УДК 551.509.328 + 517.938

А.В. Глушков, *д.ф.-м.н.,* **В.Н. Хохлов,** *д.геогр.н.,* **А.А. Свинаренко,** *к.ф.-м.н.*,
Э.Н. Серга, *к.геогр.н.*
Одесский государственный экологический университет

ГЛОБАЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ В АТМОСФЕРНЫХ МОДЕЛЯХ И БАЛАНС УГЛОВОГО МОМЕНТА ЗЕМЛИ

В работе рассмотрены новые подходы к описанию глобальных механизмов в атмосферных моделях и расчету баланса углового момента Земли.
Ключевые слова: *баланс углового момента, атмосферные модели, телеконнекция*

Введение. В современной физике Земли имеется необходимость разработки специальных методов наблюдений за низкочастотными колебаниями неравновесных термодинамических процессов в геосферах [1-31]. До настоящего времени для индикации таких явлений применяют методы физико-статистического анализа и обработки массового материала обычной гидрометеосети. Однако, эти приемы далеки от стандартизации и в некоторой степени уникальны для каждого из указанных долгопериодных процессов. Поэтому развитие методов мониторинга самих низкочастотных процессов планетарного масштаба по наблюдению за некими геофизическими факторами, суммирующими вклады низкочастотных колебаний, особо актуально в современной климатологии [1-15]. В настоящее время эта проблема далека от своего разрешения, хотя ряд косвенных шагов в указанном направлении предпринимался в ряде работ (см., напр., [1-4, 12-14, 26-31]). В основополагающей работе [6] Оорта основное внимание уделено балансу углового момента в планетарных динамических перемещениях воздушных масс. На основе данных радиозондовых измерений Оорт проводит оценку зонального распределения потока относительного углового момента в атмосфере [5, 6]. Наблюдаемый баланс (дисбаланс) углового момента следует в принципе рассчитывать по прямым измерениям ветра в атмосфере и усредняется за год [13, 14]. Угловой момент передается от поверхности Земли (главным образом над океанами) в тропиках и переносится вверх в ячейки Гадлея, затем движется в верхних слоях атмосферы к полюсу и отдается обратно Земле в средних широтах. Имеющий место дисбаланс углового момента остается одной из фундаментальных проблем современной физики Земли. Гидрологический, литосферный и другие факторы, как правило, детально не рассматривались. В настоящей статье предлагается новый подход к расчету баланса углового момента атмосферы с учетом указанных факторов.

Баланс углового момента. Мастерным для баланса углового момента является интегральное вида [6, 14]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho M dV = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^H\int_0^{2\pi} \rho v M d\lambda dz d\varphi + \int_0^H\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\left(p_E^i - p_W^i\right)\cos\lambda dz d\lambda d\varphi + + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_0^{2\pi}\int_0^H \tau_0 a\cos\lambda d\lambda d\varphi dz, \tag{1}$$

где $M = \Omega a^2 \cos^2\lambda + u a \cos\lambda$ – угловой момент; Ω – угловая скорость вращения Земли; λ – широта (λ_1 и λ_2 отделяют широтный пояс между арктическим и полярным фронтами); ρ – плотность воздуха; V – весь объем атмосферы в указанном широтном поясе от уровня моря до $H = \infty$); $p_E^i - p_W^i$ – разность давлений на восточных и западных склонах i-ой горы; z – высота над уровнем моря; τ_0 – напряжение трения на поверхности.

Уравнение (1) является интегральным уравнением относительно углового момента M с ядром ρV (в стационарном варианте левая часть уравнения равна нулю). Функция меридиональной компоненты v непосредственно зависит от вида функции ρ. Функция же u непосредственно введена в неизвестное интегрального уравнения (1). Одновременно u и v связаны с ρ, т.к. поле плотности формирует обе компоненты вектора скорости. Левая часть уравнения (1) не включает в себя компоненту v, что означает задание априори замкнутого цикла углового момента по меридиану. Цикл углового момента вводится в виде усложненной ячейки Гадлея умеренных широт, в которой замыкание циркуляции Гадлея по величине углового момента происходит не в атмосфере, а переходит в океан и далее в литосферу, и в южном направлении циркуляция в ячейке Гадлея по угловому моменту происходит через литосферу вплоть до начала цикла подъема воздушных масс в субтропических широтах. Гидросфере в океанах обычно определяется только зональное направления передачи углового момента, поскольку океан не способен согласовать свои частоты с атмосферными частотами в циркуляционном цикле баланса углового по компоненте скорости v , а только возможно согласование частот по компоненте u. В моменты соприкосновения с литосферой циркуляционная ячейка Гадлея по угловому моменту на севере входит в зону действия арктического фронта, а на момент выхода из литосферы входит в зону действия полярного фронта. Сближение указанных атмосферных фронтов могло бы тогда замкнуть атмосферный цикл баланса по угловому моменту (или уменьшить дисбаланс), не вводя в действие океан и литосферу и в одном частотном диапазоне атмосферных колебаний. Естественно, что сближение арктического и полярного фронтов происходит через комплекс взаимосвязанных циклонических циркуляций, осуществляя телеконнекцию южных циркуляций с северными через ячейку Ферреля умеренных широт. Тропическая ячейка Гадлея осуществляет телеконнекцию полярного фронта с южным процессом аналогичным механизмом связи тропического и полярного фронтов или тропической ячейкой Гадлея с ячейкой Гадлея умеренных широт [13, 14].

С точки зрения физики, цикл баланса углового момента в зонах соприкосновения с гидросферой и с литосферой приобретает сингулярность. Эта сингулярность может быть выявлена через возникновения зон фронтальных разделов и в солитонах типа фронта. Тогда ядро уравнения (1) может быть задано в поле плотности функциональным ансамблем комплексного потенциала скорости (см. [13])

$$w=\overline{v_{\infty}}z+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}q_k\ln(z-a_k)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p}\frac{M_k e^{\alpha_k i}}{z-c_k}-\frac{i}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\Gamma_k\ln(z-b_k) \qquad (2)$$

и комплексная скорость соответственно будет

$$v=\frac{dw}{dz}=\overline{v_{\infty}}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{z-a_k}-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{p}\frac{M_k e^{\alpha_k i}}{(z-c_k)^2}-\frac{i}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\Gamma_k/(z-b_k), \qquad (3)$$

где w – комплексный потенциал; v_{∞} – комплексная скорость общего циркуляционного фона (в основном зональная циркуляция); b_k – координаты вихреисточников в зоне сингулярности; c_k – координаты диполей в зоне сингулярности; a_k – координаты вихревых точек в зонах сингулярности; M_k – величины моментов указанных диполей; α_k – ориентация осей диполей; Γ_k, q_k – величины циркуляций в вихреисточниках и в вихревых точках соответственно.

