикулярною до неї.

Отже, об'єм провідника є екіпотенціальним об'ємом, а поверхня – екіпотенціальною поверхнею. У разі рівноваги зарядів усі надлишкові (вільні) заряди розподілені по поверхні провідника з поверхневою густиною  $\sigma$ , причому напруженість поля поблизу поверхні

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}, \text{ а вектор } D = \sigma. \quad (1.49)$$

- При внесенні незарядженого провідника в електричне поле відбувається перерозподіл вільних зарядів у ньому, поки напруженість поля у середині провідника не дорівнюватиме нулю: електрони переміщуються у напрямку проти ліній напруженості і накопичуються з одного боку, в той час, як з другого – виникає надлишковий позитивний заряд. Ці заряди називають **індукованими**, а процес перерозподілу зарядів – **електростатичною індукцією**.

- **Електроємність відокремленого провідника**

$$C = \frac{q}{\phi}, \quad [C] = \hat{O} \text{ (фарад)} \quad (1.50)$$

де  $\phi$  – потенціал провідника, заряд якого дорівнює  $q$ .

Відокремленим називається провідник, поблизу якого немає інших провідників, тіл, зарядів.

$$\text{Електроємність кулі } C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R, \quad (1.51)$$

де  $R$  – радіус кулі,  $\epsilon$  – діелектрична проникність оточуючого середовища.

- **Електроємність конденсатора**

$$C = \frac{q}{U}, \quad (1.52)$$

де  $U$  – різниця потенціалів обкладинок конденсатора.

Електроємність конденсаторів різної геометрії:

а) плоского 
$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}, \quad (1.53)$$

де  $S$  – площа пластини конденсатора,  $d$  – відстань між пластинами;

б) циліндричного 
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} ; \quad (1.54)$$

в) сферичного 
$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} . \quad (1.55)$$

де  $R_1$  і  $R_2$  – відповідно, радіуси циліндричних або сферичних обкладинок.

**При послідовному з'єднанні** конденсаторів у батарею (рис.1.13)

1) напруга на батареї дорівнює сумі напруг на окремих її елементах (конденсаторах):

$$U = \sum_{i=1}^n U_i , \quad (1.56)$$

де  $n$  – число конденсаторів батареї.

2) заряд кожного з конденсаторів є однаковим і дорівнює заряду батареї:

$$q = q_1 = q_2 = \dots = q_n ;$$

3) електроємність батареї дорівнює:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} . \quad (1.57)$$

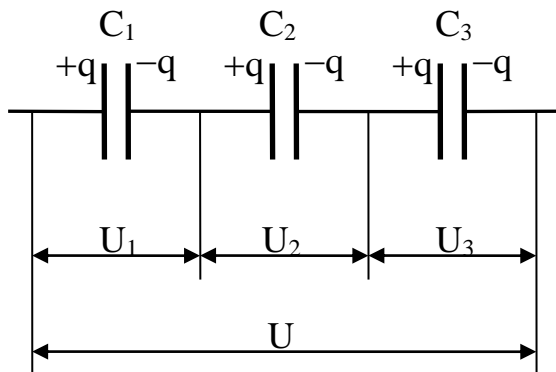


Рис.1.13.

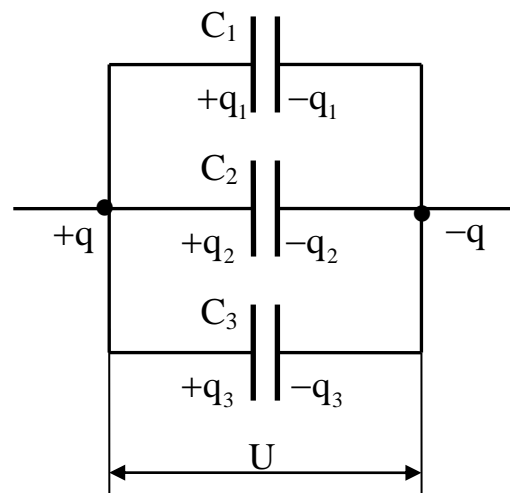


Рис.1.14.

**При паралельному з'єднанні** конденсаторів у батарею (рис.1.14)

1) напруга на кожному з конденсаторів є однаковою і дорівнює напрузі на батареї:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n ;$$

2) заряд батареї дорівнює сумі зарядів на окремих конденсаторах:

$$q = \sum_{i=1}^n q_i ; \quad (1.58)$$



3) електроємність батареї дорівнює:  $C = \sum_{i=1}^N C_i$ . (1.59)

#### 1.4. Енергія електричного поля.

##### Основні поняття і формули

Енергія взаємодії двох точкових зарядів  $W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$ . (1.60)

Енергія системи  $n$  точкових зарядів

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i, \quad (1.61)$$

де  $\phi_i$  - потенціал, що створюється в точці, де знаходиться заряд  $q_i$  усіма іншими зарядами.

Енергія відокремленого зарядженого провідника

$$W = \frac{C\phi^2}{2} = \frac{q\phi}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.62)$$

Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.63)$$

Об'ємна густина енергії електричного поля (енергія одиниці об'єму)

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}. \quad (1.64)$$

Енергія поля в об'ємі  $V$ , знаходиться через об'ємну густина енергії шляхом інтегрування:

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV. \quad (1.65)$$

У випадку однорідного поля  $W = w \cdot V = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V$ . (1.66)

##### Методичні вказівки.

1. Сили взаємодії зарядів можна розраховувати: за законом Кулона (1.1) (див. приклади 1.1–1.3) або користуючись співвідношенням  $\vec{F} = q\vec{E}$ , яке випливає з формули (1.3) (див. приклад 1.10). В останньому випадку заряд  $q$  слід розглядати як точковий, який знаходиться в полі, утвореному всіма іншими зарядами.

2. При розв'язуванні задач на визначення напруженості поля, утвореного системою зарядів можливі такі випадки:

а) поле утворено одним або кількома зарядами. У такому разі користуються формулою напруженості поля точкового заряду (1.4) та

принципом суперпозиції електричних полів (1.5), який для напруженості електричного поля носить векторний характер (див. приклади 1.4; 1.6);

б) поле утворене зарядами, що безперервно розподілені вздовж площини, або циліндричній чи сферичній поверхні. Тоді розрахунок виконується із використанням формул (1.10) – (1.14), які отримані за допомогою теореми Гауса. Зауважимо також, що нескінченно можна вважати будь-яку поверхню, якщо відстань до точки, в якій розраховується поле, набагато менша за відстань до її кінців (див. приклади 1.7.1); 1.8);

в) в інших випадках для визначення напруженості поля заряду, який безперервно розподілений вздовж лінії, по поверхні або об'єму, необхідно заряджене тіло розбити на нескінченно малі елементи. За принципом суперпозиції напруженість поля знаходиться інтегруванням напруженості поля елемента заряду  $dq$ , який можна вважати точковим (див. формули (1.6,а) – (1.6,в), тобто  $\vec{E} = \int d\vec{E}$ . Звернемо увагу на векторний характер останнього співвідношення.

Розрахунок спрощується, якщо розподілу зарядів притаманна певна (наприклад, осьова) симетрія, а точка, в якій визначається напруженість, знаходиться на цій осі. У цьому випадку вектор напруженості  $\vec{E}$  направлений вздовж осі симетрії, і  $E = \int dE_z$ , де  $dE_z$  – проекція вектору  $d\vec{E}$  на вісь симетрії (див. приклад 1.9,2)).

3. При розв'язуванні задач на визначення потенціалу поля, утвореного системою зарядів можливі випадки:

а) поле утворено одним або кількома точковими зарядами. Для визначення потенціалу використовують формулу потенціалу поля точкового заряду (1.17) та принцип суперпозиції полів (1.18), за яким потенціал обчислюється як алгебраїчна сума потенціалів, створених окремими зарядами (див. приклад 1.5);

б) поле утворено безперервно розподіленими зарядами. У цьому разі заряджене тіло розбивають на нескінченно малі елементи. Потенціал знаходять інтегруванням потенціалу поля елемента заряду  $dq$  за формулами (1.19а) – (1.19в) (див. приклад 1.9,1)).

4. Значення потенціалу, так саме, як потенціальної енергії системи зарядів, залежить від вибору початку відліку. Формули (1.17), (1.30), (1.37), (1.60) отримані у припущенні, що потенціал поля дорівнює нулю на нескінченності. Отже, фізичним змістом володіє різниця потенціалів (1.20), значення якої не залежить від вибору нульового рівня і визначає роботу по переміщенню заряду в електричному полі (1.21) (див. приклад 1.13).

Метод визначення різниці потенціалів спирається на співвідношення (1.23), що зв'язує різницю потенціалів двох точок поля з напруженістю поля у просторі між ними. Саме у такий спосіб отримані формули (1.28),

(1.29), (1.31). Визначення різниці потенціалів за допомогою виразу для напруженості у випадку однорідного поля із застосуванням формули (1.24) здійснюється у прикладі 1.7,2)).

З іншого боку, якщо попередньо відомий розподіл потенціалу у просторі, то це дозволяє за формулою (1.22) визначити напруженість електричного поля (див. приклад 1.9,3)), що у багатьох випадках спрощує розрахунок напруженості.

5. Для розрахунків електричних полів у діелектриках вводять допоміжну величину – вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  (1.46), (1.47), потік якого через замкнену поверхню не залежить від присутності середовища і визначається тільки вільними зарядами, які нею охоплюються.

В запропонованих для розв'язання задач електростатики зазвичай припускається, що діелектрик є однорідним та ізотропним і повністю заповнює простір між екіпотенціальними поверхнями. Відповідно – лінії напруженості є перпендикулярними до поверхні діелектрика. У такому випадку при внесенні діелектрика з відносною діелектричною проникністю  $\epsilon$  в електростатичне поле справедливим є наступне:

а) вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  залишиться незмінним в усіх точках поля (усередині та поза діелектрику);

б) вектор напруженості  $\vec{E}$  зменшується в  $\epsilon$  разів у діелектрику, та зберігає своє значення поза діелектриком.

Використання цих правил дозволяє розраховувати електричні поля в присутності діелектриків, які задовольняють наведеним вище умовам (див. приклад 1.16).

У випадку заряджених тіл (точкового заряду, площини, сфери і т. ін.) занурених в однорідний нескінчений діелектрик формули, отримані для опису напруженості і потенціалу утворених цими тілами електростатичних полів у вакуумі, залишаються справедливими при внесенні в їх знаменник множника  $\epsilon$  (див. приклад 1.20).

Якщо в умові задачі не обумовлено середовище, в якому утворюється поле, то слід вважати, що це вакуум ( $\epsilon = 1$ ) або повітря, діелектрична проникність якого близька до одиниці.

6. При внесенні провідника в електричне поле відбувається явище електростатичної індукції, тобто перерозподіл вільних зарядів в провіднику, який відбувається таким чином, що сумарна напруженість зовнішнього поля та поля індукованих зарядів усередині провідника дорівнює нулю. При цьому всі точки провідника набувають однакового потенціалу (потенціал провідника).

Визначення розподілу індукованих зарядів, яке, в свою чергу, впливає на напруженість і потенціал поля у просторі навколо провідника, може бути проведено, наприклад, із використанням методу електричних зображень (див. приклад 1.15).

7. За означенням електроємність конденсатора дорівнює його заряду, віднесеному до різниці потенціалів (напруги) на його обкладинках  $C = \frac{q}{U}$ .

Тому, для розрахунків електроємності конденсатора маємо: а) отримати вираз для напруженості поля між обкладинками конденсатора як функції координат та заряду; б) користуючись зв'язком між різницею потенціалів і напруженістю, знайти напругу на конденсаторі, і далі за формулою (1.52) визначити електроємність. Саме таким способом отримані формули (1.53) – (1.55) для конденсаторів із різною геометрією обкладинок.

Зміна параметрів конденсатору, наприклад, зміна відстані між обкладинками, заповнення його діелектриком, приводить до зміни електроємності і супроводжується зміною енергії електричного поля, яке існує проміж його обкладинками. При розгляді задач подібного типу необхідно звертати увагу, за яких умов відбувається зміна параметрів:

а) при попередньому від'єднанні конденсатора від джерела напруги незмінним залишається заряд на його обкладинках, а змінюється напруга на ньому;

б) якщо конденсатор не від'єднують від джерела напруги, змінюється заряд конденсатору, а напруга зберігає своє значення (див. приклад 1.15).

### Приклади розв'язання задач.

**Приклад 1.1.** Визначити прискорення та швидкість руху електрону в атомі гідрогену, якщо радіус електронної орбіти  $r = 5 \cdot 10^{-11}$  м.

Розв'язання

$$\left. \begin{aligned} |e| &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \\ m &= 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \\ r &= 5 \cdot 10^{-11} \text{ м} \end{aligned} \right|$$

Ядро атома гідрогену складається з одного протона. Сила, що діє на електрон з боку протона, визначається законом Кулона (1.1):  $F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  (1),

де  $e$  – величина елементарного заряду;  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ . Ця сила відіграє роль доцентрової

сили, яка надає електрону нормальне прискорення  $a_n = \frac{v^2}{r}$  (2).

За II законом Ньютона  $F = ma_n$ . Після підстановки виразів (1) і (2) отримуємо:  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$ . Звідки  $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 r \cdot m}}$ . Перевіримо розмірність результату:

$$[v] = \frac{\hat{E}\ddot{e} \cdot \hat{i}^{1/2}}{(\hat{O} \cdot \hat{i} \cdot \hat{e}\tilde{a})^{1/2}} = \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\left(\frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{A}} \cdot \hat{e}\tilde{a}\right)^{1/2}} = \left(\frac{\hat{E}\ddot{e} \cdot \hat{A}}{\hat{e}\tilde{a}}\right)^{1/2} = \left(\frac{\ddot{A}\tilde{a}}{\hat{e}\tilde{a}}\right)^{1/2} = \left(\frac{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{i}^2}{\hat{n}^2 \cdot \hat{e}\tilde{a}}\right)^{1/2} = \frac{\hat{i}}{\hat{n}}.$$

Підстановка чисельних значень дає:

$$v = 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^{-11} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}} = 2,25 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Прискорення  $a_n$  знаходимо за допомогою формули (2) із використанням знайденого значення швидкості:

$$a_n = \frac{(2,25 \cdot 10^6)^2}{5 \cdot 10^{-11}} = 1,01 \cdot 10^{23} \text{ м/с}^2 \approx 10 \cdot 10^{22} \text{ м/с}^2. \quad \text{Порівнюючи}$$

отримане прискорення  $a_n \approx 10 \cdot 10^{22} \text{ м/с}^2$  з прискоренням вільного падіння  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ , бачимо, що  $a_n$  на 22 порядки перевищує його. Таким чином, електрон у  $10^{22}$  разів сильніше притягається до свого ядра, ніж до Землі!

**Приклад 1.2.** Дві однакові, однаково заряджені кульки підвішені на нитках однакової довжини (рис.1.15а). При цьому нитки розійшлися на кут  $\alpha$ . Кульки занурили в олію. Визначити густину олії, якщо кут розходження ниток при зануренні кульок залишився незмінним. Густина матеріалу кульок  $\rho_1 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , діелектрична проникність олії  $\epsilon = 2,2$ .

$  \begin{aligned}  q_1 &= q_2 = q \\  m_1 &= m_2 = m \\  l_1 &= l_2 = l \\  \alpha &= \alpha_1 \\  \rho_1 &= 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \\  \epsilon &= 2,2 \\  \rho &= ?  \end{aligned}  $	<p style="text-align: center;"><b>Розв'язання</b></p> <p>На кожну з кульок у повітрі діють такі сили (рис.1.15,а): сила тяжіння <math>m\vec{g}</math>, де <math>\vec{g}</math> – прискорення вільного падіння; сила пружності, тобто сила реакції нитки <math>\vec{T}</math>; сила електростатичної взаємодії, тобто сила кулонівського відштовхування <math>\vec{F}_k</math>, яка дорівнює</p>	
---	---	--

Рис.1.15,а

$$F_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}, \quad (1)$$

де  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала,  $r$  – відстань між кульками.

Умова рівноваги кожної з кульок у повітрі має вигляд:  $\vec{F}_k + m\vec{g} + \vec{T} = 0$ .

Звідки витікає:  $\vec{F}_k + m\vec{g} = -\vec{T}$ . Останнє означає, що рівнодійна сил  $\vec{F}_k + m\vec{g}$

направлена вздовж нитки протилежно  $\vec{T}$  і утворює з вертикаллю кут  $\frac{\alpha}{2}$ . З

прямокутного трикутника  $\Delta ACB$  ( $\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$ ) витікає  $F_k = mg \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ .

Виражаємо масу кульки через густину  $\rho_1$  її матеріалу:  $m = \rho_1 V$  (2), де  $V$  –

об'єм кульки. Тоді  $F_k = \rho_1 V g \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . (3)

Для зарядів, які знаходяться в олії (рис.1.15,б) змінюється величина кулонівської сили взаємодії проміж ними ( $\vec{F}_{k1} < \vec{F}_k$ ):

$$F_{k1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{\epsilon r^2}, \quad (4)$$

де  $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність олії. Окрім того, з боку олії

діє сила виштовхування  $\vec{F}_A$ , яка згідно закону Архімеда дорівнює:  $F_A = \rho g V$ ,

де  $\rho$  – густина олії. Відповідно, умова рівноваги кожної з кульок приймає

вигляд:  $m\vec{g} + \vec{F}_{k1} + \vec{F}_A + \vec{T}_1 = 0$ , або

$$m\vec{g} + \vec{F}_{k1} + \vec{F}_A = -\vec{T}_1.$$

Аналогічно попередньому, з прямокутного трикутника  $\Delta A_1 C_1 B_1$ , де

$$\angle A_1 B_1 C_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \text{а} \quad C_1 B_1 = mg - F_A,$$

отримуємо  $F_{k1} = (mg - F_A) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ , або з

урахуванням виразів (2) та(5):  $F_{k1} = (\rho_1 - \rho) V g \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  (5). Відношення

$$\text{рівняння (3) до рівняння (5) дає: } \frac{F_k}{F_{k1}} = \frac{\rho_1 V g \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(\rho_1 - \rho) V g \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho)}.$$

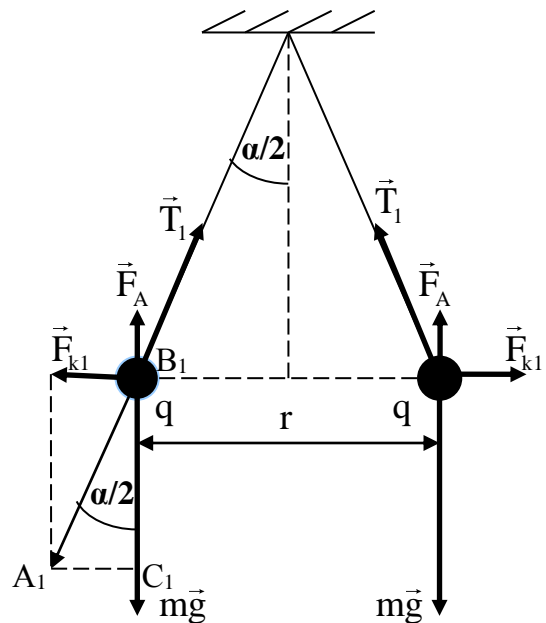


Рис.1.15,б

З виразів (1) і (4) знаходимо, що  $\frac{F_k}{F_{k1}} = \varepsilon$ . Таким чином,  $\frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho)} = \varepsilon$ . Звідки

$$\rho = \frac{(\varepsilon - 1)\rho_1}{\varepsilon}. \quad \rho = \frac{2,2 - 1}{2,2} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \frac{\hat{\varepsilon} \tilde{a}}{\hat{i}^3} = 8,18 \cdot 10^2 \frac{\hat{\varepsilon} \tilde{a}}{\hat{i}^3}.$$

**Приклад 1.3.** Два точкові електричні заряди різних знаків ( $q_1 > 0; q_2 < 0$ ) закріплені на прямій на відстані  $L$  один від одного.  $|q_2| < q_1$ . Третій заряд  $q_0$  може переміщуватися тільки вздовж прямої, що з'єднує заряди. Визначити положення заряду  $q_0$ , при якому він буде знаходитися у рівновазі. Яким повинен бути знак цього заряду, щоб рівновага була стійкою?

Розв'язання.

Заряд  $q_0$  буде знаходитися у рівновазі, якщо геометрична сума сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , що діють на нього з боку зарядів  $q_1$  і  $q_2$  дорівнюватиме нулю:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$  (1). Визначимо, на якій з ділянок, які показано на рис.1.16, може виконуватися умова (1). Припустимо для визначеності, що заряд  $q_0$  є позитивним.

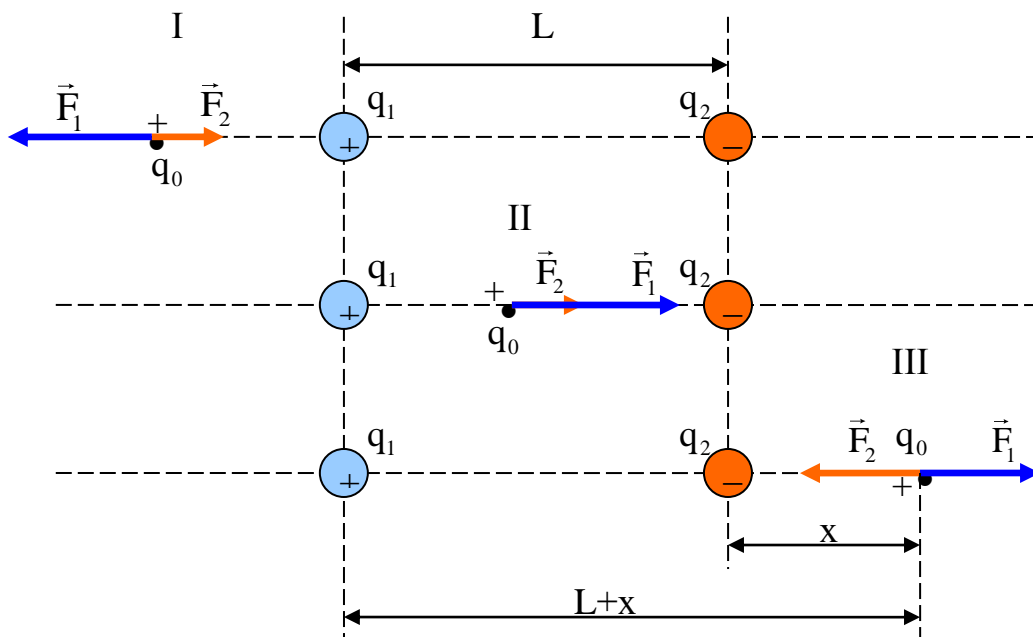


Рис.1.16.

Якщо заряд  $q_0$  розташований на ділянці I, сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  направлені протилежно. Сила  $\vec{F}_1$ , що діє на заряд  $q_0$  з боку заряду  $q_1$ , в будь-якій точці ділянки I буде більшою за силу  $\vec{F}_2$ , оскільки більший за величиною заряд  $q_1$  завжди буде знаходитися ближче до заряду  $q_0$ , ніж менший заряд  $q_2$ .

При знаходженні заряду  $q_0$  на ділянці II рівновага неможлива, оскільки сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  направлені в один бік – до негативного заряду  $q_2$ .

При розміщенні заряду  $q_0$  на ділянці III сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  направлені протилежно, але, на відміну від ділянки I, менший за абсолютною величиною заряд  $q_2$  завжди знаходиться ближче до заряду  $q_0$ , ніж більший заряд  $q_1$ . Це означає, що існує точка, в якій сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$ , що мають протилежний напрям, будуть однаковими за модулем. Отже на цій ділянці шукаємо точку, в якій виконується умова  $F_1 = F_2$  (2).

Позначимо через  $x$  відстань до шуканої точки від заряду  $q_2$ . Тоді відстань від заряду  $q_1$  буде дорівнювати  $L+x$ . Виражаємо сили  $F_1$  і  $F_2$  за законом Кулона (1.1) і підставляємо у рівняння (2):

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_0}{(L+x)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_0}{x^2}.$$

Після скорочення коефіцієнтів та  $q_0$  дістаємо корінь з обох частин рівності і отримуємо:

$$\frac{\sqrt{q_1}}{L+x} = \pm \frac{\sqrt{q_2}}{x}, \text{ тобто } \sqrt{q_2}(L+x) = \pm \sqrt{q_1}x.$$

$$\text{Звідки знаходимо } x_1 = \frac{\sqrt{q_2}L}{\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}}; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{q_2}L}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$$

Корінь рівняння  $x_2$  визначає точку, що належить ділянці II. В цій точці сили  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  рівні, але направлені в один бік. Таким чином, значення  $x_2$  не відповідає умові задачі.

Визначимо знак заряду  $q_0$ , при якому рівновага буде стійкою. За умову стійкості приймемо наступне: при відхиленні заряду від положення рівноваги виникають сили, що намагаються повернути його у початкове положення.

Якщо заряд  $q_0$  позитивний, при зміщенні його вправо сила  $F_2$  за величиною буде зменшуватися швидше, ніж сила  $F_1$  (в області III відстань до заряду  $q_1$  завжди більша, ніж до заряду  $q_2$ ), і на заряд  $q_0$  буде діяти рівнодійна сила, направлена також вправо (див. рис.1.16). Під дією цієї сили заряд  $q_0$  буде відхилятися далі від положення рівноваги. Так само при зміщенні заряду вліво сила  $F_2$  буде зростати швидше за силу  $F_1$ , що приведе до зміщення заряду вліво, тобто відхиленню від положення рівноваги. Таким чином у випадку позитивного заряду рівновага є нестійкою.

У випадку негативного заряду  $q_0$  напрям сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  змінюється на протилежний, а поведінка сил залишається такою самою, як у



попередньому випадку. Тому рівнодійна сила, що виникає при будь-якому відхиленні заряду  $q_0$  від положення рівноваги, буде повертати заряд назад, і рівновага буде стійкою.

**Примітка.** Стійка рівновага розглянутої системи зарядів можлива тільки тому, що два з них були закріплені. У випадку незакріплених зарядів згідно з теоремою Ірншоу стійка рівновага будь-якої системи нерухомих зарядів взагалі неможлива.

**Приклад 1.4.** Два точкові електричні заряди  $q_1 = -1 \text{ нКл}$  і  $q_2 = 2 \text{ нКл}$  знаходяться в повітрі на відстані  $r = 10 \text{ см}$  один від одного. Визначити напруженість  $\vec{E}$  у точці, яка знаходиться на відстані  $r_1 = 9 \text{ см}$  від першого заряду і  $r_2 = 7 \text{ см}$  від другого.

$q_1 = -1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$
$q_2 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$
$r_1 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
$r_2 = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
$r = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
$E - ?$

Розв'язання.

Згідно принципу суперпозиції полів (1.5) напруженість поля може бути визначена як геометрична сума напруженості полів  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  кожного із зарядів:  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ .

Напруженість електричного поля, створеного у повітрі ( $\epsilon = 1$ ) зарядом  $q_1$  дорівнює  $E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$  (1),

другим –  $E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$ . (2)

Вектор  $\vec{E}_1$  спрямований вздовж прямої до заряду  $q_1$ , оскільки він негативний; відповідно, вектор  $\vec{E}_2$  спрямований від позитивного заряду  $q_2$  (рис.1.17). Абсолютне значення вектора  $\vec{E}$  знаходимо за теоремою косинусів:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(\pi - \alpha)}$$

$$= \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha} \quad (3)$$

де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$ . Його можна визначити з трикутника із сторонами  $r$ ,  $r_1$  і  $r_2$  (див. рис. 1.17) за теоремою косинусів:

$$\cos\alpha = \frac{(0,1^2) - (0,09)^2 - (0,07)^2}{2 \cdot 0,09 \cdot 0,07} = -0,238.$$

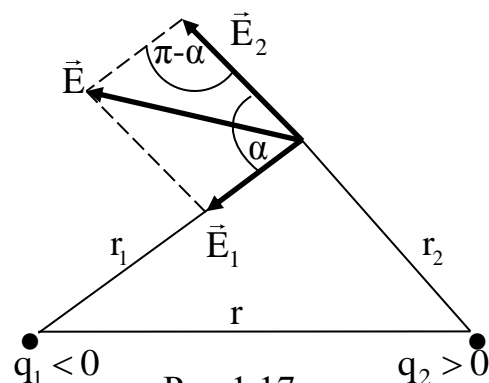


Рис 1.17

Підстановка виразів  $E_1$  і  $E_2$  з формул (1) та (2) у формулу (3) дає:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{q_1q_2}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha}.$$

Перевіряємо розмірність:  $[E] = \frac{\text{М}}{\Phi} \cdot \left( \frac{\text{КЛ}^2}{\text{М}^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{В}}{\text{М}}$ .

Тепер підставимо числові значення в отриману формулу для E і проводимо обчислення ( $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ ):

$$E = 9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{\left( \frac{10^{-9}}{(0,09)^2} \right)^2 + \left( \frac{2 \cdot 10^{-9}}{(0,07)^2} \right)^2} + 2 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{(0,09)^2 \cdot (0,07)^2} (-0,238) = 3,56 \cdot 10^3.$$

Відповідь:  $E = 3,56 \text{ кВ/м}$ .

**Примітка.** Якщо відстані між зарядами та між зарядами і точкою поля, в якій визначається напруженість, задані числами 3, 4, 5 (у будь-якій послідовності), або кратними ним, то трикутник – прямокутний. В цьому випадку можна скористатися теоремою Піфагора.

**Приклад 1.5.** За умовами попередньої задачі визначити потенціал  $\phi$  електричного поля зарядів  $q_1$  і  $q_2$ .

Розв'язання.

Згідно з принципом суперпозиції полів (1.18), потенціал  $\phi$  сумарного поля, створеного зарядами  $q_1$  і  $q_2$ , дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів  $\phi_1$  і  $\phi_2$  полів, які створюються кожним з зарядів окремо:  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ .

Потенціал електричного поля, яке утворюється у вакуумі точковим зарядом  $q$  на відстані  $r$  від нього (1.17)  $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

Тоді 
$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right).$$

Перевірка одиниці вимірювання:  $[\phi] = \frac{\text{і}}{\hat{\text{О}}} \cdot \frac{\hat{\text{Е}}\ddot{\text{є}}}{\text{і}} = \hat{\text{А}}$ .

$$\phi = 9 \cdot 10^9 \cdot \left( \frac{-10^{-9}}{0,09} + \frac{2 \cdot 10^{-9}}{0,07} \right) = 157 \text{ В}$$

Отже, як видно з розв'язків задач 1.3 та 1.4, завдяки скалярному характеру потенціалу його розрахунок для системи зарядів суттєво спрощується порівняно з розрахунком вектора напруженості.

У випадках, коли відомі координати точок, в яких знаходяться заряди, значення напруженості можна знайти, визначивши компоненти вектора  $\vec{E}$  (див. приклад 1.6).

**Приклад 1.6.** Точкові заряди  $q_1 = 2\text{і} \hat{\text{Е}}\ddot{\text{є}}$ ;  $q_2 = -3\text{і} \hat{\text{Е}}\ddot{\text{є}}$ ;  $q_3 = 1\text{і} \hat{\text{Е}}\ddot{\text{є}}$  знаходяться у вакуумі у точках з координатами  $(x_1=0; y_1=0,1)\text{м}$ ;  $(x_2=-0,1;$

$y_2 = -0,2$ м;  $(x_3=0,2; y_3= -0,1)$ м відповідно. Визначити величину та напрям вектора напруженості поля в точці А з координатами  $(x_A=0,1; y_A=0,1)$ м.

$$q_1 = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$q_2 = -4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$q_3 = 1 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$x_1=0; y_1=0,1\text{м}$$

$$x_2=-0,1\text{м}; y_2=-0,2\text{м}$$

$$x_3=0,2\text{м}; y_3=-0,1\text{м}$$

$$x_A=0,1\text{м}; y_A=0,1\text{м}$$

$$\epsilon=1$$

$$\vec{E}_A - ?$$

### Розв'язання

Напруженість сумарного поля точкових зарядів знаходимо за принципом суперпозиції

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \text{ але, оскільки поле утворюється}$$

більш, ніж двома зарядами, вектор напруженості поля зручно виразити через його компоненти:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}; \quad (1)$$

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} + E_{3x} = E_1 \cos \alpha_1 + E_2 \cos \alpha_2 + E_3 \cos \alpha_3, \quad (2)$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} + E_{3y} = E_1 \sin \alpha_1 + E_2 \sin \alpha_2 + E_3 \sin \alpha_3, \quad (3)$$

де  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – кути, які вектори  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$  утворюють з віссю ОХ.

Зобразимо на координатній площині ХОУ положення заданих зарядів та побудуємо в точці А вектори напруженості полів, утворених ними (рис.1.18). Величину вектора напруженості кожного з зарядів визначимо за

$$\text{формулою (1.4): } E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i^2},$$

( $i=1,2,3$ ) (4). Відстань  $r_i$  від заряду  $q_i$  до точки А знаходимо за формулою

$$r_i = \sqrt{(x_A - x_i)^2 + (y_A - y_i)^2} \quad (2).$$

Розрахунок дає

$$r_1 = \sqrt{(0,1-0)^2 + (0,1-0,1)^2} \text{ м} = 0,1 \text{ м};$$

$$r_2 = \sqrt{(0,1-(-0,1))^2 + (0,1-(-0,2))^2} \text{ м} = \sqrt{0,13} \text{ м} = 0,36 \text{ м};$$

$$r_3 = \sqrt{(0,1-0,2)^2 + (0,1-(-0,1))^2} \text{ м} = \sqrt{0,05} \text{ м} = 0,224 \text{ м}.$$

$$\text{Перевіряємо розмірність: } [E] = \frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

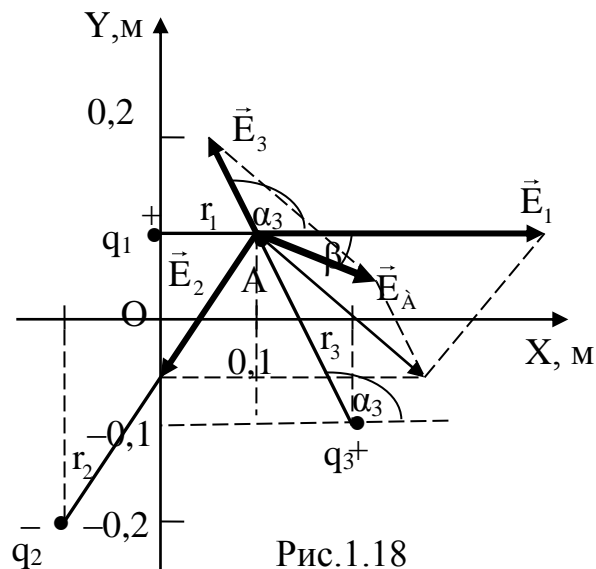


Рис.1.18

Підставляємо числові значення в формулу і проводимо обчислення:

$$\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}\right)$$

$$|\vec{E}_1| = \frac{0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{0,1^2} = 450 \text{ (В/м)};$$

$$|\vec{E}_2| = \frac{4 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{0,36^2} = 278 \text{ (В/м)};$$

$$|\vec{E}_3| = \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{0,224^2} = 180 \text{ (В/м)}.$$

Для визначення проєкцій векторів на координатні вісі знаходимо косинуси та синуси кутів  $\alpha_i$ , скориставшись тим, що вектори  $\vec{E}_i$  утворюють з координатними осями такі самі кути, що й прямі  $r_i$  проведені від зарядів до точки А:

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_A - x_1}{r_1} = \frac{0,1 - 0}{0,1} = 1; \quad \sin \alpha_1 = \frac{y_A - y_1}{r_1} = \frac{0,1 - 0,1}{0,1} = 0;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_2 - x_A}{r_2} = \frac{-0,1 - 0,1}{0,36} = -0,556; \quad \sin \alpha_2 = \frac{y_2 - y_A}{r_2} = \frac{-0,2 - 0,1}{0,36} = -0,833;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{x_A - x_3}{r_3} = \frac{0,1 - 0,2}{0,224} = -0,446; \quad \sin \alpha_3 = \frac{y_A - y_3}{r_3} = \frac{0,1 - (-0,1)}{0,224} = 0,893.$$

$$\begin{aligned} \text{Відповідно: } E_{1x} &= 450 \cdot 1 = 450; & E_{1y} &= 0; \\ \dot{A}_{2x} &= 277 \cdot (-0,556) = -154; & \dot{A}_{2y} &= 277 \cdot (-0,833) = -231; \\ \dot{A}_{3x} &= 180 \cdot (-0,446) = -80; & \dot{A}_{3y} &= 180 \cdot 0,893 = 161. \end{aligned}$$

За допомогою формул (1) – (3) визначимо компоненти вектора напруженості поля трьох зарядів, а потім напруженість  $\vec{E}$ :

$$E_{Ax} = 450 - 154 - 80 = 216; \quad \dot{A}_{Ay} = 0 - 231 + 161 = -70;$$

$$\dot{A}_A = \sqrt{216^2 + (-70)^2} = 227 \text{ (В/м)}.$$

Тангенс кута  $\beta$  нахилу вектора  $\vec{E}_A$  до осі ОХ знаходимо за формулою

$$\text{tg} \beta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-70}{216} = -0,324; \quad \beta = \text{arc tg}(-0,324) = -18^\circ.$$

$$\text{Відповідь: } \dot{A}_A = 227 \frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad \beta = -18^\circ.$$

**Приклад 1.7.** Дві нескінченні паралельні рівномірно заряджені площини знаходяться на відстані  $d = 1 \text{ см}$  одна від одної. Поверхнева густина заряду площин відповідно  $\sigma_1 = 0,6 \text{ мкКл/м}^2$  і  $\sigma_2 = -0,2 \text{ мкКл/м}^2$ . 1) Визначити

напруженість поля поза площинами та проміж ними. Побудувати графік залежності від координати проекції вектора напруженості на вісь OX.

2) Знайти різницю потенціалів між площинами.

$$d = 0,01 \text{ м}$$

$$\sigma_1 = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$$

$$\sigma_2 = -0,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

Графік  $E_x(x)$  – ?

$(\varphi_1 - \varphi_2)$  – ?

Розв'язання

1) Площини розділяють простір на три області. Напруженість поля в кожній з них визначаємо за принципом суперпозиції полів, згідно якому  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Поле, яке створює кожна площина є однорідним. Визначаємо напрям векторів  $\vec{A}_1$  та  $\vec{A}_2$ . Вектор напруженості  $\vec{A}_1$  направлений

вздовж нормалі від першої площини, яка несе позитивний заряд, вектор напруженості  $\vec{A}_2$  – до другої площини, заряд якої – негативний. Значення напруженості полів, які створюються кожною з площин визначається формулою (1.11):  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}$ , де  $\epsilon_0$  – електрична стала,  $\epsilon$  – відносна

діелектрична проникність, яка за умовою задачі дорівнює одиниці.

Зображуємо вектори  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  (рис.1.19).

В областях I та III вектори  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  спрямовані протилежно один

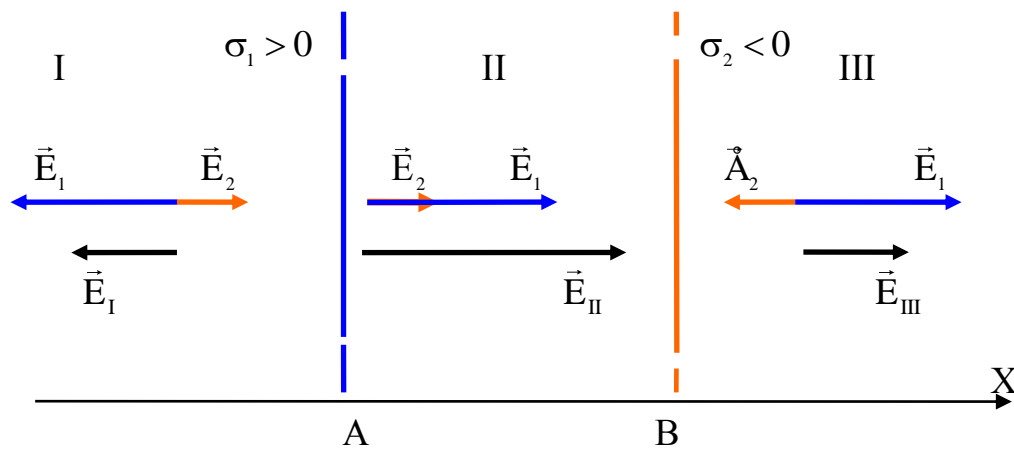


Рис.1.19

одному. Тому напруженість сумарного поля в цих областях за модулем є однаковою, але за напрям сумарних векторів – протилежною, і знаки проекцій  $\vec{E}_I$  та  $\vec{E}_{III}$  на вісь OX є різними:

$$|\vec{E}_I| = |\vec{E}_{III}| = |\vec{E}_1| - |\vec{E}_2| = \frac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} - 0,2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 2,26 \cdot 10^4 \text{ (В/м)};$$

$$E_{Ix} = -2,25 \cdot 10^4 \text{ В/м}; \quad E_{IIIx} = 2,25 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

$$\text{Перевіряємо розмірність: } [E] = \left[ \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{i}^2 \cdot \hat{O} \cdot \hat{i}^{-1}} \right] = \left[ \frac{\hat{A}}{\hat{i}} \right].$$

В області II вектори  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  направлені в один бік, і їх напрям співпадає з напрямом осі ОХ. Тому

$$|\vec{E}_{II}| = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_2| = \frac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6} + 0,2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 4,52 \cdot 10^4 \hat{A}/\hat{i}$$

$$E_{IIx} = 4,52 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$$

За результатами розрахунків будемо графік  $E_x(x)$  (рис.1.20).

2) Зв'язок між різницею потенціалів та напруженістю у випадку однорідного поля, яким є поле заряджених площин, надається формулою (1.24):

$$E = \frac{\phi_1 - \phi_2}{d}.$$

Звідки витікає

$$\phi_1 - \phi_2 = Ed. \quad (1)$$

Підставляємо значення напруженості в області II  $E = 4,52 \cdot 10^4 \text{ В/м}$  до формули (1) і знаходимо різницю потенціалів між площинами:  $\phi_1 - \phi_2 = 4,52 \cdot 10^4 \hat{A}/\hat{i} \cdot 10^{-2} \hat{i} = 4,52 \cdot 10^2 \hat{A}$ .

**Приклад 1.8.** Дві концентричні сфери несуть на собі рівномірно розподілені заряди, які дорівнюють відповідно  $q_1 = 6 \text{ нКл}$  та  $q_2 = -9 \text{ нКл}$ . Радіуси сфер  $R_1 = 6 \text{ см}$ ;  $R_2 = 12 \text{ см}$ . Визначити напруженість поля на відстані  $r_1 = 4 \text{ см}$ ;  $r_2 = 9 \text{ см}$ ;  $r_3 = 15 \text{ см}$  від центру сфер. Побудувати графік  $E(r)$  залежності напруженості від відстані  $r$  до центра сфер.

$$q_1 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$q_2 = -10 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$R_1 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$R_2 = 12 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r_1 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r_2 = 9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r_3 = 15 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$E(r_1); E(r_2); E(r_3) - ?$$

#### Розв'язання

Визначимо напруженість поля сферичної поверхні в заданих точках за формулою (1.13) та принципом суперпозиції (1.5).

1) Точка  $r_1$  знаходиться всередині обох сфер, де електричне поле відсутнє, отже,  $E(r_1) = 0$ ; (1)

2) Відстань  $r_2$  задовольняє подвійній нерівності  $R_1 < r_2 < R_2$ . У просторі між двома сферами поле утворюється зарядом тільки першої сфери. Тому

$$E(r_2) = E_1(r_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}, \text{ де } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф.} \quad (2)$$

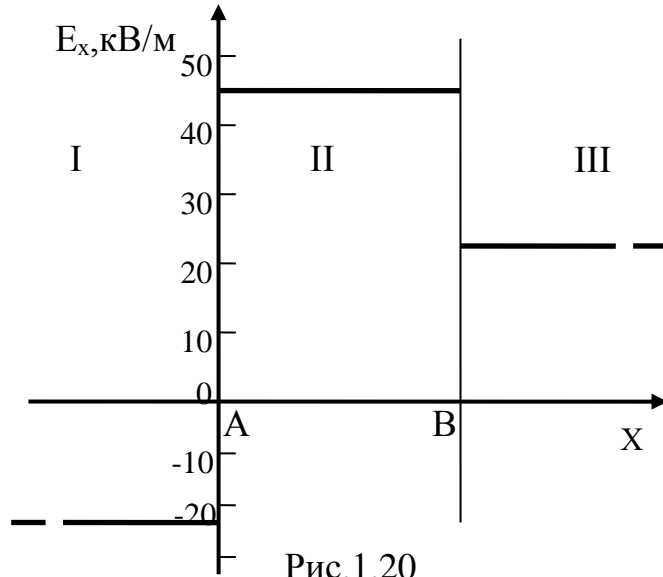


Рис.1.20

3) На відстані  $r > R_2$  поле утворюється зарядами двох сфер. Тому, з урахуванням того, що обидва вектори направлені вздовж радіусу, а знак проекції вектора напруженості на радіус-вектор  $\vec{r}$  співпадає зі знаком заряду, маємо:

$$E(r_3) = E_1(r_3) + E_2(r_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2}. \quad (3)$$

4) Для побудови графіку  $E(r)$  необхідно також визначити значення напруженості в точках  $r = R_1$  та  $r = R_2$ , де напруженість змінюється стрибком при переході через поверхню зарядженої сфери.

При наближенні до поверхні першої сфери з середини  $E(R_1) = 0$ ; при переході через сферу

$$E(R_1) = E_1(R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}. \quad (4)$$

При наближенні до поверхні другої сфери з середини

$$E(R_2) = E_1(R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}; \quad (5)$$

при наближенні зовні

$$E(R_2) = E_1(R_2) + E_2(R_2) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}. \quad (6)$$

Перевіряємо розмірність:  $[E] = \frac{\hat{i}}{\hat{O}} \cdot \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{i}^2} = \frac{\hat{A}}{\hat{i}}$ .

Обчислення за формулами (2) – (6) дає:

$$E(R_1) = \frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{(6 \cdot 10^{-2})^2} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 15 \text{ кВ/м};$$

$$E(r_2) = \frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{(9 \cdot 10^{-2})^2} = 0,67 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 6,7 \text{ кВ/м};$$

$$E_1(R_2) = \frac{6 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{(12 \cdot 10^{-2})^2} = 0,375 \cdot 10^4 \text{ В/м} = 3,75 \text{ кВ/м};$$

$$E(R_2) = \frac{(6-10) \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{(12 \cdot 10^{-2})^2} = -0,25 \cdot 10^4 \text{ В/м} = -2,5 \text{ кВ/м};$$

$$E(r_3) = \frac{(6-10) \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{(15 \cdot 10^{-2})^2} = -0,16 \cdot 10^4 \text{ В/м} = -1,6 \text{ кВ/м}.$$

Графік залежності напруженості електричного поля від відстані до центру сфер, який наведений на рис.1.21, побудовано за результатами обчислень.

