УДК 538.9:539.215

О.И. Герасимов, *д.ф.-м.н.*
Одесский государственный экологический университет

О НОВОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ОДНОМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ ЦЕПОЧКЕ

В работе найден новый класс точных решений дифференциально-разностного уравнения, описывающего транспорт механического возмущения в одномерной вертикальной гранулированной цепочке. Итоговое управляющее уравнение (после физически адекватной линеаризации) относится к классу функционально-дифференциальных и, как показано в работе, имеет точное решение в виде цилиндрических функций. Найденный класс точных решений обобщает ранее известные решения в виде дисперсионных волн. Полученные решения открывают перспективу модельной параметризации экспериментальных данных по изучению динамики возбуждений в гранулированных материалах.

Ключевые слова: *динамические системы, гранулированные материалы, транспорт энергии/импульса, герцевский контакт, нелинейная цепочка.*

Введение

Распространение волн в нелинейных системах изучается в течение длительного времени и результаты исследований детально отображены в литературе (см., например, [1-5]). В последнее время интерес к исследованию волновых движений в дискретных микромеханических системах возобновился в связи с интригующими результатами, полученными в экспериментах с гранулированными цепочками [6-10]. В серии работ эта задача изучалась экспериментально, численно и теоретически [6-18]. Так, например, в [10] в линейном приближении показано, что динамика волнового движения импульса распространяющегося вдоль гравитационно сжатой гранулированной цепочки с нелинейными контактами описывается решениями типа дисперсионных волн (нормальные моды). Существование решений несолитонного типа с амплитудой уменьшающейся по степенному закону расширяет и дополняет известные нелинейные волновые механизмы передачи энергии. Рассматривая общую задачу такого типа (см, также [10,17,18]) мы нашли новый класс точных решений соответствующего уравнения движения механического импульса в вертикальной гранулированной цепочке с нелинейными контактами, которое существует в приближении слабой нелинейности и формулируется в терминах функций Бесселя первого рода. Найденное решение открывает перспективы постановки новых экспериментов по оптимизации передачи энергии (импульса) в дискретных (гранулированных) слабо нелинейных, низкоразмерных системах и их параметризации.

1 Дифференциально-разностное уравнение движения и его решение

Рассмотрим уравнение для функции смещения z_n сопровождающего распространение импульса в вертикальной гранулированной цепочке изображенной на рис.1.

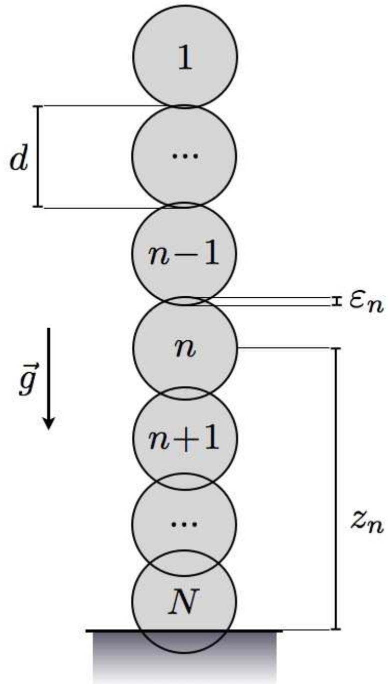

Рис.1 - Вертикальная гранулированная цепочка.

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} = \gamma\left\{\left[d - |z_n - z_{n-1}|\right]^{\delta} - \left[d - |z_{n+1} - z_n|\right]^{\delta}\right\} + g\,, \tag{1}$$

где $\gamma = C/m$, m - масса отдельной частицы-гранулы, d - диаметр недеформированной частицы, $C = \frac{E}{3\left(1-\nu^2\right)}\varepsilon^{1/2}$ - силовая константа, E - модуль Юнга, ν - константа Пуассона, ε - геометрический фактор, который зависит от параметров перекрывания пары соседних частиц [19]. Параметр нелинейности контакта δ может принимать различные значения, например, в случае контактов между частицами герцевского типа равен $\delta = 3/2$.

