

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ЕКОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**МЕТЕОРОЛОГІЯ,
КЛІМАТОЛОГІЯ
ТА ГІДРОЛОГІЯ**

Міжвідомчий науковий збірник України

Заснований у 1965 році

ВИПУСК 45

Одеса
Астропринт
2002

УДК 551.5

Кивганов А.Ф., д.г.н., Глушков А.В., д.ф.-м.н., Хохлов В.Н., к.г.н.

Одесский государственный экологический университет

Взаимодействие и распад солитонов в теории атмосферных образований

В рамках теоретико-полевого подхода впервые формально математически рассмотрена «солитонная» теория атмосферных образований (антициклональных и т.д.). Предложена формальная процедура расчета взаимодействия и распада солитонов на примере солитонных решений типа кинка уравнения синус-Гордона, представляемых как релятивистские объекты, взаимодействующие с потенциалом $U(r) \sim \exp(-r)/r$.

Солитоны относятся к числу, пожалуй, наиболее интересных и сложных объектов современной волновой теории [1]. С математической точки зрения это локализованные стационарные решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их обобщений. В многих случаях различные физические ситуации (уединенные волны в жидкости; 2π -импульсы и солитоны огибающей в нелинейной оптике; дислокации в кристаллической решетке; вихревые структуры в сверхтекучей жидкости; магнитные трубки (вихри Абрикосова) в сверхпроводниках; волны в плазме; антициклональные области в геофизической гидродинамике, в т.ч. «большое красное пятно» на Юпитере; солитонные модели элементарных частиц; черные дыры в теории гравитации) описываются одними и теми же уравнениями, напр., Кортевега-де Фриза, синус-Гордона, нелинейным уравнением Шредингера и т.д. Солитоны представляют собой существенно нелинейные объекты, причем отличие от поведения волновых пакетов малой амплитуды особенно сильно, если они обладают топологическим зарядом, т.е. конфигурация волнового поля в присутствии солитона топологически отлична от конфигурации невозмущенного состояния. Значительная часть уравнений, имеющих солитонные решения, принадлежит к классу уравнений, в котором применим метод обратной задачи рассеяния, большинство из них являются интегрируемыми гамильтоновыми системами. В [2]-[3] впервые был предложен новый подход в теории климата, в рамках которого основной климатообразующий фактор – это триплет взаимодействующих солитонов: «планетарный солитон ячеек Гадлея – весь комплекс атмосферных фронтов – волновой пакет

солитонов Россби». Причем, полагается, что солитон Россби проявляется как результат малой энерго-отдачи нелинейного взаимодействия двух других. Вопрос взаимодействия солитонов, их излучения (каналы распада) до сих пор остается практически нерешенным, в частности, в случае солитонного описания атмосферных объектов. Лишь упругие взаимодействия с полным сохранением структуры солитонов при столкновении (рассеянии) описываются выше упомянутыми точно интегрируемыми уравнениями. Неупругие взаимодействия (рассеяние) солитонов, приводящие к интенсивному излучению волн, слиянию сталкивающихся солитонов в новый солитон и т.д. описываются, как правило, неинтегрируемой системой уравнений [1, 4, 5]. Столкновения (рассеяние) солитонов можно формально математически представить как взаимодействие нерелятивистских (если поле, соответствующее солитону, является скалярным) либо релятивистских (здесь векторным) частиц, взаимодействующих через парный потенциал вида:

$$U(r) = A e^2 \exp(-r) / r, \quad (1)$$

где e – топологический заряд, A – численный параметр.