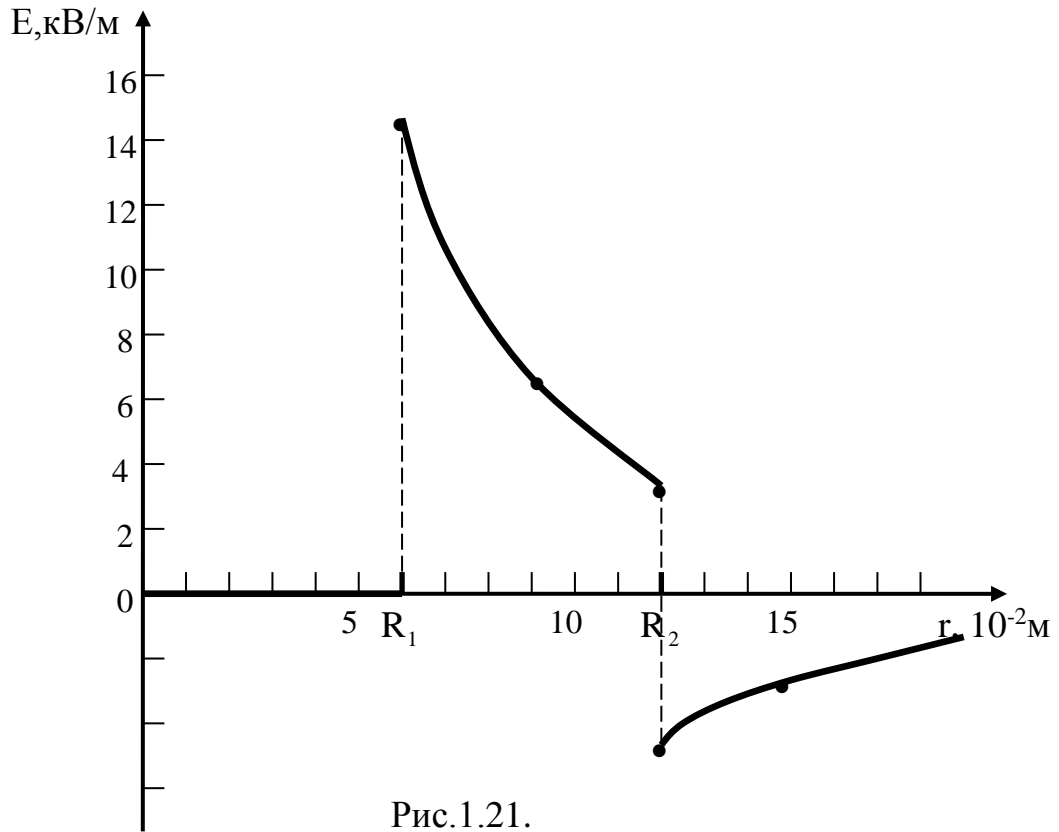


Рис.1.21.

**Приклад 1.9.** Тонкий диск радіусу  $R$  рівномірно заряджений з поверхневою густиною заряду  $\sigma$ . Знайти потенціал і напруженість електричного поля в точці  $A$ , що знаходиться на осі диска на відстані  $z_0$  від нього (рис.1.22).

Розв'язання

Для знаходження потенціалу в точці  $A$  необхідно застосувати принцип суперпозиції, за яким при неперервному розподілі зарядів  $\phi = \int d\phi$ . Розіб'ємо диск на елементарні кільця товщиною  $dr$ , площа яких дорівнює  $2\pi r dr$ , а заряд  $dq = 2\pi\sigma r dr$  (1). Оскільки всі точки кільця рівновіддалені від точки  $A$  на відстань  $\sqrt{r^2 + z_0^2}$ , то потенціал  $d\phi$  поля, утвореного зарядом кільця збігається з потенціалом поля точкового заряду величини  $dq$  на тій самій відстані.

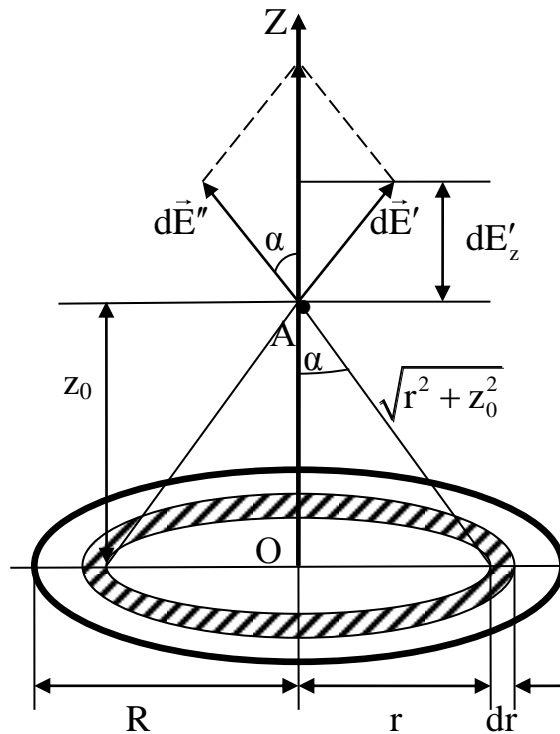


Рис.1.22



За формулою (1.17)

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+z_0^2}} = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0\sqrt{r^2+z_0^2}}. \quad (1)$$

Інтегруванням знайденого виразу в границях від  $r_1=0$  до  $r_2=R$ , тобто по всій поверхні диска, визначаємо його потенціал:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z_0^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{r^2+z_0^2} \right) \Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{R^2+z_0^2} - z_0 \right). \quad (2)$$

За принципом суперпозиції напруженість поля диску дорівнює  $\vec{E} = \int d\vec{E}$ , де  $d\vec{E}$  – напруженість поля, утвореного зарядом елементу диска.

Вектори  $d\vec{E}$  від різних елементів диска мають різні напрями. Але, оскільки розподіл зарядів має осеву симетрію, при додаванні полів від будь-яких двох симетрично розташованих елементів диска, виникає поле, вектор якого направлений вздовж осі симетрії  $OZ$ , на якій лежить точка  $A$  (див. рис. 1.22). Отже,

$$E = \int dE_z, \quad (3)$$

де  $dE_z$  – проекція вектора  $d\vec{E}$  на вісь  $OZ$ .

$$dE_z = dE \cos\alpha.$$

В останній формулі  $\cos\alpha = \frac{z_0}{\sqrt{r^2+z_0^2}}$  (4), а  $dE$  – напруженість поля,

утвореного зарядом елементарного кільця, яка збігається з напруженістю поля точкового заряду  $dq = 2\pi\sigma r dr$  (1) і дорівнює:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(r^2+z_0^2)} = \frac{2\pi\sigma r dr}{4\pi\epsilon_0(r^2+z_0^2)} = \frac{\sigma r dr}{2\epsilon_0(r^2+z_0^2)}. \quad (5)$$

Підстановка виразів (4) і (5) до формули (3) з подальшим інтегруванням (яке виконується за допомогою заміни змінних  $r^2+z_0^2=t^2$ ) від  $r_1=0$  до  $r_2=R$  дає:

$$E = \frac{\sigma z_0}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2+z_0^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z_0}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\sqrt{r^2+z_0^2}} \right) \Big|_0^R = \frac{\sigma z_0}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{z_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z_0^2}} \right);$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2+z_0^2}} \right). \quad (6)$$

Зрозуміло, що розрахунок напруженості поля порівняно з його потенціалом ускладнюється векторним характером цієї величини. Але, якщо заздалегідь відомий вираз (2) для потенціалу, цей розрахунок

суттєво спрощується. А саме, користуючись формулою (1.22)  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ , маємо зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля.

Розглянемо цей спосіб знаходження напруженості детальніше. Внаслідок симетрії поля градієнт потенціалу направлений вздовж осі OZ до диска (саме в цьому напрямі потенціал зростає найбільш швидко).

Приймаючи  $z_0$  у якості змінної маємо  $\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial z_0}$ . Тоді, користуючись

(1.22) та (2) отримуємо вираз для E, який збігається з (6):

$$E = -\frac{\partial\phi}{\partial z_0} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \sqrt{R^2 + z_0^2} - z_0 \right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right).$$

Звернемо увагу на те, що при  $z_0 \ll R$  другим членом у дужках можна знехтувати, і формула (6) переходить у формулу (1.11)  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$  для напруженості поля нескінченної площини.

**Приклад 1.10.** Електричне поле утворюється нескінченною ниткою, яка несе на собі рівномірно розподілений позитивний заряд. Під дією поля протон, рухаючись від нитки із точки  $r_1 = 1\text{см}$  до точки  $r_2 = 4\text{см}$ , змінив свою швидкість від  $v_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ м/с}$  до  $v_2 = 3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ . Визначити лінійну густину  $\tau$  заряду нитки.

Дано

$$q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$r_1 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r_2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$v_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

$\tau = ?$

Розв'язання.

Зміна кінетичної енергії протона дорівнює роботі сил електричного поля:

$$\frac{m_p v_2^2}{2} - \frac{m_p v_1^2}{2} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr. \quad (1)$$

Виражаємо силу, що діє на заряд протона  $q_p$ , через напруженість поля E нескінченної рівномірно

зарядженої нитки:  $F = qE$  (2), де  $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$  (3).

Тут  $\tau$  – лінійна густина заряду нитки;  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – електрична стала;  $\varepsilon = 1$  – відносна діелектрична проникність повітря.

Тоді  $F = qE = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$  (4). Після підстановки виразу (4) у формулу (1) та

інтегрування отримуємо:

$$\frac{m_p v_2^2}{2} - \frac{m_p v_1^2}{2} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

$$\text{Звідки } \tau = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon m_p (v_2^2 - v_1^2)}{q \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}.$$

$$\text{Перевіряємо розмірність: } [\tau] = \frac{\Phi}{\text{м}} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{В}} = \frac{\text{В} \cdot \text{Кл}}{\text{м} \cdot \text{В}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$

$$\tau = \frac{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} (9 - 0,4) 10^{12}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \ln 4} = 5,03 \cdot 10^{-7} (\text{Кл} / \text{м}) \approx 0,50 (\text{мкКл} / \text{м})$$

Відповідь:  $\tau = 0,50 \text{ мкКл/м}$ .

**Приклад 1.11.** До якої найменшої відстані можуть зійтися частинки з масами  $m_1$  і  $m_2$  та зарядами  $+q_1$  і  $+q_2$ , що рухаються назустріч одна одній, якщо на віддалі їх відносна швидкість дорівнювала  $v_{\text{відн.}}$ ?

Розв'язання.

Розв'язання задачі базується на застосуванні закону збереження енергії  $W = \text{const}$ , оскільки систему двох частинок можна вважати ізольованою, але хід розв'язування задачі залежить від вибору системи відліку.

**I спосіб.** Найбільш простий розв'язок задача має в системі відліку, яка зв'язана з центром мас системи двох частинок. У такій системі відліку швидкість центра мас  $v_C = 0$ , і, відповідно, імпульс системи, який дорівнює добутку маси  $M$  системи на швидкість руху центра мас, також дорівнює нулю:  $\vec{p} = M\vec{v}_C = 0$  (1).

Нехай початкові швидкості частинок (у системі центра мас) дорівнюють  $\vec{v}'_1$  і  $\vec{v}'_2$ . Тоді, з урахуванням співвідношення (1) та тієї обставини, що напрями векторів швидкості є протилежними один до одного, за законом збереження імпульсу маємо

$$m_1 v'_1 - m_2 v'_2 = 0. \quad (2)$$

З іншого боку, оскільки частинки рухаються назустріч одна одній,

$$v_{\text{відн.}} = v'_1 + v'_2. \quad (3)$$

Сумісне розв'язання рівнянь (2) і (3), які утворюють систему, дає:

$$v'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{\text{відн.}}; \quad v'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{\text{відн.}}. \quad (4)$$

Повна енергія системи частинок у початковий момент дорівнює їх кінетичній енергії (потенціальною енергією кулонівської взаємодії частинок на великій відстані можна знехтувати):

$$W_1 = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}.$$

В момент найбільшого зближення частинки мають однакові за модулем і напрямом швидкості, бо при різних значеннях швидкості частинки або продовжують наближуватися, або починають віддалятися одна від одної. Відстань між ними при цьому вже не буде мінімальною. З урахуванням закону збереження імпульсу системи та умови (1) можна зробити висновок, що кожна з швидкостей при цьому дорівнює нулю:  $\vec{v}'_{1\min} = \vec{v}'_{2\min} = 0$ . Отже, частинки наближуються, доки їх кінетична енергія повністю не перетвориться в потенціальну енергію кулонівської взаємодії

$W_{II} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}$ . За законом збереження енергії

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}. \quad (5)$$

Підставляємо вирази (4) для початкової швидкості частинок у системі центра мас у формулу (5) і знаходимо  $r_{\min}$ :

$$r_{\min} = \frac{q_1 q_2 (m_1 + m_2)}{2\pi\epsilon_0 m_1 m_2 v_{\text{а́в}}^2}. \quad (6)$$

**II спосіб.** Розглянемо розв'язання задачі іншим способом. Будемо користуватися лабораторною системою відліку, яка пов'язана з Землею. Якщо  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  – початкові швидкості частинок в цій системі, то

$$W_I = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (7)$$

Виражаємо відносну швидкість через швидкості частинок. З урахуванням того що швидкості частинок мають протилежні напрями, отримуємо:

$$v_{\text{а́в}} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = v_1 + v_2. \quad (8)$$

При наближенні частинок їх потенціальна енергія кулонівського відштовхування (яка є позитивною величиною, бо знаки частинок є однаковими) зростає. Відповідно кінетична енергія зменшується і досягає мінімального значення в момент досягнення найменшої відстані між частинками. Безпосередньо в цей момент повна енергія системи дорівнюватиме:

$$W_{II} = W_{k\min} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}. \quad (9)$$

Значення  $W_{k\min}$  знаходимо з урахуванням того, що в момент максимального зближення частинок їх швидкості є однаковими (див. I спосіб):

$$\vec{v}_{1\min} = \vec{v}_{2\min} = \vec{v}. \quad (10)$$

Для визначення швидкості  $v$  скористаємося законом збереження імпульсу системи.

Імпульс системи частинок  $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$  в момент найбільшого зближення (з урахуванням співвідношення (10)) набуває значення  $\vec{p}_{II} = (m_1 + m_2)\vec{v}$ . В проекції на напрям вектора  $\vec{v}_1$  рівняння закону збереження імпульсу має вигляд

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v.$$

Звідки

$$v = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (11)$$

Тоді для величини  $W_{kmin}$  отримуємо

$$W_{kmin} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Підставляємо отриманий вираз у формулу (9) і записуємо рівняння закону збереження енергії  $W_I = W_{II}$ . З урахуванням виразів для енергій  $W_I$  та  $W_{II}$  маємо:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r_{min}},$$

або, після виконання алгебраїчних перетворень,

$$\frac{m_1m_2(v_1 + v_2)^2}{(m_1 + m_2)} = \frac{q_1q_2}{2\pi\epsilon_0r_{min}}.$$

Звідки, з урахуванням того, що  $v_1 + v_2 = v_{\text{а\text{а}i}}$ . (див.(8)), отримуємо  $r_{min}$ :

$$r_{min} = \frac{q_1q_2(m_1 + m_2)}{2\pi\epsilon_0m_1m_2v_{\text{а\text{а}i}}^2}. \quad (6)$$

Розглянемо окремий випадок цієї задачі.

**Приклад 1.12.** До якої найменшої відстані можуть наблизитися два електрони, які рухаються назустріч один одному з відносною швидкістю  $v_{\text{відн.}} = 10^6 \text{ м/с}$ ?

$q_1 = q_2 = q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ $m_1 = m_2 = m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ $v_{\text{відн.}} = 10^6 \text{ м/с}$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $r_{min} - ?$
--

Розв'язання

З урахуванням еквівалентності зарядів та їх мас формула (6) з попередньої задачі набуває вигляду

$$r_{min} = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0mv_{\text{а\text{а}i}}^2}. \quad (1)$$

Перевіряємо розмірність:

$$[r_{min}] = \frac{\hat{E}\ddot{e}^2 \cdot \hat{i} \cdot \tilde{n}^2}{\hat{O} \cdot \hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{i}^2} = \frac{\hat{A} \cdot \hat{E}\ddot{e} \cdot \tilde{n}^2}{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{i}} = \frac{\hat{A}\ddot{x} \cdot \tilde{n}^2}{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{i}} = \frac{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{i}^2}{\tilde{n}^2} \cdot \frac{\tilde{n}^2}{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{i}} = \hat{i}$$

Розрахунок за формулою (1) дає:

$$r_{\min} = \frac{(-1,6 \cdot 10^{-19})^2}{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{12}} = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Зауважимо, що якби один з електронів залишався нерухомим, а початкова швидкість другого дорівнювала заданому в умові значенню  $v_0 = 10^6 \text{ м/с}$ , рівняння закону збереження енергії мало б вигляд:  $\frac{mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}$ . Звідки

$r_{\min} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 mv^2}$ . Тобто, у цьому випадку електрони могли б наблизитися до удвічі меншій відстані, порівняно з визначеною за формулою (1).

**Приклад 1.13.** Різниця потенціалів  $U_1$  між розжареним катодом та анодом «електронної гармати» (електронного інжектора) в електронно-променевої трубі дорівнює 300В. Прискорені цим полем електрони, проходячи через незаряджений горизонтальний конденсатор паралельно його пластинам, утворюють на екрані світну пляму. На яку відстань  $\Delta h$  зміститься світна пляма, якщо на конденсатор подати різницю потенціалів  $U=36\text{В}$ ? Довжина конденсатора  $L_1=6\text{см}$ , відстань між його пластинами  $d=1,2\text{см}$ . Екран знаходиться на відстані  $L_2=10\text{см}$  від кінця конденсатора.

$U_1=300\text{В}$ $U=36\text{В}$ $L_1=0,06\text{м}$ $L_2=0,1\text{м}$ $d=0,012\text{м}$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Розглянемо рух електрона в електронно-променевої трубі (рис.1.23). В «електронній гарматі» електрон прискорюється за рахунок роботи електричного поля, яке існує між катодом і анодом. Зміна кінетичної енергії електрона дорівнює роботі сил поля (1.21):</p> $\frac{mv_0^2}{2} =  e U_1. \quad (1)$
$\Delta h - ?$	

Тут  $\vec{v}_0$  – швидкість, з якою електрон вилітає із «гармати» (початкову швидкість електронів, які залишають катод, вважаємо рівною нулю);  $e$  – заряд електрона;  $m$  – його маса.

Користуючись (1) отримуємо  $\vec{v}_0$ :  $v_0 = \sqrt{\frac{2|e|U_1}{m}}$ . (2)

За умови відсутності заряду на конденсаторі після вильоту електрона з «гармати» на нього не діють сили (силою тяжіння ми нехтуємо), і він рухається прямолінійно вздовж осі  $OX$  зі швидкістю  $\vec{v}_0$  (див. рис. 1.23).

При поданні напруги  $U$  на конденсатор на електрон з боку поля конденсатора діє сила  $\vec{F} = e\vec{E}$ , яка надає йому прискорення  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e\vec{E}}{m}$ , спрямоване вздовж осі  $OY$ . Таким чином, рух електрона є

рівноприскореним. Закон, за яким електрон рухається у межах конденсатора, має вигляд  $\Delta \vec{r}_1 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2} = \vec{v}_0 t + \frac{e\vec{E} t^2}{2m}$  (3). Траєкторія руху електрона є параболою. Швидкість руху визначається формулою

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t = \vec{v}_0 + \frac{e\vec{E} t}{m}. \quad (4)$$

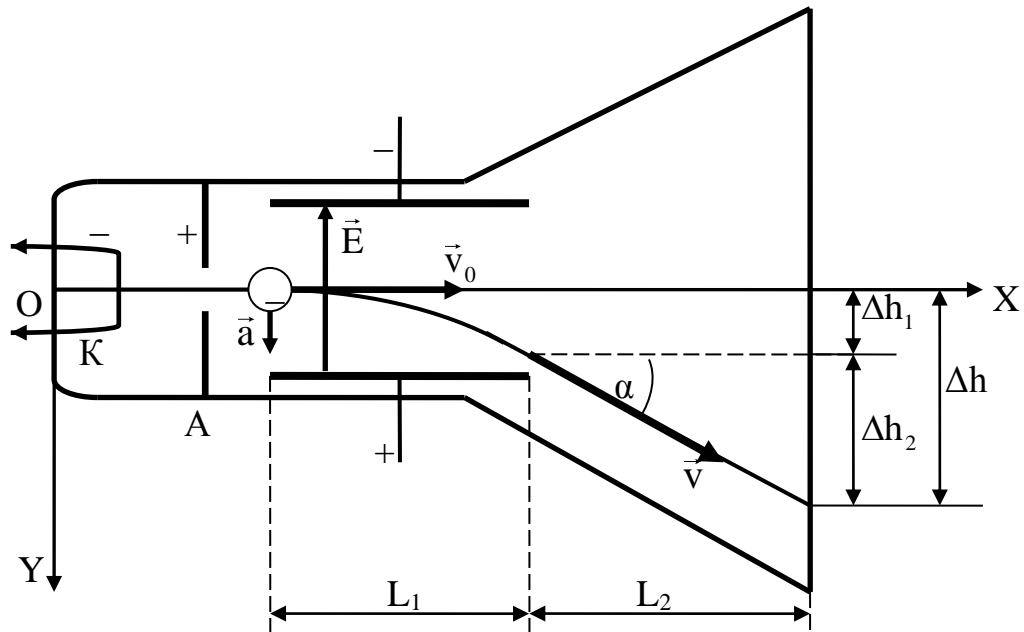


Рис.1.23

В проекціях на координатні вісі рівняння (3) і (4) дають:

$$\Delta x_1 = v_0 t; \quad (5) \quad \Delta y_1 = \frac{|e| E t^2}{2m}; \quad (6)$$

$$v_x = v_0; \quad (7) \quad v_y = \frac{eE}{m} t \quad (8)$$

Поле плоского конденсатора є однорідним, тому напруженість  $E$  пов'язана з напругою співвідношенням  $E = \frac{U}{d}$  (9). Тоді зміщення електрона вздовж осі  $OY$  під час руху у полі конденсатора підпорядковується співвідношенню:

$$\Delta y_1 = \frac{|e| U t^2}{2md}. \quad (6a)$$

Користуючись формулою (6a), можемо визначити максимальне вертикальне зміщення електрона у конденсаторі. Якщо у якості  $t$  обрати час  $t_1$  прольоту електрона крізь конденсатор, з формули (5) при  $\Delta x_1 = L_1$  (де  $L_1$  – довжина конденсатора) з урахуванням виразу (2) для швидкості  $v_0$  отримуємо наступний вираз:

$$t_1 = \frac{L_1}{v_0} = L_1 \sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}}. \quad (10)$$

Відповідно, з формули (6а) витікає:

$$\Delta h_1 = \frac{|e|Ut_1^2}{2md} = \frac{|e|U}{2md} \cdot \frac{L_1^2 m}{2|e|U_1} = \frac{UL_1^2}{4U_1 d}. \quad (11)$$

В момент вильоту електрона з конденсатора  $t_1$  його швидкість  $\vec{v}$  утворює кут  $\alpha$  з початковим напрямом руху, а її складові, які розраховуються за формулами (7), (8) з урахуванням виразів (9) та (10) дорівнюють, відповідно:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0; \\ v_y &= \frac{eE}{m} t_1 = \frac{eUL_1}{md} \cdot \sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}}. \end{aligned} \quad (12)$$

У просторі між конденсатором і екраном на електрон не діють сили, і він рухається рівномірно й прямолінійно зі швидкістю  $\vec{v}$  за законом  $\Delta \vec{r}_2 = \vec{v}t$ .

У проекціях на координатні вісі, з урахуванням виразів (7) та (11), маємо:

$$\Delta x_2 = v_x t = v_0 t; \quad (13)$$

$$\Delta y_2 = v_y t = \frac{eUL_1}{md} \cdot \sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}} t. \quad (14)$$

Покладаючи  $\Delta x_2 = L_2$ , з формули (13) знаходимо час руху електрона на протязі від конденсатора до екрана

$$t_2 = \frac{L_2}{v_0} = L_2 \sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}}.$$

Підставляючи час  $t_2$  у формулу (14), отримуємо максимальне вертикальне зміщення  $\Delta h_2$  на цій стадії:

$$\Delta h_2 = \frac{|e|UL_1}{md} \cdot \sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}} t_2 = \frac{|e|UL_1}{md} \cdot \sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}} \cdot L_2 \sqrt{\frac{m}{2|e|U_1}} = \frac{L_1 L_2 U}{2U_1 d}. \quad (15)$$

Повне зміщення світлої плями на екрані знаходимо простим додаванням виразів (11) та (15):

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 = \frac{UL_1^2}{4U_1 d} + \frac{L_1 L_2 U}{2U_1 d} = \frac{L_1 U}{4U_1 d} \cdot (L_1 + 2L_2). \quad (16)$$

Перевіряємо розмірність та проводимо розрахунок за формулою (16).

$$[\Delta h] = \frac{\hat{i} \cdot \hat{A} \cdot \hat{i}}{\hat{A} \cdot \hat{i}} = \hat{i};$$

$$\Delta h = \frac{0,06 \cdot 36}{4 \cdot 300 \cdot 0,012} \cdot (0,06 + 2 \cdot 0,1) = 0,039 \text{ м.}$$

Відповідь:  $\Delta h = 39 \text{ мм.}$



**Приклад 1.14.** Електричний диполь, заряд якого  $q = 10\text{нКл}$ , а плече  $l=0,5\text{см}$ , знаходиться в однорідному електричному полі напруженістю  $E=40\text{кВ/м}$  так, що його дипольний момент  $\vec{p}$  утворює з напрямом силових ліній поля кут  $\alpha_0 = 60^\circ$ . Визначити роботу сил поля при повороті диполя на кут  $\delta = 30^\circ$ .

#### Розв'язання

$q = 10 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$
$l = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
$E = 4 \cdot 10^4 \text{ В/м}$
$\alpha_0 = 60^\circ$
$\delta = 30^\circ$
$A = ?$

Для розв'язання задачі скористаємося формулою, що надає зв'язок між роботою сил поля та зміною потенціальної енергії:  $A = W_{p1} - W_{p2}$  (1).

Диполь з моментом  $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$ , який міститься в електричному полі напруженістю  $\vec{E}$ , має потенціальну енергію  $W_p = q(\varphi_+ - \varphi_-) = q(\varphi_+ - \varphi_-)$  (2), де  $(\varphi_+ - \varphi_-)$  – різниця потенціалу зовнішнього поля в точках, де знаходяться заряди  $+q$  і  $-q$ . З рис 1.24 видно, що  $\varphi_+ - \varphi_-$  дорівнює приросту потенціалу на відрізку  $\Delta x = l \cos \alpha$  (напряом осі  $x$  збігається з напрямом вектора  $\vec{E}$ ). Із використанням зв'язку між напруженістю поля і потенціалом, маємо:  $\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dx} l \cos \alpha = -El \cos \alpha$ . (3)

Підстановка виразу (3) у формулу (2) дає:

$$W_p = -qEl \cos \alpha = -pE \cos \alpha = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (4)$$

Із урахуванням формули (4) роботу сил поля (1) можна представити у вигляді:  $A = -qEl(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = qEl(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$ . (5)

Диполь може бути повернутим на кут  $\delta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$  двома способами: за годинниковою стрілкою до кута  $\alpha_1 = \alpha_0 - \delta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$  та проти неї – до кута  $\alpha_2 = \alpha_0 + \delta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$  (див. рис.1.24).

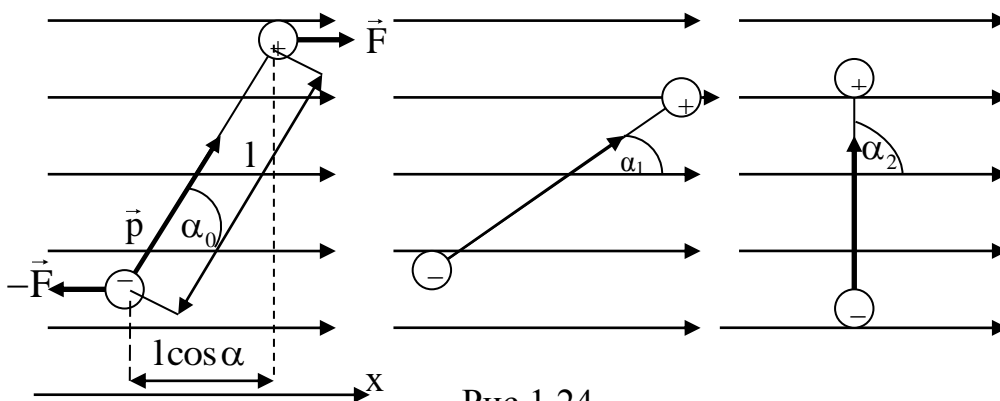


Рис.1.24

Згідно із формулою (5) робота сил поля при повороті диполя за годинниковою стрілкою

$$A_1 = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^4 \left( \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot 10^{-6} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0,73 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

При повороті проти годинникової стрілки, відповідно, маємо

$$A_2 = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^4 \left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot 10^{-6} \left( 0 - \frac{1}{2} \right) = -1 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Якщо у першому випадку завдяки обертальному моменту сил, які діють на диполь з боку поля, робота виконується силами поля, у другому випадку зовнішні сили виконують роботу проти сил поля, на що указує знак " – " в отриманому результаті.

$$\text{Перевірка розмірності: } [\dot{A}] = \hat{E} \cdot \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\dot{A}}{\dot{\mathbf{p}}} = \ddot{A} \cdot \mathbf{e}.$$

Відповідь:  $A_1 = 0,73 \text{ мкДж}$ ;  $A_2 = 1 \text{ мкДж}$ .

**Приклад 1.15.** Визначити силу, з якою полярна молекула (наприклад, молекула води  $\text{H}_2\text{O}$ ) з дипольним моментом  $\vec{p}$ , яка знаходиться біля стінки металевої посудини на відстані  $r$  від неї, взаємодіє з провідною стінкою посудини.

#### Розв'язання

При наближенні молекули до провідної стінки заряд диполя приводить до виникнення на провідній поверхні стінки індукованих зарядів. Взаємодія диполя з цими зарядами і є взаємодією зі стінкою. Для визначення сили взаємодії скористаємося методом електричних зображень. Поверхню стінки будемо вважати плоскою, оскільки розміри стінки значно більші за розміри молекули.

1. Для початку визначимо, яким буде електричне поле, якщо на відстані  $r$  від металевої пластини великого розміру знаходиться точковий заряд  $q$ . Відомо, що усередині металу електричного поля немає,  $\vec{E} = 0$ . Повне поле у лівому півпросторі є сумою полів, які створюються зарядом  $q$  та індукованими зарядами. Для визначення останнього представимо поле у правому півпросторі також як суму полів заряду  $q$  та індукованих зарядів. Зрозуміло, що рівність напруженості цього поля нулю може досягатися тільки, якщо поле індукованих зарядів еквівалентно полю точкового заряду  $-q$ , поміщеного в ту саму точку, де знаходиться заряд  $q$ . Поле індукованих зарядів є симетричним відносно плоскої границі металу, тому зліва від границі воно еквівалентно полю точкового заряду  $-q$ , розташованого симетрично заряду  $q$  справа від площини (рис. 1.25).

Отже, сила, що діє на точковий заряд  $q$  з боку індукованих на поверхні металу зарядів може бути визначена за законом Кулона і дорівнює силі, з

якою діяв би на нього точковий заряд  $-q$ , симетрично розташований по інший бік поверхні металу:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2r)^2}. \quad (1)$$

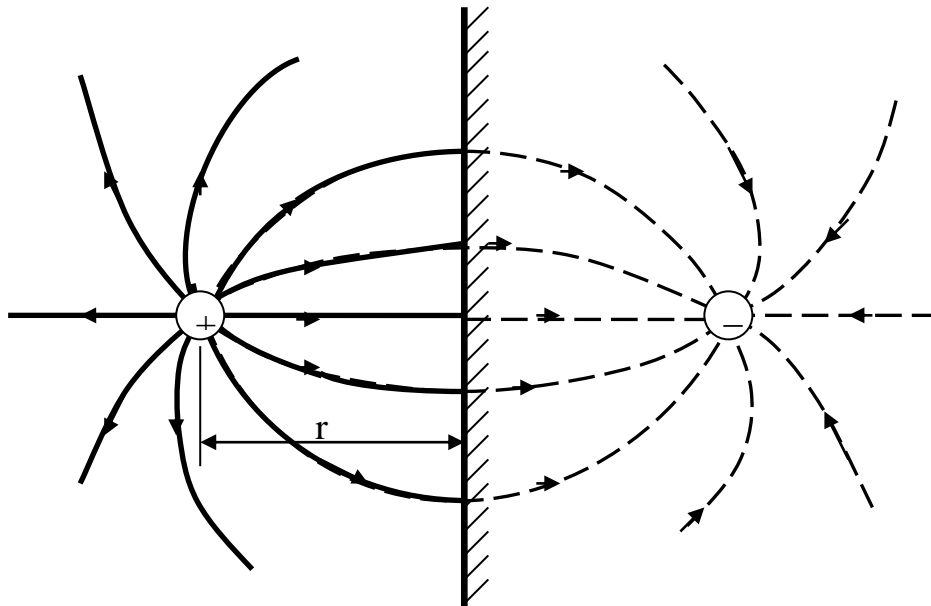


Рис.1.25

2. Отриманий результат використовуємо для знаходження сили, що діє на диполь, розташований паралельно провідній стінці посудини. Згідно попередньому, дія індукованих зарядів на диполь еквівалентна дії на нього двох точкових зарядів, кожний з яких є «зображенням» відповідного заряду диполя (рис.1.26). Таким чином сила, що діє на диполь збоку стінки є рівнодійною чотирьох сил, з яких  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  є силами притягання, а сили  $\vec{F}_3$  і  $\vec{F}_4$  - силами відштовхування.

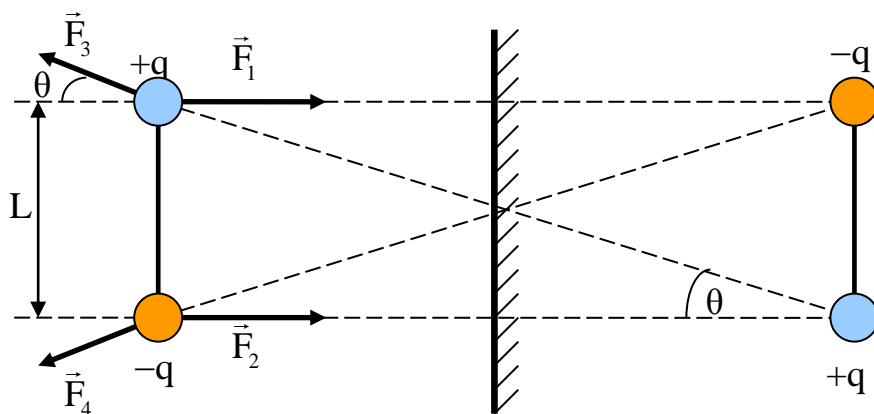


Рис.1.26

Рівнодійна сил притягання  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  направлена до стінки. Із використанням формули (1) для неї отримуємо:

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2r)^2}. \quad (2)$$

Рівнодійна сил відштовхування є меншою за величиною внаслідок того, що відстань між однойменними зарядами є більшою у порівнянні із різнойменними, а самі сили спрямовані під деяким кутом  $\theta$ .

$$|\vec{F}_3 + \vec{F}_4| = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2r)^2 + L^2} \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2r)^2 + L^2} \cdot \frac{2r}{\sqrt{(2r)^2 + L^2}}. \quad (3)$$

Аналізуючи отриманий результат, дійдемо до висновку, що диполь, який знаходиться біля металевої стінки, притягується до неї.

Перш, ніж знайти величину рівнодійної усіх сил проведемо перетворення виразу (3), припустивши, що плече диполя  $L$  є малим порівняно з відстанню  $r$  молекули до стінки. Тоді відношення  $\frac{L}{r} \ll 1$  і, виділивши у виразі (3), отриманому для сили відштовхування безрозмірний параметр  $\frac{L}{2r}$ , можна провести розклад по ньому, обмежуючись двома першими членами розкладу:

$$|\vec{F}_3 + \vec{F}_4| = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2r}{((2r)^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 (2r)^2} \left(1 + \frac{L^2}{(2r)^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 (2r)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{L^2}{(2r)^2}\right)$$

Повна сила  $F$  взаємодії диполя зі стінкою є рівнодійною сили притягання та відштовхування:

$$F = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| - |\vec{F}_3 + \vec{F}_4| = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 (2r)^2} \cdot \frac{3}{2} \frac{L^2}{(2r)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p^2}{(2r)^4},$$

де  $p = qL$  - дипольний момент молекули.

Відповідь: сила, що діє з боку металевої стінки на диполь, розташований

паралельно до неї, є силою притягання і дорівнює:  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p^2}{(2r)^4}$ .

**Приклад 1.16.** Відстань між пластинами плоского горизонтального конденсатора дорівнює  $d=5\text{мм}$ , різниця потенціалів  $U=150\text{В}$ . На нижній пластині лежить плитка парафіну ( $\epsilon_1=2$ ) товщиною  $d_1=3\text{мм}$  (рис.1.27). Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів на парафіні  $\sigma'$ , електричне зміщення  $D$  у середині плитки та поляризованість діелектрика  $P$ .

### Розв'язання

$$\begin{aligned} d &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ мм} \\ d_1 &= 3 \cdot 10^{-3} \text{ мм} \\ U &= 150 \text{ В} \\ \epsilon_1 &= 2 \\ \epsilon_2 &= \epsilon_{\text{пов.}} = 1 \end{aligned}$$


---


$$\sigma'; D; P - ?$$

Товщина повітряного зазору  $d_2 = d - d_1 = 2 \text{ мм}$ .

Різниця потенціалів між пластинами конденсатора складається з різниці потенціалів між поверхнями парафіну  $U_1$  і у повітряному зазорі  $U_2$ :  $U = U_1 + U_2$ .

Ураховуючи зв'язок напруженості з різницею потенціалів у однорідному полі, яким є поле плоского конденсатора, маємо  $U = E_1 d_1 + E_0 d_2$ . (1)

Напруженість електричного поля у парафіні в  $\epsilon_1$  разів менша, ніж у повітрі:

$E_1 = \frac{E_0}{\epsilon_1}$ . Звідки,  $E_0 = \epsilon_1 E_1$  (2). Підстановка виразу (2) у формулу (1) дає:

$$U = E_1 d_1 + \epsilon_1 E_1 d_2.$$

Звідки 
$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \epsilon_1 d_2}.$$

За означенням (1.47) вектора електричного зміщення

$$D = \epsilon_0 \epsilon_1 E_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 U}{d_1 + \epsilon_1 d_2}. \quad (3)$$

Перевіряємо одиницю вимірювання та проводимо обчислення.

$$[D] = \frac{\hat{O} \cdot \hat{A}}{\hat{i}^2} = \frac{\hat{E} \ddot{e}}{\hat{i}^2}; \quad D = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 150}{3 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 3,79 \cdot 10^{-7} \frac{\hat{E} \ddot{e}}{\hat{i}^2}.$$

З іншого боку, поле у парафіні  $E_1$  менше поля у вакуумі (повітрі)  $E_0$  на величину напруженості  $E'$  поля, утвореного зв'язаними зарядами, що виникають на поверхні парафіну внаслідок його поляризації (рис.1.27):

$$E_1 = E_0 - E'. \quad (4)$$

Оскільки поле зв'язаних зарядів можна розглядати як поле нескінченних паралельних різнойменно заряджених пластин з поверхневою густиною зарядів  $\sigma'$ , за допомогою формули (1.12) отримуємо  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$  (5).

Підстановка виразів (2) і (5) у формулу (4) дає:  $E_1 = \epsilon_1 E_1 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$ . Звідки знаходимо  $\sigma'$ .

$$\sigma' = (\epsilon_1 - 1) \epsilon_0 E_1 = \frac{(\epsilon_1 - 1) \epsilon_0 U}{d_1 + \epsilon_1 d_2}. \quad (5)$$

Перевіряємо розмірність:

$$\sigma' = \frac{\hat{O} \cdot \hat{A}}{\hat{i} \cdot \hat{i}} = \frac{\hat{E} \ddot{e} \cdot \hat{A}}{\hat{A} \cdot \hat{i}^2} = \frac{\hat{E} \ddot{e}}{\hat{i}^2}.$$

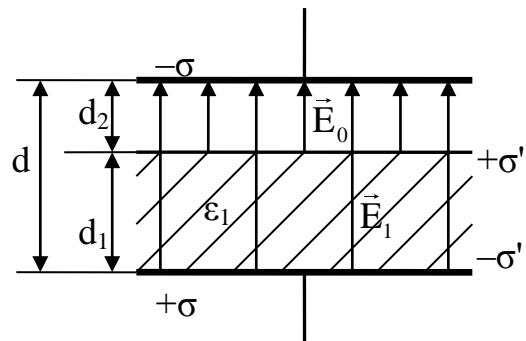


Рис.1.27

Після розрахунків отримуємо

$$\sigma' = \frac{(2-1) \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 150}{(3+2 \cdot 2) \cdot 10^{-3}} = 1,9 \cdot 10^{-7} \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{i}^2}.$$

Згідно з формулою (1.45) нормальна складова вектора поляризованості  $P_n$  дорівнює поверхневій густині зв'язаних зарядів. З геометрії задачі випливає, що вектор поляризованості є перпендикулярним до поверхні діелектрика, отже  $P = P_n = \sigma' = 1,9 \cdot 10^{-7} \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{i}^2}$ .

Відповідь:  $D = 3,79 \cdot 10^{-7} \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{i}^2}$ ;  $\sigma' = 1,9 \cdot 10^{-7} \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{i}^2}$ ;  $P = 1,9 \cdot 10^{-7} \frac{\hat{E}\ddot{e}}{\hat{i}^2}$ .

**Приклад 1.17.** Кулі електроємністю 5пФ надали заряд 0,3нКл, а кулі електроємністю 7пФ – заряд 0,9нКл. Як розподіляться заряди між кулями, якщо їх з'єднати провідником? Яким буде потенціал кульок? Електроємністю провідника знехтувати.

#### Розв'язання

$C_1 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$	При з'єднанні кульок утворюється один провідник з загальним потенціалом $\phi$ і зарядом $q = q_1 + q_2$ (1). Заряди кульок зміняться і будуть дорівнювати $q'_1$ та $q'_2$ . Але їх сума згідно закону збереження заряду залишиться незмінною: $q'_1 + q'_2 = q$ (2).
$C_2 = 7 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$	
$q_1 = 0,3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$	
$q_2 = 0,9 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$	
$q'_1; q'_2; \phi - ?$	

Ємність кульок можна обчислити за формулами

$C_1 = \frac{q'_1}{\phi}$  і  $C_2 = \frac{q'_2}{\phi}$ , де  $\phi$  – загальний потенціал кульок. Додавання цих формул з урахуванням співвідношень (1) і (2) дає:

$$C_1 + C_2 = \frac{q'_1 + q'_2}{\phi} = \frac{q_1 + q_2}{\phi}.$$

Звідки знаходимо загальний потенціал кульок  $\phi = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}$ .

Підставляємо чисельні значення:  $\phi = \frac{(0,3 + 0,9) \cdot 10^{-9} \hat{E}\ddot{e}}{(5 + 7) \cdot 10^{-12} \hat{O}} = 100 \hat{A}$ .

Розраховуємо заряди кожної з кульок після їх з'єднання:

$$q'_1 = C_1 \phi = 5 \cdot 10^{-12} \hat{O} \cdot 100 \hat{A} = 0,5 \cdot 10^{-9} \hat{E}\ddot{e} = 0,5 \hat{i} \hat{E}\ddot{e};$$

$$q'_2 = C_2 \phi = 7 \cdot 10^{-12} \hat{O} \cdot 100 \hat{A} = 0,7 \cdot 10^{-9} \hat{E}\ddot{e} = 0,7 \hat{i} \hat{E}\ddot{e}.$$

Отже, заряд першої кульки збільшився на 0,2нКл, а другої – зменшився на таку саму величину.

Відповідь:  $q'_1 = 0,5 \hat{i} \hat{E}\ddot{e}$ ;  $q'_2 = 0,7 \hat{i} \hat{E}\ddot{e}$ ;  $\phi = 100 \hat{A}$ .

**Приклад 1.18.** На рис.1.28 зображена батарея конденсаторів, електроємності яких, виражені у мікрофарадах, указані на схемі. Визначити повну електроємність батареї  $C_{AB}$ .

### Розв'язання

Скористаємося правилами (1.57), (1.59) для визначення загальної електроємності при послідовному і паралельному з'єднанні конденсаторів.

