МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
ОДЕССКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МЕТЕОРОЛОГИЯ, КЛИМАТОЛОГИЯ И ГИДРОЛОГИЯ

Межведомственный научный сборник Украины

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 38

Одесса
"АстроПринт"
1999

УДК 551.55

Кивганов А.Ф., д.г.н., проф., Хохлов В.Н., к.г.н., доц.
Одесский гидрометеорологический институт

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОДСЕТОЧНЫХ ЭФФЕКТОВ В УРАВНЕНИЯХ БЮДЖЕТА РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ЭНЕРГИИ.

Проведен детальный анализ подсеточных эффектов в уравнениях бюджета различных видов энергии.

1. Вычисление диссипативного члена в уравнении бюджета кинетической энергии.

Запишем уравнения движения в декартовой системе координат:

$$\frac{du}{dt} = \ell v - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x\,;\;\; \frac{dv}{dt} = -\ell u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y\,;\;\; \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z\,. \qquad (1.0)$$

Здесь и далее использованы общепринятые обозначения. “Вязкие” члены в этих уравнениях - это горизонтальный и турбулентный обмен:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial u}{\partial z}\,, \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial v}{\partial z}\,, \qquad (1.1) \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial w}{\partial z}\,. \end{aligned}$$

Вначале ограничимся случаем постоянства коэффициентов горизонтального и вертикального обмена. Тогда, полагая согласно [3], что $k_z(z)$ = **const** ~ 10 м$^2\cdot$с$^{-1}$, и $\{k_x, k_y\} = k_s$ = **const** $\sim 10^5$ м$^2\cdot$с$^{-1}$, перепишем (1.1)

$$F_x = k_s\Delta u + k_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,,\;\; F_y = k_s\Delta v + k_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,,\; F_z = k_s\Delta w + k_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\,. \qquad (1.2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - плоский оператор Лапласа.

Учитывая, что для планетарных процессов характерный горизонтальный масштаб $L_s \sim 10^7$ м, вертикальный - $L_z \sim$□10^4 м, $L_v \sim$□10 м $\cdot$с$^{-1}$, а также, согласно [3] $L_w \sim 10^{-2}$ м$\cdot$с$^{-1}$, оценим порядки членов в (1.2.):

$$\mathrm{O}\left(k_s\cdot\Delta u; k_s\cdot\Delta v\right) = k_s\cdot\frac{L_v}{L_s^2} \sim \frac{10^5\cdot 10}{10^{14}} \approx 10^{-8}\,\text{м}\cdot\text{с}^{-2}\,,$$

$$\mathrm{O}\left(k_z\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; k_z\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = k_z\cdot\frac{L_v}{L_z^2} \sim \frac{10\cdot 10}{10^8} \approx 10^{-6}\,\text{м}\cdot\text{с}^{-2}\,, \qquad (1.3)$$

$$O\left(k_s\cdot\Delta w\right)=k_s\cdot\frac{L_w}{L_s^{\ 2}}\sim\frac{10^5\cdot10^{-2}}{10^{14}}\approx10^{-11}\text{м}\cdot\text{с}^{-2}\ ,$$

$$O\left(k_z\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=k_z\cdot\frac{L_w}{L_z^{\ 2}}\sim\frac{10\cdot10^{-2}}{10^8}\approx10^{-9}\text{м}\cdot\text{с}^{-2}\ . \tag{1.4}$$

Если же аналогичным образом оценить порядок адвективных членов в уравнениях движения, то получим:

$$O\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{L_v^{\ 2}}{L_s}\sim\frac{10^2}{10^6}\approx10^{-4}\text{м}\cdot\text{с}^{-2}\ ,$$

$$O\left(w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{L_w\cdot L_v}{L_z}\sim\frac{10^{-2}10}{10^4}\approx10^{-5}\text{м}\cdot\text{с}^{-2}\ . \tag{1.5}$$