В настоящей работе предлагается формальная процедура расчета взаимодействия и распада солитонов на примере солитонных решений типа кинка уравнения синус-Гордона. Подобные решения представляются подходящими для описания, напр., антициклональных образований в атмосфере. В серии работ [4-12] был развит новый единообразный квантово-полевой аппарат для описания релятивистского распада возбужденных состояний сложных многочастичных квантовых систем, основывающийся на адиабатическом формализме Гелл-Мана и Лоу для матрицы рассеяния. Ниже мы адаптируем этот аппарат к задаче описания взаимодействия (рассеяния), распада синус-гордоновских кинков, обладающих топологическим зарядом и движущихся с некоторой скоростью. Наша цель – рассчитать с помощью адиабатического подхода Гелл-Мана и Лоу с релятивистской матрицей рассеяния (здесь это лишь формальный математический прием) мнимую часть энергии $\text{Im}\Delta E$ взаимодействия солитонов, причем отдельные члены суммы $\text{Im}\Delta E$ мы интерпретируем как вероятности распада по различным физическим каналам. Насколько нам известно, мы впервые вводим в дело солитонов искомый аппарат, существенно использующий

диаграммную технику Фейнмана для задачи описания взаимодействия солитонов. Применение аппарата релятивистской теории возмущений - формальный математический прием, связанный со следующим обстоятельством. В отличие от нерелятивистской теории матричные элементы оператора для возбужденных состояний уже во втором порядке теории возмущений (ТВ) (первый не исчезающий порядок для ΔE) комплексны, причем мнимая часть связана с возможностью распада (излучения) (см. [7,8,11]).

Полную энергию представляем в виде: $E = E^R - i\Gamma/2$, где Γ интерпретируется как вероятность распада $P = \Gamma$. ТВ представляет Γ в виде суммы по виртуальным вкладам различных каналов распада в полную вероятность. Отметим, что искомая вероятность может быть естественным образом связана с временем существования, напр., антициклона, а его энергетика в ситуации энергоотдачи и т.д. заключена в спектре $\{E^R\}$. В нашем подходе весь расчет энергий и вероятностей распада сводится к вычислению действительных и мнимых частей матричных элементов энергетической комплексной матрицы M . В качестве нулевого приближения рассматривается система невзаимодействующих солитонов. Энергетический сдвиг для ΔE можно записать:

$$\Delta E = \lim_{\gamma \rightarrow 0} i\gamma g \frac{\partial}{\partial g} \ln \langle \Phi | S_\alpha(0, -\infty | g) | \Phi \rangle_{g=1}. \quad (2)$$

Матрица рассеяния представляется в виде ряда ТВ:

$$S_\alpha(0, -\infty | g) = 1 + \sum_p S^{(p)}_g, \quad (3)$$

$$S^{(p)} = \frac{(-e)^p}{p!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_p e^{i\gamma(t_1 + \dots + t_p)} T[\bar{\Psi}(1)\hat{A}(1)\Psi(1) \dots \bar{\Psi}(p)\hat{A}(p)\Psi(p)]$$

Подстановка (3) в (2) приводит к разложению ΔE в ряд ТВ

$$\Delta E = \lim_{\gamma \rightarrow 0} i\gamma \left[2 \langle \Phi | S^{(2)} | \Phi \rangle + 4 \langle \Phi | S^{(4)} | \Phi \rangle - 2 \langle \Phi | S^{(2)} | \Phi \rangle \langle \Phi | S^{(2)} | \Phi \rangle \right]. \quad (4)$$

В (3) входят только четные порядки матрицы рассеяния. Как и в нерелятивистской теории, роль последнего члена в (4) сводится к компенсации вкладов несвязных диаграмм. Далее задача состоит в расчете

$\langle \Phi | S^{(2)} | \Phi \rangle$, $\langle \Phi | S^{(4)} | \Phi \rangle$. Удобно, однако, провести расчет для полных матричных элементов, а Re и Im части выделять после интегрирования. Усреднение (4) дает:

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \iint d^4 x_1 d^4 x_2 D(12) \left\langle \Phi \left| T \bar{\Psi}(1) \gamma^\mu \Psi(1) \bar{\Psi}(2) \gamma^\mu \Psi(2) \right| \Phi \right\rangle e^{\gamma(t_1+t_2)}, \quad (5)$$