Ядро интегрального уравнения (3) становится сингулярным типа Коши и Гильберта. Связь поля плотности с полем комплексного потенциала или с полем комплексной скорости тривиальна посредством уравнений теории «мелкой воды», по модели изложенной, например, в работе [14]. Метод решения уравнений типа (1) в принципе хорошо отработан. Поскольку ядро через функциональный ансамбль комплексного потенциала скорости содержит особенности вида $1/(\zeta - t)$ и т.д., то удобно воспользоваться связью ядер Гильберта и Коши

$$\frac{d\zeta}{\zeta - t} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\zeta + p(s,\sigma)d\sigma. \qquad (4)$$

Функция $p(s,\ \sigma)$ соответствует условию: $\zeta = t(\sigma)$, где $t(s) = x(s) + iy(s)$ и определяет фактор зональности по весам диполей в формуле (3). В стационарном варианте формула (3) является лишь неким автомодельным приближением. Тогда, в общем виде, сингулярное интегральное уравнение можно свести к уравнению

$$a(s)\varphi(s) + \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma + \int_0^{2\pi}K(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma = f(s). \qquad (5)$$

Фронтальный раздел задается по формуле [14]

$$v_x - iv_y = \frac{\Gamma}{2\pi i}ctg\frac{\pi}{l}(z - z_0), \qquad (6)$$

а ядро $K(s,\sigma)$ вместе с функциями $a(s)$, $b(s)$ и $f(t)$ задают весовые вклады вихреисточников во фронтальном разделе типового фронта при v (3), соответствующей форме циркуляции. В (5) и (6) опущена операция конформного преобразования прямолинейного фронта к реальной линии фронта. Но в модельном эксперименте криволинейные участки фронтов допустимо заменить прямыми линиями, не особо искажая сущность процесса. Уравнение (6) можно переписать, используя, согласно [13], оператор

$$M\omega = a(s)\omega(s) - \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(s)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma. \qquad (7)$$

Тогда (7) переходит в уравнение Фредгольма. Операция (7) выполняется в дальнейшем численно с использованием метода разложения в ряд Лорана и применения теории вычетов. Для уравнений с ядрами Коши, применяемых для описания не вихревых, а чисто дипольных ситуаций (см. соответствующие члены в (3))

$$a(t)\varphi(s) + \frac{b(t)}{2\pi}\oint_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t}dt + \oint_L K(t,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta = f(t) \qquad (8)$$

применяется интегрирование по контуру с помощью вычетов сразу. Все зависит от реальной сходимости рядов Лорана и количества необходимых аналитических продолжений. Переход к уравнению Фредгольма для (8) выполняется оператором

$$M\omega = a(t)\omega(t) - \frac{b(t)}{2\pi}\oint_L\frac{\omega(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta. \qquad (9)$$

Решение уравнений Фредгольма выполняется далее по стандартной схеме [14].

Сингулярность в полях метеоэлементов и баланс углового момента. Модель Аракавы. Решение полученного сингулярного интегрального уравнения относительно углового момента, заданного регулярной функцией, дает возможность как оценки веса сингулярности в поле углового момента, так и в оценке атмосферного вклада в сам баланс углового момента. Разрывы в полях метеоэлементов, сопровождающие явление атмосферного фронта формируют сингулярные особенности указанных полей в узких зонах фронтальных разделов, которые обычно параметризируются регулярными функциями вихреисточников в вихревых структурах и функциями диполей, отражающих динамику конвективных гряд облачности

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\frac{M_k e^{\alpha_k i}}{(z - c_k)^2}}_{\text{диполи}} \qquad \underbrace{\frac{i}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\Gamma_k\ln(z - b_k)}_{\text{вихреисточники}}.$$

Баланс углового момента при близком расположении арктического и полярного фронтов над океанами (что, почти, всегда всесезонно), а над континентами в летнее время и в переходные сезоны, в основном соблюдается посредством центробежной «тяги» влаги вдоль линии фронтального раздела полярного фронта к югу от центра циклонической депрессии. Искомый механизм для атмосферного фронта ранее отработан в [14]. Общий поток массы в отдельном облаке, а также и в системе облаков, по методу Аракавы имеет вид

$$M(z) = \int m(z,\lambda)d\lambda = \int m_B(\lambda)\eta(z,\lambda)d\lambda\,, \tag{10}$$

где η – функция, характеризующая кумулятивный эффект втекания; сам эффект втекания происходит за время значительно меньшее, чем как-либо заметно обнаружатся изменения в горизонтально-ориентированном процессе; z – высота над уровнем основания облака; m – масса воздуха; m_B – поток массы у оснований облаков, который определяется величиной скорости вовлечения λ. Далее в модели Аракавы записываются мощностные соотношения (вводя функцию механического взаимодействия облачных ансамблей через механизмы вовлечения $K(\lambda, \lambda')$)

$$\frac{dA}{dt}_{up} + \frac{dA}{dt}_{down} = 0\,, \quad \frac{dA}{dt}_{down} = F(\lambda)\,, \quad \frac{dA}{dt}_{up} = \int\limits_0^{\lambda_{\max}} K(\lambda,\lambda')m_B(\lambda')d\lambda''\,, \tag{11}$$

где первое слагаемое слева – изменение работы восходящих токов в конвективном облаке, а второе – соответственно нисходящих в окрестности облака. Из (11) следует

$$\int\limits_0^{\lambda_{\max}} K(\lambda,\lambda')m_B(\lambda')d\lambda' + F(\lambda) = 0\,. \tag{12}$$

Интегральное уравнение относительно $m_B(\lambda)$ решается при заданных функциях ядра K и F. Для расчета вида ядра K используется уравнения Больцмана

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \xi_i\frac{\partial K}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial t}\frac{\partial K}{\partial \xi_i} = J(t,x,\xi)\,, \tag{13}$$

где (x,ξ) – 6-тимерное фазовое пространство координат (x_1, x_2, x_3) и скоростей вовлечения (ξ_1, ξ_2, ξ_3); J – интеграл взаимодействия облачных систем. Решение уравнения (13) находится интегрированием уравнения от начального условия в виде распределения Максвелла. Решение уравнения (12) тривиально сводится к решению системы алгебраических уравнений, что определяет m на всем интервале λ. Отметим, что, когда втекание отсутствует, величина λ равняется нулю. Далее

$$\frac{d\eta}{dz} = \lambda\eta\,. \tag{14}$$

При различных λ величина η растет по разному и на уровне z_D (верхняя граница облака) величина λ опять обращается в нуль. То есть λ отнюдь не константа, а полностью определяет величину η по всему интервалу $(z_D - z_B)$, и на некотором уровне z в пределах этого интервала величина η достигает max. Величины λ и z_D определяются из решения системы:

$$\begin{gathered} E - D - \frac{\partial M_c}{\partial z} = 0\,, \\ \widetilde{E}_s - \widetilde{D}_{S_C}\frac{\partial M_c S_c}{\partial z} + \rho Lc = 0\,, \\ \widetilde{E}_q - \widetilde{D}_{q_C}\frac{\partial M_c q_c}{\partial z} + \rho c = 0\,, \end{gathered} \tag{15}$$

где E – втекание, D – вытекание, $M_c = \sum \rho w_i\sigma_i = \rho w_c\sigma$ – вертикальный поток массы воздуха в облаке (w_i – средняя по сечению вертикальная скорость в i-ом облаке, σ – площадь горизонтального сечения i-го облака); w_c, $S_c = c_pT$ и q_c – средневзвешенные значения вертикальной скорости, статической энергии и отношения смеси водяного пара; S, q – средние значения статической энергии и отношения смеси водяного пара в окружающем облако воздухе, ρ – плотность воздуха; c – количество сконденсировавшейся влаги.