Анализ оценок (1.3)-(1.5) показывает, что:

1) “Вязкие” члены, связанные с горизонтальным турбулентным обменом, независимо от уравнения движения как минимум на два порядка меньше, чем члены с вертикальным турбулентным обменом, поэтому первые можно отбросить как малые и потому, переходя к p-системе координат систему исходных уравнений (1.0) можно записать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\tau\frac{\partial u}{\partial p}=\ell v-\frac{\partial\Phi}{\partial x}+k_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\tau\frac{\partial v}{\partial p}=-\ell u-\frac{\partial\Phi}{\partial y}+k_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\ , \tag{1.6}$$

$$\frac{dw}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g\ .$$

В последнем уравнении отброшен, как малый, также член с вертикальным турбулентным обменом. Третье уравнение движения, как и “вязкие” члены в (1.6), записаны пока в декартовых координатах.

2) Члены $k_z\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ и $k_z\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$, оцененные для всей тропосферы, в пределах которой k_z = **const**, в пределах погранслоя (ППС) могут оказаться одного порядка с адвективными и больше конвективных членов.

3) Конвективные члены, хотя на порядок и меньше адвективных, но лучше, все-таки их сохранить.

4) Оценив порядки слагаемых в третьем уравнении движения для процессов макромасштаба и отбросив меньшие из них, получим, как известно [], уравнение квзазистатики:

$$\frac{RT}{p}=-\frac{\partial\Phi}{\partial p}\ . \tag{1.7}$$

Преобразуем “вязкие” члены в уравнениях (1.6) для p-системы координат, используя формулу связи вертикальных производных:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \equiv -\rho g \frac{\partial}{\partial p} . \qquad (1.8)$$

Тогда,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho g \frac{\partial u}{\partial p}\right) = -g\left[-\rho g \frac{\partial}{\partial p}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial p}\right)\right] = \rho g^2 \frac{\partial}{\partial p}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial p}\right) =$$

$$= \frac{p}{RT} g^2 \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{RT}\frac{\partial u}{\partial p}\right) = \frac{p}{R^2 T} g^2 \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{T}\frac{\partial u}{\partial p}\right) = \frac{p}{R^2 T} g^2 \left[\frac{p}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{T}\right)\right] = \qquad (1.9)$$

$$\frac{pg^2}{R^2 T}\left[\frac{p}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{p}{T^2}\frac{\partial T}{\partial p}\right] = \left(\frac{pg}{RT}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial p}\right)\right]$$

Итак,

$$k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k_z \left(\frac{pg}{RT}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial p}\right)\right]. \qquad (1.10)$$

Если учесть далее тот факт, что в нижних слоях тропосферы, а точнее, в пределах ППС (p ~ 1000 гПа) $\frac{1}{p} \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$, а $\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\gamma R}{pg}; \gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} \sim \frac{1K}{100\text{м}};\right.$ $\left. R \sim 300\text{м}^2\text{с}^{-2}\text{К}^{-1}; g \sim 10\text{мс}^{-2}\right) \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial p} \sim 3 \cdot 10^{-4}$, то без особой потери точности можно переписать (1.10) как:

$$k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k_z \left(\frac{pg}{RT}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial p}\right). \qquad (1.11)$$

Более того, поскольку для нижней тропосферы, например, при δp ~ 100 гПа, p ~ 1000 гПа и L_v ~ 10 м·с$^{-1}$

$$\mathrm{O}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\right) \sim \frac{10}{10^4} \sim 10^{-3}; \quad \mathrm{O}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial p}\right) \sim \frac{10}{1000 \cdot 100} \sim 10^{-4},$$

то, следовательно, вместо (1.11) можно записать

$$k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k_z \left(\frac{pg}{RT}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}, \qquad (1.12)$$

или, так как $k_z \cdot g^2/R^2 = a =$ **const**, то

$$k_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a\left(\frac{p}{T}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}, \qquad (1.13)$$