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4} \int dx_1^4 \dots \int dx_4^4 D(12) D(34) \left\langle \Phi \left| T \bar{\Psi}(1) \gamma^\mu \Psi(1) \bar{\Psi}(2) \gamma^\mu \Psi(2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \bar{\Psi}(3) \gamma^\mu \Psi(3) \bar{\Psi}(4) \gamma^\mu \Psi(4) \right| \Phi \right\rangle e^{\gamma(t_1+t_2+t_3+t_4)}. \quad (6)$$

Теперь формально введем пропагатор (см. (1)):

$$D(12) = -\frac{i}{8\pi^2} \frac{Aee}{r_{12}} \exp(-r_{12}) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t_{12} + i|\omega|r_{12}}. \quad (7)$$

Для системы с k солитонами матричные элементы M можно представить в виде суммы: $M = \sum_{i=0}^k M_i$, где M_0 - вклад вакуумных, M_1 - 1-квазисолитонных диаграмм.

Далее рассматриваем только одноквазисолитонные диаграммы (см. рис. 1), поскольку для вакуумных диаграмм $\text{Im} M_0 = 0$. В диаграммах, изображенных на рис. 1, каждому вертексу с индексами ij сопоставляется пропагатор $D(t_{ij})$. В низшем порядке диаграмма В - единственная диаграмма второго порядка, дающая вклад в $\text{Im} \Delta E$. Подчеркнем еще раз, что использование здесь релятивистского подхода - лишь формальный математический прием, позволяющий изящно получить выражения для характери

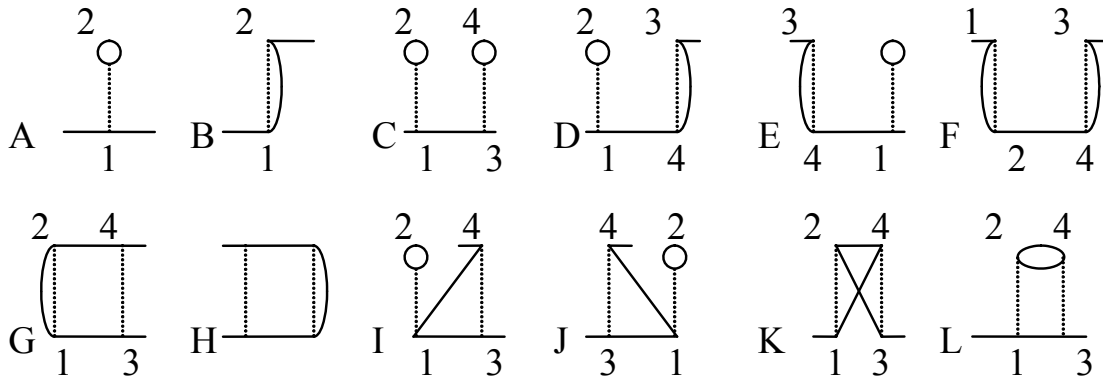


Рис. 1 Одноквазичастичные фейнмановские диаграммы второго и четвертого порядка

стик распада. Разумеется, с физической точки зрения, в системе отсутствуют классические релятивистские эффекты. Перейдем теперь к рассмотрению конкретных диаграмм. Для интересующей нас диаграммы В имеем:

$$S_{\gamma}^{(2)} = \mp e^2 \iint dx_1^4 dx_2^4 e^{\gamma(t_1+t_2)} D(12) \gamma^{\mu} G(12) \bar{\Psi}_{\alpha}(1) \Psi_{\alpha}(2). \quad (9)$$

Солитонный пропагатор запишем в самом общем стандартном виде:

$$G(12) = \begin{cases} -\sum_{g \leq f} e^{i\omega_g t_{12}} \Psi_g(r_1) \bar{\Psi}_g(r_2), t_1 \leq t_2, \\ \sum_{g > f} e^{i\omega_g t_{12}} \omega_g(r_1) \bar{\Psi}_g(r_2), t_1 > t_2. \end{cases} \quad (10)$$