Критерий углового момента является комплексным, так как замыкает на себя целую серию физических механизмов, причем в долгосрочном плане. Нарушение баланса углового момента требует моментального вмешательства всех сред для устранения дисбаланса. При каждой форме циркуляции должен быть свой цикл дисбаланса, в котором участвуют ячейки Гадлея, Ферреля и влагооборот, непосредственно связанный с фронтальной деятельностью арктического, полярного и тропического фронтов. По причине дисбаланса углового момента возникает динамизм климатических фронтов, являющихся основным механизмом влагооборота. Один из наиболее обоснованных механизмов ликвидации дисбаланса, введенный Ортом, сводится к тому, что дисбаланс углового момента ликвидируется передачей его через литосферу, скорее всего, через транспирацию влаги в слое подземной гидрологии. Уместно упомянуть предсказание огромных водных массивов в подземной гидрологии, в частности, в районах пустынь [24]. Более корректный механизм отработан в работах [13, 14, 24, 25]. Проблемой, однако, остается совмещение частотных разверток механизмов передачи углового момента через атмосферу и литосферу. Возможно, еще один вклад может быть обусловлен существованием в ядре земли естественного ядерного геореактора [1, 31]. С другой стороны, аналогично процесс телеконнекции, связанный с Эль-Ниньо через южный процесс, согласно [24, 25, 27, 29], должен частотно совпадать с процессом восстановления баланса углового момента. Причем, восстановление баланса углового момента – это непрерывный процесс, который не может иметь даже мгновенного разрывного перехода из атмосферы в литосферу или гидросферу. Очевидно, что восстановление баланса углового момента требует ощутимой реакции атмосферы, выражающейся в движении основных фронтов относительно друг друга. Процесс телеконнекции тоже тогда прямо связан с движением циркумполярных вихрей, а тем самым и фронтов. Фронты, являющиеся транспортером влаги на большие расстояния, создают суммарный ток вовлечения по всему протяжению фронта. Если процесс идет в хорошо выраженном циклоне, то движение влаги идет вдоль линии фронта из центра циклона к его периферии (в основном, следовательно, с севера на юг) следуя центробежному ускорению. Тем самым, может замыкаться баланс углового момента. Направление с севера на юг противоположно направлению движения влаги в системе влагооборота с юга на север, когда теплые, насыщенные большей концентрацией влаги воздушные массы, охлаждаясь в процессе трансформации при движении к северу, выделяют избыток влаги осадками, совершая в целом влагооборот с юга на север. Однако, это не атмосферный влагооборот, а смесь гидросферного и атмосферного влагооборота. Попав в гидросферу, поля влаги меняют частотный спектр с атмосферного высокочастотного на низкочастотный гидросферный. Различные формы циркуляции (см. детали в [12, 13]): W_3, W_{M1}, W_{M2}, E_3, E_{M1}, E_{M2}, C_3, C_{M1}, C_{M2}, но в основном $З$, M_1, M_2, суммируют эти процессы. Можно считать тогда, что смена форм циркуляции определяется циклами согласования балансов углового момента через систему фронтального атмосферного влагооборота. Точнее говоря, эта гипотеза, которая вытекает из логики происходящих процессов в системе атмосферного влагооборота и баланса углового момента, связанная однозначно с процессами телеконнекции, Эль-Ниньо и южным процессом. Есть ли процесс замыкания баланса углового момента через подземный влагооборот и тектонические движения (ядерный геореактор) и в какой мере он согласуется с указанными выше процессами является равнозначной гипотезой, находящейся в настоящее время в стадии отработки. Находясь на стороне первой гипотезы, мы все же оставляем часть энергетической нагрузки и на вторую гипотезу. Поэтому, на самом деле, следует решать уравнение баланса углового момента (1) относительно M в нестационарном варианте. В стационарном варианте искомое замыкание цикла баланса углового момента проходит только по атмосферным процессам. Нас интересует альтернативный второй вариант, и решение нестационарного уравнения (1) дает возможность рассмотреть частотные развертки всех входящих в него компонент. В этому случае при появлении разсогласованности частотных спектров следует отдать определенную долю энергетики в сторону тектонических процессов и подземной гидрологии.

Модель низкочастотных атмосферных движений. Спектральный аналог для уравнений динамики атмосферы в низкочастотном диапазоне. Форма атмосферной циркуляции меняет свое положение в пространстве, и интенсивность проявления колеблется в периоде до нескольких суток, тогда как внутри нее реализуются процессы, длящиеся несколько минут, например, выпадение осадков. Уравнения гидродинамики разумно настраиваются на высокочастотные процессы в атмосфере типа эволюции циклонического образования в периоде до двух суток, но совершенно не способны хорошо описывать низкочастотные процессы типа смены форм циркуляции. В то же время уравнения макротурбулентного режима атмосферы низкочастотны по своей основе и имеется достаточно большой опыт их решения на базе спектральных методов [3, 4, 14, 31]. Это позволяет применить их в наших целях для математического моделирования процессов смены форм циркуляции и соответственно для математической параметризации гомологов циркуляции [13, 14]. Для решения указанного вопроса привлекают модель прогноза моментов связи, известных нам из системы уравнений Рейнольдса, где вводится понятие среднего и флуктуационного движения, а именно

$$u = \overline{u} + u',\quad v = \overline{v} + v',\quad w = \overline{w} + w',\quad \Phi = \overline{\Phi} + \Phi',\quad \theta = \overline{\theta} + \theta',$$

где Φ – геопотенциал, θ – потенциальная температура. Тогда уравнения Рейнольдса, как обычно, можно записать в виде

$$\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u}_k \overline{u}_j + \overline{u'_k u'_j}\right] = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x_j} - \delta_{j3}\frac{q\overline{\theta}}{\theta_0}, \qquad (16)$$

где $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$; $\delta_{ij} = 1$, $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$, и при повторении индекса в одночленном выражении дважды суммирование проводится от 1 до 3. В уравнениях (16) не учтена сила Кориолиса, что будет сделано далее. Добавим уравнение первого начала термодинамики

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u}_k \overline{\theta} + \overline{u'_k \theta'}\right] = 0\,. \qquad (17)$$