аналогично,

$$k_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = a\left(\frac{p}{T}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}. \qquad (1.14)$$

Из (1.13)-(1.14) при k_z = **const** следует, что роль "вязких" членов прежде всего зависит от кривизны профиля ветра. Итак, перепишем (1.6) с учетом (1.13)-(1.14):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\tau\frac{\partial u}{\partial p}=\ell v-\frac{\partial \Phi}{\partial x}+a\left(\frac{p}{T}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\tau\frac{\partial v}{\partial p}=-\ell u-\frac{\partial \Phi}{\partial y}+a\left(\frac{p}{T}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}. \quad (1.15)$$

Тогда уравнение бюджета кинетической энергии ($K = (u^2 + v^2) / 2$) примет вид:

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\vec{V}K+\frac{\partial \tau K}{\partial p}=-\vec{V}\nabla\Phi+a\left(\frac{p}{T}\right)^2\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right). \quad (1.16)$$

Для получения уравнения кинетической энергии в форме (1.16) привлекается уравнение неразрывности: $du/dx + dv/dy + d\tau/dp = 0$.

Используя уравнение квазистатики (1.7),

$$\left(\frac{p}{T}\right)^2 = R^2\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)^{-2},$$

и принимая $a_1 = k_z\cdot g^2$, перепишем (1.16):

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\vec{V}K+\frac{\partial \tau K}{\partial p}=-\vec{V}\nabla\Phi+a_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)^{-2}\left(u\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right). \quad (1.17)$$

Для послойных изменений кинетической энергии теперь следует проинтегрировать (1.17) по p. Последний член справа в таком случае при малом шаге по вертикали Δp, можно представить в виде:

$$\int_{p_1}^{p_2} a_1 u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)^{-2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}dp=a_1\overline{\left[u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)^{-2}\right]}\cdot\int_{p_1}^{p_2}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}dp=a_1\overline{\left[u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)^{-2}\right]}\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_{p_2}-\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_{p_1}\right], \quad (1.18)$$

где $\overline{[...]}$ - осредненная (по формуле трапеций) величина. В принципе, это возможно, так как величина [...] в пределах Δp изменяется почти линейно в отличие от $\partial^2 u/\partial p^2$, которая характеризует кривизну профиля скорости ветра. Это все же лучше, чем численно брать интеграл (1.18). Выражение для v аналогично.

Рассмотрим теперь случай, когда $k_z \neq$ **const**. Тогда, используя (1.8), получим:

$$-\rho g\frac{\partial}{\partial p}k_z\left(-\rho g\frac{\partial u}{\partial p}\right)=\rho g^2\frac{\partial}{\partial p}\left(k_z\rho\frac{\partial u}{\partial p}\right)=\rho g^2\left[k_z\rho\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial(k_z\rho)}{\partial p}\right]=$$

$$\rho g^2\left[k_z\rho\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+\frac{\partial u}{\partial p}\left(k_z\frac{\partial\rho}{\partial p}+\rho\frac{\partial k_z}{\partial p}\right)\right]=k_z\rho^2 g^2\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}+\rho g^2 k_z\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial\rho}{\partial p}+\rho^2 g^2\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial k_z}{\partial p}. \quad (1.19)$$

Принимая, как и ранее

$$\alpha = \frac{k_z g^2}{R^2}; \left(\frac{p}{T}\right)^2 = R^2 \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)^{-2}; a_1 = k_z g^2 ,$$

а также учитывая, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{RT}\right) = \frac{1}{RT} - \frac{p}{RT^2}\frac{\partial T}{\partial p} , \tag{1.20}$$

перепишем (1.19) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial u}{\partial z} = a_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial k_z}{\partial p}\right). \tag{1.21}$$

Отсюда следует, что при $k_z = \mathbf{const}$ соотношение (1.21) переходит в (1.10). Далее, применяя оценки, использованные для упрощения (1.11), получим

$$\frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial u}{\partial z} = a_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial k_z}{\partial p}\right). \tag{1.22}$$

Здесь соотношение слагаемых в круглых скобках оценить, особенно в пределах ППС, весьма сложно. Вне пределов погранслоя, вторым членом заведомо можно пренебречь.