Вклад произвольной одноквазисолитонной диаграммы 4 порядка:

$$S_{\gamma}(N) = \pm 2e^4 \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_4 e^{\gamma(t_1+\dots+t_4)} D(12) D(34) N_v(1234) \bar{\Psi}_{\alpha}(1) \gamma^{\nu} \Psi_{\alpha}(3). \quad (11)$$

Функции N_v зависят от вида диаграммы (рис.1.). Рассмотрим подробнее поправку второго порядка. После вычисления интегралов по времени t_1, t_2 в (9) получим:

$$S_{\gamma}(B) = \frac{Ae^2}{16\pi^2\gamma} \iint dr_1 dr_2 \int d\omega \frac{e^{i|\omega|r_{12}}}{r_{12}} \exp(-r_{12}) \left\{ \sum_{n>f} \frac{1}{\omega - \omega_{n\alpha} - i\gamma} + \sum_{n \leq f} \frac{1}{\omega - \omega_{n\alpha} + i\gamma} \right\}. \quad (11)$$

Два слагаемых в (11) соответствуют двум временным версиям, диаграммы В: $t_1 > t_2$ и $t_1 < t_2$. Интеграл по частоте вычисляем по формуле

$$\text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\eta_2 \omega}}{\omega - \omega_{\alpha} - i\gamma} = \begin{cases} -2\pi \sin r_{12} \omega_{\alpha} & \text{при } \omega_{\alpha} > 0, \\ 0 & \text{при } \omega_{\alpha} < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), легко убедиться, что для состояния с солитонным вклад в $\text{Im} \Delta E$ дает только версия $t_1 > t_2$. Окончательный ответ

$$\text{Im} \Delta E(B) = -\frac{Ae^2}{4\pi} \sum_{\substack{\alpha > n > f \\ [\alpha < n \leq f]}} V_{\alpha n \alpha n}^{|\omega_{\alpha n}|}, \quad (13)$$

$$V_{ijkl}^{|\omega|} = \iint dr_1 dr_2 \Psi_i^*(r_1) \Psi_j^*(r_2) \frac{\sin|\omega|r_{12}}{r_{12}} \exp(-r_{12}) (\Psi_k^*(r_2) \Psi_l^*(r_1)). \quad (14)$$

Отдельные, члены суммы по “ n ” в (18) представляют вклады различных каналов, т. е. вероятность распада в рассматриваемом приближении равна:

$$\Gamma_n = (Ae^2 / 4\pi) V_{an|an}^{|\omega_{an}|}. \quad (15)$$

Для других диаграмм аналогично получим ($A=1$):

$$\begin{aligned} \text{Im}[\Delta E'(D|\alpha) + \Delta E'(E|\alpha)] &= \pm \frac{e^4}{4\pi^2} \sum_m \sum_{g \leq f} \sum_{\substack{\alpha > n > f \\ \alpha < n \leq f}} \frac{V_{aggm} \tilde{V}_{mn|an}^{|\omega_{an}|}}{\omega_{am}}, \\ \text{Im} \Delta E'(F|\alpha) &= \mp \frac{e^4}{4\pi^2} \sum_m' \sum_{g \geq 3} \sum_{\substack{\alpha > n > f \\ \alpha < n \leq f}} \frac{V_{agmg} \tilde{V}_{mn|an}^{|\omega_{an}|}}{\omega_{nm}}, \\ \text{Im}[\Delta E'(G|\alpha) + \Delta E'(H|\alpha)] &= \pm \frac{e^4}{4\pi^2} \sum_m' \sum_{g \leq f} \sum_{\substack{\alpha > n > f \\ \alpha < n \leq f}} \frac{V_{mgng} \tilde{V}_{n\alpha|ma}^{|\omega_{an}|}}{\omega_{an}}, \\ \text{Im}[\Delta E'(I|\alpha) + \Delta E'(J|\alpha)] &= \pm \frac{e^4}{4\pi^2} \sum_m' \sum_{g \leq f} \sum_{\substack{\alpha > n > f \\ \alpha < n \leq f}} \frac{V_{mggn} \tilde{V}_{n\alpha|ma}^{|\omega_{an}|}}{\omega_{nm}}, \\ \text{Im} \Delta E'(K|\alpha) &= -\frac{e^4}{4\pi^2} \left(\sum_{\substack{g > f, m \leq f \\ g \leq f, m > f}} - \sum_{\substack{g \leq f, m > f \\ g > f, m \leq f}} \right) \sum_{\substack{\alpha > n > f \\ \alpha < n \leq f}} \frac{V_{n\alpha mg} \tilde{V}_{g\alpha|nm}^{|\omega_{an}|}}{\omega_{mg} - \omega_{an}}, \\ \text{Im} \Delta E'(L|\alpha) &= \mp \frac{e^4}{4\pi^2} \left(\sum_{\substack{m \leq f, g > f \\ m > f, g \leq f}} - \sum_{\substack{g \leq f, m > f \\ g > f, m \leq f}} \right) \sum_{\substack{\alpha > n > f \\ \alpha < n \leq f}} \frac{V_{agmn} \tilde{V}_{g\alpha|mn}^{|\omega_{an}|}}{\omega_{am} - \omega_{ng}}. \end{aligned} \quad (20)$$