Здесь и далее в уравнениях опускаются члены, описывающие воздействие факторов турбулентного обмена и турбулентной теплопроводности, т.к. в процессах планетарного масштаба указанные факторы описываются с отличием от стандартных параметризаций. Напряжения Рейнольдса в турбулентном движении параметризуют следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u'_k u'_j}\right] = K\Delta \overline{u}_j \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u}_k \overline{\theta} + \overline{u'_k \theta'}\right] = K\Delta \overline{\theta}\,,$$

где K – коэффициент турбулентности, который существенно отличен по величине для турбулентных горизонтальных вихрей, горизонтально-вертикальных и чисто вертикальных. Параметризация с помощью коэффициента турбулентности с очень большой степенью приближения применяется в моделях приземного слоя, где используется концепция изотропности вихревого движения во всех трех направлениях пространства. Но в планетарных процессах, где турбулентные вихри в горизонтальном направлении по масштабу на несколько порядков отличаются от вертикальных, такое приближение совершенно недопустимо. Поэтому применяют уравнения для прогноза напряжений Рейнольдса как мастерные модели замыкания для нелинейных процессов. Их вывод стандартен

$$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t} = \overline{u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial t}} + \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial t}}.$$

Уравнения движения и первого начала термодинамики для флуктуаций, следуя правилам вывода уравнений Рейнольдса, соответственно будут иметь форму

$$\frac{\partial u_j'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u}_j u_k' + \overline{u}_k u_j' + u_j' u_k' - \overline{u_j' u_k'}\right] = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x_j} - \delta_{j3}\frac{q\theta'}{\theta_0},$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{\theta} u_k' + \overline{u}_k \theta' + u_k'\theta' - \overline{u_k'\theta'}\right] = 0. \qquad (18)$$

Тогда система уравнений замыкания может быть выписана в следующем виде:

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u}_k \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_k u'_i u'_j}\right] + \frac{\partial \overline{\Phi' u'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\Phi' u'_j}}{\partial x_i} =$$

$$= -\overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - \frac{q}{\theta_0}\left(\delta_{j3}\overline{u'_j \theta'} + \delta_{j3}\overline{u'_i \theta'}\right) + \overline{\Phi'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)}, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u}_k \overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_k u'_i \theta'}\right] + \frac{\partial \overline{\Phi'\theta'}}{\partial x_i} = \overline{\Phi'\frac{\partial \theta'}{\partial x_i}} - \overline{u'_i u'_k}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \overline{\theta' u'_k}\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \delta_{i3}\frac{q}{\theta_0}\overline{\theta'^2}, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u}_k \overline{\theta'^2} + \overline{u'_k \theta'^2}\right] = -2\overline{u'_k \theta'}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}. \qquad (21)$$

Таким образом, имеются 16 уравнений относительно напряжений Рейнольдса и моментов связи пульсаций проекций скоростей с пульсациями энтропии, так как $dS = c_p d\ln\theta$, где S–энтропия, c_p–удельная теплоемкость изобарического процесса. Тогда $b^2 = \overline{u'_k u'_k}$ – кинетическая энергия флуктуаций; $\overline{\theta'^2}$ –мера активности процесса, как непосредственно связанная с дисперсией энтропии S; $\overline{u'_i \theta'}$ – мера связи динамических деформаций с активностью процесса. Отождествление энтропии и активности процесса показано, например, в [29]. Неизвестные в системе уравнений (19)-(21) можно объединить в 4-тензор:

$$\begin{vmatrix} \overline{u_1'^2} & \overline{u_1'u_2'} & \overline{u_1'u_3'} & \overline{u_1'\theta'} \\ \overline{u_2'u_1'} & \overline{u_2'^2} & \overline{u_2'u_3'} & \overline{u_2'\theta'} \\ \overline{u_3'u_1'} & \overline{u_3'u_2'} & \overline{u_3'^2} & \overline{u_3'\theta'} \\ \overline{\theta' u'_1} & \overline{\theta' u'_3} & \overline{\theta' u'_3} & \overline{\theta'^2} \end{vmatrix}. \qquad (22)$$

Для решения уравнений (19)-(21) необходимо выполнить расчет величин

$$\overline{u_i'u_j'u_k'}, \quad \overline{u_k'u_j'\theta'}, \quad u_i'\theta'^2, \quad \overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}, \quad \overline{p'\frac{\partial \theta'}{\partial x_i}}. \qquad (23)$$

Для этого величины (23) пытаются представить в виде определенных линейных комбинаций компонент тензора (22) и параметра $b^2 = \overline{u'_k u'_k}$, который соответствует кинетической энергии флуктуаций и определяется из уравнения для осредненной энергии флуктуаций, являющегося следствием уравнений (21)

$$\frac{\partial b^2}{\partial t}+\frac{\partial u_k b^2}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u'_k u'_i u'_j}+2\overline{u'_k p}\right)=-2\overline{u'_k u'_i}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k}-2\frac{q}{\theta_0}\overline{w'\theta'}+\varepsilon\,. \tag{24}$$

Искомые уравнения учитывают адвекцию, турбулентную диффузию, влияние сил давления, взаимодействие напряжений Рейнольдса и среднего движения, генерацию за счет сил плавучести, диссипацию (см. также [14, 23]). Следуя стандартным гипотезам замыкания, можно выписать систему соответствующих уравнений:

$$\overline{u'_i\,u'_j\,u'_k}=-b\lambda_1\left(\frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial x_k}+\frac{\partial\overline{u_i u_k}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_i u_k}}{\partial x_i}\right),$$

$$\overline{u'_k\,u'_j\,\theta'}=-b\lambda_2\left(\frac{\partial\overline{u'_k\,\theta'}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u'_j\,\theta'}}{\partial x_k}\right),$$

$$\overline{u'_i\,\theta'^2}=-b\lambda_3\left(\frac{\partial\theta'^2}{\partial x_i}\right), \tag{25}$$

$$\overline{p'\frac{\partial\theta'}{\partial x_i}}=-\frac{b}{3l_1}\overline{u'_i\,\theta'}-\frac{1}{3}\delta_{i3}\frac{q}{\theta_0}\overline{\theta'^2},$$

$$p'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)=-\frac{b}{3l_1}\left(\overline{u'_i\,u'_j}-\frac{1}{3}\delta_{ij}b^2\right)+cb^2\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right).$$