Розраховуємо електроємність конденсаторів, які з'єднані паралельно. При паралельному з'єднанні електроємності

додаються:

$$C_{DF} = C_1 + C_2 + C_3;$$

$$C_{DF} = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ мкФ};$$

$$C_{KG} = C_5 + C_6;$$

$$C_{KG} = 4 + 2 = 6 \text{ мкФ}.$$

Замінюємо відповідні ділянки конденсаторами з розрахованою ємністю. Еквівалентна схема, зображена на рис.1.28,а. Розраховуємо електроємність ділянок DB та AG з послідовно з'єднаними конденсаторами. При послідовному з'єднанні

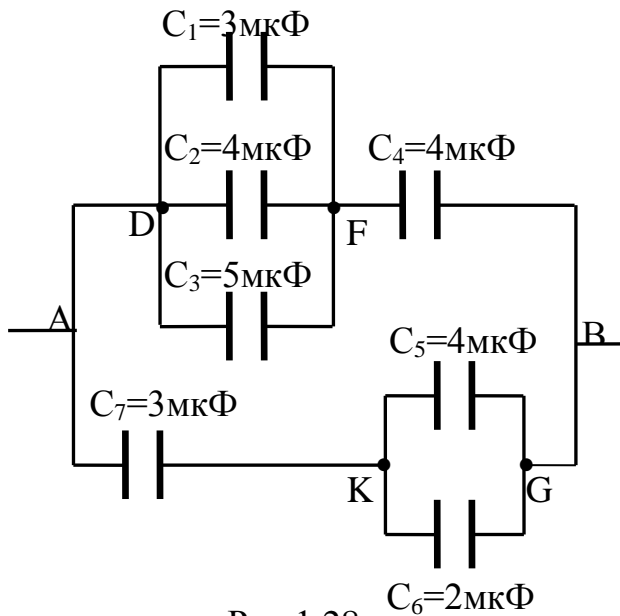


Рис.1.28

додаються величини, обернені ємностям, тобто

$$\frac{1}{C_{DB}} = \frac{1}{C_{DF}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}; \quad C_{DB} = 3 \text{ мкФ};$$

$$\frac{1}{C_{AG}} = \frac{1}{C_7} + \frac{1}{C_{KG}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}; \quad C_{AG} = 2 \text{ мкФ}.$$

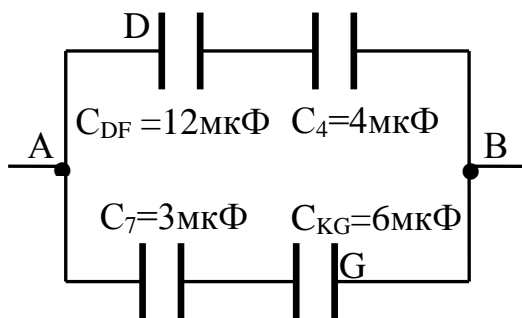


Рис.1.28,а

Оскільки ділянки DB та AG між собою з'єднані паралельно, остаточно знаходимо:

$$C_{AB} = C_{DB} + C_{AG};$$

$$C_{AB} = 3 + 2 = 5 \text{ мкФ}.$$

Відповідь:  $C_{AB} = 5 \text{ мкФ}$ .

**Приклад 1.19.** Площа пластин плоского повітряного конденсатора  $S=50\text{см}^2$ , відстань між ними  $d_1=1\text{см}$ . До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів  $U=1,5\text{кВ}$ . Якою стане напруженість  $E$  поля конденсатора, якщо, не від'єднуючи конденсатор від джерела напруги, збільшити відстань між пластинами до  $d_2=2,5\text{см}$ ? Визначити енергії  $W_1$  й  $W_2$  конденсатора до та після збільшення відстані.

$$S = 50 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$d_1 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$d_2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$U = 1,5 \cdot 10^3 \text{ В}$$

$$\epsilon = 1$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

$$E_2; W_1; W_2 - ?$$

Розв'язання

За умовою задачі напруга  $U$  на конденсаторі не змінюється, оскільки його не від'єдали від джерела.

Напруженість поля конденсатора визначаємо за формулою

$$E_2 = \frac{U}{d_2} = \frac{1,5 \cdot 10^3 \text{ В}}{2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 6 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Енергію поля конденсатора надає формула

$$W = \frac{CU^2}{2} \quad (1), \text{ де } C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d} \quad (2) - \text{ електроємність конденсатора. Підставляємо}$$

$$\text{вираз (2) у формулу (1). Отримуємо: } W = \frac{\epsilon \epsilon_0 S U^2}{2d} \quad (3).$$

Підстановка значень у формулу (3) дає:

$$W_1 = \frac{1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^{-2}} = 6,64 \cdot 10^{-9} \text{ (Дж);}$$

$$W_2 = \frac{1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 2,66 \cdot 10^{-9} \text{ (Дж);}$$

$$[W] = \left[ \frac{\text{Ф} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}^2}{\text{м} \cdot \text{м}} \right] = [\text{Кл} \cdot \text{В}] = [\text{Дж}].$$

$$\text{Відповідь: } E_2 = 6 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}; W_1 = 6,64 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}; W_2 = 2,66 \cdot 10^{-9} \text{ Дж};$$

**Приклад 1.20.** Точковий заряд  $q=4\text{мкКл}$  поміщений у центрі сферичного шару з однорідного та ізотропного діелектрика з  $\epsilon=2$ . Внутрішній радіус шару  $r_1=0,1\text{м}$ , зовнішній  $r_2=0,3\text{м}$ . Знайти енергію  $W$  електричного поля у межах діелектрика.

$$q = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$$

$$\epsilon = 2$$

$$r_1 = 0,1 \text{ м}$$

$$r_2 = 0,3 \text{ м}$$

$$W - ?$$

Розв'язання

Енергія електричного поля в об'ємі  $V$  надається формулою (1.65):

$$W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} dV. \quad (1)$$

Тут  $E$  – напруженість електричного поля, яке



створюється точковим зарядом  $q$  у діелектрику, яка дорівнює:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad (2)$$

де  $r$  – відстань від точкового заряду до даної точки поля.

Об'єм  $dV$  обираємо у вигляді тонкого сферичного шару товщиною  $dr$ , у межах якого напруженість поля  $E$  і об'ємну густину енергії  $w$  можна вважати постійними:

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad (3)$$

Підставляємо вирази (2) і (3) у формулу енергії (1) та беремо інтеграл у межах поля в діелектрику, тобто від  $r_1$  до  $r_2$ :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \cdot \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Перевіряємо одиницю вимірювання:

$$[W] = \frac{\hat{E}\hat{\epsilon}^2 \cdot \hat{v}}{\hat{O} \cdot \hat{i}} = \hat{A} \cdot \hat{E}\hat{\epsilon} = \hat{A}\hat{\epsilon};$$

Проводимо обчислення ( $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ ):

$$W = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (4 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 2} \left( \frac{1}{0,1} - \frac{1}{0,3} \right) = 0,24 \text{ Дж.}$$

Відповідь:  $W = 0,24 \text{ Дж}$ .

### Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Двом однаковим кулькам, які підвішені на нитках рівної довжини, надали однакові за величиною й знаком заряди, після чого занурили у керосин ( $\epsilon = 2$ ;  $\rho_1 = 800 \text{ кг/м}^3$ ). Визначити густину  $\rho$  матеріалу кульок, якщо відомо, що кут  $\alpha$  розходження ниток у повітрі та в керосині однаковий.

1.2. Дві кулі однакового радіуса та ваги підвішені на нитках так, що їх поверхні торкаються. Після надання кулям заряду  $q = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$  вони відштовхнулись так, що нитки розійшлись на кут  $60^\circ$ . Знайти вагу куль, якщо відстань від точки підвісу до центра кулі дорівнює  $20 \text{ см}$ .

1.3. На тонкій шовковій нитці підвішена заряджена кулька. Маса кульки  $m = 1 \text{ г}$ , заряд  $q_1 = 15 \text{ нКл}$ . Знизу, у напрямку підвісу, до неї підносять іншу кульку, заряд якої  $q_2 = -12 \text{ нКл}$ . При якій найменшій відстані  $r_{\min}$  між кульками нитка розірветься, якщо максимальна сила натягу, яку витримує нитка  $T = 15 \text{ мН}$ ?

1.4. На двох однакових краплях води радіусом  $r = 96,1 \text{ мкм}$  знаходяться однакові за величиною негативні заряди. Величина зарядів така, що сила кулонівського відштовхування урівноважує силу гравітаційного притягання. Скільки надлишкових електронів надано кожній краплі? Заряди крапель вважати точковими.

1.5. На двох однакових крапельках води знаходиться по одному зайвому електрону, причому сила електричного відштовхування крапель врівноважується силою гравітаційного тяжіння. Які радіуси крапель?

1.6. Відстань між вільними зарядами  $q_1 = 135 \text{ нКл}$  і  $q_2 = 540 \text{ нКл}$  становить  $l = 60 \text{ см}$ . Визначити точку на прямій, що проходить через заряди, в яку слід помістити третій заряд так, щоб система знаходилась у рівновазі. Визначити величину й знак заряду. Чи буде стійкою рівновага?

1.7. Навколо нерухомого точкового заряду  $q = 10^{-9} \text{ Кл}$ , рівномірно обертається під дією кулонівської сили маленька кулька з негативним зарядом. Чому дорівнює відношення заряду до його маси, якщо радіус орбіти  $0,2 \text{ м}$ , а кутова швидкість обертання  $\omega = 3 \text{ рад/с}$ ?

1.8. Три однакових заряди, величиною  $q = 4 \text{ нКл}$  кожний, розміщені у вершинах рівностороннього трикутника. Який за величиною та знаком заряд  $q$  треба помістити в центр трикутника, щоб система перебувала в рівновазі? Чи буде ця рівновага стійкою?

1.9. У вершинах квадрата знаходяться чотири однакових позитивних заряди  $q = 6 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$ . Який заряд  $q_0$  слід помістити в центр квадрата, щоб система зарядів знаходилась у рівновазі?

1.10. Точкові заряди  $q_1 = -20 \text{ мкКл}$ ,  $q_2 = 10 \text{ мкКл}$  знаходяться на відстані  $r = 10 \text{ см}$  один від одного. Визначити напруженість поля у точці, яка знаходиться на відстані  $r_1 = 8 \text{ см}$  від першого заряду та  $r_2 = 6 \text{ см}$  від другого. Яка сила буде діяти на заряд  $q = 5 \text{ мкКл}$ , який помістили у цю точку?

1.11-1.35. Точкові заряди знаходяться у вакуумі. Величини та координати зарядів задані у таблиці 1.1. Визначити величину і напрям вектора напруженості та потенціал поля в точці А з заданими у таблиці координатами.

Таблиця 1.1.

Номер задачі	Величини зарядів			Координати зарядів						Координати точки А	
	$q_1,$ нКл	$q_2,$ нКл	$q_3,$ нКл	$x_1,$ м	$y_1,$ м	$x_2,$ м	$y_2,$ м	$x_3,$ м	$y_3,$ м	$x_A,$ м	$y_A,$ м
1.11	+1	+1	-2	0,1	0,1	-0,1	-0,1	0,1	-0,2	-0,2	-0,2
1.12	+3	-2	+1	0,2	0,1	0,1	-0,2	-0,2	0	0	0,3
1.13	-1	+2	-2	0,1	-0,1	0	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2
1.14	+1	-2	+1	0	0,2	-0,2	0,2	0,1	0,1	-0,1	-0,1
1.15	-2	+1	+2	0,1	0	0,1	0,2	-0,2	0,1	0,3	0,1
1.16	+2	-2	-1	-0,2	0,2	0,1	0	-0,2	-0,1	0,2	0,2

1.17	+1	-1	+2	0	0,3	0,2	-0,2	-0,1	-0,1	0,1	0,2
1.18	-2	+2	+1	0,1	0,2	-0,2	0,2	-0,3	-0,1	0,1	-0,3
1.19	+2	+1	-2	-0,2	0	-0,2	0,2	0,1	0,2	0,3	-0,1
1.20	-1	+3	+2	0,2	0,1	-0,2	0,3	0,1	-0,2	-0,1	-0,1
1.21	+1	-2	-3	-0,2	-0,2	0,2	0,1	-0,3	0	0,2	-0,2
1.22	+2	+1	-1	0,2	0,2	-0,2	-0,2	0,1	-0,1	0	0,2
1.23	+1	-3	+1	-0,1	-0,1	0	0,3	0,2	0	0,1	-0,1
1.24	-2	-1	+2	0,2	-0,2	0,1	0,2	-0,2	0,1	-0,1	-0,2
1.25	+1	+2	-2	0,1	-0,1	0,2	0,2	0	0,1	-0,2	-0,2
1.26	-1	+2	-1	0,1	0,1	0	-0,3	-0,1	-0,1	0,1	-0,3
1.27	-2	+1	-1	-0,1	-0,2	0,2	-0,2	0	0,2	0,1	0,1
1.28	-1	+3	+1	0,2	0	0,3	-0,1	-0,1	0,1	-0,1	-0,1
1.29	+2	+1	-3	-0,2	0,2	-0,1	-0,2	0,2	0,3	0,1	0,1
1.30	+1	-2	+3	0	0,2	-0,1	-0,2	0,3	-0,1	0	0
1.31	+3	+1	-2	0,2	-0,2	-0,2	-0,1	-0,2	0,2	0,1	0,1
1.32	+1	-3	+1	0,1	0,2	-0,1	0,3	-0,1	-0,1	0	-0,2
1.33	-1	+1	+2	-0,2	0,1	0,2	0	0,1	-0,2	0,1	0,1
1.34	+1	-2	-2	0,3	0	-0,2	0,2	0,1	-0,2	0,1	0,2
1.35	-3	-2	+1	0,2	0,3	-0,2	-0,2	0,2	-0,2	0,2	0

1.36. В поле довгого прямого рівномірно зарядженого дроту на відстані  $r=0,5$  м проти його середини поміщений точковий заряд  $q=10$  нКл. На заряд із боку дроту діє сила  $F = 2$  мкН. Визначити лінійну густину  $\tau$  заряду дроту.

1.37. З якою силою (на одиницю довжини) відштовхуються дві паралельні, однойменно заряджені, нескінченно довгі нитки з однаковою лінійною густиною заряду  $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$  Кл/м, які знаходяться на відстані  $r = 0,04$  м?

1.38. З якою силою електричне поле зарядженої нескінченної площини діє на кожен метр зарядженої, нескінченної нитки, що розташована паралельно площині? Лінійна густина заряду на нитці  $\tau = 3 \cdot 10^{-8}$  Кл/м<sup>2</sup>, а поверхнева густина заряду на площині  $\sigma = 20 \cdot 10^{-9}$  Кл/м<sup>2</sup>.

1.39. Дві нескінченні паралельні пластини рівномірно заряджені з поверхневою густиною заряду  $\sigma_1 = 20$  нКл/м<sup>2</sup> і  $\sigma_2 = -40$  нКл/м<sup>2</sup>. Визначити силу взаємодії  $F_s$ , яка припадає на одиницю площі пластин.

1.40. Дві довгі прямі паралельні нитки несуть на собі заряд однакової лінійної густини  $\tau_1 = \tau_2 = 5$  мкКл/м. Визначити силу, яка діє на точковий заряд  $q = 0,5$  мКл, який знаходиться на однаковій відстані  $r = 10$  см від кожної нитки.

1.41-1.65. Дві нескінченні паралельні рівномірно заряджені площини знаходяться на відстані  $d$  одна від одної. Поверхнева густина заряду площин відповідно  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ . Значення  $d$ ,  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  наведені в таблиці 1.2. Визначити напруженість поля поза площинами та проміж ними.

Побудувати графік залежності від координати проекції вектора напруженості на вісь ОХ. Знайти різницю потенціалів між площинами.

Таблиця 1.2.

Номер задачі	$\sigma_1$ , мкКл/м <sup>2</sup>	$\sigma_2$ , мкКл/м <sup>2</sup>	d,м	Номер задачі	$\sigma_1$ , мкКл/м <sup>2</sup>	$\sigma_2$ , мкКл/м <sup>2</sup>	d,м
1.41	0,3	-0,6	0,01	1.54	0,5	0,3	0,03
1.42	-0,2	0,4	0,01	1.55	-0,4	0,1	0,03
1.43	-0,4	-0,2	0,02	1.56	0,3	-0,4	0,01
1.44	-0,5	0,2	0,03	1.57	-0,5	-0,4	0,04
1.45	0,4	0,3	0,05	1.58	-0,5	0,3	0,02
1.46	-0,3	0,6	0,03	1.59	-0,1	-0,4	0,04
1.47	0,6	-0,2	0,01	1.60	0,2	0,3	0,05
1.48	0,4	-0,3	0,02	1.61	-0,2	0,5	0,02
1.49	-0,5	-0,2	0,05	1.62	0,4	-0,2	0,03
1.50	-0,3	0,4	0,01	1.63	-0,6	0,4	0,02
1.51	0,6	0,2	0,05	1.64	0,4	-0,5	0,01
1.52	0,1	-0,3	0,03	1.65	0,1	0,3	0,04
1.53	-0,2	-0,4	0,05				

1.66-1.90. Дві концентричні провідні сфери несуть на собі рівномірно розподілені заряди  $q_1$  і  $q_2$ . Радіуси сфер дорівнюють  $R_1$  і  $R_2$ . Значення зарядів та радіусів сфер наведені в таблиці 1.3. 1) Визначити напруженість поля на відстанях  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  від центра сфер, значення яких наведені у таблиці. Побудувати графік залежності  $E(r)$ . 2) Знайти різницю потенціалів між сферами.

Таблиця 1.3.

Номер задачі	$q_1$ , нКл	$q_2$ , нКл	$R_1$ ,м	$R_2$ ,м	$r_1$ ,м	$r_2$ ,м	$r_3$ ,м
1.66	5	4	0,05	0,10	0,03	0,08	0,15
1.67	6	-9	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
1.68	-4	5	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
1.69	3	-8	0,04	0,10	0,03	0,08	0,12
1.70	5	-9	0,05	0,10	0,02	0,07	0,12
1.71	-5	-6	0,06	0,12	0,05	0,10	0,16
1.72	4	8	0,06	0,10	0,04	0,08	0,12
1.73	-6	4	0,05	0,10	0,02	0,08	0,14
1.74	6	-8	0,05	0,10	0,04	0,08	0,14
1.75	-4	-3	0,04	0,10	0,03	0,08	0,12
1.76	-3	5	0,05	0,10	0,02	0,07	0,12
1.77	7	-9	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
1.78	5	-8	0,05	0,10	0,03	0,08	0,14
1.79	-4	8	0,05	0,12	0,04	0,08	0,12

1.80	3	6	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
1.81	8	5	0,05	0,10	0,03	0,08	0,15
1.82	-7	4	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
1.83	6	-4	0,06	0,12	0,04	0,10	0,15
1.84	3	-5	0,04	0,10	0,03	0,08	0,12
1.85	-8	5	0,05	0,10	0,02	0,07	0,12
1.86	-5	-9	0,06	0,12	0,05	0,10	0,16
1.87	2	4	0,06	0,10	0,04	0,08	0,12
1.88	6	-8	0,05	0,10	0,02	0,08	0,14
1.89	3	7	0,05	0,10	0,04	0,08	0,14
1.90	-4	8	0,04	0,10	0,03	0,08	0,12

1.91. В полі плоского горизонтального конденсатора знаходиться у рівновазі заряджена крапля масла. Надлишковий заряд краплі створюють вісім електронів. Різниця потенціалів між пластинами конденсатора  $U=500\text{В}$ , відстань між пластинами  $d=0,5\text{ см}$ . Визначити радіус краплі. Густина масла  $\rho=900\text{ кг/м}^3$ .

1.92. Пилінка вагою  $P=10^{-13}\text{Н}$  зрівноважена у плоскому конденсаторі при напрузі на ньому  $U_1=54\text{В}$ . Пилінка освітлюється ультрафіолетовим світлом та, втрачаючи заряд, виходить з рівноваги. Для повернення рівноваги, довелося збільшити напругу на конденсаторі на  $\Delta U=8\text{В}$ . Визначити заряд, який втратила пилінка. Відстань між пластинами конденсатора  $d=5\cdot 10^{-3}\text{м}$ .

1.93. Пробій повітря за нормальних умов настає тоді, коли напруженість електричного поля  $E_0 = 10^6\text{В/м}$ . Обчислити найбільший заряд  $q$ , який може нести на собі заряджена куля, і потенціал  $\phi$ , до якого можна зарядити цю кулю. Радіус кулі  $R = 9\text{ см}$ .

1.94. Тонке кільце радіусом  $R=5\text{см}$  рівномірно заряджене з лінійною густиною  $\tau=60\text{нКл/м}$ . Визначити потенціал  $\phi$ : а) у центрі кільця; б) в точці, що лежить на осі кільця на відстані  $a = 10\text{ см}$  від його центра.

1.95. Дві однакові кульки, які заряджені однаковими за величиною зарядами, знаходяться на відстані  $l=25\text{ см}$ . Сила взаємодії між зарядами  $F=1\text{мкН}$ . Визначити потенціал кожної кульки, якщо їх радіуси  $R=1\text{ см}$ .

1.96. Тисяча однакових крапель ртуті, заряджених до однакового потенціалу  $\phi_1=80\text{В}$ , зливаються в одну велику краплю. Визначити потенціал великої краплі.

1.97. На поверхні провідної сфери знаходиться заряд  $q=10^{-6}\text{ Кл}$ . Різниця потенціалів між двома точками поля, що знаходяться на одній силовій лінії, дорівнює  $U=100\text{В}$ . Визначити відстань між цими точками, якщо відстань від центра сфери до першої точки  $9\text{м}$ .

- 1.98. Електричне поле утворене нескінченним провідником, лінійна густина заряду якого  $\tau=20\text{нКл/м}$ . Визначити різницю потенціалів  $U$  двох точок поля, які знаходяться на відстані  $r_1 = 5\text{см}$  і  $r_2 = 10\text{см}$  від провідника.
- 1.99. Два точкових заряди  $q_1=-2\text{мкКл}$ ,  $q_2 = 0,9\text{мкКл}$  знаходяться на відстані  $d = 60\text{см}$  один від одного. Яку роботу  $A$  треба виконати зовнішнім силам, щоб наблизити їх до втричі меншої відстані?
- 1.100. Дві паралельні, однойменно заряджені, нескінченно довгі ниті з однаковою лінійною густиною заряду  $\sigma=3\cdot 10^{-8}\text{Кл/см}$ , знаходяться на відстані  $r_1=0,02\text{м}$  друг от друга. Яку роботу (на одиницю довжини) треба виконати, щоб наблизити ниті до відстані  $r_2=0,01\text{м}$ ?
- 1.101. Точковий заряд  $q_1=20\text{нКл}$  перенесений з нескінченності в точку, яка знаходиться на відстані  $a=1\text{см}$  від поверхні зарядженої кулі радіусом  $R=2\text{см}$ . Поверхнева густина заряду кулі  $\sigma=5\text{мКл/м}^2$ . Визначити роботу  $A$ , яку виконують при перенесенні заряду зовнішні сили.
- 1.102. Точковий заряд  $q=10^{-10}\text{Кл}$  знаходиться на продовженні осі диполя, електричний момент якого  $p=1,5\cdot 10^{-10}\text{Кл}\cdot\text{м}$ , на відстані  $r=10\text{см}$  від його центра (ближче до позитивного заряду). Визначити роботу, яку необхідно виконати для перенесення заряду в симетрично розташовану точку по інший бік диполя. (Плече диполя  $l\ll r$ ).
- 1.103. Електрон із початковою швидкістю  $v_0 = 2000\text{км/с}$  влітає в однорідне електричне поле і рухається вздовж лінії напруженості. Напруженість електричного поля  $E=150\text{В/м}$ . Визначити шлях  $s$ , який електрон пройде до повної зупинки та час  $t$  його руху.
- 1.104. До якої найменшої відстані можуть наблизитись один до одного два електрони, які рухаються назустріч один одному з відносною швидкістю  $v_0 = 10^5\text{м/с}$ ?
- 1.105. Яку відносну швидкість зближення повинні мати протони, знаходячись на відстані  $0,05\text{м}$ , щоб наблизитись до відстані  $10^{-13}\text{м}$ ?
- 1.106. Електричне поле утворюється нескінченною прямою проволокою, зарядженою позитивно з лінійною густиною заряду  $\tau = 8\text{нКл}$ . Яку швидкість  $v$  набуває електрон під дією поля при наближенні до проволоки з відстані  $r_1 = 2\text{см}$  до відстані  $r_2 = 1\text{см}$ ?
- 1.107. Протон, кінетична енергія якого  $W_{\text{кл}}=52\text{еВ}$ , влітає в однорідне електричне поле вздовж ліній напруженості. Напруженість електричного поля  $E = 200\text{В/см}$ . Який шлях повинен пройти протон уздовж ліній напруженості перш, ніж його швидкість збільшиться удвічі? ( $1\text{еВ} = 1,6\cdot 10^{-19}\text{Дж}$ )
- 1.108. Кулька масою  $m = 0,2\text{г}$  і зарядом  $q = 0,3\text{мкКл}$  переміщується в електричному полі з точки 1, потенціал якої  $\phi_1 = 600\text{В}$ , у точку 2 з потенціалом  $\phi_2 = 200\text{В}$ . Визначити швидкість  $v_1$  кульки у точці 1, якщо в точці 2 вона набула значення  $v_2 = 1,45\text{м/с}$ .

1.109. Електричне поле утворюється нескінченною ниткою, яка несе на собі рівномірно розподілений позитивний заряд. Під дією поля протон, рухаючись із точки на відстані  $r_1 = 1$  см від нитки до точки  $r_2 = 4$  см, змінив свою швидкість від  $v_1 = 2 \cdot 10^5$  м/с до  $v_2 = 3 \cdot 10^6$  м/с. Визначити лінійну густину  $\tau$  заряду нитки.

1.110. «Електронна гармата», застосовувана в телевізійних трубках для отримання катодних променів, складається з розжареного катода та розташованого близь нього анода з центральним отвором, через який пролітає потік електронів. Як зміниться швидкість електронів, якщо напруга між катодам та анодам змінюється від 700В до 1000В? Чому дорівнює ця швидкість в обох випадках?

1.111. Різниця потенціалів між катодом і анодом електронної лампи  $U = 60$  В, відстань  $r = 1$  мм. Яку швидкість  $v$  має електрон у момент удару об анод? За який час  $t$  електрон проходить відстань від катода до анода? Початкову швидкість  $v_0$  електрона вважати рівною нулю, поле – однорідним.

1.112. Безпосередньо перед світним екраном, на який попадають електрони, розташований плоский конденсатор, вздовж осі якого (посередині між пластинами) пролітають електрони. Довжина пластин конденсатора 8 см, відстань між пластинами 2 см, напруга між ними 50 В. Наскільки зміститься слід електронів на екрані? Напруга між анодом та катодом 800 В.

1.113. Електрон, прискорений різницею потенціалів  $U = 40$  В, влітає в плоский конденсатор паралельно пластинам на рівній відстані від них. Відстань між пластинами  $d = 4$  см. Напруженість поля в конденсаторі  $E = 100$  В/м. Через який час  $t$  після того, як електрон влетів у конденсатор, він попаде на одну з його пластин? На якій відстані  $s$  від початку конденсатора електрон попаде на пластину?

1.114. Електрон улетів у плоский конденсатор паралельно його пластинам на рівній відстані від них. Швидкість електрона  $v = 1$  Мм/с. Відстань між пластинами  $d = 2$  см, довжина кожної пластини  $l = 8$  см. Яку найменшу різницю потенціалів  $U$  треба прикласти до пластин, щоб електрон не вилетів із конденсатора?

1.115. Електрон, маючи швидкість  $v_0 = 6 \cdot 10^9$  см/с, влітає в плоский конденсатор паралельно його пластинам. Відстань між пластинами конденсатора  $d = 2$  см, довжина конденсатора  $l = 5$  см, різниця потенціалів на пластинах  $U = 6000$  В. Знайти зміщення електрона від початкового напрямку за час руху у конденсаторі та його швидкість в момент вилиту з конденсатора.

1.116. Електрон, початкова швидкість якого  $v_0 = 800$  км/с, влітає в однорідне електричне поле перпендикулярно до ліній напруженості. Напруженість електричного поля  $E = 455$  В/м. Визначити величину та

напрямок (відносно ліній напруженості) швидкості  $v$  електрона через проміжок часу  $\tau = 0,01\text{мкс}$ .

1.117-1.141. Скориставшись умовою задачі 1.11-1.35. і даними таблиці 1.1, визначити енергію взаємодії заданої системи електричних зарядів.

1.142-1.166. Скориставшись результатами розв'язання задачі 1.66-1.90 і таблицею 1.3 визначити енергію електричного поля у просторі між сферами.

1.167. Напруга на обкладинках плоского конденсатора  $U=100\text{В}$ . Площа пластин  $S=50\text{см}^2$ , відстань між ними  $d=1\text{мм}$ . Конденсатор заповнений парафіном (діелектрична проникність  $\epsilon=2$ ). Конденсатор з'єднали паралельно з незарядженим конденсатором, ємність  $C_1$  якого в три рази менша за ємність  $C_2$ . Визначити заряд  $\Delta q$ , який перейшов на другий конденсатор.

1.168. Простір між пластинами плоского конденсатора заповнений двома діелектриками: шаром парафіну завтовшки  $d_1=0,2\text{см}$  і скла завтовшки  $d_2=0,3\text{см}$ . Різниця потенціалів між пластинами  $U=200\text{ В}$ . Визначити напруженість поля  $E_1$  і  $E_2$  та падіння потенціалу  $U_1$  і  $U_2$  у кожному шарі діелектрика.

1.169. Визначити ємність сферичного конденсатора, сферичні обкладинки якого мають радіуси  $R_1=8\text{см}$  і  $R_2=8,5\text{см}$ . Простір між сферами заповнений маслом. Який радіус  $R_0$  повинна мати куля, занурена у масло, щоб її ємність дорівнювала ємності конденсатора?

1.170. Металеву кулю радіусом  $R_1=5\text{ см}$ , заряд якої  $q_1=40\text{нКл}$ , з'єднали провідником із незарядженою кулею радіусом  $R_2=10\text{ см}$ . Визначити енергію, яка виділилась при розряді.

1.171. З батареєю, ЕРС якої  $\mathcal{E}=120\text{ В}$ , з'єднані два конденсатори ємності  $C_1=0,6\text{ мкФ}$  і  $C_2=0,4\text{ мкФ}$ . Визначити заряд  $q$  і напругу  $U$  на кожному з конденсаторів у двох випадках: а) при послідовному з'єднанні; б) при паралельному з'єднанні.

1.172. Пластини плоского повітряного конденсатора заряджені з поверхневою густиною заряду  $\sigma=2\text{мкКл/м}^2$ . Площа кожної пластини  $S=50\text{см}^2$ , відстань між пластинами  $d=2\text{см}$ . Визначити енергію конденсатора  $W$  та об'ємну густину енергії електричного поля  $w$ .

1.173. Відстань між пластинами плоского конденсатора, приєданого до полюсів батареї з ЕРС  $\mathcal{E}=180\text{В}$ , збільшують з  $d_1=0,005\text{м}$  до  $d_2=0,012\text{м}$ . Площа пластини конденсатора  $S=0,0176\text{м}^2$ . Яка робота виконана при цьому батареєю?

1.174. Площа пластин плоского повітряного конденсатора  $S=50\text{ см}^2$ , відстань між ними  $d_1=1\text{см}$ . До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів  $U=1,5\text{кВ}$ . Якою стане напруженість  $E$  поля конденсатора,



якщо, не від'єднуючи конденсатор від джерела напруги, збільшити відстань між пластинами до  $d_2=2,5\text{см}$ ? Визначити енергії  $W_1$  й  $W_2$  конденсатора до та після збільшення відстані.

1.175. Конденсатор ємністю  $C_1=6\text{мкФ}$  зарядили до різниці потенціалів  $U=1,5\text{кВ}$  і від'єднали від джерела напруги. Після цього до конденсатора приєднали паралельно другий, незаряджений конденсатор ємністю  $C_2=4\text{мкФ}$ . Визначити енергію  $\Delta W$ , яка було витрачена на утворення іскри при з'єднанні конденсаторів.

1.176. Площа пластин плоского повітряного конденсатора  $S=50\text{ см}^2$ , відстань між ними  $d_1=1\text{см}$ . До пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів  $U=1,5\text{кВ}$ . Якою стане напруженість  $E$  поля конденсатора, якщо конденсатор від'єднати від джерела напруги і потім збільшити відстань між пластинами до  $d_2=2,5\text{ см}$ ? Визначити енергії  $W_1$  й  $W_2$  конденсатора до і після збільшення відстані.

1.177. Плоский конденсатор, заповнений діелектриком із діелектричною проникністю  $\epsilon=4,5$ , зарядили до енергії  $W=40\text{мкДж}$ . Після того, як конденсатор відключили від джерела напруги, діелектрик вийняли з конденсатора. Яка робота  $A$  проти сил електричного поля була виконана при вилученні діелектрика?

1.178. У середині плоского конденсатора з площиною пластин  $S=0,1\text{м}^2$  та відстанню між ними  $d=0,2\text{м}$  знаходиться діелектрик ( $\epsilon=5$ ), який цілком заповнює простір між пластинами. Як зміниться енергія поля конденсатора, якщо вилучити діелектрик, при умові, що конденсатор весь час приєднаний до батареї з ЕРС  $\mathcal{E}=100\text{В}$ ?

1.179. У середині плоского конденсатора с площиною пластин  $S=0,1\text{м}^2$  та відстанню між ними  $d=0,2\text{м}$  знаходяться діелектрик ( $\epsilon=5$ ), який цілком заповнює простір між пластинами. Як зміниться енергія поля конденсатора, якщо вилучити з нього діелектрик після відключення його від батареї с ЕРС  $\mathcal{E}=100\text{В}$ ?

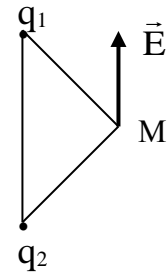
### Тести

#### Вибрати вірну відповідь:

- Сила взаємодії двох точкових зарядів при зменшенні величини кожного з них у 3 рази
  - зменшиться у 3 рази;
  - зменшиться у 9 разів;
  - не зміниться;
  - збільшиться у 3 рази.
- При зменшенні величини одного з зарядів у 4 рази для того, щоб сила взаємодії не змінилася, відстань між зарядами необхідно:
  - збільшити у 2 рази;
  - зменшити у 2 рази;
  - збільшити у 4 рази;
  - зменшити у 4 рази.
- Сила взаємодії між двома точковими зарядами, які з повітря перенесли у діелектрик, не змінюючи відстань між ними:
  - не змінилася;
  - збільшилася;
  - зменшилася.
- Силовою характеристикою електричного поля є
  - потенціал;
  - електроємність;
  - напруженість;
  - різниця потенціалів.

5. Електричне поле утворене рівними за величиною точковими зарядами  $q_1$  та  $q_2$ . Якщо у точці М напруженість  $\vec{E}$  має напрям, який показано на рисунку, заряди мають знаки:

1.  $q_1 > 0, q_2 > 0$ ;
2.  $q_1 < 0, q_2 > 0$ ;
3.  $q_1 > 0, q_2 < 0$ ;
4.  $q_1 < 0, q_2 < 0$ .



6. Напруженість електростатичного поля  $\vec{E}$  точкового заряду із відстанню

1. збільшується пропорційно  $r$ ;
2. зменшується обернено пропорційно  $r$ ;
3. зменшується обернено пропорційно  $r^2$ ;
4. зменшується обернено пропорційно  $r^3$ .

7. Між напруженістю електричного поля точкового заряду та величиною заряду існує залежність

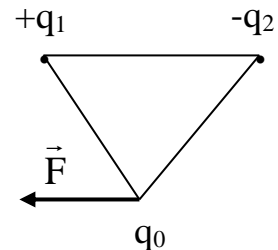
1. прямо пропорційна;
2. обернено пропорційна;
3. експоненціальна;
4. прямо пропорційна квадрату заряду.

8. На рисунку зображена сила, яка діє на заряд  $q_0$

з боку електричного поля, утворюваного зарядами  $q_1$  і  $q_2$ .

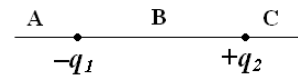
Визначити знак заряду  $q_0$

1.  $q_0 > 0$ ;
2.  $q_0 < 0$ ;
3. знак заряду не впливає на напрям сили.



9.  $|q_1| > |q_2|$ . У яку область (А, В чи С) треба вмістити заряд  $q_3 > 0$  щоб він знаходився у стані рівноваги?

1. А;
2. В;
3. С.



10. Установити відповідність між величиною та формулою:

1. Напруженість поля точкового заряду
2. Напруженість поля нескінченної рівномірно зарядженої площини
3. Напруженість поля усередині зарядженого провідника
4. Напруженість поля у поверхні зарядженого провідника
5. Означення поняття "вектор напруженості"

А.  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ;    Б.  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}$ ;    В. 0;    Г.  $E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$ ;    Д.  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r}$ .

**Вибрати вірну відповідь:**

11. Два позитивних та два негативних заряди однакової величини  $q$  розташовані у вершинах квадрату зі стороною  $a$ . Потенціал поля у центрі квадрата дорівнює

1.  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8q}{a\sqrt{2}}$ ;
2.  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{a\sqrt{2}}$ ;
3. 0;
4.  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q}{a\sqrt{2}}$ .

12. Напруженість однорідного електричного поля

1. не змінюється за величиною;
2. не змінюється за величиною та напрямом;
3. не змінюється за напрямом;
4. може змінюватися за величиною та напрямом.

13. Однорідне електричне поле утворює

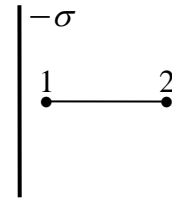
1. точковий заряд;
2. циліндричний повітряний конденсатор;
3. диполь;
4. нескінченна заряджена площина.

14. Енергетичною характеристикою електричного поля є

1. потенціал;
2. електроємність;
3. напруженість;
4. вектор електричного зміщення.

15. Між потенціалом електричного поля точкового заряду та відстанню існує залежність
1. прямо пропорційна;
  2. обернено пропорційна;
  3. експоненціальна;
  4. прямо пропорційна квадрату відстані;
  5. обернено пропорційна квадрату відстані.

16. Нескінченна площина заряджена з густиною заряду  $-\sigma$ . При переході від точки 1 до 2 (див. рис.) напруженість електричного поля



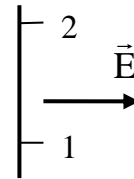
1. збільшується;
  2. зменшується;
  3. не змінюється.
17. Нескінченна площина заряджена з густиною заряду  $-\sigma$ . При переході від точки 1 до 2 (див. рис.) потенціал електричного поля

1. збільшується;
  2. зменшується;
  3. не змінюється.
18. Потенціал електричного поля позитивно зарядженої нескінченної площини при наближенні до неї:
1. не змінюється;
  2. зменшується;
  3. збільшується.

19. Установити відповідність між величиною та одиницею вимірювання в СІ
- |                                     |                |
|-------------------------------------|----------------|
| 1. Потенціал електростатичного поля | А. В/м;        |
| 2. Напруженість електричного поля   | Б. В (вольт);  |
| 3. Електричний заряд                | В. Ф (фарад);  |
| 4. Електроємність                   | Г. В·м;        |
| 5. Потік вектора напруженості       | Д. Кл (кулон). |

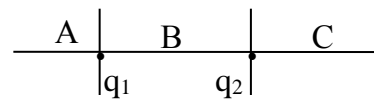
**Вибрати вірну відповідь:**

20. На рисунку показаний напрям вектора напруженості для однорідного поля. Електрон ( $q_e = -1,6 \times 10^{-19}$  Кл) переміщується із точки 1 в точку 2. Відстань між точками 1 та 2 дорівнює 10 см,  $E=200$  В/м. Робота, яку виконує поле дорівнює
1.  $-3,2 \cdot 10^{-18}$  Дж;
  2.  $3,2 \cdot 10^{-18}$  Дж;
  3. 0;
  4.  $32 \cdot 10^{-18}$  Дж.

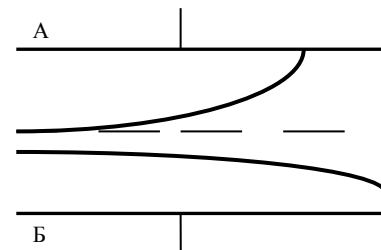


21. Потенціальний характер електростатичного поля відображує
1. теорема Гауса;
  2. теорема про циркуляцію вектора напруженості електростатичного поля;
  3. закон Кулона;
  4. формула густини енергії електричного поля.

22. Якщо  $q_1 > 0, q_2 < 0$ , а  $|q_1| > |q_2|$ , точка, потенціал якої дорівнює нулю, не може знаходитися в області
1. А;
  2. В;
  3. С.



23. На рисунку зображені траєкторії електрона та протона ( $m_p > m_e$ ), які влітають з однаковою швидкістю у простір між пластинами плоского конденсатора.



Позитивний заряд має пластина

- 1) А;
- 2) Б.

24. Робота однорідного електричного поля при переміщенні у ньому заряду дорівнює нулю при русі заряду відносно ліній напруженості під кутом
1.  $0^\circ$ ;
  2.  $30^\circ$ ;
  3.  $90^\circ$ ;
  4.  $45^\circ$ .

25. Установити відповідність між графіком та зображеною залежністю.

- залежність потенціалу зарядженої сферичної поверхні від відстані до центра сфери
- залежність напруженості рівномірно зарядженої сфери від відстані до її центру
- залежність напруженості рівномірно зарядженої сферичної поверхні від відстані до її центру зображена:

1) на рис.1;

2) на рис.2;

3) на рис.3.

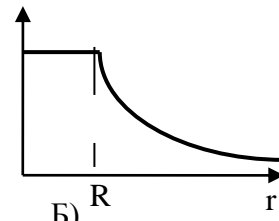
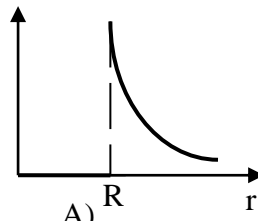
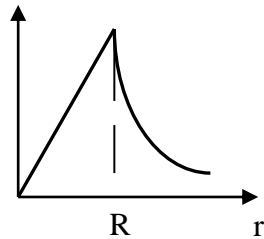


Рис.1

Рис.2

Рис.3

**Вибрати вірну відповідь:**

- Робота по переміщенню заряду в електростатичному полі залежить від
  - форми траєкторії та величини заряду;
  - величини заряду та вибору нульового рівня;
  - вибору нульового рівня та різниці потенціалів;
  - різниці потенціалів та величини заряду.
- Яка з сукупностей зарядів, що обмежені замкненою поверхнею, утворить найбільший потік через неї? найменший потік через неї?
  - 6 Кл; -2 Кл.
  - 5 Кл; 1 Кл; -6 Кл.
  - 4 Кл; -3 Кл; 10 Кл.
  - 8 Кл; -7 Кл.
- Декілька точкових зарядів вміщено у сферу радіусу R. Потік вектора напруженості через сферу, якщо її радіус збільшити удвічі,
  - зменшиться удвічі;
  - зменшиться у 4 рази;
  - збільшиться удвічі;
  - не зміниться
- Еквіпотенціальною називають поверхню, на якій
  - потенціал є постійним;
  - напруженість електричного поля є постійною;
  - потенціал дорівнює нулю;
  - напруженість електричного поля дорівнює нулю.
- Якщо потенціальна енергія взаємодії двох однойменних точкових зарядів, що рухаються вздовж прямої, збільшується у процесі руху, ці заряди
  - наближаються один до одного;
  - віддаляються один від одного.
- Потенціальна енергія взаємодії двох різнойменних точкових зарядів, що наближаються один до одного,
  - збільшується у процесі руху;
  - зменшується у процесі руху.
- Для зарядженого провідника при рівновазі наданого йому заряду характерним є:
  - відсутність поля всередині провідника ( $\vec{E}=0$ );
  - однорідність поля всередині провідника;
  - однаковість потенціалу всіх точок провідника;
  - рівність нулю потенціалу всіх точок усередині провідника.

(Обрати дві вірні відповіді.)
- При внесенні провідника у зовнішнє електричне поле спостерігається явище:
  - електростатичної індукції;
  - деформаційної поляризації;
  - спонтанної поляризації;
  - іонізації.

34. Установити відповідність між типом поляризації та видом діелектрика, в якому вона виникає:

Вид діелектрика	тип поляризації
1. полярний діелектрик	А. деформаційна (електронна);
2. неполярний діелектрик	Б. іонна ;
3. сегнетоелектрик	В. орієнтаційна;
4. іонний кристал	Г. спонтанна.

35. Означенням вектора поляризованості  $\vec{P}$  діелектрика є формула:

1.  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ ; 2.  $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ ; 3.  $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{P}_i}{\Delta V}$ ; 4.  $\text{div} \vec{P} = \rho'$ .

36. Величина потоку вектора напруженості  $\vec{E}$  через замкнену поверхню у діелектрику залежить від охоплених нею:

1. вільних зарядів; 2. зв'язаних зарядів;  
2. вільних та зв'язаних зарядів; 3. серед наведених немає вірної відповіді.

37. Величина потоку вектора електричного зміщення  $\vec{D}$  через замкнену поверхню залежить від охоплених нею:

1. вільних зарядів; 2. зв'язаних зарядів;  
2. вільних та зв'язаних зарядів; 3. серед наведених немає вірної відповіді.

38. Означення поняття „електроємність провідника ” надає формула

1.  $C = \frac{q}{U}$ ; 2.  $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$ ; 3.  $C = \frac{q}{\phi}$ ; 4.  $C = \frac{4\pi \epsilon \epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ .

39. На електроємність конденсатора впливають: (Обрати дві вірні відповіді.)

1. геометричні розміри та форма; 2. наявність інших тіл поряд з конденсатором.  
3. природа обкладинок; 4. діелектрик, що заповнює конденсатор;

40. На електроємність провідника впливають: (Обрати дві вірні відповіді.)

1. геометричні розміри та форма; 2. природа провідника;  
3. температура провідника; 4. наявність інших тіл поряд з провідником.

41. Електроємність плоского конденсатора залежить від: (Обрати дві вірні відповіді.)

1. площі обкладинок; 2. напруги на обкладинках;  
3. заряду на обкладинках; 4. матеріалу обкладинок.  
5. відстані між обкладинками;

42. Сумарна ємність конденсаторів при їх а) послідовному з'єднанні; б) паралельному з'єднанні

1. зменшується; 2. не змінюється; 3. збільшується.

43. Плоский конденсатор складається з двох круглих пластин. Його електроємність, якщо радіус пластин зменшити утричі, а простір між пластинами заповнити діелектриком з  $\epsilon = 3$

1. зменшиться у 3 рази; 2. збільшиться у 3 рази  
3. не зміниться; 4. збільшиться у 9 разів.

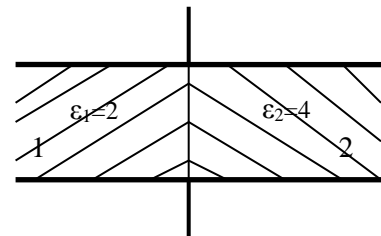
44. Означенням поняття “густина енергії електричного поля ” є формула:

1.  $w = \frac{ED}{2}$ ; 2.  $w = \frac{dW}{dV}$ ; 3.  $w = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2}$ ; 4.  $w = \frac{D^2}{2\epsilon_0}$ .

45. Мильна булька радіуса R заряджена зарядом q. Якщо заряд бульки зменшиться удвічі, її електрична енергія:

1. зменшиться у 2 рази; 2. зменшиться у 4 рази; 3. не зміниться;  
4. збільшиться у 4 рази; 5. збільшиться у 2 рази.