Мы будем пренебрегать ролью диссипативных эффектов, которые могут быть существенными при увеличении степени нелинейности и интенсивности возмущений. Заметим, что параметр δ, характеризующий область перекрывания контактирующих частиц в случае горизонтальных систем может считаться приближенно одинаковым для любой пары соседних частиц в системе. В случае вертикальной системы этот параметр начинает зависеть от положения (номера) контакта в гравитационно сжатой цепочке. Если учесть последнее обстоятельство, уравнение движения (1) принимает вид

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} = \gamma_{n-1}\left[d - |z_n - z_{n-1}|\right]^{\delta} - \gamma_{n+1}\left[d - |z_{n+1} - z_n|\right]^{\delta} + g\,, \tag{2}$$

где $\gamma_n = \frac{E}{3\left(1-\nu^2\right)m}\varepsilon_n^{1/2} = \gamma\varepsilon_n^{1/2}$. Уравнение (2) должно рассматриваться для частиц с номерами от $n = 1$ до $n = N$, с начальными условиями вида

$$\dot{z}_1(0) = v\,, \quad \dot{z}_n(0) = 0\,. \tag{3}$$

Полагая, что взаимная деформация (перекрывание) соседних частиц значительно меньше твердосферного диаметра

$$\frac{|z_n - z_{n-1}|}{d} << 1. \tag{4}$$

После простых преобразований (2) может быть переписано в следующем, уже линеаризованном виде

$$\frac{d^2\tilde{z}_n}{d\tilde{t}^2} = \varepsilon_{n+1}^{1/2}\tilde{z}_{n+1} - \left(\varepsilon_{n+1}^{1/2} + \varepsilon_{n-1}^{1/2}\right)\tilde{z}_n - \frac{\varepsilon_{n+1}^{1/2} - \varepsilon_{n-1}^{1/2}}{\delta} + \frac{g}{\delta d^{\delta}\tilde{\gamma}}, \tag{5}$$

где $\tilde{z}_n = z_n / d$, $\tilde{t}_n = t\sqrt{\delta d^{\delta-1}\tilde{\gamma}}$.

Записывая условие равновесия в точке произвольного контакта в простейшем виде

$$\varepsilon_{n+1}^{1/2} + \varepsilon_{n-1}^{1/2} = \frac{g}{d^{\delta}\tilde{\gamma}}, \tag{6}$$

уравнение (5) перепишем в следующей форме

$$\frac{d^2\tilde{z}_n}{d\tilde{t}^2} = \varepsilon_{n+1}^{1/2}\left[\tilde{z}_{n+1} - \frac{\varepsilon_{n+1}^{1/2} + \varepsilon_{n-1}^{1/2}}{\varepsilon_{n+1}^{1/2}}\tilde{z}_n + \frac{\varepsilon_{n-1}^{1/2}}{\varepsilon_{n+1}^{1/2}}\tilde{z}_{n-1}\right], \tag{7}$$

которая относит его к классу функционально-дифференциальных. Как мы покажем ниже, оно может быть проинтегрировано точно.

Возвращаясь к форме управляющего уравнения (1), мы можем также перейти к новой переменной φ_n по следующему правилу

$$\varphi_n = z_n - \left[nd - \sum_{k=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_k\right]. \tag{8}$$

Учитывая условие равновесия

$$gk = \gamma\tilde{\varepsilon}_k^{\delta} \tag{9}$$

и условие слабой нелинейности контакта

$$|\varphi_{k+1} - \varphi_k| << \tilde{\varepsilon}_k^{\delta}, \tag{10}$$

управляющее уравнение запишем в следующем виде

$$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = \frac{1}{\tau^2}\left\{\kappa_{n+1}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) - \kappa_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})\right\}, \tag{11}$$

где $\kappa_n = n^{1-1/\delta}$ может быть интерпретирована как перенормированная силовая константа, которая вследствие гравитационной прекомпрессии зависит в итоге от номера контакта (частицы). Характеристическое время τ в уравнении (11) дается выражением

$$\tau = \frac{1}{g\delta}\left(\frac{g}{\gamma}\right)^{1/\delta}. \tag{12}$$

Заметим, что сделанное допущение о слабой нелинейности системы переводит исходно неоднородное вследствие присутствия гравитации управляющее уравнение в однородную форму, присущую горизонтальной задаче, с силовыми константами, зависящими от номера частицы (контакта). Вводя еще одну замену

$$\psi_n = \kappa_n\varphi_n, \tag{13}$$

перепишем уравнение (11) в следующем виде

$$\frac{d^2\psi_n}{dT^2} = \psi_{n+1} - \left[1 + \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}\right]\psi_n + \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}}\psi_{n-1}, \tag{14}$$