Таким образом, уравнение бюджета кинетической энергии для случая $k_z \neq \mathbf{const}$ с учетом (1.22) принимает вид:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla \vec{V} K + \frac{\partial \tau K}{\partial p} = -\vec{V}\nabla\Phi + a_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)^{-2} \cdot \left[u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{1}{k_z p}\frac{\partial k_z}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial p}\right) + v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} + \frac{1}{k_z p}\frac{\partial k_z}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\right]. \tag{1.23}$$

Для послойных изменений кинетической энергии уравнение (1.23) следует проинтегрировать, как и ранее, по p. Последний член справа по аналогии с (1.18) можно, в частности, для первого слагаемого для достаточно тонких слоев Δp записать в виде:

$$\frac{1}{g}\int_{p_1}^{p_2} u a_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial k_z}{\partial p}\right) dp = \frac{a_1}{g}\left[\overline{u\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)^{-2}}\right] \times$$
$$\times \left[\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_{p_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_{p_1}\right] + \frac{a_1 \overline{u}}{g \overline{k_z}} \int_{p_1}^{p_2} \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial k_z}{\partial p} dp \tag{1.24}$$

Выражение для второго слагаемого аналогично. Интегралы в (1.24) приходится брать численно, задавая, например, вертикальные профили $u(p)$ и $k_z(p)$ кусочно гладкими функциями. Оптимальный алгоритм можно подобрать путем численных экспериментов. С помощью последних можно оценить степень различия вариантов $k_z = \mathbf{const}$ и $k_z \neq \mathbf{const}$.

Уравнение кинетической энергии (1.23) иногда удобно представить в иной редакции. Обозначив через ε_k вязкие члены, запишем его в таком виде:

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\vec{V}K+\frac{\partial\tau K}{\partial p}=-\vec{V}\nabla\Phi+\varepsilon_k\ . \tag{1.25}$$

Используя очевидные соотношения:

$$\nabla\vec{V}K+\vec{V}\nabla\Phi=\nabla\vec{V}K+\nabla\vec{V}\Phi-\Phi\nabla\vec{V}=\nabla\vec{V}(K+\Phi)-\Phi\nabla\vec{V}\ ;$$

$$\frac{\partial\tau K}{\partial p}=\frac{\partial\tau(K+\Phi)}{\partial p}-\frac{\partial\tau\Phi}{\partial p}=\frac{\partial\tau(K+\Phi)}{\partial p}-\tau\frac{\partial\Phi}{\partial p}-\Phi\frac{\partial\tau}{\partial p}\ ,$$

перепишем (1.25):

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\nabla\vec{V}(K+\Phi)+\frac{\partial\tau(K+\Phi)}{\partial p}=\Phi\left(\nabla\vec{V}+\frac{\partial\tau}{\partial p}\right)+\tau\frac{\partial\Phi}{\partial p}+\varepsilon_k \tag{1.26}$$

или, учитывая, что первый член справа в (1.26) равен нулю (уравнение неразрывности), а $\partial\Phi/\partial p$ = $-RT/p$ = $-1/\rho$ (уравнение квазистатики), представим (1.26) в следующем виде:

$$\frac{\partial K}{\partial t}=-\nabla\vec{V}(K+\Phi)-\frac{\partial\tau(K+\Phi)}{\partial p}-\alpha\tau+\varepsilon_k\ , \tag{1.27}$$

где $\alpha = 1/\rho$.

Согласно (1.27), локальные изменение кинетической энергии обусловлено трехмерной дивергенцией потока механической (K + Φ) энергии (первые два члена правой части), вертикальными потоками ($\alpha\tau$) и вертикальным турбулентным обменом (ε_k).