46. Мильна булька радіуса  $R$  заряджена зарядом  $q$ . Якщо бульку роздути так, що її радіус збільшиться удвічі, електрична енергія бульки,  
 1. зменшиться у 2 рази;      2. збільшиться у 2 рази;      3. не зміниться;  
 4. збільшиться у 4 рази;      5. зменшиться у 4 рази.
47. Плоский конденсатор підключено до джерела напруги. Відстань між пластинами зменшили удвічі. При цьому енергія електричного поля конденсатора  
 1. зменшилась удвічі;      2. не змінилась;  
 3. збільшилась у 4 рази;      4. збільшилась удвічі.
48. Плоский конденсатор відімкнули від джерела напруги, а потім зменшили удвічі відстань між пластинами. При цьому енергія електричного поля конденсатора  
 1. зменшилась удвічі;      2. не змінилась;  
 3. збільшилась у 4 рази;      4. збільшилась удвічі.
49. Плоский повітряний конденсатор відімкнули від джерела напруги, а потім заповнили простір між пластинами діелектриком. При цьому енергія електричного поля конденсатора  
 1. збільшилась;      2. не змінилась;      3. зменшилась.
50. Простір між пластинами плоского повітряного конденсатора заповнили діелектриком, не відімкнувши від джерела напруги. При цьому енергія електричного поля конденсатора  
 1. збільшилась;      2. не змінилась;      3. зменшилась.
51. Два конденсатори, що мають однакові геометричні параметри, заповнені різними діелектриками з діелектричною проникністю  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  та з'єднані паралельно. Однаковою у цих конденсаторів є  
 1. заряд на обкладинках;      2. енергія поля;      3. електроємність;      4. напруга.
52. Два конденсатори, що мають однакові геометричні параметри, заповнені різними діелектриками з діелектричною проникністю  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  та з'єднані послідовно. Однаковою у цих конденсаторів є  
 1. електроємність;      2. енергія поля;      3. заряд на обкладинках;      4. напруга.
53. Плоский конденсатор заповнений двома різними діелектриками (див. рис.) та з'єднаний з джерелом напруги. В обох частинах конденсатору однаковою є  
 1) напруженість електричного поля;  
 2) поверхнева густина зв'язаного заряду в діелектриках;  
 3) об'ємна густина енергії електричного поля;  
 4) енергія електричного поля.



Відношення енергії електричного поля конденсаторів  $\frac{W_1}{W_2}$  дорівнює

1)  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$       2) 1;      3)  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ .

54. Два конденсатори, що мають однакові геометричні параметри, заповнені різними діелектриками з діелектричною проникністю  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$  та з'єднані послідовно. Відношення енергії електричного поля конденсаторів  $\frac{W_1}{W_2}$  дорівнює

1)  $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$       2) 1;      3)  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ .

## Розділ 2. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

**Тема:** Електричний струм. Закони Ома, Джоуля-Ленца в інтегральній та диференціальній формі. Правила Кірхгофа. Електронна теорія електропровідності Лоренца. Електричний струм у металі.

### Основні поняття і формули

**Електричний струм** – упорядкований рух заряджених частинок.

Розрізняють:

- струм провідності – утворюється рухом вільних зарядів у провідному середовищі;
- конвекційний струм – пов'язаний з рухом заряджених макроскопічних тіл;
- струм у вакуумі.

**Провідники** – матеріальні тіла, в яких при наявності електричного поля виникає електричний струм вільних зарядів. Якщо в провіднику тече електричний струм, то (на відміну від електростатики) його об'єм не є екіпотенціальним.

• **Характеристики електричного струму:** сила струму (струм)  $I$  та об'ємна густина струму  $\vec{j}$ .

**Сила струму (струм)  $I$**  – скалярна величина, яка чисельно дорівнює заряду, що проходить крізь поперечний переріз провідника за одиницю часу.

За означенням

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (2.1)$$

де  $dq$  – заряд, який проходить крізь поперечний переріз провідника за час  $dt$ .

Стаціонарний або **постійний струм** – струм, при якому за однакові скінченні проміжки часу  $\Delta t$  проходять однакові заряди  $\Delta q$  і напрям струму при цьому не змінюється. При постійному струмі

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Одиниця вимірювання струму **ампер (А)** у системі одиниць СІ є основною електромагнітною одиницею, її означення надається на основі магнітної взаємодії провідників зі струмом (див. розділ 3).

Електричний струм може нерівномірно розподілятися по поверхні, крізь яку протікає, тому для більш детальної характеристики струму вводять вектор густини струму  $\vec{j}$ .

**Об'ємна густина струму  $\vec{j}$**  – вектор середньої густини потоку зарядів; чисельно дорівнює заряду, який проходить за 1 секунду крізь

одичину площину, перпендикулярну до швидкості упорядкованого руху зарядів.

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad (2.3)$$

Вектор  $\vec{j}$  співпадає за напрямом із вектором швидкості  $\vec{v}$  упорядкованого руху позитивно заряджених частинок.

$$\vec{j} = qn\vec{v} = \rho\vec{v}. \quad (2.4)$$

Тут  $q$  – величина заряду окремого носія струму,  $n$  – чисельна густина зарядів,  $\rho$  – об’ємна густина зарядів у даній точці провідника. Якщо в провіднику існують вільні заряди різних знаків із зарядами  $q^+$  і  $q^-$ , чисельною густиною  $n^+$  і  $n^-$  та об’ємною густиною  $\rho^+$  і  $\rho^-$ , які рухаються з середніми швидкостями  $\langle \vec{v}^+ \rangle$  і  $\langle \vec{v}^- \rangle$  відповідно, то

$$\vec{j} = q^+n^+\langle \vec{v}^+ \rangle + q^-n^-\langle \vec{v}^- \rangle = \rho^+\langle \vec{v}^+ \rangle + \rho^-\langle \vec{v}^- \rangle. \quad (2.5)$$

Розмірність густини струму  $[j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ .

З означення  $\vec{j}$  витікає, що сила струму дорівнює потоку вектора густини струму через переріз провідника:

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (2.6)$$

**Рівняння неперервності** (закон збереження заряду)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \quad (2.7)$$

де  $\rho$  – об’ємна густина зарядів у провіднику,  $\vec{j}$  – густина струму. Якщо струм постійний, то величина заряду в будь-якій частині об’єму провідника залишається незмінною і всюди виконується співвідношення:

$$\text{div} \vec{j} = 0. \quad (2.8)$$

• **Умови підтримки постійного струму:**

- замкненість електричного кола;
- незмінність різниці потенціалів між двома будь-якими точками кола ( $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ ).

Остання вимога забезпечується дією на деякій ділянці кола сил неелектричного походження (так званих, **сторонніх сил**), які виконують роботу по переміщенню заряду проти сил електричного поля (розділенню зарядів) за рахунок енергії **джерела струму**.

Сторонні сили можуть бути обумовлені, наприклад вихровим електричним полем, силою Лоренца, фізичною або хімічною неоднорідністю провідників, їх прискореним рухом.



- **Електрорушійна сила (ЕРС) джерела струму** – характеристика джерела струму, яка чисельно дорівнює роботі сторонніх сил по переносу одиничного позитивного заряду вздовж кола:

$$\mathcal{E} = \frac{A^*}{q}, \quad (2.9)$$

де  $A^* = \oint_L \vec{F}^* d\vec{l} = q \oint_L \vec{E}^* d\vec{l}$  – робота сторонніх сил, яка може бути виражена

через напруженість поля сторонніх сил  $\vec{E}^*$ , що дорівнює сторонній силі, яка діє на вільний носій одиничного позитивного заряду.

З урахуванням виразу для роботи сторонніх сил отримуємо

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E}^* d\vec{l}, \quad (2.10)$$

тобто ЕРС джерела струму дорівнює циркуляції вектора напруженості поля сторонніх сил вздовж електричного кола.

Відповідно, ЕРС, що діє на ділянці кола дорівнює

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{12}^*}{q} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* d\vec{l}. \quad (2.11)$$

З формули (2.9) випливає, що розмірність ЕРС збігається з розмірністю потенціалу, тому, одиницею вимірювання електрорушійної сили, так саме, як і потенціалу, в системі одиниць СІ є вольт (В).

- **Напруга  $U_{12}$  на ділянці кола** – величина роботи сил електричного поля та сторонніх сил по переносу одиничного позитивного заряду вздовж ділянки кола:

$$U_{12} = \frac{A_{12} + A_{12}^*}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (2.12)$$

Одиниця вимірювання напруги в СІ – вольт (В).

Ділянку кола, на якій на заряди діють тільки сили електричного походження, називають **однорідною**. На однорідній ділянці кола напруга співпадає з різницею потенціалів на її кінцях:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (2.13)$$

**Неоднорідна** – ділянка кола, на якій на заряди діють як електричні, так і сторонні сили. Напругу на неоднорідній ділянці кола визначається за формулою (2.12).

- **Закон Ома для однорідної ділянки кола.**

Сила струму, що протікає по провіднику при відсутності в ньому дії сторонніх сил, пропорційна напрузі  $U$  між кінцями провідника:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}, \quad (2.14)$$

де  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$  – різниця потенціалів (напруга) на кінцях ділянки;  $R$  – електричний опір ділянки провідника.

Одиниця вимірювання  $R$  у системі СІ – [Ом]. 1 Ом – опір такого провідника, в якому тече струм в 1 А при різниці потенціалів на його кінцях, яка дорівнює 1 В.

Опір провідника  $R$  та його провідність  $G$  – взаємно обернені величини:

$$R = \frac{1}{G}. \quad (2.15)$$

Одиниця вимірювання  $G$  у системі СІ – Сіменс [См]. 1 См = 1 Ом<sup>-1</sup>.

Опір залежить від форми та розміру провідника, а також від матеріалу, з якого він зроблений, та температури. У простому випадку однорідного провідника постійного перерізу його опір визначається за

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.16)$$

де  $l$  – довжина провідника;  $S$  – площа перерізу провідника;  $\rho$  – питомий опір матеріалу провідника, одиниця вимірювання в системі одиниць СІ –  $\text{Î î · î}$ .

$$\rho = \frac{1}{\gamma}, \quad (2.17)$$

де  $\gamma$  – питома електропровідність матеріалу. У системі СІ питома електропровідність вимірюється в  $(\text{Î î · î})^{-1}$ .

Залежність опору металевого провідника від температури:

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (2.18)$$

де  $t$  – температура за шкалою Цельсія;  $R_0$  – опір провідника при температурі 0° С;  $\alpha$  – температурний коефіцієнт опору.

• **Закон Ома для неоднорідної ділянки кола**, яка містить джерело струму, виглядає наступним чином:

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}, \quad (2.19)$$

де  $\mathcal{E}_{12}$  – електрорушійна сила джерела струму;  $R_{12}$  – повний опір ділянки.

• **Закон Ома у диференціальній формі** дозволяє детальніше описати проходження струму через переріз провідника.

Для однорідної ділянки кола він має наступний вигляд

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \gamma \vec{E}. \quad (2.20)$$

Тут  $\vec{E}$  – напруженість електростатичного поля в провіднику;  $\gamma$  – питома електропровідність матеріалу провідника.

Для неоднорідної ділянки кола

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} (\vec{E} + \vec{E}^*) = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^*), \quad (2.21)$$

де  $\vec{E}^*$  – напруженість поля сторонніх сил.

• **Закон Ома для замкнутого (повного) нерозгалуженого кола:** сила струму в замкнутому колі прямо пропорційна алгебраїчній сумі всіх ЕРС, що діють у колі, і обернено пропорційна його повному опору, який, у свою чергу, дорівнює сумі опорів зовнішньої та внутрішньої ділянок, тобто

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (2.22)$$

де  $R$  – сумарний опір зовнішньої ділянки кола,  $r$  – сума внутрішніх опорів джерел струму.

• **Правила Кірхгофа для розгалуженого кола.**

**Перше правило:** алгебраїчна сума струмів, що сходяться в будь-якому вузлі, дорівнює нулю, тобто

$$\sum_i I_i = 0. \quad (2.23)$$

Перше правило є наслідком закону збереження заряду та умови підтримки постійного струму, за яким при постійному струмі потенціали будь-яких точок кола з часом не змінюються.

Вузол – точка кола, в якій сходиться не менш, ніж три провідника.

**Друге правило:** для будь-якого замкнутого контуру, виділеному в розгалуженому колі, алгебраїчна сума добутків сили струму на опір відповідної ділянки кола дорівнює алгебраїчній сумі всіх ЕРС, що діють в цьому контурі:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (2.24)$$

Друге правило Кірхгофа є узагальненням закону Ома для неоднорідної ділянки кола.

• Загальний опір  $n$  провідників **при послідовному з'єднанні** дорівнює

$$R = \sum_{i=1}^n R_i; \quad (2.25)$$

Для послідовного з'єднання ділянок кола є характерною відсутність вузлів (розгалужень) на провіднику, що з'єднує ці ділянки (рис.2.1а). При цьому струм на цих ділянках (опорах) є однаковим, а напруга дорівнює сумі напруг на кожній з них:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i; \quad I = I_1 = I_2 = \dots = I_n. \quad (2.26)$$

Загальний опір  $n$  провідників **при паралельному з'єднанні** знаходиться з співвідношення

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}, \quad (2.27)$$

тобто у цьому випадку додаються провідності  $G_i$  окремих провідників:

$$G = \sum_{i=1}^n G_i. \quad (2.28)$$

При паралельному з'єднанні ділянок кола кінці усіх ділянок підключені к тим самим двом точкам кола (рис.2.1б). При цьому напруга на цих ділянках є однаковою, а сума струмів в усіх ділянках дорівнює струму в колі до розгалуження:

$$I = \sum_i I_i; \quad U = U_1 = U_2 = \dots = U_n \quad (2.29)$$

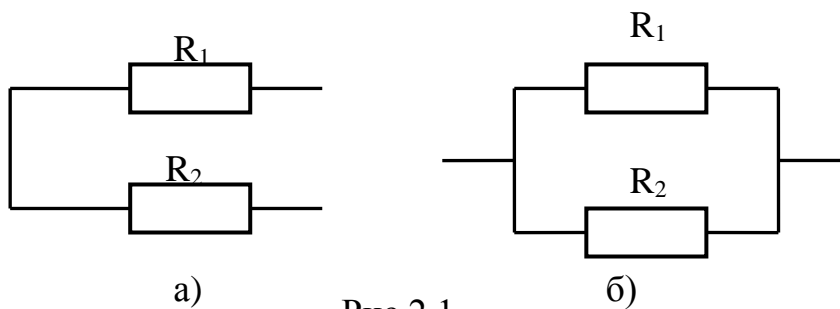


Рис.2.1

- **Робота електричних сил** на ділянці кола, на кінцях якої існує різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$ , дорівнює

$$A = (\varphi_1 - \varphi_2)It = IUt. \quad (2.30)$$

- **Закон Джоуля-Ленца:** кількість теплоти, що виділяється на ділянці кола опору  $R$ , по якій протягом часу  $t$  проходить струм  $I$ , дорівнює

$$Q = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (2.31)$$

Відповідно теплова потужність, яка виділяється в провіднику постійним струмом  $I$ , дорівнює

$$P = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (2.32)$$

- Більш детально описує виділення енергії у провіднику при проходженні струму **питома потужність струму**  $w$ , яка надає кількість енергії, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу:

$$w = \frac{dW}{dV \cdot dt}. \quad (2.33)$$

**Закон Джоуля – Ленца у диференціальній формі** для питомої потужності струму  $w$ :

$$w = \vec{j} \vec{E} = j^2 \rho = \gamma E^2. \quad (2.34)$$

- Повна потужність у електричному колі, тобто потужність джерела ЕРС:

$$P = \mathcal{E}I \quad (2.35)$$

де  $\mathcal{E}$  – електрорушійна сила джерела струму.

Робота, що здійснюється джерелом електричної енергії за час  $t$ ,

$$A = \mathcal{E}It = I^2 R_{\text{в\`{a}i}} t = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{\text{в\`{a}i}}} t, \quad (2.36)$$

де  $R_{\text{в\`{a}i}}$  – повний опір кола.

### Методичні вказівки

1. Для обчислення сили струму і густини струму, а також розрахунку опорів однорідних провідників застосовують закон Ома в інтегральній (2.14) або диференціальній (2.20) формі. Інтегральну форму закону Ома зручно використовувати при розрахунках струмів у провідниках.

Для обчислення струмів та опорів у необмежених провідних середовищах (наприклад, у випадку заземлення електродів) використовують диференціальну форму закону Ома. Притому, напруженість електричного поля при наявності постійного струму та однорідності середовища можна обчислювати методами електростатики, оскільки вона співпадає з напруженістю електростатичного поля при тій самій напрузі (різниці потенціалів) у непровідному середовищі.

2. При розрахунку струмів у суцільному провідному середовищі та визначенні опору провідного середовища між електродами (електрод – екіпотенційний провідник, провідність якого набагато менша за електропровідність середовища) доцільно притримуватися наступної схеми:

а) розв'язок задачі почати зі струму  $I$ , за яким визначити густину струму  $\vec{j}(\vec{r})$ . При постійному струмі  $\vec{j}$  завжди задовольняє умову (2.8)  $\text{div}\vec{j}=0$  незалежно від діелектричних та провідних властивостей середовища. В задачах з симетричним полем ця умова дозволяє відразу визначити характер залежності густину струму від координати.

б) Скориставшись законом Ома у диференціальній формі, перейти до напруженості електричного поля  $\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{j}(\vec{r})$ .

в) Шляхом інтегрування визначити різницю потенціалів між електродами:

$$U(\vec{r}) = -\int \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}.$$

г) Далі за законом Ома знайти опір середовища між електродами:  $R = \frac{U}{I}$ .

Отже, схема розв'язання задачі має вид:

$$I \rightarrow \vec{j} \rightarrow \vec{E} \rightarrow U. \quad (2.37)$$

У випадку однорідного середовища поле повністю визначається зарядами і потенціалами електродів, і у якості вихідного параметру можна обрати напругу  $U$  на електродах, за якою визначити напруженість  $E$

електричного поля між електродами. Далі, користуючись законом Ома у диференціальній формі (2.20), перейти до густини електричного струму  $\vec{j}$ , яка дозволяє за формулою (2.6) визначити струм  $I$ :

$$U \rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{j} \rightarrow I. \quad (2.38)$$

Або, якщо відомий заряд  $\pm q$  на електродах (обкладинках конденсатора), схема розв'язання приймає вигляд

$$q \rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{j} \rightarrow I. \quad (2.39)$$

Якщо провідне середовище не є однорідним розв'язання задачі ускладнюється внаслідок появи у провідному середовищі вільних зарядів, що ускладнює визначення залежності питомого опору  $\rho$  від  $r$  і робить простий перехід від  $U$  або  $q$  до  $E$  неможливим.

3. При застосуванні закону Ома для повного кола (2.22) при розв'язуванні конкретної задачі його зручно записувати у наступному вигляді:

$$\pm IR = \sum_j \pm \mathcal{E}_j, \quad (2.24)$$

де  $R$  – повний опір кола з урахуванням внутрішнього опору джерел струму. При розв'язанні конкретної задачі треба спочатку обирати напрям струму (рис. 2.2), який можна задати довільним способом (дійсний напрям струму визначається потім знаком отриманого розв'язку).

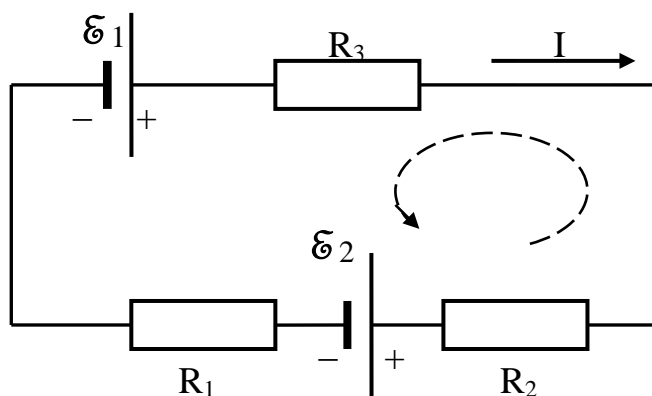


Рис. 2.2

Далі здійснюється обхід контуру. **Правила знаків** в законі Ома для повного кола

для струму: струм вважається додатним ( $+I$ ), якщо його напрям співпадає з обраним напрямом обходу контуру, у протилежному випадку струм вважається від'ємним ( $-I$ );

для ЕРС: ЕРС є додатною ( $+\mathcal{E}$ ), якщо при обході контуру джерело струму проходять у напрямі дії сторонніх сил, тобто від контакту ( $-$ ) до контакту ( $+$ ), і від'ємною ( $-\mathcal{E}$ ) у протилежному випадку.

Для кола, схема якого наведена на рис. 2.1, для обраного напрямку струму та напрямку обходу контуру рівняння, записане за законом Ома для повного кола у відповідності з наведеними правилами має вигляд:

$$-I(R_1 + R_2 + R_3) = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

4. Для розрахунків, пов'язаних з розгалуженим колом, зручно це коло умовно поділити на декілька замкнених нерозгалужених контурів і використати правила Кірхгофа (2.23), (2.24).

При використанні правил Кіргофа слід дотримуватися наступних рекомендацій:

а) обрати довільним способом та указати стрілками напрями струмів на всіх ділянках розгалуженого кола;

б) при запису рівнянь за I правилом Кірхгофа (2.23) слід дотримуватися правила знаків: струми, що притікають у вузол, вважають додатними, а ті, що витікають з вузла – від'ємними;

в) звернути увагу на те, що кількість незалежних рівнянь, складених за I правилом Кірхгофа, завжди на одиницю менша кількості вузлів у даному електричному колі;

г) обрати напрям обходу контурів (за чи проти годинникової стрілки);

д) при запису, які відповідають другому правилу Кірхгофа (2.24) слід дотримуватися правил знаків, які є аналогічними наведеним вище для закону Ома для повного кола;

ж) для того, щоб усі рівняння, складені за II правилом були незалежними, необхідно кожного разу розглядати контури, які містять хоча б одну нову гілку, яка не увійшла у попередні контури;

з) якщо після розв'язання системи рівнянь в отриманій відповіді деякий струм має знак «-», це означає, що у дійсності струм тече у протилежному напрямі. Якщо в задачі визначається опір, отримане значення якого в результаті з'явилося від'ємним, це також свідчить про невірний вибір напрямку струмів у даному провіднику. Але в цьому випадку невірним буде також і отримане значення опору. Тому необхідно змінити напрям струму в провіднику на протилежний, скласти нову систему рівнянь і розв'язати її заново.

5. При розв'язуванні задач на роботу та потужність струму слід мати на увазі, що робота сил електричного поля (2.30) і кількість теплоти (2.31), що виділяється при проходженні струму, співпадають тільки, якщо розглянута ділянка кола не містить ЕРС і для неї справедливий закон Ома (2.14). Якщо ділянка містить джерело струму, величини  $A$  і  $Q$ , визначені за формулами (2.30) і (2.31), не є однаковими. Знак нерівності залежить від напрямів струму та ЕРС.

### Приклади розв'язання задач

**Приклад 2.1.** Визначити силу струму  $I$  у провіднику, якщо за кожну секунду  $t = 1\text{с}$  крізь його переріз проходить  $N = 2 \cdot 10^{17}$  електронів.

$t = 1\text{с}$
$N = 2 \cdot 10^{17}$
$q = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ Кл}$
$I = ?$

Розв'язання.

Сила постійного струму дорівнює заряду, який проходить через переріз провідника за одиницю

часу (2.2). Кожен електрон переносить заряд  $q$ , тому за  $1\text{с}$  всі вони перенесуть заряд  $N \cdot q$ .

Тоді сила струму 
$$I = \frac{Nq}{t};$$

Перевіряємо розмірність: 
$$[I] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}.$$

Підставляємо числові значення, знайшовши в таблицях заряд електрона  $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ :

$$I = \frac{2 \cdot 10^{17} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1} = 3,2 \cdot 10^{-2} = 0,032 \text{ А}.$$

Відповідь:  $I = 0,032 \text{ А}$ .

**Приклад 2.2.** Сила струму у провіднику змінюється за законом  $I = 2+2t$ , де  $I$  вимірюється в амперах,  $t$  – в секундах. Знайти заряд  $q$ , який проходить крізь переріз провідника за проміжок часу від  $t_1 = 1\text{с}$  до  $t_2 = 3\text{с}$ .

$$\begin{array}{l|l} I = 2+2t & \\ t_1 = 1\text{с} & \\ t_2 = 3\text{с} & \\ \hline q - ? & \end{array}$$

Розв'язання.  
Користуючись формулою (2.1) можна записати:  $dq = Idt$ . Відповідно для визначення повного заряду  $q$  треба здійснити інтегрування.

$$q = \int_{t_2}^{t_1} Idt = \int_{t_2}^{t_1} (2 + 2t)dt = 2 \int_{t_2}^{t_1} dt + 2 \int_{t_2}^{t_1} tdt = 2(t_2 - t_1) + (t_2^2 - t_1^2) = 12 \text{ Кл}.$$

Відповідь:  $q = 12 \text{ Кл}$ .

**Приклад 2.3.** Визначити густину струму в мідному дроті довжиною  $10\text{м}$ , якщо різниця потенціалів  $\Phi_1 - \Phi_2$  на його кінцях дорівнює  $8,5\text{В}$ .

$$\begin{array}{l|l} l = 10\text{м} & \\ \Phi_1 - \Phi_2 = 8,5\text{В} & \\ \rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м} & \\ \hline j - ? & \end{array}$$

Розв'язання  
Розглянемо два способи розв'язання задачі: за законом Ома в диференціальній та інтегральній формах.

**I спосіб.** За законом Ома у диференціальній формі (2.20)  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ , де значення питомого

опору мідного провідника  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$  дістаємо з таблиці.

Напруженість електричного поля всередині провідника виражаємо через різницю потенціалів на його кінцях та довжину  $l$  (див. формулу (1.24)):

$$E = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{l}.$$

Тоді 
$$j = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\rho l}. \quad (1)$$



**II спосіб.** Густина струму  $j$  виражаємо через силу струму  $I$  за означенням (2.3):  $j = \frac{I}{S}$  (2). Силу струму  $I$  знаходимо із закону Ома для

однорідної ділянки кола (2.14):  $I = \frac{U}{R} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$ . Підстановка цього виразу у формулу (2) з урахуванням виразу (2.16)  $R = \rho \frac{l}{S}$  для опору провідника приводить до того самого результату (1):

$$j = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{RS} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\rho l}$$

Перевіряємо одиницю вимірювання:  $[j] = \frac{\hat{A}}{\hat{I} \hat{l}} = \frac{\hat{A}}{\hat{I} \cdot \hat{l}} = \frac{\hat{A}}{\hat{l}^2}$ .

Розрахунок дає:  $j = \frac{8,5}{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 10} = 5 \cdot 10^7 \frac{\hat{A}}{\hat{l}^2}$ .

Відповідь:  $j = 5 \cdot 10^7 \frac{\hat{A}}{\hat{l}^2}$ .

**Приклад 2.4.** Обмотка реостату зроблена з мідного дроту діаметром  $d=0,5\text{мм}$ , який щільно намотано на циліндр радіусом  $r=2\text{см}$ . Скільки витків  $N$  слід зробити, щоб опір реостата дорівнював  $R=50\text{ Ом}$ ?

$R = 50\text{ Ом}$ $d = 0,5 \cdot 10^{-3}\text{ м}$ $r = 2 \cdot 10^{-2}\text{ м}$ $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}\text{ Ом} \cdot \text{м}$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> $N - ?$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Кількість витків обмотки реостату визначаємо як відношення довжини дроту <math>L</math> до довжини одного витка <math>l_1 = 2\pi r</math>: <math>N = \frac{L}{l_1} = \frac{L}{2\pi r}</math>. (1)</p> <p>Довжину дроту можна визначити з формули для</p>
---	--

опору  $R = \rho \frac{L}{S}$ ,

де  $\rho$  – питомий опір провідника;  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  – площа його перерізу.

$$L = \frac{RS}{\rho} = \frac{\pi d^2 R}{4\rho}$$

Після підстановки отриманого виразу в формулу (1) визначаємо кількість витків:

$$N = \frac{\pi d^2 R}{4\rho \cdot 2\pi r} = \frac{d^2 R}{8\rho r}$$

Перевірка розмірності:  $[N] = \left[ \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Ом}}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} \right] = 1$ .

$$N = \frac{0,25 \cdot 10^{-6} \cdot 50}{8 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 4595 \approx 4600 \text{ (витків)}.$$

**Приклад 2.5.** На плоский конденсатор ємністю  $C$  подана напруга  $U$ . Знайти струм витоку у конденсаторі, якщо питома провідність речовини, що заповнює зазор між обкладинками конденсатора дорівнює  $\rho$ , а її діелектрична проникність дорівнює  $\epsilon$ .

Розв'язання

Оскільки напруга на обкладинках конденсатора є постійною, а поле між обкладинками – однорідним, то для розв'язання задачі можна скористатися схемою (2.38).

Напруженість однорідного поля плоского конденсатора дорівнює:

$$E = \frac{U}{d},$$

де  $d$  – відстань між обкладинками конденсатора.

За законом Ома у диференціальній формі (2.20) визначаємо густину струму провідності.

$$j = \frac{E}{\rho} = \frac{U}{\rho d}.$$

Сила струму, який тече між обкладинками, дорівнює  $I = jS = \frac{US}{\rho d}$  (1).

З урахуванням виразу для електроємності плоского конденсатора  $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$ , звідки  $\frac{S}{d} = \frac{C}{\epsilon\epsilon_0}$ , формула (1) набуває вигляду  $I = \frac{UC}{\rho\epsilon\epsilon_0}$ .

Відповідь:  $I = \frac{UC}{\rho\epsilon\epsilon_0}$ .

**Приклад 2.6.** Між обкладинками сферичного конденсатора, радіус яких дорівнює  $r_1$  і  $r_2$ , знаходиться слабо провідна однорідна речовина з провідністю  $\rho$  і діелектричною проникністю  $\epsilon$ . Визначити опір  $R$  такого шару.

Розв'язання.

**I спосіб.** Згідно умові задачі, речовина, що заповнює конденсатор є однорідною, тому  $\rho = \text{const}$ , і можна скористатися схемою (2.39).

Нехай заряд на обкладинках конденсатору дорівнює  $\pm q$ . Тоді напруженість поля між обкладинками згідно формулі (1.13) дорівнює

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \quad (r_1 < r < r_2).$$

Напруга між сферами

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \quad (1)$$

Визначимо силу струму, що протікає між обкладинками (струм витоку). Виражаємо струм через його густину  $j$  і далі використовуємо

закон Ома у диференціальній формі (2.20). Оскільки заряди на обкладинках є постійними, то через будь-яку концентричну поверхню радіуса  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ) струм є однаковим і дорівнює

$$I = jS = \frac{E}{\rho} S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0\epsilon\rho}. \quad (2)$$

Виражаємо  $R$  із закону Ома в інтегральній формі і після підстановки виразів (1) і (2) отримуємо:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \cdot \frac{\epsilon_0\epsilon\rho}{q} = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \quad (3)$$

**II спосіб.** Розглянемо можливість застосування формули опору (2.16)

$R = \rho \frac{l}{S}$ , яка є справедливою для циліндричного

провідника, вздовж якого тече струм. Зрозуміло, що безпосередньо у наданому вигляді її застосувати неможливо. Але, якщо виділити всередині конденсатора сферичний шар радіуса  $r$  завтовшки  $dr$  (рис.2.3), то, з урахуванням симетрії картини ліній струму відносно центра сфер, цей шар можна розглядати як провідник довжиною  $dr$  та площиною перерізу  $S = 4\pi r^2$ . Тоді, відповідно формулі (2.16) опір  $dR$  виділеного сферичного шару дорівнює:

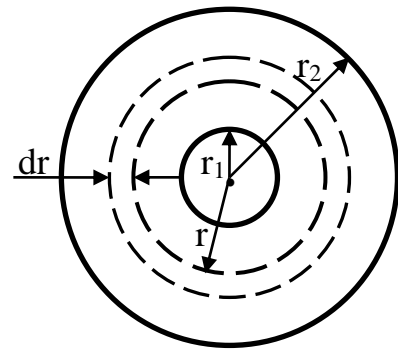


Рис. 2.3

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}. \quad (4)$$

Інтегрування виразу (4) у межах між обкладинками конденсатора дає результат, який збігається з результатом (3) попереднього способу.

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

**Примітка.** Якщо нескінченне середовище з питомим опором  $\rho$  оточує відокремлену провідну сферу радіусу  $r$ , його опір буде дорівнювати

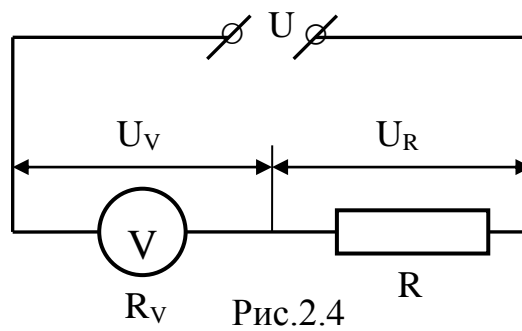
$$R = \frac{\rho}{4\pi r},$$

оскільки у цьому випадку  $r_2 = \infty$ .

**Приклад 2.7.** Вольтметр, який послідовно з'єднали з резистором опором  $R_1=2\text{кОм}$ , при напрузі  $U=100\text{В}$ , показав  $U_1=80\text{В}$  (рис.2.4). При послідовному з'єднанні вольтметра з резистором невідомого опором  $R_2$  при тій самій напрузі його показання дорівнюють  $U_2=60\text{В}$ . Визначити величину опором  $R_2$ .

Розв'язання.

$$\begin{array}{l} U=100\text{В} \\ U_1=80\text{В} \\ R_1=1 \cdot 10^3 \text{ Ом} \\ U_2=60\text{В} \\ \hline R_2=? \end{array}$$



Електричне коло складається з двох послідовно з'єднаних елементів – вольтметра та резистора. При заданому з'єднанні вольтметр вимірює напругу на кінцях ділянки кола, якою є він сам, тобто на самому собі (див.рис.2.4).

При послідовному з'єднанні сила струму є однаковою в усіх елементах кола; напруга на окремих елементах кола співпадає з різницею потенціалів на їх кінцях, є пропорційною опорів ділянок і в сумі дає напругу у всьому колі:  $U = U_V + U_R$ . Тоді, згідно закону Ома для однорідної ділянки кола (2.14) при включеному в коло резисторі  $R_1$  внаслідок рівності струмів крізь вольтметр і резистор можна скласти пропорцію:

$$\frac{U_1}{R_V} = \frac{U - U_1}{R_1}, \quad (1)$$

де  $U_1 = U_V$  – напруга на вольтметрі при включеному в коло опорі  $R_1$ ,  $R_V$  – опір вольтметра;  $U - U_1 = U_{R_1}$  – напруга на резисторі опором  $R_1$ .

Аналогічно при включеному в коло невідомому резисторі  $R_2$

$$\frac{U_2}{R_V} = \frac{U - U_2}{R_2}. \quad (2)$$

Діленням виразу (1) на вираз (2) виключаємо з них невідомий опір вольтметра і знаходимо  $R_2$ .

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U - U_1}{R_1} \cdot \frac{R_2}{U - U_2},$$

Звідки

$$R_2 = \frac{U_1 R_1}{U_2} \cdot \frac{U - U_2}{U - U_1}.$$

Підстановка значень дає:  $R_2 = \frac{80 \cdot 2 \cdot 10^3}{60} \cdot \frac{100 - 60}{100 - 80} = 5,3 \cdot 10^3 \text{ Ом}.$

Відповідь:  $R_2 = 5,3 \text{ кОм}.$

**Примітка 1.** При розглянутому в задачі послідовному включенні вольтметра неможливо безпосередньо виміряти напругу на будь-якому елементі кола, оскільки вольтметр вимірює напругу на собі. Отже

зрозуміло, що для вимірювання напруги на резисторі, вольтметр необхідно підключати до цього резистору паралельно.

**Примітка 2.** Якби розглянута в задачі ділянка кола була б підключена до батареї гальванічних елементів, то напругу на ділянці з вольтметра та резистора вважати постійною неможливо. При підключенні до полюсів батареї, яка має внутрішній опір  $r$ , напруга  $U$  повинна змінюватися при зміні опору  $R$ . Для розв'язування задач подібного типу необхідно використовувати закон Ома для повного кола (2.22), а для напруги  $U$  на розглянутій ділянці справедливим буде співвідношення  $U = U_V + U_R = \mathcal{E} - I r$ , де  $\mathcal{E}$  - електрорушійна сила батареї.

**Приклад 2.8.** Наприкінці зарядки акумулятора при силі струму в колі  $I_1=3\text{A}$  показання вольтметра, підключеного до клем акумулятора, дорівнювали  $U_1 = 4,25\text{V}$ . На початку розрядки того самого акумулятора при силі струму в колі  $I_2=4\text{A}$  показання вольтметра становлять  $U_2 = 3,9\text{V}$ . Визначити ЕРС та внутрішній опір акумулятора.

$I_1=3\text{A}$
$U_1 = 4,25\text{V}$
$I_2=4\text{A}$
$U_2 = 3,9\text{V}$
$\mathcal{E}; r - ?$

Розв'язання.

Можна вважати, що наприкінці зарядки і на початку розрядки ЕРС акумулятора має максимальне номінальне значення, яке необхідно визначити.

Схеми, які відповідають процесам зарядки і розрядки акумулятора зображені на рисунках 2.5 а) і б).

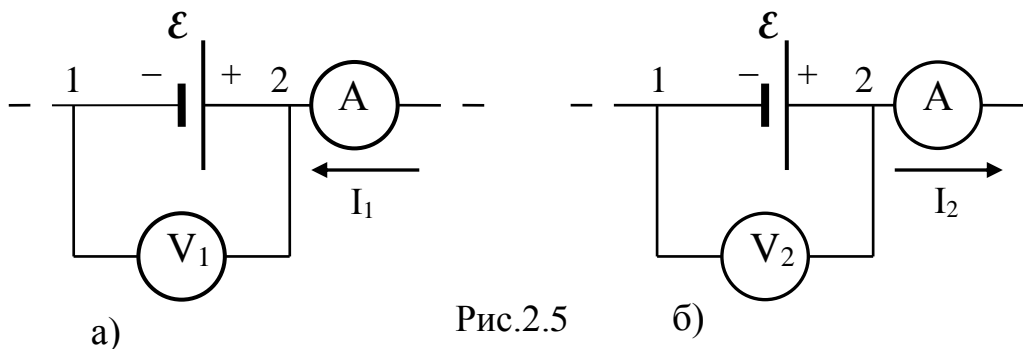


Рис.2.5

На основі закону Ома для неоднорідної ділянки кола 1-2 запишемо рівняння, які для зарядки і розрядки акумулятора відповідно мають вигляд:

$$-I_1 r = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}; \quad (1)$$

$$I_2 r = (\varphi'_1 - \varphi'_2) + \mathcal{E}. \quad (2)$$

Вольтметр, включений в коло, показує напругу, яка дорівнює різниці потенціалів між точками підключення 1 і 2, тобто

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = -U_1; \quad (3)$$

$$(\varphi'_1 - \varphi'_2) = -U_2. \quad (4)$$

Підставляємо вирази (3) і (4) у відповідні рівняння (1) і (2) і розв'язуємо отриману систему відносно шуканих величин  $r$  та  $\mathcal{E}$ .

$$\begin{cases} -I_1 r = -U_1 + \mathcal{E}; \\ I_2 r = -U_2 + \mathcal{E}. \end{cases} \rightarrow r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2}; \quad \mathcal{E} = \frac{U_1 I_2 + U_2 I_1}{I_1 + I_2}. \quad (5)$$

Розрахунок за формулами (5) дає:

$$r = \frac{4,25 - 3,9 \text{ В}}{3 + 4 \text{ А}} = 0,05 \text{ Ом};$$

$$\mathcal{E} = \frac{4,25 \cdot 4 + 3,9 \cdot 3 \text{ В} \cdot \text{А}}{3 + 4} = 4,1 \text{ В}.$$

Відповідь:  $r = 0,05 \text{ Ом}$ ;  $\mathcal{E} = 4,1 \text{ В}$ .

**Приклад 2.9.** Елемент з електрорушійною силою  $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$  при підключенні до зовнішнього опору  $R = 150 \text{ Ом}$  дає струм  $I = 0,75 \text{ А}$ . Визначити максимальний струм  $I_{\max}$  (струм короткого замикання), який може дати цей елемент.

Розв'язання.

$$\begin{array}{l} \mathcal{E} = 12 \text{ В} \\ R = 150 \text{ Ом} \\ I = 0,75 \text{ А} \end{array}$$

$I_{\max} = ?$

Застосуємо закон Ома для повного кола (2.22):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (1)$$

де  $\mathcal{E}$  – електрорушійна сила елемента;  $R$  – зовнішній опір;  $r$  – внутрішній опір елемента.

З формули (1) знаходимо внутрішній опір  $r$ :

$$I(R + r) = \mathcal{E}.$$

Звідки

$$r = \frac{\mathcal{E} - IR}{I}. \quad (2)$$

Максимальним струм у колі буде тоді, коли  $R = 0$ . Тому за формулою (1)

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r}. \quad (3)$$

Підставляємо (2) в рівняння (3):  $I_{\max} = \frac{\mathcal{E} I}{\mathcal{E} - IR}$ .

Перевіряємо розмірність:  $[I_{\max}] = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{В} - \text{В} \cdot \text{Ом}} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{В}} = \text{А}$

Після розрахунків отримуємо  $I_{\max} = \frac{12 \cdot 0,75}{12 - 0,75 \cdot 15} = 12 \text{ А}$ .

Відповідь:  $I_{\max} = 12 \text{ А}$ .

**Приклад 2.10.** У схемі, яка зображена на рис.2.6,  $\mathcal{E} = 50 \text{ В}$ ;  $R_2 = 3,6 \text{ кОм}$ ;  $R_3 = 6 \text{ кОм}$ . Амперметр показує струм  $I_3 = 6 \text{ мА}$ . Опором амперметра і внутрішніми опорами елементів знехтувати. Знайти опір  $R_1$ .

Дано  
 $\mathcal{E}=50 \text{ В}$   
 $R_2=3,6 \text{ кОм}$   
 $R_3=6 \text{ кОм}$   
 $I_3=6 \text{ мА}$   


---

 $R_1=?$

Розв'язання

За законом Ома для повного кола  $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$  (1). За умовою задачі внутрішній опір джерела струму  $r=0$ .

Зовнішній опір кола  $R$ , оскільки опори  $R_2$  та  $R_3$  з'єднані між собою паралельно і послідовно з опором  $R_1$ , дорівнює  $R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$  (2). Тоді

$$R_1 = R - \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad (3).$$

Знаходимо  $R$  з формули (1):  $R = \frac{\mathcal{E}}{I}$  і

підставляємо в формулу (3):

$$R_1 = \frac{\mathcal{E}}{I} - \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad (4)$$

Величину струму  $I$ , який тече через опір  $R_1$  записуємо із використанням співвідношень для струмів  $I_2$  та  $I_3$ , які протікають через опори  $R_2$  та  $R_3$ :  $I = I_2 + I_3$ .

Значення струму  $I_2$  знаходимо за умовою рівності напруги на паралельно з'єднаних опорах:  $U_2 = U_3$ . За законом Ома для ділянки кола

$$U_2 = I_2 R_2; \quad U_3 = I_3 R_3. \quad \text{Звідки витікає } I_2 = \frac{I_3 R_3}{R_2} \quad \text{та} \quad I = I_3 \left( \frac{R_3}{R_2} + 1 \right) \quad (5).$$

Обчислюємо величину струму  $I = 6 \cdot 10^{-3} \left( \frac{6 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 10^3} + 1 \right) = 16 \cdot 10^{-3} \text{ (А)}$  та за

$$\text{формулою (4) визначаємо } R_1: \quad R_1 = \frac{50}{16 \cdot 10^{-3}} - \frac{3,6 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3}{3,6 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3} = 875 \text{ (Ом)}.$$

Відповідь:  $R_1=875 \text{ Ом}$ .

**Приклад 2.11.** У схемі, яку зображено на рис.2.7,  $\mathcal{E}_1 = 2\text{В}$ ;  $\mathcal{E}_2 = 2,5\text{В}$ ;  $R_1=1\text{кОм}$ ;  $R_2 = 1,5\text{кОм}$ ;  $R_3 = 2\text{кОм}$ . Знайти струм  $I_3$ , який протікає через опір  $R_3$ ? Внутрішній опір елементів не враховувати.

$\mathcal{E}_1 = 2\text{В}$   
 $\mathcal{E}_2 = 2,5\text{В}$   
 $R_1=1\text{кОм}$   
 $R_2 = 1,5\text{кОм}$   
 $R_3 = 2\text{кОм}$   


---

 $I_3 - ?$

Розв'язання

Будемо вважати, що струми мають напрямки, які указані на рисунку (рис.2.7).

Запишемо перший закон Кірхгофа для вузла А і другий закон Кірхгофа для лівого і правого контурів

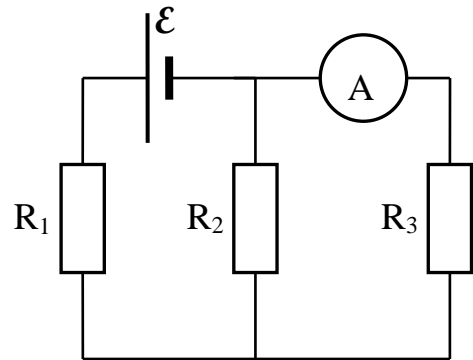


Рис.2.6

схеми, обравши напрям обходу контуру – за годинниковою стрілкою:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = \mathcal{E}_1 \\ -R_2 I_2 - R_3 I_3 = \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

Маємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Розв'язуємо систему відносно  $I_3$ :

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

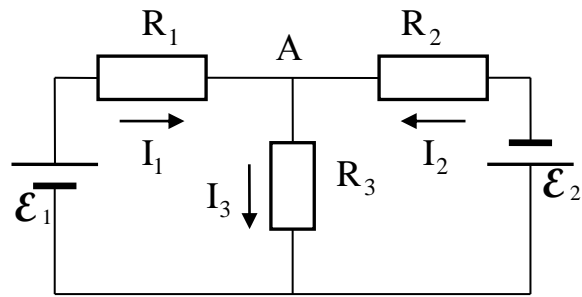


Рис.2.7

де 
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & -R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = 6,5 \cdot 10^6 (\hat{\text{I}} \hat{\text{i}}^2);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ R_1 & 0 & \mathcal{E}_1 \\ 0 & -R_2 & \mathcal{E}_2 \end{vmatrix} = 0,5 \cdot 10^3 (\text{В} \cdot \text{Ом}).$$

Перевіряємо розмірність:  $[I_3] = \frac{\hat{\text{A}} \cdot \hat{\text{I}} \hat{\text{i}}}{\hat{\text{I}} \hat{\text{i}}^2} = \text{А}.$

$$I_3 = \frac{0,5 \cdot 10^3}{6,5 \cdot 10^6} = 7,7 \cdot 10^{-5} \text{ А} = 77 \text{ мкА}$$

Відповідь:  $I_3 = 77 \text{ мкА}.$

**Приклад 2.12.** Електрорушійна сила елемента  $\mathcal{E} = 40 \text{ В}$ . Максимальна сила струму, яку може дати елемент  $I_{\text{max}} = 0,6 \text{ А}$ . Знайти максимальну потужність  $P_{\text{max}}$ , яку може віддати у зовнішню ділянку кола цей елемент.