Здесь c, l_1, λ_i – константы, задающие масштабы турбулентных вихрей и меру их влияния на среднее движение, а также анизотропность атмосферной турбулентности. Система уравнений (25) выписана без достаточного обоснования в смысле ее применения для движений разных масштабов. Если для турбулентности в масштабах нескольких метров ее обоснованность можно подтвердить экспериментальным путем, то в крупномасштабных процессах, в движениях планетарного масштаба ее обоснованность подлежит отдельному доказательству. Это можно выполнить, если четко задан спектр пульсаций и спектр среднего движения. Тогда, либо система (25) выполняется с заданной точностью для двух отделенных спектральных интервалов среднего и пульсационного движений соответственно, или проблема замыкания решается иным методом. По точности решения задачи замыкания можно предвидеть возможную предсказуемость глобального атмосферного процесса. Для этого, однако, необходимо, чтобы модельный аналог глобального атмосферного процесса представлял собой энергетически замкнутую систему, как можно близкую к реальному процессу и особенно за пределом спектрального интервала среднего движения. Запись уравнений гидродинамического прогноза через функцию тока ψ и потенциал φ приводит уравнения динамики атмосферы к аналитическому виду. В полной записи система уравнений вихря и дивергенции через функцию тока и потенциал имеет следующий вид (см. напр., [3, 14, 31]):

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\frac{1}{a^2\sin\theta}\left(\psi_i\Delta\psi+2\omega a^2\cos\theta\right)+\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\left(\Delta\varphi+2\omega a^2\cos\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{a^2\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\lambda}-\\ -W\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\zeta}-a^2\frac{\partial W}{\partial\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\zeta}+\frac{a}{\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial\lambda}\frac{\partial v_\theta}{\partial\zeta}=\frac{1}{T_{cp}\sin\theta}(\Phi,T)-\left(\Delta\psi+2\omega a^2\cos\theta\right)\frac{\partial W}{\partial\zeta},\end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t}-W\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\zeta}-a\frac{\partial W}{\partial\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\zeta}+\frac{a}{\sin\theta}\frac{\partial W}{\partial\lambda}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\zeta}+\Delta\Phi+2\left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{1}{a^2}(\Delta\varphi)-\\ -\frac{a}{2}\Delta\varphi\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{a}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\theta}\Delta\psi+\frac{v_\theta}{a}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\theta}+\frac{v_\lambda}{a\sin\theta}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\lambda}+v_\theta^2+v_\lambda^2-2\omega\cos\theta\Delta\psi+2\omega\sin\theta v_\lambda=0,\end{gathered} \tag{27}$$

где $\Phi = \dfrac{1}{p} R T_{cp} p'$, $p' = p - p(z)$, $\zeta = p/\overline{p}$, $T' = T - T(z)$, $W = \dfrac{1}{p} g\overline{\rho}(z) v_z$, a – радиус Земли; v_θ, v_λ – компоненты скорости в сферической системе координат; ω – угловая скорость вращения Земли; T – температура; g – ускорение силы тяжести. Аналитичность здесь остается в основном в операторах $\Delta\psi$ и $\Delta\varphi$, а в операторах, где учтен фактор бароклинности, явно отменяется.

Уравнения (26)-(27) простым суммированием с домножением второго уравнения на i приводятся к одному уравнению относительно комплексного потенциала скорости. При решении искомой системы получаются значения потенциала φ и функции тока ψ, которые, однако, не дают в сумме комплексный потенциал скоростей (не выполнение условий Коши-Римана). Аналитичность решения нарушают члены, связанные с учетом турбулентности, бароклинной неустойчивости, температурной неоднородности подстилающей поверхности и рельефа. Если влияние рельефа и температурной неоднородности задавать посредством методов теории плоского поля, то аналитичность решения будет сохранена. Неаналитичность начальных условий снимается также методом инициализации. Особая роль принадлежит фактору бароклинной неустойчивости в трехмерных многоуровневых моделях прогноза. Этот фактор трактуется в подсеточном масштабе в виде учета конвекции, привязанной к приземным турбулентным потокам тепла, а также к моделям лучистого переноса. Однако, на каждом шаге по времени приходится вводить, так называемое, «конвективное приспособление». А именно, если расчетный вертикальный градиент температуры превышает сухоадиабатический, то он искусственно приравнивается к некоему стандарту, полагая, что это выполняется в природе конвекцией. Дело еще и в том, что «конвективное приспособление» приходится вводить и в районах, где конвекция отсутствует. Выход из этого положения ищут в создании все более полных моделей расчета стратификации, которые полностью моделируют динамику облачности и осадков при учете лучистых притоков. Но каждая такая модель конвекции, включенная в схему глобального прогноза, привносит свои ошибки, например, за счет отсутствия точных начальных условий при редкой сети метеорологических станций. Поэтому, так называемый «шоковый эффект» превышения температурного градиента не удается устранить. Фактически, «конвективное приспособление» – это один из основных блоков модели прогноза, который привносит расчетную остаточную турбулентность. Следовательно, на каждом временном шаге вводится искусственная коррекция расчета, устраняющая понятие непрерывности и дифференцируемости, а, тем самым, и сам метод интегрирования дифференциальных уравнений. Векторы v_θ, v_λ могут быть выражены через потенциал и функцию тока в следующей стандартной форме

$$v_\theta = \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}; \quad v_\lambda = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$$

или в комплексно-значной форме аналитических функций:

$$V = v_\lambda - i v_\theta = \left(\frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) - i\left(\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right);$$

$$U = v_\lambda + i v_\theta = \left(\frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) + i\left(\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right).$$

Тензор рейнольдсовых напряжений определяется тремя векторами $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$, которые представимы в форме аналитического представления:

$$\begin{aligned} \vec{p}_x - i\vec{p}_y &= \vec{i}\left(v_{11} - i v_{21}\right) + \vec{j}\left(v_{12} - i v_{22}\right) + \vec{k}\left(v_{13} - i v_{23}\right); \\ \vec{p}_x + i\vec{p}_y &= \vec{i}\left(v_{11} + i v_{21}\right) + \vec{j}\left(v_{12} + i v_{22}\right) + \vec{k}\left(v_{13} + i v_{23}\right); \\ \vec{p}_z &= \vec{i}\, v_{31} + \vec{j} v_{32} + \vec{k} v_{33}. \end{aligned} \tag{28}$$

Тогда матрица переходов от ортов к векторам ($\vec{i}-i\vec{j}$, $\vec{i}+i\vec{j}$, $\vec{k}$):

$$\begin{vmatrix} v_{11}-iv_{21}-i(v_{12}-iv_{22}) & v_{11}-iv_{21}+i(v_{12}-iv_{22}) & v_{13}-iv_{23} \\ v_{11}+iv_{21}-i(v_{12}+iv_{22}) & v_{11}+iv_{21}+i(v_{12}+iv_{22}) & v_{13}+iv_{23} \\ v_{31}-iv_{32} & v_{31}+iv_{32} & v_{33} \end{vmatrix} \qquad (29)$$