Уравнение для потенциальной энергии (Φ) получим из выражения, определяющего вертикальную скорость w:

$$w=\frac{dz}{dt}\ \text{или}\ gw=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\vec{V}\nabla\Phi+\tau\frac{\partial\Phi}{\partial p}\ . \tag{1.28}$$

Если в (1.28) использовать приближенное соотношение между изобарической (τ) и геометрической (w) вертикальными скоростями: $\tau \approx -\rho g w$, то (1.28) можно представить в виде:

$$-\alpha\tau=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\vec{V}\nabla\Phi+\tau\frac{\partial\Phi}{\partial p}$$

или в дивергентной форме:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\nabla\vec{V}\Phi-\frac{\partial\tau\Phi}{\partial p}-\alpha\tau\ . \tag{1.29}$$

Сложив (1.29) с уравнением кинетической энергии (1.25) получим уравнение бюджета механической энергии:

$$\frac{\partial(K+\Phi)}{\partial t} = -\nabla\vec{V}(K+\Phi) - \frac{\partial\tau(K+\Phi)}{\partial p} - \vec{V}\nabla\Phi - \alpha\tau + \varepsilon_k . \qquad (1.30)$$

2. Вычисление неадиабатических притоков тепла в уравнении бюджета внутренней энергии.

Для получения уравнения бюджета этого вида энергии возьмем уравнения статики и притока тепла:

$$T = -\frac{p}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial p}; \quad \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{pc_p}\tau = \varepsilon . \qquad (2.1)$$

Домножив уравнение притока тепла на c_v, получим:

$$c_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + \tau\frac{\partial T}{\partial p}\right) - \frac{R}{p}\tau æ^{-1}T = c_v\varepsilon, \qquad (2.2)$$

где $æ = c_p/c_v$.

В уравнении (2.2) перейдем к внутренней энергии и во втором слагаемом заменим T через уравнение статики:

$$\frac{\partial E_B}{\partial t} + u\frac{\partial E_B}{\partial x} + v\frac{\partial E_B}{\partial y} + \tau\frac{\partial E_B}{\partial p} + \tau æ^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial p} = c_v\varepsilon . \qquad (2.3)$$

или в дивергентной форме

$$\frac{\partial E_B}{\partial t} + \frac{\partial uE_B}{\partial x} + \frac{\partial vE_B}{\partial y} + \frac{\partial \tau E_B}{\partial p} + \tau\, æ^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial p} = c_v\varepsilon . \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) связывает оба вида энергии - потенциальную (Φ) и внутреннюю (E_B).

Теперь рассмотрим неадиабатические притоки тепла $\varepsilon = \varepsilon_{\text{рад}} + \varepsilon_{\text{турб}} + \varepsilon_{\text{фаз}}$. При суточном осреднении радиационными притоками тепла ($\varepsilon_{\text{рад}}$) можно пренебречь [3], тогда

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{турб}} + \varepsilon_{\text{фаз}}. \qquad (2.5)$$

Турбулентная теплопроводность, согласно [3], аналогична турбулентной вязкости, поэтому $\varepsilon_{\text{турб}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_T\frac{\partial T}{\partial z}\right)$ (здесь k_T - коэффициент турбулентной температуропроводности) и поскольку число Прандтля для турбулентных движений близко к единице, то можно считать, что $k_T \approx k_z$ и тогда

$$\varepsilon_{\text{турб}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.6}$$

или в p-системе координат, проделав выкладки, аналогичные предыдущему разделу, получим при $k_z \neq$ **const**:

$$\varepsilon_{\text{турб}} = c_1\left[\frac{\partial^2 T}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial k_z}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2\right], \tag{2.7}$$

где $c_1 = \left(\frac{pg}{RT}\right)^2 k_z = 10^{-3} k_z \left(\frac{p}{T}\right)^2$.