$\mathcal{E} = 40 \text{ В}$ $I_{\text{max}} = 0,6 \text{ А}$ $P_{\text{max}} = ?$	<p style="text-align: center;">Розв'язання.</p> <p>Потужність <math>P</math> струму вимірюється роботою, яку виконують електричні сили у одиницю часу. Згідно з формулою (2.32):</p> $P = I^2 R. \tag{1}$
--	---

Оскільки за законом Ома  $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$ , то  $P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}.$  (2)

Знайдемо умову, за якою функція  $P(R)$  має максимум. Для цього треба дослідити вираз (2) на екстремум. Записавши першу похідну і дорівнюючи її нулю, дістанемо висновок, що потужність буде максимальною, коли  $R = r$ :



$$P'_R = \left( \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} \right)' = \frac{\mathcal{E}^2 ((R+r) - 2R)}{(R+r)^3} = 0.$$

Звідки  $(R+r) - 2R = 0$  і  $r=R$ .

Тоді 
$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2 r}{(r+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}. \quad (3)$$

Оскільки  $I_{\max} = \mathcal{E}/r$ , то рівняння (3) можна записати:  $P_{\max} = \frac{\mathcal{E} I_{\max}}{4}$ .

Перевіримо одиницю вимірювання:  $[P_{\max}] = \text{В} \cdot \text{А} = \frac{\text{В} \cdot \text{Кл}}{\text{с}} = \text{Вт}$ .

Підставимо числові дані:  $P_{\max} = \frac{40 \cdot 0,6}{4} = 6 \text{ (Вт)}$ .

**Приклад 2.13.** Елемент з електрорушійною силою  $\mathcal{E} = 2 \text{ В}$  і внутрішнім опором  $r = 0,4 \text{ Ом}$  створює на зовнішній ділянці кола струм  $I=2 \text{ А}$ . З яким коефіцієнтом корисної дії  $\eta$  працює елемент?

Розв'язання

<p>Дано  <math>\mathcal{E}=2 \text{ В}</math>  <math>r=0,4 \text{ Ом}</math>  <math>I=2 \text{ А}</math>  <hr style="width: 100%;"/> <math>\eta=?</math></p>	<p>Коефіцієнт корисної дії елемента визначається відношенням його корисної потужності, що виділяється у зовнішній частині кола <math>P_{\text{кор}}=I \cdot U_R</math>, до витраченої потужності <math>P_{\text{випр.}}</math>, яка визначається роботою джерела струму за одиницю часу і дорівнює <math>P_{\text{випр.}}=I \mathcal{E}</math>.</p>
--	---

$$\eta = \frac{D_{\text{еі}}}{D_{\text{вв}}} = \frac{IU_R}{I\mathcal{E}} = \frac{U_R}{\mathcal{E}}. \quad (1)$$

Напругу  $U_R$  на зовнішній ділянці кола виражаємо з використанням закону

Ома для повного кола  $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ :  $U_R = IR = \mathcal{E} - Ir$ . Тоді  $\eta = \frac{\mathcal{E} - Ir}{\mathcal{E}}$ .

$$\eta = \frac{2 - 2 \cdot 0,4}{2} = 0,6 = 60\%.$$

Відповідь:  $\eta = 60\%$

**Приклад 2.14.** Елемент замикають двічі: спочатку дротом з опором  $R_1=5 \text{ Ом}$ , потім – з опором  $R_2=9 \text{ Ом}$ . В обох випадках кількість тепла, яка виділяється в обох дротах за однаковий час є однаковою. Визначити внутрішній опір  $r$  елемента.

Розв'язання

<p><math>R_1=5 \text{ Ом}</math>  <math>R_2=9 \text{ Ом}</math>  <math>Q_1=Q_2</math>  <hr style="width: 100%;"/> <math>r=?</math></p>	<p>Згідно умові задачі <math>Q_1=Q_2</math>. Виражаємо кількість виділеної теплоти за допомогою закону Джоуля-Ленца (2.31): <math>I_1^2 R_1 t = I_2^2 R_2 t</math>. Звідки</p> $I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2. \quad (1)$
--	---

З іншого боку, на основі закону Ома для повного кола

$$\mathcal{E} = I_1(R_1 + r); \quad \mathcal{E} = I_2(R_2 + r).$$

Тоді  $I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r)$  (2)

З виразів (1) та (2) дістаємо відношення струмів.

З виразу (1) витікає  $\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}},$

а з виразу (2)  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}.$

Звідки  $\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}.$

Розв'язання останнього рівняння відносно  $r$  дає:

$$r = \frac{R_2 - R_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - 1} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Після підстановки чисельних значень отримуємо:

$$r = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \text{ Ом}.$$

Відповідь:  $r = 6 \text{ Ом}.$

**Приклад 2.15.** Визначити роботу електричних сил та кількість теплоти, що виділяється щосекунди, у таких випадках: 1) у резисторі при струмі через нього  $I=2\text{А}$  і різниці потенціалів на кінцях резистора  $\varphi_a - \varphi_b = 16\text{В}$ ;

2) в акумуляторі з електрорушійною силою  $\mathcal{E}_1=12\text{В}$ , який заряджують струмом  $I=2\text{А}$  при різниці потенціалів на його затискачах  $\varphi_a - \varphi_b = 16\text{В}$ ;

3) в батареї акумуляторів з ЕРС  $\mathcal{E}_2=24\text{В}$ , яка дає струм  $I=2\text{А}$  на зовнішній опір; різниця потенціалів на затискачах батареї  $\varphi_a - \varphi_b = 16\text{В}.$

### Випадок 1.

#### Розв'язання

$I=2\text{А}$ $\varphi_a - \varphi_b = 16\text{В}$ $t=1\text{с}$	
$A; Q - ?$	

Розглянута ділянка не містить ЕРС, для неї справедливий закон Ома (2.14) для однорідної ділянки кола  $\varphi_a - \varphi_b = IR$ . У цьому випадку робота сил електричного поля (2.30) і кількість теплоти (2.31), що виділяється при проходженні струму, співпадають. Вся робота сил електричного поля йде

на нагрівання резистора:

$$A = Q = (\varphi_a - \varphi_b) It. \quad (1)$$

$$[A] = \hat{A} \cdot \hat{\Delta} \cdot \hat{t} = \hat{A} \hat{t}; \quad A = 16 \cdot 2 \cdot 1 = 32 \text{ Дж}.$$

### Випадок 2.

### Розв'язання

$$\begin{aligned} I &= 2\text{A} \\ \varphi_a - \varphi_b &= 16\text{В} \\ t &= 1\text{с} \\ \mathcal{E}_1 &= 12\text{В} \end{aligned}$$

---


$$A; Q - ?$$

При зарядженні акумулятора його приєднують до джерела з постійною різницею потенціалів на полюсах так, що струм усередині акумулятора йде від «+» до «-», тобто у напрямі, протилежному струму розрядки (рис.2.8).

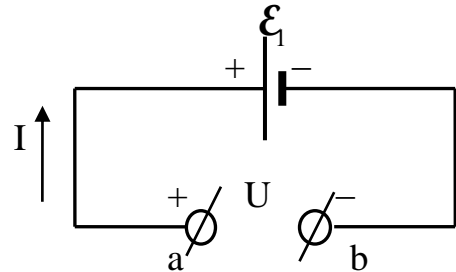


Рис.2.8

Робота сил електричного поля, як і в попередньому випадку, визначається за формулою (2.30):

$$A = (\varphi_a - \varphi_b)It = 16 \cdot 2 \cdot 1 = 32 \text{ Дж.}$$

Для визначення кількості виділеної теплоти за законом Джоуля-Ленца  $Q = I^2Rt$  (2) необхідно знайти опір  $R$  ділянки кола  $a\mathcal{E}b$ . Оскільки ділянка містить ЕРС, скористаємося законом Ома для неоднорідної ділянки кола (2.19). З урахуванням напрямку струму та ЕРС у відповідності з правилами вибору знаків записуємо:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_1}{R}.$$

Звідки  $R = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_1}{I}$  (3). Підстановка виразу (3) у формулу (2) дає

$$Q = I^2Rt = (\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_1)It = (16 - 12)2 \cdot 1 = 8 \text{ Дж.}$$

Отже, при зарядженні акумулятора тільки частина роботи електричних сил йде на нагрів акумулятора. Інша частина, яка дорівнює  $A - Q = 24$  Дж, перетворюється в хімічну енергію акумулятора.

### Випадок 3.

### Розв'язання

$$\begin{aligned} I &= 2\text{A} \\ \varphi_a - \varphi_b &= 16\text{В} \\ t &= 1\text{с} \\ \mathcal{E}_2 &= 24\text{В} \end{aligned}$$

---


$$A; Q - ?$$

**1 спосіб.** Електрична схема, яка відповідає розрядженню конденсатора, зображена на рис.2.9.

Робота електричних сил усередині батареї в цьому випадку також визначається за формулою (2.30), але порівняно з

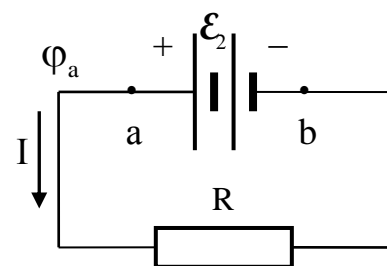


Рис.2.9

попереднім, на протилежний змінюється напрям струму на ділянці  $a\mathcal{E}b$ . Тому

$$A = (\varphi_a - \varphi_b)(-I)t = -16 \cdot 2 \cdot 1 = -32 \text{ Дж.}$$

Знак «-» відображує той факт, що всередині акумулятора позитивні заряди рухаються від «-» до «+», тобто проти сил електричного поля. При цьому

додатну роботу виконують сторонні сили, а робота електричних сил є від'ємною.

Кількість теплоти, що виділяється в батареї, знову знаходимо за законом Джоуля - Ленца (2.31), обчисливши внутрішній опір батареї  $r$  за законом Ома для неоднорідної ділянки кола (2.19). З урахуванням знаків струму та ЕРС маємо:

$$-I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E}_2}{r}. \quad \text{Звідки} \quad r = \frac{\mathcal{E}_2 - (\varphi_a - \varphi_b)}{I}.$$

Підстановка виразу  $r$  у формулу (2.31) дає:

$$Q = I^2 r t = (\mathcal{E}_2 - (\varphi_a - \varphi_b)) I t = (24 - 16) \cdot 2 \cdot 1 = 16 \text{ Дж.}$$

**2 спосіб.** Робота електричних сил на зовнішній ділянці кола  $aRb$  (див. формулу (1), випадок 1) дорівнює

$$A_{\text{вн}} = Q_{\text{вн}} = (\varphi_a - \varphi_b) I t = 16 \cdot 2 \cdot 1 = 32 \text{ Дж.}$$

Сумарна робота електричних (консервативних) сил по переміщенню зарядів вздовж замкненого кола завжди дорівнює нулю. Тоді робота електричних сил усередині батареї

$$\dot{A} = A_{\text{вн}} = -A_{\text{вн}} = -32 \text{ Дж.}$$

Енергія, яка витрачається батареєю, визначається роботою сторонніх сил і дорівнює

$$A_{\text{вн}} = I \mathcal{E} t = 2 \cdot 24 \cdot 1 = 48 \text{ Дж.}$$

Ця енергія перетворюється в тепло, яке виділяється у зовнішній ділянці кола (опір  $R$ ) та усередині джерела. Оскільки  $Q_{\text{вн}} = 32 \text{ Дж}$ , то кількість теплоти, що виділяється усередині батареї, дорівнює

$$Q = A_{\text{вн}} - Q_{\text{вн}} = 48 - 32 = 16 \text{ Дж.}$$

Відповідь: 1.  $A = Q = 32 \text{ Дж}$ . 2.  $A = 32 \text{ Дж}$ ;  $Q = 8 \text{ Дж}$ . 3.  $\dot{A} = -32 \text{ Дж}$ ;  $Q = 16 \text{ Дж}$ .

### Задачі для самостійного розв'язування

2.1. Визначити середню швидкість направлено руху електронів вздовж мідного провідника при густині постійного струму  $11 \text{ А/мм}^2$ , якщо вважати, що на кожний атом міді в металі припадає два вільних електрона.

2.2. Сила постійного струму, який протікає по провіднику,  $I = 40 \text{ мА}$ . Яка кількість електронів  $N$  проходить крізь переріз провідника за час  $\Delta t = 5 \text{ с}$ ?

2.3. За який час  $\Delta t$  крізь переріз провідника, по якому протікає постійний струм  $I = 10 \text{ мкА}$ , пройде  $N = 7,5 \cdot 10^{17}$  електронів?

2.4. Визначити густину струму  $j$  у алюмінієвому дроті довжиною  $l = 2 \text{ м}$ , на кінцях якого підтримується постійна різниця потенціалів  $U = 10 \text{ В}$ .

2.5. На кінцях мідного дроту довжиною  $5 \text{ м}$  підтримується напруга  $1 \text{ В}$ . Визначити густину струму у дроті.

2.6. Який струм  $I$  протікає по спіралі лампочки розжарювання при густині струму  $j = 45 \text{ А/мм}^2$ ? Діаметр спіралі  $d = 20 \text{ мкм}$ .

2.7. Величина струму в мідному провіднику  $I = 10 \text{ А}$ . Поперечний переріз провідника  $S = 1 \text{ мм}^2$ . Визначити швидкість упорядкованого руху електронів у провіднику.

- 2.8. Крізь срібний дріт перерізом в  $1 \text{ мм}^2$  проходить струм силою в  $1 \text{ А}$ . Вичислити швидкість вільних електронів (швидкість хаотичного руху та швидкість направленого руху). Температура срібла  $t=20^\circ\text{C}$ , густина  $\rho=10,5\text{г/см}^3$ . Атомна вага 108.
- 2.9. В досліді Толмена і Стюарта отримані наступні данні: лінійна швидкість руху дроту, з якого складається котушка,  $v = 5 \cdot 10^3 \text{ см/с}$ ; довжина дроту  $l=4 \cdot 10^4 \text{ см}$ ; загальний опір котушки, з'єднувальних проводів та гальванометра  $R=40\text{Ом}$ ; величина сумарного заряду, що проходить крізь гальванометр,  $q=3 \cdot 10^{-9} \text{ кулона}$ . Знайти питомий заряд електрона. (Питомий заряд – відношення заряду частинки до її маси).
- 2.10. Сила струму у провіднику змінюється за законом  $I=2+3t$ , де час  $t$  вимірюється у секундах, струм  $I$  в амперах. Який заряд пройде крізь переріз провідника за час від  $t_1=0$  до  $t_2=2\text{с}$ ?
- 2.11. Опір ділянки кола  $R$ , на кінцях якої підтримується постійна різниця потенціалів  $\phi_1 - \phi_2$ , з часом рівномірно зростає. За  $t=10\text{с}$  сила струму у провіднику зменшилась від  $I_0=4\text{А}$  до  $I=2\text{А}$ . Який заряд  $q$  пройшов за цей час крізь переріз провідника?
- 2.12. Обмотка реостата зроблена з мідного дроту діаметром  $d=0,5 \text{ мм}$ , який щільно намотано на циліндр радіусом  $r = 2\text{см}$ . Скільки треба зробити витків  $N$ , щоб отримати опір реостата  $R=50\text{Ом}$ ?
- 2.13. Визначити опір  $R$  мідного дроту діаметром  $d=1\text{мм}$  і масою  $m=0,5\text{кг}$ .
- 2.10. Визначити падіння потенціалу  $\phi_1 - \phi_2$  на залізному дроті довжиною  $l=200 \text{ м}$ , якщо по ньому тече струм  $I = 2\text{А}$ . Діаметр дроту  $d=0,5\text{мм}$ .
- 2.14. Який діаметр повинен мати графітовий стержень, щоб падіння потенціалу на ньому при силі струму  $I=5\text{А}$  становило  $\phi_1 - \phi_2=25\text{мВ}$ ? Довжина стержня  $l=1\text{м}$ .
- 2.15. Як треба з'єднати опори  $R_1=4 \text{ Ом}$ ;  $R_2=6 \text{ Ом}$  і  $R_3=12\text{Ом}$ , щоб отримати систему з загальним опором  $R=8 \text{ Ом}$ ? Накреслити схему з'єднання.
- 2.16. До амперметра, опір якого  $R_A=0,12\text{Ом}$ , підключений паралельно опір  $R=0,03\text{Ом}$  (шунт). Амперметр показує  $I_A=2\text{А}$ . Чому дорівнює струм  $I$  у магістралі?
- 2.17. Амперметр опором  $R=0,12\text{Ом}$  має шкалу з  $N=20$  поділками і розрахований на вимірювання максимального струму  $I_{\text{max}1}=20\text{А}$ . Який опір (шунт) слід взяти і як його треба підключити до амперметра, щоб можна було вимірювати струм  $I_{\text{max}2}=50\text{А}$ ? У скільки разів при цьому збільшиться ціна поділки?
- 2.18. Батарея замкнена на опір  $R_1=9\text{Ом}$  дає силу струму  $I_1=2\text{А}$ . Якщо цю батарею підключити до опору  $R_2=19 \text{ Ом}$ , сила струму буде  $I_2=1\text{А}$ . Знайти електрорушійну силу батареї  $\mathcal{E}$  та її внутрішній опір  $r$ .

2.19. У схемі, яка зображена на рис.2.4,  $\mathcal{E}=2\text{В}$ ;  $R_1=100\text{Ом}$ ;  $R_2$  може змінюватися від 0 до  $100\text{Ом}$ . Побудувати графік залежності струму  $I$  від  $R_2$ . Внутрішнім опором елемента  $r$  знехтувати.

2.20. Якщо батарею гальванічних елементів підключити до опору  $R_1=2,5\text{Ом}$ , вона дає струм  $I_1=1,67\text{А}$ . Якщо до батареї підключити опір  $R_2=1,5\text{Ом}$ , вона дає струм  $I_2=2,5\text{А}$ . Який найбільший струм  $I_{\text{max}}$  може дати ця батарея?

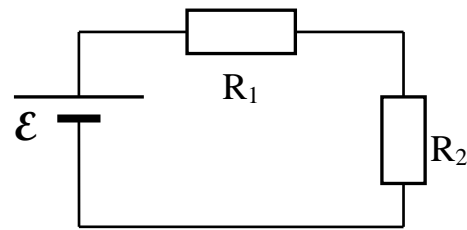


Рис. 2.4

2.21. Електрорушійна сила елемента  $\mathcal{E}=5\text{В}$ . Якщо до елемента підключити зовнішній опір  $R=10\text{Ом}$ , струм у колі дорівнюватиме  $I=0,45\text{А}$ . Визначити струм короткого замикання  $I_{\text{max}}$ .

2.22. До генератора з електрорушійною силою  $\mathcal{E}=50\text{В}$  і внутрішнім опором  $r=1\text{Ом}$  підключений споживач з опором  $R=20\text{Ом}$ . Визначити: 1) силу струму  $I$ , який протікає у колі; 2) заряд  $q$ , який проходить по колу протягом часу  $t=1$  год.

2.23. До полюсів акумулятору з електрорушійною силою  $\mathcal{E}=5\text{В}$  підключили ніхромовий дріт довжиною  $l=5$  м. Визначити густину струму  $j$  у провіднику. Внутрішній опір акумулятора не враховувати.

2.24. Елемент з електрорушійною силою  $\mathcal{E}=4\text{В}$  замкнений на зовнішній опір  $R=2\text{Ом}$ . Сила струму у колі  $I=1,6\text{А}$ . Знайти внутрішній опір елемента  $r$  і падіння потенціалу всередині елемента.

2.25. Елемент з електрорушійною силою  $\mathcal{E}=2\text{В}$  і внутрішнім опором  $r=0,4\text{Ом}$  замкнуто на зовнішній опір  $R=10\text{Ом}$ . Знайти: 1) силу струму  $I$  у колі; 2) падіння потенціалу на зовнішній ділянці кола; 3) падіння потенціалу усередині елемента; 4) коефіцієнт корисної дії  $\eta$  елемента.

2.26. Чотири однакових джерела з внутрішнім опором  $r=0,2\text{Ом}$  кожний з'єднані послідовно та підключені до двох паралельно з'єднаних опорів  $R_1=30\text{Ом}$  та  $R_2=70\text{Ом}$ . Визначити ЕРС джерел, якщо сила струму в першому з резисторів становить  $I_1=1\text{А}$ .

2.27. Визначити температурний коефіцієнт  $\alpha$  опору дроту, з якого виготовлено реостат, якщо при температурі  $t_1=0^\circ\text{C}$  його опір дорівнює  $R_1=100\text{Ом}$ , а при температурі  $t_2=80^\circ\text{C}$  опір  $R_2=132\text{Ом}$ .

2.28. Обмотка реостата зроблена із залізного дроту і при температурі  $t=20^\circ\text{C}$  має опір  $R_1=20\text{Ом}$ . Після пропускання через обмотку струму опір підвищився до  $R_2=25\text{Ом}$ . На скільки підвищилася температура обмотки реостата? Температурний коефіцієнт опору заліза  $\alpha=6 \cdot 10^{-3}\text{К}^{-1}$ .

2.29. Знайти температуру вольфрамової нитки лампочки, якщо при вмиканні її в мережу (при температурі  $20^\circ\text{C}$ ) струм у ній дорівнював  $I_1=6,1\text{А}$ , а установлений струм  $I_2=0,68\text{А}$ . Температурний коефіцієнт опору вольфраму  $\alpha=4,6 \cdot 10^{-3}\text{К}^{-1}$ .

2.30. У схемі, яку зображено на рис. 2.5,  $\mathcal{E}=50$  В;  $R_1=100$  Ом;  $R_2=200$  Ом;  $R_3=300$  Ом. Знайти струми  $I_1$ ;  $I_2$ ;  $I_3$ , які протікають через відповідні опори. Внутрішнім опором елемента знехтувати.

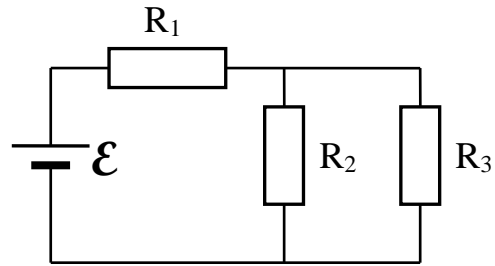


Рис. 2.5

2.31. У схемі, яка зображена на рис.2.6,  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 2$  В;  $R=20$  Ом; внутрішні опори елементів дорівнюють:  $r_1=0,5$  Ом і  $r_2=1$  Ом. Знайти показання амперметра. Опором амперметра знехтувати.

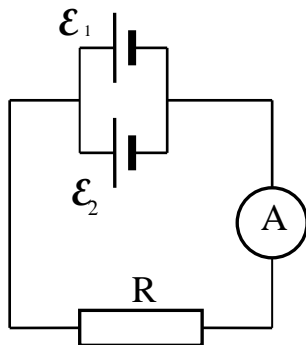


Рис. 2.6

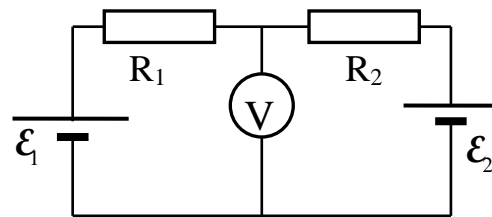


Рис. 2.7

2.32. На рис.2.7 наведено схему, у якій  $\mathcal{E}_1=2$ В;  $\mathcal{E}_2=2,5$ В;  $R_1=1$ кОм;  $R_2=1,5$ кОм; опір вольтметра  $R_V=2$ кОм. Внутрішнім опором елементів знехтувати. Визначити показання вольтметра.

2.33. У схемі, яка зображена на рис.2.8,  $\mathcal{E}=50$ В;  $R_2=3,6$ кОм;  $R_3=6$ кОм. Амперметр показує струм  $I_3=6$ мА. Опором амперметра і внутрішніми опором елементів знехтувати. Знайти опір  $R_1$ .

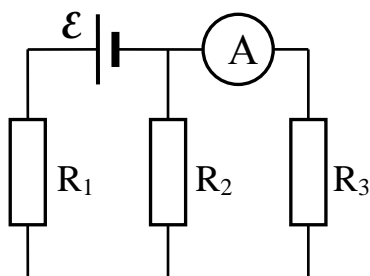


Рис. 2.8

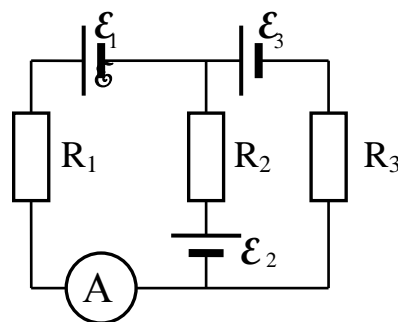


Рис. 2.9

2.34. На рис.2.9. наведено електричну схему, у якій  $\mathcal{E}_1=3$  В;  $\mathcal{E}_2=1,5$  В;  $\mathcal{E}_3=2$  В;  $R_1=100$  Ом;  $R_3=200$  Ом; амперметр показує  $I_1=8$ мА. Знайти струми  $I_2$  і  $I_3$ , які протікають через опори  $R_2$  і  $R_3$ . Внутрішніми опором елементів і опором амперметра знехтувати.

2.35. У схемі, наведеній на рис.2.10.,  $\mathcal{E}_1=1,5\text{В}$ ;  $\mathcal{E}_2=1\text{В}$ ;  $R_1=50\text{ Ом}$ ;  $R_2=100\text{ Ом}$ ;  $R_3=80\text{ Ом}$ . Знайти струми  $I_1$ ;  $I_2$ ;  $I_3$ , які протікають через відповідні опори. Внутрішнім опором елементів знехтувати.

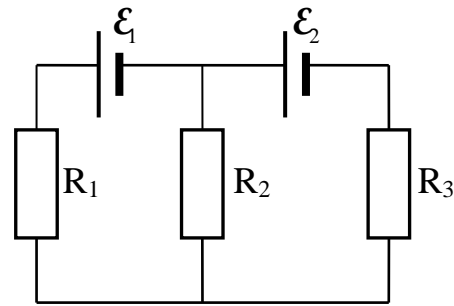


Рис. 2.10

2.36. Електричну лампочку потужністю  $P=60\text{ Вт}$ , розраховану на напругу  $U_1=120\text{В}$ , треба ввімкнути у мережу з напругою  $U_2=220\text{В}$ . Якої довжини  $l$  треба взяти

ніхромовий дріт діаметром  $d=0,35\text{мм}$  для того, щоб його послідовне з'єднання з лампочкою дозволило підключити її до напруги  $220\text{В}$ ?

2.37. Електрична плитка живиться від мережі з напругою  $U=220\text{В}$ . Якої довжини  $l$  треба взяти ніхромовий дріт діаметром  $d=0,3\text{ мм}$  для того, щоб зробити спіраль для плитки потужністю  $P=0,8\text{ кВт}$  ?

2.38. Густина струму у залізному дроті  $j=6 \cdot 10^5\text{ А/м}^2$ . Знайти кількість теплоти  $Q$ , яка виділяється за  $t=1\text{с}$  в одиниці об'єму дроту. Вважати, що енергія електричного струму повністю перетворюється на теплову.

2.39. Знайти кількість тепла, яка виділяється кожної секунди в одиниці об'єму мідного дроту при густині струму  $j=30\text{ А/см}^2$ .

2.40. У мідному провіднику довжиною  $2\text{м}$  та площиною поперечного перерізу  $S=0,4\text{ мм}^2$  тече струм. При цьому кожної секунди виділяється  $Q=0,35\text{ Дж}$  теплоти. Скільки електронів проходить за  $1\text{с}$  крізь поперечний переріз цього провідника?

2.41. Електричний кип'ятильник містить  $V=2\text{ л}$  води і живиться від мережі з напругою  $U=220\text{В}$ . Опір спіралі кип'ятильника  $R=30\text{ Ом}$ . Через який час  $\tau$  вода закипить, якщо початкова температура води  $t=20^\circ\text{C}$ ?

2.42. Для нагрівання  $V=2\text{л}$  води від температури  $t=30^\circ\text{C}$  до температури кипіння, електричний кип'ятильник витратив енергію  $W=0,3\text{кВт}\cdot\text{годин}$  електричної енергії. З яким коефіцієнтом корисної дії  $\eta$  працює кип'ятильник ?

2.43. Електричний чайник ввімкнутий до мережі з напругою  $U=220\text{В}$ . Яка сила струму  $I$  проходить крізь спіраль, якщо  $V=2\text{л}$  води закипають за  $\tau=20\text{хвилин}$ ? Початкова температура води  $t=20^\circ\text{C}$ .

2.44. Електричний кип'ятильник має дві спіралі. Якщо ввімкнути одну з них, вода закипить через  $t_1=10\text{ хвилин}$ , Якщо ввімкнути тільки другу, вода закипить через  $t_2=20\text{ хвилин}$ . Через який час  $t$  закипить вода, якщо увімкнути обидві спіралі одночасно: 1) послідовно; 2) паралельно ?

2.45. Елемент з електрорушійною силою  $\mathcal{E}=2\text{В}$  і внутрішнім опором  $r=0,4\text{ Ом}$  створює на зовнішній ділянці кола струм  $I=2\text{А}$ . З яким коефіцієнтом корисної дії  $\eta$  працює елемент?



- 2.46. Елемент з електрорушійною силою  $\mathcal{E}=4 \text{ В}$  може дати найбільшу силу струму  $I_{\text{max}}=10 \text{ А}$ . Яку найбільшу потужність  $P_{\text{max}}$  може віддати елемент у зовнішню ділянку кола ?
- 2.47. Знайти максимальну потужність  $P_{\text{max}}$ , яку елемент з електрорушійною силою  $\mathcal{E}=10 \text{ В}$  і внутрішнім опором  $r=0,5 \text{ Ом}$ , може віддати у зовнішню ділянку кола.
- 2.48. Генератор з електрорушійною силою  $\mathcal{E}=2,23 \text{ В}$  і потужністю  $P=5 \text{ кВт}$  передає електроенергію споживачу по дротяних провідниках з опором  $R=200 \text{ Ом}$ . Визначити коефіцієнт корисної дії  $\eta$  лінії передачі (тобто відношення потужності, яка виділяється на споживачі, до потужності генератора). Внутрішнім опором генератора знехтувати.
- 2.49. Десять паралельно з'єднаних ламп, кожна з яких розрахована на напругу  $U_1=120 \text{ В}$  та має опір  $R=0,5 \text{ кОм}$ , з'єднані послідовно з реостатом і живляться від електричної мережі напругою  $U=220 \text{ В}$ . Визначити потужність електричного струму в реостаті та ККД цієї мережі.
- 2.50. На якій відстані від генератора з напругою  $U=750 \text{ В}$  слід розмістити споживача, розрахованого на  $5 \text{ кВт}$ , щоб утрати потужності в мідному дроті перерізом  $S=1 \text{ мм}^2$  не перевищували  $10\%$  потужності споживача?

### Тести

#### Вибрати вірну відповідь:

1. У загальному випадку означення поняття „сила струму” надає формула:

$$1. I = \frac{U}{R}; \quad 2. I = \frac{q}{t}; \quad 3. I = \frac{dq}{dt}; \quad 4. I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

2. Векторною характеристикою струму є:

1. сила струму;                      2. потужність струму;  
3. густина струму;                  4. робота струму на ділянці кола.

3. Залежність електричного опору провідника від його параметрів та матеріалу надає формула:

$$1. R = R_0 e^{\frac{\Delta W}{2kT}}; \quad 2. R = R_0(1 + \alpha t); \quad 3. R = \frac{l}{G}; \quad 4. R = \rho \frac{l}{S}.$$

4. Серед перелічених величин: А) довжина; Б) сила струму; В) матеріал; Г) температура; Д) прикладена напруга; Е) площа перерізу виберіть ті, від яких залежить опір провідника:

1. А), Б), Г), Е);                      2. А), В), Г), Д);  
3. А), В), Г), Е);                      4. А), Б), Г), Д).

5. Залежно від температури а) опір провідника; б) опір напівпровідника

1. прямо пропорційно зростає;      2. зменшується за експоненціальним законом.  
3. обернено пропорційно зменшується;    4. зростає за експоненціальним законом;

6. Зв'язок між питомим опором провідника та його питомою провідністю надає формула:

$$1. \rho = \rho_0(1 + \alpha t); \quad 2. \rho = \rho_0 \alpha T; \quad 3. \rho = R \frac{S}{l}; \quad 4. \rho = \frac{1}{\gamma}.$$

7. Установити відповідність між фізичною величиною та одиницями її вимірювання:

- |                   |                     |
|-------------------|---------------------|
| 1. Сила струму    | А. В (вольт)        |
| 2. Густина струму | Б. А (ампер)        |
| 3. Опір           | В. А/м <sup>2</sup> |
| 4. Напруга        | Г. Ом               |

8. Установити відповідність між фізичною величиною та одиницями її вимірювання:

- |  |                           |
|--|---------------------------|
| 1. Питомий опір (в одиницях СІ)        | А.. Ом·мм <sup>2</sup> /м |
| 2. Опір                                | Б. См (сіменс)            |
| 3. Провідність                         | В. Ом                     |
| 4. Питомий опір (позасистемна одиниця) | Г. Ом·м                   |

**Вибрати вірну відповідь:**

9. Залежність електричного опору провідника І-го роду (металу) від температури надає формула:

1.  $R = R_0 e^{\frac{\Delta W}{2kT}}$ ;      2.  $R = R_0(1 + \alpha t)$ ;      3.  $R = \frac{1}{G}$ ;      4.  $R = \rho \frac{l}{S}$ .

10. Власна електропровідність напівпровідників зумовлена

1. тільки електронами;      2. тільки «дірками»;  
3. електронами і «дірками» одночасно;      4. іонами.

11. Означення поняття „густина струму” надає формула:

1.  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ;      2.  $\vec{j} = en\vec{v}_{др.}$ ;      3.  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{стоп.})$       4.  $j = \frac{dI}{ds_{\perp}}$ ;  $\vec{j} \uparrow \uparrow \vec{v}_{др.}$

12. При послідовному з'єднанні опорів їх загальна провідність:

1. не змінюється;      2. зменшується;      3. збільшується.

13. При послідовному з'єднанні опорів їх загальний опір:

1. дорівнює сумі опорів окремих провідників;  
2. менше найменшого з опорів окремих провідників;  
3. не змінюється.

14. При паралельному з'єднанні декількох окремих опорів загальний опір утвореної ділянки кола:

1. дорівнює сумі опорів окремих провідників;  
2. менше найменшого з опорів окремих провідників;  
3. не змінюється.

15. Які з наведених тверджень є справедливими а) при послідовному з'єднанні провідників; б) паралельному з'єднанні провідників

1.  $R = \sum_i R_i$ ;  $I = \sum_i I_i$ ;      2.  $R = \sum_i R_i$ ;  $U = \sum_i U_i$ ;  
3.  $\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ ;  $I = \sum_i I_i$ ;      4.  $\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ ;  $U = \sum_i U_i$ .

16. З наведених умов А)  $d\phi = \text{Const}$ ; Б)  $\vec{j} = \text{Const}$ ; В)  $\text{EPC} \neq 0$ ; Г)  $I = \text{const}$  умовами підтримки постійного струму у колі є:

1. А) та Б);      2. А) та В);      3. Б) та В);      4. В) та Г).

17. З наведених комбінацій містить величини, що входять до закону Ома у диференціальній формі:

1. I, E, R;      2. U, R, j;      3.  $\gamma$ , E, j;      4.  $\gamma$ , U, j.

18. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола у диференціальній формі надає формула:

1.  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ;      2.  $\vec{j} = en\vec{v}_{др.}$ ;      3.  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{стоп.})$       4.  $j = \frac{dI}{ds_{\perp}}$ .

19. Напруга дорівнює різниці потенціалів на кінцях ділянки у випадку:  
 1. неоднорідної ділянки кола.    2. однорідної ділянки кола.    3. повного кола.
20. Одиницею вимірювання електрорушійної сили джерела струму в СІ є:  
 1. А (ампер);    2. В (вольт);    3. В/м;    4. Вт (ватт).    5. Ом.
21. **Установити відповідність** між формулою та випадком, в якому вона застосовується:
- |   |  |
|---|--|
| 1. Закон Ома для однорідної ділянки кола в інтегральній формі   | А. $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$ .                               |
| 2. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола в інтегральній формі | Б. $I = \frac{U}{R}$   |
| 3. Закон Ома для повного кола                                   | В. $I = \frac{\varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2)}{R_{12}}$ |
22. Електрорушійна сила джерела струму визначається:  
 1. роботою сил електричного поля по переміщенню одиничного позитивного заряду вздовж усього кола;  
 2. роботою сторонніх сил по переміщенню одиничного позитивного заряду вздовж усього кола;  
 3. сумарною роботою сторонніх та електричних сил по переміщенню одиничного позитивного заряду вздовж усього кола;  
 4. серед наведених немає вірної відповіді.
23. Зв'язок між ЕРС джерела струму та напруженістю поля сторонніх сил надає формула:    1.  $\varepsilon = \frac{A_{стор.}}{q}$ ;    2.  $\varepsilon = I(R + r)$ ;    3.  $\varepsilon = \oint \vec{E}_{стор.} d\vec{l}$ ;    4.  $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}$ .
24. Напруга (спад напруги) на ділянці кола визначається:  
 1. роботою сил електричного поля по переміщенню одиниці позитивного заряду вздовж усього кола;  
 2. роботою сторонніх сил по переміщенню одиниці позитивного заряду вздовж усього кола;  
 3. сумарною роботою сторонніх та електричних сил по переміщенню одиниці позитивного заряду вздовж усього кола;  
 4. серед наведених немає вірної відповіді.
25. Неоднорідною називають ділянку кола, на якій діють:  
 1. тільки сторонні сили;  
 2. одночасно сили електричного поля та сторонні сили;  
 3. тільки сили електричного поля;  
 4. серед наведених немає вірної відповіді.
26. Одиницею вимірювання напруги (спаду напруги) в СІ є:  
 1. А (ампер);    2. В (вольт);    3. В/м;    4. Вт (ватт).    5. Ом.
27. Напруга на клеммах джерела струму в замкненому колі завжди:  
 1. дорівнює ЕРС джерела;    2. більша за ЕРС джерела;    3. менша за ЕРС джерела;  
 4. співвідношення цих величин залежить від величини зовнішнього опору кола.
28. I правило Кірхгофа є наслідком:  
 1. закону збереження енергії;    2. закону збереження імпульсу;  
 3. закону збереження маси;    4. закону збереження заряду.
29. II правило Кірхгофа є узагальненням:  
 1. закону Ома для неоднорідної ділянки кола;    2. I правила Кірхгофа;  
 3. закону Ома для повного кола;    4. закону збереження заряду.

30. Роботу струму на однорідній ділянці кола надає формула:

1.  $A = IUt$ ;

2.  $A = I\Delta\Phi$ ;

3.  $A = It((\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E})$ ;

4.  $A = \mathcal{E}It$ , де  $\mathcal{E}$  – ЕРС джерела струму.

313. Закон Джоуля – Ленца у інтегральній формі надає формула:

1.  $Q = cm(t_2 - t_1)$ ;    2.  $Q = I^2 Rt$ ;    3.  $Q = \Pi_{\alpha\beta} It$ ;    4.  $dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dS dt$ .

32. Потужність струму на однорідній ділянці кола надає формула:

1.  $P = F \cdot v$ ;    2.  $P = \frac{A}{t}$ ;    3.  $P = I \cdot \mathcal{E}$ , де  $\mathcal{E}$  – ЕРС;    4.  $P = \frac{U^2}{R}$ .

33. Означенню поняття „питома потужність струму” відповідає формула:

1.  $w = jE$ ;    2.  $w = \frac{dW}{dV \cdot dt}$ ;    3.  $w = \rho j^2$ ;    4.  $w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ .

34. Закон Джоуля – Ленца у диференціальній формі надає формула:

1.  $w = \gamma E^2$ ;    2.  $w = \frac{dW}{dV \cdot dt}$ ;    3.  $w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}$ ;    4.  $w = \frac{ED}{2}$ .

35. При нагріванні провідника, якщо напруженість поля підтримується постійною, а зміною геометричних параметрів провідника можна знехтувати, густина струму в ньому:

1. не зміниться;    2. зменшиться;    3. збільшиться.

36. Дротяний провідник (без ізоляції) склали вдвічі і скрутили. Його опір при цьому

1. збільшився вдвічі;    2. збільшився в чотири рази;  
3. зменшився вдвічі;    4. зменшився в чотири рази.

37. У двох провідниках однакового перерізу за однаковий проміжок часу при однаковому струмі виділилася однакова кількість теплоти. Перший провідник утричі довший за другий ( $l_1 = 3l_2$ ). Відношення питомих опорів  $\rho_1$  та  $\rho_2$  цих провідників

дорівнює: 1.  $\rho_1/\rho_2 = 3$ ;    2.  $\rho_1/\rho_2 = \sqrt{3}$ ;    3.  $\rho_1/\rho_2 = \frac{1}{3}$ ;    4.  $\rho_1/\rho_2 = \frac{1}{9}$

38. У двох провідниках однакового перерізу за однаковий проміжок часу при однаковій напрузі виділилася однакова кількість теплоти. Перший провідник утричі довший за другий ( $l_1 = 3l_2$ ). Відношення питомих опорів  $\rho_1$  та  $\rho_2$  цих провідників дорівнює:

1.  $\rho_1/\rho_2 = 3$ ;    2.  $\rho_1/\rho_2 = \sqrt{3}$ ;    3.  $\rho_1/\rho_2 = \frac{1}{3}$ ;    4.  $\rho_1/\rho_2 = \frac{1}{9}$

39. У двох провідниках однакової довжини за однакові проміжки часу при однаковій напрузі виділилось однакова кількість теплоти. Переріз першого провідника удвічі більший за переріз другого ( $S_1 = 2S_2$ ). Відношення питомих опорів  $\rho_1$  та  $\rho_2$  цих провідників дорівнює:

1.  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 2$ ;    2.  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \sqrt{2}$ ;    3.  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{2}$ ;    4.  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{4}$ .

40. У двох провідниках з різною питомою провідністю  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  виділяються однакові питомі потужності струму. Якщо  $\gamma_1 = 2\gamma_2$ , відношення напруженості електричних полів  $E_1$  і  $E_2$  у цих провідниках дорівнює:

1.  $\frac{E_1}{E_2} = 2$ ;    2.  $\frac{E_1}{E_2} = \sqrt{2}$ ;    3.  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;    4.  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{2}$ .

41. Електрична плитка має дві спіралі однакового опору. Час, необхідний для нагрівання води у чайнику до температури кипіння, буде мінімальним, якщо:

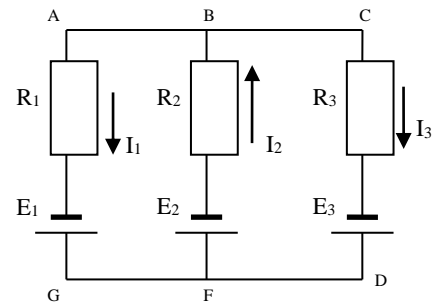
1. увімкнена одна спіраль
2. спіралі ввімкнені послідовно;
3. спіралі ввімкнені паралельно.

42. Для контуру AGFBA, виділеному в розгалуженому колі, що приведений на схемі, рівняння, яке записане за II правилом Кірхгофа (напрямок обходу контуру – проти годинникової стрілки) має вид:

1.  $I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_1 + E_2$ ;      2.  $I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_1 - E_2$ ;
3.  $I_1 R_1 + I_2 R_2 = -E_1 + E_2$ ;      4.  $I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 - E_2$ .

43. Для вузла В розгалуженого кола, що наведений на схемі, рівняння, яке записане за I правилом Кірхгофа, має вигляд:

1.  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ ;                      2.  $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ ;
3.  $-I_1 + I_2 - I_3 = 0$ ;                      4.  $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ ;



44. До амперметра, опір якого  $R_A = 0,8 \text{ Ом}$ , для розширення границі вимірювання паралельно підключений шунт з опором  $R_{ш} = 0,2 \text{ Ом}$ . Якщо амперметр показує струм  $I_A = 1 \text{ А}$ , струм у магістралі дорівнює:

1. 2 А;      2. 4 А;      3. 5 А;      4. 8 А.

45. До вольтметра, опір якого  $R_V = 400 \text{ Ом}$ , для розширення границі вимірювання послідовно підключений додатковий опір  $R_d = 1,6 \text{ кОм}$ . Якщо вольтметр показує напругу  $U_V = 20 \text{ В}$ , напруга на ділянці кола, до якої підключений вольтметр, дорівнює:

1. 40 В;      2. 80 В;      3. 100 В;      4. 160 В.

46. Два провідники однакової довжини та площі перерізу, виготовлені з різних матеріалів і з'єднані послідовно. Якщо відношення питомих опорів провідників  $\rho_1 / \rho_2 = 2$ , для напруги  $U_1$  та  $U_2$  на провідниках справедливо співвідношення

1.  $U_2 = 2U_1$ ;      2.  $U_1 = 2U_2$ ;      3.  $U_1 = 4U_2$ ;      4.  $U_2 = 4U_1$

47. Загальний опір зображеної на рисунку ділянки кола дорівнює

1. 2 Ом;      2. 4 Ом;
3. 6 Ом;      4. 8 Ом



48. Електричне коло складається з джерела струму з ЕРС 12 В і внутрішнім опором 2 Ом і провідника. Якщо сила струму у колі дорівнює 2 А, електричний опір провідника становить

1. 1 Ом;      2. 2 Ом;      3. 4 Ом;      4. 6 Ом.

49. Робота сили струму на ділянці кола за 4 с дорівнює 16 Дж. Якщо напруга на ділянці кола дорівнює 2 В, сила струму у колі дорівнює

1. 8 А;      2. 6 А;      3. 4 А;      4. 2 А;      5. 1 А.

50. Якщо до амперметра з внутрішнім опором 10 Ом паралельно ввімкнуті шунт з опором 1 Ом, показання амперметра

1. зменшаться у 10 разів;      2. збільшаться у 10 разів;      3. зменшаться у 9 разів;
4. зменшаться у 11 разів;      5. збільшаться у 11 разів.