$\sum_m'$ – обозначает, что при суммировании опускается член, обращающий знаменатель в 0.

Итак, в рамках принципиально нового подхода к решению проблемы мы получили общие выражения для вероятности распада (рассеяния) солитонов как мнимой части энергии системы. Приложение аппарата к атмосферно-физическим задачам (напр., изучению энергетики, оценке времени существования антициклонального образования), в частности, вычисление времени жизни или вероятности распада солитона для конкретного атмосферного объекта требует конкретизации его описывающего векторного поля в смысле параметров соответствующего решения солитонного уравнения.

Литература

1. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения нелинейных эволюционных уравнений. – М.: Мир, 1985.
2. Глушков А.В., Ефимов В.А., Кивганов А.Ф. Метеорология, климатология, гидрология.–1999.–№38.–С.3-7.
3. Амбросов С.В., Боровская Г.А. Метеорология, климатология и гидрология.–1999.–№38.–С.113-117.
4. Glushkov A.V., Malinovskaya S.V., Balan A.K. Nonlinear dynamics, chaotic and complex systems–NDCCS’95.–Polish Acad. Sci., Nat. Atom. Energy Agency, Zaczopane, Poland, 1995.
5. Glushkov A.V., Ambrosov S.V. Nonlinear dynamics, chaotic and complex systems–NDCCS’95.–Polish Acad. Sci., Nat. Atom. Energy Agency, Zaczopane, Poland, 1995.
6. Glushkov A.V., JETP Lett.1992.–Vol.55,N2.–P.104-109.
7. Glushkov A.V., Ivanov L.N., Ivanova E.P. Autoionization Phenomena in Atomic Systems.– М.: NIIYaPh MGU, 1985.
8. Glushkov A.V., Malinovskaya S.V. In: Methods of Atomic Calculations. – М.: Nauka, 1988.–с.121-139.
9. Glushkov A.V., Ivanov L.N., Phys.Lett.A.–1992.–Vol.170,N1.–P.33-37.
10. Ivanova E.P., Ivanov L.N., Glushkov A.V., Kramida A.E., Phys.Scr.–1985.–Vol.32.–P.512-528.
11. Glushkov A.V., Ivanova E.P.,J.Quant.Spectr.Rad.Transf.–1986.Vol.36, N1.–P.27-145.
12. Glushkov A.V., Ivanov L.N., J.Phys.B.:Gen.Math.–1993.–Vol.26, N16,p.379-388.

Interaction and Decay of Solitons in the theory of Atmospheric Formations

Kivganov A.F., Glushkov A.V., Khokhlov V.N.

Within theoretical field approach at first there has been formally mathematically considered the solitons theory of atmosphere formations (anticyclones etc.). It has been proposed a formal calculation procedure for the solitons interaction and decay on example of the solitons (kink) solutions of the sinus-Gordon equation, which are represented as relativistic interacting objects.