В (2.7) $\frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p}$ на порядок больше $\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2$. Действительно, поскольку $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\gamma RT}{pg}$

(p ~1000 гПа; T ~ 300°К; $O\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)$ ~10^{-1}; $O\left(\frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p}\right)$ ~ 10^{-4}; $O\left(\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2\right)$ ~ $3\cdot10^{-5}$. В силу этого без потери точности можно записать вместо (2.7):

$$\varepsilon_{\text{турб}} = c_1\left(\frac{\partial^2 T}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial k_z}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial p}\right). \tag{2.8}$$

Мы получили, естественно, такое же выражение, что и для “вязкого” члена в уравнении для кинетической энергии, которое было найдено ранее (1.21). Соотношения слагаемых в (2.8) в пределах ППС можно оценить только путем численных экспериментов; в свободной атмосфере последний член, разумеется, должен быть отброшен.

При k_z = **const** выражение (2.8), аналогично (1.11), упрощается

$$\varepsilon_{\text{турб}} = c_1\left(\frac{\partial^2 T}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p}\right). \tag{2.9}$$

Теперь перейдем к фазовым притокам тепла ($\varepsilon_{\text{фаз}}$):

$$\varepsilon_{\text{фаз}} = \frac{Lm}{c_p \rho}, \tag{2.10}$$

где L - теплота конденсации ($L = 2.5\cdot10^6$ Дж/кг), m - скорость конденсации (изменение количества водяного пара в единичном объеме за единицу времени; кг/(м^3·с)), c_p = 1005 Дж/(кг·К).

Параметризация фазовых переходов осуществляется аналогично тому, как это принято в современных гидродинамических моделях прогноза [2]:

$$\varepsilon_{\text{фаз}} = \frac{LF\tau}{c_p}, \tag{2.11}$$

где
$$F(p,T) = \frac{\dfrac{q_m}{p}\left(\dfrac{RT}{c_p} - \dfrac{L}{c_p}\dfrac{R}{R_П}\right)}{1 + \dfrac{q_m L(L - R_П T)}{c_p R_П T^2}}, \tag{2.12}$$

В (2.12) R - удельная газовая постоянная для сухого воздуха (287.05 м^2/(с^2·К)); $R_П$ - удельная газовая постоянная водяного пара; $R/R_П = 0.622$.

Итак, уравнение для внутренней энергии (2.4) с использованием (2.8) и (2.11) записывается как:

$$\frac{\partial E_B}{\partial t} + \frac{\partial u E_B}{\partial x} + \frac{\partial v E_B}{\partial y} + \frac{\partial \tau E_B}{\partial p} + \tau æ^{-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} - LF\right) = c_1 c_v\left(\frac{\partial^2 T}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial k_z}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial p}\right) \tag{2.13}$$

или в векторной форме

$$\frac{\partial E_B}{\partial t} + \nabla \vec{V} E_B + \frac{\partial \tau E_B}{\partial p} = -\tau æ^{-1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} - LF\right) + c_1 c_v\left(\frac{\partial^2 T}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial k_z}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial p}\right). \tag{2.14}$$

Перейдем теперь к вопросам практической реализации выражения (2.14).

Вначале остановимся на оценке членов в (2.12). В этом уравнении, в числителе:

$$\frac{RT}{c_p} \approx \frac{300 \cdot 300}{10^3} \approx 10^2; \frac{L}{c_p}\frac{R}{R_П} \approx \frac{2.5 \cdot 10^6}{10^3} 0.6 \approx 1.5 \cdot 10^3 .$$