51. Якщо до вольтметра з внутрішнім опором 100 Ом послідовно ввімкнуті додатковий опір 500 Ом, показання вольтметра

1. зменшаться у 5 разів;      2. збільшаться у 5 разів;      3. зменшаться у 4 рази;
4. зменшаться у 6 разів;      5. збільшаться у 6 разів.

## Розділ 3. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### 3.1. Магнітне поле та його характеристики.

**Тема:** Поле точкового заряду, що рухається. Опис магнітного поля. Магнітне поле струму. Закон Біо-Саварра-Лапласа. Принцип суперпозиції. Сила Ампера. Взаємодія струмів. Сила Лоренца. Рух під впливом сили Лоренца. Властивості магнітного поля. Теорема про циркуляцію.

#### Основні поняття і формули

● **Магнітостатичне поле.** Будь-який рухомий заряд створює в оточуючому просторі окрім електричного, магнітне поле. Магнітне поле, утворене постійними (стаціонарними) струмами або нерухомими магнітами є магнітостатичним полем. Характеристики такого поля не змінюються з часом.

З іншого боку на будь-який рухомий заряд збоку магнітного поля діє сила.

● **Силовою характеристикою** магнітного поля є **вектор магнітної індукції**  $\vec{B}$ . Визначається через силу, що діє з боку магнітного поля на елемент струму (закон Ампера), на рухомий заряд (сила Лоренца), або за допомогою обертового моменту, що діє з боку магнітного поля на елементарний контур зі струмом.

Допоміжною характеристикою магнітного поля є **вектор напруженості**  $\vec{H}$ . Магнітна індукція  $\vec{B}$  зв'язана з напруженістю магнітного поля  $\vec{H}$  співвідношенням

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

де  $\mu_0$  – магнітна стала; В системі одиниць СІ  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ ,

де  $c$  – швидкість світла у вакуумі;  $\mu$  – магнітна проникність середовища; для вакууму  $\mu = 1$  (для повітря приймають  $\mu \approx 1$ ).

#### Одиниці вимірювання:

- одиницею вимірювання магнітної індукції у системі одиниць СІ є тесла

( $\text{Тл} = \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{А} \cdot \text{а}}{\text{м}^2}$ ). В системі одиниць Гауса магнітна індукція

вимірюється в гаусах (Гс):  $1 \text{Тл} = 10^4 \text{Гс}$ ;

- одиницею вимірювання напруженості магнітного поля є А/м.

● **Силова лінія (лінія індукції) магнітного поля** – лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає за напрямом з вектором магнітної індукції в цій точці. Лінії магнітного поля завжди замкнені внаслідок вихрового характеру магнітного поля.

• **Вектор індукції магнітного поля точкового заряду**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v} \cdot \vec{r}]}{r^3}, \quad (3.1)$$

де  $\vec{v}$  – вектор швидкості заряду;  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений від заряду до точки поля, в якій визначається  $\vec{B}$ ;  $\mu_0$  – магнітна стала.

Вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  перпендикулярний як до вектора швидкості, так і до радіус-вектора.

Силкові лінії магнітного поля точкового заряду – концентричні кола з центром у заряду.

• **Елемент лінійного струму.** Якщо електричний струм тече по нескінченно тонкому (у фізичному сенсі) провіднику, цей струм називають лінійним. Добуток лінійного струму на елемент  $d\vec{l}$  провідника, по якому тече струм, носить назву елемента лінійного струму –  $I d\vec{l}$ . Тут вектор  $d\vec{l}$  співпадає за напрямом зі струмом в провіднику. Кожний елемент лінійного струму створює магнітостатичне поле.

• **Закон Біо-Савара-Лапласа** визначає магнітну індукцію  $d\vec{B}$  поля, створеного елементом  $d\vec{l}$  лінійного струму  $I$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3} \quad (3.2)$$

або 
$$dB = \frac{\mu_0 \mu I \sin \alpha}{4\pi r^2} \cdot dl, \quad (3.3)$$

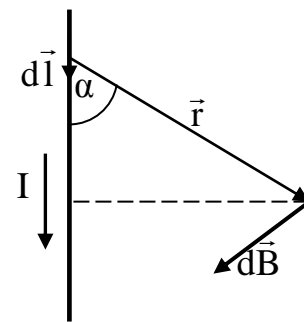


Рис.3.1.

де  $d\vec{B}$  – магнітна індукція поля, яке утворює елемент провідника  $d\vec{l}$  зі струмом  $I$ ;  $\vec{r}$  – радіус-вектор, проведений від цього елемента провідника до точки, що розглядається;  $\alpha$  – кут між радіусом-вектором і напрямком струму у даному елементі (рис.3.1).

Тоді для магнітної індукції поля лінійного провідника кінцевої довжини за принципом суперпозиції полів

$$\vec{A} = \int_L d\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}. \quad (3.4)$$

• **Принцип суперпозиції:** вектор індукції магнітного поля, створеного декількома джерелами, дорівнює векторній сумі магнітних індукцій, створених кожним із джерел поля при відсутності інших.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i. \quad (3.5)$$

• **Магнітна індукція полів**, створених провідниками різної конфігурації, знаходиться інтегруванням формули (3.4):

а) Індукція магнітного поля прямолінійного відрізка MN провідника зі струмом I в точці A, положення якої визначається кутами  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  та відстанню  $r_0$  від точки до провідника (рис.3.2):

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (3.6)$$

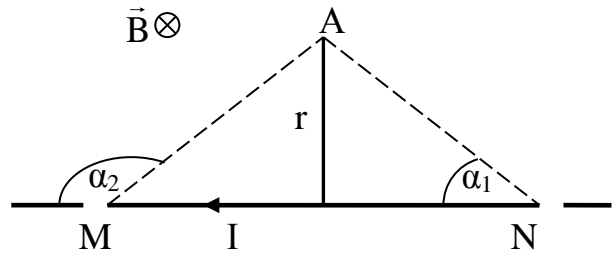


Рис.3.2

б) Поле прямого нескінченного провідника зі струмом I на відстані  $r_0$  від нього (тобто при  $\alpha_1 = 0$ ;  $\alpha_2 = \pi$  у формулі (3.6)):

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r_0} \quad (3.7)$$

Силкові лінії магнітного поля – концентричні кола, центри яких лежать на провіднику.

в) Магнітне поле на осі колового струму радіуса R на відстані z від центра

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (3.8)$$

звідки у центрі кола ( $z = 0$ )

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R} \quad (3.9)$$

Вектор магнітної індукції в центрі кола і точках на його осі направлений вздовж осі і його напрям зв'язаний з напрямом струму правилом правого свердлика.

Магнітна індукція в центрі дуги кола довжиною L, по якій тече струм I:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{IL}{R^2}, \quad \text{де } R \text{ – радіус кола.} \quad (3.9a)$$

Контур зі струмом можна охарактеризувати магнітним моментом  $\vec{p}_m$   
**Магнітний момент**  $\vec{p}_m$  плоского контуру, якого обтікає струм I, дорівнює

$$\vec{p}_m = I\vec{S} = IS\vec{n}, \quad (3.10)$$

де  $\vec{S}$  – вектор, який чисельно дорівнює площі, обмеженій контуром; напрям цього вектора співпадає з додатним напрямом нормалі  $\vec{n}$  до площини контуру і зв'язаний з напрямом струму у контурі правилом правого свердлика.

З використанням магнітного моменту магнітну індукцію поля колового струму на його осі (3.8) можна представити так:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\vec{p}_m}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (3.8a)$$



г) Вектор індукції магнітного поля соленоїда довжиною  $L$  з  $N$  витками направлений вздовж його вісі.

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 nI \quad (3.11)$$

де  $n$  – кількість витків на одиницю довжини, тобто  $n = N/L$ .

Поле майже все сконцентровано всередині соленоїда, є однорідним і його лінії магнітної індукції усередині соленоїда – паралельні прямі.

д) Магнітний диполь: якщо відстань  $r$  від точки, в якій розглядається магнітне поле, набагато більша за лінійні розміри  $l$  області, в якій існує електричний струм, такий контур називають магнітним диполем. Вектор індукції магнітного поля диполя:

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{p}_m \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_m}{r^3} \right). \quad (3.12)$$

Якщо вектора  $\vec{r}$  співпадає за напрямком з вектором  $\vec{p}_m$ , то  $(\vec{p}_m \vec{r}) \vec{r} = \vec{p}_m r^2$  і індукція магнітного поля на осі диполя має вигляд

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi r^3}. \quad (3.12a)$$

• **Сила Лоренца.** На рухомий заряд  $q$  в електричному та магнітному полях діє сила Лоренца, що складається з двох компонент – електричної та магнітної сили:

$$\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}} + q[\vec{v} \cdot \vec{\mathbf{B}}], \quad (3.13)$$

де  $\vec{v}$  – швидкість заряду.

За дією сили Лоренца на заряди можна, у принципі, визначити модулі та напрямки векторів напруженості електричного поля  $\vec{\mathbf{E}}$  та магнітної індукції  $\vec{\mathbf{B}}$  магнітного поля. Тому вираз для сили Лоренца можна розглядати як визначення характеристик електричного та магнітного полів.

Якщо електричне поле відсутнє, на частинку діє тільки магнітна складова, її теж зазвичай називають силою Лоренца

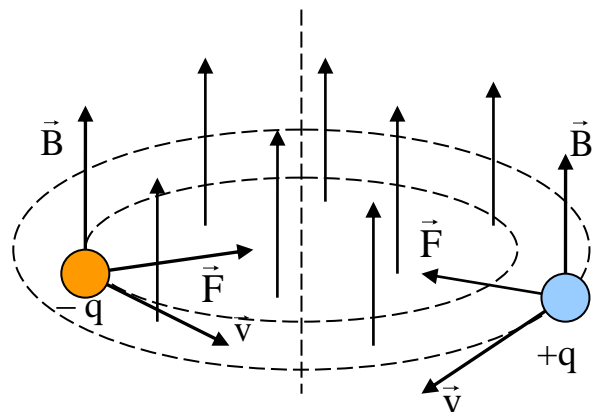


Рис. 3.1

$$\vec{\mathbf{F}} = q[\vec{v} \cdot \vec{\mathbf{B}}], \text{ або } F = qvB \sin \alpha, \quad (3.14)$$

де  $\alpha$  – кут між напрямками швидкості частинки і індукцією магнітного поля.

Напрямок сили визначається за правилом свердлика або лівої руки і залежить від знаку заряду (у випадку негативного заряду знайдений за

означеними правилами напрям слід змінити на протилежний (рис.3.1)). З властивостей векторного добутку витікає, що сила Лоренца завжди перпендикулярна до вектора швидкості  $\vec{v}$  і вектора магнітної індукції  $\vec{B}$ . Тому потужність  $P$  і робота  $A$  сили Лоренца завжди дорівнюють нулю:

$$P = Fv \sin \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$A = \int P dt = 0.$$

Звідси випливає, що дія сили Лоренца не приводить до зміни кінетичної енергії і модуля швидкості зарядженої частинки, вона змінює тільки траєкторію руху. Отже, змінювати енергію заряджених частинок можна лише за допомогою електричного поля.

Прискорення, якого надає зарядженій частинці сила Лоренца, є доцентровим (нормальним) прискоренням і при відсутності дії інших сил заряджена частинка рухається по колу або гвинтовій лінії.

• **Закон Ампера** визначає силу, що діє на елемент лінійного струму  $I d\vec{l}$  з боку магнітного поля з магнітною індукцією  $\vec{B}$ :

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \cdot \vec{B}], \quad (3.15)$$

Сила є перпендикулярною до площини, в якій лежать вектори  $\vec{B}$  і  $d\vec{l}$ , а її напрям визначається за правилом правого свердлика або лівої руки, її величина дорівнює

$$dF = IB dl \sin \alpha, \quad (3.16)$$

де  $\alpha$  – кут між напрямком струму і вектором  $\vec{B}$ .

Якщо прямолінійний провідник довжиною  $l$  знаходиться в однорідному магнітному полі під кутом  $\alpha$  до вектора  $\vec{B}$ , то рівнодійну силу визначають за формулою

$$\vec{F} = I \left[ \vec{l} \cdot \vec{B} \right]. \quad (3.17)$$

В інших випадках сила, що діє на весь провідник, знаходиться інтегруванням виразу (3.15) з урахуванням зміни величин, що входять до неї.

$$\vec{F} = I \int_L [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (3.18)$$

Оскільки струм утворює біля себе магнітне поле, то на інший струм у цьому полі буде діяти сила Ампера, тобто струми взаємодіють. На одиницю довжини прямого провідника зі струмом  $I_1$  з боку прямого струму  $I_2$ , що знаходиться у вакуумі на відстані  $b$  від першого, діє сила

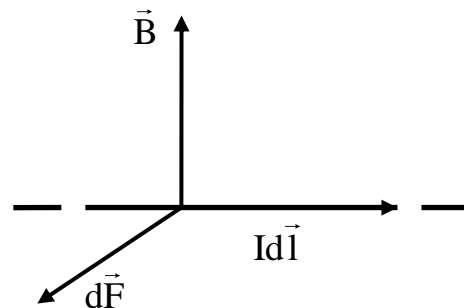


Рис. 3.2

$$f = \frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}. \quad (3.19)$$

Можна показати, що однаково направлені струми притягуються, а протилежно – відштовхуються.

Саме на основі магнітної взаємодії двох провідників зі струмами дається означення одиниці вимірювання струму – 1 ампер (А).

Струм в **один ампер** – це такий струм, який при проходженні по двох паралельних провідниках, які розташовані в вакуумі на відстані 1 м один від одного викликає силу взаємодії між ними  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на кожний метр довжини.

• На контур зі струмом в магнітному полі також діє сила Ампера. Внаслідок дії сил Ампера на окремі ділянки контуру виникає момент сил, який повертає магнітний момент контуру у зовнішньому магнітному полі. У випадку однорідного поля на контур буде діяти **обертальний момент**  $\vec{M}$ , який дорівнює

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}], \quad (3.20)$$

або

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (3.21)$$

де  $\vec{p}_m$  – магнітний момент контуру,  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ .

Робота сил Ампера при повороті контуру зі струмом дорівнює зміні потенціальної енергії. Цю частину потенціальної енергії контуру зі струмом можна розрахувати за формулою:

$$W_p = -\vec{p}_m \vec{B}. \quad (3.22)$$

• **Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції** в інтегральній формі (закон повного струму): циркуляція вектора магнітної індукції у вакуумі уздовж довільного замкненого контуру  $L$  дорівнює добутку магнітної сталої на алгебраїчну суму струмів, які охоплюються цим контуром:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_L. \quad (3.23)$$

При неперервному розподілі струмів суму можна записати через густину струмів  $\vec{j}$ :

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (3.24)$$

Електричний струм вважають додатним, коли його напрямок пов'язаний з напрямком обходу контуру правилом правої руки. Струм протилежного напрямку вважається від'ємним.

• **Потік вектора магнітної індукції** (магнітний потік) крізь поверхню  $S$  визначається інтегралом

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS, \quad (3.25)$$

де  $B_n = B \cos \alpha$  – нормальна складова вектора  $\vec{B}$ ,  $\alpha$  – кут між вектором  $\vec{B}$  і нормаллю  $\vec{n}$  до елемента площини  $d\vec{S}$ .

У разі плоского контуру площиною  $S$  в однорідному полі магнітний потік крізь нього надає формула

$$\Phi = B \cdot S \cos \alpha = B_n S. \quad (3.26)$$

Одиниця вимірювання магнітного потоку в системі одиниць СІ – вебер (Вб).

$$[\hat{A}] = [\vec{E} \cdot \vec{i}]^2 = [\hat{A} \cdot \vec{n}].$$

Повний магнітний потік (потокозчеплення) крізь соленоїд або тороїд

$$\Psi = N\Phi, \quad (3.27)$$

де  $\Phi$  – потік через один виток,  $N$  – кількість витків соленоїда або тороїда, що щільно прилягають один до одного.

**Теорема Гауса** для вектора магнітної індукції: потік вектора магнітної індукції крізь замкнену поверхню дорівнює нулю.

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.28)$$

Теореми про циркуляцію вектора магнітної індукції і теорема Гауса відображають вихровий характер магнітного поля та відсутність джерел і стоків.

- Робота переміщення провідника зі струмом  $I$  у магнітному полі дорівнює

$$A = I\Delta\Phi, \quad (3.29)$$

де  $\Delta\Phi$  – магнітний потік, який провідник перетинає в процесі свого руху.

Робота сил магнітного поля по переміщенню замкненого контуру з постійним струмом  $I$  дорівнює

$$A = I\Delta\Phi, \quad (3.30)$$

де  $\Delta\Phi$  – зміна магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром.

## 3.2. Електромагнітна індукція

**Тема:** Електромагнітна індукція. Закон Фарадея. Індуктивність. Взаємна індуктивність.

### Основні поняття і формули

- **Закон Фарадея** (основний закон електромагнітної індукції): при будь-якій зміні магнітного потоку крізь контур в ньому виникає електрорушійна сила індукції, пропорційна швидкості зміни магнітного потоку:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.31)$$

де  $\mathcal{E}_i$  – електрорушійна сила індукції (ЕРС).

Знак “–” означає: при зміні магнітного потоку крізь поверхню, що спирається на замкнений контур, в якому протікає струм, у контурі

виникає індукційний струм такого напрямку, що його магнітне поле протидіє зміні магнітного потоку (**правило Ленца**).

Зміна магнітного потоку може спричинитись двома різними причинами, які можуть діяти і сумісно:

1) Вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  є постійним за величиною і напрямком, а  $\Phi(t)$  змінюється за рахунок руху провідників, наприклад, деформації провідного контуру або зміни його орієнтації відносно вектора  $\vec{B}$ .

2) Провідний контур нерухомий, а  $\Phi(t)$  змінюється за рахунок зміни величини і напрямку  $\vec{B}(t)$ .

У першому випадку ЕРС індукції виникає завдяки магнітній складовій сили Лоренца, яка діє на заряди, що рухаються разом з провідником.

В цьому випадку ЕРС індукції визначається формулою

$$\mathcal{E}_1 = \frac{A}{q} = \frac{1}{q} \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \oint_L [\vec{v} \vec{B}] d\vec{l} \quad (3.32)$$

Якщо окрема лінійна провідна ділянка контуру (провідник) рухається в однорідному магнітному полі, величина ЕРС індукції, що виникає в ній дорівнює

$$\mathcal{E}_1 = Blv \sin \alpha. \quad (3.33)$$

Тут  $l$  – довжина провідника,  $v$  – швидкість руху провідника,  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{v}$  і  $\vec{B}$ .

У другому випадку ЕРС індукції зумовлена роботою сил вихрового електричного поля напруженістю  $\vec{E}_{\text{вєд}}$ , яке виникає в просторі при зміні магнітного поля  $\vec{B}(t)$ . На відміну від електростатичного поля, поле  $\vec{E}_{\text{вєд}}$  не є потенціальним.

Величина ЕРС індукції в замкненому контурі  $L$ , спричинена вихровим електричним полем, може бути представлена у вигляді

$$\mathcal{E}_1 = \oint_L \vec{E}_{\text{вєд}} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.34)$$

де  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$  – потік вектора магнітної індукції крізь будь-яку поверхню  $S$ ,

яка обмежена контуром.

У більшості випадків формули (3.32) і (3.34) об'єднують у вигляді одного закону Фарадея-Ленца (3.31). Таке формулювання є найбільш загальним, оскільки описує обидва варіанти виникнення ЕРС.

• Заряд  $Q$ , який протікає у контурі опором  $R$  при зміні магнітного потоку крізь контур на величину  $\Delta\Phi$ , може бути знайдений за формулою

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R}. \quad (3.35)$$

- **Індуктивність лінійного провідного контуру**  $L$  (коефіцієнт самоіндукції) – коефіцієнт пропорційності між силою струму  $I$  у контурі і магнітним потоком  $\Phi(t)$ , який цей струм створює крізь поверхню, що спирається на цей контур.

$$\Phi = LI. \quad (3.36)$$

Індуктивність є додатною величиною; її значення у вакуумі залежить тільки від геометричних властивостей (форми і розмірів) контуру; якщо контур знаходиться у середовищі – ще й від магнітних властивостей середовища, тобто магнітної проникності  $\mu$ . Одиницею вимірювання індуктивності в системі одиниць СІ є генрі (Гн);  $(\text{Гн} = \frac{\hat{A} \cdot \tilde{n}}{\hat{A}})$ .

Індуктивність  $L$  довгого соленоїда або тороїда пропорційна квадрату числа витків  $n$  на одиницю довжини соленоїда (тороїда), а також об'єму  $V$  соленоїда

$$L = \mu_0 \mu n^2 V = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S, \quad (3.37)$$

де  $N$  – загальна кількість витків,  $l$  – довжина соленоїда (або середньої лінії тороїда),  $\mu$  – магнітна проникність осереддя соленоїда (тороїда), яка залежить від напруженості  $H$  магнітного поля.

- **ЕРС самоіндукції**, яка виникає у замкненому контурі при зміні сили струму в ньому, пропорційна швидкості зміни струму  $\frac{dI}{dt}$ :

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.38)$$

Внаслідок явища самоіндукції струм у колі з опором  $R$  і індуктивністю  $L$  змінюється наступним чином:

- 1) при розмиканні кола спадає за законом  $I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ , (3.39)  
де  $I_0$  – струм у колі у момент вимикання при  $t=0$ ,  $t$  – час, який пройшов з моменту розмикання;

- 2) при замиканні кола струм зростає за законом

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), \quad (3.40)$$

де  $\mathcal{E}$  – ЕРС джерела струму,  $t$  – час після замикання кола.

- **Коефіцієнт взаємної індукції** (взаємна індуктивність) лінійних контурів  $L_{ji}$  – коефіцієнт пропорційності між магнітним потоком  $\Phi_j$ , створеним у  $j$ -му контурі магнітним полем від струму  $I_i$ , який протікає по  $i$ -му контуру:

$$\Phi_j = L_{ji} I_i. \quad (3.41)$$

Величина  $L_{ji}$  визначається формою, розмірами та взаємним розташуванням контурів. У вакуумі та середовищах з лінійною магнітною сприйнятливістю (діа- та парамагнетики) коефіцієнти взаємної індукції є симетричними за індексами:

$$L_{ji} = L_{ij}. \quad (3.42)$$

ЕРС взаємної індукції задовольняє співвідношенню

$$\mathcal{E}_j = -L_{ji} \frac{dI_i}{dt} \quad (3.43)$$

### 3.2. Змінний струм

**Тема:** Закон Ома для кола змінного струму. Активний та реактивний опір. Потужність змінного струму.

При зміні електричного поля в контурі змінюється його магнітне поле, що приводить до виникнення ЕРС самоіндукції  $\mathcal{E}_{si}$ . У відсутності феромагнітних матеріалів відповідна електрорушійна сила самоіндукції розраховується за формулою (3.38):

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}, \quad \text{де } L \text{ – індуктивність контуру.}$$

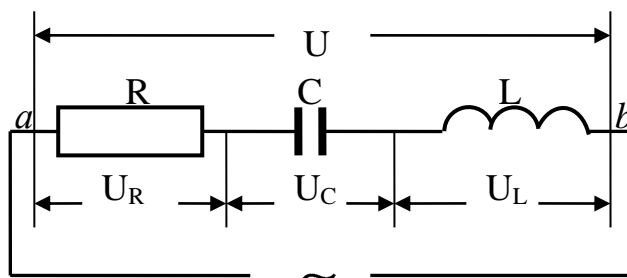


Рис. 3.3.

Тоді закон Ома для замкнутого кола, яке містить послідовно з'єднані котушку індуктивності  $L$ , конденсатор електроємністю  $C$ , резистор опором  $R$  та джерело ЕРС  $\mathcal{E}(t)$  (рис.3.3) приймає вигляд

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t) \quad (3.44a)$$

або

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}(t) \quad (3.44b)$$

Розв'язок цього диференціального рівняння залежить від параметрів контуру  $L, R, C$  та величини діючої електрорушійної сили  $\mathcal{E}(t)$ .

Електричний струм, що виникає під дією ЕРС, яка змінюється за синусоїдальним законом  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_M \sin \omega t$  (3.45), за звичаєм носить назву

змінного струму. Саме така електрорушійна сила утворюється у генераторі змінного струму. У цьому разі величина струму у всіх послідовно з'єднаних елементах кола (рис. 3.3) однакова і змінюється за законом

$$I = I_M \sin \omega t, \quad (3.46)$$

де  $I_M$  – максимальне (амплітудне) значення струму,  $\omega$  – циклічна частота коливань напруги і струму у колі.

Напруга на кожному з елементів кола дорівнює, відповідно:

$$U_R = IR = I_M R \sin \omega t; \quad (3.47a)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = -\frac{I_M}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_M}{\omega C} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_M X_C \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right); \quad (3.47b)$$

$$U_L = I_M \omega L \cos \omega t = I_M \omega L \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_M X_L \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.47b)$$

Тут  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  (3.48) – ємнісний опір;  $X_L = \omega L$  (3.49) – індуктивний опір.

Сумарна напруга на ділянці  $ab$  дорівнює сумі напруг (3.47a) – (3.47b).

Оскільки напруги відрізняються за фазою, для їх додавання зручно скористатися методом векторних зображень, який наведено на діаграмі рис. 3.4. Користуючись теоремою Піфагора отримуємо:

$$U_M = I_M \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}.$$

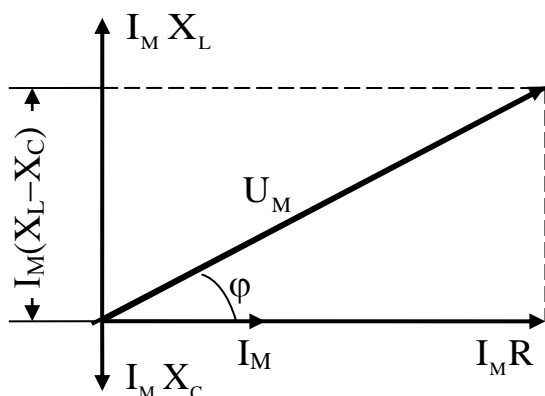


Рис. 3.4.

Амплітуди коливань струму і напруги зв'язані співвідношенням (3.50), яке носить назву закону Ома для кола змінного струму:

$$I_M = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}, \quad (3.50)$$

$$\text{де } Z = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad (3.51)$$

– повний опір кола змінного струму,  $R$  – активна складова опору,  $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$  – реактивна складова.

Закон Ома справедливий також для ефективних або діючих значень струму  $I_{\text{еф}}$  та напруги  $U_{\text{еф}}$ , які пов'язані з відповідними амплітудними значеннями за допомогою наступних співвідношень:



$$I_{\text{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (3.52)$$

$$I_{\text{ef}} = \frac{U_{\text{ef}}}{Z}. \quad \text{де } Z \text{ – повний опір кола.} \quad (3.53)$$

Ефективне або діюче значення струму  $I_{\text{ef}}$  – значення постійного струму, якому за тепловою дією еквівалентний змінний струм з амплітудою  $I_M$ . Аналогічно визначається поняття ефективної або діючої напруги  $U_{\text{ef}}$ .

Зсув фаз між напругою і силою струму визначається співвідношенням, яке отримуємо з векторної діаграми (рис. 3.4):

$$\text{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (3.54)$$

Потужність змінного струму визначається за наступною формулою:

$$P = I_{\text{ef}}^2 R = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi, \quad (3.55)$$

де множник  $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$  (3.56) носить назву коефіцієнту

потужності. Коефіцієнт потужності виграє важливу роль в електротехніці при розгляді задач про ефективність передачі енергії від генератора до користувача.

### 3.4. Магнітне поле у речовині.

**Тема:** Класифікація речовин за магнітними властивостями. Поле у речовині. Магнітна сприйнятливість, проникність. Феромагнетики. Енергія магнітного поля.

#### Основні поняття і формули

- Для характеристики поведінки речовини у магнітному полі вводять **намагніченість**  $\vec{J}$ , яка дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_{mi}, \quad (3.57)$$

де  $N$  – кількість частинок у фізично нескінченно малому об'ємі  $\Delta V$ ,  $\vec{p}_{mi}$  – У парамагнетиків та феромагнетиків вектор намагніченості спрямований вздовж вектора магнітної індукції поля, у діамагнетиків – проти нього.

Зв'язок між векторами намагніченості  $\vec{J}$ , магнітної індукції  $\vec{B}$  та напруженості  $\vec{H}$  надають т. з. матеріальні співвідношення

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}; \quad (3.58)$$

$$\vec{J} = \chi \mu_0 \vec{H}; \quad (3.59)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (3.60)$$

Тут  $\chi$  – магнітна сприйнятливість речовини;  $\mu$  – відносна магнітна проникність.

$$\mu = 1 + \chi. \quad (3.61)$$

$$\mu = \frac{\vec{B}_0}{\vec{B}}, \quad (3.62)$$

Відносна магнітна проникність показує, у скільки разів магнітна індукція  $\vec{B}$  поля у речовині відрізняється від магнітної індукції  $\vec{B}_0$  у вакуумі.

Для більшості речовин  $\mu$  мало відрізняється від одиниці:

- для парамагнетиків  $\chi > 0$ , значення лежать у межах від  $10^{-5}$  до  $10^{-3}$ ;  $\mu > 1$ ;
- для діамагнетиків  $\chi < 0$ , а  $\mu < 1$ . За абсолютною величиною  $\chi$  дуже мала ( $|\chi| \approx 10^{-6}$ ).

Феромагнетики – сильно магнітні речовини ( $\chi \gg 1$ ;  $\mu \gg 1$ ), властивості пояснюються доменною структурою. Феромагнетики відрізняють такі, нехарактерні для інших магнетиків, особливості:

1. дуже великі значення магнітної проникності – до десятків тисяч;
2. залежність  $\mu$  від зовнішнього магнітного поля;
3. залишкова намагніченість у відсутності зовнішнього магнітного поля;
4. неоднозначна залежність  $\vec{B}$  та  $\vec{J}$  від  $\vec{H}$ ; відповідне явище задовольняє так званому закону гістерезису;
5. відповідні криві утворюють петлі гістерезису;
6. кожний феромагнетик має температуру, вище якої він перетворюється на звичайний парамагнетик. Її називають температурою Кюрі.

● **Енергія магнітного поля лінійного контуру зі струмом**

$$W = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} L I^2. \quad (3.63)$$

Енергія магнітного поля системи контурів зі струмами

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j,i} L_{ji} I_j I_i = \frac{1}{2} \sum_{j,i} L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} L_{ji} I_j I_i \quad (3.64)$$

Перший доданок у формулі (3.41) завжди додатний, другий може бути як додатним, так і від'ємним, але повна енергія є завжди додатною.

Об'ємна густина енергії магнітного поля дорівнює

$$w_B = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} = \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (3.65)$$

Енергія поля в об'ємі  $V$

$$W = \int_V w_B dV. \quad (3.66)$$

### 3.5. Рівняння Максвелла.

**Тема:** Система рівнянь Максвелла в інтегральній та диференціальній формах. Матеріальні співвідношення та крайові умови для векторних характеристик електричного та магнітного полів.

Усю сукупність інформації відносно електричних та магнітних полів і їх зв'язку між собою можна виразити у стислій формі рівняннями Максвелла, які утворюються із законів, що описують ці поля. Із закону Фарадея; закону повного струму з врахуванням не тільки густини струму провідності, а й струму зміщення, тобто змінного електричного поля; із теорем Гауса для потоків електричного та магнітного полів утворюється система рівнянь Максвелла в інтегральній формі, яка у Міжнародній системі одиниць (СІ) має вигляд:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}; \quad (3.67)$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_s \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad (3.68)$$

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV; \quad (3.69)$$

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.70)$$

Рівняння Максвелла у інтегральній формі пов'язують значення характеристик електричних та магнітних полів на уявному контурі та поверхні, яка натягнута на нього. Щоб отримати зв'язок між значеннями цих величин у довільній точці, треба за допомогою теореми Остроградського (15а) та теореми Стокса (16а) перейти до диференціальної форми рівнянь, яка має вигляд:

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (3.67a)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (3.68a)$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho; \quad (3.69a)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0. \quad (3.70a)$$

Розглянемо фізичний зміст рівнянь Максвелла.

**Перше** рівняння виражає закон електромагнітної індукції Фарадея : вихрове електричне поле створюється змінним в часі магнітним полем. Якщо магнітне поле постійне (або відсутнє), то електричне поле стає безвихровим або потенціальним.

**Друге** з наведених рівнянь містить твердження, що вихрове магнітне поле створюється струмом провідності та струмом зміщення, тобто змінним електричним полем. Запис того ж рівняння в інтегральній формі – закон повного струму з урахуванням струму зміщення

$$I_{\text{зм}} = \int_S \vec{j}_{\text{в}} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} .$$

**Третє** рівняння – теорема Остроградського - Гауса для електричного поля, стверджує, що витоками і стоками електричного поля є електричні заряди.

Нарешті, **четверте**, останнє з рівнянь, узагальнює факт відсутності магнітних зарядів, тобто витоків та стоків магнітного поля, завдяки чому магнітні силові лінії завжди замкнені, а потік вектора  $\vec{B}$  через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулю.

Рівняння Максвелла несиметричні відносно електричного і магнітного полів: в природі існують електричні заряди та струми, але немає магнітних зарядів та магнітних струмів.

Наведені вище чотири рівняння Максвелла не складають повну (замкнену) систему рівнянь електромагнітного поля, оскільки не містять властивостей середовища, в якому збуджується електромагнітне поле. Систему доповнюють, так звані, матеріальні співвідношення, які ураховують індивідуальні властивості середовища і зв'язують  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  та  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$ , а також густину струму  $\vec{j}$  з напруженістю поля  $\vec{E}$ .

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}; \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (3.71)$$

Відповідні величини полів також мають задовольняти початковим та крайовими умовам. та ще й початковими та крайовими умовами.

Для векторів  $\vec{D}$  та  $\vec{E}$  на межі поділу двох діелектриків з діелектричними проникностями  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$ , а також векторів  $\vec{H}$  і  $\vec{B}$  на межі поділу двох магнетиків з магнітними проникностями  $\mu_1$  і  $\mu_2$  у випадку, коли на цій межі відсутні вільні заряди (або, відповідно, струми провідності), ці умови для нормальних і тангенціальних складових мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
D_{n1} &= D_{n2}; & B_{n1} &= B_{n2}; \\
\varepsilon_1 E_{n1} &= \varepsilon_2 E_{n2}; & \mu_1 H_{n1} &= \mu_2 H_{n2}; \\
E_{\tau 1} &= E_{\tau 2}; & H_{\tau 1} &= H_{\tau 2}; \\
\frac{D_{\tau 1}}{\varepsilon_1} &= \frac{D_{\tau 2}}{\varepsilon_2}; & \frac{B_{\tau 1}}{\mu_1} &= \frac{B_{\tau 2}}{\mu_2}.
\end{aligned}
\tag{3.72}$$

Рівняння Максвелла у диференціальній формі дозволяють отримати рівняння електромагнітної хвилі, визначити її властивості, а також швидкість її розповсюдження.

### Методичні вказівки

1. Задачі з електромагнетизму на розрахунок магнітної індукції  $\vec{B}$  поля, створеного струмом довільної конфігурації, розв'язують за допомогою закону Біо-Савара-Лапласа (3.2), (3.3) та принципу суперпозиції магнітних полів (3.4)  $\vec{A} = \int_L d\vec{B}$  шляхом інтегрування вздовж усього провідника.

Якщо поле утворюється декількома провідниками зі струмом, то також застосовують принцип суперпозиції (3.5)  $\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i$ , додаючи магнітні індукції полів окремих провідників.

Для застосування принципу суперпозиції необхідно знати напрями векторів  $d\vec{B}$  або  $\vec{B}_i$ , які додаються. Відповідні розрахунки особливо спрощуються у деяких конкретних випадках, наприклад:

а) якщо провідник зі струмом і точка, в якій розраховується вектор  $\vec{B}$  лежать в одній площині, то всі елементарні вектори  $d\vec{B}$ , які за законом Біо-Савара-Лапласа перпендикулярні до площини, що містить вектори  $\vec{r}$  і  $d\vec{l}$ , мають однаковий напрям. Тоді геометричне додавання замінюється на алгебраїчне;

б) якщо магнітне поле має осьову симетрію, то в точках, які лежать на цій осі, вектор  $\vec{B}$  направлений вздовж осі і його величина визначається інтегралом:

$$B = \int_L dB_z,$$

де  $dB_z$  – складова вектора  $d\vec{B}$  вздовж осі симетрії поля.

2. Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції (3.23) і (3.24) спрощує розрахунки магнітних полів з певною симетрією. При виборі замкнутого контуру інтегрування  $L$  необхідно дотримуватися наступних рекомендацій:

1) точка, в якій визначається магнітна індукція, повинна належати контуру  $L$ ;

2) внаслідок симетрії скалярний добуток  $\vec{B}d\vec{l}$  вздовж контуру повинен бути постійним або на окремих ділянках навіть дорівнювати нулю.

Якщо обраний замкнений контур  $L$  співпадає з лінією магнітної індукції, то в усіх його точках  $B=\text{const}$ , а для всіх елементів контуру  $\cos(\vec{B}, d\vec{l})=1$ , і рівняння (3.23) набуває простого вигляду  $BL = \mu_0 \mu \sum_i I_i$  (3.23a).

3. Сила, яка діє на провідник зі струмом з боку заданого магнітного поля, у загальному випадку визначається тільки інтегруванням виразу для сили  $d\vec{F}$ , що діє за законом Ампера на елемент струму, з урахуванням напрямів векторів  $d\vec{F}$  (3.18). Більш простий вираз (3.15) може використовуватися тільки для прямолінійного провідника в однорідному магнітному полі.

Якщо в задачі розглядається замкнений контур, то розрізняють два випадки:

1) магнітне поле однорідне. Тоді на контур зі струмом діє обертальний момент (див. формули (3.20),(3.21)), під дією якого контур повертається так, що кут  $\alpha$  між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$  зменшується. При  $\alpha=0$  настає стійка рівновага контуру в магнітному полі;

2) у неоднорідному полі на контур зі струмом окрім обертального моменту діє сила

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos(\vec{p}_m, \vec{B}), \quad (3.73)$$

де  $x$  – напрям найбільш швидкої зміни величини  $B$ . (Формула справедлива для невеликих за розміром контурів у полі, в якому напрями осі  $x$  і вектора  $\vec{B}$  співпадають.)

4. При розв'язуванні задач на дослідження руху заряджених частинок в електричному та магнітному полі перш за все необхідно з'ясувати класичною чи релятивістською слід вважати частинку. Частинку називають класичною, якщо її швидкість набагато менша за швидкість світла у вакуумі ( $v \ll c$ ); у протилежному випадку частинка має назву релятивістської. Якщо відомою величиною є імпульс частинки  $p$  або її кінетична енергія  $T$ , то умови, за якими частинку вважають класичною, мають вигляд:  $p \ll m_0 c$  або  $T \ll m_0 c^2$ , де  $m_0$  – маса спокою частинки (наприклад, для електрона  $m_0 c^2 = 0,511 \text{ MeV}$ ).

1) Задачі на рух класичних заряджених частинок розв'язуються за законами класичної механіки, різниця полягає лише у природі сил, які діють на частинку. Для розв'язання задачі у більшості випадків необхідно записати за другим законом Ньютона рівняння руху частинки у векторній

формі, підставивши в нього у якості сили вираз (3.13) для сили Лоренца. Слід зауважити, що, хоча, за звичаєм, частинка, яка рухається в електромагнітному полі, знаходиться також у гравітаційному полі Землі, розрахунки показують, що силою тяжіння можна знехтувати навіть для слабких електричних та магнітних полів.

При переході до скалярної форми запису рівняння руху, перш за все, необхідно визначити напрям сил, які діють на частинку, урахувавши знак зарядженої частинки. Для негативно заряджених частинок, знайдений за правилом правого свердлика або правила лівої руки напрям слід змінити на протилежний.

Слід пам'ятати, що сила Лоренца, яка діє на частинку з боку магнітного поля, завжди є перпендикулярною до напрямку її руху і надає частинці нормальне прискорення, тобто змінює тільки напрям швидкості, а не її величину.

2) Рівняння руху релятивістської частинки урахує залежність маси частинки від швидкості і може бути записано тільки у вигляді

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

Релятивістська маса та релятивістський імпульс частинки

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (3.74) \quad \vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.75)$$

де  $m_0$  – маса покоя частинки;  $\vec{v}$  – її швидкість;  $c$  – швидкість світла в вакуумі.

Енергія релятивістської частинки:

а) власна енергія (енергія спокою)

$$E_0 = m_0c^2; \quad (3.76)$$

б) кінетична енергія  $T$

$$T = c^2(m - m_0) = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right); \quad (3.77)$$

в) повна енергія (це співвідношення встановлює також взаємозв'язок між енергією та масою релятивістської частинки):

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.78)$$

Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4; \quad E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}; \quad (3.79)$$

$$p^2c^2 = T(T + 2m_0c^2). \quad (3.80)$$

5. В явищах магнітної індукції магнітний потік може змінюватися як при русі контуру або окремих його ділянок, так і при зміні з часом величини або напрямку магнітного поля.

Якщо в задачі необхідно знайти різницю потенціалів на кінцях провідника, який рухається в магнітному полі, слід пам'ятати, що вона дорівнює ЕРС індукції в провіднику.

При визначенні ЕРС індукції, виниклої у провідному контурі, який складається з  $N$  витків, слід ураховувати, що в кожному з них виникає певна ЕРС, а для усього контуру ЕРС визначається виразом

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (3.81)$$

де  $\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i$  – потокозчеплення. За умови рівності всіх  $\Phi_i$  повний магнітний потік можна представити у вигляді  $\Psi = N\Phi$  (3.82). Тоді

$$\mathcal{E}_1 = -N\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.83)$$

В однорідних магнітних полях остання формула суттєво спрощується, у зв'язку з чим більшість задач можна розбити на три типи:

1) Нерухомий контур знаходиться у змінному з часом магнітному полі.

Нормаль до контуру  $\vec{n}$  утворює кут  $\alpha$  з вектором  $\frac{d\vec{B}}{dt}$ . У цьому випадку

$$\mathcal{E}_1 = -N\frac{dB}{dt}S\cos\alpha. \quad (3.83a)$$

2) Контур повертається в однорідному стаціонарному магнітному полі, при цьому змінюється кут  $\alpha$  між нормаллю до контуру і вектором  $\vec{B}$ . У цьому

випадку

$$\mathcal{E}_1 = -NBS\frac{d(\cos\alpha)}{dt}.$$

Зокрема, якщо  $\alpha = \omega t$ ,

$$\mathcal{E}_1 = -NBS\frac{d\cos\omega t}{dt}. \quad (3.83б)$$

3) Змінюється площа контуру. Магнітне поле – однорідне і стаціонарне.

У цьому випадку

$$\mathcal{E}_1 = -NB\frac{dS}{dt}\cos\alpha. \quad (3.83в)$$

6. При наявності магнітного середовища розрахунок магнітних полів суттєво спрощується введенням у якості допоміжної характеристики магнітного поля вектора напруженості  $\vec{H}$ , який визначається через вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{J}$  співвідношенням (3.58).

Особливість вектора  $\vec{H}$  полягає в тому, що його циркуляція вздовж будь-якого замкненого контуру визначається сумою струмів, які охоплює контур, і (на відміну від циркуляції вектора  $\vec{B}$ ) не залежить від магнітних властивостей середовища, в якому проведений контур:



$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H dl \cos(\vec{H}, d\vec{l}) = \sum_i I_i. \quad (3.84)$$

Використання виразу (3.84) суттєво спрощує розрахунок магнітних полів електромагнітних приладів.

У той же час сам вектор  $\vec{H}$  не залежить від магнітних властивостей осереддя лише у випадках, коли воно є суцільним кільцем (тороїд) або нескінченно довгим стрижнем (соленоїд) (див. приклад 3.14). В інших випадках, наприклад, при наявності повітряного зазору між полюсами електромагніту напруженість поля в осередді і у повітряному зазорі – різна (див. приклад 3.15).

7. Окрім формули (3.58) зв'язок між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  установлює формула (3.60)  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ . Її використання у випадку феромагнетиків обмежується тим, що між магнітною індукцією і напруженістю поля не існує лінійної залежності, бо відносна магнітна проникність  $\mu$  феромагнетика є змінною величиною, яка залежить від магнітного поля у ньому. Нелінійну залежність між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  для різних феромагнетиків можна знайти, наприклад, у довідниках у вигляді експериментальних кривих намагнічування (див. доданок). Ці криві носять назву основних кривих намагнічування, бо надають залежність  $\vec{B} = f(\vec{H})$  для феромагнетиків у відсутності залишкової намагніченості, тобто для первісно ненамагнічених феромагнетиків. Отже криві намагнічування можуть використовуватися для установлення зв'язку між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$ , якщо відомо, що розглянутий в задачі стан феромагнетика є результатом його намагнічування. В інших випадках внаслідок гістерезису значення магнітної індукції при тій самій напруженості буде залежати від попереднього стану намагнічування феромагнетика і не є однозначним.

8. При розв'язуванні задач про коло змінного струму, слід пам'ятати, що закони послідовного і паралельного з'єднання у колі постійного струму не справджуються для ефективних значень струму  $I_{\text{ао}}$ , напруги  $U_{\text{ао}}$  та електрорушійної сили  $\mathcal{E}_{\text{ао}}$  (або амплітудних значень  $I_{\text{м}}, U_{\text{м}}, \mathcal{E}_{\text{м}}$ ) змінного струму, а повний опір кола складається з активної та реактивної компонент (див. формули (3.50) – (3.53)). Величини струму, напруги, ЕРС, які визначають електричні процеси в колі та його окремих ділянках здійснюють гармонічні коливання у різних фазах (див. формули (3.54) – (3.56)). Тому додавання напруг здійснюється за правилами додавання векторних величин з урахуванням кута (зсуву фаз) між ними (див. рис. 3.4).