где $T = t/\tau$. Заметим, что в уравнении (14) коэффициенты при ψ_n и ψ_{n-1}, как можно видеть, уже для $n \geq 3$ менее чем на 10 процентов отличаются от двойки и единицы, соответственно. Упрощая (14) с вышеуказанной степенью точности, получаем

$$\frac{d^2\psi_n}{dT^2} = \psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}. \tag{15}$$

Дифференциально–разностное уравнение (15) имеет точное решение вида [20]

$$\psi_n(T) = J_{2n}(2T), \tag{16}$$

где J_{2n} - функция Бесселя первого рода с целыми индексами.

Решение в виде линейных комбинаций (16) соответствует в принципе произвольным начальным условиям задачи. Возвращаясь к исходным переменным, решение (16) можем записать в следующем виде

$$\psi_n(t) = J_{2n}\left(\sqrt{g\delta}\left(\frac{\gamma}{g}\right)^{1/2\delta} t\right), \tag{17}$$

которое позволяет видеть влияние параметров системы на поведение решения и таким образом играет роль материальных соотношений. Отметим, что решение стационарной формы уравнения (15)

$$\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1} = 0 \tag{18}$$

очевидным образом находится в классе периодических функций

$$\psi_n = A\sin(\pi n). \tag{19}$$

Пользуясь полученными решениями, нетрудно найти выражения для скорости

$$v_n = \kappa_n^{-1}\left[J_{2n-1}(2T) - \frac{n}{T}J_{2n}(2T)\right], \tag{20}$$

потенциала

$$U_n = 2\left(\frac{n}{T}\right)^2 J_{2n}^2(2T) - \frac{2}{T}J_{2n}(2T) \tag{21}$$

и полной энергии

$$E_n = \frac{1}{2}n^{-2\xi}\left[J_{2n-1}(2T) - \frac{n}{T}J_{2n}(2T)\right]^2 + 2\left(\frac{n}{T}\right)^2 J_{2n}^2(2T) - \frac{2}{T}J_{2n}(2T). \tag{22}$$

Постановка прямых физических экспериментов по распространению сигнала в одномерной гранулированной системе с параметрами приближенными к условиям рассмотренной задачи в настоящее время осуществляется и результаты будут опубликованы в отдельной статье [21].

Выводы

Таким образом, в настоящей работе найден новый класс точных решений линеаризованного уравнения движения для механического импульса в вертикальной гранулированной цепочке. Управляющее уравнение, которое после линеаризации становится однородным с перенормированный силовыми константами, которые в свою очередь зависят от номера частицы в системе относится к классу дифференциально-разностных и интегрируется точно. Решение найдено в классе цилиндрических функций Бесселя первого рода, линейная комбинация которых удовлетворяет произвольным начальным условиям. Полученные результаты существенно дополняют решения в виде дисперсионных волн (нормальные моды), ранее известных для рассмотренной задачи и обобщают последние как функции вложения. Рассмотренные решения после их экспериментальной проверки, которая в настоящее время проводится [21], должны способствовать разработке адекватных моделей для параметризации процессов транспорта энергии (импульса) в низкоразмерных, слабо нелинейных, дискретных механических системах, примером которых выступают гранулированные цепочки.