Таким образом, $\dfrac{L}{c_p}\dfrac{R}{R_П}$ на порядок больше, чем $\dfrac{RT}{c_p}$, поэтому последним можно пренебречь. Аналогично для знаменателя:

$$L = 2.5 \cdot 10^6; R_П T \approx 460 \cdot 300 \approx 1.4 \cdot 10^5$$

и, следовательно, подставляя в уравнение (2.12), перепишем его в виде, пригодном для расчетов:

$$F = -\frac{1.5\cdot 10^3 \frac{q_m}{p}}{1 + 1.3\cdot 10^7 \frac{q_m}{T^2}} \equiv -\frac{1.5\cdot 10^3 \cdot q_m T^2}{\left(1.3\cdot 10^7 \cdot q_m + T^2\right)p}. \quad (2.15)$$

Если нет насыщения водяного пара, то $F \sim \varepsilon_{\text{фаз}} \to 0$.

В (2.15) массовая доля насыщенного водяного пара рассчитывается по формуле:

$$q_m = 0.622\frac{E}{p}, \quad (2.16)$$

где E определяется по формуле Магнуса [1]:

$$E = E_0 \cdot 10^{\frac{8.62(T-273.2)}{T}}. \quad (2.17)$$

Здесь E_0 = 6.11 гПа.

Итак, по данным T и p с учетом (2.16)-(2.17) рассчитывается $F(T, p)$.

Теперь вернемся к уравнению бюджета внутренней энергии (2.14), в котором фазовые притоки тепла учитываются членом

$$\tau æ^{-1} LF \approx 3.6\cdot \tau F, \quad (2.18)$$

а коэффициент при турбулентном члене

$$c_1 c_v \equiv c_v k_z \left(\frac{g}{R}\right)^2 \left(\frac{p}{T}\right)^2 \cong 0.83\cdot k_z \left(\frac{p}{T}\right)^2. \quad (2.19)$$

С учетом (2.18)-(2.19) уравнение (2.14) окончательно перепишется как:

$$\frac{\partial E_B}{\partial t} + \nabla\vec{V}E_B + \frac{\partial \tau E_B}{\partial p} = -\frac{\tau}{0.7}\frac{\partial \Phi}{\partial p} + 3.6\cdot\tau F + 0.83\cdot k_z\left(\frac{p}{T}\right)^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial k_z}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial p}\right). \quad (2.20)$$

Фазовые притоки тепла (2.18) рассчитываются только в тех слоях, где $q \approx q_m$. По данным радиозондирования рассчитываются q и q_m по (2.16)-(2.17). В первом случае при этом вместо T используются значения точки росы (T_d).

При исследовании энергетики атмосферных вихрей вместо уравнения внутренней энергии иногда используется уравнение бюджета энтальпии ($Э = c_p T$), которое получается из уравнения притока тепла (2.1), домноженного на c_p:

$$\frac{\partial Э}{\partial t} + u\frac{\partial Э}{\partial x} + v\frac{\partial Э}{\partial y} + \tau\frac{\partial Э}{\partial p} - \alpha\tau = c_p \varepsilon$$

или в дивергентной форме

$$\frac{\partial Э}{\partial t} = -\nabla \vec{V} Э - \frac{\partial \tau Э}{\partial t} + \alpha\tau + c_p \varepsilon \ , \qquad (2.21)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{\text{турб}} + \varepsilon_{\text{фаз}}$ - неадиабатические притоки тепла, определяемые соответственно по (2.9) и (2.11).

Сложив уравнения (1.30) и (2.4), получим уравнение бюджета полной энергии ($K + \Phi + E_B$):

$$\frac{\partial\left(K + \Phi + E_B\right)}{\partial t} = -\nabla \vec{V}\left(K + \Phi + E_B\right) - \frac{\partial\left(K + \Phi + E_B\right)}{\partial p} + \alpha\tau æ^{-1}(1 - æ) -$$

$$-\vec{V}\nabla\Phi + \varepsilon_K + c_v\varepsilon \ . \qquad (2.22)$$

Сумму механической энергии и энтальпии именуют, как правило, суммарной энергией (K + Φ + $Э$), уравнение бюджета которой получается путем сложения уравнений (1.30) и (2.21):

$$\frac{\partial\left(K + \Phi + Э\right)}{\partial t} = -\nabla \vec{V}\left(K + \Phi + Э\right) - \frac{\partial\left(K + \Phi + Э\right)}{\partial p} - \vec{V}\nabla\Phi + \varepsilon_K + c_p\varepsilon \ . \qquad (2.23)$$

3. Учет вертикального турбулентного обмена в уравнении бюджета водяного пара.