## Приклади розв'язання задач

**Приклад 3.1.** Знайти індукцію магнітного поля у точці, яка розташована на відстані  $R=5\text{см}$  від тонкого нескінченного провідника, по якому тече струм  $I=2\text{А}$ .

$$\begin{aligned} R &= 0,05\text{м} \\ I &= 2\text{А} \\ \mu &= 1 \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \\ \hline B &= ? \end{aligned}$$

Скористаємось законом Біо-Савара-Лапласа, щоб отримати формулу для розрахунку магнітної індукції в точці М. Виділимо на провіднику елемент  $d\vec{l}$ , розташований на відстані  $l$  від точки О і на відстані  $r$  від точки М, в якій розраховується поле

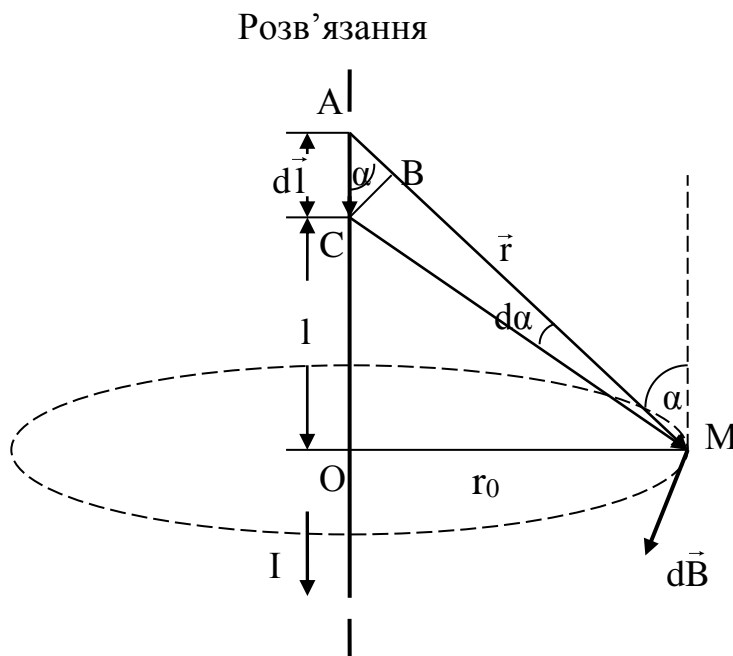


Рис.3.5

(рис.3.5). Цей елемент утворює в точці М поле індукцією  $d\vec{B}$ , яка згідно з (3.2) спрямована перпендикулярно до площини рисунка до нас і згідно з (3.3) має величину

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2} \quad (1)$$

Оскільки всі елементарні значення індукції магнітного поля мають однаковий напрям, повна індукція дорівнює:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha}{r^2} dl \quad (2)$$

Переходимо до однієї змінної, виразивши змінні  $l$  і  $r$  через кут  $\alpha$  і задану відстань  $r_0$ . З рис.3.5 маємо:

$$r = \frac{r_0}{\sin\alpha}; \quad dl = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r_0 d\alpha}{\sin^2\alpha},$$

де відрізок  $BC$  замінено елементом дуги радіусу  $r$ , яка спирається на нескінченно малий центральний кут  $d\alpha$ .

Підставимо вирази для  $dl$  і  $r$  в формулу (2):

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} (-\cos \alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (3)$$

Для провідника нескінченної довжини  $\alpha_1=0$ ,  $\alpha_2=\pi$ . (див.рис.3.2). За цієї умови вираз (3) приймає вигляд:  $B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi R}$ .

Перевірка розмірності:  $[B] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Вб} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{Тл}$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 0,8 \cdot 10^{-5} \text{Тл} = 8\text{мкТл}.$$

Відповідь:  $B=8\text{мкТл}$ .

**Приклад 3.2.** По контуру, зображеному на рис.3.6 тече струм силою  $I=5\text{А}$ . Частина контуру АВ є дугою кола радіусу  $R=10,0\text{см}$ . Визначити магнітну індукцію в точці О, яка є центром кола, якщо  $\alpha = 60^\circ$ .

$I=5\text{А}$ $R=0,1\text{м}$ $\alpha = 60^\circ$ $\mu=1$ <hr/> $B - ?$	<p style="text-align: center;">Розв'язання</p> <p>Згідно з принципом суперпозиції (3.5) магнітна індукція <math>\vec{B}</math> дорівнює векторній сумі магнітних індукцій, утворених усіма елементами контуру:</p>
---	--

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CA}. \quad (1)$$

Обчислюємо модулі кожного з доданків.

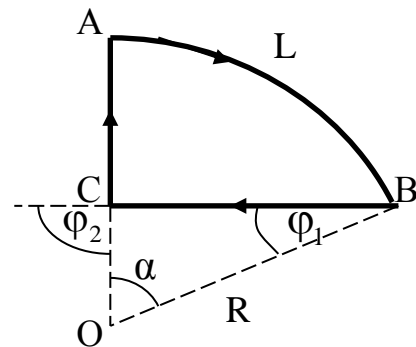


Рис.3.6

Оскільки кут  $\alpha = 60^\circ$ , дуга АВ дорівнює 1/6

довжини кола, тобто  $L = \frac{\pi R}{3}$ . Підставляємо значення L у формулу (3.9а):

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{12 R}. \quad (2)$$

За формулою (3.6) визначаємо величину  $B_{BC}$ . З рис.3.6 знаходимо кути  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 90^\circ$ . Відстань  $r_0$  від точки до ділянки ВС визначаємо з

трикутника ОСВ:  $r_0 = OC = R \sin \alpha_1 = \frac{R}{2}$ . Підстановка значень у формулу

$$\text{дає: } B_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \cdot \frac{R}{2}} (\cos 30^\circ - \cos 90^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{I}{R}. \quad (3)$$

Визначення величини  $B_{CA}$  за допомогою формули (3.6) неможливо, бо відстань  $r_0$  від точки до провідника є довжиною перпендикуляра,

проведеного від точки О до провідника, а у даному випадку точка лежить на продовженні ділянки кола СА. Однак, можна скористатися формулою (3.3), яка виражає в скалярній формі закон Біо-Савара-Лапласа.

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} \cdot dl.$$

Для будь-якого елемента  $d\vec{l}$  провідника СА кут  $\alpha$ , утворений цим елементом, (напрямок  $d\vec{l}$  збігається з напрямком струму) і радіусом-вектором  $\vec{r}$ , проведеним від елемента до точки О дорівнює  $\pi$ . Оскільки  $\sin \pi = 0$ ,  $dB = 0$  для будь-якого елемента провідника СА, і цей провідник не дає внеску в магнітну індукцію поля в точці О.

Таким чином, вираз (1) набирає вигляду

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC}. \quad (1a)$$

Визначаємо напрям векторів  $\vec{B}_{AB}$  і  $\vec{B}_{BC}$ . Провідники АВ і ВС лежать в площині рисунка, тому обидва вектори є перпендикулярними до цієї площини. За правилом правого свердлика вектор  $\vec{B}_{AB}$  направлений за площину рисунка, а вектор  $\vec{B}_{BC}$  – від неї. Беручи другий напрям за позитивний, знаходимо:  $B = B_{BC} - B_{AB}$ .

З урахуванням виразів (2) і (3):  $B = \left( \frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12} \right) \frac{\mu_0 I}{R}. \quad (4)$

Перевірка розмірності:  $[B] = \frac{\tilde{A} \cdot \dot{A}}{\dot{1} \cdot \dot{1}} = \frac{\hat{A} \cdot \tilde{n}}{\dot{1}^2} = \text{Оє}.$

За формулою (4) обчислюємо магнітну індукцію в точці (магнітна стала  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м). Розрахунок дає:

$$B = \left( \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 3,14} - \frac{1}{12} \right) \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 5}{0,1} = 3,43 \cdot 10^{-6} \text{Тл}.$$

Відповідь:  $B = 3,43 \text{ мкТл}.$

**Приклад 3.3.** Два прямолінійних нескінченних провідника розташовані паралельно на відстані  $l=10\text{см}$  один від одного. По провідниках протікають однакові струми  $I_1=I_2=2\text{А}$  у протилежних напрямках. Знайти індукцію магнітного поля у точці, яка віддалена від кожного провідника на відстань  $r=10\text{см}$ .

$l=0,1\text{м}$ $I_1=I_2=2\text{А}$ $r=0,1\text{м}$ $\mu=1$ $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7} \text{Гн/м}$ $B - ?$	<p style="text-align: center;">Розв'язання.</p> <p>Нехай провідники розташовані перпендикулярно до площини рисунку (рис.3.7). Точка М і перерізи провідників утворюють рівнобічний трикутник зі стороною <math>0,1\text{м}</math>. Тому <math>\alpha = 60^\circ</math>. Індукції <math>B_1</math> і <math>B_2</math> магнітних полів струмів <math>I_1</math> і <math>I_2</math>, можна визначити за формулою (3.7)</p>
---	---

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}.$$

За принципом суперпозиції

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Напрямки  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  і  $\vec{B}$  показані на рис.3.7. З рисунка випливає, що кут  $\beta$  також дорівнює  $60^\circ$ . Це означає, що вектори  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  і  $\vec{B}$  теж утворюють рівнобічний трикутник, тому  $B = B_1 = B_2$ .

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0,1} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ (Тл)}$$

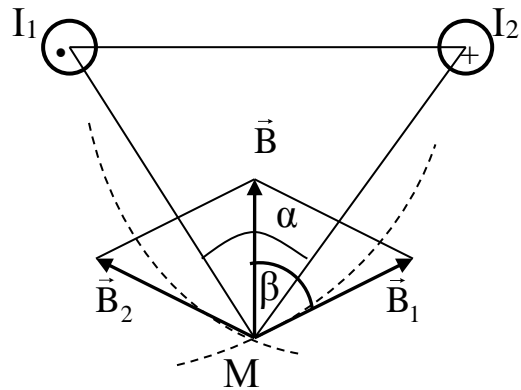


Рис.3.7.

**Приклад 3.4.** Вздовж двох довгих паралельних провідників, розташованих у повітрі на відстані  $r_1 = 0,1$  один від одного, в одному напрямку проходять струми  $I_1 = 20\text{А}$  та  $I_2 = 30\text{А}$  (рис.3.8). 1) Визначити силу взаємодії  $F_1$ , яка діє на одиницю довжини кожного провідника; 2) роботу  $A_1$  на одиницю довжини, яку необхідно виконати для віддалення цих провідників на відстань  $r_2 = 20\text{см}$ ? Притягуються чи відштовхуються будуть провідники проміж собою?

Розв'язання.

$$I_1 = 20\text{А}$$

$$I_2 = 30\text{А}$$

$$r_1 = 0,1\text{м}$$

$$r_2 = 0,2\text{м}$$

$$\mu = 1$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

$$F_1; A_1 - ?$$

Будемо вважати, що провідник зі струмом  $I_2$  знаходиться у магнітному полі, яке утворює струм  $I_1$ . Індукція цього поля

$$B_1 = \mu_0 \mu \frac{I_1}{2\pi r}.$$

Тоді на елемент  $dl$

струму  $I_2$  діє сила Ампера (3.16)

$$dF = I_2 B_1 dl \sin\alpha,$$

$$\text{або} \quad dF = \mu_0 \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi r} dl \sin\alpha.$$

У нашому випадку  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\mu = 1$ , тому на одиницю довжини припадає сила

$$F_1 = \frac{dF}{dl} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r}.$$

Напрямок сили визначається законом (3.15). У даному випадку провідники притягуються (див.рис.3.8).

Елементарна робота  $dA_1$ , яка виконується на одиницю довжини провідників при зміні відстані між ними на  $dr$ , дорівнює

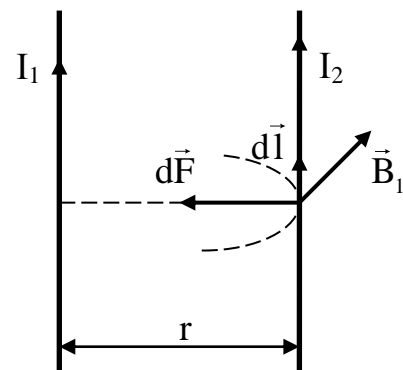


Рис.3.8

$$dA_1 = F_1 dr = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} dr.$$

Інтегруванням останнього виразу у межах від  $r_1$  до  $r_2$  знаходимо роботу

$$A_1 = \frac{dA}{dl}: \quad A_1 = \int_{r_1}^{r_2} F_1 dr = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Перевірка розмірності:

$$[F] = \frac{\Gamma_H \cdot A \cdot A}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Вб} \cdot A^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2 \cdot A^2}{A \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot A}{A \cdot \text{м}} = \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

$$F_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 30}{2\pi \cdot 0,1} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}.$$

$$A_1 = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 30}{2 \cdot 3,14} \ln \frac{0,2}{0,1} = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м}.$$

Відповідь:  $F_1 = 1,2 \cdot 10^{-3}$  Н/м ; притягуються.

$$A_1 = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м}.$$

**Приклад 3.5.** По трьох паралельних провідниках 1, 2, 3, розташованих у вакуумі на відстані  $a=0,1$ м один від одного, течуть струми  $I_1, I_2, I_3$ . У провідників 1 та 2 напрямки струмів співпадають. Знайдіть силу, що діє на одиницю довжини кожного провідника.

Розв'язання.

$I_1; I_2; I_3$ $a_1 = a_2 = a_3 = a$ $f_1; f_2; f_3 - ?$	Провідники 1 та 2 притягуються один до одного з силою: $ \vec{F}_{1,2}  = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot a}$ .
---	--

Провідники 1 і 3 та провідники 2 і 3, відштовхуються один від одного з силами:

$$|\vec{F}_{1,3}| = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_3 \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot a};$$

$$|\vec{F}_{2,3}| = \frac{\mu_0 \cdot I_2 \cdot I_3 \cdot l}{2 \cdot \pi \cdot a}.$$

Рівнодійні сили, що діють на кожний з провідників, визначаються векторним додаванням (рис.3.9). Модулі сил знаходимо за теоремою косинусів. З урахуванням

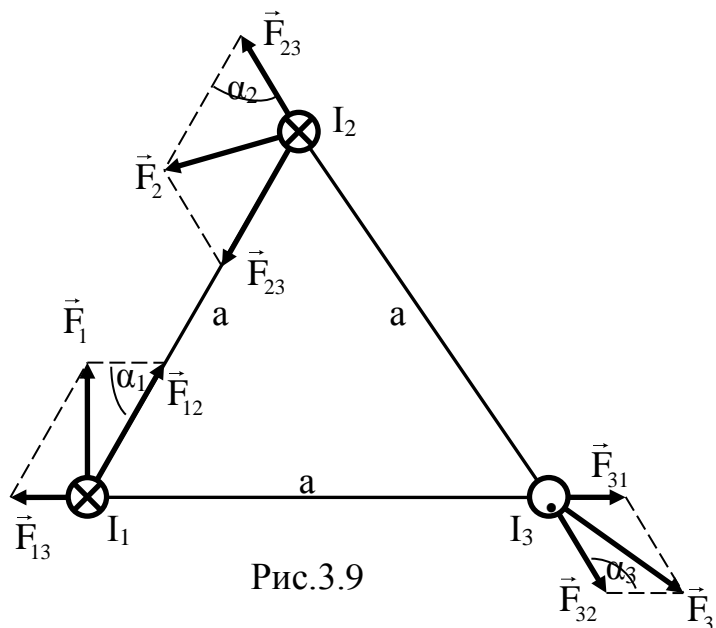


Рис.3.9

того, що кути  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  між векторами складових сил дорівнюють  $\alpha_1 = \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 120^\circ$  отримуємо

$$\begin{aligned} |\vec{F}_1| &= \sqrt{|\vec{F}_{1,2}|^2 + |\vec{F}_{1,3}|^2 - |\vec{F}_{1,2}| \cdot |\vec{F}_{1,3}|}; & |\vec{F}_2| &= \sqrt{|\vec{F}_{1,2}|^2 + |\vec{F}_{2,3}|^2 - |\vec{F}_{1,2}| \cdot |\vec{F}_{2,3}|}; \\ |\vec{F}_3| &= \sqrt{|\vec{F}_{1,3}|^2 + |\vec{F}_{2,3}|^2 + |\vec{F}_{1,3}| \cdot |\vec{F}_{2,3}|}. \end{aligned}$$

Сили, діючі на одиницю довжини кожного з провідників, дорівнюють:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{|\vec{F}_1|}{1} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \sqrt{I_2^2 + I_3^2 - I_2 \cdot I_3}; & f_2 &= \frac{|\vec{F}_2|}{1} = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \sqrt{I_1^2 + I_3^2 - I_1 \cdot I_3}; \\ f_3 &= \frac{|\vec{F}_3|}{1} = \frac{\mu_0 \cdot I_3}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_1 \cdot I_2}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.6.** З дроту довжиною 1 виготовлено три контури: квадратний, коловий та у вигляді рівнобічного трикутника. Знайти обертальний момент, що діє на кожен з контурів в однорідному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$ . По дроту тече струм  $I$ . Площина кожного контуру становить кут  $\beta$  з напрямком магнітного поля.

$\begin{array}{l} B; I; \\ I; \beta \\ \hline M-? \end{array}$	Розв'язання. Абсолютне значення обертального моменту, діючого на замкнений контур зі струмом: $ \vec{M}  =  \vec{B}  \cdot  \vec{S}  \cdot I \cdot \sin \alpha,$
--	--

де:  $|\vec{S}| = S \cdot |\vec{n}|$ ,  $S$  – площа контуру,  $\alpha$  – кут між напрямком магнітного поля  $\vec{B}$  та нормаллю  $\vec{n}$  до площини контуру.

Якщо площина контуру становить кут  $\beta$  з напрямком магнітного поля, то кут між нормаллю до площини та напрямком магнітного поля  $\alpha = 90^\circ - \beta$  та  $\sin \alpha = \cos \beta$ .

Якщо периметр квадрата рівний 1, то його сторона дорівнює  $(\frac{1}{4})1$ .

Отже, площа квадратного контуру становить  $S_1 = \frac{1^2}{16}$ .

Площа колового контуру:  $S_2 = \pi r^2 = \pi \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 = \frac{1^2}{4\pi}$ .

Площа трикутного контуру:  $S_3 = \frac{1^2 \sqrt{3}}{36}$ .

Обертальні моменти, які діють на кожний з контурів, складають відповідно:

$$|\vec{M}_1| = \frac{1}{16} \cdot B \cdot I \cdot l^2 \cdot \sin \beta; \quad |\vec{M}_2| = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot B \cdot I \cdot l^2 \cdot \sin \beta;$$

$$|\vec{M}_3| = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot B \cdot I \cdot l^2 \cdot \sin \beta.$$

$$[M] = \frac{\hat{e}\tilde{a}}{\hat{A} \cdot \tilde{n}^2} \cdot \hat{A} \cdot \dot{i}^2 = \frac{\hat{e}\tilde{a} \cdot \dot{i}^2}{\tilde{n}^2} = \hat{I} \cdot \dot{i}$$

**Приклад 3.7.** Протон, який пройшов різницю потенціалів  $U=500\text{В}$ , влетів у однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Визначити радіус траєкторії протона. Індукція магнітного поля  $B=0,5\text{Тл}$ .

$$U=500 \text{ В}$$

$$B=0,5\text{Тл}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$q=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

R - ?

Розв'язання.

На протон діє сила Лоренца (3.14). Оскільки кут між швидкістю  $\vec{v}$  та індукцією  $\vec{B}$  дорівнює  $90^\circ$  ( $\sin \alpha = 1$ ), то сила Лоренца є доцентровою і змушує протон рухатись по колу. Згідно з другим законом Ньютона

$$\vec{F}_E = m\vec{a}_n, \text{ або } qvB = \frac{mv^2}{R},$$

звідки

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

де  $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$  – маса протона,  $q=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$  – заряд протона.

Швидкість  $v$  знайдемо, скориставшись зв'язком між роботою електричного поля по переміщенню протона зі зміною його кінетичної енергії

$$qU = W_{K2} - W_{K1}.$$

Вважаючи початкову швидкість протона рівною нулю, маємо

$$qU = \frac{mv^2}{2}, \text{ звідки } v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad (2)$$

Підставимо (2) у (1) і отримаємо

$$R = \frac{m\sqrt{2qU}}{qB\sqrt{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}. \quad (3)$$

$$[R] = \frac{1}{\text{Оє}} \left( \frac{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{A}}{\hat{E}\tilde{e}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\dot{i}^2}{\hat{A} \cdot \tilde{n}} \left( \frac{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{A}}{\hat{E}\tilde{e}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\dot{i}^2 (\hat{e}\tilde{a})^{\frac{1}{2}}}{(\hat{A}\tilde{e})^{\frac{1}{2}} \cdot \tilde{n}} = \frac{\dot{i}^2 (\hat{e}\tilde{a})^{\frac{1}{2}} \cdot \tilde{n}}{(\hat{e}\tilde{a})^{\frac{1}{2}} \cdot \dot{i} \cdot \tilde{n}} = \dot{i}$$

$$R = \frac{1}{0,5} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 500}{1,6 \cdot 10^{-19}}} = 6,46 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 6,46 \text{ мм}$$

Відповідь:  $R = 6,46 \text{ мм}$ .



**Примітка.** Попередня оцінка швидкості руху протона за формулою (2) показує, що його швидкість суттєво менша за швидкість світла, тому при розв'язуванні задачі були використані закони класичної фізики.

**Приклад 3.8.** Визначити кінетичну енергію  $T$  електрона, який обертається в однорідному магнітному полі з магнітною індукцією  $B=2\text{Тл}$  вздовж кола радіусом  $R=2\text{см}$ .

$B=2\text{Тл}$
$R=0,02\text{м}$
$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
$m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
$T=?$

Розв'язання.

Перш за все дослідимо класичним чи релятивістським слід вважати електрон. Припустимо, що поведінку електрона описують закони класичної фізики. Тоді з формули (1) попереднього прикладу 3.7 швидкість електрона

$$v = \frac{qBR}{m}, \quad (1)$$

де у класичному випадку  $m = m_0$  – маса спокою електрона. Кінетичну енергію електрона розраховуємо за формулою:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m_0}.$$

$$T = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 2,25 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 141 \text{ МеВ}$$

Знаходимо кінетичну енергію у мегаелектрон-вольтах ( $1\text{МеВ}=1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ ) і порівнюємо з енергією спокою електрона  $E_0 = m_0c^2 = 0,511\text{МеВ}$ .

$$T=141\text{МеВ} \gg 0,511\text{МеВ}.$$

Отже, електрон є релятивістським, і його поведінку описують формули спеціальної теорії відносності. Тоді кінетична енергія електрона за формулою (3.77) дорівнює

$$T = E - E_0, \quad (2)$$

де згідно формулам (3.76) і (3.79) енергія спокою електрона

$$E_0 = m_0c^2, \quad (3)$$

повна енергія електрона  $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$ . (4)

Імпульс електрона  $p = mv$  ( $m$  – релятивістська маса) виражаємо з формули (1):

$$p = qBR \quad (5).$$

Підстановка виразів (3) – (5) до формули (2) дає

$$T = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} - m_0c^2 = c\sqrt{(qBR)^2 + m_0^2c^2} - m_0c^2.$$

$$T = 3 \cdot 10^8 \sqrt{(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-2})^2 - (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8)^2} - 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} =$$

$$= 1,84 \cdot 10^{-12} \text{ \AA} \approx 11,5 \text{ \AA}$$

Відповідь:  $T = 1,84 \cdot 10^{-12} \text{ \AA} \approx 11,5 \text{ \AA}$ .

**Приклад 3.9.** В однорідному магнітному полі з індукцією  $B$  рівномірно обертається з частотою  $\nu$  рамка площиною  $S$ . Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції (рис.3.10). Визначити максимальну ЕРС індукції, яка виникає в рамці.

$B, \nu, S$	Розв'язання.
$\mathcal{E}_{\text{іmax}} - ?$	При рівномірному обертанні плоскої рамки в однорідному магнітному полі магнітний потік, який пронизує рамку, змінюється з часом за законом:

$$\Phi = BS \cos \omega t,$$

де  $S$  – площа рамки,  $B$  – магнітна індукція поля,  $\omega = 2\pi\nu$  – кутова швидкість обертання рамки.

Згідно закону Фарадея для електромагнітної індукції (3.31)

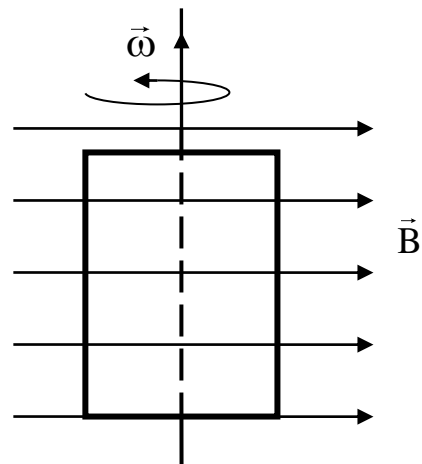


Рис.3.10.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(BS \cos \omega t)}{dt} = BS \omega \sin \omega t.$$

Максимальне значення ЕРС індукції досягається при  $\sin \omega t = 1$ , тобто

$$\mathcal{E}_{\text{іmax}} = BS \omega = 2\pi\nu BS.$$

**Приклад 3.10.** Замкнена на коротко котушка діаметром  $d=10\text{см}$ , яка має 250 витків, знаходиться в магнітному полі, індукція якого зростає від  $B_1=2\text{Тл}$  до  $B_2=6\text{Тл}$  протягом часу  $\Delta t=0,1\text{с}$ . Визначити середнє значення ЕРС індукції в котушці, якщо площини витків перпендикулярні до силових ліній поля.

$d=0,1\text{м}$	Розв'язання. ЕРС індукції знаходимо із співвідношення
$N=250$	
$B_1=2\text{Тл}$	
$B_2=6\text{Тл}$	
$\Delta t=0,1\text{с}$	
$\alpha=0$	

$\langle \mathcal{E}_i \rangle - ?$
-------------------------------------

$$|\langle \mathcal{E}_i \rangle| = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (1)$$

Потік крізь виток, з урахуванням того, що кут  $\alpha$  між лініями магнітної індукції та нормаллю до площини витків дорівнює 0, визначаємо за формулою  $\Phi = BS$ . Оскільки потік змінюється тільки за рахунок зміни

магнітної індукції поля,  $\Delta\Phi = \Delta B \cdot S = (B_2 - B_1)S$ , де площа витка  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ . Тоді  $\Delta\Phi = (B_2 - B_1) \frac{\pi d^2}{4}$ . (2)

Підстановка виразу  $\Delta\Phi$  до формули (1) дає:  $|\mathcal{E}_1| = \frac{N\pi d^2}{4} \frac{(B_2 - B_1)}{\Delta t}$ .

$$[\mathcal{E}_1] = \frac{\dot{i}^2}{\ddot{n}} \cdot \frac{\hat{A} \cdot \ddot{n}}{\dot{i}^2} = \hat{A}$$

$$|\langle \mathcal{E}_1 \rangle| = \frac{250 \cdot 3,14 \cdot 0,1^2 (6 - 2)}{4 \cdot 0,1} = 78,5 \text{ В.}$$

**Приклад 3.11.** Дротяна рамка у формі квадрата зі стороною  $a$  знаходиться в магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$ , лінії якої перпендикулярні до площини рамки. Який заряд протече у рамці, якщо її витягнути в одну лінію, потягнувши за протилежні кути? Опір рамки дорівнює  $R$ .

$B = \text{const}$	Розв'язання
$S_1$	
$S_2 = 0$	
$\alpha = 0^\circ$	
$R; a$	
$q = ?$	

Заряд, який протікає за час  $dt$  у контурі виражаємо через струм:  $dq = Idt$  (1). Струм у замкненому контурі за законом Ома для повного кола виражаємо через ЕРС індукції  $\mathcal{E}_1$  та опір  $R$ :  $I = \frac{\mathcal{E}_1}{R}$  (2). Величину електрорушійної

сили індукції надає закон Фарадея (3.31):  $|\mathcal{E}_1| = \frac{d\Phi}{dt}$  (3).

Вирази (2) та (3) використовуємо для визначення  $dq$  і далі інтегруванням знаходимо заряд  $q$ :

$$dq = \frac{|\mathcal{E}_1|}{R} dt = \frac{1}{R} \frac{|d\Phi|}{dt} dt = \frac{|d\Phi|}{R}.$$

$$q = \int_0^q dq = \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} |d\Phi| = \frac{1}{R} |\Phi_2 - \Phi_1| = \frac{|\Delta\Phi|}{R}. \quad (4)$$

За умовою задачі зміна магнітного потоку відбувається тільки за рахунок зміни площини контуру від значення  $S_1 = a^2$  до  $S_2 = 0$ . Отже  $\Delta\Phi = Ba^2$  і величина заряду, що пройшов у контурі при зміні його площини дорівнює  $q = \frac{B\Delta S}{R}$ .

**Примітка.** Зверніть увагу на ту обставину, що, на відміну від індукційного струму, величина заряду, який протікає у контурі, залежить від величини зміни магнітного потоку, а не від швидкості, з якою змінюється цей магнітний потік.

**Приклад 3.12.** У на коротко замкнену котушку всувають магніт: один раз – швидко, другий – повільно. а) Чи однаковий заряд проходить у котушці у першому і другому випадках? б) Чи буде однакою робота, яку виконує сила руки, яка всуває магніт, проти електромагнітних сил? в) Чи однакова кількість теплоти виділиться у котушці?

Розв'язання.

а) Заряд, який пройде по котушці, буде однаковим в обох випадках, бо не залежить від швидкості зміни магнітного потоку (див. попередній приклад).

б) Більша робота виконується при швидкому переміщенні магніту, оскільки робота дорівнює  $A = q \cdot \mathcal{E}_1$ , де  $\mathcal{E}_1$  – величина ЕРС індукції, яка буде більшою в цьому випадку.

в) Кількість виділеного тепла також буде більшою у першому випадку. Заряди, які протікають по котушці однакові. Струм  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$  – більший у першому випадку, оскільки в першому випадку зміна магнітного потоку відбувається за менший час. Таким чином, кількість теплоти, які виділяється в котушці  $Q = I^2 R \Delta t = I R \Delta q$  буде більшою у першому випадку.

**Приклад 3.13.** За який час  $t$  після замикання електричного кола, яке містить опір  $R=10$  Ом і індуктивність  $L=0,1$  Гн, струм у ньому досягне значення  $I=0,9I_{\max}$  ?

Розв'язання

$$\begin{array}{l} R=10 \text{ Ом} \\ L=0,1 \text{ Гн} \\ I=0,9I_{\max} \end{array}$$

$$t - ?$$

При замиканні кола в ньому окрім ЕРС джерела струму  $\mathcal{E}$  внаслідок зміни струму виникає ЕРС самоіндукції, яка за формулою (3.38) дорівнює

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}. \text{ За законом Ома для повного кола}$$

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{si}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{L}{R} \frac{dI}{dt}.$$

Тобто струм у колі є розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (1)$$

Методом розділенням змінних знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння  $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0$ :

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt; \quad \ln I = -\frac{R}{L} t + C, \text{ де } C - \text{ константа інтегрування.}$$

$$I_1 = C e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (2)$$

Окремий розв'язок неоднорідного рівняння (1) представляємо у вигляді:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (3)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) є сумою виразів (2) і (3):

$$I = I_1 + I_2 = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Константу  $C$  знаходимо за початковою умовою, згідно з якою  $I=0$  при  $t=0$ :

$$C = -\frac{\mathcal{E}}{R}. \quad \text{Тоді} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (4)$$

Максимальне значення струму досягається при установленні в колі постійного струму, тобто при  $t \rightarrow \infty$ . З формули (4) при  $t \rightarrow \infty$  отримуємо

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Тоді  $I = I_{\max} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$ . Розв'язання останнього рівняння відносно часу  $t$

дає:

$$t = -\frac{L}{R} \ln \left( 1 - \frac{I}{I_{\max}} \right).$$

Перевірка розмірності:  $[t] = \left[ \frac{\tilde{A} \acute{I}}{\hat{I} \grave{i}} \right] = \left[ \frac{\hat{A} \cdot \tilde{n} \cdot \grave{A}}{\grave{A} \cdot \hat{A}} \right] = \tilde{n}$

$$t = -\frac{0,1}{10} \ln(1 - 0,9) = 0,023 \tilde{n}$$

Відповідь:  $t=23\text{мс}$ .

**Приклад 3.14.** По соленоїду з немагніченим залізним осереддям пустили струм силою  $I=2,5\text{А}$ . Соленоїд має  $n=10$  витків на кожний сантиметр довжини. Обчислити індуктивність соленоїду, а також енергію магнітного поля в осередді, якщо площа його перерізу  $S=4,0\text{см}^2$ , а довжина  $l=30\text{см}$ .

$I=2,5\text{А}$ $n=10^3\text{м}^{-1}$ $S=4 \cdot 10^{-4}\text{м}^2$ $l=0,3\text{м}$	
$L; W-?$	

Розв'язання

Згідно з умовою задачі довжина соленоїда  $l$  більше ніж у десять разів перевищує його діаметр. Такий соленоїд називають нормальним, нехтують крайовими ефектами і поле всередині соленоїда вважають однорідним.

Індуктивність соленоїда за формулою (3.37) дорівнює  $L = \mu_0 \mu n^2 V = \mu_0 \mu n^2 l S$  (1), де  $\mu$  – магнітна проникність осереддя соленоїда, яка залежить від напруженості  $H$  магнітного поля.

Оскільки  $\mu_0 \mu = \frac{B}{H}$  (2), визначимо величини напруженості  $H$  і магнітної індукції  $B$ , які характеризують магнітне поле в осередді.

З формул (3.11) та (3.47)

$$H = nI = 2,5 \cdot 10^3 \text{ А/м.}$$

Магнітну індукцію поля в осередді знаходимо з кривої намагнічування заліза (див. доданок):  $B = 1,45 \text{ Тл.}$

Користуючись знайденими значеннями  $B$  і  $H$  та формулою (1) з залученням співвідношення (2) обчислюємо індуктивність  $L$ :

$$L = \frac{B}{H} n^2 l S.$$

$$[L] = \frac{\text{Вб} \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{А} \cdot \text{А}^2}{\text{А} \cdot \text{А}^{-1}} = \frac{\text{Вб} \cdot \text{А}^2}{\text{А}} = \frac{\hat{A} \cdot \tilde{n} \cdot \text{А}^2}{\text{А}^2 \cdot \hat{A}} = \tilde{A}';$$

$$L = \frac{1,45 \cdot 10^6 \cdot 0,3 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2,5 \cdot 10^3} = 0,070 = 7,0 \cdot 10^{-2} \text{ Гн.}$$

Використовуючи значення індуктивності та сили струму в обмотці соленоїда за формулою (3.50) визначаємо енергію магнітного поля:

$$W = \frac{1}{2} LI^2.$$

$$[W] = \tilde{A}' \cdot \hat{A}^2 = \frac{\hat{A} \cdot \tilde{n}}{\hat{A}} \cdot \hat{A}^2 = \hat{A} \cdot \hat{A} \cdot \tilde{n} = \tilde{A} \text{ Дж.}$$

$$W = \frac{7,0 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5^2}{2} = 0,22 \text{ Дж.}$$

Такий самий результат можна отримати застосуванням формули (3.65) для об'ємної енергії магнітного поля  $W = w_B V = \frac{BH}{2} l S$ .

**Примітка.** Внаслідок явища гістерезису використовувати основну криву намагнічування для визначення величин  $B$ ,  $H$  або  $\mu$  можливо лише у випадку намагнічування феромагнетика, який попередньо знаходився у розмагніченому стані.

**Приклад 3.15.** Торойд з залізним осереддям, довжина якого вздовж середньої лінії кільця дорівнює  $l_1=1,0\text{м}$ , має повітряний зазор  $l_2=5\text{мм}$ . Після виключення струму в обмотці торойда залишкова індукція в зазорі дорівнює  $B=4,5\text{мТл}$ . Визначити залишкову намагніченість  $J$  осереддя, а також напруженість поля  $H_1$  у залізі.

$l_1=1,0\text{м}$
$l_2=5 \cdot 10^{-3}\text{м}$
$\hat{A}=4,5 \cdot 10^{-3}\text{Тл}$
$J; H_1=?$

Розв'язання

У даному випадку, на відміну від попередньої задачі, було б невірним для визначення  $H$  скористатися кривою намагнічування заліза. Намагніченість заліза є результатом його неповного розмагнічування, а криві намагнічування і розмагнічування внаслідок явища гістерезису не

співпадають.

Скористаємося теоремою про циркуляцію вектора  $\vec{H}$ , обравши у якості контуру інтегрування середню лінію тороїда  $l$ . Оскільки повітряний зазор в тороїді є вузьким, розсіюванням ліній магнітної індукції в зазорі можна знехтувати. З урахуванням замкненості ліній вектора  $\vec{B}$  зрозуміло, що крізь будь-який переріз тороїда, в тому числі крізь переріз у повітряному зазорі, проходить такий самий магнітний потік  $\Phi$ . А оскільки площа  $S$  будь-якого перерізу однакова, також однакові магнітні індукції в будь-якій точці контуру  $l$ :

$$B_1 = B_2 = B = \frac{\Phi}{S} = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

Магнітні індукції в залізі і повітряному зазорі мають однакові значення, а магнітні проникності цих речовин різні, тоді напруженості магнітного поля в них також мають різні значення  $H_1$  і  $H_2$ . За теоремою про циркуляцію вектора  $\vec{H}$  (3.23а) при відсутності струму в обмотці, тобто при  $I=0$ , маємо:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0. \quad (1)$$

У повітряному зазорі величини  $H_2$  і  $B$  зв'язані співвідношенням (3.47), де  $\mu_2=1$ . Звідки  $H_2 = \frac{B}{\mu_0}$ . Підставляємо це значення в (1) і отримуємо

напруженість магнітного поля в залізі:

$$H_1 = -H_2 \frac{l_2}{l_1} = -\frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{l_2}{l_1}, \quad (2)$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  – магнітна стала.

Знак «-» у формулі показує, що вектори  $\vec{H}_1$  і  $\vec{B}$  у намагніченому залізі при відсутності струму в обмотці направлені протилежно (відповідні ділянки петлі гістерезису лежать у другій та четвертій чвертях).

Залишкову намагніченість заліза знаходимо за допомогою формули (3.58):

$$\vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}_1,$$

або, урахувавши протилежні напрями векторів  $\vec{H}_1$  і  $\vec{B}$ , у скалярній формі

$$J = \frac{B}{\mu_0} + H_1.$$

Підстановка в останні вираз абсолютного значення  $H_1$  з формули (2) дає:

$$J = \frac{B(l_1 + l_2)}{\mu_0 l_1}. \quad (3)$$

З формул (2) та (3) знаходимо шукані величини:

$$H_1 = -\frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{12,56 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,0} = -17,9 \text{ (A/м)};$$

$$J = \frac{4,5 \cdot 10^{-3} (1,0 + 5 \cdot 10^{-3})}{12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 1,0} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ (A/м)}$$

**Приклад 3.16.** При дослідах з двома жорстко зв'язаними між собою контурами було знайдено, що при тій самій швидкості зміни сили струму в першому контурі ЕРС індукції в другому контурі дорівнювала у вакуумі  $\mathcal{E}_{02}=2\text{В}$ , а у рідині, магнітні властивості якої вивчалися,  $\mathcal{E}_2=2,00252\text{В}$ . Визначити магнітну сприйнятливість рідини.

$\mathcal{E}_{02}=2\text{В}$ $\mathcal{E}_2=2,00252\text{В}$ <hr style="width: 100%;"/> $\chi_m - ?$	<p>Розв'язання</p> <p>ЕРС взаємної індукції яка виникає у другому контуру при зміні сили струму в першому згідно з формулою (3.43) дорівнює</p> $\mathcal{E}_2 = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad (1)$
--	--

де  $L_{21}$  – взаємна індуктивність контурів.

У випадку, коли обидва контури знаходяться в однорідному ізотропному середовищі, їх взаємна індуктивність пропорційна відносній магнітній проникності  $\mu$  середовища і залежить від форми, розмірів та взаємного положення контурів.

Згідно з умовою задачі контури жорстко зв'язані, тобто під час вимірювань ЕРС змінювалась тільки за рахунок зміни магнітної проникності середовища. Тому можна вважати, що відношення отриманих значень ЕРС пропорційно відношенню магнітної проникності середовищ:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{02}} = \frac{\mu}{\mu_{\text{вак}}}, \quad (1)$$

де  $\mu$  та  $\mu_{\text{вак}}$  – магнітні проникності рідини та вакууму відповідно. Оскільки

для вакууму  $\mu_{\text{вак}} = 1$ , вираз (1) набирає вигляду  $\mu = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{02}}$ . (2)

За формулою (3.48) магнітна сприйнятливість речовини дорівнює

$$\chi_m = \mu - 1.$$

Замінюємо  $\mu$  її вираз із співвідношення (2), і отримуємо

$$\chi_m = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_{02}} - 1.$$

Обчислення дає:

Відповідь:  $\chi_m = 0,0126$ .



**Примітка.** Метод, про який йде мова у розглянутому прикладі, є одним з методів експериментального визначення магнітної сприйнятливості рідин. Він оснований на тому, що взаємна індуктивність двох контурів прямо пропорційна відносній магнітній проникності середовища.

**Приклад 3.17.** До електричної мережі напругою  $U=220\text{В}$  і частотою  $\nu=50\text{Гц}$  підключено котушку опором  $R=100\text{ Ом}$ , яка споживає потужність  $P=200\text{Вт}$ . Знайти струм  $I$ , який протікає через котушку, а також її індуктивність  $L$ , якщо зсув фаз між напругою і струмом  $\varphi=60^\circ$ .

Розв'язання.

В умовах задачі йдеться про ефективні значення струму і напруги. Оскільки потужність змінного струму (3.55)

$$P = I_{\text{еф}} U_{\text{еф}} \cos \varphi.$$

$$I_{\text{еф}} = \frac{P}{U_{\text{еф}} \cdot \cos \varphi} = \frac{200}{220 \cdot 0,5} = 1,82\text{А}$$

Повний опір ділянки кола (3.51) з урахуванням того, що  $C=0$ ,

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (1)$$

З іншого боку, згідно з формулою (3.53), повний опір

$$Z = \frac{U_{\text{ао}}}{I_{\text{ао}}} \quad (2)$$

Порівняємо (1) і (2):  $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{U_{\text{ао}}}{I_{\text{ао}}}.$

Розв'язуємо останнє рівняння відносно  $L$ . Ураховуючи, що  $\omega = 2\pi\nu$ ,

отримуємо:

$$L = \frac{\sqrt{U_{\text{ао}}^2 - I_{\text{ао}}^2 R^2}}{2\pi\nu I_{\text{ао}}}.$$

$$[L] = \frac{(\hat{A}^2 - \hat{A}^2 \cdot \hat{I} \hat{i}^2)^{1/2}}{\hat{A} \cdot \hat{n}^{-1}} = \frac{\hat{A} \cdot \hat{n}}{\hat{A}} = \tilde{A} \hat{i}$$

$$L = \frac{\sqrt{(220)^2 - (1,82 \cdot 100)^2}}{1,82 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 0,022\text{Гн} = 22\text{мГн}$$

Відповідь:  $I=1,82\text{ А}$ ,  $L=22\text{ мГн}$ .

### Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Знайти напруженість  $H$  магнітного поля у центрі кругового витка радіуса  $R=5\text{ см}$ , через який тече струм  $I=1\text{А}$ .

3.2. Дротяний провідник має форму квадрата за стороною  $a=10\text{см}$ . По провіднику тече струм силою  $I=5\text{А}$ . Знайти магнітну індукцію  $B$  у центрі квадрата.

3.3. Нескінченний провідник зігнули під прямим кутом. По провіднику протікає струм  $I=10\text{А}$ . Знайти індукцію магнітного поля  $B$  в точці, яка

розташована на бісектрисі цього кута і віддалена від вершини на відстань  $l=20$  см.

3.4. Два прямолінійних провідника зі струмами  $I_1=I_2=1$  А розташовані у вакуумі паралельно на відстані  $a=10$  см. Знайти напруженість магнітного поля  $H$  у точці, яка віддалена від кожного з провідників на відстань  $a=10$  см. Розглянути випадки: а) струми напрямлені однаково; б) струми напрямлені протилежно.

3.5. Визначити магнітну індукцію на осі тонкого дротяного кільця радіусом  $R=4$  см, по якому проходить струм  $I=10$  А, в точці, розташованій на відстані  $d=10$  см від центра кільця.

3.6. Знайти індукцію магнітного поля на осі кругового витка радіуса  $R=5$  см на відстані  $h=10$  см від його центра. Через виток тече струм  $I=1$  А.

3.7. Два кругових контури розташовано у взаємно перпендикулярних площинах так, що вони мають спільний центр. Знайти магнітну індукцію  $B$  у центрі витків, якщо вони мають однаковий радіус  $R=5$  см і струм у витках теж однаковий  $I=1$  А.

3.8. Два нескінченні дротяні провідники зі струмами  $I_1=60$  А і  $I_2=20$  А схрещені під прямим кутом. Відстань між провідниками  $a=20$  см. Визначити індукцію магнітного поля  $B$  у точці, яка однаково віддалена від кожного з провідників.

3.9. Соленоїд довжиною  $l=20$  см має  $N=1000$  витків. Знайти індукцію магнітного поля  $B$  у середині соленоїда, якщо через нього тече струм  $I=5$  А.

3.10. Знайти напруженість  $H$  усередині соленоїда, яким тече струм  $I=2$  А. Соленоїд зроблено з дроту діаметром  $d=1$  мм так, що витки щільно прилягають один до одного.

3.11. Два нескінченні тонкі провідники зі струмами  $I_1=10$  А і  $I_2=5$  А розташовані паралельно на відстані  $a=5$  см. Струми напрямлені однаково. Визначити магнітну індукцію  $B$  у точці, яка віддалена від першого провідника на відстань  $r_1=4$  і від другого на відстань  $r_2=3$  см.

3.12. Визначити магнітну індукцію  $B$  поля, утвореного відрізком провідника довжиною  $l=20$  см зі струмом  $I=10$  А, в точці, яка рівновіддалена від кінців провідника і знаходиться на відстані  $R=4$  см від його середини.