Выражение (29) фактически является тензором рейнольдсовых напряжений второго ранга в форме аналитического представления. Уравнения замыкания с учетом силы Кориолиса в аналитической форме можно выписать в виде:

$$\begin{gathered} \frac{\partial V'^2}{\partial t}=-\frac{i}{a}\left[\overline{V'^2}L_1(\overline{V})+2\overline{V}\,\overline{V'L_1(V')}+\overline{V'^2L_1(V')}\right]- \\ -\frac{i}{a}\left[L_2(\overline{V})\overline{V'U'}+\overline{V}\,\overline{U'L_2(V')}+\overline{U}\,\overline{V'L_2(V')}+\overline{V'U'L_2(V')}\right]+ \\ +4\omega i\cos\theta\overline{V'^2}+\frac{2i}{a}\overline{V'L_6(\Phi')}, \\ \frac{\partial U'^2}{\partial t}=-\frac{i}{a}\left[\overline{V'U'}L_3(\overline{U})+\overline{V}\,\overline{U'L_3(U')}+\overline{U}\,\overline{V'L_3(U')}+V'U'L_3(U')\right]- \\ -\frac{i}{a}\left[\overline{U'^2}L_4(\overline{U})+2\overline{U}\,\overline{U'L_4(U')}+\overline{U'^2L_4(U')}\right]-4\omega i\cos\theta\overline{U'^2}+\frac{2i}{a}\overline{U'L_5(\Phi')}, \\ \frac{\partial\overline{V'U'}}{\partial t}=-\frac{i}{2a}\left[\overline{V'^2}L_3(\overline{U})+2\overline{V}\,\overline{V'L_3(U')}+\overline{V'^2L_3(U')}\right]- \\ -\frac{i}{2a}\left[\overline{V'U'}L_4(\overline{U})+\overline{U}\,\overline{V'L_4(U')}++\overline{V}\,\overline{U'L_4(U')}+\overline{V'U'L_4(U')}\right]+ \\ +\frac{i}{a}\overline{V'L_6(\Phi')}-\frac{i}{2a}\left[\overline{U'^2}L_2(\overline{V})+2\overline{U}\,\overline{U'L_2(U')}\right]- \\ -\frac{i}{2a}\left[\overline{U'V'}L_1(\overline{V})+\overline{U}\,\overline{V'L_1(V')}++\overline{V}\,\overline{U'L_1(V')}+\overline{V'U'L_1(V')}\right], \end{gathered} \qquad (30)$$

где $L_j=\frac{\partial(...)}{\partial\theta}-(-1)^j\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial(...)}{\partial\lambda}+b_j\operatorname{ctg}\theta(...)$, $b_j=1, j=1, 4;$ $b_j=-1, j=2, 3;$ $b_j=0, j=5, 6.$

Тензор

$$\begin{vmatrix} \overline{V'^2} & -\overline{U'V'} & \overline{w'V'} \\ -\overline{U'V'} & \overline{U'^2} & -\overline{w'U'} \\ \overline{w'V'} & \overline{w'U'} & \overline{w'^2} \end{vmatrix} \qquad (31)$$

идентичен тензору (29). Уравнения замыкания горизонтальной турбулентности (30) разрешаются как спектральным методом в базисе вектор-тензор сферических функций, так и спектрально-сеточным методом, который для них предпочтительнее. Выпишем уравнение спектрального аналога на примере уравнения (31)

$$\begin{gathered} \sum_{l=2}^{L_{cp}}\sum_{n=-1}^{l}\frac{\partial(\overline{V'^2})_{l,n}}{\partial t}T_{2n}^{l}=\sum_{k=2}^{L_{\max}}\sum_{S=-k}^{l}\sum_{q=L_{cp}}^{L_{\max}}\sum_{j=-q}^{q}\sum_{p=2}^{L_{\max}}\sum_{r=-p}^{p}\sum_{\nu=|k-q|}^{k+q}\sum_{\mu=|\nu-p|}^{\nu+p}\left\{ae\frac{(p+1)^{1/2}}{a}\times\right. \\ \times\left[C_{1,1,2}^{k,q,\nu}C_{2,0,2}^{\nu,p,\mu}\left(V'_{k,s}V'_{q,j}\overline{V}_{p,r}+2\overline{V}_{k,s}V'_{q,j}\overline{V}_{p,r}+V'_{k,s}V'_{q,j}V_{p,r}\right)\right]T_{2,s+j+r}^{\mu}+ \\ +\frac{\sqrt{(p+2)(p-1)}}{a}ae\left[C_{2,1,3}^{k,q,\nu}C_{3,-1,2}^{\nu,p}\overline{V}_{k,s}V'_{q,j}U'_{p,r}+C_{1,-1,0}^{k,q,\nu}C_{0,2,2}^{\nu,p,\mu}\overline{V}_{k,s}U'_{q,j}V'_{p,r}+\right. \\ \left.\left.+C_{-1,1,0}^{k,q,\nu}C_{0,2,2}^{\nu,p,\mu}\overline{U}_{k,s}V'_{q,j}V'_{p,r}+C_{1,-1,0}^{k,q,\nu}C_{0,2,2}^{\nu,p,\mu}V'_{k,s}U'_{q,j}V'_{p,r}\right]T_{2,s+j+r}^{\mu}\right\}+ \end{gathered}$$

$$+\sum_{k=L+1}^{L_{\max}}\sum_{S=-k}^{k}\sum_{q=L+1}^{L_{\max}}\sum_{j=-q}^{q}\sum_{\nu=|k-q|}^{k+q}\gamma\Big[C_{1,1,2}^{k,q,\nu}V'_{k,s}V'_{q,j}4\omega iT'_{00}T_{2,s+j}^{\nu}-$$

$$-\frac{2\sqrt{q(q+1)}}{a}C_{1,-1,0}^{k,q,\nu}C_{0,2,2}^{\nu,p,\mu}V'_{k,s}\Phi'_{q,j}T_{2,s+j}^{\nu}\Big],$$

$$ae=C_{s,j,s+j}^{k,q,\nu}C_{s+j,r,s+j+r}^{\nu,p,\mu},\quad \gamma=C_{s,j,s+j}^{k,q,\nu} \tag{32}$$

Приравняв коэффициенты при вектор-тензор-сферических функциях $T_{2,n}^{1}$, получим систему дифференциальных уравнений относительно мод $\overline{V_{l,n}'^{2}}$. Здесь:

$$T_{m,n}^{l}=e^{in\varphi p_{m,n}^{l}(\cos\theta)},\ T_{m.n}^{l}T_{p,s}^{k}=\sum_{\nu=|k-1|}^{k+1}C_{m,p,m+p}^{l,k,\nu}C_{n,s,n+s}^{l,k,\nu}T_{m+p,n+s}^{\nu},$$

$$p_{m,n}^{l}(\cos\theta)=-i^{\,-m-n}\sqrt{\frac{(1+m)!(1-n)!}{(1+m)!(1+n)!}}\left[\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right]^{\frac{m+n}{2}}\times\sum_{j=\max(m,n)}^{l}\frac{(l+1)!\,\mathrm{i}^{2\mathrm{j}}}{(l-j)!(j-m)!(j-n)!}\left[\frac{1-\cos\theta}{2}\right]^{j},$$

где $C_{m,p,m+p}^{l,k,\nu}C_{n,s,n+s}^{l,k,\nu}$ – коэффициенты Клебша-Жордана. Далее водятся разложения [13]

$$\tilde{V}=-V_{\varphi}-iV_{\theta}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}V_{l,n}T_{1,n}^{l},$$

$$\tilde{U}=V_{\varphi}-iV_{\theta}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}U_{l,n}T_{-1,n}^{l},$$

$$W=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}W_{l,n}T_{0,n}^{l},$$

где $V_{l,n}=v_{l,n}+iv_{l,n}$, $U_{l,n}=u_{l,n}+iu_{l,n}$, $W_{l,n}=w_{l,n}+iw_{l,n}$, $T_{1,n}^{l}=e^{in\varphi}p_{1,n}^{l}(\cos\theta)$, $T_{-1,n}^{l}=e^{in\varphi}p_{-1,n}^{l}(\cos\theta)$, $T_{0,n}^{l}=e^{in\varphi}p_{0,n}^{l}(\cos\theta)$. Тогда искомые уравнения описывают процесс уже в низкочастотном диапазоне [1, 14, 30].