При исследовании эволюции атмосферных вихрей синоптического масштаба представляет несомненный интерес пространственно-временная изменчивость влагосодержания таких объектов. Для достижения этой цели используется уравнение бюджета водяного пара, которое с учетом вертикального турбулентного обмена в дивергентной форме записывается следующим образом:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial uq}{\partial x} + \frac{\partial vq}{\partial y} + \frac{\partial \tau q}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial q}{\partial z}\right). \qquad (3.1)$$

Правую часть этого уравнения, как и в предыдущих разделах, распишем в p-системе координат, опуская промежуточные выкладки:

$$(\varepsilon_{\text{турб}})_q = c_1\left[\frac{\partial^2 q}{\partial p^2} + \frac{\partial q}{\partial p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial k_z}{\partial p}\right)\right], \qquad (3.2)$$

где $c_1 = k_z\left(\dfrac{gp}{RT}\right)^2$.

Здесь, очевидно, также, по аналогии с (2.7), можно пренебречь членом $\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial p}$ по сравнению с $\frac{1}{p}$ и тогда:

$$(\varepsilon_{\text{турб}})_q = c_1\left(\frac{\partial^2 q}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial p} + \frac{1}{k_z}\frac{\partial k_z}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial p}\right), \tag{3.3}$$

Здесь, как и ранее, $c_1 = 10^{-3} k_z \left(\frac{p}{T}\right)^2$.

Домножив (3.1) на L, получим уравнение бюджета скрытой энергии:

$$\frac{\partial Lq}{\partial t} + \frac{\partial uLq}{\partial x} + \frac{\partial vLq}{\partial y} + \frac{\partial \tau Lq}{\partial p} = \left(\varepsilon_{\text{турб}}\right)_q. \tag{3.4}$$

Иногда используются также уравнения бюджета статической энергии сухого (Э + Ф) и влажного (Э + Ф + Lq). Первое из них получим путем сложения уравнений (1.29) и (2.21):

$$\frac{\partial(\Phi + Э)}{\partial t} = -\nabla\vec{V}(\Phi + Э) - \frac{\partial(\Phi + Э)}{\partial p} + c_p\varepsilon. \tag{3.5}$$

Для получения второго энергетического уравнения следует сложить (3.5) и (3.4):

$$\frac{\partial(\Phi + Э + Lq)}{\partial t} = -\nabla\vec{V}(\Phi + Э + Lq) - \frac{\partial(\Phi + Э + Lq)}{\partial p} + c_p\varepsilon + \left(\varepsilon_{\text{турб}}\right)_q. \tag{3.6}$$

Как следует из (3.5) и (3.6), индивидуальные изменения статической энергии как сухого, так и влажного воздуха обусловлены только подсеточными процессами ($c_p\varepsilon$ и $(\varepsilon_{\text{турб}})_q$).

Литература

1. Матвеев Л.Т. Физика атмосферы. - Л.: Гидрометеоиздат, 1984. - 751 с.
2. Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. - Л.: Гидрометеоиздат, 1989. - 376 с.
3. Кибель И.А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. - М.: Гостехиздат, 1957. - 375 с.

PARAMETRIZATION OF UNDERGRID EFFECTS IN EQUATIONS OF BUDGET FOR DIFFERENT KINDS OF ENERGY

Kivganov A.F. , Khokhlov V.N.

Summary: It has been carried out the detailed analysis of the undergrid effects in the equations of budget for differenr kinds of energy.