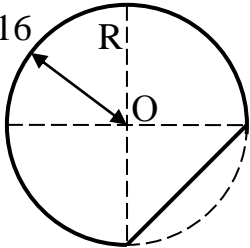
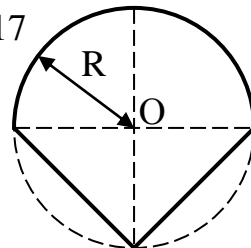
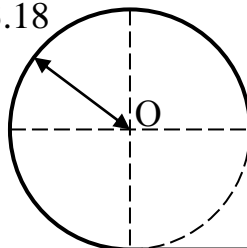
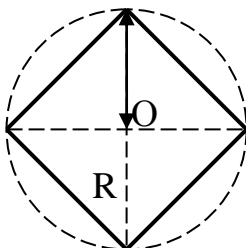
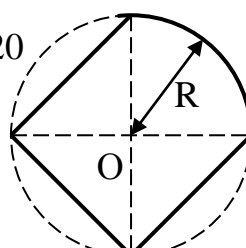
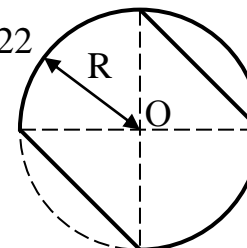
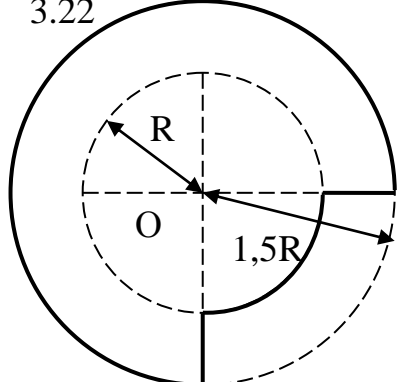
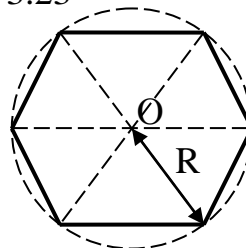
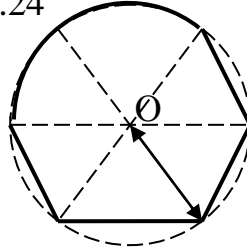
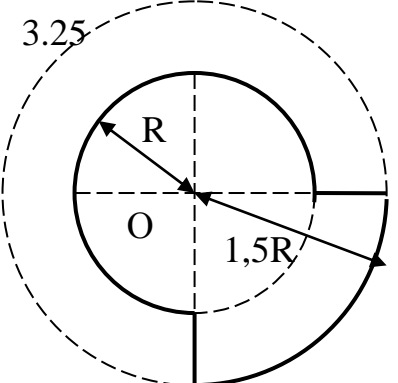
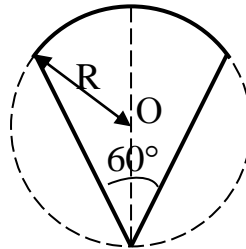
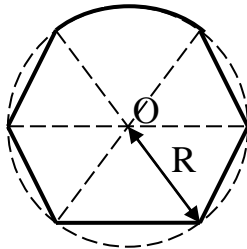
3.13. Визначити магнітну індукцію  $B$  у центрі кругового витка радіусом  $R=20$  см, якщо його магнітний момент  $P_m=5$  А·м<sup>2</sup>.

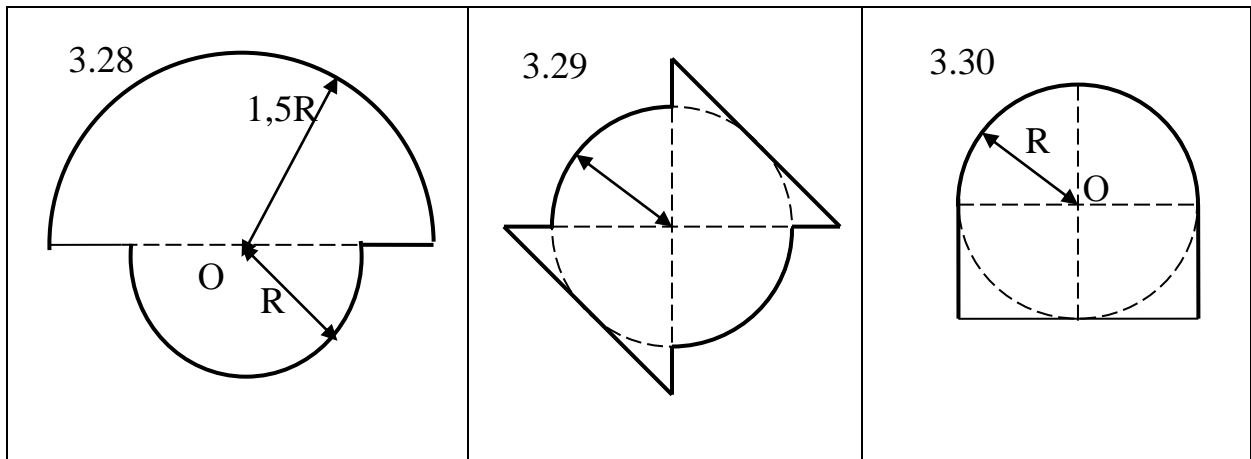
3.14. Довжина соленоїда  $l=20$  см, магнітний потік через соленоїд  $\Phi=10$  мкВб. Знайти магнітний момент  $P_m$  соленоїда.

3.15. Визначити момент сили  $M$ , який діє на виток зі струмом  $I=20$  А, вміщений у однорідне магнітне поле індукцією  $B=0,5$  Тл. Радіус витка  $R=20$  см, площа витка складає з лініями індукції  $\varphi=30^\circ$ .

3.16–3.30. Вздовж контуру, виготовленого із тонкого дроту, тече струм  $I=1$  А. Визначити індукцію магнітного поля, створеного цим струмом в

точці  $O$ . Контур обирають відповідно номеру задачі з таблиці 3.1. Радіус  $R=10\text{см}$ . Струм обтікає контур за годинниковою стрілкою.

<p>3.16</p> 	<p>3.17</p> 	<p>3.18</p> 
<p>3.19</p> 	<p>3.20</p> 	<p>3.22</p> 
<p>3.22</p> 	<p>3.23</p> 	<p>3.24</p> 
<p>3.25</p> 	<p>3.26</p> 	<p>3.27</p> 



3.31. В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,1$  Тл розміщена квадратна рамка площиною  $S = 25 \text{ см}^2$ . Нормаль до площини рамки складає з напрямом магнітного поля кут  $60^\circ$ . Визначити момент сил, що діють на рамку з боку магнітного поля, якщо по ній проходить струм  $I = 1 \text{ А}$ .

3.32. В однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0,5$  Тл знаходиться прямокутна рамка зі струмом  $I = 1 \text{ А}$ , площа якої паралельна лініям магнітної індукції. Довжина рамки  $a = 8$  см, ширина  $b = 5$  см, кількість витків у рамці  $N = 100$ . Визначити: 1) магнітний момент рамки; 2) обертальний момент, що діє на рамку.

3.33. Частина прямолінійного провідника зі струмом  $I = 20$  А довжиною  $l = 40$  см знаходиться у однорідному магнітному полі індукцією  $B = 0,2$  Тл. Провідник розташований перпендикулярно до ліній магнітного поля. Яка сила діє на провідник з боку магнітного поля?

3.34. Два прямолінійні провідники довжиною  $l = 2$  м кожен розташовані паралельно на відстані  $a = 10$  см. По провідниках протікають струми  $I_1 = I_2 = 10 \text{ А}$ . Визначити силу  $F$  взаємодії між провідниками.

3.35. Два прямолінійних паралельних провідника розташовані на відстані  $a_1 = 10$  см. По провідниках у однаковому напрямку протікають струми  $I_1 = 10 \text{ А}$  і  $I_2 = 30 \text{ А}$ . Яку роботу  $A$  треба виконати, щоб відстань між провідниками збільшити удвічі?

3.36. Провідник довжиною  $l = 20$  см рухається рівномірно у магнітному полі індукцією  $B = 0,5 \text{ мТл}$ . Швидкість провідника  $v = 20 \text{ м/с}$  і напрямлена перпендикулярно до ліній індукції. Чому дорівнює різниця потенціалів  $U$  на кінцях провідника?

3.37. Металевий провідник довжиною  $l = 10$  см рухається у однорідному магнітному полі індукцією  $B = 0,5 \text{ Тл}$ . Через провідник тече струм  $I = 1 \text{ А}$ . За час  $t = 10$  с на переміщення провідника затрачена робота  $A = 0,1$  Дж. Визначити швидкість  $v$  переміщення провідника.

3.38. Електрон, який пройшов прискорюючу різницю потенціалів  $U = 1 \text{ кВ}$ , потрапляє у однорідне магнітне поле індукцією  $B = 1 \text{ мТл}$  під прямим кутом

до ліній індукції. Знайти магнітний момент  $P_m$ , утворений еквівалентним круговим струмом.

3.39. Електрон, прискорений різницею потенціалів  $U=300\text{В}$ , влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Індукція магнітного поля  $B=2\text{мТл}$ . Знайти радіус траєкторії електрона.

3.40. Електрон, прискорений різницею потенціалів  $U=1\text{кВ}$ , влітає в однорідне магнітне поле індукцією  $B=2\text{мТл}$  перпендикулярно до ліній індукції. Знайти тангенціальне  $a_\tau$  і нормальне  $a_n$  прискорення електрона.

3.41. Електрон влітає в однорідне магнітне поле індукцією  $B=1\text{мТл}$  перпендикулярно до ліній індукції. Знайти період  $T$  обертання електрона.

3.42. Протон і електрон влітають в однорідне магнітне поле під прямим кутом до ліній магнітної індукції. У скільки разів період обертання електрона відрізняється від періоду обертання протона?

3.43. Протон, прискорений різницею потенціалів  $U=200\text{В}$ , влетів в однорідне магнітне поле під кутом  $\alpha=45^\circ$  до ліній індукції. Індукція  $B=20\text{мТл}$ . Визначити радіус  $R$  і крок  $h$  траєкторії протона.

3.44. Електрон влітає у схрещенні під прямим кутом однорідні електричне ( $E=1,2\text{кВ/м}$ ) та магнітне ( $B=1\text{мТл}$ ) поля і далі рухається прямолінійно. Визначити швидкість  $v$ , з якою електрон влетів у електромагнітне поле.

3.45.  $\alpha$ - частинка влітає в однорідне магнітне поле індукцією  $B=0,2\text{Тл}$  під кутом  $\alpha=30^\circ$  до ліній поля і рухається по гвинтовій лінії радіусом  $R=2\text{см}$ . Визначити (у електрон-вольтах) кінетичну енергію  $W$   $\alpha$ -частинки. Маса  $\alpha$ - частинки  $m=6,64\cdot 10^{-27}\text{кг}$ .

3.46. Електромагнітне поле утворене однорідними магнітним ( $B=10\text{мТл}$ ) і електричним ( $E=1\text{кВ/м}$ ) полями, розташованими так, що їх силові лінії напрямлені однаково. Електрон влітає в електромагнітне поле у напрямку силових ліній зі швидкістю  $v=1,2\cdot 10^5\text{м/с}$ . Знайти повне прискорення електрона.

3.47. Електрон, прискорений різницею потенціалів  $U=2\text{кВ}$ , влітає в магнітне поле соленоїда під кутом  $\alpha=60^\circ$  до його осі. Число витків соленоїда  $N=1000$ , його довжина  $l=20\text{см}$ , сила струму у соленоїді  $I=1\text{А}$ . Знайти крок гвинтової лінії траєкторії електрона.

3.48. Протони прискорюються в циклотроні в однорідному магнітному полі з індукцією  $B=1,2\text{Тл}$ . Максимальний радіус кривизни траєкторії протонів складає  $R=40\text{см}$ . Визначити кінетичну енергію протонів в кінці прискорення.

3.49. Стрижень довжиною  $l=1\text{м}$  обертається у однорідному магнітному полі індукцією  $B=20\text{мТл}$ , виконуючи протягом  $t=1\text{хв}$ .  $N=120$  повних обертів. Вісь обертання перпендикулярна до стрижня, проходить через його кінець і співпадає з напрямком індукції  $\vec{B}$ . Визначити ЕРС індукції  $\mathcal{E}$ , яка виникає на кінцях стрижня.

- 3.50. Круговий виток діаметром  $d=16\text{см}$  обертається у однорідному магнітному полі індукцією  $B=2\text{Тл}$ . Вісь обертання перпендикулярна до площини витка, проходить через його центр і збігається за напрямком з лініями  $\vec{B}$ . Знайти середнє значення ЕРС індукції  $\varepsilon_i$ , яка виникає у витку, якщо магнітне поле зменшується до нуля за час  $t=5\text{мс}$ .
- 3.51. Дротяна рамка квадратної форми зі стороною  $a=12,5\text{см}$  рівномірно обертається у однорідному магнітному полі, індукція якого  $B=1\text{Тл}$ . Вісь обертання розташована у площині рамки і складає кут  $\alpha=45^\circ$  з напрямком ліній індукції. Кутова швидкість обертання  $\omega=20\text{рад/с}$ . Знайти максимальне значення ЕРС індукції  $\varepsilon_{i\text{max}}$  у рамці.
- 3.52. В однорідному магнітному полі з магнітною індукцією  $B=0,2\text{Тл}$  рівномірно з частотою  $n=600\text{хв}^{-1}$  обертається рамка, яка містить  $N=1200$  витків, що щільно прилягають один до одного. Площина рамки  $S=100\text{см}^2$ . Вісь обертання лежить в площині рамки і перпендикулярна лініям магнітної індукції. Визначити максимальну ЕРС, яка виникає у рамці.
- 3.53. Соленоїд діаметром  $d=4\text{см}$ , який має  $N=500$  витків, поміщений в магнітне поле, індукція якого змінюється зі швидкістю  $1\text{мТл/с}$ . Вісь соленоїда складає з вектором магнітної індукції кут  $\alpha=45^\circ$ . Визначити ЕРС індукції, яка виникає в соленоїді.
- 3.54. Визначити індуктивність кола, якщо при зміні струму за законом  $i=(1-0,2t)\text{А}$ , у ньому виникає ЕРС самоіндукції  $\varepsilon_{si}=40\text{мВ}$ .
- 3.55. Квадратна дротяна рамка вміщена у однорідне магнітне поле індукцією  $B=50\text{мТл}$  під кутом  $\alpha=30^\circ$  до ліній поля. Сторона рамки  $a=3,5\text{см}$ , опір  $R=10\text{Ом}$ . Який заряд  $q$  пройде крізь переріз рамки, якщо зникне магнітне поле?
- 3.56. Круговий дротяний виток площею  $S=8\text{см}^2$  і опором  $R=2\text{Ом}$  вміщено у однорідне магнітне поле індукцією  $B=0,25\text{Тл}$ . Нормаль  $\vec{n}$  витка збігається за напрямком з вектором  $\vec{B}$ . Який заряд пройде крізь переріз витка, якщо його повернути на кут  $\alpha=90^\circ$ ?
- 3.57. Визначити силу струму  $I$  у колі через  $t=0,01\text{с}$  після розмикання. Опір кола  $R=10\text{Ом}$ , індуктивність  $L=0,05\text{Гн}$ . Сила струму до розмикання  $I_0=20\text{А}$ .
- 3.58. Котушку індуктивністю  $L=0,6\text{Гн}$  вмикають до джерела струму. Визначити опір котушки, якщо за час  $t=3\text{с}$  сила струму у котушці досягає 80% максимального значення.
- 3.59. Електричне коло складається з котушки опором  $R=20\text{Ом}$  і індуктивністю  $L=1,73\text{Гн}$  підключеної до джерела струму. Визначити у який момент часу  $t$  після відімкнення джерела і замикання котушки на коротко струм  $I$  у колі зменшиться у 2 рази.

3.60. Котушка індуктивністю  $L=0,15\text{Гн}$  і опором  $R=10\text{ Ом}$  підключається до джерела струму. Через який час після підключення струм у колі набуде значення, яке дорівнює половині від максимально можливого?

3.61.–3.67. Котушка індуктивністю  $L=0,2\text{Гн}$  и опором  $R_1=1\text{ Ом}$  і резистор опором  $R_2=4\text{ Ом}$  з'єднані паралельно та підключені до джерела, ЕРС якого  $\mathcal{E}=24\text{В}$ , за допомогою вимикача К (рис. 3.11). В деякий момент часу коло розмикають. Визначити величину, яка указана у таблиці 3.2 для відповідного номера задачі. Внутрішнім опором джерела струму знехтувати.

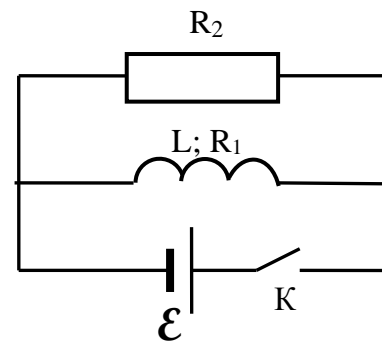


Рис. 3.11.

3.68.–3.74. Котушку індуктивністю  $L=0,4\text{Гн}$  і опором  $0,5\text{ Ом}$  в деякий момент часу підключили послідовно з опором  $R_2=0,5\text{ Ом}$  до джерела, ЕРС якого  $\mathcal{E}=24\text{В}$  (рис. 3.12). Визначити величину, яка указана у таблиці 3.2 для відповідного номера задачі. Внутрішнім опором джерела струму знехтувати.

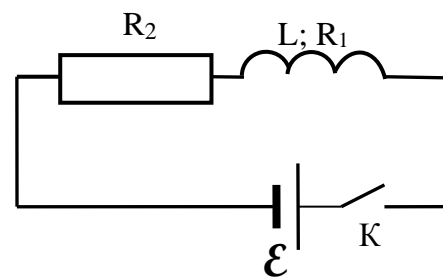


Рис. 3.12.

Таблиця 3.2.

Номер задачі	Величина, яку необхідно визначити
3.61	Напругу на опорі $R_2$ за $0,1\text{ с}$ після вимикання джерела
3.62	Струм у опорі $R_2$ за $0,1\text{ с}$ після вимикання джерела
3.63	Енергію магнітного поля в котушці за $0,1\text{ с}$ після вимикання джерела
3.64	Час, за який сила струму в котушці зменшиться у 3 рази
3.65	ЕРС самоіндукції в котушці $0,1\text{ с}$ після вимикання джерела
3.66	Кількість теплоти, яка виділиться у резисторі $R_2$ протягом $0,1\text{ с}$ .
3.67	Час, за який магнітна індукція в котушці зменшиться у 2 рази.
3.68	Силу струму у колі за $0,1\text{ с}$ після його замикання.
3.69	Напругу на опорі $R_2$ за $0,1\text{ с}$ після замикання кола.
3.70	Напругу на котушці $R_1$ за $0,1\text{ с}$ після замикання кола.
3.71	Енергію магнітного поля в котушці за $0,1\text{ с}$ після замикання кола.
3.72	Час, за який сила струму в колі досягне половини максимального значення.
3.73	Кількість теплоти, яка виділиться у резисторі $R_2$ протягом $0,1\text{ с}$ .
3.74	Час, за який магнітна індукція в котушці досягне половини максимального значення.

- 3.75. Індуктивність соленоїда  $L=1,2\text{мГн}$ . Скільки витків має цей соленоїд, якщо при струмі  $I=1\text{А}$  магнітний потік крізь соленоїд  $\Phi=2,5\text{мкВб}$ ?
- 3.76. Соленоїд діаметром  $D=5\text{см}$  намотано з дроту діаметром  $d=0,5\text{мм}$  так, що витки щільно прилягають один до одного. Індуктивність соленоїда  $L=1\text{мГн}$ . Скільки витків  $N$  має соленоїд. Осердя відсутнє.
- 3.77. Залізне осереддя знаходиться в однорідному магнітному полі напруженість якого  $H = 2\text{кА/м}$ . Визначити індукцію магнітного поля в осередді і магнітну проникність заліза. Явище гістерезису не урахувувати.
- 3.78. На сталеве кільце намотано в один шар  $N = 500$  витків дроту. Середній діаметр кільця  $d= 20\text{см}$ . Знайти індукцію магнітного поля у сталі і магнітну проникність сталі, якщо сила струму в обмотці: 1)  $0,5\text{А}$ ; 2)  $1\text{А}$ ; 3)  $2,5\text{А}$ . Провести аналогічні розрахунки для залізного та чавунного кільця.
- 3.79. Скільки ампер-витків на  $1\text{см}$  необхідно для того, щоб отримати магнітний потік  $\Phi=500\text{мкВб}$  у залізному осередді замкненого соленоїда (тороїда), якщо переріз осереддя дорівнює  $S=5\text{см}^2$ ?
- 3.80. Соленоїд складається з  $N=800$  витків і має діаметр  $d=5\text{см}$ . Через обмотку протікає струм  $I=2,5\text{А}$ . Соленоїд має залізне осереддя. Індуктивність соленоїда за таких умов  $L=0,5\text{Гн}$ . Визначити магнітну проникність  $\mu$  залізного осереддя.
- 3.81. Визначити енергію магнітного поля котушки, яка містить  $N=120$  витків, якщо при струмі  $I=5\text{А}$  магнітний потік в ній дорівнює  $\Phi_1 = 2,5 \cdot 10^{-3}\text{Вб}$ .
- 3.82. Соленоїд довжиною  $l=0,5\text{м}$  і діаметром  $d=1,6\text{см}$  має індуктивність  $L=0,18\text{мкГн}$ . Який струм  $I$  треба пропустити крізь соленоїд для того, щоб об'ємна густина енергії всередині соленоїда дорівнювала  $W_0=1,2\text{мДж/м}^3$ ?
- 3.83. Довгий соленоїд індуктивністю  $L=4\text{мГн}$  містить  $N=600$  витків. Площа поперечного перерізу соленоїда  $S=20\text{см}^2$ . Визначити магнітну індукцію поля в середині соленоїда, якщо сила струму в соленоїді дорівнює  $6\text{А}$ .
- 3.84. Соленоїд намотано на залізне осереддя, площа поперечного перерізу якого  $S=5\text{см}^2$ . При силі струму  $I = 5\text{А}$  магнітний потік  $\Phi = 200\text{ мкВб}$ . Визначити кількість витків, що припадають на одиницю довжини соленоїда.
- 3.85. Соленоїд індуктивністю  $L=0,2\text{Гн}$  і опором  $R=90\text{ Ом}$  підключений до джерела з напругою  $U=170\sin\omega t\text{ В}$ . Визначити амплітудне значення сили струму, який тече крізь соленоїд.
- 3.86. Електричне коло складається з конденсатора ємністю  $C=18\text{мкФ}$  і активного опору  $R=100\text{ Ом}$ . Ефективне значення прикладеної напруги  $U=120\text{ В}$ ; частота  $\nu=50\text{Гц}$ . Визначити силу струму  $I$  у колі;  $\cos\phi$ ; потужність  $P$  струму.



3.87. Конденсатор підключено до мережі змінного струму, частота якого  $\nu=50$  Гц, а амплітудне значення напруги  $U=400$  В. Ефективне значення сили струму у колі  $I=2$  А. Знайти ємність  $C$  конденсатора.

3.88. У мережі змінного струму напругою  $U=220$  В і частотою  $\nu=50$  Гц підключені послідовно конденсатор ( $C=35,4$  мкФ), активний опір ( $R=100$  Ом) і індуктивність ( $L=0,7$  Гн). Визначити силу струму  $I$  у колі і напругу на конденсаторі; активному опорі і індуктивності.

## Тести

### Вибрати вірну відповідь:

1. Силовою характеристикою магнітного поля є
  1. магнітний момент;
  2. вектор намагніченості;
  3. магнітна індукція;
  4. індуктивність.
2. Не залежить від магнітних властивостей речовини, в якій створено магнітне поле,
  1. магнітна індукція поля;
  2. напруженість магнітного поля;
  3. магнітний потік;
  4. вектор намагніченості.
3. Заряджена частинка, яка рухається, утворює
  1. електричне поле;
  2. магнітне поле;
  3. обидва поля;
  4. жодне з указаних полів.
4. Магнітний момент контуру зі струмом залежить від:
  1. орієнтації рамки;
  2. струму у контурі;
  3. площини поверхні, яка обмежена контуром;
  4. магнітної індукції поля.
  5. усіх перелічених величин.
5. **Установити відповідність** між величиною та одиницею її вимірювання в СІ:

1. магнітний момент контуру зі струмом	А. Вб (вебер);
2. магнітна індукція	Б. А/м;
3. напруженість магнітного поля	В. Тл (тесла)
4. магнітний потік	Г. Гн (генрі)
5. індуктивність	Д. $A \cdot m^2$

### Вибрати вірну відповідь:

6. Момент сил, що діє на контур (рамку) зі струмом у магнітному полі, залежить від
  1. орієнтації рамки;
  2. струму у контурі;
  3. площини поверхні, яка обмежена контуром;
  4. магнітної індукції поля;
  5. усіх перелічених величин.
7. Момент сил, що діє на рамку зі струмом у магнітному полі приймає максимальне значення, якщо
  1. площа рамки перпендикулярна силовим лініям магнітного поля;
  2. площа рамки паралельна силовим лініям магнітного поля;
  3. магнітний момент рамки зі струмом перпендикулярний силовим лініям магнітного поля;
  4. кут між силовими лініями і нормаллю до рамки дорівнює  $90^\circ$ .
8. Момент сил, що діє на рамку зі струмом у магнітному полі дорівнює нулю, якщо
  1. площа рамки перпендикулярна силовим лініям магнітного поля;
  2. площа рамки паралельна силовим лініям магнітного поля;
  3. магнітний момент рамки зі струмом паралельний силовим лініям магнітного поля;
  4. кут між силовими лініями і нормаллю до рамки дорівнює  $0^\circ$ .
9. Сила Ампера, що діє на елемент струму з боку магнітного поля, залежить від
  1. орієнтації елемента провідника;
  2. величини струму;
  3. магнітної індукції поля;
  4. довжини провідника;
  5. усіх перелічених величин.

10. Сила Ампера, що діє на елемент струму з боку магнітного поля, має максимальне значення, якщо

1. напрям елемента струму співпадає з силовими лініями поля;
2. напрям елемента струму перпендикулярний до силових ліній магнітного поля;
3. кут між напрямом елемента струму та силовими лініями поля дорівнює нулю;
4. величина кута між напрямом елемента струму та силовими лініями поля не впливає на силу Ампера.

11. Сила Лоренца, що діє на заряджену частинку, яка рухається в магнітному полі, залежить від

1. напрям руху частинки;
2. величини заряду;
3. швидкості руху частинки;
4. магнітної індукції поля;
5. усіх перелічених величин.

12. Установити відповідність між напрямом руху частинки в магнітному полі та формою траєкторії.

Напрямок руху	Траєкторія
1. під гострим кутом до ліній магнітної індукції;	А. коло;
2. перпендикулярно до ліній магнітної індукції;	Б. еліпс;
3. вздовж ліній магнітної індукції;	В. коло;
	Г. пряма лінія;

**Вибрати вірну відповідь:**

13. Сила Лоренца, що діє на заряджену частинку, яка рухається в магнітному полі, дорівнює нулю, якщо

1. напрям руху частинки співпадає з силовими лініями поля;
2. напрям руху частинки перпендикулярний до силових ліній магнітного поля;
3. кут між напрямом руху частинки та силовими лініями поля дорівнює  $90^\circ$ ;
4. величина кута між напрямом руху частинки та силовими лініями поля не впливає на силу Лоренца.

14. Якщо сила Лоренца, що діє на позитивно заряджену частинку, дорівнює половині максимальної, швидкість руху частинки напрямлена

1. вздовж ліній магнітної індукції поля;
2. під кутом  $30^\circ$  до ліній магнітної індукції поля;
3. під кутом  $45^\circ$  до ліній магнітної індукції поля;
4. перпендикулярно до ліній магнітної індукції поля.

15. Закон Біо-Савара-Лапласа у скалярній формі має вигляд:

$$1. B = \mu\mu_0 H; \quad 2. \oint_S d\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0; \quad 3. B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{\sin \alpha dl}{r^2}; \quad 4. B = \frac{\mu\mu_0 I}{2r}.$$

16. Установити відповідність між формулою та її змістом

1. Магнітна індукція поля провідника із струмом у формі кола в центрі кола;
2. Магнітна індукція поля провідника із струмом у формі кола на осі на відстані  $a$  від площини кола;
3. Магнітна індукція поля, створеного прямолінійним провідником нескінченної довжини зі струмом  $I$ , на відстані  $r$  від провідника;
4. Магнітна індукція поля на осі соленоїда нескінченної довжини;
5. Магнітна індукція поля, створеного рухомим зарядом,

Формула:

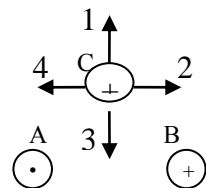
$$A. B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}; \quad B. B = \mu_0 \mu n I; \quad C. B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}; \quad D. B = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}}.$$

**Вибрати вірну відповідь:**

17. Магнітний потік через деякий контур залежить від  
1. площини поверхні, яка обмежена контуром; 2. магнітної індукції поля;  
3. орієнтації контуру в магнітному полі 4. справедливим є все, що перелічене.
18. Магнітний потік через замкнену поверхню залежить  
1. від форми поверхні; 2. від магнітної індукції поля;  
3. від орієнтації замкненої поверхні; 4. дорівнює нулю.
19. Лінії магнітної індукції (силові лінії магнітного поля)  
1. є паралельними прямими; 2. починаються і закінчуються на нескінченності;  
3. завжди замкнені; 4. ніколи не замикаються самі на себе.
20. Величина електрорушійної сили індукції визначається  
1. за законом Біо-Савара-Лапласа; 2. за законом Ампера;  
2. за законом Фарадея; 4. за формулою сили Лоренца.
21. Індуктивність соленоїда залежить від  
1. наявності осереддя; 2. розміру витка;  
3. кількості витків; 4. справедливим є все, вище перелічене.
22. При внесенні сталевого осереддя у соленоїд його індуктивність  
1. зменшується; 2. збільшується; 3. не змінюється.
23. Індуктивність контуру, який знаходиться у вакуумі, залежить від  
1. сили струму у контурі;  
2. магнітного потоку, який пронизує контур;  
3. матеріалу провідника, з якого зроблений контур;  
4. форми і розмірів контуру.
24. Величина індукційного струму, який виникає в замкненому провідному контурі залежить від  
1. магнітного потоку, який пронизує контур;  
2. зміни магнітного потоку, який пронизує контур;  
3. швидкості зміни магнітного потоку, який пронизує контур;  
4. серед наведених немає вірної відповіді.
25. Залежність між ЕРС індукції та швидкістю зміни магнітного потоку є  
1. прямо пропорційною; 2. обернено пропорційною; 3. експоненціальною;  
4. прямо пропорційною квадрату швидкості зміни магнітного потоку.
26. Енергія магнітного поля соленоїда при збільшенні сили струму в ньому в 3 рази  
1. збільшиться у 3 рази; 2. збільшиться у 9 разів;  
3. зменшиться у 3 рази; 4. зменшиться у 9 разів.
27. Використовують для виготовлення а) постійних магнітів; б) електромагнітів  
1. м'які феромагнетики; 2. жорсткі феромагнетики;  
3. обидва види феромагнетиків; 4. ані жодний з них.
28. Установити відповідність між видом магнетика та його характеристиками магнітних властивостей:

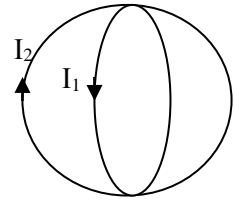
- |                  |                              |
|------------------|------------------------------|
| 1. діамагнетики  | А. $\chi > 0; \mu > 1$       |
| 2. феромагнетики | Б. $\chi < 0; \mu < 1$ .     |
| 3. парамагнетики | В. $\chi \gg 0; \mu \gg 1$ . |

29. На рисунку показані перерізи трьох прямих нескінчених провідників (А, В та С), по яких течуть однакові за величиною струми. Напрямок сили, що діє на провідник С з боку магнітних полів провідників А та В при заданих напрямках струмів співпадає з напрямком вектора



1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

30. Два контури приблизно рівного діаметра підвішені так, що можуть обертатися відносно вертикальної осі. Якщо по них пропустити струми у заданих на рисунку напрямках, внаслідок магнітної взаємодії контури



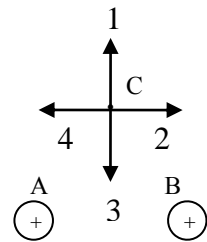
1. розмістяться в одній площині так, що струми в них будуть текти в одному напрямі;

2. розмістяться у взаємно перпендикулярних площинах так, що струми в них будуть текти в одному напрямі;

3. розмістяться в одній площині так, що струми в них будуть текти у протилежних напрямках;

4. розмістяться у взаємно перпендикулярних площинах так, що струми в них будуть текти у протилежних напрямках.

31. На рисунку показані перерізи двох прямих нескінчених провідників зі струмами (А та В), однаковими за величиною. Напрямок вектора магнітної індукції у точці С магнітного поля провідників А та В при заданих напрямках струмів співпадає з напрямком вектора



1. 1; 2. 2; 3. 3; 4. 4.

32. Електрон і протон та  $\alpha$ -частинка (ядро гелію) влітають з однаковою швидкістю в однорідне магнітне поле. Коло найменшого радіуса описує

1. електрон;

2. протон;

3.  $\alpha$ -частинка;

4. радіуси траєкторій частинок однакові.

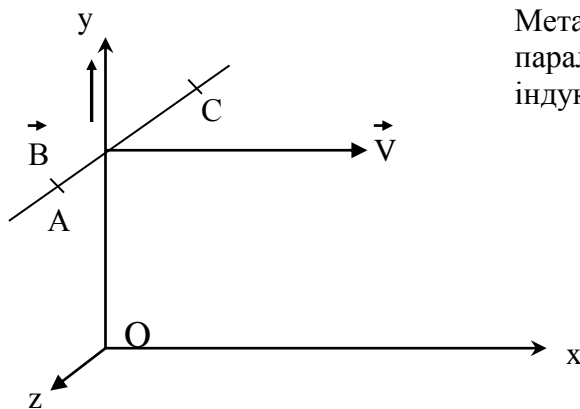
33. Два електрони рухаються в однорідному магнітному полі по колу, причому радіус кола першого електрона у два рази більший за радіус другого кола ( $\frac{R_1}{R_2} = 2$ ). Для швидкостей цих частинок справедливе співвідношення:

1.  $v_1/v_2 = 4$ ; 2.  $v_2/v_1 = 2$ ; 3.  $v_1/v_2 = 2$ ; 4.  $v_1 = v_2$ .

34. Два електрони рухаються в однорідному магнітному полі по колу, причому радіус кола першого електрона у два рази більший за радіус другого кола ( $\frac{R_1}{R_2} = 2$ ). Для періодів обертання цих частинок справедливе співвідношення:

1.  $\frac{T_1}{T_2} = 4$ ; 2.  $\frac{T_2}{T_1} = 2$ ; 3.  $\frac{T_1}{T_2} = 2$ ; 4.  $T_1 = T_2$ .

35.



Металевий дріт АС рухається у магнітному полі паралельно площині ХОZ. Лінії магнітної індукції В напрямлені вздовж осі у.

1. Точки А і С мають однакові потенціали;

2. Потенціал точки А вищий за потенціал точки С;

3. Потенціал точки С вищий за потенціал точки А.

36. За 0,5 с магнітний потік, який пронизує контур, збільшився від 1 Вб до 5 Вб. Значення ЕРС індукції, що виникає при цьому в контурі, дорівнює:

1. 8 В;

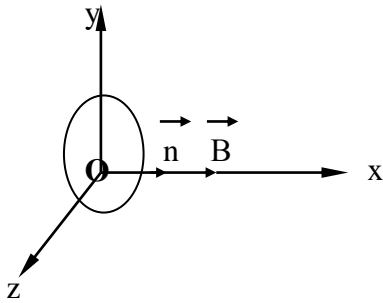
2. 6 В;

3. 4 В;

4. 2 В;

5. 1 В.

37.



Дротяне кільце міститься у магнітному полі перпендикулярно до ліній магнітної індукції  $\vec{B}$ .

У кільці виникає електрорушійна сила

- 1) при зміні магнітної індукції  $B$ ;
- 2) при обертанні кільця навколо осі  $oy$ ;
- 3) при обертанні кільця навколо осі  $ox$ .

38. Два стрижня однакової довжини обертаються у однорідному магнітному полі з однаковою кутовою швидкістю. Вісь обертання співпадає з напрямком індукції  $\vec{B}$ , перпендикулярна до стрижнів і проходить у першого стрижня через його кінець, у другого – через середину. Для ЕРС індукції  $E_i$ , що виникає у стрижнях, справедливе відношення:

$$1. \frac{E_{i1}}{E_{i2}} = 2; \quad 2. \frac{E_{i1}}{E_{i2}} = \frac{1}{2}; \quad 3. \frac{E_{i1}}{E_{i2}} = 4; \quad 4. \frac{E_{i1}}{E_{i2}} = \frac{1}{4}.$$

39. Із кільцевого контуру радіуса  $R$ , який знаходиться в однорідному магнітному полі, зробили квадратний без зміни периметра. Як і у скільки разів зміниться магнітний потік, який пронизує контур?

1. зменшиться у  $\frac{4}{\pi}$  разів;
2. збільшиться у  $\frac{4}{\pi}$  разів;
3. не зміниться.

40. Яке з рівнянь Максвелла для електромагнітного поля відображує

- а) відсутність у природі магнітних зарядів?
- б) вихровий характер електричного поля, утвореного змінним магнітним полем?
- в) можливість утворення магнітного поля електричним?
- г) вихровий характер електричного поля, утвореного змінним магнітним полем?

$$1. \oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad 2. \oint_S d\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad 3. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} \quad 4. \oint_S d\vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

## Додатки

### Фундаментальні фізичні константи:

Гравітаційна стала	$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{ м}^2 / \text{ кг}^2$
Швидкість світла в вакуумі	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Магнітна стала	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Електрична стала	$\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Стала Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{ с}$
Маса спокою електрона	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Маса спокою протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Маса спокою нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Елементарний заряд	$e = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Атомна одиниця маси	$1 \text{ а.о.м.} = 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Стала Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Стала Фарадея	$F = 96,48456 \cdot 10^3 \text{ Кл/моль}$
Молярна газова стала	$R = 8,31441 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{ К)}$
Молярний об'єм ідеального газу при нормальних умовах	$V_0 = 22,41383 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{ моль}$
Стала Больцмана	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$

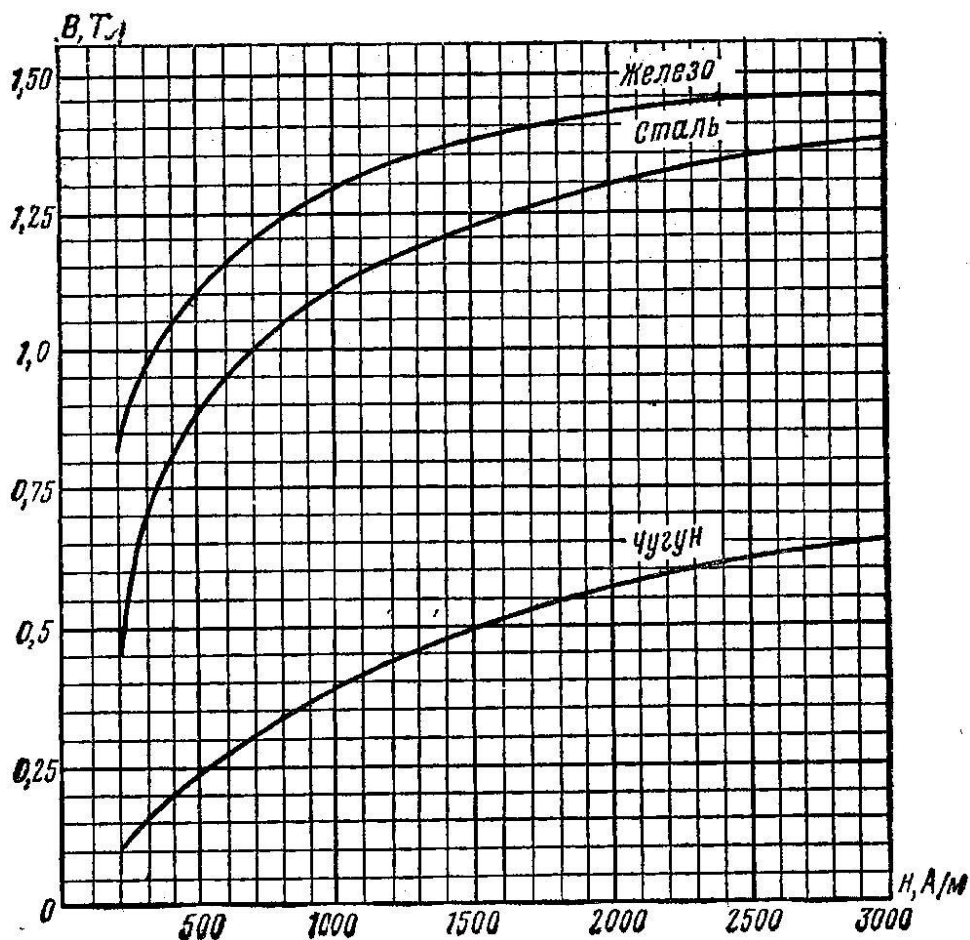
### Діелектрична проникність

Речовина	$\epsilon$	Речовина	$\epsilon$
Вода	81	Масло трансформаторне	2,2
Восковий папір	3,7	Парафін	2
Гас	2	Скло	5,5...10
Ебоніт	2,6	Слюда	6
Кварц	2,7	Фарфор	6

### Питомий опір $\rho$ і температурний коефіцієнт опору $\alpha$ (при температурі $t = 20^\circ\text{C}$ )

Провідник	$\rho, \Omega \cdot \text{m}$	$\alpha, \text{K}^{-1}$	Провідник	$\rho, \Omega \cdot \text{m}$	$\alpha, \text{K}^{-1}$
Алюміній	28	0,0038	Нікелін	400	0,000017
Вольфрам	55	0,0051	Ніхром	980	0,00026
Вугілля	40	-0,0008	Платина	107	0,0039
Графіт	8000	-	Ртуть	958	0,0009
Залізо	98	0,0062	Свинець	211	0,0042
Константан	480	0,00002	Сталь	120	0,006
Мідь	17,2	0,0043			

### Залежність індукції $B$ у феромагнетиках від напруженості магнітного поля $H$



## Предметний покажчик

- Ампер (одиниця струму) 71;107
- Вебер (од. магнітного потоку) 108
- Вектор електричного зміщення 22  
– магнітної індукції 102
- Вольт 16
- Генрі (одиниця індуктивності) 110
- Гістерезис магнітний 114
- Градiєнт 7
- Густина енергії електричного поля 25  
– – магнітного поля 114  
– заряду лінійна 13  
– – поверхнева 13  
– – об'ємна 13  
– струму 71
- Дивергенція 7
- Еквіпотенціальна поверхня 17
- Електричне поле 5
- Електричний диполь 19  
– заряд 5  
– опір 73  
– струм 71
- Електроємність конденсатора 23  
– – плоского 23  
– – сферичного 23  
– – циліндричного 23  
– провідника 23
- Електрон 5
- Електростатика 11
- Електростатична енергія 24  
– індукція 23
- Електрорушійна сила 73  
– індукції 108  
– самоіндукції 110
- Елемент струму 103
- Закон Ампера 106  
– Біо-Савара-Лапласа 103  
– Джоуля-Ленца 76  
– збереження заряду 6  
– індукції електромагнітної 108  
– Кулона 11  
– Ома 74;75  
– – в диференціальній формі 74
- Заряд електричний 5
- Диполь електричний 19  
магнітний
- Дипольний момент 19
- Діамагнетики 114
- Діелектрики 19
- Діелектрична проникність 12; 21  
– сприйнятливість 21
- Джерело струму 72  
– вільний 22  
– зв'язаний 21  
– негативний 5  
– позитивний 5  
– точковий 11
- Індуктивність 110
- Коефіцієнт взаємної індукції 110
- Конденсатор 23
- Лінія напруженості 13  
– магнітної індукції 102
- Лоренца сила 105
- Магнетики 113
- Магнітна проникність 102; 114  
– сприйнятливість 114
- Магнітний потік 107
- Момент дипольний електричний 19  
– струму магнітний 104
- Намагніченість 113
- Напруга електричного поля 73
- Напруженість поля електричного 12  
– – магнітного 104
- Ом (одиниця опору) 74
- Опір електричний 74  
– – внутрішній 75  
– – зовнішній 75  
– питомий 74
- Оператор «набла» 7  
– Лапласа 8
- Парамагнетики 114
- Поле векторне 6  
– вихрове  
– диполя 19

- електричне 5; 12
- електромагнітне 5
- електростатичне 5; 11
- магнітне 102
- однорідне 15
- потенціальне 16
- скалярне 8
- Поляризація діелектриків 19
- Поверхня еквіпотенціальна 17
- Потенціал електростатичного поля 16
- Потік вектора 9
  - – напруженості 14
  - магнітний
- Потужність струму
- Правила Кірхгофа 75
  - лівої руки 105
  - свердлика 105
- Принцип суперпозиції 12; 103
- Провідник 71
- Провідність питома 74
- Тесла (одиниця індукції магнітного поля) 102
- Феромагнетики 1114
- Рівняння неперервності 72
- Різниця потенціалів 16
- Робота сторонніх сил 73
  - струму постійного
- Розгалужені кола 75
- Ротор вектора 7
- Самоіндукція 110
- Сила Ампера 106
  - електрорушійна 73
  - Лоренца 105
  - стороння 72
  - струму 71
- Струм електричний 71
  - постійний 71
- Теорема Гауса 14; 22; 108
  - Остроградського 9
  - Стокса 9
- Циркуляція вектора 9
  - – напруженості 16
  - – магнітної індукції 107

### Іменний покажчик

- Ампер А. 106
- Біо Ж. 103
- Гаус К. 14
- Джоуль Дж. 76
- Ірншоу С. 32
- Кулон Ш. 11
- Лаплас П. 8; 103
- Ленц Е.Х. 109
- Лоренц Л. 105
- Максвелл 115
- Ом Г. 75
- Савар Ф. 103
- Фарадей М. 108



## Література

1. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. т.2.– К.: Техніка, 2001. – 452с.
2. Савельев И.В. Курс физики. т.2. – М.: Наука, 1989. – 480с.
3. Трофимова Т.И. Курс физики – М.: Наука, 1985. – 432с.
4. Детлаф А., Яворский Б.Н. Курс физики. – М.: ВШ, 1989. – 608с.
5. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Оникс 21век, 2005. – 666с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т.3. Электричество – М.: Физматлит, 2006. – 687с.
7. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: ВШ, 1981. – 512с.
8. Новиков С.М. Сборник заданий по общей физике. – М.: Оникс, 2007. – 512с.
9. Контрольні завдання-тести з курсу загальної фізики (під ред. О.І.Герасимова). – К.: ІЗМН, 1997. – 44с.

*Навчальне видання*

**ГЕРАСИМОВ ОЛЕГ ІВАНОВИЧ,  
Андріанова Ірина Сергіївна**

**ФІЗИКА В ЗАДАЧАХ**

(у 5 частинах)

Частина III

**ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ**

Навчальний посібник

Підп. до друку                      Формат 60x84/16    Папір офс.  
Умовн. друк. арк.                      Тираж                      Зам. №  
Надруковано з готового оригінал-макета

---

Одеський державний екологічний університет  
65016, Одеса, вул.Львівська, 15

---