Связь с сингулярностью метеополей и соответствующими атмосферными процессами. Согласно уравнению кинетической энергии, являющемся спектральным аналогом уравнения (27), транспорт энергии по направлению волнового вектора при наличии преимущественной аксиальности векторов при повышении модуля волнового вектора встретит сопротивление в виде возрастающего веса тензорной плотности. Более того, если на конце спектрального интервала движение почти полностью определяется аксиальными векторами, то следует ожидать адвекции (транспорта, трансформации) кинетической энергии в сторону, противоположную направлению волнового вектора. Поэтому двойное интегрирование тензора третьего ранга приводит к «адвекции детерминированности» в сторону среднего движения и к вырождению турбулентности. Временной интервал транспорта энергии в обратном направлении зависит от усечения модели прогноза. С точки зрения физики, вырождение турбулентности обусловлено тем, что на конце спектрального интервала движение вполне определенное, а именно, это фронты, имеющие четкую структуру, а также конвективные ячейки и орографические ветра. Если бы турбулентность развивалась стохастически, то ее трансформация вдоль волнового вектора не могла бы привести к четким структурам, например, в виде фронтов. Поэтому развитие турбулентности необходимо привязано к указанным структурам, и она соответственно постепенно вырождается. Практически турбулентность может сохраняться в масштабах, меньших, чем для указанных структур, и тогда в этих масштабах вполне применимы приведенные выше формулы замыкания. Однако, и после проведения операций по вырождению турбулентности, остаются физически обоснованные четвертые моменты, которые свернулись во вторые и своим весом определят проблему предсказуемости.

Далее, операции сверток для замыкания должны привести только к аксиальным векторам или, что аналогично, к элементам теории плоского поля. Вырождение турбулентного режима должно привести к вырождению сингулярности. Выделяя сингулярности в результативной части, полученной в теории плоского поля, можно выполнить операцию замыкания в турбулентном режиме [14]. Оставим от уравнения кинетической энергии (30) только два оператора

$$\frac{\partial \overline{V'U'}}{\partial t} = \frac{i}{a}\overline{V' L_6(\Phi')}, \tag{33}$$

выразив Φ' через φ комплексного потенциала скорости w, а компоненты скорости V' через функции ψ того же потенциала скорости, получаем возможность экономно решить систему уравнений (32) с достаточной для наших целей точностью. В уравнениях (32) спектральные представления пульсационной части заменяются элементами рядов Лорана, а конкретнее, вычетами полюсов. Тогда в физически понятных элементах комплексных полей уравнения (32) легко разрешимы. В разложении Лорана, в спектр пульсационного движение относим полюса выше первого порядка, т.к.

$$\overline{R} = X - iY = i\rho\Gamma\overline{v}_\infty, \qquad \operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1}, \tag{34}$$

т.е.

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{G'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{C_{-1}}{z-a} + \left[\frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{C_{-n}}{(z-a)^{\mathrm{n}}} + \ldots\right].$$

В тоже время возмущения фронтального типа относятся к зоне среднего движения, т.к. включают полюса только первого порядка

$$V_x - iV_y = \frac{df}{d\zeta} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\frac{1}{\zeta-\zeta_0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\zeta-\zeta_0-k_1} + \frac{1}{\zeta-\zeta_0+k_1}\right]\right\} +$$
$$+\frac{d}{d\zeta}\left[\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k \ln(\zeta - b_k)\right] + \frac{C_m}{(z-a_m)^m} + \frac{C_{m-1}}{(z-a_{m-1})^{m-1}} + \frac{C_1}{z-a_1},$$

а к зоне пульсационного движения отнесем выражение в скобках.

Баланс углового момента определяем по известной теореме Блазиуса-Чаплыгина через силы внешнего давления, возникающие в местах нарушения искомого баланса

$$L = -\oint_C p\left[x\cos(n,^\wedge y) - y\cos(n,^\wedge x)\right]dz = \oint_C p[x\cos\theta + y\sin\theta]dS = \oint_C p\,[xdx + ydy].$$

Угловой момент определяется как

$$L = \operatorname{Re}\left[-\rho\overline{v_\infty}\sum_{k=1}^{m}\Gamma_k b_k - i\rho M\overline{v_\infty}\right]$$

и естественно при этом

$$\operatorname{res} v(z_1) + \operatorname{res} v(z_2) + \ldots.. + \operatorname{res} v(z_p) = -\operatorname{res}\overline{v}(\infty).$$

В местах нарушения баланса углового момента возникают сингулярности порядка выше первого, что учитывается при решении уравнения (33). Т.е., есть возможность отслеживать связь сингулярностей в балансе углового момента с турбулентным режимом по уравнению (34). В результате можно определить вес неустановившегося режима движения и рассчитать частотную развертку типового процесса. Уравнение (33) существенно сокращено в правой части, однако, оставлен главный весовой член, который позволяет достаточно корректно прослеживать логическую схему процесса, а с помощью операций:

$$\frac{\partial\overline{u'_i u'_j}}{\partial\overline{u'_k u'_l u'_n u'_m}}, \qquad \frac{\partial\overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial\overline{u'_r u'_l u'_n u'_m}}$$

можно осуществлять контроль по замыканию. В следующей работе мы представим результаты моделирования переноса энергии и баланса углового момента с учетом как атмосферного (эволюции крупномасштабных атмосферных образований), так и гидросферного и литосферного факторов, и, что очень важно, впервые оценим вклад в глобальный баланс наличия недавно открытого в ядре Земли естественного ядерного геореактора [31].

Список литературы

1. *Русов В.Д., Глушков А.В., Ващенко В.Н.* Астрофизическая модель глобального климата Земли – К.: Наук. думка, 2005. – 215 с.

2. *Glushkov A.V., Rusov V.N., Loboda N.S., Khetselius O.Yu., Khokhlov V.N., Svinarenko A.A., Prepelitsa G.P.* On possible genesis of fractal dimensions in the turbulent pulsations of cosmic plasma – galactic-origin rays – turbulent pulsation in planetary atmosphere system // Adv. Space Res. – 2008. – Vol. 42. – P. 1614-1617.