Список литературы

1. *Zabusky N.Z., Kruskal M.D.* Inverse problem of scattering. //Phys. Rev. Lett.-1965-Vol.15.-P.240-245.
2. *Zakharov V.T., Shabat A.V.* Nonlinear waves. //Zh.Trsper.Teor.Fiz.(JETP) -1971.-619.-P.118-124.
3. *Bhatnagar P.L.* Nonlinear waves in one dimensional dispersive systems.-Oxford: Clarendon 1979.-250p.
4. *Jackson E.A.* Perspectives of nonlinear dynamics.-Cambridge, 1990.-350p.
5. *Ford J.* Solitary waves. //Phys. Rep.-1992.-N213.-P.271-296.
6. *Nesterenko V.F.* Tapered granular chains sound propagation. //J. Appl. Mech. Tech. Phys.-1984.-N5. P.733-738.
7. *Nesterenko V.F.* Solitary waves in 1D system of inelastic balls. //J. Phys. (France)-1994.-Vol.IV, N55.-P.729-736.
8. *Nesterenko V.* Dynamics of Heterogeneous materials.-New York: Springer, 2001.-350p.
9. *Coste C., Falcon E., Fauve S.* Stationary states in vertical cradle excited from the bottom. //Phys. Rev. E-1997.-Vol.56.- P.6104.
10. *Sen S., Hong J., Bang J., Avalos E., Doney R.* Soliton-like waves in low-dimensional granular systems. //Phys. Rep.-2008.-N462, P.21-66.
11. *E.Somfai, J-N.Roux, T.Snoeijer, M.van Hecke, W.Van Saarlos,* Dispersive waves in 1D granular chain. //Phys. Rev. E-2005.-Vol.72.-P.021301.
12. *Герасимов О.І., Вандевалле Н., Співак А.Я., Худинцев М.М., Люмє Г., Дорболло С., Клименков О.А.* Стаціонарні стани у 1D системі непружних частинок //Укр.фіз.журн. -2008.- Т.53, № 11. – С.1129-1137.
13. *Falcon E., Laroche C., Fauve S., Coste C.* Bouncing balls under the vibrating substrate. //Euro. Phys. J. B-1998.-Vol.5.-P.111-117.
14. *E.J.Hinch, S.Saint-Jean,* Signal transmission through the cradle. //Proc.Roy.Soc.London A-1999.-N455.-P.3201-3210.
15. *E.Avalos, T.Krishna Mohan, S.Sen,* Propagation of energy throughout granular chains. //Phys. Rev. E-2003.-Vol.67.-P.060301(R)
16. *Job S., Santibanez F., Tapia F., Melo F.* Mechanical impulse passing the inhomogeneous systems. //Phys. Rev. E-2009.-Vol.80.-P.025602(R)
17. *U.Harbola, A.Rosas, A.Romero, M.Esposito, K.Lindenberg,* Wave transport in granular chains. //Phys. Rev. E-2009.-Vol.80.-P.051302.
18. *J.Lima Dias Pinto, A.Rosas, A.Romero, K.Lindenberg,* Rigorous solutions for a equations governing the energy distribution in discrete nonlinear systems. //Phys. Rev. E-2010.-Vol.82.-P.031308.
19. *Landau L.D.* Theory of elasticity, 3rd ed.- Heinemann: Butterworth, 1986.-200p.
20. *Pinney E.* Ordinary Difference-differential equations.-Berkley and Los Angeles: University of California Press, 1955.-500p.
21. *Vandewalle N., Lumay G., Dorbolo S.* and *Gerasymov O.* Towards the problem of energy (impulse) transport in 1D inhomogeneous granular chains. //Phys.Rev.E.-2011. (in preparation)

Про новий клас точних розв'язків диференціально-різнічного рівняння руху для механічних збурень у одновимірному неоднорідному гранульованому ланцюжку. Герасимов О.І.

У роботі знайдено новий клас точних розв'язків диференціально-різничного рівняння, що описує транспорт механічного збурення у одновимірному вертикальному гранульованому ланцюжку. Отримане керуюче рівняння (після фізично адекватної лінеаризації) відноситься до класу функціонально-диференціальних та, як показано у роботі, має точний розв'язок у вигляді циліндричних функцій. Знайдений клас точних розв'язків узагальнює раніше відомі розв'язки у вигляді дисперсійних хвиль. Отримані розв'язки відкривають перспективу модельної параметризації експериментальних даних з дослідження динаміки збурень у гранульованих матеріалах.

Ключові слова: *динамічні системи, гранульовані матеріали, транспорт енергії/імпульсу, герцевський контакт, нелінійний ланцюжок.*

A new class of rigorous solutions of the functional differential equation of motion for the mechanical impulses in the 1D nonhomogeneus granular chain. Gerasymov O.I.

A new rigorous solution of the functional differential equation for signal propagation through the vertical granular chain with a nonlinear contacts has been found under the approximation of the weak nonlinearity in form of the Bessel function of first order. The linear combinations of the solutions we found in principle can satisfy an appropriate initial conditions. This new solution also is a significant supplement to the dispersive wave modes which has been discovered for such a system earlier and could be considered as an envelope function for them. The relevant experiments directed to the experimental studying of the discovered modes are under the current proceeding.

Key words: *dynamic systems, granular materials, energy/impulse transport, Hertzian contact, nonlinear chain.*