3. *Глушков А.В., Ефимов В.А., Кивганов А.Ф.* Моделирование климата как задача взаимодействия триплета солитонов (постановка задачи) // Метеорология, климатология и гидрология.-1999.-№38.-С.3-8.

4. *Ефимов В.А.* Математическая теория экспериментов по долгосрочному прогнозу динамики атмосферы южного полушария // Труды ААНИИ. – 1982. – Т. 385. – С. 12-115.

5. *Peixoto J.P., Oort A.H.* Physics of Climate – American Institute of Physics, 1992. – 520 p.

6. *Оорт А.Х.* Балансовые соотношения в земной климатической системе // Динамика климата: Пер. с англ. Под ред. С. Манабе. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – С. 91-113.

7. *Rosen R.D.* The axial momentum balance of the earth and its fluid envelope // Surv. Geophys. – 1993. – Vol. 14. – P. 1-29.

8. *Storch J.-S.* The reddest atmospheric modes and the forcing of the spectra of these modes // J. Atmos. Sci. – 1999. – Vol. 56. – P. 1614-1626.

9. *Kang I.-K., Lau K.-M.* Principal modes of atmospheric circulation anomalies associated with global angular momentum fluctuations // J. Atmos. Sci. – 1994. – Vol. 51. – P. 1194-1205.

10. *Storch J.-S.* Angular momenta of the Antarctic and the Arctic Oscillations // J. Clim. – 2000. – Vol. 13. – P. 681-685.

11. *Hou A.Y.* Hadley circulation as a modulator of the extratropical climate // J. Atmos. Sci. – 1998. – Vol. 55. – P. 2437-2457.

12. *Гирс А.А.* Многолетние колебания атмосферной циркуляции и долгосрочные гидрометеорологические прогнозы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1971. – 280 с.

13. *Амбросов С.В.* Обобщенный критерий форм циркуляции атмосферы // Метеорология, климатология и гидрология. – 1999. – Вып. 38. – С. 164-168.

14. *Амбросов С.В.* Фактор макротурбулентности в типовых формах циркуляции атмосферы и в балансе по влагообороту и угловому моменту // Метеорология, климатология и гидрология. – 1999. – Вып. 38. – С. 59-63.

15. *Wang C.* ENSO, climate variability, and the Walker and Hadley circulations // The Hadley Circulation: Present, Past, and Future. Eds H. Diaz and R. S. Bradley. – Springer, 2004. – 370 p.

16. *Boer G.J., Sargent N.E.* Vertically integrated budgets of mass and energy for the globe // J. Atmos. Sci. – 1985. – Vol. 42. – P. 1592-1613.

17. *Trenberth K.E., Stepaniak D.P., Caron J.M.* Interannual variations in the atmospheric heat budget // J. Geophys. Res. – 2002. – Vol. 107. – P. 4-1 – 4-15.

18. *Kistler R., Kalnay E., Collins W.* The NCEP-NCAR 50-year reanalysis: monthly

means CD-ROM and documentation // Bull. Amer. Meteor. Soc. – 2001. – Vol. 82. – P. 247-267.

19. *Fyfe J.C., Boer G.J., Flato G.M.* Predictable winter climate in the North Atlantic sector during the 1997–1999 ENSO cycle // Geophys. Res. Letters. – 1999. – Vol. 26. – P. 1601-1604.

20.*Arakava A., Schubert W.H.* Interaction of cumulus cloud ensemble with the large-scale environment. Part I. // J. Atmos. Sci. – 1974. – Vol. 31. – P. 674-701.

21. *Глушков А.В., Хохлов В.Н., Препелица Г.П., Цененко И.А.* Временная изменчивость содержания атмосферного метана: влияние САО // Оптика атмосферы и океана. – 2004. – Т. 17. – С. 573-575.

22. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S.* On the nonlinear interaction between global teleconnection patterns // Q. J. R. Meteorol. Soc. – 2006. – Vol. 132. – P.447-465.

23. *Глушков А.В., Хохлов В.Н., Бунякова Ю.Я.* Ренорм-групповой подход к исследованию спектра турбулентности в атмосфере // Метеорология, климатология и гидрология. – 2004. – Вип. 48. – С. 286-292.

24. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N.* Neural networks and multifractal modelling frustrated aquifer systems. “Underground” hydrology and global Earth angular momentum disbalance // Water Kesources in Asia Pasific Region. – Kyoto (Japan). – 2003. – P. 1355-1358.

25. *Глушков А.В., Хохлов В.Н.* Атмосферный влагооборот, телеконнекция, ячейки Гадлея и баланс энергии, углового момента // Environment of Siberia, the Far East, and the Arctic. – 2001. – Vol. 1. – P. 23-26.

26. *Кивганов А.Ф., Глушков А.В., Хохлов В.Н.* Взаимодействие и распад солитонов в теории атмосферных образований // Метеорология, климатология и гидрология. – 2002. – Вип. 45. – С. 10-16.

27. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Tsenenko I.A.* Atmospheric teleconnection patterns and eddy kinetic energy content: wavelet analysis // Nonlin. Processes Geophys. – 2004. – Vol. 11. – P. 285-293.

28. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N., Lovett L.* Using non-decimated wavelet decomposition to analyse time variations of North Atlantic Oscillation, eddy kinetic energy, and Ukrainian precipitation // J. Hydrol. – 2006. – Vol. 322.– P. 14-29.

29. *Glushkov A.V., Ambrosov S.V., Khokhlov V.N., Borovskaya G.A.* Super low-frequency planetary solitons. Entropy approach and hydrodynamical precalculating atmosphere processes in 4-D space // Preprint Odessa Environmental University. – 2001, N3. – 8 p.

30. *Машкович С.А.* Спектральные модели общей циркуляции атмосферы и численного прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1986. – 284 с.

31. *Rusov V.D., Pavlovich V. N., Vaschenko V.N., et al.* Geoantineutrino spectrum and slow nuclear burning on the boundary of liquid and solid phases of Earth’s core // J. Geophys. Res. – 2007. – Vol. 112. – B09203.

Глобальні механізми в атмосферних моделях та баланс кутового моменту Землі .

Глушков О.В., Хохлов В.М., Свинаренко А.А., Серга Е.М.

У роботі розглянуті нові підходи до опису глобальних механізмів в атмосферних моделях та розрахунку балансу кутового моменту Землі.

***Ключові слова**: баланс кутового моменту, атмосферні моделі, телеконекція*

Global mechanisms in atmosphere models and balance of the Earth moment .

Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Svinarenko A.A., Serga E.N.

New approaches to description of global mechanisms in atmosphere models and calculation of the Earth angle moment balance are presented.

***Keywords:** angle moment balance, atmosphere models, teleconnection*